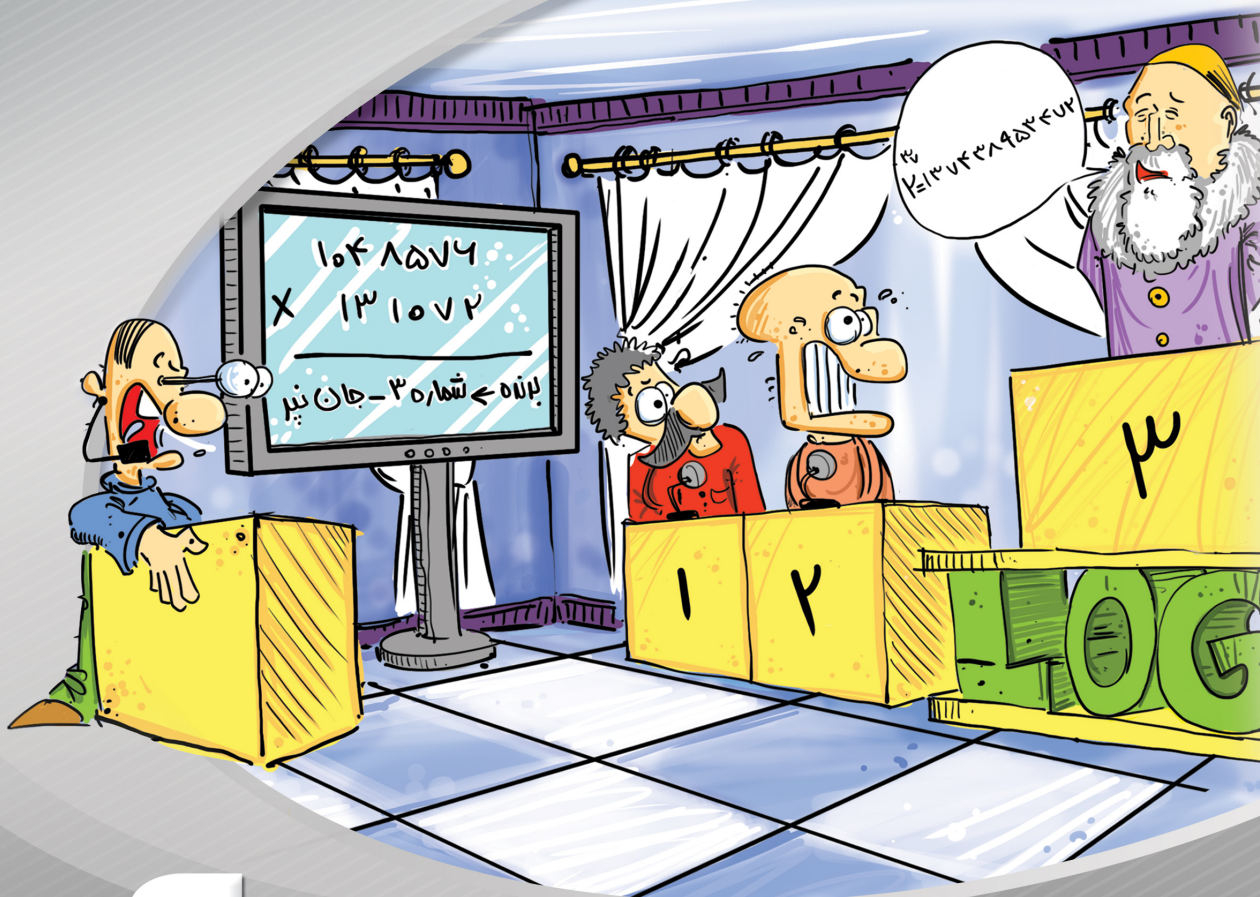


حسابان (یازدهم)

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای حسابان ۱ سال یازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آن‌ها یا کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آن‌ها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همهٔ تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در دو فصل پایانی آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

وظیفهٔ خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مریم موحدی‌مهر، مریم بیوک‌زاده و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها معصومی و هاشمی و آقای تقوی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو، تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

◆ فصل اول: جبر و معادله

۲	درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۴	تمرین
۱۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۱	درس دوم: معادلات درجهٔ دوم
۳۴	تمرین
۳۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۴۵	درس سوم: معادلات گویا و گنگ
۵۱	تمرین
۵۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۷	درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۷۳	تمرین
۷۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۸۱	درس پنجم: آشنایی با هندسهٔ تحلیلی
۹۳	تمرین
۹۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل دوم: تابع

۱۰۲	درس‌های اول و دوم: آشنایی بیشتر با تابع - انواع توابع
۱۱۶	تمرین
۱۲۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۳۰	درس سوم: وارون تابع
۱۳۷	تمرین
۱۴۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۴۶	درس چهارم: اعمال روی توابع
۱۵۳	تمرین
۱۵۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

۱۶۶	درس اول: تابع نمایی
۱۷۲	تمرین
۱۷۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۷۸	درس‌های دوم و سوم: تابع لگاریتمی - لگاریتم و خواص آن
۱۹۱	تمرین
۱۹۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل چهارم: مثلثات

۲۰۴	درس اول: رادیان
۲۰۸	تمرین
۲۱۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۱۲	درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا
۲۱۶	تمرین
۲۱۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۲۲	درس سوم: توابع مثلثاتی
۲۲۵	تمرین
۲۲۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۳۰	درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
۲۳۸	تمرین
۲۴۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



◆ فصل پنجم: حد و پیوستگی

۲۴۶	درس‌های اول و دوم: مفهوم حد و فرایندهای حدی - حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)
۲۵۱	تمرین
۲۵۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۵۶	درس سوم: قضایای حد
۲۶۳	تمرین
۲۶۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۷۳	درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{\infty}{\infty}$)
۲۸۲	تمرین
۲۸۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۹۲	درس پنجم: پیوستگی
۲۹۶	تمرین
۲۹۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل ششم: راه‌حل تمرین‌ها

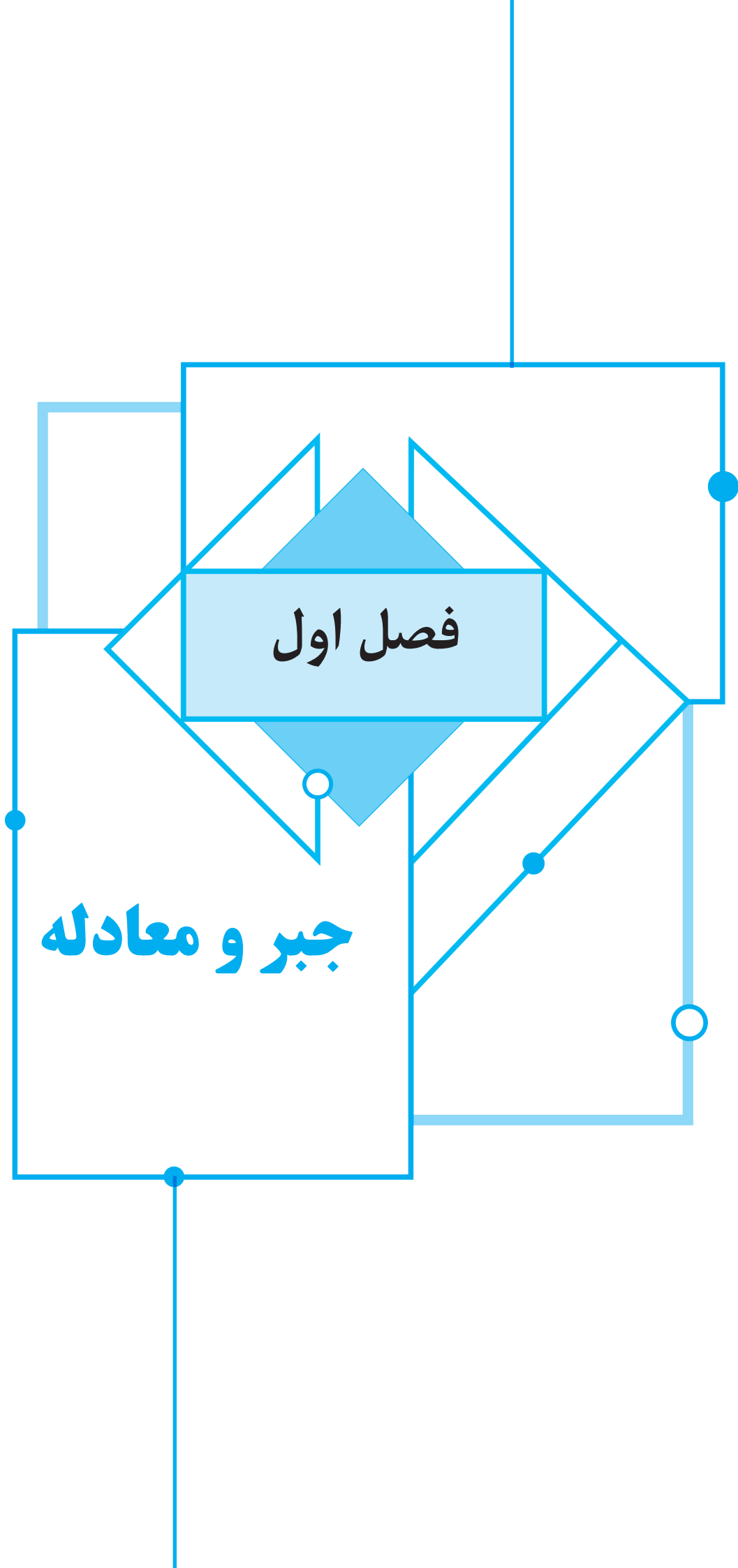
۳۰۴	راه‌حل تمرین‌ها
-----	-----------------

◆ فصل هفتم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۰۶	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
-----	----------------------------

فصل اول

جبر و معادله



درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

الف) دنباله‌های حسابی

دنباله حسابی دنباله‌ای است که در آن هر جمله به جز جمله نخست، با جمع کردن عددی ثابت به نام **قدرنسبت** با جمله قبل از آن به دست می‌آید. به این ترتیب، اگر جمله نخست دنباله‌ای حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، این دنباله به صورت زیر است:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$

معلوم است که **جمله عمومی** این دنباله به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است.

در این درس، دستوری برای پیدا کردن مجموع n جمله نخست دنباله‌های حسابی پیدا می‌کنیم. اساس این کار روشی منتسب به کارل گاوس، یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همه اعصار است که در کودکی معلمش را با پیدا کردن مجموع عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰ شگفت‌زده کرده بود. روش او را در مثال بعد توضیح می‌دهیم.

مثال: برای پیدا کردن مجموع عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰ می‌توان آن‌ها را به دسته‌های دوتایی طوری تقسیم کرد که مجموع عددهای هر دسته برابر باشد:

$$1+2+\dots+99+100 = (1+100) + (2+99) + \dots + (50+51) = \underbrace{101+101+\dots+101}_{\text{تا } 50} = 50 \times 101 = 5050$$

اگر تعداد عددهایی که می‌خواهیم جمع کنیم فرد باشد، مثلاً بخواهیم عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۱ را با هم جمع کنیم، چه کار کنیم. در مثال بعد، از روشی استفاده می‌کنیم که به زوج یا فرد بودن تعداد عددها بستگی ندارد.

مثال: می‌خواهیم مجموع عددهای ۱، ۲، ... و n را پیدا کنیم. این مجموع را S می‌نامیم. توجه کنید که

$$\begin{array}{cccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow \\ S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 1 \end{array}$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{\text{تا } n} = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{بنابراین}$$

توجه کنید که عددهای ۱، ۲، ... و n دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. بنابراین ممکن است بتوانیم از روش پیدا کردن مجموع آن‌ها برای محاسبه مجموع جمله‌های نخست دنباله‌های حسابی استفاده کنیم. در حقیقت، این کار شدنی است. پیش از هر چیز، توجه کنید که اگر a_1, a_p, \dots و دنباله‌ای حسابی باشد، آن‌گاه

$$k+l=s+t \Rightarrow a_k + a_l = a_s + a_t$$

در حقیقت،

$$a_k = a_1 + (k-1)d, \quad a_l = a_1 + (l-1)d, \quad a_s = a_1 + (s-1)d, \quad a_t = a_1 + (t-1)d$$

در نتیجه

$$a_k + a_l = 2a_1 + (k+l-2)d, \quad a_s + a_t = 2a_1 + (s+t-2)d$$

چون $k+l=s+t$ ، پس سمت راست این دو تساوی با هم برابر است، پس سمت چپ آن‌ها نیز برابر است، یعنی $a_k + a_l = a_s + a_t$.

اکنون فرض کنید S_n مجموع n جمله نخست دنباله حسابی مورد نظر باشد:

$$\begin{array}{cccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \dots & + & a_n \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow \\ S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + & \dots & + & a_1 \end{array}$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1)$$

اکنون توجه کنید که بنابر آنچه گفتیم،

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n, \quad a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n, \quad \dots$$

در نتیجه

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ بنابراین}$$

اگر a_1, a_2, \dots, a_n و n جمله نخست دنباله‌ای حسابی باشند و S_n مجموع این جمله‌ها باشد، آن‌گاه $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

نتیجه

توجه کنید که $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، بنابراین

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

اگر a_1, a_2, \dots, a_n و n جمله نخست دنباله‌ای حسابی باشند و S_n مجموع این جمله‌ها باشد، آن‌گاه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$.

نتیجه

نتیجه بالا را به روش دیگری هم می‌توانیم به دست بیاوریم. توجه کنید که

$$a_1 = a_1, \quad a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d, \quad \dots, \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$S_n = na_1 + (1+2+\dots+(n-1))d = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

توجه کنید که در این روش فقط از دستور مجموع عددهای ۱، ۲، ...، $n-1$ استفاده کردیم که در ابتدای کار آن را به طور مستقل پیدا کرده

بودیم. بنابراین، اگر توجه کنیم که $a_1 + (n-1)d = a_n$ ، به همان دستوری که اول به دست آوردیم می‌رسیم: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

مسئله ۱ در دنباله‌ای حسابی $a_1 = -17$ و $d = 2$. مجموع بیست جمله نخست این دنباله چقدر است؟

مسئله ۱

ابتدا توجه کنید که $S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20})$ ، بنابراین کافی است a_{20} را حساب کنیم. از طرف دیگر، $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، بنابراین

راه حل

$$a_{20} = -17 + (20-1)2 = 21, \text{ در نتیجه } S_{20} = 10(-17+21) = 40.$$

مسئله ۲ مجموع نوزده جمله نخست دنباله حسابی $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots$ چقدر است؟

مسئله ۲

در این دنباله جمله اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر $-\frac{1}{3}$ است. بنابراین $S_{19} = \frac{19}{2}(2a_1 + 18d) = \frac{19}{2}(2 \times 1 - 18 \times \frac{1}{3}) = -38$.

راه حل

مسئله ۳ مجموع n جمله نخست دنباله حسابی $\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}, 2 + \frac{1}{k}, \dots$ چقدر است؟

مسئله ۳

قدرنسبت این دنباله حسابی برابر است با $1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = 1$. بنابراین

راه حل

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \times \frac{1}{k} + (n-1)(1)) = \frac{n}{2}(\frac{2}{k} + n - 1) = \frac{n}{k} + \frac{n(n-1)}{2}$$

مسئله ۴

مجموع‌های زیر را حساب کنید:

$$\text{الف) } ۲+۴+\dots+۲n \quad \text{ب) } ۱+۳+۵+\dots+۲n-۱ \quad \text{پ) } ۱^۲-۲^۲+۳^۲-۴^۲+\dots+۹۹^۲-۱۰۰^۲$$

راه‌حل

$$\text{الف) می‌توان نوشت } ۲+۴+\dots+۲n = ۲(۱+۲+\dots+n) = ۲\left(\frac{n(n+1)}{۲}\right) = n(n+۱)$$

ب) مجموع مورد نظر، مجموع جمله نخست دنباله‌ای حسابی با جمله نخست ۱ و جمله آخر $۲n-۱$ است. بنابراین

$$۱+۳+\dots+۲n-۱ = \frac{n}{۲}(۱+۲n-۱) = n^۲$$

پ) اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، معلوم می‌شود که

$$۱^۲-۲^۲+۳^۲-۴^۲+\dots+۹۹^۲-۱۰۰^۲ = (۱-۲)(۱+۲) + (۳-۴)(۳+۴) + \dots + (۹۹-۱۰۰)(۹۹+۱۰۰)$$

$$= -(۱+۲) - (۳+۴) - \dots - (۹۹+۱۰۰) = -(۱+۲+۳+۴+\dots+۹۹+۱۰۰) = -\frac{۱۰۰(۱۰۱)}{۲} = -۵۰۵۰$$

مسئله ۵

در دنباله‌ای حسابی $a_۱ = ۲۴$ و $a_۷ = -۱۸$. مجموع هفده جمله نخست این دنباله حسابی چقدر است؟

راه‌حل

توجه کنید که $S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}(a_۱ + a_{۱۷})$. بنابراین باید $a_{۱۷}$ را حساب کنیم. برای این کار بهتر است قدرنسبت را با استفاده از $a_۷$ حساب کنیم:

$$a_۷ = a_۱ + ۶d \Rightarrow -۱۸ = ۲۴ + ۶d \Rightarrow ۶d = -۴۲ \Rightarrow d = -۷$$

بنابراین $a_{۱۷} = a_۱ + ۱۶d = ۲۴ + ۱۶(-۷) = -۸۸$ ، به این ترتیب

$$S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}(۲۴ + (-۸۸)) = \frac{۱۷}{۲}(-۶۴) = -۵۴۴$$

تست ۱

مجموع پانزده جمله اول یک دنباله حسابی برابر ۳۰۰ است. جمله هشتم دنباله کدام است؟

$$۲۰ \quad (۱) \quad ۳۰ \quad (۲) \quad ۱۵ \quad (۳) \quad ۴۵ \quad (۴)$$

راه‌حل

بنابر فرض مسئله،

$$S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}(۲a_۱ + ۱۴d) = ۳۰۰ \Rightarrow a_۱ + ۷d = ۲۰$$

بنابراین $a_۸ = a_۱ + ۷d = ۲۰$.

مسئله ۶

جمله عمومی دنباله‌ای حسابی به صورت $a_n = ۲n - ۷$ است. مجموع بیست و پنج جمله نخست این دنباله حسابی چقدر است؟

راه‌حل

چون $a_n = ۲n - ۷$ ، پس $a_۱ = ۲ \times ۱ - ۷ = -۵$ و $a_{۲۵} = ۲ \times ۲۵ - ۷ = ۴۳$. از طرف دیگر $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$. بنابراین

$$S_{۲۵} = \frac{۲۵}{۲}(-۵ + ۴۳) = ۴۷۵$$

تست ۲

مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی که جمله اولش ۳ و جمله آخرش ۳۹ است، برابر ۵۲۵ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

$$۱ \quad (۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad \frac{۳}{۲} \quad (۳) \quad ۲ \quad (۴)$$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow ۵۲۵ = \frac{n}{۲}(۳ + ۳۹) \Rightarrow n = ۲۵$$

بنابراین دنباله ۲۵ جمله دارد و در نتیجه

$$a_{۲۵} = a_۱ + ۲۴d \Rightarrow ۳۹ = ۳ + ۲۴d \Rightarrow d = \frac{۳}{۲}$$

مسئله ۷

 مجموع مضرب‌های ۳ در بازه $[۱۸, ۳۰۰]$ چقدر است؟

راه‌حل

 توجه کنید که مضرب‌های ۳ در بازه $[۱۸, ۳۰۰]$ دنباله‌ای حسابی با جمله نخست ۱۸ و جمله آخر ۳۰۰ و قدرنسبت ۳ تشکیل می‌دهند.

 اگر تعداد این مضرب‌ها n تا باشد، آنگاه

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 300 = 18 + (n-1)3 \Rightarrow n = 95$$

$$S_{95} = \frac{95}{2} (18 + 300) = 15105$$

مسئله ۸

در مسابقه توپ جمع‌کنی، سیدی در نقطه‌ی شروع قرار داده شده است که فاصله‌اش از نخستین توپ ۵ متر است و بقیه توپ‌ها در فاصله‌های ۳ متری از توپ‌های کناری‌شان روی یک خط راست قرار داده شده‌اند. ده توپ روی یک خط راست قرار دارند. هر بازیکن باید از کنار سبد شروع به حرکت کند، نزدیک‌ترین توپ را بردارد، برود و آن را در سبد بیندازد و این کار را تکرار کند تا همه توپ‌ها را در سبد بیندازد. هر بازیکن در کل چه مسافتی را طی می‌کند؟


راه‌حل

برای این که بازیکنی توپ اول را بردارد و در سبد بیندازد، باید 2×5 متر را طی کند. برای توپ دوم باید $2(5+3)$ متر را طی کند. برای توپ سوم باید $2(5+2 \times 3)$ متر را طی کند. ... برای توپ دهم باید $2(5+9 \times 3)$ متر را طی کند. این عددها دنباله‌ای حسابی با جمله نخست 2×5 و جمله آخر $2(5+9 \times 3)$ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ده‌تاست. بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با

$$S_{10} = \frac{1}{2} (2 \times 5 + 2(5+9 \times 3)) = 370$$

یعنی هر بازیکن باید ۳۷۰ متر را طی کند تا همه توپ‌ها را در سبد بیندازد.

تست ۳

 چندتا از جمله‌های دنباله حسابی $9, 17, 25, \dots$ را از ابتدا جمع کنیم تا حاصل ۶۳۶ شود؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

راه‌حل

 جمله اول دنباله برابر ۹ و قدرنسبت آن ۸ است. بنابراین مجموع n جمله نخست دنباله برابر است با

$$\frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2 \times 9 + 8(n-1)) = \frac{n}{2} (18 + 8n - 8) = 4n^2 + 5n$$

در نتیجه

$$4n^2 + 5n = 636 \Rightarrow 4n^2 + 5n - 636 = 0 \Rightarrow (4n + 53)(n - 12) = 0 \Rightarrow n = -\frac{53}{4} \text{ (غ.ق.ق.)}, n = 12$$

بنابراین باید دوازده جمله نخست دنباله را جمع کنیم.

مسئله ۹

 چند جمله نخست دنباله حسابی $24, 21, 18, \dots$ را باید جمع کنیم تا حاصل برابر ۷۸ شود؟

راه‌حل

 توجه کنید که در این دنباله حسابی $a_1 = 24$ و $d = 21 - 24 = -3$. اکنون توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$. بنابراین اگر

$$S_n = 78, \text{ آنگاه } 78 = \frac{n}{2} (2 \times 24 + (n-1)(-3)) = \frac{n}{2} (51 - 3n)$$

$$3n^2 - 51n + 156 = 0 \Rightarrow n^2 - 17n + 52 = 0 \Rightarrow (n-4)(n-13) = 0$$

بنابراین $n = 4$ یا $n = 13$ ، یعنی باید چهار یا سیزده جمله نخست دنباله حسابی موردنظر را جمع کنیم تا حاصل برابر ۷۸ شود (هر دوی این جواب‌ها قابل قبول هستند، زیرا قدرنسبت دنباله موردنظر منفی است و برخی جمله‌ها مثبت و برخی دیگر منفی هستند، در نتیجه، ممکن است مجموع تعدادی از جمله‌ها صفر شود).

مسئله ۱۰

راه حل

دست کم چندتا از جمله‌های دنباله حسابی $۲۰, ۲۲\frac{۲}{۳}, ۲۵\frac{۱}{۳}, \dots$ را از ابتدا با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها از ۱۵۶۸ بیشتر شود؟

جمله نخست این دنباله ۲۰ و قدرنسبت آن برابر است با $d = ۲۲\frac{۲}{۳} - ۲۰ = \frac{۸}{۳}$. بنابراین

$$S_n > 1568 \Rightarrow \frac{n}{2} (2 \times 20 + (n-1) \frac{8}{3}) > 1568 \Rightarrow n(5 + (n-1) \frac{1}{3}) > 392$$

$$n(\frac{14+n}{3}) > 392 \Rightarrow n^2 + 14n - 1176 > 0 \Rightarrow (n-28)(n+42) > 0$$

چون $n+42 > 0$ ، پس $n > 28$. بنابراین دست کم باید ۲۹ جمله از ابتدای دنباله مورد نظر را جمع کنیم تا مجموع آن‌ها از ۱۵۶۸ بیشتر شود.

مسئله ۱۱

راه حل

در دنباله‌ای حسابی $a_5 = ۲۲$ و $a_7 + a_9 = ۳۲$. مقدار $S_{۲۳}$ چقدر است؟

توجه کنید که $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، بنابراین

$$a_5 = 22 \Rightarrow a_1 + 4d = 22 \quad (1), \quad a_7 + a_9 = 32 \Rightarrow (a_1 + 6d) + (a_1 + 8d) = 32 \Rightarrow 2a_1 + 14d = 32 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به دست می‌آید $a_1 = 3$ و $d = -2$. از طرف دیگر، $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$. بنابراین

$$S_{23} = \frac{23}{2} (2 \times 3 + (23-1)(-2)) = 184$$

مسئله ۱۲

راه حل

در دنباله‌ای حسابی مجموع چهار جمله نخست برابر ۲۸- و مجموع شش جمله نخست برابر ۵۸ است. مجموع شانزده جمله نخست این دنباله چقدر است؟

چون $S_6 = 58$ و $S_4 = -28$ ، پس

$$\frac{4}{2} (2a_1 + 3d) = -28 \Rightarrow 2a_1 + 3d = -14, \quad \frac{6}{2} (2a_1 + 5d) = 58 \Rightarrow 6a_1 + 15d = 58$$

از حل دستگاه معادله‌های فوق نتیجه می‌شود $a_1 = -32$ و $d = \frac{50}{3}$. بنابراین $S_{16} = \frac{16}{2} (2a_1 + 15d) = 8(2(-32) + 15(\frac{50}{3})) = 1488$.

مسئله ۱۳

راه حل

در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های ششم، نهم، دوازدهم و پانزدهم برابر با ۲۰ شده است. مجموع بیست جمله نخست این دنباله چقدر است؟

راه حل اول بنابر فرض،

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20 \quad (1)$$

از طرف دیگر، در دنباله‌های حسابی، اگر $k+l = s+t$ ، آن‌گاه $a_k + a_l = a_s + a_t$. بنابراین $a_6 + a_{15} = a_9 + a_{12} = a_1 + a_{20}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$(a_6 + a_{15}) + (a_9 + a_{12}) = 20 \Rightarrow (a_1 + a_{20}) + (a_1 + a_{20}) = 20 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 10$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (a_1 + a_{20}) = \frac{20}{2} (10) = 100 \quad \text{بنابراین } S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

راه حل دوم چون $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، پس

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20 \Rightarrow (a_1 + 5d) + (a_1 + 8d) + (a_1 + 11d) + (a_1 + 14d) = 20$$

$$4a_1 + 38d = 20 \Rightarrow 2a_1 + 19d = 10$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2a_1 + 19d) = \frac{20}{2} (10) = 100 \quad \text{بنابراین } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

اگر عددهای سمت چپ معادله $1+7+13+\dots+x=280$ جمله‌های دنباله‌ای حسابی باشند، مجموع رقم‌های x چقدر است؟

$$12 \quad (4) \qquad 11 \quad (3) \qquad 10 \quad (2) \qquad 9 \quad (1)$$

راه حل

سمت چپ معادله، مجموع جمله‌های یک دنباله حسابی است که جمله اول آن ۱ و قدرنسبت آن ۶ است. بنابراین

$$1+7+13+\dots+x = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2+6(n-1)) = \frac{n}{2} (6n-4) = 3n^2 - 2n$$

در نتیجه

$$3n^2 - 2n = 280 \Rightarrow 3n^2 - 2n - 280 = 0 \Rightarrow (3n+28)(n-10) = 0 \Rightarrow n = -\frac{28}{3} \text{ (غ.ق.ق.)}, n = 10$$

به این ترتیب $x = a_{10} = a_1 + (10-1)d = 1+9 \times 6 = 55$. پس مجموع رقم‌های x برابر ۱۰ است.

مسئله ۱۴ جمله‌های دنباله‌ای حسابی طبعی‌اند و مجموع چهار جمله نخست آن برابر ۵۶ است. اگر جمله دوازدهم این دنباله بین ۶۷ و ۷۴ باشد، جمله بیستم آن چقدر است؟

راه حل

توجه کنید که

$$S_4 = 56 \Rightarrow \frac{4}{2} (2a_1 + 3d) = 56 \Rightarrow 2a_1 + 3d = 28 \quad (1)$$

از طرف دیگر، $67 < a_{12} < 74$ ، پس

$$67 < a_1 + 11d < 74 \quad (2)$$

از تساوی (۱) به دست می‌آید $a_1 = \frac{28-3d}{2}$ و در نتیجه نابرابری‌های (۲) را می‌توان این‌طور نوشت

$$67 < \frac{28-3d}{2} + 11d < 74 \Rightarrow \frac{106}{19} < d < \frac{120}{19}$$

چون d عددی صحیح است ($d = a_p - a_1$)، پس $d = 6$ و در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_1 = 5$. به این ترتیب،

$$a_{20} = a_1 + 19d = 119$$

مسئله ۱۵ در دنباله‌ای حسابی همواره $4S_n = S_{2n}$ و جمله پنجم برابر با ۱۸ است. جمله نخست و قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

راه حل

در تساوی $4S_n = S_{2n}$ قرار می‌دهیم $n=1$:

$$S_2 = 4S_1 \Rightarrow a_2 + a_1 = 4a_1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 \Rightarrow a_1 + d = 3a_1 \Rightarrow d = 2a_1$$

چون $a_5 = 18$ ، پس

$$a_5 = a_1 + 4d = 18 \Rightarrow a_1 + 4(2a_1) = 18$$

بنابراین $a_1 = 2$ و $d = 4$.

مسئله ۱۶ در دنباله‌ای حسابی $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ ($m \neq n$) ثابت کنید $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

راه حل

از تساوی $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ نتیجه می‌شود $n^2 S_m = m^2 S_n$. بنابراین

$$n^2 \times \frac{m}{2} (2a_1 + (m-1)d) = m^2 \times \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow n(2a_1 + (m-1)d) = m(2a_1 + (n-1)d)$$

$$2a_1 n + mnd - nd = 2a_1 m + mnd - md \Rightarrow 2a_1(n-m) = d(n-m) \Rightarrow d = 2a_1$$

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)d}{a_1 + (n-1)d} = \frac{a_1 + (m-1)(2a_1)}{a_1 + (n-1)(2a_1)} = \frac{a_1(2m-1)}{a_1(2n-1)} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

اکنون توجه کنید که

در دنباله‌ای حسابی مجموع k جمله نخست برابر با صفر است. ثابت کنید مجموع m جمله بعدی برابر است با $\frac{-a_1(k+m)m}{k-1}$.

مسئله ۱۷

راه حل

چون مجموع k جمله نخست صفر است، پس

$$S_k = \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d) = 0 \Rightarrow 2a_1 + (k-1)d = 0 \Rightarrow d = -\frac{2a_1}{k-1}$$

چون مجموع m جمله بعدی همان مجموع $k+m$ جمله نخست است، پس

$$\begin{aligned} S_{m+k} &= \left(\frac{m+k}{2}\right)(2a_1 + (m+k-1)d) = \left(\frac{m+k}{2}\right)(2a_1 + (m+k-1)\left(-\frac{2a_1}{k-1}\right)) \\ &= a_1(m+k)\left(1 - \frac{m+k-1}{k-1}\right) = a_1(m+k)\left(\frac{k-1-m-k+1}{k-1}\right) = \frac{-a_1(m+k)m}{k-1} \end{aligned}$$

مسئله ۱۸

راه حل

در دنباله‌ای حسابی، مجموع m جمله نخست برابر با مجموع n جمله نخست شده است ($m \neq n$). ثابت کنید مجموع $m+n$ جمله نخست برابر صفر است.

می‌توان نوشت

$$S_m = S_n \Rightarrow \frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow 2ma_1 + (m^2 - m)d = 2na_1 + (n^2 - n)d$$

$$2(m-n)a_1 + (m^2 - m - n^2 + n)d = 0 \Rightarrow 2(m-n)a_1 + ((m-n)(m+n) - (m-n))d = 0$$

$$2(m-n)a_1 + (m-n)(m+n-1)d = 0 \Rightarrow 2a_1 + (m+n-1)d = 0$$

$$\text{بنابراین } S_{m+n} = \frac{m+n}{2}(2a_1 + (m+n-1)d) = \frac{m+n}{2} \times 0 = 0$$

مسئله ۱۹

راه حل

در دنباله‌ای حسابی $a_k = \frac{1}{m}$ و $a_m = \frac{1}{k}$ ($k \neq m$). ثابت کنید مجموع km جمله نخست این دنباله برابر $\frac{1}{2}(km+1)$ است.

توجه کنید که

$$a_k = \frac{1}{m} \Rightarrow a_1 + (k-1)d = \frac{1}{m} \quad (1), \quad a_m = \frac{1}{k} \Rightarrow a_1 + (m-1)d = \frac{1}{k} \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به دست می‌آید

$$(k-m)d = \frac{1}{m} - \frac{1}{k} = \frac{k-m}{km} \Rightarrow d = \frac{1}{km} \quad (k-m \neq 0)$$

بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_1 = \frac{1}{m} - (k-1)d = \frac{1}{m} - (k-1)\frac{1}{km} = \frac{1}{km}$

$$S_{km} = \frac{km}{2}(2a_1 + (km-1)d) = \frac{km}{2}\left(\frac{2}{km} + (km-1)\frac{1}{km}\right) = \frac{km}{2}\left(\frac{2}{km} + 1 - \frac{1}{km}\right) = \frac{km}{2}\left(\frac{1}{km} + 1\right) = \frac{1}{2}(km+1)$$

اگر S_k مجموع k جمله نخست دنباله‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه

$$S_k - S_{k-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}) = a_k$$

بنابراین نتیجه زیر به دست می‌آید.

در هر دنباله $a_1 = S_1$ و $a_n = S_n - S_{n-1}$.

نتیجه

تست ۵ اگر مجموع n جمله نخست دنباله‌ای حسابی به صورت $S_n = 2n^2 - 3n$ باشد، حاصل ضرب جمله نخست و قدرنسبت

این دنباله چقدر است؟

-۹ (۴)

-۸ (۳)

-۶ (۲)

-۴ (۱)

توجه کنید که

راه حل

$$S_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1 \Rightarrow a_1 = -1, \quad S_2 = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 = 2 \Rightarrow a_1 + a_2 = 2 \Rightarrow -1 + a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 3$$

بنابراین قدرنسبت دنباله برابر است با $d = a_2 - a_1 = 4$. در نتیجه $a_1 d = -4$.

ثابت کنید در هر دنباله حسابی قدرنسبت برابر است با $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$.

مسئله ۲۰

ابتدا توجه کنید که $a_n = S_n - S_{n-1}$. بنابراین

راه حل

$$S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = (S_n - S_{n-1}) - (S_{n-1} - S_{n-2}) = a_n - a_{n-1} = d$$

توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = na_1 + \frac{n^2 d}{2} - \frac{nd}{2} = \frac{d}{2} n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

یعنی عددهایی مانند A و B وجود دارند که $S_n = An^2 + Bn$.

اگر S_n مجموع n جمله نخست دنباله‌ای حسابی باشد، عددهایی مانند A و B وجود دارند که $S_n = An^2 + Bn$.

نتیجه

تست ۶ اگر $S_n = -2n^2 + (\delta + k)n - k + 2$ مجموع n جمله نخست دنباله‌ای حسابی باشد، جمله دوم این دنباله چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست

۶

چون S_n باید به شکل $An^2 + Bn$ باشد، پس $-k + 2 = 0$ ، در نتیجه $k = 2$. به این ترتیب $S_n = -2n^2 + 7n$. در نتیجه

راه حل

$$S_1 = -2 \times 1^2 + 7 \times 1 = 5 \Rightarrow a_1 = 5$$

$$S_2 = -2 \times 2^2 + 7 \times 2 = 6 \Rightarrow a_1 + a_2 = 6 \Rightarrow 5 + a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = 1$$

ب) دنباله‌های هندسی

دنباله هندسی دنباله‌ای است که در آن هر جمله به‌جز جمله نخست، با ضرب کردن عددی ثابت و غیرصفر به نام **قدرنسبت** در جمله قبل از آن به دست می‌آید. به این ترتیب، اگر جمله نخست دنباله‌ای هندسی a_1 و قدرنسبت آن q باشد، این دنباله به صورت زیر است:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

معلوم است که جمله عمومی این دنباله به صورت $a_n = a_1q^{n-1}$ است. در این کتاب فرض می‌کنیم $a_1 \neq 0$.

در اینجا دستوری برای پیدا کردن مجموع n جمله نخست دنباله‌های هندسی پیدا می‌کنیم.

فرض کنید a_1, a_2, \dots دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشد در این صورت $a_n = a_1q^{n-1}$. فرض کنید $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. معلوم است که اگر $q = 1$ ، آن‌گاه همه جمله‌ها برابر a_1 هستند، در نتیجه $S_n = na_1$. فرض کنید $q \neq 1$. توجه کنید که

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \quad (1)$$

و اگر دو طرف این تساوی را در q ضرب کنیم، به دست می‌آید

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow (q-1)S_n = a_1(q^n - 1)$$

بنابراین

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

اگر a_1, a_2, \dots, a_n و a_n جمله نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشند، $q \neq 1$ و S_n مجموع این جمله‌ها باشد، آن‌گاه

نتیجه

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

تست



مجموع پنج جمله نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۵ برابر $\frac{781}{75}$ شده است. جمله نخست این دنباله چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{85}$ (۲) $\frac{1}{75}$ (۳) $\frac{1}{65}$ (۴) $\frac{1}{55}$

راه‌حل

چون $q=5$ و $S_5 = \frac{781}{75}$ پس $S_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = a_1 \frac{5^5 - 1}{5 - 1} = \frac{781}{75}$ بنا بر این $a_1 = \frac{1}{75}$.

مسئله ۲۱

راه‌حل

در دنباله‌ای هندسی $a_1 = 135$ و $S_3 = 195$. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

بنا بر فرض مسئله.

$$S_3 = a_1 \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 195 \Rightarrow 135(q^3 - 1) = 195(q - 1) \Rightarrow 135(q - 1)(q^2 + q + 1) = 195(q - 1) \Rightarrow 9q^2 + 9q + 9 = 13$$

$$9q^2 + 9q - 4 = 0 \Rightarrow (3q - 1)(3q + 4) = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3}, q = -\frac{4}{3}$$

مسئله ۲۲

راه‌حل

در دنباله‌ای هندسی $a_1 = \sqrt[3]{2} - 1$ و $a_3 = (\sqrt[3]{2} - 1)\sqrt[3]{4}$. مجموع دوازده جمله نخست این دنباله چقدر است؟

قدرنسبت دنباله را به دست می‌آوریم:

$$a_3 = a_1 q^2 \Rightarrow (\sqrt[3]{2} - 1)\sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{2} - 1)q^2 \Rightarrow q^2 = \sqrt[3]{4} \Rightarrow q = \pm \sqrt[3]{2}$$

اگر $q = \sqrt[3]{2}$ ، آن‌گاه $16 - 1 = 15$ $S_{12} = (\sqrt[3]{2} - 1) \frac{(\sqrt[3]{2})^{12} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = 16 - 1 = 15$. اگر $q = -\sqrt[3]{2}$ ، آن‌گاه

$$S_{12} = (\sqrt[3]{2} - 1) \frac{(-\sqrt[3]{2})^{12} - 1}{-\sqrt[3]{2} - 1} = (\sqrt[3]{2} - 1) \frac{16 - 1}{-\sqrt[3]{2} - 1} = -15 \frac{(\sqrt[3]{2} - 1)}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

مسئله ۲۳

راه‌حل

مقدار $\frac{1+2+2^2+\dots+2^{13}}{1+2+2^2+\dots+2^6}$ را حساب کنید.

در دنباله هندسی با جمله نخست a_1 و قدرنسبت q ، مجموع n جمله نخست برابر است با $a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. در نتیجه

$$\frac{1+2+2^2+\dots+2^{13}}{1+2+2^2+\dots+2^6} = \frac{1 \times \frac{2^{14} - 1}{2 - 1}}{1 \times \frac{2^7 - 1}{2 - 1}} = \frac{2^{14} - 1}{2^7 - 1} = \frac{(2^7 - 1)(2^7 + 1)}{2^7 - 1} = 2^7 + 1 = 129$$

تست



اگر $\frac{(a^8 + a^4 + 1)(a^3 + a^2 + a + 1)}{a^9 + a^6 + a^3 + 1} = 31$ ، مقدار a چقدر است؟

- (۱) -5 (۲) $-5, 5$ (۳) $-6, 5$ (۴) -7

راه‌حل

توجه کنید که $(a \neq 1)$.

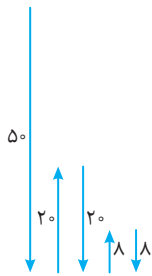
$$a^8 + a^4 + 1 = \frac{a^{12} - 1}{a^4 - 1}, \quad a^3 + a^2 + a + 1 = \frac{a^4 - 1}{a - 1}$$

اگر این تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، معلوم می‌شود که صورت کسر داده شده برابر است با $\frac{a^{12} - 1}{a - 1}$. همچنین مخرج کسر برابر است با $\frac{a^{12} - 1}{a^3 - 1}$.

در نتیجه

$$\frac{\frac{a^{12} - 1}{a - 1}}{\frac{a^{12} - 1}{a^3 - 1}} = \frac{a^3 - 1}{a - 1} = a^2 + a + 1 = 31 \Rightarrow a^2 + a - 30 = 0 \Rightarrow a = -6, a = 5$$

تویی را از هر ارتفاعی که رها می‌کنیم، پس از برخورد با زمین به اندازه دو پنجم ارتفاع اولیه خود بالا می‌رود. اگر این توپ را از ارتفاع ۵۰ متری رها کنیم، مسافتی که تا برخورد دهم با زمین طی می‌کند، چند متر است؟

مسئله ۲۴


طول مسیری که توپ بعد از اولین برخورد تا دهمین برخورد با زمین طی می‌کند برابر است با

راه‌حل

$$2\left(20 + 8 + \dots + 20 \times \left(\frac{2}{5}\right)^8\right) = 2 \times 20 \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^9 - 1}{\frac{2}{5} - 1} = \frac{200}{3} - \frac{200}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^9$$

توپ قبل از اولین برخورد با زمین هم ۵۰ متر طی کرده است. پس طول کل مسیر برابر است با

$$50 + \frac{200}{3} - \frac{200}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^9 = \frac{350}{3} - \frac{200}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^9$$

چند تا از جمله‌های دنباله هندسی $\frac{2}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$ را از ابتدا جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{55}{72}$ شود؟

مسئله ۲۵

توجه کنید که $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. در این دنباله $a_1 = \frac{2}{9}$ و $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = -\frac{3}{2}$. بنابراین

راه‌حل

$$S_n = \frac{55}{72} \Rightarrow \frac{55}{72} = \frac{2}{9} \times \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n - 1}{-\frac{3}{2} - 1} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^n = -\frac{243}{32} = \left(-\frac{3}{2}\right)^5$$

بنابراین $n = 5$. یعنی باید پنج جمله نخست دنباله مورد نظر را با هم جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{55}{72}$ شود.

در یک دنباله هندسی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = \frac{3^n - 2^n}{4 \times 3^{n-2}}$ به دست می‌آید. قدرنسبت دنباله کدام است؟

تست ۹

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \qquad \frac{1}{3} \quad (۳) \qquad \frac{3}{2} \quad (۲) \qquad \frac{2}{3} \quad (۱)$$

ابتدا جمله‌های اول و دوم دنباله را پیدا می‌کنیم:

راه‌حل

$$a_1 = S_1 = \frac{3-2}{4 \times 3^{-1}} = \frac{3}{4}, \quad a_1 + a_2 = S_2 = \frac{9-4}{4 \times 1} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} + a_2 = \frac{5}{4} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

تعداد جمله‌های دنباله‌ای هندسی عددی زوج است و مجموع همه این جمله‌ها، ده برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد است. قدرنسبت این دنباله هندسی چقدر است؟

مسئله ۲۶

فرض کنید تعداد جمله‌های دنباله مورد نظر $2n$ باشد. بنابر فرض $S_{2n} = 10(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1})$. در نتیجه

راه‌حل

$$a_1 \frac{q^{2n} - 1}{q - 1} = 10(a_1 + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{2n-2}) = 10(a_1 + a_1 q^2 + \dots + a_1 (q^2)^{n-1})$$

$$= 10 a_1 \frac{(q^2)^n - 1}{q^2 - 1} = 10 a_1 \frac{q^{2n} - 1}{(q-1)(q+1)}$$

بنابراین $q+1=10$ ، در نتیجه $q=9$.

مسئله ۲۷

در دنباله‌ای هندسی مجموع پنج جمله نخست پنج برابر جمله نخست است و مجموع پانزده جمله نخست برابر ۱۰۰ است. مجموع جمله‌های نخست، ششم و یازدهم این دنباله چقدر است؟

راه حل

$$S_5 = 5a_1 \Rightarrow a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 5a_1 \Rightarrow q^5 - 1 = 5(q - 1) \quad (1)$$

$$S_{15} = 100 \Rightarrow a_1 \frac{q^{15} - 1}{q - 1} = 100 \Rightarrow a_1 (q^{15} - 1) = 100(q - 1) \quad (2)$$

دو طرف تساوی (۲) را بر دو طرف تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 (q^{15} - 1)}{q^5 - 1} = \frac{100(q - 1)}{5(q - 1)} \Rightarrow \frac{a_1 (q^5 - 1)(q^{10} + q^5 + 1)}{q^5 - 1} = 20 \Rightarrow a_1 q^{10} + a_1 q^5 + a_1 = 20$$

بنابراین $a_1 + a_6 + a_{11} = 20$.

مسئله ۲۸

اگر S_n مجموع n جمله نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشد، ثابت کنید $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$.

راه حل

توجه کنید که $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ و $S_{2n} = a_1 \frac{q^{2n} - 1}{q - 1}$. بنابراین

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{a_1 \frac{q^{2n} - 1}{q - 1}}{a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}} = \frac{q^{2n} - 1}{q^n - 1} = \frac{(q^n - 1)(q^n + 1)}{q^n - 1} = q^n + 1$$

مسئله ۲۹

فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_n دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q باشد. ثابت کنید اگر $n \geq 2$ ، آن‌گاه

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = \frac{q}{1+q} S_{2n}$$

توجه کنید که $S_{2n} = a_1 \frac{q^{2n} - 1}{q - 1}$. بنابراین

راه حل

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} &= a_1 q + a_1 q^3 + a_1 q^5 + \dots + a_1 q^{2n-1} = a_1 (q + q^3 + q^5 + \dots + q^{2n-1}) \\ &= a_1 \times \frac{q((q^2)^n - 1)}{q^2 - 1} = \frac{a_1 q (q^{2n} - 1)}{(q+1)(q-1)} = \frac{q}{q+1} \times a_1 \frac{q^{2n} - 1}{q - 1} = \frac{q}{q+1} S_{2n} \end{aligned}$$

توجه

برای محاسبه مجموع $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n}$ می‌توانیم به این نکته توجه کنیم که جمله‌های این مجموع، جمله‌های دنباله‌ای هندسی

با جمله نخست a_2 و قدرنسبت q^2 هستند، پس مجموع آن‌ها برابر است با $a_2 \frac{(q^2)^n - 1}{q^2 - 1} = a_1 q \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}$.

مسئله ۳۰

فرض کنید در دنباله‌ای هندسی که $3n$ جمله دارد، S_1 مجموع n جمله نخست، S_2 مجموع n جمله بعدی و S_3 مجموع n جمله آخر باشد. ثابت کنید S_1, S_2, S_3 دنباله‌ای هندسی است.

راه حل

توجه کنید که

$$S_1 = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_2 = a_1 q^n + a_1 q^{n+1} + \dots + a_1 q^{2n-1} = a_1 q^n (1 + q + \dots + q^{n-1}) = a_1 q^n \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_3 = a_1 q^{2n} + a_1 q^{2n+1} + \dots + a_1 q^{3n-1} = a_1 q^{2n} (1 + q + \dots + q^{n-1}) = a_1 q^{2n} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

به این ترتیب $S_2 = S_1 q^n$ و $S_3 = S_2 q^n$. بنابراین S_1, S_2, S_3 دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^n است.

مسئله ۳۱

مجموع $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{100 \text{ تا}}$ را حساب کنید.

راه حل

ابتدا توجه کنید که

$$9 = 10^1 - 1, \quad 99 = 10^2 - 1, \quad 999 = 10^3 - 1, \quad \dots, \quad \underbrace{999\dots9}_{100 \text{ تا}} = 10^{100} - 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{100 \text{ تا}} &= (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{100} - 1) = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{100} - 100 \\ &= 10 \times \frac{10^{100} - 1}{10 - 1} - 100 = \frac{10^{101} - 10^0}{9} - 100 = \frac{10^{101} - 910}{9} \end{aligned}$$

مسئله ۳۲

مجموع $\frac{3}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{3}{5^{99}} + \frac{4}{5^{100}}$ را حساب کنید.

راه حل

اگر دسته‌بندی مجموع مورد نظر را عوض کنیم، برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{3}{5^{99}}\right) + \left(\frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^4} + \dots + \frac{4}{5^{100}}\right) &= \frac{3}{5} \times \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{50} - 1}{\frac{1}{5} - 1} + \frac{4}{5^2} \times \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{50} - 1}{\frac{1}{5} - 1} \\ &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{25}{24}\right) \left(\frac{1}{5^{100}} - 1\right) + \frac{4}{25} \times \left(-\frac{25}{24}\right) \left(\frac{1}{5^{100}} - 1\right) = \frac{19}{24} \left(1 - \frac{1}{5^{100}}\right) \end{aligned}$$

توجه کنید که بنابر دستور مجموع n جمله نخست دنباله‌های هندسی،

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

در نتیجه، اگر فرض کنیم $a_1 = 1$ ، به اتحاد $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ می‌رسیم. به این ترتیب اتحاد زیر به دست می‌آید.

اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$.

نتیجه

اگر در این اتحاد به جای a قرار دهیم $\frac{a}{b}$ ، به دست می‌آید

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \dots + \frac{a}{b} + 1\right)$$

اگر دو طرف این اتحاد را در b^n ضرب کنیم، به دست می‌آید

$$a^n - b^n = b \left(\frac{a}{b} - 1\right) b^{n-1} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \dots + \frac{a}{b} + 1\right) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

اگر n عددی فرد باشد و در این اتحاد به جای b قرار دهیم -b، به دست می‌آید

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

دو اتحاد مهم

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

و اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

مسئله ۳۳

عبارت $\frac{x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^6 + x^3 + x^2 + x + 1}$ را ساده کنید.

توجه کنید که

راه حل

$$x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^4 + (x^2)^3 + (x^2)^2 + x^2 + 1 = \frac{(x^2)^5 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^5)^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{x^5 - 1}{x - 1} \times \frac{x^5 + 1}{x + 1} = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

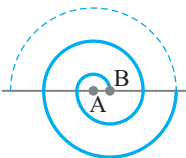
بنابراین

$$\frac{x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^6 + x^3 + x^2 + x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

تمرین

- ۱- مجموع نوزده جمله نخست دنباله حسابی $9, 5, 1, -3, \dots$ را پیدا کنید.
- ۲- الف) مجموع صد جمله نخست دنباله حسابی $0/3, 1/5, 2/7, \dots$ چقدر است؟
ب) مجموع یازده جمله نخست دنباله حسابی $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \dots$ چقدر است؟
- ۳- مجموع $3 + 8 + 13 + \dots + (5n + 3)$ را حساب کنید.
- ۴- جمله عمومی دنباله‌ای حسابی به صورت $a_n = \frac{3n-1}{4}$ است. مجموع بیست جمله نخست این دنباله حسابی چقدر است؟
- ۵- مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی برابر با -504 است. اگر جمله نخست این دنباله حسابی ۶ و جمله آخر آن -62 باشد، این دنباله حسابی چند جمله دارد؟
- ۶- در دنباله‌ای حسابی $a_1 + a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} + a_{24} = 225$. مجموع بیست و چهار جمله نخست این دنباله چقدر است؟
- ۷- در دنباله‌ای حسابی $a_1 = -9$ و مجموع هفده جمله نخست این دنباله برابر ۱۵ شده است. قدرنسبت این دنباله حسابی چقدر است؟
- ۸- چند تا از جمله‌های دنباله حسابی $\dots, -5, -\frac{11}{2}, -6, \dots$ را از ابتدا جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر -25 شود؟
- ۹- در دنباله‌ای حسابی $a_8 = 9$ و $a_7 + a_9 = 20$. مجموع بیست جمله نخست این دنباله چقدر است؟
- ۱۰- در دنباله‌ای حسابی $a_1 + a_8 = 25$ و $a_3 + a_5 = 19$. مجموع دوازده جمله نخست این دنباله چقدر است؟
- ۱۱- جمله نخست دنباله‌ای حسابی برابر ۸ و مجموع پانزده جمله نخست آن برابر ۱۱۷۰ است. مجموع ده جمله نخست این دنباله چقدر است؟
- ۱۲- در دنباله‌ای حسابی، سه برابر جمله دهم ۲۴ واحد از جمله دوم کمتر است. مجموع بیست و هفت جمله نخست این دنباله چقدر است؟
- ۱۳- در دنباله‌ای حسابی مجموع چهارده جمله نخست ۷۷ واحد بیشتر از مجموع سه جمله نخست است. جمله چندم این دنباله برابر ۷ است؟
- ۱۴- مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی که جمله نخست آن ۱۷ و قدرنسبت آن -2 است برابر ۷۲ است. این دنباله چند جمله دارد؟
- ۱۵- جمله نخست دنباله‌ای حسابی برابر ۲ است و مجموع پنج جمله نخست این دنباله برابر با یک چهارم مجموع پنج جمله بعدی آن است. مجموع سی جمله نخست این دنباله چقدر است؟
- ۱۶- در دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت منفی، $a_1 = -3$ و $a_3 a_7 = 24$. مجموع دوازده جمله نخست این دنباله چقدر است؟
- ۱۷- درباره دنباله حسابی a_1, a_2, \dots, a_{21} می‌دانیم که مجموع جمله‌های با ردیف فرد پانزده واحد از مجموع جمله‌های با ردیف زوج بیشتر است. مجموع جمله‌های این دنباله حسابی چقدر است؟

- ۱۸- مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی برابر ۷۱۵ است. اگر به اولین جمله ۱ واحد، به دومین جمله ۳ واحد، به سومین جمله ۵ واحد و ... اضافه کنیم، حاصل جمع جمله‌های دنباله جدید برابر با ۸۳۶ می‌شود. مجموع اولین جمله، آخرین جمله و جمله وسط دنباله حسابی اولیه چقدر است؟
- ۱۹- مجموع n جمله نخست دنباله‌های حسابی $1, 4, 7, \dots$ و $23, 25, 27, \dots$ برابر است. مقدار n چقدر است؟
- ۲۰- معادله زیر را حل کنید که در سمت چپ آن جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی با هم جمع شده‌اند:

$$(3+x) + (9+x) + (15+x) + \dots + (93+x) = 832$$
- ۲۱- در دنباله‌ای حسابی $a_3 = 3$ و $a_7 = -13$. در میان عددهای S_1, S_2, S_3, \dots و ... کمترین مقدار چقدر است؟
- ۲۲- در دنباله‌ای حسابی $a_1 > 0$ و $3a_8 = 5a_{13}$. در میان عددهای S_1, S_2, S_3, \dots بیشترین مقدار چقدر است؟
- ۲۳- در دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۲، مقدار $\frac{S_{2n}}{S_n}$ به مقدار n بستگی ندارد. مجموع پانزده جمله نخست این دنباله چقدر است؟
- ۲۴- مجموع n جمله نخست دنباله‌ای حسابی (به ازای هر n) برابر با $3n - 4n^2$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟
- ۲۵- جمله‌های دنباله‌ای حسابی عددهایی طبیعی‌اند. جمله هشتم این دنباله مضربی از ۴ است و مجموع پانزده جمله نخست این دنباله عددی در بازه $(393, 337)$ است. جمله هشتم این دنباله چقدر است؟
- ۲۶- مجموع مضرب‌های دو رقمی ۷ چقدر است؟
- ۲۷- مجموع عددهای فرد در بازه $[97, 13]$ چقدر است؟
- ۲۸- مجموع عددهای سه رقمی که بر ۱۷ بخش‌پذیر نیستند چقدر است؟
- ۲۹- فنی از سیزده نیم‌دایره پشت سر هم که مرکزهای آنها یکی در میان در نقطه‌های A و B است درست شده است. نیم‌دایره اول به مرکز A و شعاع $\frac{5}{5}$ است، نیم‌دایره دوم به مرکز B و شعاع ۱ است، نیم‌دایره بعدی به مرکز A و شعاع $\frac{1}{5}$ است و همین‌طور تا نیم‌دایره سیزدهم. طول این فنر چقدر است؟
- 
- ۳۰- خانه‌های یک خیابان پشت سرهم از ۱ تا ۴۹ شماره‌گذاری شده‌اند. ثابت کنید خانه‌ای وجود دارد که مجموع شماره‌های خانه‌های پیش از آن با مجموع شماره‌های خانه‌های پس از آن برابر است. شماره این خانه چیست؟
- ۳۱- در یک دوره ۱۵ روزه، روی یک درخت گیلاس هر روز ۱۲ شکوفه بیشتر از روز قبل روئیده است. اگر تعداد شکوفه‌های روئیده شده روی این درخت در ۹ روز نخست برابر با تعداد شکوفه‌های روئیده شده در ۶ روز آخر باشد، در این ۱۵ روز چند شکوفه روی این درخت روئیده است؟
- ۳۲- در دنباله‌ای حسابی $S_1 = 6$ و $S_7 = 105$. ثابت کنید $\frac{S_n}{S_{n-3}} = \frac{n+3}{n-3}$.
- ۳۳- در یک دنباله حسابی قدرنسبت دو برابر جمله اول است. ثابت کنید $\frac{S_n}{S_m} = \frac{n^2}{m^2}$.
- ۳۴- اگر S_n مجموع n جمله نخست یک دنباله حسابی باشد، ثابت کنید $S_{2n} - 2S_n = n^2 d$.
- ۳۵- ثابت کنید در دنباله‌های حسابی، $\frac{S_m - S_n}{S_{m+n}} = \frac{m-n}{m+n}$.
- ۳۶- دنباله‌ای حسابی $2n+1$ جمله دارد. ثابت کنید نسبت مجموع جمله‌های با ردیف فرد در این دنباله به مجموع جمله‌های با ردیف زوج در این دنباله برابر است با $\frac{n+1}{n}$.
- ۳۷- در دنباله‌ای حسابی، به ازای هر n طبیعی، $S_{2n} = 4S_n$. ثابت کنید به ازای هر دو عدد طبیعی مانند m و k ، $\frac{S_m}{S_k} = \left(\frac{m}{k}\right)^2$.
- ۳۸- در دنباله‌ای حسابی $S_k = m$ و $S_m = k$ ($m \neq k$). ثابت کنید $S_{m+k} = -(m+k)$.
- ۳۹- فرض کنید a_1, a_2, \dots دنباله‌ای حسابی باشد و عددهایی طبیعی مانند m, n, k وجود داشته باشند که $S_m = m^2 k$ و $S_k = k^3$. ثابت کنید $S_n = n^2 k$ ($m \neq n$).

۴۰- اگر S_k مجموع k جمله نخست دنباله حسابی a_1, a_2, \dots باشد، ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی مانند n ,

$$S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = 0$$

۴۱- در دنباله‌ای حسابی، $\frac{S_m}{m^2} = \frac{m^2}{n^2}$ ثابت کنید. $\frac{(m+1)S_m}{(n+1)S_n} = \frac{m^2}{n^2}$

۴۲- در دنباله‌ای هندسی همواره $S_n = 3^n - 1$. جمله نخست و قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

۴۳- مقدار $\frac{2^{14} + 2^{13} + \dots + 2 + 1}{2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1}$ چقدر است؟

۴۴- جمله نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۵ و قدرنسبت آن برابر ۳ است. مجموع چند جمله نخست این دنباله برابر ۲۰۰ است؟

۴۵- در دنباله‌ای هندسی $a_7 = 8$ و $a_3 = 4$. مجموع ده جمله نخست این دنباله چقدر است؟

۴۶- کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند n که $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} > 1000$ چقدر است؟

۴۷- درباره دنباله a_n می‌دانیم عددهای $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}, \dots$ دنباله‌ای هندسی با جمله نخست ۱ و قدرنسبت $\frac{1}{3}$

تشکیل می‌دهند. دستوری برای جمله عمومی a_n پیدا کنید.

۴۸- در دنباله‌ای هندسی $a_1 = -2$ و $a_6 = -486$. مجموع شش جمله نخست این دنباله چقدر است؟

۴۹- جمله نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۵ و مجموع سه جمله نخست آن برابر $\frac{31}{5}$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۵۰- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر $\frac{1}{4}$ و جمله آخر آن برابر ۲ است. اگر مجموع جمله‌های این دنباله هندسی برابر ۲۵۴ باشد، جمله نخست

آن چقدر است؟

۵۱- در دنباله‌ای هندسی $a_3 = 18$ ، $S_3 = 26$ و $q > 0$. مجموع ده جمله نخست این دنباله چقدر است؟

۵۲- جمله نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۳، جمله آخر آن برابر ۹۶ و مجموع جمله‌های آن برابر ۱۸۹ است. تعداد جمله‌های این دنباله چندتا است؟

۵۳- در دنباله‌ای هندسی مجموع چهار جمله نخست برابر با ۳۰ و مجموع چهار جمله بعدی برابر با ۴۸۰ شده است. جمله نخست این دنباله چه عددی می‌تواند باشد؟

۵۴- در دنباله‌ای هندسی مجموع دو جمله نخست برابر ۴ و مجموع سه جمله نخست برابر ۱۳ است. مجموع پنج جمله نخست این دنباله چقدر است؟

۵۵- مجموع پنجاه جمله نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت مثبت برابر ۱ و مجموع پنجاه جمله بعدی آن برابر 5^{100} است. جمله نخست و قدرنسبت این دنباله را پیدا کنید.

۵۶- معادله $0 = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{1396}$ را حل کنید.

عبارت‌های داده شده را ساده کنید. (۵۷-۵۸)

$$A = \frac{x^{35} + x^{34} + \dots + x + 1}{x^{11} + x^{10} + \dots + x + 1} \quad 57$$

$$B = \frac{x^{29} + x^{28} + \dots + x + 1}{x^9 + x^8 + \dots + x + 1} \quad 58$$

۵۹- در دنباله‌ای هندسی که تعداد جمله‌های زوج است، مجموع همه جمله‌ها پنج برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۶۰- ثابت کنید $5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55 \dots 5}_{100 \text{ تا}} = \frac{5}{81} (10^{101} - 910)$

۶۱- ثابت کنید $1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + 100 \times 2^{99} = 1 + 99 \times 2^{100}$

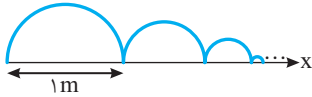
۶۲- ثابت کنید در حاصل عبارت زیر نمای همه توان‌های x زوج است:

$$A = (1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^9 + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^9 + x^{10})$$

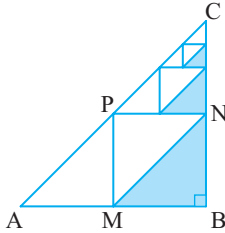
۶۳- عددی حقیقی و n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$(1+a+a^2+\dots+a^n)^2 - a^n = (1+a+a^2+\dots+a^{n-1})(1+a+a^2+\dots+a^{n+1})$$

۶۴- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی عددی صحیح است و اگر جمله نخست آن را که عددی مثبت است از جمله آخرش کم کنیم، حاصل عددی مثبت است که از ۱۷ بزرگ‌تر نیست. اگر مجموع جمله‌های این دنباله به‌جز جمله نخست آن از ۲۶ کمتر نباشد، قدرنسبت این دنباله چقدر است؟



۶۵- موجی به صورت نیم‌دایره‌هایی بالای محور x ، با قطر اولیه 1 m در حرکت است و هر بار که به محور x برخورد می‌کند ۳۰٪ از طول قطر آن کاسته می‌شود. مجموع محیط این نیم‌دایره‌ها پس از ۱۰ مرتبه برخورد با محور x چقدر است؟



۶۶- مثلث قائم‌الزاویه ABC با ضلع‌های قائم $AB=BC=6$ مفروض است. وسط‌های سه ضلع را به هم وصل می‌کنیم (مثلث MNP) و یکی از مثلث‌های گوشه را رنگ می‌کنیم. سپس وسط‌های سه ضلع مثلث PNC را به هم وصل می‌کنیم و یکی از مثلث‌های گوشه را رنگ می‌کنیم. اگر این کار را ۲۰ مرتبه انجام دهیم، مجموع مساحت قسمت‌های رنگ شده چقدر است؟

۶۷- دربارهٔ دنبالهٔ a_1, a_2, \dots می‌دانیم $a_1=1$ و همواره $a_n a_{n+1} = 4^n$. مجموع $a_1 + \dots + a_{19}$ را پیدا کنید.

۶۸- مجموع $2n$ جملهٔ نخست دو دنبالهٔ هندسی $\dots, aq^2, aq, a, \dots$ و $\dots, \frac{q}{a}, \frac{q}{a}, \frac{1}{a}, \dots$ برابر است. ثابت کنید $-1 < q < 1$.

۶۹- فرض کنید S_1, S_2, \dots, S_n و مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌هایی هندسی باشند که جملهٔ نخست هر یک از آن‌ها برابر ۱ و قدرنسبت آن‌ها به ترتیب ۱، ۲، ... و n است. ثابت کنید

$$S_1 + S_2 + 2S_3 + 3S_4 + \dots + (n-1)S_n = 1^n + 2^n + \dots + n^n$$

۷۰- در دنباله‌ای هندسی با جملهٔ نخست a_1 و قدرنسبت q ثابت کنید $na_1(qS_n + (1-q)(S_1 + S_2 + \dots + S_n)) = na_1$.

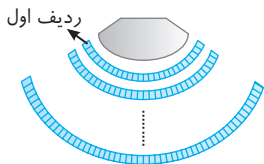
۷۱- فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_n دنباله‌ای هندسی باشد و

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = T$$

$$\text{ثابت کنید } (a_1 a_2 \dots a_n)^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$$

۷۲- ثابت کنید در دنباله‌های هندسی $(S_n(S_{r_n} - S_{r_n})) = (S_{r_n} - S_n)^2$

- ۱- مجموع ۲۰ جمله نخست دنباله حسابی $1, 3, 5, 7, \dots$ چقدر است؟
 (۱) -480 (۲) -240 (۳) 240 (۴) 480
- ۲- در یک دنباله حسابی $a_1 = 34$ و $a_{14} = -5$. مجموع ۱۸ جمله نخست این دنباله چقدر است؟
 (۱) 133 (۲) 143 (۳) 153 (۴) 163
- ۳- جمله اول دنباله‌ای حسابی برابر -5 و جمله آخر این دنباله ۴۹ است. اگر مجموع جمله‌های این دنباله برابر ۶۱۶ باشد، این دنباله چند عضو دارد؟
 (۱) 25 (۲) 26 (۳) 27 (۴) 28
- ۴- در دنباله‌ای حسابی $a_9 + a_{10} = 13$. مجموع ۱۸ جمله نخست این دنباله حسابی چقدر است؟
 (۱) 113 (۲) 117 (۳) 119 (۴) 121
- ۵- جمله میانی دنباله‌ای حسابی که یازده جمله دارد برابر ۳۰ است. مجموع جمله‌های این دنباله حسابی چقدر است؟
 (۱) 330 (۲) 335 (۳) 340 (۴) 350
- ۶- قدرنسبت دنباله‌ای حسابی برابر -3 و مجموع سیزده جمله نخست آن برابر ۹۱ است. جمله نخست این دنباله حسابی چقدر است؟
 (۱) 20 (۲) 25 (۳) 30 (۴) 35
- ۷- در دنباله‌ای حسابی $S_9 - S_7 = 20$. مقدار S_{16} چقدر است؟
 (۱) 150 (۲) 160 (۳) 165 (۴) 170
- ۸- چند تا از جمله‌های دنباله حسابی $14, 16, 18, \dots$ را از ابتدا باید جمع کنیم تا مجموع آن‌ها صفر شود؟
 (۱) 18 (۲) 19 (۳) 20 (۴) 21
- ۹- حداقل چند جمله از ابتدای دنباله حسابی $14, 17, 20, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل منفی شود؟
 (۱) 12 (۲) 14 (۳) 15 (۴) 17
- ۱۰- یک سالن تئاتر در ردیف اول ۴۰ صندلی، در ردیف دوم ۴۲ صندلی، در ردیف سوم ۴۴ صندلی، ... دارد. اگر این سالن ۷۵ ردیف صندلی داشته باشد، ظرفیت سالن چند نفر است؟
 (۱) 8730 (۲) 8550 (۳) 7520 (۴) 9270
- ۱۱- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم و پنجم برابر با ۸ شده است. مجموع هفت جمله نخست این دنباله حسابی چقدر است؟
 (۱) 30 (۲) 42 (۳) 28 (۴) 24
- ۱۲- در دنباله‌ای حسابی مجموع جمله‌های سوم، هفتم، چهاردهم و هجدهم برابر با ۱۰ شده است. مجموع بیست جمله نخست این دنباله چقدر است؟
 (۱) 40 (۲) 70 (۳) 60 (۴) 50
- ۱۳- جمله عمومی دنباله‌ای حسابی به صورت $a_n = -3n + 7$ است. مجموع ۷ جمله نخست این دنباله حسابی چقدر است؟
 (۱) -19 (۲) -27 (۳) -33 (۴) -35
- ۱۴- در دنباله‌ای حسابی $a_1 = 2$ و $S_{14} - S_{10} = 87$. مقدار a_9 چقدر است؟
 (۱) 6 (۲) 8 (۳) -6 (۴) -8
- ۱۵- در یک دنباله حسابی مجموع ۱۱ جمله نخست برابر ۱۶۵ است. جمله ششم این دنباله چقدر است؟
 (۱) 18 (۲) 15 (۳) 17 (۴) 21
- ۱۶- در یک دنباله حسابی، اگر مجموع هفده جمله اول با مجموع سیزده جمله اول برابر باشد، مجموع سی جمله اول دنباله کدام است؟
 (۱) 30 (۲) 60 (۳) 4 (۴) صفر
- ۱۷- در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 3n(n-3)$ به دست می‌آید. جمله عمومی دنباله کدام است؟
 (۱) $6n - 12$ (۲) $3n - 6$ (۳) $6n - 6$ (۴) $3n - 12$



- ۱۸- در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول دنباله برابر $4n^2 - 5n$ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۱۹- در دنباله حسابی $1, 2x-1, 3x+1, \dots$ مجموع ده جمله اول برابر ۸۵ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟
 (۱) ۱۱ (۲) -۱۱ (۳) ۹ (۴) -۹
- ۲۰- در دنباله حسابی $2, 3, 8, \dots$ مجموع پنج جمله چهارم چقدر است؟
 (۱) ۴۲۰ (۲) ۴۴۲ (۳) ۴۶۰ (۴) ۴۱۵
- ۲۱- اگر اعداد سمت چپ معادله $x+7+y+\dots+117=117$ جملات یک دنباله حسابی باشند، مقدار x کدام است؟
 (۱) ۲۳ (۲) ۲۵ (۳) ۲۷ (۴) ۲۹
- ۲۲- در یک دنباله حسابی با بیست جمله، مجموع سه جمله اول برابر $\sqrt{2}-3$ و مجموع سه جمله آخر برابر $\sqrt{2}+3$ است. مجموع تمام جملات دنباله کدام است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۲ (۴) ۲۴
- ۲۳- در یک دنباله حسابی ۳ واحد به قدرنسبت اضافه می‌کنیم و ۵ واحد از جمله اول کم می‌کنیم. به مجموع بیست جمله اول چقدر اضافه می‌شود؟
 (۱) ۴۵۰ (۲) ۴۷۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۴۹۰
- ۲۴- در یک دنباله حسابی $S_{10}=75$ و $S_9=9$. مقدار S_6 چقدر است؟
 (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) ۳
- ۲۵- در دنباله‌ای حسابی $S_6=9$ و $S_{12}=90$. مقدار $S_{13}+S_{17}$ چقدر است؟
 (۱) ۳۱۳ (۲) ۳۱۵ (۳) ۳۲۱ (۴) ۳۲۳
- ۲۶- در یک دنباله حسابی $S_{10}=27$ و $S_{27}=10$. حاصل S_{37} کدام است؟
 (۱) -۷ (۲) -۳۷ (۳) -۲۷ (۴) -۱۷
- ۲۷- مجموع تعدادی از جمله‌های دنباله حسابی $40, 38, 36, \dots$ از ابتدا حداکثر چقدر است؟
 (۱) ۴۰۰ (۲) ۴۱۰ (۳) ۴۲۰ (۴) ۴۳۰
- ۲۸- در دنباله حسابی a_1, a_2, a_3, \dots می‌دانیم $a_8=5$. حاصل $a_1+a_5+a_9+\dots+a_{29}$ چند است؟
 (۱) ۹۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۸۱
- ۲۹- اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d باشد. حاصل عبارت $\frac{S_{3n}}{S_{2n}-S_n}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3a}{d}$ (۲) $\frac{3d}{a}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$
- ۳۰- اگر قدرنسبت یک دنباله حسابی برابر ۲ باشد و $a_1+a_2+\dots+a_{100}=100$ ، حاصل $a_1+a_2+\dots+a_{100}$ کدام است؟
 (۱) ۲۵ (۲) ۵۰ (۳) ۷۵ (۴) ۱۰۰
- ۳۱- در دنباله‌ای هندسی $q=\frac{1}{3}$ ، $a_k=5$ و $S_k=1820$. مقدار a_1 چقدر است؟
 (۱) ۱۲۱۰ (۲) ۱۲۱۲ (۳) ۱۲۱۵ (۴) ۱۲۱۸
- ۳۲- در دنباله هندسی $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{32}, \dots$ مجموع ده جمله اول کدام است؟
 (۱) $511\sqrt{2}$ (۲) $1023\sqrt{2}$ (۳) $2047\sqrt{2}$ (۴) $4095\sqrt{2}$
- ۳۳- در دنباله‌ای هندسی و غیرثابت $4S_4=5S_7$. مربع قدرنسبت این دنباله هندسی کدام می‌تواند باشد؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$
- ۳۴- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر $-\frac{1}{2}$ و مجموع هشت جمله نخست آن برابر $\frac{85}{64}$ شده است. جمله نخست این دنباله چقدر است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{7}{2}$
- ۳۵- جمله نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۷، جمله آخر آن برابر ۴۴۸ و مجموع جمله‌های آن برابر ۸۸۹ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۶- در یک دنباله هندسی مجموع چهار جمله اول برابر ۲ و مجموع هشت جمله اول برابر 13^0 است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۷- در دنباله‌ای هندسی مجموع چهار جمله نخست برابر ۲۰ و مجموع چهار جمله بعدی برابر 32^0 است. مجموع دوازده جمله نخست این دنباله هندسی چقدر است؟

(۱) ۵۴۱۰ (۲) ۵۴۲۰ (۳) ۵۴۴۰ (۴) ۵۴۶۰

۳۸- در یک دنباله هندسی، مجموع ۱۰ جمله اول ۲۴۴ برابر مجموع ۵ جمله اول است. جمله پنجم چند برابر جمله اول است؟

(۱) ۸۱ (۲) ۲۴۳ (۳) ۲۷ (۴) ۷۲۹

۳۹- مجموع ده جمله اول دنباله حسابی $a, a+2, a+4, \dots$ با مجموع ده جمله اول دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ برابر است. مقدار a کدام است؟

(۱) $91/2$ (۲) $92/3$ (۳) $93/3$ (۴) $94/1$

۴۰- در دنباله هندسی a_1, a_2, \dots, a_n می‌دانیم $S_n = 16^0$ ، $a_3 - a_1 = 32$ و $a_7 - a_4 = 96$. مقدار n کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۶

۴۱- مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = \frac{2(2^n - 1)}{4}$ به دست می‌آید. جمله پنجم دنباله کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۴۲- مجموع ده جمله اول دنباله هندسی a_1, a_1q, a_1q^2, \dots دو برابر مجموع ده جمله اول دنباله هندسی $a_1, -a_1q, a_1q^2, \dots$ است. مقدار q کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۴۳- مجموع سه جمله نخست دنباله‌ای هندسی برابر ۲۱ و مجموع سه جمله بعدی آن برابر ۱۶۸ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۴- در شکل روبه‌رو تیغه‌های آکوستیک را می‌بینید که قادرند $\frac{5}{9}$ صوت صادرشده را جذب کنند و آن را به تیغه روبه‌رو



منعکس کنند. حداقل پس از چند برخورد بیش از ۹۰ درصد صوت صادر شده جذب شده است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۵- یک مثلث با محیط p مفروض است. اگر وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنیم، یک مثلث کوچک‌تر ایجاد می‌شود و این عمل را روی مثلث کوچک‌تر ایجاد شده تکرار می‌کنیم. اگر این عمل را ده بار انجام دهیم، مجموع محیط مثلث‌ها چند برابر p است؟

(۱) $\frac{1023}{512}$ (۲) $\frac{511}{256}$ (۳) $\frac{2047}{1023}$ (۴) $\frac{4095}{2048}$

۴۶- مقدار x از معادله $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+9} = 8184$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷- اگر $f(x) = \frac{x^9 - x}{x + x\sqrt{x} + x^2 + x^2\sqrt{x} + \dots + x^8 + x^8\sqrt{x}}$ ، مقدار $f(1/96)$ چقدر است؟

(۱) $0/2$ (۲) $0/3$ (۳) $0/4$ (۴) $0/5$

۴۸- حاصل عبارت $\frac{x^5 - 1}{x - 1} - (x + 1)(x^2 + 1)$ کدام است؟

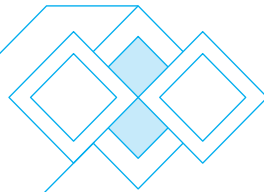
(۱) $x^4 + x$ (۲) $2x^4$ (۳) x^4 (۴) $x^4 - x^3$

۴۹- جواب مثبت معادله $1 + x + x^2 + \dots + x^9 = \frac{x^{10}}{x - 1} - x$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

۵۰- اگر $x^6 - y^6 = 2(x - y)$ و $x \neq y$ حاصل عبارت $(x + y)(x^4 + y^4 + x^2y^2)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$



۱ در این دنباله $a_1 = 9$ و $d = 5 - 9 = -4$. اکنون توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2 \times 9 + (19-1)(-4)) = -513$$

۲ الف) جمله اول دنباله برابر $\frac{3}{2}$ و قدرنسبت آن برابر $\frac{1}{2}$ است.

بنابراین مجموع صد جمله نخست آن برابر است با

$$S_{100} = \frac{100}{2}(2a_1 + 99d) = 50(2 \times \frac{3}{2} + 99 \times \frac{1}{2}) = 5975$$

ب) جمله اول دنباله برابر $\frac{1}{15}$ و قدرنسبت آن برابر $\frac{1}{12}$ است.

بنابراین مجموع یازده جمله نخست آن برابر است با

$$S_{11} = \frac{11}{2}(2a_1 + 10d) = \frac{11}{2}(2 \times \frac{1}{15} + 10 \times \frac{1}{6}) = \frac{33}{2}$$

۳ مجموع مورد نظر، مجموع یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و

قدرنسبت ۵ است که $n+1$ جمله دارد:

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{2}(2a_1 + (n+1-1)d) = \frac{(n+1)}{2}(6 + 5n) = \frac{5n^2 + 11n + 6}{2}$$

۴ راه حل اول با قرار دادن $n=2$ و $n=1$ در جمله عمومی مقدار

جمله های اول و دوم دنباله را حساب می کنیم: $a_1 = \frac{3 \times 1 - 1}{4} = \frac{1}{2}$ و

$$a_2 = \frac{3 \times 2 - 1}{4} = \frac{5}{4} \text{ بنابراین } d = a_2 - a_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10(2 \times \frac{1}{2} + 19 \times \frac{3}{4}) = \frac{305}{2}$$

راه حل دوم توجه کنید که $a_1 = \frac{3 \times 1 - 1}{4} = \frac{1}{2}$ و $a_{20} = \frac{3 \times 20 - 1}{4} = \frac{59}{4}$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10(\frac{1}{2} + \frac{59}{4}) = \frac{305}{2}$$

۵ چون مجموع جمله های دنباله مورد نظر منتهای است، پس تعداد

جمله های آن هم منتهای است. اگر تعداد این جمله ها برابر با n باشد، آن گاه

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow -504 = \frac{n}{2}(6 + (-62)) \Rightarrow -504 = -28n \Rightarrow n = 18$$

بنابراین دنباله حسابی مورد نظر ۱۸ جمله دارد.

۶ توجه کنید که $a_1 + a_{24} = a_2 + a_{23} = a_3 + a_{22} = \dots = a_{12} + a_{13}$

فرض مسئله نتیجه می شود

$$2(a_1 + a_{24}) = 225 \Rightarrow a_1 + a_{24} = 75$$

$$S_{24} = \frac{24}{2}(a_1 + a_{24}) = 12 \times 75 = 900$$

۷ چون a_1 و S_{17} را داریم d را می خواهیم، از دستور زیر استفاده می کنیم:

$$S_{17} = \frac{17}{2}(2a_1 + (17-1)d) \Rightarrow 15 = \frac{17}{2}(2(-9) + 16d) = 17(-9 + 8d)$$

$$8d = \frac{15}{17} + 9 = \frac{168}{17} \Rightarrow d = \frac{21}{17}$$

۸ جمله اول دنباله برابر ۶- و قدرنسبت آن برابر است با $\frac{1}{2}$. بنابراین

مجموع n جمله نخست دنباله برابر است با

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(-12 + \frac{n-1}{2}) = \frac{n^2 - 25n}{4}$$

پس

$$\frac{n^2 - 25n}{4} = -25 \Rightarrow n^2 - 25n + 100 = 0 \Rightarrow (n-5)(n-20) = 0$$

$$n = 5, n = 20$$

بنابراین مجموع پنج جمله اول دنباله برابر ۲۵- است و مجموع بیست جمله اول دنباله هم برابر ۲۵- است.

۹ توجه کنید که

$$a_5 = 9 \Rightarrow a_1 + 4d = 9, \quad a_7 + a_9 = 20 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 20$$

از حل دستگاه معادله های فوق نتیجه می شود $a_1 = 1$ و $d = 2$. بنابراین

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10(2 + 38) = 400$$

۱۰ توجه کنید که

$$a_1 + a_8 = 25 \Rightarrow 2a_1 + 7d = 25, \quad a_7 + a_9 = 19 \Rightarrow 2a_1 + 6d = 19$$

از حل دستگاه معادله های فوق نتیجه می شود $a_1 = -\frac{17}{2}$ و $d = 6$. بنابراین

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 6(-17 + 66) = 294$$

۱۱ در این دنباله حسابی $a_1 = 8$. اکنون توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2 \times 8 + (15-1)d) \Rightarrow 1170 = \frac{15}{2}(16 + 14d) = 120 + 105d$$

$$1050 = 105d \Rightarrow d = 10$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + (10-1)d) = 5(16 + 9 \times 10) = 530$$

۱۲ بنابر فرض $3a_{10} = a_7 - 24$. بنابراین

$$3(a_1 + 9d) = a_1 + d - 24 \Rightarrow 2a_1 + 26d = -24$$

از طرف دیگر، $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ ، در نتیجه

$$S_{27} = \frac{27}{2}(2a_1 + 26d) = \frac{27}{2}(-24) = -324$$

۱۳ بنابر فرض مسئله،

$$S_{14} = 77 + S_3 \Rightarrow \frac{14}{2}(2a_1 + 13d) = 77 + \frac{3}{2}(2a_1 + 2d)$$

$$14a_1 + 91d = 77 + 3a_1 + 3d \Rightarrow 11a_1 + 88d = 77 \Rightarrow a_1 + 8d = 7$$

بنابراین $a_9 = 7$

در دنباله حسابی $23, 25, 27, \dots$ جمله اول برابر ۲۳ و قدرنسبت برابر ۲ است. پس مجموع n جمله نخست آن برابر است با

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \times 23 + 2(n-1)) = \frac{(2n+44)n}{2}$$

بنابراین

$$\frac{(2n-1)n}{2} = \frac{(2n+44)n}{2} \Rightarrow 2n-1 = 2n+44 \Rightarrow n=45$$

۲۰ توجه کنید که قدرنسبت دنباله حسابی سمت چپ برابر است با $9+x-(3+x)=6$. چون جمله اول برابر $3+x$ و جمله آخر برابر $93+x$ است، پس

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 93+x = 3+x + (n-1)6 \Rightarrow n=16$$

بنابراین، چون $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ مجموع سمت چپ معادله برابر است با

$$\frac{16}{2}(3+x+93+x) = 16(48+x)$$

$$.x=4 \text{ پس } 16(48+x) = 832$$

۲۱ ابتدا قدرنسبت و جمله اول دنباله را به دست می آوریم. بنابر فرض مسئله،

$$a_3 = a_1 + 2d = -13, \quad a_4 = a_1 + 3d = 3$$

از حل دستگاه معادله های فوق نتیجه می شود $a_1 = -21$ و $d = 4$. اکنون توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(-42 + 4(n-1)) = 2n^2 - 23n$$

کمترین مقدار عبارت $2n^2 - 23n$ به ازای $n = \frac{23}{4}$ به دست می آید که چون

n عددی طبیعی است، پس کمترین مقدار S_n ها یکی از عددهای S_5 و S_6 است: $S_5 = -65$ و $S_6 = -66$. پس S_6 کمترین مقدار در میان عددهای S_1, S_2, S_3, \dots است.

۲۲ قدرنسبت دنباله را با d نشان می دهیم. در نتیجه چون $3a_8 = 5a_{13}$ پس

$$3(a_1 + 7d) = 5(a_1 + 12d) \Rightarrow 2a_1 = -39d$$

اکنون توجه کنید که

$$S_{10} = 5(2a_1 + 9d) = -150d, \quad S_{11} = \frac{11}{2}(2a_1 + 10d) = -159.5d$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = -200d, \quad S_{11} = \frac{11}{2}(2a_1 + 10d) = -199.5d$$

چون $a_1 > 0$ ، پس $-39d = 2a_1 > 0$. در نتیجه $d < 0$ عددی مثبت است. بنابراین بزرگترین عدد میان عبارتهای به دست آمده $-200d$ ، یعنی S_{10} است.

۲۳ چون $\frac{S_{2n}}{S_n}$ به مقدار n بستگی ندارد، پس مقدار آن به ازای $n=1$ و $n=2$ برابر است:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{S_4}{S_2} \Rightarrow \frac{\frac{2}{2}(2a_1 + 2d)}{a_1} = \frac{\frac{4}{2}(2a_1 + 4d)}{\frac{2}{2}(2a_1 + 2d)}$$

$$\frac{2(a_1 + 2d)}{a_1} = \frac{2(2a_1 + 4d)}{2a_1 + 2d} \Rightarrow a_1 = 1$$

$$\text{به این ترتیب } S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = \frac{15}{2}(2 \times 1 + 14 \times 2) = 225$$

۱۴ می توان نوشت

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow 72 = \frac{n}{2}(2 \times 17 - 2(n-1))$$

$$n^2 - 18n + 72 = 0 \Rightarrow (n-6)(n-12) = 0 \Rightarrow n=6, n=12$$

در نتیجه این دنباله یا شش جمله دارد یا دوازده جمله.

۱۵ ابتدا توجه کنید که مجموع پنج جمله دوم دنباله برابر است با

$$S_{10} - S_5$$

بنابراین

$$S_5 = \frac{1}{2}(S_{10} - S_5) \Rightarrow 5S_5 = S_{10} \Rightarrow 5 \times \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = \frac{10}{2}(2a_1 + 4d)$$

$$25(4+4d) = 10(4+4d) \Rightarrow d = -6$$

$$\text{در نتیجه } S_{30} = \frac{30}{2}(2a_1 + 29d) = 15(2 \times 2 - 29 \times 6) = -2550$$

۱۶ توجه کنید که $a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1)d$ بنابراین

$$a_4 a_5 = (-3 + 4d)(-3 + 5d) = 24 \Rightarrow 4d^2 - 8d - 5 = 0$$

$$(4d+1)(d-5) = 0 \Rightarrow d = -\frac{1}{4}, d = \frac{5}{4} \text{ (غ.ق.)}$$

از طرف دیگر $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ بنابراین

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2(-3) + 11(-\frac{1}{4})) = -69$$

۱۷ فرض کنید قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر با d باشد. در این

صورت یازده جمله a_1, a_2, \dots, a_{11} (جمله های بار دیف فرد) دنباله ای حسابی با قدرنسبت $2d$ تشکیل می دهند. همین طور ده جمله a_2, a_3, \dots, a_{11} (جمله های بار دیف زوج) دنباله ای حسابی با قدرنسبت $2d$ تشکیل می دهند.

$$\text{بنابر فرض، } \frac{11}{2}(a_1 + a_{11}) = \frac{10}{2}(a_2 + a_{10}) + 15$$

$$\frac{11}{2}(a_1 + (a_1 + 20d)) = 5((a_1 + d) + (a_1 + 19d)) + 15 \Rightarrow a_1 + 10d = 15$$

$$\text{پس } S_{21} = \frac{21}{2}(2a_1 + 20d) = 21(a_1 + 10d) = 21 \times 15 = 315$$

۱۸ دنباله حسابی را با a_1, a_2, \dots, a_n نشان می دهیم. می دانیم

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 715$$

در نتیجه مجموع جدید برابر است با

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + (1+3+\dots+2n-1) = 836$$

$$715 + n^2 = 836 \Rightarrow n^2 = 121$$

در نتیجه $n=11$. اکنون باید مقدار $a_1 + a_2 + a_{11}$ را حساب کنیم. می دانیم

$$a_1 + a_{11} = 2a_6 \text{ در نتیجه } a_1 + a_2 + a_{11} = 3a_6$$

$$715 = a_1 + \dots + a_{11} = \frac{11}{2}(a_1 + a_{11}) = 11a_6 \Rightarrow a_6 = 65$$

بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با $3a_6 = 195$.

۱۹ در دنباله حسابی $1, 4, 7, \dots$ جمله اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر ۳ است. پس مجموع n جمله نخست آن برابر است با

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 + 3(n-1)) = \frac{(3n-1)n}{2}$$

۲۴

راه حل اول توجه کنید که

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 4n^2 - 3n - (4(n-1)^2 - 3(n-1)) \\ = 4n^2 - 3n - (4n^2 - 8n + 4 - 3n + 3) = 8n - 7$$

بنابراین $a_1 = 8 \times 1 - 7 = 1$ و $a_7 = 8 \times 7 - 7 = 49$. در نتیجه

$$d = a_7 - a_1 = 49 - 1 = 48$$

راه حل دوم توجه کنید که

$$S_1 = 4 \times 1^2 - 3 \times 1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1, \quad S_7 = 4 \times 7^2 - 3 \times 7 = 196 - 21 = 175$$

$$a_1 + a_7 = 10 \Rightarrow 1 + a_7 = 10 \Rightarrow a_7 = 9$$

پس $d = a_7 - a_1 = 9 - 1 = 8$.

۲۵

چون a_k مضرب ۴ است، فرض می‌کنیم $a_k = 4k$ که در آن k عددی طبیعی است. از طرف دیگر، $337 < S_{15} < 393$. پس

$$337 < \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) < 393 \Rightarrow 337 < 15(a_1 + 7d) < 393$$

$$337 < 15a_k < 393 \Rightarrow 337 < 60k < 393 \Rightarrow 5 \frac{37}{60} < k < 6 \frac{11}{20}$$

و چون k عددی طبیعی است، پس $k = 6$ و در نتیجه $a_k = 4k = 24$.

۲۶

مضرب‌های دو رقمی ۷ دنباله‌ای حسابی با جمله نخست ۱۴

و جمله آخر ۹۸ ($a_n = 98$) تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این

دنباله حسابی برابر ۷ است. بنابراین

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 98 = 14 + (n-1)7$$

$$7(n-1) = 98 - 14 = 84 \Rightarrow n-1 = 12 \Rightarrow n = 13$$

یعنی این دنباله حسابی ۱۳ جمله دارد و در نتیجه مجموع جمله‌های آن برابر

$$S_{13} = \frac{13}{2}(14 + 98) = 728$$

۲۷

این عددها دنباله‌ای حسابی با جمله نخست $a_1 = 13$ ، جمله آخر $a_n = 97$ و قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند. از طرف دیگر،

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 97 = 13 + (n-1)2 \Rightarrow n = 43$$

بنابراین دنباله مورد نظر ۴۳ جمله دارد. اکنون توجه کنید که

$$S_{43} = \frac{43}{2}(13 + 97) = 2365$$

توجه: ۵۰ عدد فرد کوچک‌تر از ۱۰۰ داریم که ۷ عدد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱ و ۹۹

از آن‌ها جز عددهای فرد در بازه $[13, 97]$ نیستند. بنابراین تعداد عددهای فرد

در این بازه ۴۳ تا است.

۲۸

ابتدا مجموع عددهای سه رقمی را که بر ۱۷ بخش پذیر هستند

به دست می‌آوریم. کوچک‌ترین عدد سه رقمی که بر ۱۷ بخش پذیر است، ۱۰۲

است و بزرگ‌ترین این عددها ۹۸۶ است. با توجه به $102 = 17 \times 6$ و $102 = 17 \times 6$

تعداد این عددها ۵۳ تا است و مجموع آن‌ها برابر است با

$$S_{53} = \frac{53}{2}(102 + 986) = 28832$$

اکنون مجموع تمام عددهای سه رقمی را به دست می‌آوریم. کوچک‌ترین عدد

سه رقمی ۱۰۰، بزرگ‌ترین آن‌ها ۹۹۹ و تعداد آن‌ها ۹۰۰ تا است. پس

$$S_{900} = \frac{900}{2}(100 + 999) = 494550$$

اگر ۲۸۸۳۲ را از عدد فوق کم کنیم، مجموع عددهای سه رقمی که بر ۱۷

بخش پذیر نیستند، به دست می‌آید که برابر است با ۴۶۵۷۱۸.

۲۹

محیط نیم‌دایره به شعاع r برابر با πr است. فنر مورد نظر از سیزده

نیم‌دایره درست شده است که شعاع‌های آن‌ها دنباله‌ای حسابی با جمله نخست

۵ و قدرنسبت ۵/۰ تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع شعاع‌های آن‌ها برابر

است با $S_{13} = \frac{13}{2}(2 \times 0.5 + 12 \times 0.5) = 45.5$. پس مجموع محیطنیم‌دایره‌ها یا همان طول فنر برابر است با $45.5 \times \pi$.

۳۰

شماره‌های خانه‌ها دنباله‌ای حسابی با جمله نخست ۱ و قدرنسبت ۱ تشکیل

می‌دهند. در این جا به دنبال n ای می‌گردیم که $S_{n-1} = S_{99} - S_n$. بنابراین

$$\frac{(n-1)n}{2} = \frac{99 \times 50}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n^2 - n = 4950 - n^2 - n$$

$$2n^2 = 4950 \Rightarrow n^2 = 49 \times 25 \Rightarrow n = 7 \times 5 = 35$$

بنابراین خانه سی و پنجم ویژگی مورد نظر را دارد.

۳۱

تعداد شکوفه‌هایی که هر روز می‌رویند دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت

۱۲ تشکیل می‌دهند. تعداد شکوفه‌هایی که در ۹ روز نخست رویده‌اند برابر با

 S_9 و تعداد شکوفه‌هایی که در ۶ روز آخر رویده‌اند $S_{15} - S_9$ است.بنابراین مسئله، $S_9 = S_{15} - S_9$. بنابراین $2S_9 = S_{15}$. به این ترتیب

$$2 \times \frac{9}{2}(2a_1 + (9-1)d) = \frac{15}{2}(2a_1 + (15-1)d)$$

$$36a_1 + 18 \times 8d = 30a_1 + 15 \times 14d$$

$$6a_1 = 66d = 66 \times 12 \Rightarrow a_1 = 66 \times 2 = 132$$

بنابراین کل شکوفه‌هایی که در این ۱۵ روز روی درخت رویده‌اند، برابر است با

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2 \times 132 + 14 \times 12) = 3240$$

۳۲

ابتدا توجه کنید که

$$S_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 6$$

$$S_7 = 105 \Rightarrow \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) = 105 \Rightarrow \frac{7}{2}(12 + 6d) = 105 \Rightarrow d = 3$$

بنابراین

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(12 + 3(n-1)) \\ S_{n-3} = \frac{(n-3)}{2}(2a_1 + (n-3-1)d) = \frac{(n-3)(12 + 3(n-4))}{2} \\ = \frac{3n(n+3)}{(n-3)(3n)} = \frac{n+3}{n-3}$$

۳۳

چون $d = 2a_1$ ، پس

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(d + (n-1)d) = \frac{n^2 d}{2}$$

$$\frac{S_n}{S_m} = \frac{\frac{n^2 d}{2}}{\frac{m^2 d}{2}} = \frac{n^2}{m^2}$$

به همین ترتیب $S_m = \frac{m^2 d}{2}$. بنابراین

۳۴

ابتدا توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d), \quad S_{2n} = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d)$$

بنابراین

$$S_{2n} - 2S_n = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d) - \frac{2n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ = n(2a_1 + (2n-1)d) - 2a_1 - (n-1)d = n(2n-1-n+1)d = n^2 d$$

بنابراین

$$\begin{aligned} S_{m+k} &= \frac{m+k}{2} (ra_1 + (m+k-1)d) \\ &= \frac{m+k}{2} \left(\frac{2m^2 + 2km + 2k^2 - 2m - 2k}{mk} - \frac{2(m+k-1)(m+k)}{mk} \right) \\ &= \frac{m+k}{mk} (m^2 + km + k^2 - m - k - m^2 - k^2 - 2km + m + k) \\ &= \frac{m+k}{mk} (-km) = -(m+k) \end{aligned}$$

راه حل دوم

$$S_m = k \Rightarrow \frac{m}{2} (ra_1 + (m-1)d) = k \Rightarrow 2ma_1 + (m^2 - m)d = 2k$$

$$S_k = m \Rightarrow \frac{k}{2} (ra_1 + (k-1)d) = m \Rightarrow 2ka_1 + (k^2 - k)d = 2m$$

طرفین تساوی‌های فوق را از هم کم می‌کنیم:

$$(2m - 2k)a_1 + (m^2 - m - k^2 + k)d = 2(k - m)$$

$$2(m - k)a_1 + ((m - k)(m + k) - (m - k))d = 2(k - m)$$

$$2(m - k)a_1 + (m - k)(m + k - 1)d = -2(m - k)$$

$$2a_1 + (m + k - 1)d = -2$$

$$S_{m+k} = \frac{m+k}{2} (ra_1 + (m+k-1)d) = \frac{m+k}{2} (-2) = -(m+k)$$

۳۹ توجه کنید که

$$S_m = m^2 k \Rightarrow \frac{m}{2} (ra_1 + (m-1)d) = m^2 k \Rightarrow 2a_1 + (m-1)d = 2mk \quad (1)$$

$$S_n = n^2 k \Rightarrow \frac{n}{2} (ra_1 + (n-1)d) = n^2 k \Rightarrow 2a_1 + (n-1)d = 2nk \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$(m - n)d = 2k(m - n) \Rightarrow d = 2k$$

در نتیجه از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$2a_1 + (m - 1)(2k) = 2mk \Rightarrow a_1 = k$$

$$S_k = \frac{k}{2} (ra_1 + (k-1)d) = \frac{k}{2} (2k + (k-1)(2k)) = k^3$$

۴۰ راه حل اول ابتدا توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2} (ra_1 + (n-1)d), \quad S_{n+1} = \frac{n+1}{2} (ra_1 + (n+1-1)d)$$

$$S_{n+2} = \frac{n+2}{2} (ra_1 + (n+2-1)d), \quad S_{n+3} = \frac{n+3}{2} (ra_1 + (n+3-1)d)$$

بنابراین

$$S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = \frac{n+3}{2} (ra_1 + (n+2)d)$$

$$- \frac{3(n+2)}{2} (ra_1 + (n+1)d) + \frac{3(n+1)}{2} (ra_1 + nd) - \frac{n}{2} (ra_1 + (n-1)d)$$

پس از ساده کردن، حاصل عبارت فوق صفر می‌شود.

راه حل دوم از تساوی $S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} A = S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n &= (S_{n+3} - S_n) - 3(S_{n+2} - S_{n+1}) \\ &= a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_{n+2} = a_{n+3} + a_{n+1} - 2a_{n+2} \end{aligned}$$

چون a_{n+2} واسطه حسابی a_{n+1} و a_{n+3} است، پس

$$A = 2a_{n+2} - 2a_{n+2} = 0 \text{ و در نتیجه } a_{n+3} + a_{n+1} = 2a_{n+2}$$

۳۵ اگر $m = n$ حکم درست است، پس می‌توانیم فرض کنیم $m > n$.

توجه کنید که

$$\begin{aligned} S_m - S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_m - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m \end{aligned}$$

بنابراین $S_m - S_n$ مجموع $m - n$ جمله دنباله‌ای حسابی است که جمله

نخست آن a_{n+1} و جمله آخر آن a_m است. در نتیجه

$$S_m - S_n = \frac{m-n}{2} (a_{n+1} + a_m) \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$S_{m+n} = \frac{m+n}{2} (a_1 + a_{m+n}) \quad (2)$$

اکنون توجه کنید که چون $n+1+m = 1+m+n$ ، پس

$a_{n+1} + a_m = a_1 + a_{m+n}$ ، اگر تساوی (۱) را بر تساوی (۲) تقسیم کنیم،

$$\frac{S_m - S_n}{S_{m+n}} = \frac{m-n}{m+n}$$

۳۶ جمله‌های با ردیف فرد، دنباله‌ای حسابی با جمله نخست a_1 و

قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها $n+1$ تاست. بنابراین

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1} = \frac{n+1}{2} (2a_1 + (n+1-1)(2d)) = (n+1)(a_1 + nd)$$

جمله‌های با ردیف زوج، دنباله‌ای حسابی با جمله نخست a_2 و قدرنسبت

$2d$ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها n تاست. بنابراین

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \frac{n}{2} (2a_2 + (n-1)(2d)) = n(a_2 + (n-1)d)$$

$$= n(a_1 + d + (n-1)d) = n(a_1 + nd)$$

$$\frac{(n+1)(a_1 + nd)}{n(a_1 + nd)} = \frac{n+1}{n}$$

به این ترتیب، نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{n+1}{n}$.

۳۷ چون تساوی $S_{2n} = 4S_n$ به ازای هر n طبیعی برقرار است، می‌توانیم

مقدار دلخواه $n=1$ را در آن قرار دهیم:

$$n=1 \Rightarrow S_2 = 4S_1 \Rightarrow a_2 + a_1 = 4a_1 \Rightarrow a_2 = 3a_1$$

در نتیجه

$$a_1 + d = 3a_1 \Rightarrow d = 2a_1$$

بنابراین

$$\frac{S_m}{S_k} = \frac{\frac{m}{2} (ra_1 + (m-1)d)}{\frac{k}{2} (ra_1 + (k-1)d)} = \frac{m(ra_1 + ra_1(m-1))}{k(ra_1 + ra_1(k-1))} = \frac{m(ra_1 m)}{k(ra_1 k)} = \left(\frac{m}{k}\right)^2$$

۳۸ راه حل اول توجه کنید که

$$S_k = m \Rightarrow \frac{k}{2} (a_1 + a_k) = m \Rightarrow a_1 + a_k = \frac{2m}{k} \quad (1)$$

$$S_m = k \Rightarrow \frac{m}{2} (a_1 + a_m) = k \Rightarrow a_1 + a_m = \frac{2k}{m} \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a_k - a_m = \frac{2m}{k} - \frac{2k}{m} \Rightarrow a_1 + (k-1)d - a_1 - (m-1)d = \frac{2}{mk} (m^2 - k^2)$$

$$(k-1-m+1)d = \frac{2}{mk} (m-k)(m+k) \Rightarrow d = -\frac{2(m+k)}{mk}$$

پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$ra_1 + (k-1)d = \frac{2m}{k} \Rightarrow ra_1 + \frac{-2(k-1)(m+k)}{mk} = \frac{2m}{k}$$

$$a_1 = \frac{m}{k} + \frac{(k-1)(m+k)}{mk} = \frac{m^2 + km + k^2 - m - k}{mk}$$

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

می‌خواهیم S_n منفی شود. پس

$$\frac{n(43-3n)}{2} < 0 \Rightarrow 43-3n < 0 \Rightarrow 3n > 43 \Rightarrow n > \frac{43}{3} \Rightarrow n \geq 15$$

پس حداقل باید ۱۵ جمله از ابتدای دنباله را جمع کنیم.

۱- گزینه ۲ تعداد صندلی‌های هر ردیف، دنباله‌ای حسابی با جمله اول

$$a_{v_0} = a_1 + 7vd = 188 \text{ در نتیجه } d = 2 \text{ تشکیل می‌دهند. در نتیجه } a_1 = 40$$

بنابراین تعداد کل صندلی‌ها برابر است با

$$a_1 + \dots + a_{v_0} = S_{v_0} = \frac{v_0}{2}(a_1 + a_{v_0}) = \frac{75}{2}(228) = 8550$$

۱۱- گزینه ۳ بنا بر فرض $a_3 + a_8 = 8$ ، پس

$$a_1 + 2d + a_1 + 4d = 8 \Rightarrow 2a_1 + 6d = 8$$

$$S_7 = \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) = \frac{7}{2} \times 8 = 28 \text{ بنابراین}$$

۱۲- گزینه ۴ بنا بر فرض مسئله،

$$a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} = 10 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 6d + a_1 + 10d + a_1 + 14d = 10$$

$$4a_1 + 38d = 10 \Rightarrow 2a_1 + 19d = 5$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 19d) = 10 \times 5 = 50 \text{ بنابراین}$$

۱۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$a_n = -3n + 7 \Rightarrow a_1 = -3(1) + 7 = 4, \quad a_7 = -3(7) + 7 = -14$$

$$S_7 = \frac{7}{2}(4 - 14) = -35 \text{ بنابراین } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

۱۴- گزینه ۳ توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ بنابراین

$$S_{14} - S_7 = 87 \Rightarrow \frac{14}{2}(2 \times 2 + 13d) - \frac{7}{2}(2 \times 2 + 6d) = 87$$

$$7(4 + 13d) - 7(4 + 6d) = 87 \Rightarrow -12 - 9d = 87 \Rightarrow d = -1$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 2 - 8 = -6 \text{ در نتیجه}$$

۱۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$S_{11} = 165 \Rightarrow 165 = \frac{11}{2}(a_1 + a_{11})$$

$$\text{در نتیجه } \frac{a_1 + a_{11}}{2} = \frac{165}{11} = 15 \text{ توجه کنید که } a_6 = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \text{ در نتیجه}$$

$$a_6 = 15$$

۱۶- گزینه ۴ با توجه به فرض مسئله،

$$S_{17} = S_{13} \Rightarrow \frac{17}{2}(2a_1 + 16d) = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d)$$

$$17a_1 + 17 \times 8d = 13a_1 + 13 \times 6d \Rightarrow 4a_1 + 58d = 0 \Rightarrow 2a_1 + 29d = 0$$

$$\text{از طرف دیگر، } S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 29d) = 0 \text{ بنابراین } S_{10} = 0$$

۱- گزینه ۲ دنباله مورد نظر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $d = -2$ و جمله نخست $a_1 = 7$ است. بنابراین $a_{19} = a_1 + 19d = 7 + 19(-2) = -31$

$$\text{در نتیجه } S_n = S_{19} = \frac{19}{2}(a_1 + a_{19}) = 10(7 - 31) = -240$$

۲- گزینه ۳ اگر قدرنسبت این دنباله حسابی برابر d باشد، آن‌گاه

$$a_{14} = -5 \Rightarrow a_1 + 13d = -5 \Rightarrow 34 + 13d = -5 \Rightarrow d = -3$$

بنابراین

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{18} = \frac{18}{2}(2 \times 34 + 17(-3)) = 9 \times 17 = 153$$

۳- گزینه ۴ توجه کنید که

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow 616 = \frac{n}{2}(-5 + 49) \Rightarrow 616 = 22n \Rightarrow n = 28$$

۴- گزینه ۲ توجه کنید که

$$a_9 + a_{10} = 13 \Rightarrow a_1 + 8d + a_1 + 9d = 13 \Rightarrow 2a_1 + 17d = 13$$

$$\text{بنابراین } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{18}{2}(2a_1 + 17d) = 9 \times 13 = 117$$

۵- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a_1 + a_{11} = a_2 + a_{10} = a_3 + a_9 = a_4 + a_8 = a_5 + a_7 = 2a_6$$

$$\text{بنابراین } S_{11} = \frac{11}{2}(a_1 + a_{11}) = \frac{11}{2} \times 2a_6 = 11a_6 = 11 \times 30 = 330$$

۶- گزینه ۲ در این مسئله، $d = -3$ و $S_{13} = 91$ اکنون توجه کنید که

$$S_{13} = \frac{13}{2}(2a_1 + (13-1)d) \Rightarrow 91 = 13(a_1 + 6(-3))$$

$$13a_1 = 91 + 234 = 325 \Rightarrow a_1 = 25$$

۷- گزینه ۲ توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ بنابراین

$$S_9 - S_7 = 20 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) - \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) = 20 \Rightarrow 2a_1 + 15d = 20$$

$$\text{بنابراین } S_{16} = \frac{16}{2}(2a_1 + 15d) = 8 \times 20 = 160$$

۸- گزینه ۲ جمله اول دنباله برابر ۱۸ و قدرنسبت دنباله برابر -2

است. بنابراین مجموع n جمله نخست آن برابر است با

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \times 18 - 2(n-1)) = 19n - n^2$$

پس

$$S_n = 0 \Rightarrow 19n - n^2 = 0 \Rightarrow n(19 - n) = 0 \Rightarrow n = 19$$

بنابراین مجموع نوزده جمله نخست دنباله برابر صفر است.

۹- گزینه ۳ جمله اول دنباله 20 و قدرنسبت آن -3 است. بنابراین

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(40 - 3(n-1)) = \frac{n(43 - 3n)}{2}$$

اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم به دست می‌آید $a_1 = -6$ و $d = 3$.
بنابراین $S_4 = \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 2(-12 + 9) = -6$.

۲۵- گزینه ۴ توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. بنابراین

$$S_6 = 9 \Rightarrow \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 9 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 3 \quad (1)$$

$$S_{17} = 90 \Rightarrow \frac{17}{2}(2a_1 + 16d) = 90 \Rightarrow 2a_1 + 16d = 15 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادلات (۱) و (۲) را حل کنیم به دست می‌آید $a_1 = -\frac{7}{2}$ و $d = 2$.

به این ترتیب

$$S_{13} + S_{17} = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) + \frac{17}{2}(2a_1 + 16d) = 30a_1 + 214d = 323$$

۲۶- گزینه ۲ توجه کنید که

$$S_{27} - S_{10} = \frac{1}{2} \times 27(2a_1 + 26d) - \frac{1}{2} \times 10(2a_1 + 9d) = -17$$

$$= 17a_1 + 306d = -17 \xrightarrow{\div 17} a_1 + 18d = -1$$

$$. S_{27} = \frac{27(2a_1 + 26d)}{2} = \frac{27(-2)}{2} = -37 \quad \text{بنابراین}$$

۲۷- گزینه ۳ توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. چون

$$S_n = \frac{n}{2}(80 - 2(n-1)) = 41n - n^2, \quad d = -2 \quad \text{و} \quad a_1 = 40.$$

مقدار عبارت درجه دوم $-n^2 + 41n$ به ازای $n = \frac{41}{2}$ به دست می‌آید، ولی

چون n عدد طبیعی است و نمی‌تواند $\frac{41}{2}$ باشد، پس S_{21} و S_{20} بیشترین

مقدار را بین S_n ‌ها دارند: $S_{20} = S_{21} = 420$.

۲۸- گزینه ۳ چون $a_8 = 5$ ، پس

$$\Delta = a_8 = a_1 + 7d = \frac{1}{3} + 7d \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

اکنون با مجموعی از دنباله‌ای حسابی سروکار داریم که قدر نسبت آن $3d$ و جمله اول آن $a_1 = 1$ و تعداد جمله‌های آن 10 است:

$$a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{19} = \frac{1}{2}(2a_7 + (10-1)(3d))$$

$$= 5(2 \times 1 + 27 \times \frac{2}{3}) = 5(2 + 18) = 100$$

۲۹- گزینه ۳ می‌دانیم مجموع جملات دنباله حسابی از رابطه

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad \text{پس}$$

$$S_{3n} = \frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d) - \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$= \frac{n}{2}(4a_1 + (4n-2)d - 2a_1 - (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)$$

$$\frac{S_{3n}}{S_{2n} - S_n} = \frac{\frac{3n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)}{\frac{n}{2}(2a_1 + (3n-1)d)} = 3 \quad \text{بنابراین}$$

۱۷- گزینه ۱ اگر مجموع $(n-1)$ جمله اول دنباله را از مجموع n جمله

اول آن کم کنیم جمله n باقی می‌ماند که همان جمله عمومی دنباله است:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n(n-3) - 3(n-1)(n-1-3) \\ = 3n^2 - 9n - 3n^2 + 15n - 12 \Rightarrow a_n = 6n - 12$$

۱۸- گزینه ۳ ابتدا جمله اول و دوم دنباله را حساب می‌کنیم:

$$S_n = 4n^2 - 5n \Rightarrow a_1 = S_1 = 4 - 5 = -1$$

$$a_1 + a_2 = S_2 = 4 \times 4 - 5 \times 2 = 6 \Rightarrow -1 + a_2 = 6 \Rightarrow a_2 = 7$$

بنابراین $d = a_2 - a_1 = 7 - (-1) = 8$.

۱۹- گزینه ۳ قدرنسبت دنباله برابر است با

$$d = (2x-1) - (3x+1) = -x-2$$

بنابراین مجموع ده جمله اول برابر است با

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(3x+1) + 9(-x-2)) = 5(-3x-16)$$

$$5(-3x-16) = 85 \Rightarrow -3x-16 = 17 \Rightarrow x = -11 \quad \text{بنابراین}$$

بنابراین $d = -(-11) - 2 = 9$.

۲۰- گزینه ۴ مجموع پنج جمله چهارم از تفاضل مجموع بیست جمله

اول و پانزده جمله اول به دست می‌آید:

$$S = S_{20} - S_{15} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) - \frac{15}{2}(2a_1 + 14d)$$

$$= 5a_1 + 85d = 5(-2) + 85 \times 5 = 415$$

۲۱- گزینه ۲ مجموع سمت چپ معادله، مجموع جملات یک دنباله

حسابی با جمله اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر ۳ است. بنابراین

$$\frac{n}{2}(2 + 3(n-1)) = 117 \Rightarrow 3n^2 - n - 234 = 0$$

$$(n-9)(3n+26) = 0 \Rightarrow n = 9, \quad n = -\frac{26}{3} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین جمله نهم دنباله برابر x است و $x = a_9 = a_1 + 8d = 1 + 24 = 25$.

۲۲- گزینه ۲ مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر را حساب می‌کنیم:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

چون $a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$ پس

$$3(a_1 + a_n) = 6 \Rightarrow a_1 + a_n = 2$$

$$. S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_n) = 10 \times 2 = 20 \quad \text{بنابراین}$$

۲۳- گزینه ۲ اگر جمله اول را a_1 و قدرنسبت را d در نظر بگیریم،

$$. S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 20a_1 + 190d \quad \text{با} \quad a_1 + 19d = 2$$

اگر ۳ واحد به قدرنسبت اضافه کنیم و ۵ واحد از جمله اول کم کنیم، در دنباله جدید جمله اول $a_1 - 5$ و قدرنسبت $d + 3$ است. پس مجموع ۲۰ جمله اول برابر است با

$$S'_{20} = \frac{20}{2}(2(a_1 - 5) + 19(d + 3)) = 10(2a_1 + 19d + 47)$$

$$= 20a_1 + 190d + 470 = S_{20} + 470$$

پس ۴۷۰ واحد به مجموع بیست جمله اول اضافه می‌شود.

۲۴- گزینه ۱ توجه کنید که $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. بنابراین

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 75 \Rightarrow 2a_1 + 9d = 15$$

$$S_6 = \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 9 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 3$$