خدا
دانش
آگاهی

گروه انتشاراتی گاج

بیسترس
دوز ۴۰٪

سرشناسه: میکائیلی، جعفر
عنوان: بیسترس هندسه دوازدهم (دوز ۴۰٪)
مشخصات نشر: تهران، انتشارات کاگو
فروست: از مجموعه کتاب‌های مرجع کنکور کاگو
شابک: ۸-۵۳۳-۴۵۰-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپای مختصر
شماره کتابشناسی ملی: ۹۰۲۰۱۸۲

ناشر: گروه انتشاراتی کاگو
برندنشر: مرجع کنکور
گروه‌محصول: بیسترس
عنوان: بیسترس هندسه دوازدهم (دوز ۴۰٪)
مؤلف: جعفر میکائیلی
ناظر علمی تألیف: محمد مقصودی - الیاس سیفی
مسئول پروژه تألیف: پرستو منفرد
دستیار علمی تألیف: یاسمین میرزائی
ویراستاران علمی: زهرا انیشه - مینا جعفری - سمیه سید حیدری
ندا صالح‌پور - الهام جعفری

گروه‌تولیدفنی: الهه شمس - فاطمه آقایی‌پور - ساره اصغری
ویراستاران فنی: اشرف‌سادات سرکبیری - زهرا سرکاری
طراحی جلد: قاسم بیراوند
گرافیست متن: بهار قربانی
چاپخانه: واژه‌پرداز اندیشه
صحافی: واژه‌پرداز اندیشه
نوبت چاپ: اول
شمارگان: ۷۰۰
شابک: ۸-۵۳۳-۴۵۰-۶۰۰-۹۷۸
قیمت: ۱۱۰۰۰۰۰ ریال

این محصول معاف از مالیات می‌باشد.

فروشگاه: تهران، خیابان انقلاب، خیابان ۱۲فروردین، کوچه نوروز، پلاک ۳۸، ساختمان کاگو
تلفن: ۵۳۸۸۵-۰۲۱   پیامک: ۱۰۰۰۵۳۸۸۵   صندوق پستی: ۱۳۱۴۶۹۳۱۷۱
کاگو؛ توسعه و انتشار محتوای ناب   021-53885   KGOO.IR   KGOOPUB

مقدمه ناشر

مأموریت کاگو

افزایش سطح دسترسی به محتوای ناب، معتبر و ارزشمند از طریق روش‌های روزآمد و خلاقانهٔ توسعهٔ محتوا برای تجربهٔ متفاوت خواندن، مطالعه و یادگیری مخاطبان

دانش‌آموزان عزیز، معلمان و مشاوران دل‌سوز و صدالبته اساتید و دانشمندان آیندهٔ سرزمینمان!

نزدیک به سی سال است که کاگو، با تمرکز بر تألیف و انتشار کتاب‌های آموزشی، برای شما جویندگان و آموزندگان دانش در ایران می‌کوشد. اکنون، که افتخار این را داشته‌ایم که هم‌گام با مخاطبانمان رشد کنیم و بلوغی نسبی را تجربه کنیم، بر آن شده‌ایم اندوخته‌هایمان را در این زمینه برای ارائهٔ خدمتی تازه روی دایره بریزیم!

ما در این راه، نخست وظایف خود را در جایگاه ناشر بازخوانی کردیم و یقین یافتیم «مدیریت نشر» مهم‌ترین شاخصهٔ هر انتشاراتی‌ست و ساده‌انگارانه است اگر از مدیریت علمی و آکادمیک نشر چشم بپوشیم. از این‌رو برای کشف، خلق و توسعهٔ بهترین رویکردها و شیوه‌های مدیریتی از بهترین و دست اول‌ترین منابع و کارآزموده‌ترین اساتید و مشاوران بهره گرفتیم.

سپس مهم‌ترین رسالتمان را پیش چشم آوردیم: **«تولید محتوای ناب»!**

همه می‌دانیم مؤلفان کتاب‌های کمک‌درسی و ناشران آموزشی سال‌هاست کتاب‌هایشان را با ساختاری ساده، معطوف و برگرفته از کتاب‌های درسی، منتشر می‌کنند و خوش‌بینیم اگر تصور کنیم در این راه به محتوای تولیدی همکارانشان حداقل نیم‌نگاهی نداشته‌اند. ثابت بودن محتوای کمک‌درسی و سختی طراحی درسنامه‌ها و آزمون‌های متنوع از یک‌سو و ایجاد تغییرات ماهیتی در نحوهٔ ورود به دانشگاه‌ها از سویی دیگر، اخیراً کتاب‌های آموزشی را مهجور و بی‌جان کرده بود.

با همهٔ این اوصاف، تجربه نشان داد در دوران همه‌گیری کرونا و پس از آن، کتاب در دسترس‌ترین، ارزان‌ترین و سهل‌ترین ابزار آموزش و توسعهٔ دانش بوده و هست. از این رو، ما بر آن شدیم به سیاق دیگر ناشران کمک‌آموزشی عمل نکنیم و طرحی نو دراندازیم. بنابراین، محتوای تولیدی‌مان را بازتعریف کردیم و کوشیدیم این پادشاه بزرگ[1] را ناب بیافرینیم و آن را توسعه بخشیم. ما در این راه هر آن‌چه با تقلید از آثار و ایده‌های دیگران به رشتهٔ تحریر درآمد را محتوا ندانستیم، اما گاه نقطه‌ای سیاه بر صفحه‌ای سفید را بسیار غنی و سرشار از معنا یافتیم!

سال‌ها همراه با شما امتحانات و حتی گاه کنکورهای دشواری را از سرگذراندیم تا توانستیم «ناب‌بودن» را در جایگاه صفتی شایسته، در کنار ارزشمند بودن و اعتبار در مأموریت اصلی کاگو و به تَبَع آن در محتوای نشرمان بگنجانیم.

منظور ما از کلیدواژهٔ ناب، توسعهٔ دائمی جریان محتوای با ارزش، خالص و کمال‌یافته است و عبارتِ معتبر به انتخاب و پردازش محتوای درست و استاندارد اشاره می‌کند و کلیدواژهٔ ارزشمند به معنی کاربردی و ارزش‌آفرین بودن برای مخاطب است.

اکنون افتخار می‌کنیم که توشهٔ سالیانمان و حاصل رنج سی‌ساله‌مان را ناب، ارزشمند و معتبر در قالب محصولی نو برای شما به ارمغان آوردیم و برای به بار نشاندن این صعود، تجربهٔ گذشته و نوآوری را درکوله‌بارمان گذاشته‌ایم.

شعار فعلی ما این است که متخصص تولید محتوای ناب، معتبر و ارزشمند هستیم!

محمدرضا سالکی

مدیر مسئول سازمان انتشاراتی کاگو

۱- اشاره به عبارت مشهور "Content is the king"

ویژگی‌های کتاب

مفاهیم کلیدی (TBC)

تمام محتوای کلیدی طبقه‌بندی‌شده هر درس، منطبق با کتاب‌های درسی، در قالب فهرستی آورده شده است. هر TBC یک کد یکتا و سریالی در کتاب های دهم، یازدهم و دوازدهم دارد. محتوای کتاب حاضر براساس توالی این کدها آورده شده است. در بخش درسنامه و سوالات کتاب به صورت ۱۳۳ و در بخش پاسخنامه به صورت [ ] نشان داده شده است.

TBC پرتکرار

بسته به تکرار شدن یک TBC در امتحانات نهایی ۴ سال اخیر، TBC هایی با علامت (+۱۳۳) مشخص شده‌اند که دلالت بر اهمیت آن TBC در امتحانات نهایی دارد.

آزمون تشخیصی (ورودی)

برای هر فصل/درس، یک آزمون تشخیصی به عنوان ورودی فصل طراحی شده است. در آزمون تشخیصی به ازای هر TBC ، یک تا سه سوال طراحی شده است که کلیت TBC را پوشش می‌دهد. در این آزمون شماره هر سوال، با شماره TBC متناظر آن یکسان است. پاسخگویی صحیح به این سوالات نشان‌دهنده آشنایی با کلیات مفهومی مطالب آن TBC است.

علامت بلد بودم/نبودم

درمقابل هرسوال آزمون تشخیصی دو مستطیل (بلد بودم بلد نبودم) قرار داده شده است. شما می توانید وضعیت درستی پاسخگویی به هر سوال را علامت بزنید که بتوانید در زمان مطالعه صرفه‌جویی و نقاط ضعف خود را براساس tbc مشخص نمایید.

زمان مطالعه

برای درسنامه و تمرین های امتحانی و آزمون های هر بخش (با توجه به حجم دشواری آن بخش) "حداکثر" زمان مطالعه آورده شده است. همچنین بعد از مطالعه زمان فعالیت شما در مستطیل کناری ثبت می‌شود تا تفاوت حداکثر زمان قابل انجام و زمان خودتان را متوجه شوید.

بدفهمی رایج

اشکالات آموزشی پرتکرار و رایج برای دانش‌آموزان در کلاس درس، در قالب بدفهمی رایج در درسنامه ارائه شده‌اند.

سوالات ستاره‌دار

درکنار بعضی سوال ها علامت * وجود دارد. این علامت نشان‌دهنده اهمیت یا تکرار بیشتر در امتحانات نهایی اخیر است.

سوال های ویژه امتحان برای کنکور

در انتهای تمرین های هر فصل / درس سوالات تشریحی مفهومی تر و دشوارتر از امتحانات نهایی و تستی آورده شده است که دانش آموز تا حدودی با سوالات دشوارتر امتحانات نهایی پیش رو و سوالات کنکور آشنا شود.

جدول نشانگر TBC

در انتهای تمرین های امتحانی و سوال های ویژه امتحان، جدولی آورده شده است که نشانگر کدهای TBC مربوط به هر سوال است تا در صورت عدم پاسخگویی صحیح به هر سوال، به راحتی بتوانید شماره TBC مربوطه را بیابید.

جدول بودجه‌بندی امتحانات و پیام مشاوره

پیش از آغاز آزمون های دی و خرداد، جدول بودجه بندی آموزش و پرورش در امتحانات دی ، خرداد و شهریور به همراه پیام مشاوره‌ای برای نحوهٔ مطالعه و پاسخگویی به سؤالات امتحانات نهایی آورده شده است.

امتحانات دی و خرداد

در بخش آزمون ها ، ۲ آزمون دی ماه (نوبت اول) از مدارس معتبر و ۴ آزمون خرداد یا شهریور ماه (نوبت دوم) از آخرین امتحانات نهایی برگزار شده و کاملا در قالب امتحانات نهایی هر درس قرار داده شده است. دانش آموز از این طریق بیشتر و بهتر با سوالات امتحانات نهایی و شرایط برگه امتحان آشنامی شود.

فلش کارت

در انتهای کتاب، فلش کارتی قرار داده شده است که حاوی مهمترین و پرتکرارترین مطالب امتحان های نهایی است ، به گونه ای که دانش آموز بتواند ۴ تا ۵ ساعت پیش از امتحان کل کتاب را به خوبی مرور کند.

بوک استوری

در انتهای کتاب بخشی به صورت تصویری/ نموداری از کلیات مفاهیم TBC و در قالب ۴ صفحه چهاررنگ آورده شده است تا دانش آموز بتواند به راحتی مهم ترین مطالب کتاب را با صرف کمترین زمان ممکن، مرور کند.

کیوآرکد محتوای بیشتر

در فهرست و بوک استوری، کیوآرکدی جهت بارگذاری محتوا و آزمون هایی متناسب با آخرین تغییرات امتحانات نهایی و محتوای اضافه تر از کتاب قرار داده شده است که در طول سال به روز رسانی خواهد شد.

شماره ایندکس (جاانگشتی)

در لبه کتاب، جا انگشتی های چاپی قرار داده شده است که با آن ها کدهای tbc را سریع تر بیابید.

جدول ارزش محتوایی کتاب

این جدول برای اولین بار برای نمایش ارزش محتواهای داخل کتاب برای مخاطبان، معلمان و مشاوران طراحی و ارائه شده است. از این طریق مخاطب با حقایق محتوای ارائه شده مواجه شده و راحت تر برنامه ریزی می کند.

جدول حقایق ارزش محتوایی کتاب

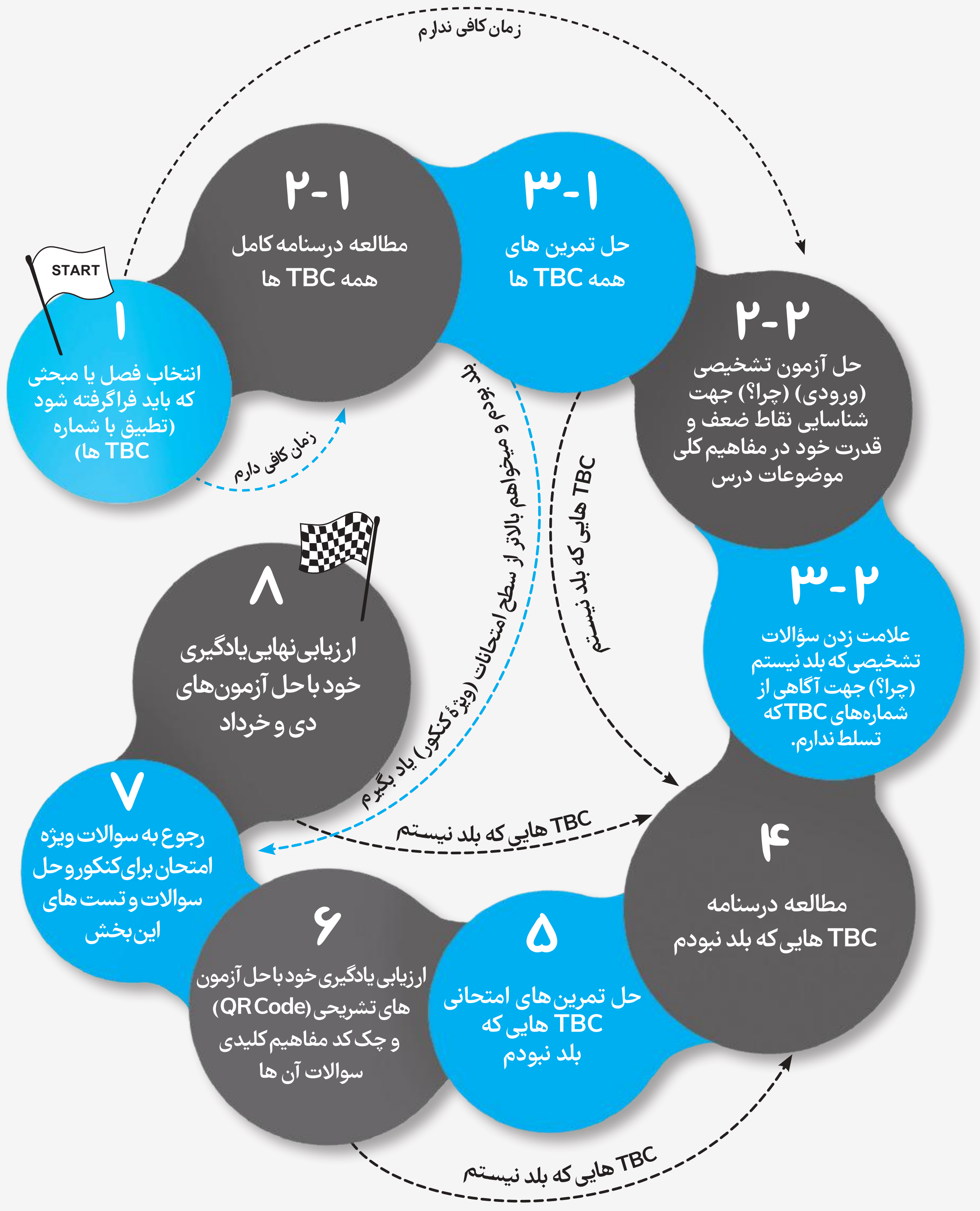
Content Facts

تعداد صفحه کتاب	۱۵۳
تعداد کل TBC ها	۲۵
تعداد TBC های پرتکرار	۱۶
تعداد کل سوالات	۴۱۵
تعداد سوالات امتحان نهایی	۲۰۰
تعداد تیپ سوالات پرتکرار	۷۶
کل زمان مورد نیاز برای مطالعه	۴۸ ساعت

یک دانش‌آموز متوسط باید چگونه باشد؟

تعداد ساعت مطالعه در هفته	۳
تعداد سؤال مورد نیاز در هفته	۱۵-۱۰

نحوه استفاده از کتاب



فهرست مطالب

فصل اول: ماتریس و کاربردها

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروط

فصل سوم: بردارها

فصل اول — ماتریس و کاربردها

پیام مشاوره‌ای

مبحث ماتریس‌ها از مباحث جدیدی است که امسال با آن آشنا می‌شوید. خوشبختانه این مبحث از مباحث روان و قابل فهم است که با یادگیری تعاریف، فرمول‌ها، روش‌های حل مسئله و دقت در محاسبات می‌توانید نمرهٔ کامل را از این مبحث به‌دست آورید.
لازم به ذکر است تمرین‌های زیر را مطالعه کنید:

- تمرین ۳، ۴ و ۵ صفحه ۲۰
- تمرین ۷، ۱۰ و ۱۱ صفحه ۲۱
- تمرین ۱، ۲، ۳ و ۴ صفحه ۳۰
- تمرین ۶، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ صفحه ۳۱

مفاهیم کلیدی

- ماتریس و کاربردها
  - درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
    - ۵۶ ماتریس و اعمال مقدماتی روی آن
    - ۵۷ ضرب ماتریس‌ها و ویژگی‌های آن
  - درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان
    - ۵۸ وارون ماتریس و ویژگی‌های آن
    - ۵۹ دترمینان و ویژگی‌های آن

آزمون تشخیصی مفاهیم کلیدی

بلدبودم — بلدنبودم

۵۶ اگر A یک ماتریس اسکالر با حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی ۲۷ و $B=[b_{ij}]_{3\times 3}$ و $b_{ij}=\begin{cases} j-i & i\geq j \\ i^2-2 & i<j \end{cases}$ باشد، حاصل $A+2B-I$ را به‌دست آورید.

۵۷.۱ از تساوی $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$، ماتریس A را به‌دست آورید.

۵۷.۲ از تساوی $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2x & 2 & -x \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}=0$، مقدار x را بیابید.

۵۷.۳ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7-A^4 را به‌دست آورید.

۵۸ الف) به‌ازای چه مقدار از m دستگاه معادلات $\begin{cases} x-2y=3 \\ mx+6y=-9 \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد؟

ب) دستگاه $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$ را به کمک ماتریس وارون حل کنید.

۵۹.۱ جواب‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ را به‌دست آورید.

۵۹.۲ اگر $3A=\begin{bmatrix} |A|-1 & 5 \\ -5 & |A| \end{bmatrix}$ در این‌صورت حاصل $\left||A|A^{-1}\right|$ را به‌دست آورید.

۵۹.۳ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $\frac{1}{3}A^2B^3$ را به‌دست آورید.

پاسخ

[۵۶] $A+۲B-I=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ -۲ & ۲ & ۴ \\ -۴ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ 　 [۵۷.۱] $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ 　 [۵۷.۲] $x=۴ \ ، \ x=-۳$

[۵۷.۳] $A^{۷}-A^{۴}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix}$ 　 [۵۸] الف) $m=-۳$ 　 ب) $\begin{cases} x=۵ \\ y=۱ \end{cases}$

[۵۹.۱] $x=۱ \ ، \ x=۲$ 　 [۵۹.۲] $\left| \, |A| A^{-۱} \right| = ۵$ 　 [۵۹.۳] $\left| \frac{۱}{۳} A^{۲}B^{۳} \right| = -\frac{۳۲}{۳}$

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

مفاهیم آموزشی [حداکثر زمان مطالعه: ۴۸۰ دقیقه] زمان شما:

۵۶ + ماتریس و اعمال مقدماتی روی آن

● ماتریس، نامگذاری و اجزای آن

ماتریس: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک ماتریس نامیده می‌شود. ماتریس‌ها را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم. مثلاً:

$$A=\begin{array}{c} \text{ستون اول} \quad \text{ستون دوم} \quad \text{ستون سوم} \\ \begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۷ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{سطر اول} \\ \leftarrow \text{سطر دوم} \end{array}$$

مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم A ماتریسی از مرتبهٔ m در n است. مثلاً ماتریس A در قسمت بالا دارای دو سطر و سه ستون است. پس می‌نویسیم $A_{۲\times۳}$ و می‌خوانیم A ماتریسی ۲ در ۳ است.

درایهٔ ماتریس: هر عدد حقیقی واقع در یک ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم. درایه‌ها را با حروف کوچک نشان می‌دهیم. برای مشخص‌کردن جایگاه هر درایه دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را نشان می‌دهد. پس a_{ij} یعنی درایهٔ روی سطر iاُم و ستون jاُم. مثلاً در ماتریس A در قسمت فوق $a_{۲۳}$ یعنی درایهٔ روی سطر دوم و ستون سوم که برابر ۷ است.

a_{ij}
جایگاه سطر 　 جایگاه ستون

نمایش ماتریس در حالت کلی: اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، برای اختصار آن را به‌صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نشان می‌دهیم. درایهٔ a_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس A می‌نامیم که $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ تغییر می‌کنند. این ماتریس را با درایه‌هایش به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \cdots a_{۱j} \cdots a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \cdots a_{۲j} \cdots a_{۲n} \\ \vdots & \\ a_{i۱} & a_{i۲} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \vdots & \\ a_{m۱} & a_{m۲} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

نکته در ماتریس $A_{m\times n}$، اگر $m=n=۱$، در این‌صورت ماتریس $A=\left[K\right]_{۱\times۱}$ برابر با عدد حقیقی K است.

سـوال اگر $A=\left[۲i+j^{۲}\right]_{۲\times۲}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسخ A یک ماتریس ۲×۲ است. پس به‌صورت $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ است. برای محاسبهٔ $a_{۱۱}$ در درایهٔ عمومی $a_{ij}=۲i+j^{۲}$، مقادیر $i=j=۱$ را جایگزین می‌کنیم. پس $a_{۱۱}=۲\times۱+۱^{۲}=۳$. به همین ترتیب برای بقیه درایه‌ها داریم:

$$\begin{cases} a_{۱۲} \xlongequal{i=۱,\, j=۲} ۲\times۱+۲^{۲}=۶ \\ a_{۲۱} \xlongequal{i=۲,\, j=۱} ۲\times۲+۱^{۲}=۵ \\ a_{۲۲} \xlongequal{i=۲,\, j=۲} ۲\times۲+۲^{۲}=۸ \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix}$$

سـؤال اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۲}$ به‌طوری‌که $a_{ij}=\begin{cases} ۷ & i=j \\ i+j & i>j \\ i^{۲}-j & i<j \end{cases}$ باشد، در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسـخ A یک ماتریس ۳×۲ است، پس به صورت زیر است:

$$A_{۳\times۲}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ درایهٔ $a_{۱۱}$ از آنجا که $i=j$، داریم $a_{۱۱}=۷$. برای محاسبهٔ درایهٔ $a_{۱۲}$ از آنجا که $i<j$، در رابطهٔ $i^{۲}-j$ مقادیر $i=۱$ و $j=۲$ را جایگزین می‌کنیم؛ پس $a_{۱۲}=۱^{۲}-۲=-۱$. برای محاسبهٔ درایه $a_{۲۱}$ از آنجا که $i>j$، در رابطهٔ $i+j$ مقادیر $i=۲$ و $j=۱$ را جایگزین می‌کنیم؛ پس $a_{۲۱}=۲+۱=۳$. به همین ترتیب بقیه درایه‌ها را هم به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix} a_{۳۱}\overset{i>j}{=\!=\!=}۳+۱=۴ \\ a_{۳۲}\overset{i>j}{=\!=\!=}۳+۲=۵ \end{matrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۷ & -۱ \\ ۳ & ۷ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

● انواع ماتریس

۱- ماتریس مربعی: اگر در ماتریسی، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، آن را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. در یک ماتریس مربعی درایه‌های $a_{۱۱}, a_{۲۲}, \dots, a_{nn}$ قطر اصلی را تشکیل می‌دهند. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۲}, B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۵ & -۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ & \sqrt{۵} \end{bmatrix}_{۳\times۳}, C=[۷]_{۱\times۱}$$

قطر فرعی قطر اصلی

۲- ماتریس قطری: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. البته درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۳- ماتریس اسکالر: ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن باهم برابر باشند. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس همانی: ماتریسی اسکالر است که همهٔ درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یک باشند. آن را با نماد I_n یا I نشان می‌دهیم. مثلاً:

$$I_{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, I_{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵- ماتریس سطری: ماتریسی است که فقط دارای یک سطر باشد. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۱\times۲}, B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}_{۱\times۳}$$

۶- ماتریس ستونی: ماتریسی است که فقط دارای یک ستون باشد. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}_{۲\times۱}, B=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \\ ۷ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

۷- ماتریس صفر: ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. آن را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. مثلاً:

$$\bar{O}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

سـؤال اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m+۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & n+۱ \\ n^{۲}-۱ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری باشد، مقدار $m+n$ را به‌دست آورید.

پاسـخ از آنجا که A یک ماتریس قطری است، همهٔ درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن باید برابر صفر باشند، پس داریم:

$$\left.\begin{cases} m+۲=۰\Rightarrow m=-۲ \\ n+۱=۰\Rightarrow n=-۱ \\ n^{۲}-۱=۰\Rightarrow n^{۲}=۱\Rightarrow n=\pm۱ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} n=-۱$$

بنابراین:

$$m+n=(-۲)+(-۱)=-۳$$

تساوی ماتریس‌ها

دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ را برابر می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر باهم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$\forall i,j\in\mathbb{N}, a_{ij}=b_{ij}\Leftrightarrow\left[a_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]$$

تمرین [صفحهٔ ۲۰] اگر $A=\begin{bmatrix}۲x-y & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $A=B$ در این‌صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

پاسخ

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix}۲x-y & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=-۲\\ \left.\begin{array}{l}۲x-y=۳\\ ۲x+y=۵\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}}۴x=۸\Rightarrow x=۲,y=۱\end{cases}\qquad\Rightarrow(x+y+z)=۲+۱-۲=۱$$

مجموع و تفاضل ماتریس‌ها

جمع و تفاضل دو ماتریس در صورتی تعریف می‌شود که هم‌مرتبه باشند. برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیربه‌نظیر باهم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل جمع یا تفاضل A و B، ماتریسی است که هم‌مرتبهٔ A و B است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n},B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}\Rightarrow A\pm B=\left[a_{ij}\right]\pm\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}\pm b_{ij}\right]_{m\times n}$$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳ & ۲\\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۴ & -۷\\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹\end{bmatrix}$ باشند، ماتریس‌های $A+B$ و $A-B$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$A+B=\begin{bmatrix}۲+۰ & -۱+۱ & ۳+۴ & ۲+(-۷)\\ \sqrt{۲}+۱ & ۵+۲ & -۱+۳ & ۴+(-۹)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۷ & -۵\\ \sqrt{۲}+۱ & ۷ & ۲ & -۵\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}۲-۰ & -۱-۱ & ۳-۴ & ۲-(-۷)\\ \sqrt{۲}-۱ & ۵-۲ & -۱-۳ & ۴-(-۹)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۲ & -۱ & ۹\\ \sqrt{۲}-۱ & ۳ & -۴ & ۱۳\end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس، آن عدد را در تمام درایه‌های آن ماتریس ضرب می‌کنیم. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n},r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=r\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}$$

مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۴ & ۳ & -۵\end{bmatrix}\Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix}۴ & -۲ & ۶\\ ۸ & ۶ & -۱۰\end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر A ماتریسی دلخواه باشد، قرینهٔ آن را با $(-A)$ نشان می‌دهیم که از ضرب (-۱) در ماتریس A به‌دست می‌آید. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۳ & ۵\\ ۳ & ۷ & -۹\end{bmatrix}\Rightarrow -A=\begin{bmatrix}-۲ & ۳ & -۵\\ -۳ & -۷ & ۹\end{bmatrix}$$

سؤال اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}i+j & i=j\\ i\times j & i<j\\ i-j & i>j\end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۳A-۲I$ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص می‌کنیم:

$$A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+۱ & ۱\times۲ & ۱\times۳\\ ۲-۱ & ۲+۲ & ۲\times۳\\ ۳-۱ & ۳-۲ & ۳+۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۴ & ۶\\ ۲ & ۱ & ۶\end{bmatrix}$$

در ادامه داریم:

$$۳A-۲I=۳\times\begin{bmatrix}۲ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۴ & ۶\\ ۲ & ۱ & ۶\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۶ & ۹\\ ۳ & ۱۲ & ۱۸\\ ۶ & ۳ & ۱۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۶ & ۹\\ ۳ & ۱۰ & ۱۸\\ ۶ & ۳ & ۱۶\end{bmatrix}$$

● خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A، B و C ماتریس‌هایی هم‌مرتبه و r و s اعدادی حقیقی باشند، آنگاه خواص زیر همگی برقرارند:

۱) $A+B=B+A$ خاصیت جابه‌جایی

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ خاصیت شرکت‌پذیری

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس‌ها

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ خاصیت عضو قرینه

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۷) $rA=rB, r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

۸) $A=B\Rightarrow rA=rB$

مثال [صفحهٔ ۱۶] اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ و $r\in\mathbb{R}$، در حالت کلی ثابت کنید: $r(A\pm B)=rA\pm rB$

پاسخ

$$r(A\pm B)=r\left(\left[a_{ij}\right]\pm\left[b_{ij}\right]\right)$$

$=r\left[a_{ij}\pm b_{ij}\right]$ تعریف جمع (تفاضل)

$=\left[r(a_{ij}\pm b_{ij})\right]$ تعریف ضرب عدد در ماتریس

$=\left[ra_{ij}\pm rb_{ij}\right]$ توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در $\mathbb{R}$

$=\left[ra_{ij}\right]\pm\left[rb_{ij}\right]$ تعریف جمع (تفاضل)

$=r\left[a_{ij}\right]\pm r\left[b_{ij}\right]$ تعریف ضرب عدد در ماتریس

$=rA\pm rB$

۵۷+ ضرب ماتریس‌ها و ویژگی‌های آن

● ضرب ماتریس‌های سطری در ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد، به‌طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند، در این‌صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایهٔ ماتریس A را در درایهٔ نظیرش در ماتریس B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را باهم جمع کنیم که در این‌صورت ماتریسی ۱×۱ یا عددی حقیقی حاصل می‌شود.

مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}a_۱ & a_۲ & a_۳ & \cdots & a_n\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}b_۱\\ b_۲\\ b_۳\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix} \Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}a_۱ & a_۲ & a_۳ & \cdots & a_n\end{bmatrix}_{۱\times n}\times\begin{bmatrix}b_۱\\ b_۲\\ b_۳\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}_{n\times ۱}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳+\cdots+a_nb_n$$

سؤال حاصل ضرب‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix}۲ & -۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۷\\ ۲\end{bmatrix}=$

ب) $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴\\ ۲\\ ۵\end{bmatrix}=$

ج) $\begin{bmatrix}۲ & -۳ & ۵ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳\\ -۱\\ ۲\\ -۳\end{bmatrix}_{۴\times ۱}=$

پاسخ

الف) $\begin{bmatrix}۲ & -۳\end{bmatrix}_{۱\times ۲}\times\begin{bmatrix}-۷\\ ۲\end{bmatrix}_{۲\times ۱}=۲\times(-۷)+(-۳)\times ۲=-۱۴-۶=-۲۰$

ب) $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}_{۱\times ۳}\times\begin{bmatrix}۴\\ ۲\\ ۵\end{bmatrix}_{۳\times ۱}=۱\times ۴+۲\times ۲+(-۳)\times ۵=۴+۴-۱۵=-۷$

ج) $\begin{bmatrix}۲ & -۳ & ۵ & ۴\end{bmatrix}_{۱\times ۴}\times\begin{bmatrix}۳\\ -۱\\ ۲\\ -۳\end{bmatrix}_{۴\times ۱}=۲\times ۳+(-۳)\times(-۱)+۵\times ۲+۴\times(-۳)=۶+۳+۱۰-۱۲=۷$

● ضرب ماتریس در ماتریس

برای ضرب دو ماتریس طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: بررسی امکان ضرب دو ماتریس

برای دو ماتریس A و B، حاصل $A \times B$ در صورتی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس A برابر تعداد سطرهای ماتریس B باشد:

$$A_{m\times p} \times B_{p\times n}$$

گام دوم: یافتن مرتبهٔ جواب

اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد، در این‌صورت $A \times B$ ماتریسی است مانند C از مرتبهٔ $m \times n$:

$$A_{m\times p} \times B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

سـؤال کدام‌یک از ضرب‌های زیر قابل تعریف است؟ در صورت تعریف، مرتبهٔ آن را بیابید.

الف) $A_{۳\times ۲} \times B_{۲\times ۵}$ ب) $A_{۲\times ۳} \times B_{۲\times ۴}$ ج) $A_{۵\times ۳} \times B_{۳\times ۷}$

پاسـخ الف) تعداد ستون‌های ماتریس A برابر ۲ و تعداد سطرهای ماتریس B نیز عدد ۲ است، پس $A \times B$ امکان‌پذیر است و داریم:

$$A_{۳\times ۲} \times B_{۲\times ۵} = C_{۳\times ۵}$$

ب) تعداد ستون‌های ماتریس A برابر ۳ و تعداد سطرهای ماتریس B برابر ۲ است. پس $A \times B$ امکان‌پذیر نیست.

ج) مشابه (الف) حاصل $A \times B$ تعریف می‌شود و داریم:

$$A_{۵\times ۳} \times B_{۳\times ۷} = C_{۵\times ۷}$$

گام سوم: محاسبهٔ درایه‌ها در ماتریس حاصل‌ضرب

اگر حاصل $A \times B$ ماتریسی مانند C باشد، در این‌صورت درایهٔ روی سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس C یعنی C_{ij} از ضرب سطر iاُم A در ستون jاُم B به‌دست می‌آید. یعنی:

$$C_{ij} = (\text{سطر } i\text{اُم } A) \times (\text{ستون } j\text{اُم } B)$$

سـؤال اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & -۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A \times B$ را محاسبه کنید.

پاسـخ از آنجا که A ماتریسی ۲×۳ و B ماتریسی ۳×۲ است، $A \times B$ امکان‌پذیر است و حاصل آن یک ماتریس ۲×۲ مانند C است:

$$A_{۲\times ۳} \times B_{۳\times ۲} = C_{۲\times ۲} = \begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} \end{bmatrix}$$

اکنون درایه‌های ماتریس C را محاسبه می‌کنیم:

$$c_{۱۱} = (\text{سطر اول } A) \times (\text{ستون اول } B) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۱ \times ۲ + ۲ \times (-۱) + (-۱) \times ۴ = ۲ - ۲ - ۴ = -۴$$

$$c_{۱۲} = (\text{سطر اول } A) \times (\text{ستون دوم } B) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۱ \times ۳ + ۲ \times ۲ + (-۱) \times ۵ = ۳ + ۴ - ۵ = ۲$$

$$c_{۲۱} = (\text{سطر دوم } A) \times (\text{ستون اول } B) = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۳ \times ۲ + ۲ \times (-۱) + ۱ \times ۴ = ۶ - ۲ + ۴ = ۸$$

$$c_{۲۲} = (\text{سطر دوم } A) \times (\text{ستون دوم } B) = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۳ \times ۳ + ۲ \times ۲ + ۱ \times ۵ = ۹ + ۴ + ۵ = ۱۸$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۸ & ۱۸ \end{bmatrix}$$

● **خلاصهٔ ضرب دو ماتریس**

برای محاسبهٔ $A \times B$ (در صورت امکان‌پذیر بودن)، سطرهای ماتریس A و ستون‌های ماتریس B را در نظر می‌گیریم. حال سطر اول ماتریس A را به ترتیب در ستون‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم تا سطر اول ماتریس حاصل‌ضرب به‌دست آید. در ادامه همین‌کار را برای سطرهای دیگر ماتریس A انجام می‌دهیم تا بقیهٔ سطرهای ماتریس حاصل‌ضرب نیز به‌دست آیند. مثلاً:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & -۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} (۱) & (۲) & (۳) \\ \left[\begin{matrix} ۱\times۱+۲\times۴ \\ ۳\times۱+(-۱)\times۴ \end{matrix}\right. & \begin{matrix} ۱\times(-۱)+۲\times(-۲) \\ ۳\times(-۱)+(-۱)\times(-۲) \end{matrix} & \left.\begin{matrix} ۱\times(-۳)+۲\times۱ \\ ۳\times(-۳)+(-۱)\times۱ \end{matrix}\right]_{۲\times۳} \\ (۴) & (۵) & (۶) \end{array} = \begin{bmatrix} ۹ & -۵ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱۰ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

سـؤال حاصل‌ضرب‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} =$

ب) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} =$

پاسـخ

الف)
$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۳\times۱+۱\times۲+۲\times۳ & ۳\times۲+۱\times۱+۲\times۲ & ۳\times(-۱)+۱\times۱+۲\times۰ \\ ۴\times۱+(-۱)\times۲+۱\times۳ & ۴\times۲+(-۱)\times۱+۱\times۲ & ۴\times(-۱)+(-۱)\times۱+۱\times۰ \\ ۱\times۱+۲\times۲+۲\times۳ & ۱\times۲+۲\times۱+۲\times۲ & ۱\times(-۱)+۲\times۱+۲\times۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۱ & -۲ \\ ۵ & ۹ & -۵ \\ ۱۱ & ۸ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

ب)
$$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}_{۱\times۳} = \begin{bmatrix} ۱\times۲ & ۱\times۳ & ۱\times۴ \\ -۱\times۲ & -۱\times۳ & -۱\times۴ \\ ۲\times۲ & ۲\times۳ & ۲\times۴ \end{bmatrix}_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

سـؤال اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

پاسـخ ابتدا ماتریس $A \times B$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ b & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ & -۴+۲a \\ ۲b-۲ & -b-a \end{bmatrix}$$

ماتریس $A \times B$ قطری است، پس همهٔ درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن باید برابر صفر باشد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} -۴+۲a=۰ \Rightarrow a=۲ \\ ۲b-۲=۰ \Rightarrow b=۱ \end{cases}$$

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱- در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد؛ یعنی:

$$A \times B \neq B \times A$$

۲- ماتریس واحد یا همانی مرتبهٔ $n\,(I_n)$، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ n است؛ یعنی:

$$A_{n\times n} \times I_n = I_n \times A_{n\times n} = A_{n\times n} \text{ یا } A \times I = I \times A = A$$

۳- ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع ماتریس‌ها، خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی دارد؛ یعنی:

$$A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$$

۴- ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد؛ یعنی:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

در تمامی موارد فوق اعمال جمع و ضرب ماتریس‌ها تعریف شده است.

سؤال در معادلهٔ ماتریسی $[x \quad ۲x \quad -۱]\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۱\\ ۴ & ۰ & -۲\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ x\\ -x\end{bmatrix}=۰$ مقدار x را به‌دست آورید.

پاسخ حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد؛ یعنی ABC را می‌توانیم به دو روش محاسبه کنیم:

روش اول: ابتدا AB را یافته، سپس حاصل AB را در C ضرب کنیم.

روش دوم: ابتدا BC را یافته، سپس A را در حاصل BC ضرب کنیم.

طبق روش اول داریم:

$$\overbrace{[x \quad ۲x \quad -۱]_{۱\times ۳}}^{A}\overbrace{\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۱\\ ۴ & ۰ & -۲\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}_{۳\times ۳}}^{B}\overbrace{\begin{bmatrix}۰\\ x\\ -x\end{bmatrix}_{۳\times ۱}}^{C}$$

$$A\times B=[۳x+۸x-۱ \quad -x+۰-۲ \quad x-۴x+۰]_{۱\times ۳}=\overbrace{[۱۱x-۱ \quad -x-۲ \quad -۳x]}^{D}$$

$$D\times C=\overbrace{[۱۱x-۱ \quad -x-۲ \quad -۳x]_{۱\times ۳}}^{D}\overbrace{\begin{bmatrix}۰\\ x\\ -x\end{bmatrix}_{۳\times ۱}}^{C}=[۰-x^{۲}-۲x+۳x^{۲}]_{۱\times ۱}=[۲x^{۲}-۲x]$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}-۲x=۰\Rightarrow ۲x(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰, x=۱$$

بدفهمی رایج در سال‌های گذشته آموختیم اگر حاصل‌ضرب دو عبارت جبری برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها برابر صفر است. گاهی دانش‌آموزان ضرب دو ماتریس را مانند ضرب عبارت‌های جبری در نظر می‌گیرند و اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B برابر صفر شود، حداقل یکی از دو ماتریس A و B را برابر صفر در نظر می‌گیرند، در حالی که اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B برابر صفر شود، ممکن است هیچ‌کدام از دو ماتریس صفر نباشد.

مثال درستی یا نادرستی گزارهٔ «اگر برای دو ماتریس A و B داشته باشیم $A\times B=\bar{O}$ ، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$ » را مشخص کنید.

راه حل نادرست: درست است. از آنجا که ضرب دو ماتریس برابر صفر شده، حداقل یکی از دو ماتریس برابر صفر است.

راه حل درست: نادرست است. یعنی ممکن است $A\times B=\bar{O}$ ولی $A\neq\bar{O}$ و $B\neq\bar{O}$ باشد. مانند:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۲\\ ۳ & ۰ & ۳\end{bmatrix}_{۲\times ۳}\times\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times ۳}=\bar{O}$$

بدفهمی رایج گاهی دانش‌آموزان قوانین ضرب عددها را به ضرب ماتریس‌ها تعمیم می‌دهند. مثلاً در مورد عددهای حقیقی غیرصفر می‌دانیم اگر $ab=ac$ ، آنگاه $b=c$. در نتیجه دانش‌آموزان به اشتباه چنین استنباط می‌کنند که اگر برای ماتریسی غیرصفر داشته باشیم، $AB=AC$ ، آنگاه $B=C$ که این نتیجه‌گیری نادرست است و ممکن است $B\neq C$ باشد.

مثال درستی یا نادرستی گزارهٔ «در ضرب ماتریس‌ها اگر $AB=AC$ ، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $B=C$ » را مشخص کنید.

راه حل نادرست: درست است. ماتریس A را از طرفین تساوی حذف می‌کنیم، پس داریم $B=C$.

راه حل درست: نادرست است. یعنی ممکن است $AB=AC$ ، ولی $B\neq C$ باشد. مانند:

$$A\times C=\overbrace{\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}}^{A}\overbrace{\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}}^{C}=\begin{bmatrix}۶ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix} \qquad A\times B=\overbrace{\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}}^{A}\overbrace{\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}}^{B}=\begin{bmatrix}۶ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

- **ماتریس‌های تعویض‌پذیر**

ماتریس‌های مربع و هم‌مرتبهٔ A و B را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه $A\times B=B\times A$.

سؤال اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱ & a\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}b & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

پاسخ

$$A\times B=B\times A\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & a\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & a\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}b+۲a & ۳-a\\ -b+۴ & -۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b-۳ & ab+۶\\ ۳ & ۲a-۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-b+۴=۳\\ ۲a-۲=-۵\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}, b=۱$$

توان‌های طبیعی ماتریس

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه توان‌های طبیعی A به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^{۱} = A, A^{۲} = A \times A, A^{۳} = A \times A^{۲}, \ldots, A^{n} = A \times A^{n-۱}$$

محاسبهٔ توان‌های کوچک یک ماتریس $(n < ۵)$: اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه:

$$A^{۲} = A \times A, A^{۳} = A \times A^{۲}, A^{۴} = A^{۲} \times A^{۲}$$

سوال اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A^{۲} = \alpha A + \beta I$ باشد، مقادیر α و β را بیابید.

پاسخ

$$A^{۲} = \alpha A + \beta I \Rightarrow A \times A = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha + \beta & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ -۲\alpha + \beta = ۹ \Rightarrow -۴ + \beta = ۹ \Rightarrow \beta = ۱۳ \end{cases}$$

سوال اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۴}$ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را می‌یابیم:

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس $A^{۴}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{۴} = A^{۲} \times A^{۲} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I_{۳}$$

پس ماتریس $A^{۴}$ یک ماتریس واحد یا همانی است.

بررسی اتحادهای جبری در ماتریس‌ها

الف) اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، از آنجا که $AB \neq BA$، اتحادهای جبری در مورد آنها برقرار نیست. به‌عنوان مثال داریم:

۱) $(A+B)^{۲} = (A+B)(A+B) = A^{۲} + AB + BA + B^{۲} \neq A^{۲} + ۲AB + B^{۲}$

۲) $(A-B)^{۲} = (A-B)(A-B) = A^{۲} - AB - BA + B^{۲} \neq A^{۲} - ۲AB + B^{۲}$

۳) $(A-B)(A+B) = A^{۲} + AB - BA - B^{۲} \neq A^{۲} - B^{۲}$

۴) $(AB)^{۲} = (AB)(AB) \neq A^{۲}B^{۲}$

سوال اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & -۲ \\ ۵ & -۲ & ۳ \\ -۷ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & ۲ \\ -۵ & ۴ & -۳ \\ ۷ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۲} + B^{۲} + AB + BA$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$A^{۲} + B^{۲} + AB + BA = (A+B)^{۲}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & -۲ \\ ۵ & -۲ & ۳ \\ -۷ & ۱ & -۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & ۲ \\ -۵ & ۴ & -۳ \\ ۷ & -۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = ۲I \Rightarrow (A+B)^{۲} = (۲I)^{۲} = ۴I$$

نکته اگر I ماتریسی همانی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه $I^{n} = I$.

ب) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه و تعویض‌پذیر باشند $AB=BA(*)$، آنگاه اتحادهای جبری برای آنها برقرار است.

$۱)\ (A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲ \qquad ۲)\ (A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

اثبات:

$$۱)\ (A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲\overset{(*)}{=}A^۲+AB+AB+B^۲=A^۲+۲AB+B^۲$$

$$۲)\ (A-B)(A+B)=A^۲+AB-BA-B^۲\overset{(*)}{=}A^۲+AB-AB-B^۲=A^۲-B^۲$$

ج) اگر A یک ماتریس مربعی باشد، از آنجا که $AI=IA$، تمام اتحادهای جبری برای ماتریس‌های A و I برقرار است. مثلاً:

$۱)\ (A\pm I)^۲=A^۲\pm ۲A+I \qquad ۲)\ (A+I)(A-I)=A^۲-I \qquad ۳)\ (A+I)(A^۲-A+I)=A^۳+I$

سوال اگر $(A-I)^۲=\bar{O}$ و داشته باشیم $A^۳=\alpha A+\beta I$، مقادیر α و β را به‌دست آورید.

پاسخ برای محاسبهٔ $A^۳$ کافی است $A^۲$ را یافته و سپس در A ضرب کنیم.

از آنجا که $AI=IA$ با استفاده از اتحادها داریم:

$$(A-I)^۲=\bar{O}\Rightarrow A^۲-۲A+I=\bar{O}\Rightarrow A^۲=۲A-I\quad(*)$$

حال طرفین این رابطه را در ماتریس A ضرب می‌کنیم. پس داریم:

$$A\times A^۲=A\times(۲A-I)\Rightarrow A^۳=۲A^۲-A\xrightarrow{(*)}A^۳=۲(۲A-I)-A\Rightarrow A^۳=۴A-۲I-A=۳A-۲I$$

$$\left.\begin{array}{l}A^۳=۳A-۲I\\ \text{فرض}:\ A^۳=\alpha A+\beta I\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=۳,\beta=-۲$$

● محاسبهٔ توان‌های بزرگ یک ماتریس $(n>۴)$

برای یافتن توان‌های بزرگ یک ماتریس مانند A، معمولاً ماتریس $A^۲$ (و در صورت لزوم $A^۳$) را می‌یابیم تا الگویی برای محاسبهٔ A^n به‌دست آید.

سوال اگر $A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۱۳}$ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

$$\Rightarrow A^۲=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۶}}(A^۲)^۶=(I)^۶\Rightarrow A^{۱۲}=I\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در A}}A^{۱۳}=A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۲\end{bmatrix}$$

سوال اگر $A=\begin{bmatrix}۱&-\sqrt{۳}\\\sqrt{۳}&۱\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $A^{۱۰}$ را بیابید.

پاسخ ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&-\sqrt{۳}\\\sqrt{۳}&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-\sqrt{۳}\\\sqrt{۳}&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&-۲\sqrt{۳}\\۲\sqrt{۳}&-۲\end{bmatrix}$$

از ماتریس $A^۲$ نمی‌توانیم الگویی به‌دست آوریم، پس ماتریس $A^۳$ را نیز می‌یابیم:

$$A^۳=A\times A^۲=\begin{bmatrix}۱&-\sqrt{۳}\\\sqrt{۳}&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲&-۲\sqrt{۳}\\۲\sqrt{۳}&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸&۰\\۰&-۸\end{bmatrix}=-۸\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۳=-۸I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}}(A^۳)^۳=(-۸I)^۳$$

$$A^۹=(-۸)^۳I\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در A}}A^{۱۰}=-۵۱۲A=-۵۱۲\begin{bmatrix}۱&-\sqrt{۳}\\\sqrt{۳}&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵۱۲&۵۱۲\sqrt{۳}\\-۵۱۲\sqrt{۳}&-۵۱۲\end{bmatrix}$$

سوال اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس A^9 را بیابید.

پاسخ ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&2\\0&0&0\\2&2&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=2A\quad(1)$$

برای یافتن الگوی مناسب A^3 را نیز می‌یابیم:

$$A^2=2A\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A}A^3=2A^2\overset{(1)}{=}2(2A)=2^2A\quad(2)$$

با مقایسهٔ ماتریس A^2 و A^3 و به کمک استقراء ریاضی داریم:

$$\begin{cases}A^2=2^1A & (1)\\ A^3=2^2A & (2)\\ \vdots\\ A^9=2^8A=2^8\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^8&2^8&2^8\\0&0&0\\2^8&2^8&2^8\end{bmatrix}\end{cases}$$

سوال اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه A^{1401} را بیابید.

پاسخ ماتریس‌های A^2 و A^3 را می‌یابیم:

$$A^{1}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$A^{2}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$A^{3}=A\times A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3\\3&-2\end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ ماتریس‌های A، A^2 و A^3 و به کمک استقراء ریاضی نتیجه می‌گیریم که درایه سطر اول و ستون اول یک واحد از توان بیشتر است.
درایه سطر اول و ستون دوم قرینهٔ توان و ...... هستند. پس:

$$A^n=\begin{bmatrix}n+1&-n\\n&-n+1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{1401}=\begin{bmatrix}1402&-1401\\1401&-1400\end{bmatrix}$$

نکته برای به توان رساندن یک ماتریس قطری، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم. مثلاً:

$$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$$

تمرین‌های امتحانی

الف) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

درست | نادرست

۱. ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی است. *[نهایی - دی ۹۹]* ▢ ▢

* ۲. اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA=rB$ آنگاه داریم: $A=B$. ▢ ▢
[نهایی - خارج ۹۹/ ۲ بار تکرار]

۳. اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم $AB=AC$، آنگاه لزوماً $B=C$ است. *[نهایی - دی ۹۹]* ▢ ▢

* ۴. اگر A و B دو ماتریس 3×3 و $A\times B=\bar{O}$، آنگاه $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$. *[خارج ۹۹ (اندکی تغییر)/ ۲ بار تکرار]* ▢ ▢

ب) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

* ۵. ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس .... نامیده می‌شود. [نهایی – شهریور ۳/۱۴۰۰ با تکرار]

۶. اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن باهم برابر باشند، آن را یک ماتریس .... می‌نامیم. [نهایی – دی ۹۷]

* ۷. اگر $A=\begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ -۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ به‌طوری که $AB=C$ ، آنگاه درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم از ماتریس C مساوی .... است. [نهایی – خارج ۳/۹۹ بار تکرار]

۸. اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و .... باشند آنگاه عبارت $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ همواره برقرار است. [نهایی – شهریور ۱/۱۴۰۰ اندکی تغییر]

ج) گزینه درست را با علامت ✓ مشخص کنید.

۹. ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۲ & i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۴A$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول $A^۳$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۴ & -۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۴ & ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۴ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۴ & -۴ & -۲ \end{bmatrix}$

د) به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱۱. اگر $A=\left[a_{ij}\right]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i+۲j & i=j \\ i-j & i>j \\ i\times j & i<j \end{cases}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

* ۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این‌صورت حاصل $x+۲y+۳z$ را به‌دست آورید. [نهایی – دی ۳/۱۴۰۰ بار تکرار]

* ۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -۱ & n \\ ۰ & m \end{bmatrix}$ و $۲A+B=I$ ، $m+n$ کدام است؟ [نهایی – خارج ۴/۹۸ بار تکرار]

۱۴. اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ، $r,s\in\mathbb{R}$ باشد، در حالت کلی ثابت کنید: $(r+s)A=rA+sA$

۱۵. اگر $A_{۲\times۲}$ و $B_{۲\times۳}$ به‌صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad , \quad b_{ij}=\begin{cases} i^۲+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

* ۱۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد. [شهریور ۳/۱۴۰۰ بار تکرار]

۱۷. از تساوی $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس A را بیابید.

* ۱۸. معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}=\bar{O}$ را حل کنید. [نهایی – دی ۲/۹۹ بار تکرار]

۱۹. معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}=۰$ را حل کنید.

۲۰. اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، حاصل $\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید. [ملایر – مدرسه محمد ملایری – دی ۱۴۰۰]

مفاهیم کلیدی ۵۹

۲۱. اگر $A=\begin{bmatrix}0&4\\2&1\end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطهٔ $A^2=mA+nI_2$ برقرار باشد. (I_2 ماتریس همانی است). [نهایی - شهریور ۹۹]

۲۲. اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\2&1&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a+b&2&2\\2&2&-1\\2&-1&4a+b\end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^2-B=\bar{O}$
($\bar{O}$ ماتریس صفر است.) [نهایی - دی ۹۸]

۲۳. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند و $AB+BA=\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^2+B^2 را بیابید.

۲۴. اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند و بین این دو ماتریس رابطهٔ $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ برقرار باشد، نشان دهید این دو ماتریس تعویض‌پذیرند.

۲۵. اگر $(A+I)^2=\bar{O}$ و داشته باشیم $A^4=mA+nI$، مقادیر m و n را بیابید.

۲۶. اگر $A=\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}$، ماتریس A^7 را به‌دست آورید. [نهایی - دی ۹۸]

۲۷. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}-1 & i+j=4\\0 & i+j\neq4\end{cases}$ باشند، آنگاه ماتریس A^{33} را به‌دست آورید.

۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس A^9 را به‌دست آورید.

۲۹. اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$، آنگاه ماتریس A^8-A^7 را به‌دست آورید.

۳۰. اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، به‌طوری‌که $AB=A$ و $BA=B$ حاصل A^n+B^n را به‌دست آورید.

* ۳۱. اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&\sqrt{2}\\0&-1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3&2&-1\\5&1&0\\0&\sqrt{8}&\sqrt{2}\end{bmatrix}$، ابتدا A^4 و $A\times B$ را با درایه‌هایشان مشخص کرده و سپس $A^4-A\times B$ را به‌دست آورید. [نهایی - خارج ۹۸ / ۱ بار تکرار]

سؤال تمرین	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
کد مفاهیم کلیدی	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۶	۵۶	۵۷	۵۷	۵۷	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶	۵۶ ۵۷	۵۶ ۵۷

سؤال تمرین	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱
کد مفاهیم کلیدی	۵۶ ۵۷	۵۷	۵۷	۵۶ ۵۷	۵۶ ۵۷	۵۶ ۵۷	۵۶ ۵۷	۵۶ ۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۵۶ ۵۷	۵۶ ۵۷	۵۶ ۵۷

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

مفاهیم آموزشی [حداکثر زمان مطالعه: ۷۲۰ دقیقه] زمان شما:

۵۹ دترمینان و ویژگی‌های آن

• تعریف دترمینان

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد ($1\le n\le 3$)، در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و برای ماتریس‌هایی با مرتبه‌های مختلف به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

دترمینان ماتریس‌های 1×1:

$$A=[k]_{1\times1}\Rightarrow |A|=k$$

دترمینان ماتریس‌های 2×2:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\underbrace{ad}_{\text{حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی}}-\underbrace{bc}_{\text{حاصل‌ضرب درایه‌های قطر فرعی}}$$

سـوال دترمینان ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

پاسـخ الف)

$$|A|=\begin{vmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}=(-۲)\times ۵-(۳\times ۴)=-۱۰-۱۲=-۲۲$$

ب)

$$|B|=\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}=\sin\alpha\times\sin\alpha-\cos\alpha\times(-\cos\alpha)=\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$$

سـوال اگر $A=\begin{bmatrix} |A|-۱ & ۱ \\ ۳ & |A| \end{bmatrix}$، در این صورت $|A|$ را به‌دست آورید.

پاسـخ از طرفین فرض، دترمینان می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} |A|-۱ & ۱ \\ ۳ & |A| \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(|A|-۱)\times|A|-(۳\times ۱)$$

$$\Rightarrow |A|=|A|^{۲}-|A|-۳\Rightarrow |A|^{۲}-۲|A|-۳=۰\Rightarrow (|A|-۳)(|A|+۱)=۰\Rightarrow |A|=۳ \text{ یا } |A|=-۱$$

● دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

روش اول: بسط دترمینان

برای هر ماتریس ۳×۳ می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستون دلخواه به‌دست آورد که حاصل در همهٔ حالت‌ها یکسان خواهد بود. به‌عنوان مثال دترمینان ماتریس A را یک بار برحسب سطر اول و یک بار برحسب سطر دوم به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

محاسبهٔ $|A|$ برحسب سطر اول:

$$|A|=a_{۱۱}\times(-۱)^{۱+۱}\overbrace{\begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}}^{\text{دترمینان حاصل از حذف سطر ۱ و ستون ۱ ماتریس A}}+a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\overbrace{\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}}^{\text{دترمینان حاصل از حذف سطر ۱ و ستون ۲ ماتریس A}}+a_{۱۳}\times(-۱)^{۱+۳}\overbrace{\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{vmatrix}}^{\text{دترمینان حاصل از حذف سطر ۱ و ستون ۳ ماتریس A}}$$

محاسبهٔ $|A|$ برحسب ستون دوم:

$$|A|=a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\overbrace{\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}}^{\text{دترمینان حاصل از حذف سطر ۱ و ستون ۲ ماتریس A}}+a_{۲۲}\times(-۱)^{۲+۲}\overbrace{\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}}^{\text{دترمینان حاصل از حذف سطر ۲ و ستون ۲ ماتریس A}}+a_{۳۲}\times(-۱)^{۳+۲}\overbrace{\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۳} \end{vmatrix}}^{\text{دترمینان حاصل از حذف سطر ۳ و ستون ۲ ماتریس A}}$$

توجه برای محاسبهٔ راحت‌تر دترمینان یک ماتریس، رابطه را برحسب سطر یا ستونی می‌نویسیم که بیشترین تعداد صفر را دارد.

سـوال دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را بر حسب یک سطر یا یک ستون دلخواه به‌دست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

پاسـخ الف) دترمینان A را برحسب سطر اول محاسبه می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{۳ \quad ۱ \quad ۲} \\ ۱ \quad ۲ \quad -۱ \\ ۲ \quad -۱ \quad ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A|=۳\times(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}+۱\times(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}+۲\times(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$=۳\times۱\times(۲-۱)+۱\times(-۱)\times(۱+۲)+۲\times۱\times(-۱-۴)=۳-۳-۱۰=-۱۰$$

ب) چون در سطر دوم یک صفر و در ستون سوم نیز یک صفر وجود دارد، می‌توانیم دترمینان B را برحسب سطر دوم یا ستون سوم بنویسیم. برحسب ستون سوم داریم:

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & \boxed{۱} \\ ۲ & -۲ & \boxed{۰} \\ ۳ & ۱ & \boxed{۵} \end{bmatrix}$$

$$|B|=۱\times(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}+۰+۵\times(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۲ \end{vmatrix}=۱\times۱\times(۲+۶)+۰+۵\times۱\times(-۲-۴)=۸+۰-۳۰=-۲۲$$

سؤال ریشه‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} x & ۰ & ۱ \\ ۱ & x+۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & x+۲ \end{vmatrix}=۰$ را به‌دست آورید.

پاسخ چون در ستون دوم دو صفر وجود دارد، دترمینان را برحسب ستون دوم می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} x & \boxed{۰} & ۱ \\ ۱ & \boxed{x+۱} & ۰ \\ ۳ & \boxed{۰} & x+۲ \end{vmatrix}=۰\Rightarrow ۰+(x+۱)\times(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} x & ۱ \\ ۳ & x+۲ \end{vmatrix}+۰=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x^۲+۲x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases} x+۱=۰\Rightarrow x=-۱ \\ x^۲+۲x-۳=۰\Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=-۳ \end{cases}$$

روش دوم: دستور ساروس

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶)

درایه‌های روی خط ۱ (قطر اصلی) را در هم ضرب کرده و این کار را برای خط ۲ و ۳ نیز انجام می‌دهیم. سپس سه‌عدد به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. در ادامه همین اعمال را برای خطوط ۴ (قطر فرعی)، ۵ و ۶ تکرار کرده و مجموع آنها را می‌یابیم. دترمینان A برابر است با:

$$|A|=(\overset{①}{aei}+\overset{②}{bfg}+\overset{③}{cdh})-(\overset{④}{ceg}+\overset{⑤}{afh}+\overset{⑥}{bdi})$$

نکته روش ساروس فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است.

سؤال دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را با استفاده از دستور ساروس به‌دست آورید.

پاسخ

$$\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۳ & ۴ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ & ۱ & -۱ & -۲ \end{array}$$

$$|A|=(۲\times۲\times۱+۳\times۳\times(-۱)+۴\times۱\times(-۲))-(۴\times۲\times(-۱)+۲\times۳\times(-۲)+۳\times۱\times۱)$$
$$=(۴-۹-۸)-(-۸-۱۲+۳)=-۱۳-(-۱۷)=-۱۳+۱۷=۴$$

● برخی از ویژگی‌های دترمینان

۱- دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن.

$$A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=abc$$

مثال [صفحه ۳۰] اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر و $a_{۱۱}=۴$ باشد، در این صورت $|A|$ را بیابید.

پاسخ ماتریس اسکالر، ماتریسی است قطری که همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند. از آنجا که $a_{۱۱}=۴$، داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۴\times۴\times۴=۶۴$$

۲- اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، آنگاه:

$|AB|=|A||B|$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱&۱\\-۲&۱&۲\\۲&-۳&۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰&۰&۳\\۰&۲&۰\\-۲&۰&۰\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|AB|$ را به‌دست آورید.

پاسخ دترمینان ماتریس A را به کمک دستور ساروس می‌یابیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}۱&۱&۲&۱&۱\\۲&۱&-۲&۲&۱\\۱&-۳&۲&۱&-۳\end{array}\right| \quad |A|=(۲-۲-۱۲)-(۲+۶+۴)=-۱۲-۱۲=-۲۴$$

از طرفی B یک ماتریس قطری است و داریم:

$$B=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۰&۲&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=۳\times۲\times(-۲)=-۱۲$$

در ادامه داریم:

$$|AB|=|A||B|=(-۲۴)\times(-۱۲)=۲۸۸$$

۳- اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه:

$|A^n|=|A|^n$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۳&۱\\۲&-۱&۲\\-۱&۲&-۲\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^۳|$ را بیابید.

پاسخ دترمینان ماتریس A را به کمک دستور ساروس می‌یابیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}۱&۳&۱&۱&۳\\۲&-۱&۲&۲&-۱\\-۱&۲&-۲&-۱&۲\end{array}\right|\Rightarrow|A|=(۲-۶+۴)-(۱+۴-۱۲)=۰+۷=۷$$

در ادامه داریم:

$$|A^۳|=|A|^۳=۷^۳=۳۴۳$$

۴- اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n و k یک عدد حقیقی باشد، آنگاه:

$|kA|\xlongequal{A_{n\times n}}k^n|A|$

مثلاً:

$$\begin{cases}|kA|\xlongequal{A_{۲\times۲}}k^۲|A|\\|kA|\xlongequal{A_{۳\times۳}}k^۳|A|\end{cases}$$

سؤال اگر A ماتریسی ۳×۳ و $|A|=-۴$ باشد، در این صورت حاصل $|۲A|$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$|۲A|\xlongequal{A_{۳\times۳}}۲^۳|A|=۸|A|=۸\times(-۴)=-۳۲$$

سؤال اگر A ماتریسی ۳×۳ و $|A|=۵$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

پاسخ

$$|\overbrace{|A|}^{۵}A|=|۵A|\xlongequal{A_{۳\times۳}}۵^۳|A|=۵^۳\times۵=۵^۴=۶۲۵$$

سؤال اگر $A=\begin{bmatrix}۱&-۱&۱\\۲&۱&۳\\-۲&۴&۰\end{bmatrix}$، آنگاه حاصل $|-\frac{۱}{۲}A^۴|$ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا دترمینان ماتریس A را به کمک دستور ساروس می‌یابیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}۱&-۱&۱&۱&-۱\\۲&۱&۳&۲&۱\\-۲&۴&۰&-۲&۴\end{array}\right|\Rightarrow|A|=(۰+۶+۸)-(-۲+۱۲+۰)=۱۴-۱۰=۴$$

در ادامه داریم:

$$|-\frac{۱}{۲}A^۴|\xlongequal{A_{۳\times۳}}(-\frac{۱}{۲})^۳|A|^۴=-\frac{۱}{۸}\times۴^۴=-۳۲$$

تمرین [صفحه ۳۰] اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}$ در این صورت $|BA|$ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا ماتریس $B\times A$ را می‌یابیم:

$$B\times A=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}_{۳\times۱}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}_{۱\times۳}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴ & ۶\\-۱ & -۲ & ۳\\۳ & ۶ & -۹\end{bmatrix}$$

حال به کمک دستور ساروس $|BA|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}-۲ & -۴ & ۶ & -۲ & -۴\\-۱ & -۲ & ۳ & -۱ & -۲\\۳ & ۶ & -۹ & ۳ & ۶\end{array}\right.\Rightarrow|BA|=(-۳۶-۳۶-۳۶)-(-۳۶-۳۶-۳۶)=۰$$

۵۸ وارون ماتریس و ویژگی‌های آن

- **وارون یک ماتریس**

برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است مانند B به‌طوری که $A\times B=B\times A=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$A\times A^{-۱}=A^{-۱}\times A=I$$

مثال [صفحه ۲۲] نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\۲ & -۷\end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\۲ & ۱\end{bmatrix}$ است.

پاسخ با توجه به تعریف ماتریس وارون کافی است نشان دهیم $AB=BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\۲ & -۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\۲ & -۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۴\\۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

- **وارون ماتریس‌های ۲ × ۲**

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی $A^{-۱}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$$

طبق این رابطه برای محاسبهٔ $A^{-۱}$ کافی است در ماتریس A، درایه‌های قطر اصلی را جابه‌جا و درایه‌های قطر فرعی را قرینه کرده و درایه‌های ماتریس حاصل را بر $|A|$ تقسیم کنیم.

- **بررسی وارون‌پذیری یک ماتریس**

شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد ($A^{-۱}$ وجود داشته باشد)، آن است که دترمینان A مخالف صفر باشد؛ یعنی $|A|\neq ۰$.

مثال [صفحه ۲۳] وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱۰ & ۲\\۴ & ۱\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا دترمینان A را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}۱۰ & ۲\\۴ & ۱\end{vmatrix}=۱۰-۸=۲$$

چون $|A|\neq ۰$ پس A وارون‌پذیر است و داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\-۴ & ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\-۲ & ۵\end{bmatrix}$$

سوال اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $۲A^{-۱}-۳B^{-۱}$ را بیابید.

پاسخ

$$|A|=\begin{vmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۲\end{vmatrix}=۸-۶=۲\quad,\quad |B|=\begin{vmatrix}۱ & -۳\\ -۲ & ۳\end{vmatrix}=۳-۶=-۳$$

چون $|A|\neq ۰$ و $|B|\neq ۰$ پس A و B هر دو وارون‌پذیرند و داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\quad,\quad B^{-۱}=\frac{۱}{-۳}\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$۲A^{-۱}-۳B^{-۱}=۲\times\frac{۱}{۲}\times\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}-۳\times(\frac{۱}{-۳})\times\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

سوال مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}m-۲ & ۲\\ -۱ & ۲m+۱\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

پاسخ چون ماتریس A وارون‌پذیر نیست؛ پس دترمینان آن برابر صفر است و داریم:

$$\begin{vmatrix}m-۲ & ۲\\ -۱ & ۲m+۱\end{vmatrix}=۰\Rightarrow (m-۲)(۲m+۱)-۲\times(-۱)=۰\Rightarrow ۲m^۲+m-۴m-۲+۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-۳m=۰\Rightarrow m(۲m-۳)=۰\Rightarrow m=۰\ ,\ m=\frac{۳}{۲}$$

● **یکتایی وارون ماتریس**

وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

اثبات: فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند، ثابت می‌کنیم $B=C$.

طبق فرض B وارون A است. پس داریم: $AB=BA=I$

طبق فرض، C نیز وارون A است. پس داریم: $AC=CA=I$

حال ثابت می‌کنیم $B=C$. $B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$

● **ویژگی‌های ماتریس وارون**

۱) وارون وارون هر ماتریس برابر خود آن ماتریس است. یعنی: $(A^{-۱})^{-۱}=A$

۲) دترمینان وارون یک ماتریس برابر است با عکس دترمینان آن ماتریس؛ یعنی: $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$

سوال اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۴ & ۷\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $۲A-۳I$ را بیابید.

پاسخ ابتدا وارون ماتریس $A^{-۱}$ را می‌یابیم:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۴ & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow (A^{-۱})^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۴ & ۷\end{bmatrix}^{-۱}\Rightarrow A=\frac{۱}{۷-۸}\begin{bmatrix}۷ & -۲\\ -۴ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}۷ & -۲\\ -۴ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۷ & ۲\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲A-۳I=۲\begin{bmatrix}-۷ & ۲\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۴ & ۴\\ ۸ & -۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۷ & ۴\\ ۸ & -۵\end{bmatrix}$$

سوال اگر $۴A=\begin{bmatrix}|A| & ۱۶\\ -۴ & |A|\end{bmatrix}$ آنگاه حاصل $\big||A^{-۱}|A^۳\big|$ را بیابید.

پاسخ ابتدا $|A|$ را می‌یابیم:

$$۴A=\begin{bmatrix}|A| & ۱۶\\ -۴ & |A|\end{bmatrix}\Rightarrow |۴A|=\begin{vmatrix}|A| & ۱۶\\ -۴ & |A|\end{vmatrix}\xrightarrow{A_{۲\times۲}} ۴^۲|A|=|A|\times|A|-۱۶\times(-۴)\Rightarrow ۱۶|A|=|A|^۲+۶۴$$

$$\Rightarrow |A|^۲-۱۶|A|+۶۴=۰\Rightarrow (|A|-۸)^۲=۰\Rightarrow |A|=۸$$

در ادامه داریم:

$$\big||A^{-۱}|A^۳\big|=\left|\frac{۱}{|A|}A^۳\right|=\left|\frac{۱}{۸}A^۳\right|\overset{A_{۲\times۲}}{=}(\frac{۱}{۸})^۲\times|A|^۳=(\frac{۱}{۸})^۲\times۸^۳=۸$$