مقدمه ناشر

برداشت یک

ای ریاضی! ای آمار! ای میانگین! ای درد مشترک ما بچه‌های انسانی! کی بی‌خیال ما می‌شی؟ اومدیم انسانی که تو نباشی. بازم می‌گن توی کنکور سرنوشتتون رو، درصد تو (یعنی ریاضی) رقم می‌زنه. چرا گیر می‌دی؟ خُب ما اگر ریاضی‌خون بودیم می‌رفتیم رشتهٔ ریاضی یا تجربی. ما اهل دلیم! شعر، ادب، فلسفه، تاریخ و جغرافی ... اگر راست می‌گی «*بیا و مسئله‌ها را ز راه دل حل کن.*» ...

برداشت دو

ما (یعنی خیلی‌سبز) این‌جا نمی‌خوایم کلیشه‌بازی در بیاریم و اندر فواید علم ریاضی و تأثیر آن در زندگی بشر و مضرات نخواندن ریاضی خطابه بگیم. ما می‌گیم ریاضی سخته؟ قبول! با ریاضی حال نمی‌کنی؟ اینم قبول! ولی حالا که باید بخونیش چرا نخونیش؟! چرا اینقد فاز منفی؟ با یک کتاب خوب، یه نگاه مثبت و یه کم وقت گذاشتن احتمالن می‌شه با ریاضی هم کنار اومد. کتاب خوبش با ما، نگاه مثبت و وقت گذاشتنش با شما.

برداشت سه

علی شهرابی از باحال‌ترین و اهل دل‌ترین مؤلفان ریاضی خیلی‌سبزه و بچه‌های رشتهٔ انسانی رو خوب خوب درک می‌کنه. مطمئنیم با درس‌نامه‌ها و پاسخ‌های این کتاب می‌شه ریاضی رو فهمید و یاد گرفت و حتی حال کرد!

علی جان دمت گرم و بابت انتشار این کتاب خوب بهت تبریک می‌گم. هم‌چنین از محمد مازنی عزیز و خانم الهه آرانی که یار و یاور ما در شکل‌گیری این کتاب بودند خیلی ممنونم.

اگر بخوام از همهٔ عوامل و دست‌اندرکاران تولید این کتاب تشکر کنم، حالا حالاها باید بنویسم. خلاصه می‌گم دست همه درد نکنه، به ویژه بر و بچه‌های همیشه سرافراز تولید و ویراستارای علمی دقیق و موشکافمون.

سربلند باشید و برقرار

مقدمه مؤلف

سلام به همهٔ دانش‌آموزان و دبیران

می‌گن اگه خودتون رو با تغییرات وفق ندید، یه جایی متوجه می‌شید که از همه‌چیز عقب افتادین! کنکور در سال‌های اخیر چند بار همه‌مون رو سورپرایز کرد. یک بار سخت شد، دوباره برگشت به روال سابق، دوباره سخت شد و باز هم برگشت به روال سابق و ... .

ما تصمیم گرفتیم کتابی بنویسیم که شما را برای هر شرایطی آماده کند. این کتاب با تمام کتاب‌های ریاضی انسانی دنیا فرق دارد! هدفش این بود که کل **طیف دانش‌آموزان انسانی** را پوشش دهد.

ساختار کتاب:

۱ این کتاب ۱+۹ فصل دارد. فصل صفر، یادآوری مطالب مهم از عبارات جبری است که در کل کتاب با آن‌ها سروکار داریم. اتحادها، تجزیه و عبارات گویا را در این فصل آورده‌ایم. در آخرش هم حدوداً ۶۰ تمرین آورده‌ایم که حتماً حلشان کنید؛ همان اول کار و قبل از این‌که درگیر فصل‌های دیگر کتاب بشین.

۲ برای پیوسته‌بودن مطالب، کتاب را موضوعی نوشته‌ایم. سه‌جا، ترتیب کتاب درسی را خودمان عوض کرده‌ایم.

- تابع دهم و یازدهم را در یک فصل آورده‌ایم ولی مشخص کرده‌ایم که کدام درس‌ها برای دهم است و کدام درس‌ها برای یازدهم.
- چرخهٔ آمار که درس سوم از فصل اول کتاب دوازدهم است را در ادامهٔ مطالب فصل سوم کتاب دهم آورده‌ایم (که با هم می‌شن فصل سوم این کتاب)، چون ادامهٔ همان مطالب است و اغلب دبیران هم این مطالب را با هم درس می‌دهند.
- هر سه درس مربوط به دنباله‌ها را در یک فصل با نام «دنباله‌ها» آورده‌ایم. این مطالب در فصل‌های دوم و سوم (درس ۱) کتاب دوازدهم آمده‌اند که به خاطر ارتباطشان با هم، در یک فصل آمده‌اند.

۳ هر فصل از چند درس تشکیل شده است. در هر درس، ابتدا درس‌نامه و بعد تست‌هایش آمده است. در آخر فصل، یک آزمون جمع‌بندی برای آن فصل آورده‌ایم که در انتخاب تست‌هایش خیلی سعی کردیم مطالب مهم فصل پوشش داده شوند. در انتهای کتاب هم پاسخ تشریحی تست‌ها را آورده‌ایم.

درس‌نامه، تست، آزمون فصل و پاسخ‌نامه:

۱. درس‌نامه:

- پیشنهاد می‌کنم حتماً قبل از این‌که سراغ تست‌ها بروید، درس‌نامه را یک بار بخوانید و تمام مثال‌های آموزشی و تست‌های آن را حل کنید.
- هر موضوعی را به طور کامل توضیح دادیم و هر جا که می‌شد، روش حل را «مرحله‌به‌مرحله» و اغلب در قالب یک مثال بیان کرده‌ایم.
- بعد از هر توضیحی در درس‌نامه، معمولاً یک **مثال آموزشی** آورده‌ایم که پیچیدگی خاصی ندارد و هدفش کمک به یادگیری بیشتر شما است. بعد از مثال آموزشی، یک (یا چند) **تست** آورده‌ایم که هدفش آشنایی شما با مدل سؤالات تستی آن قسمت است. معمولاً سؤالات تستی، از مثال آموزشی جدی‌تر هستند.
- از آن‌جایی که هدفمان این بوده که با خواندن درس‌نامه بتوانید از پس تست‌های کنکورهای اخیر برآیید، بعضی تست‌های کنکورهای اخیر را در درس‌نامه، شبیه‌سازی کردیم که با آدرس «**مثل کنکور**» آن‌ها را می‌بینید.
- بعضی جاها که لازم بوده، در آخر کار، کل داستان را برایتان «**جمع‌بندی**» کرده‌ایم.
- بعضی جاها مطالبی را برای دانش‌آموزان علاقه‌مند تحت عنوان «**برای حرفه‌ای‌ها**» آورده‌ایم. اگر وقت می‌کنید حتماً این قسمت‌ها را بخوانید. در تست‌های بخش «آموزش و تمرین» از این تیترها سؤال نیاورده‌ایم.

۲. تست‌ها:

- برای اولین بار، تست‌های هر درس را به ۳ بخش تقسیم کردیم:

۱) تست‌های آموزش و تمرین: هدفش مطالب کلی است که هر دانش‌آموزی باید آن‌ها را بلد باشد. در واقع پلهٔ اول تست‌زنی شما باید همین بخش باشد و تا به تست‌های آن مسلط نشدید، سراغ بخش‌های دیگر نروید. تست‌های این بخش مثل درس‌نامه و با همان ترتیب «تیتر» دارند تا دبیران راحت‌تر بتوانند به دانش‌آموزان تمرین بدهند.

۲) تست‌های تثبیت و تسلط: اگر تست‌های آموزش و تمرین را حل کردید و نیاز به حل سؤالات جدی‌تر داشتید، سراغ تست‌های این بخش بروید. به نظر ما، تست‌های این بخش، مخصوص دانش‌آموزانی است که دنبال درصدهای بالاتر در آزمون‌های آزمایشی و کنکور هستند. در واقع حل تست‌های این بخش، شما را برای آزمون‌ها آماده می‌کند.

۳) تست‌های فراتر از انتظار: همان‌طور که در کنار این تست‌ها، داخل کادر گفته‌ایم، تست‌های این بخش را حتماً با مشورت معلم یا مشاور خود حل کنید. این بخش مخصوص دانش‌آموزان سخت‌کوش و علاقه‌مند به ریاضی است. توصیهٔ جدی ما این است که روی تست‌های دو بخش قبلی تمرکز کنید. ضمناً برای آن‌که تعداد صفحات کتاب زیاد نشود، پاسخ تست‌های این بخش را در قالب یک فایل در اختیارتان گذاشته‌ایم که با اسکن QR کد مربوط به آن، آن‌ها را مشاهده می‌کنید.

پس جمع‌بندی این شد:

آموزش و تمرین (برای همه) ← تثبیت و تسلط (اگه می‌خوای تو آزمون‌ها بهتر نتیجه بگیری) ← فراتر از انتظار (اگه سرت برای ریاضی درد می‌کنه!)

روی چیدمان تست‌ها واقعن وقت گذاشتیم. برای چینش تست‌ها شاید ۱۰۰ ساعت جلسه گذاشتیم که احتمالن باورتان نمی‌شود!

تست‌های این کتاب، مجموعه‌ای است از:

۱ تست‌های کنکورهای سراسری داخل و خارج از کشور از سال ۹۰ به بعد

۲ شبیه‌ساز سؤالات کنکور با آدرس «**مثل کنکور**»

۳ تست‌های برگرفته از تمرینات مهم کتاب درسی با آدرس «**کتاب درسی**»

۴ تست‌های منتخب آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز

۵ تعداد زیادی تست تألیفی که در بین آن‌ها تست‌های ایده‌دار و ترکیبی زیادی می‌بینید.

در کنار تست‌ها ممکن است آیکون‌های زیر را ببینید:

سؤالاتی که نسبت به سایر سؤالات، به زمان بیشتری نیاز دارند. (اصطلاحاً سؤالات **وقت‌گیر**)

MIX سؤالاتی که ترکیب دو یا چند موضوع هستند. در کنکورهای جدید، تعدادی از این سؤالات را می‌بینیم. (اصطلاحاً سؤالات **ترکیبی**)

سؤالاتی که حلشان را به هیچ وجه توصیه نمی‌کنیم! (سؤالات **ورود ممنوع**)

۳. پاسخ‌ها

در تمام پاسخ‌ها، فارسی‌نویسی به طور کامل انجام شده است تا بفهمید چی‌کار کردیم.

یک سری آیکون‌ها در پاسخ‌ها می‌بینید که در زیر توضیح داده‌ایم:

نکته: فرمول یا یک رابطهٔ مهم یا گزاره‌ای که لازم است آن را بلد باشید.

تذکر: هر جا لازم بوده چیزی را گوشزد کنیم.

یادآوری: روابطی که قبلاً دیدید ولی شاید یادتان رفته باشند.

استراتژی: مسیر حل مسئله را بیان می‌کند. در واقع از نقطهٔ شروع تا پایان حل را بیان می‌کند.

مشاوره: بعضی وقت‌ها لازم است یک چیزهایی را به عنوان نصیحت به شما بگوییم.

از قیافش نترس: در یک سری سؤالات که ظاهر ترسناکی دارند، با یک حرکت، سؤالمان به سؤالی ساده‌تر تبدیل می‌شود.

منظورش اینه: بعضی جملات بیان ساده‌تری هم دارند که ممکن است با دانستن آن‌ها، خودتان از پس حل سؤال بربیاین.

روش ۱ و **روش ۲** برای سؤالاتی که دو روش حل دارند، استفاده کردیم.

پارت ۱ و **پارت ۲** بعضی سؤالات چند سؤال در دل یک سؤال هستند. حل این تیپ سؤالات را به ۲ پارت تقسیم کرده‌ایم.

تیزبازی: روش حل سریع و خلاقانه‌ای است که در کنار روش اصلی استفاده شده.

تله: بعضی اشتباهات خیلی رایج هستند. در یک سری از سؤالات، جوابی که از این راه حل‌های اشتباه به دست میان را در گزینه‌ها به عنوان تله گذاشتیم.

۴. آزمون‌های فصلی

در آخر هر فصل، یک آزمون ۱۰ یا ۱۵ یا ۲۰ سؤالی از آن فصل آورده‌ایم که تیپ تست‌های مهم فصل را پوشش بدهد. فقط در فصل تابع که اهمیت بیشتری دارد، ۲ آزمون آورده‌ایم. در دوران جمع‌بندی، حل این آزمون‌ها مفید است. ضمناً پاسخ سؤالات آزمون‌ها نیز در قالب QR کد آمده‌اند.

تیمی که پشت کتاب بوده: تشکر از دوستانی که در طول مدت تألیف و تولید این کتاب کنارمان بودند:

دکتر کمیل نصری و مهندس سبزمیدانی عزیز؛ مرسی که انقدر همراهین. مهندس بقایی که زیاد اذیتش کردیم ولی می‌دونم از ما ناراحت نیستن! تشکر ویژه از مسعود شفیعی که کل درس‌نامه‌ها را یک بار خواند و با کامنت‌دادن‌هاش، کلی کتاب را بهتر کرد. چینش تست‌ها را با دقت بررسی کرد و در جلسات کلی در موردش بحث کردیم (برای من، تجربهٔ بسیار خوبی بود). ضمناً ایده‌های جدیدی هم که به ذهنش می‌رسید را می‌داد. مسعود جان خیلی دمت گرم؛ اگه این کتاب خوب شده، به خاطر کمک‌های شما بوده. کیوان صارمی و کوثر صادقی که اوایل کار خیلی وقتشونو گرفتم. ایشالا جبران کنم. محمد مازنی که لحظه‌به‌لحظه از وضعیت کارهای کتاب خبر داشت و به من استرس می‌داد! خانم الهه آرانی که به شکل باورنکردنی پیگیر کارهای کتاب بودند؛ هر لحظه و هر جا! سپاس فراوان از شما. آقای فرامرز سلطان‌کریمی که زحمت کلیدزنی کتاب را داشتند و با دقت و حوصلهٔ بسیار این کار را انجام دادند؛ خیلی ممنونم از شما. خانم‌ها راهبریان، جالینوس، نظری، صابری و آقایان راش، راسخ و قنبری که زحمت ویراستاری این کتاب را کشیدند. آقای سمایی، خانم معصومی و سایر دوستانمان در واحد تولید که خیلی اذیتشون کردم؛ دوستتون دارم. از دوستانم در خیلی‌سبز که همراهم بودند: ایمان سلیمان‌زاده، امین امینی، محمدرضا محمدی، مرضیه قاسمی و باز هم محمد مازنی. تشکر از سعید احمدپور که نقش مهمی در مدل نوشته‌شدن این کتاب داشت. در آخر تشکر از یک دوست بسیار خوب و هم‌چنین مادر عزیزم.

حرف آخر: به نظرم هر آن‌چه از ریاضی انسانی برای کنکورتان نیاز داشتید را در این کتاب آورده‌ایم ولی اگر جایی نقصی می‌بینید آن را از طریق سایت خیلی‌سبز یا آیدی @alishmath با ما در میان بگذارید. ممنون از شما.

شهرابی ـ ۱۸ تیر ۱۴۰۳

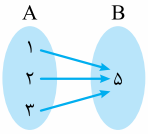
فهرست

	درس‌نامه	تست
فصل صفر: یادآوری	۷	
فصل اول: معادلهٔ درجه‌دوم		
فصل ۱ دهم		
درس ۱: معادلهٔ درجه‌اول و مسائل توصیفی	۱۶	۲۲
درس ۲: معادلهٔ درجه‌دو و کاربردها	۲۴	۴۲
درس ۳: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا	۵۱	۶۰
فصل دوم: تابع		
فصل۲ دهم ـ فصل ۲ یازدهم		
درس ۱: مفهوم تابع	۶۷	۷۱
درس ۲: ضابطهٔ جبری تابع	۷۳	۷۸
درس ۳: تابع خطی	۸۲	۹۰
درس ۴: تابع درجه۲	۹۵	۱۱۰
درس ۵: توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی	۱۲۰	۱۲۵
درس ۶: توابع پلکانی، علامت، جزء صحیح و قدر مطلق	۱۳۱	۱۴۵
درس ۷: اعمال بر روی توابع	۱۵۵	۱۵۹
فصل سوم: کار با داده‌های آماری/ چرخهٔ آمار در حل مسائل		
فصل ۳ دهم ـ فصل ۱ (درس۳) دوازدهم		
درس ۱: گردآوری داده‌ها ـ انواع متغیرها	۱۶۸	۱۷۳
درس ۲: معیارهای گرایش به مرکز	۱۷۵	۱۸۲
درس ۳: معیارهای پراکندگی	۱۸۷	۱۹۶
درس ۴: چرخهٔ آمار در حل مسائل	۲۰۲	۲۰۵
فصل چهارم: نمایش داده‌ها		
فصل ۴ دهم		
درس ۱: نمودارهای یک‌متغیره	۲۱۱	۲۱۶
درس ۲: نمودارهای چندمتغیره	۲۲۱	۲۲۶

	درس‌نامه	تست
فصل پنجم: آمار		
فصل ۳ یازدهم		
درس ۱: شاخص‌های آماری	۲۳۳	۲۳۹
درس ۲: سری‌های زمانی	۲۴۵	۲۵۱
فصل ششم: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی		
فصل ۱ یازدهم		
درس ۱: گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها	۲۵۸	۲۷۲
درس ۲: استدلال ریاضی	۲۷۹	۲۸۵
فصل هفتم: شمارش و احتمال		
فصل ۱ دوازدهم (درس ۱ و ۲)		
درس ۱: شمارش	۲۹۲	۳۰۷
درس۲: احتمال	۳۱۸	۳۳۵
فصل هشتم: دنباله‌ها		
فصل ۲ دوازدهم و فصل ۳ (درس ۱) دوازدهم		
درس ۱: مدل‌سازی و دنباله‌ها	۳۵۰	۳۵۸
درس ۲: دنبالهٔ حسابی	۳۶۴	۳۷۴
درس ۳: دنبالهٔ هندسی	۳۸۲	۳۹۳
فصل نهم: توان‌های گویا و تابع نمایی		
فصل ۳ دوازدهم (درس ۲ و ۳)		
درس ۱: ریشهٔ nاُم و توان گویا	۴۰۴	۴۱۳
درس ۲: تابع نمایی	۴۲۱	۴۲۸
پاسخ‌نامه تشریحی		۴۳۵
پاسخ‌نامه کلیدی		۶۸۰

درس ۵: توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

تابع ثابت



تابع روبه‌رو را ببینید:

این تابع به ازای تمام ورودی‌هایش، فقط یک خروجی (یعنی ۵) می‌دهد.

به توابعی که همیشه **یک خروجی یکسان** دارند، تابع ثابت می‌گوییم.

در واقع تابع ثابت، تابعی است که **برد آن، دقیقاً یک عضو** دارد. همین تعریف برای تابع ثابت کافی است.

مثال آموزشی: اگر برد تابع ثابت f برابر با مجموعهٔ $R_f = \{۵, a+۱\}$ و زوج مرتب $(۳, ۲b-۱)$ عضو f باشد، مقدار a و b را به دست آورید.

پاسخ: چون تابع f ثابت است، برد آن فقط یک عضو دارد. سؤال گفته برد f، مجموعهٔ $\{۵, a+۱\}$ است. برای این‌که این مجموعه تک‌عضوی باشد، باید $a+۱$ و ۵ برابر باشند:

$$a+۱=۵ \Rightarrow a=۴$$

پس تابع f فقط عدد ۵ را به عنوان خروجی به ما می‌دهد. زوج مرتب $(۳, ۲b-۱)$ عضو تابع است؛ یعنی به ازای ورودی ۳، خروجی $۲b-۱$ است که این خروجی باید برابر با ۵ باشد:

$$۲b-۱=۵ \Rightarrow ۲b=۶ \Rightarrow b=۳$$

چهرهٔ تابع ثابت در نمایش‌های مختلف یک تابع

۱) نمایش زوج مرتبی: نمایش زوج مرتبی یک تابع، زمانی نشان‌دهندهٔ یک تابع ثابت است که **مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج مرتب‌ها با هم برابر باشند.**

مثلاً تابع $f = \{(۱,۲), (-۳,۲), (۰,۲), (۷,۲)\}$ تابعی ثابت است، زیرا مؤلفهٔ دوم تمام زوج مرتب‌های آن ۲ است.

تست: اگر تابع $f = \{(a, a^۲+۲a), (-۴,۸), (b, b^۲-۶b+۱۷)\}$ یک تابع ثابت دوعضوی باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟ (مثل کنکور)

۱) ۷ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ ۱: چون f ثابت است، باید مؤلفهٔ دوم همهٔ زوج مرتب‌ها یکسان باشد:

$$a^۲+۲a = ۸ = b^۲-۶b+۱۷$$

اول $a^۲+۲a$ را مساوی ۸ می‌گذاریم:

$$a^۲+۲a=۸ \Rightarrow a^۲+۲a-۸=۰ \Rightarrow (a+۴)(a-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۴ \\ a=۲ \end{cases}$$

بعد $b^۲-۶b+۱۷$ و ۸ را:

$$b^۲-۶b+۱۷=۸ \Rightarrow b^۲-۶b+۹=۰ \Rightarrow (b-۳)^۲=۰ \Rightarrow b=۳$$

حالا رسیدیم به جای حساس سؤال! چون سؤال گفته f دوعضوی است، پس از این سه زوج مرتبی که در ظاهر می‌بینیم، یکی به خاطر تکراری‌بودن باید حذف شود.

به ازای $a=-۴$، زوج مرتب $(a, a^۲+۲a)$ و $(-۴,۸)$ مثل هم‌اند که باعث دوعضوی‌شدن f می‌شود؛ پس باید $a=-۴$ را قبول کنیم. در نتیجه:

$$b-a=۳-(-۴)=۷$$

اما به ازای $a=۲$ و $b=۳$، تابع به صورت زیر می‌شود:

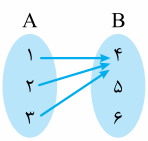
$$f = \{(a, a^۲+۲a), (-۴,۸), (b, b^۲-۶b+۱۷)\} = \{(۲, ۲^۲+۲(۲)), (-۴,۸), (۳, ۳^۲-۶(۳)+۱۷)\} = \{(۲,۸), (-۴,۸), (۳,۸)\}$$

این تابع یک تابع ۳عضوی است؛ پس در شرط سؤال صدق نمی‌کند و رد می‌شود.

۲) نمایش جدولی: نمایش جدولی یک تابع، زمانی نشان‌دهندهٔ یک تابع ثابت است که مولفه‌های سطر دوم (مربوط به خروجی‌ها) همه با هم برابر باشند. مثلاً نمایش جدولی مقابل، مربوط به یک تابع ثابت است.

x	۱	۳	−۲	۵
y	۴	۴	۴	۴

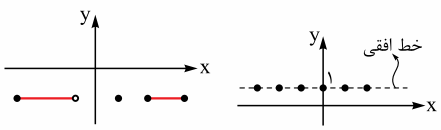
۳) نمایش پیکانی: نمایش پیکانی یک تابع، زمانی نشان‌دهندهٔ تابع ثابت است که **همهٔ پیکان‌ها به یک عدد وارد شده باشند.**



مثلاً نمایش پیکانی روبه‌رو نشان‌دهندهٔ یک تابع ثابت است، زیرا تمام پیکان‌ها به عدد ۴ وارد شده‌اند:

۴) نمایش نموداری: نمایش مختصاتی یک تابع، زمانی نشان‌دهندهٔ تابع ثابت است که **همهٔ نقاط آن تابع روی یک خط افقی قرار داشته باشند.**

مثلاً دو نمودار مقابل توابعی ثابت هستند، چون تمام نقاط نمودار، روی یک خط افقی قرار دارند:



۵) نمایش ضابطه‌ای: از آن‌جایی که خروجی تابع ثابت همیشه یک عدد (مثل c) است، پس ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=c$ یا $y=c$ است که در آن c یک عدد است.

مثلاً توابع $f(x)=۲$، $f(x)=-۱$ و $f(x)=\sqrt{۶}$، همگی توابع ثابت هستند.

حالا اگه در سؤالی ضابطهٔ تابع ثابت را نداشتیم، جای تمام (ابر) fها، عدد c قرار می‌دهیم.

مثال آموزشی: اگر f تابعی ثابت و $f(1)+f(2)=5f(3)-12$ باشد، مقدار $f(0)$ را به دست آورید.

پاسخ: چون f تابع ثابت است، پس جای $f(1)$، $f(2)$ و $f(3)$، c را قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(1)}_{c}+\underbrace{f(2)}_{c}=5\underbrace{f(3)}_{c}-12 \Rightarrow c+c=5c-12 \Rightarrow 2c=5c-12 \Rightarrow -3c=-12 \Rightarrow c=4$$

پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=4$ است و $f(0)$ نیز همان ۴ می‌شود: $f(0)=4$

حالا اگه یک ضابطهٔ شلوغ پلوغ به ما دادند و گفتند این ضابطه مربوط به یک تابع ثابت است، باید آن را تا حد امکان ساده کنیم، بعد ضریب هر عبارت درجه‌یک یا دو یا ... را مساوی صفر قرار دهیم تا فقط یک عدد تنها باقی بماند، چون ضابطهٔ تابع ثابت، x یا x^2 یا $\frac{1}{x}$ یا ... ندارد و فقط یک عدد خشک و خالی است! مثلاً اگر $f(x)=(a-2)x^2+(b+3)x+ab$ یک تابع ثابت باشد، باید ضریب x و x^2 صفر باشند؛ یعنی $b+3$ و $a-2$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم که از حلشان به $a=2$ و $b=-3$ می‌رسیم. در آخر فقط ab در ضابطه می‌ماند که با جای‌گذاری مقادیرشان به $2\times(-3)=-6$ می‌رسیم؛ یعنی ضابطهٔ f به شکل $f(x)=-6$ می‌شود.

تست: اگر $f(x)=(x+2)^2+ax^2+bx+c$ تابعی ثابت با برد $\{a\}$ باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) -7 ۲) -10 ۳) -9 ۴) -8

پاسخ۲: ضابطهٔ f را به کمک اتحاد مربع باز می‌کنیم:

$$f(x)=x^2+4x+4+ax^2+bx+c$$

x^2 و ax^2 را کنار هم، 4x و bx را کنار هم و ۴ و c را نیز کنار هم می‌نویسیم:

$$f(x)=x^2+ax^2+4x+bx+4+c$$

بین دوتای اول از x^2 و بین دوتای بعدی از x فاکتور می‌گیریم:

$$f(x)=x^2(1+a)+x(4+b)+4+c$$

باید ضریب x و x^2 صفر باشند:

$$x\text{ ضریب }=0 \Rightarrow 4+b=0 \Rightarrow b=-4 \quad \text{و} \quad x^2\text{ ضریب }=0 \Rightarrow 1+a=0 \Rightarrow a=-1$$

با جای‌گذاری آن‌ها، فقط $4+c$ در ضابطه باقی می‌ماند: $f(x)=4+c$

برد f، عدد a است؛ پس $4+c$ باید برابر با a باشد:

$$4+c=a \xrightarrow{a=-1} 4+c=-1 \Rightarrow c=-5$$

پس:

$$a+b+c=-1+(-4)+(-5)=-10$$

مشاوره طراح می‌توانست در صورت سؤال، قید نکند f تابع ثابت است. باید خودتان از تک‌عضوی‌بودن برد، این موضوع را می‌فهمیدید.

تابع چندضابطه‌ای

تا الان تمام توابعی که خواندیم، فقط از یک ضابطه پیروی می‌کردند، مثلاً تابعی که به ازای هر عددی که وارد شود، ۳ برابر آن را بیرون می‌دهد، تک‌ضابطه‌ای و به صورت $f(x)=3x$ است.

حالا می‌خواهیم با توابعی آشنا شویم که چند ضابطه دارند.

فرض کنید تابع f، به ازای اعداد مثبتی که واردش می‌شوند، ۲ برابر آن اعداد را بیرون می‌دهد و به ازای اعداد منفی که واردش می‌شوند، مربع آن اعداد را بیرون می‌دهد. یعنی اگر $x>0$ باشد، خروجی 2x و اگر $x<0$ باشد، خروجی x^2 می‌شود.

این تابع به زبان ریاضی، این‌جوری می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}2x & x>0 \\ x^2 & x<0\end{cases}$$

ضابطه و دامنهٔ اول ←

ضابطه و دامنهٔ دوم ←

که به آن، تابع دوضابطه‌ای می‌گوییم (چون دو تا ضابطه دارد!)

مثال آموزشی: تابع f به ازای هر عدد بزرگ‌تر از یک، قرینهٔ آن عدد و به ازای هر عدد کوچک‌تر یا مساوی ۲−، یک واحد بیشتر از ۳ برابر آن را بیرون می‌دهد. ضابطهٔ f را بنویسید.

پاسخ: دو ضابطه را جدا می‌نویسیم:

به ازای اعداد بزرگ‌تر از ۱ $(x>1)$، قرینهٔ آن عدد (یعنی $-x$) را بیرون می‌دهد.

ضابطهٔ اول: $-x$ ، $\underbrace{x>1}_{\text{دامنه}}$

به ازای اعداد کوچک‌تر یا مساوی ۲− $(x\le -2)$، یک واحد بیشتر از ۳ برابر آن (یعنی $3x+1$) را بیرون می‌دهد.

ضابطهٔ دوم: $3x+1$ ، $\underbrace{x\le -2}_{\text{دامنه}}$

پس ضابطهٔ f به صورت مقابل است:

$$f(x)=\begin{cases}-x & x>1 \\ 3x+1 & x\le -2\end{cases}$$

حالا اگه یک تابع دوضابطه‌ای (یا سه‌ضابطه‌ای یا بیشتر) به ما بدهند و مقدار آن تابع را در $x=a$ بخواهند، باید ببینیم a در محدودهٔ دامنهٔ کدام ضابطه قرار می‌گیرد. در هر محدوده‌ای که بود، برای محاسبهٔ $f(a)$ از ضابطهٔ همان محدوده استفاده می‌کنیم.

مثال آموزشی: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x>2 \\ \frac{x+4}{x+2} & -1<x\le 2 \\ 5 & x\le -1 \end{cases}$ باشد، مقادیر $f(2)$، $f(-\pi)$ و $f(1+\sqrt{3})$ را به دست آورید.

پاسخ:

- $x=2$ در محدودهٔ $-1<x\le 2$ قرار دارد؛ پس برای محاسبهٔ $f(2)$ از ضابطهٔ وسط کمک می‌گیریم و جای xهایش ۲ قرار می‌دهیم: $f(2)=\frac{2+4}{2+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$
- $x=\underbrace{-\pi}_{-3/14}$ در محدودهٔ $x\le -1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبهٔ $f(-\pi)$ از ضابطهٔ پایینی که یک تابع ثابت است کمک می‌گیریم. خروجی‌اش هم ۵ است؛ پس: $f(-\pi)=5$
- $\sqrt{3}$ تقریباً ۱/۷ است، پس $1+\sqrt{3}$ تقریباً ۲/۷ می‌شود و در محدودهٔ $x>2$ قرار می‌گیرد؛ پس برای محاسبهٔ $f(1+\sqrt{3})$ از ضابطهٔ بالایی کمک می‌گیریم و جای xهایش $1+\sqrt{3}$ قرار می‌دهیم:

$$f(1+\sqrt{3})=\underbrace{(1+\sqrt{3})^2}_{\text{اتحاد مربع}}-2(1+\sqrt{3})=1+3+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}=2$$

حالا اگه عددی در دوتا از دامنه‌ها بود، باید مقدار هر دو ضابطه به ازای آن عدد، یکسان باشد، چون در غیر این صورت به ازای یک ورودی، دوتا خروجی داریم و آن رابطه تابع نیست. مثلاً اگر $f(x)=\begin{cases} \bigcirc & x\ge a \\ \square & x\le a \end{cases}$ باشد، چون $x=a$ در هر دو دامنه وجود دارد، پس مقدار $\bigcirc$ و $\square$ به ازای $x=a$ باید یکسان شود.

تست: در تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-ax & x\ge 2 \\ a-x^3 & x\le 2 \end{cases}$، مقدار $f(a-1)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

پاسخ۳: $x=2$ در هر دو دامنهٔ بالایی و پایینی وجود دارد؛ پس مقدار هر دو ضابطه به ازای آن، باید یکسان شود:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مقدار ضابطهٔ بالایی به ازای } x=2: x^2-ax=2^2-a(2)=4-2a \\ \text{مقدار ضابطهٔ پایینی به ازای } x=2: a-x^3=a-(2)^3=a-8 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{برابرند}} 4-2a=a-8 \Rightarrow -3a=-12 \Rightarrow a=\frac{-12}{-3}=4$$

با جای‌گذاری $a=4$، ضابطه به شکل $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\ge 2 \\ 4-x^3 & x\le 2 \end{cases}$ می‌شود.

سؤال مقدار $f(a-1)$ که $f(3)$ می‌شود را می‌خواهد. $x=3$ در محدودهٔ ضابطهٔ بالایی قرار دارد؛ پس در ضابطهٔ بالا، جای x، ۳ قرار می‌دهیم:

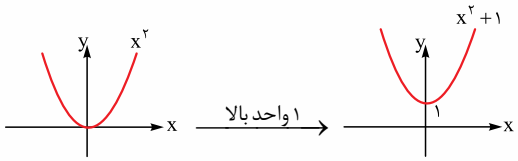
$$x\ge 2: f(x)=x^2-4x \xrightarrow{x=3} f(3)=3^2-4(3)=9-12=-3$$

رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای

تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ 2x-4 & 1\le x<3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نمودار این تابع دوضابطه‌ای را رسم کنیم. برای این کار باید نمودار هر ضابطه را در دامنه‌اش رسم کنیم:

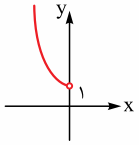
- ضابطهٔ اول به صورت $y=x^2+1$ با دامنهٔ $x<0$ است.

برای رسم سهمی $y=x^2+1$ کافیست سهمی $y=x^2$ را یک واحد به بالا ببریم:



با توجه به دامنهٔ این قسمت که $x<0$ است، فقط قسمت سمت چپ محور yها را نگه می‌داریم و بقیهٔ نمودار را پاک می‌کنیم:

- ضابطهٔ دوم به صورت $y=2x-4$ با دامنهٔ $1\le x<3$ است.

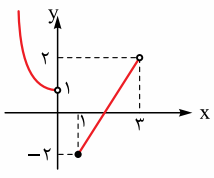


برای رسم خط کافیست دو نقطه از آن را داشته باشیم. در این‌جا از نقاط ابتدا ($x=1$) و انتهای ($x=3$) دامنه استفاده می‌کنیم:

توخالی توپُر

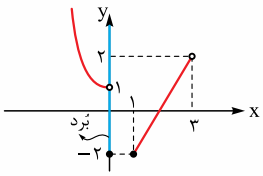
x	۱	۳
$y=2x-4$	-2	۲

این دو نقطه را روی نموداری که ضابطهٔ اول در آن رسم شده به هم وصل می‌کنیم تا به نمودار نهایی برسیم:



حالا اگه سؤال از ما برد یک تابع چندضابطه‌ای را می‌خواست، بعد از رسم نمودارش، آن را روی محور yها می‌کوبیم.

مثلاً برد تابع مثال بالا به صورت $y \geq -2$ است:



تست: کدام خط، نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 0 \\ x+3 & x<0 \end{cases}$ را در نقاط بیشتری قطع می‌کند؟

۱) $y=-1/5$ ۲) $y=-1$ ۳) $y=-0/5$ ۴) $y=1$

پاسخ ۳: ضابطهٔ اول یک سهمی است که c ندارد. بهتر است این سهمی‌ها را به کمک ریشه‌هایش رسم کنیم. ضابطه را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

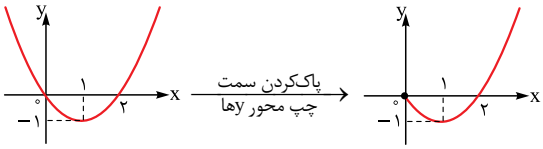
$$x^2-2x=0 \xrightarrow[x \text{ از}]{\text{فاکتور}} x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=2$$

میانگین ریشه‌ها، طول رأس را می‌دهد: $x_S=\frac{0+2}{2}=1$

به ازای $x=1$، عرض رأس به دست می‌آید:

$$y_S=1^2-2(1)=1-2=-1$$

دهانهٔ سهمی رو به بالا است (چون $a>0$). رأسش هم $(1,-1)$ و ریشه‌هایش هم ۰ و ۲ هستند. نمودارش را می‌کشیم. چون دامنهٔ این ضابطه، $x\geq 0$ است، پس سمت چپ محور yها را پاک می‌کنیم:



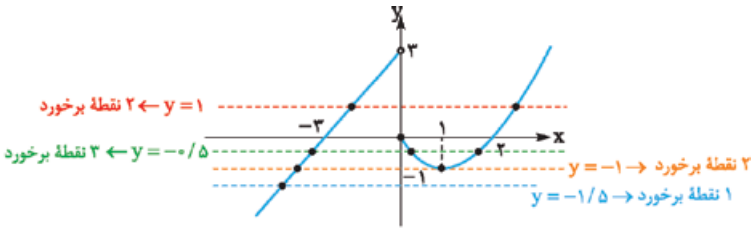
ضابطهٔ دوم $y=x+3$ با دامنهٔ $x<0$ است. برای رسم خط دو نقطه کافی است:

توخالی

x	۰	-۳
y	۳	۰

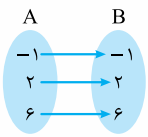
دو نقطهٔ $(0,3)$ و $(-3,0)$ را به هم وصل می‌کنیم و از سمت نقطهٔ $(-3,0)$ امتداد می‌دهیم و هر چهار خط افقی که در گزینه‌ها آمده را رسم می‌کنیم:

خط $y=-0/5$، نمودار را در ۳ نقطه قطع می‌کند که نسبت به سه خط دیگر بیشتر است.



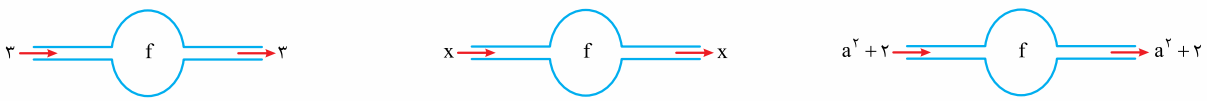
تابع همانی

تابع روبه‌رو را ببینید:

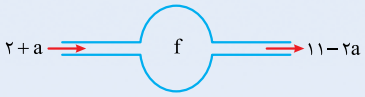


هر عددی که وارد این تابع شده، همان عدد هم از تابع خارج شده است.

به توابعی که به ازای هر عددی که واردشان می‌شود، **همان** عدد را بیرون می‌دهند، تابع **همانی** می‌گوییم. (اسم این تابع، واقعاً برازندشه!)



مثال آموزشی: اگر f تابعی همانی باشد، مقدار a را به دست آورید.



پاسخ: به ازای ورودی $a+2$، خروجی‌مان $11-2a$ شده. چون f همانی است، باید این دو مقدار برابر باشند؛ پس:

$$2+a=11-2a \Rightarrow a+2a=11-2 \Rightarrow 3a=9 \Rightarrow a=\frac{9}{3}=3$$

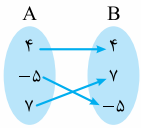
چهرهٔ تابع همانی در نمایش‌های مختلف یک تابع

۱) نمایش زوج مرتبی: در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، در هر زوج مرتب، **مؤلفهٔ اول و دوم با هم برابرند**؛ مثلاً تابع $f=\{(2,2),(-3,-3),(\frac{1}{5},\frac{1}{5})\}$ یک تابع همانی است.

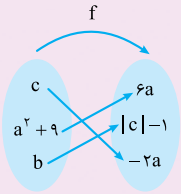
۲) نمایش جدولی: در نمایش جدولی تابع همانی، هر دو عددی که در یک ستون نوشته می‌شوند باید با هم برابر باشند. مثلاً تابع مقابل یک تابع همانی است.

x	۴	-۳	۷
y	۴	-۳	۷

۳) نمایش پیکانی: در نمایش پیکانی تابع همانی باید اعداد سر و ته هر فلش (پیکان) یکسان باشند؛ مثلاً نمایش پیکانی روبه‌رو یک تابع همانی است:



MIX تست: نمودار زیر مربوط به تابع همانی f است. اگر $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابعی ثابت باشد، d کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) −۱۰
۴) −۲۰

پاسخ۳: پارت ۱ اعداد سر و ته هر فلش باید یکسان باشند. با فلشی شروع می‌کنیم که از $a^۲+۹$ به ۶a وارد شده (چون فقط متغیر a دارد). این دو را برابر قرار می‌دهیم:

$$a^۲+۹=۶a \Rightarrow a^۲-۶a+۹=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (a-۳)^۲=۰ \Rightarrow a=۳$$

حالا سراغ فلش c به $-۲a$ می‌رویم:

$$c=-۲a \xrightarrow{a=۳} c=-۲(۳)=-۶$$

در آخر هم فلش b به $|c|-۱$:

$$b=|c|-۱ \xrightarrow{c=-۶} b=|-۶|-۱=۶-۱=۵$$

پارت ۲ سه پارامتر $a=۳$، $b=۵$ و $c=-۶$ را در $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{۳x+۵}{-۶x+d}$$

نکته: تابع به فرم $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ در دو حالت، تابع ثابت می‌شود:

۱ a و c هر دو صفر باشند.

۲ نسبت ضریب x بالا به پایین با نسبت عدد ثابت بالا به پایین یکسان باشد؛ یعنی: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

در این‌جا حالت ۱ که نیست، پس باید حالت ۲ باشد؛ در نتیجه:

$$\frac{۳}{-۶}=\frac{۵}{d} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۳d=-۳۰ \Rightarrow d=-۱۰$$

۴) نمایش ضابطه‌ای: گفتیم در تابع همانی، هر عددی که وارد تابع شود، همان عدد از تابع خارج می‌شود؛ پس ضابطهٔ تابع همانی به صورت مقابل است: $f(x)=x$ (x: ورودی، x: خروجی)

پس اگر f همانی باشد، آن وقت $f(۲)=۲$ یا $f(x^۲-۱)=x^۲-۱$ یا ... .

حالا اگه f همانی بود و یک عبارت داشتیم که پر از (ابر) f بود، باید جای تمام (ابر)ها، ابر را قرار دهیم.

مثال آموزشی: اگر f تابعی همانی و $f(۱۳)+f(a-۱)=f(۲)\times f(۲a)$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: جای تمام (ابر)ها، ابر را قرار می‌دهیم. مثلاً جای $f(۱۳)$، ۱۳ را قرار می‌دهیم:

$$\overbrace{f(۱۳)}^{۱۳}+\overbrace{f(a-۱)}^{a-۱}=\overbrace{f(۲)}^{۲}\times\overbrace{f(۲a)}^{۲a} \Rightarrow ۱۳+a-۱=۲(۲a) \Rightarrow ۱۲+a=۴a \Rightarrow ۱۲=۴a-a \Rightarrow ۱۲=۳a \Rightarrow a=۴$$

حالا اگه یک ضابطهٔ شلوغ پلوغ به ما دادند و گفتند این ضابطه مربوط به یک تابع همانی است، آن را تا حد امکان ساده می‌کنیم. بعد ضریب x را مساوی یک و ضریب بقیهٔ جملات (شامل $x^۲$، $x^۳$، عدد ثابت و ...) را مساوی صفر قرار می‌دهیم. مثلاً اگر $f(x)=(a-۲)x^۲+(b+۳)x+c-۱$ تابعی همانی باشد، باید $\underbrace{b+۳=۱}_{\text{ضریب x}}$، $\underbrace{a-۲=۰}_{\text{ضریب }x^۲}$ و $\underbrace{c-۱=۰}_{\text{عدد ثابت}}$ باشد. در نتیجه $a=۲$، $b=-۲$ و $c=۱$ می‌شود.

تست: تابع $f(x)=a(x-۱)^۲+x^۲+bx+c$ همانی است. مقدار d در تساوی $f(a)f(b-۲)+f(d+c)=۰$ کدام است؟

۱) −۱ ۲) −۲ ۳) −۳ ۴) −۴

پاسخ۴: پارت ۱ اول ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=a\underbrace{(x-۱)^۲}_{\text{اتحاد مربع}}+x^۲+bx+c=a(x^۲-۲x+۱)+x^۲+bx+c=ax^۲-۲ax+a+x^۲+bx+c$$

جملات هم‌درجه را کنار هم می‌نویسیم:

$$f(x)=\underbrace{ax^۲+x^۲}_{\text{فاکتور از }x^۲}\underbrace{-۲ax+bx}_{\text{فاکتور از x}}+a+c=(a+۱)x^۲+(-۲a+b)x+a+c$$

چون f همانی است، ضریب $x^۲$ باید صفر باشد:

$$a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱$$

ضریب x باید ۱ باشد:

$$-۲a+b=۱ \xrightarrow{a=-۱} ۲+b=۱ \Rightarrow b=-۱$$

عدد ثابت هم باید صفر باشد:

$$a+c=۰ \xrightarrow{a=-۱} -۱+c=۰ \Rightarrow c=۱$$

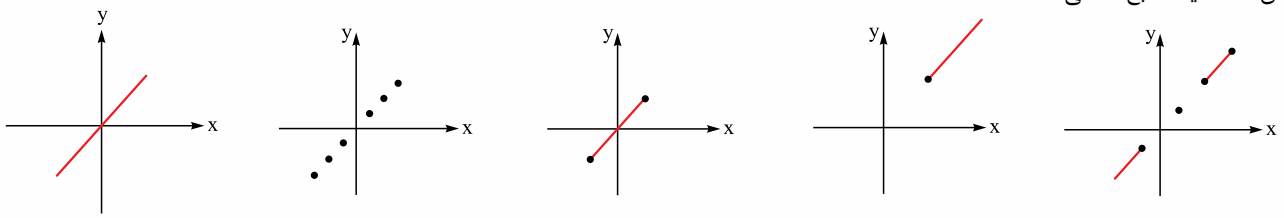
پارت ۲ چون f همانی است، جای تمام (ابر)ها، ابر قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(a)}_{a}\underbrace{f(b-۲)}_{b-۲}+\underbrace{f(d+c)}_{d+c}=۰ \Rightarrow a(b-۲)+d+c=۰$$

مقادیر $a=b=-۱$ و $c=۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$-۱(-۱-۲)+d+۱=۰ \Rightarrow ۳+d+۱=۰ \Rightarrow d=-۴$$

۵) نمایش نموداری: همان‌طور که گفتیم ضابطهٔ تابع همانی به صورت $f(x)=x$ است؛ پس نمودار این تابع حتماً روی خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرار دارد که می‌تواند «کل خط»، «یک یا چند نقطه روی این خط»، «یک یا چند پاره‌خط روی این خط» و ... باشد. مثلاً تمام نمودارهای زیر نشان‌دهندهٔ یک تابع همانی هستند:



نکته: ۱ هر نقطه‌ای که روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشد، طول و عرض برابری دارد. مثلاً نقاط $(۲,۲)$، $(-۴,-۴)$ و $(\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ روی آن هستند.
۲ هر نقطه‌ای که روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم باشد، طول و عرضش قرینه‌اند. مثلاً نقاط $(-۲,۲)$، $(۴,-۴)$ و $(\sqrt{۲},-\sqrt{۲})$ روی آن هستند.
۳ معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $y=x$ و معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $y=-x$ است. فقط نقطهٔ $(۰,۰)$ روی هر دوی آن‌ها قرار دارد.

تست: f تابعی همانی و نقطهٔ $(f(۱-۲a)+f(۲)\,,\,۴-af(a))$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارد. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟ (مثل کنکور)

۱) ۷ ۲) -۷ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ۲: با توجه به همانی‌بودن f، مختصات نقطه را ساده می‌کنیم:

$$(\underbrace{f(۱-۲a)}_{۱-۲a}+\underbrace{f(۲)}_{۲}\,,\,۴-a\underbrace{f(a)}_{a})=(۱-۲a+۲\,,\,۴-a^۲)=(۳-۲a\,,\,۴-a^۲)$$

چون نقطهٔ داده‌شده روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم است، پس طول و عرضش قرینه‌اند:

$$\text{طول}=-(\text{عرض}) \Rightarrow ۳-۲a=-(۴-a^۲) \Rightarrow ۳-۲a=-۴+a^۲ \Rightarrow a^۲+۲a-۷=۰$$

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم برابر با $P=\frac{C}{A}$ است؛ پس حاصل‌ضرب مقادیر a در معادلهٔ $\underbrace{۱}_{A}a^۲+\underbrace{۲}_{B}a\underbrace{-۷}_{C}=۰$ برابر است با:

$$P=\frac{C}{A}=\frac{-۷}{۱}=-۷$$

آموزش و تمرین

تابع ثابت

۵۷۱- اگر $f=\{(۲,۶),(-۵,a+۲),(۴,۲b)\}$ تابعی ثابت باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۷۲- اگر $f=\{(a,۱۲+a)\,,\,(-۱,۱۲)\,,\,(۶,c+۱)\,,\,(۲\,,\,a-۳b)\,,\,(-۵,۳a+b)\}$ تابعی ثابت باشد، مقدار c کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۵۷۳- اگر تابع $f=\{(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲),(x_۳,y_۳)\}$، تابعی ثابت باشد، مجموع میانگین و واریانس داده‌های $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $۲y_۱$ ۲) $y_۳$ ۳) $y_۲+y_۲^۲$ ۴) $y_۱+y_۲+y_۳$

۵۷۴- اگر $f=\{(m,۳m-۱),(-۱,k^۲-k),(k^۲-k,۲)\}$ تابع ثابت باشد، حاصل‌ضرب اعضای دامنهٔ f کدام است؟ (سراسری نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۸ ۴) -۸

۵۷۵- اگر $f=\{(۳,n^۲-۲n)\,,\,(m,۸)\,,\,(۲n-۵,t)\,,\,(۴,۳m+۲)\}$ یک تابع ثابت سه‌عضوی باشد، $m+n+t$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

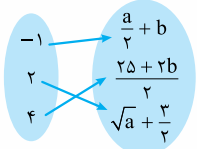
۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۵۷۶- جدول زیر نشان‌دهندهٔ یک تابع خطی با شیب صفر است. مقدار b کدام است؟

x	a	b	c	d
y	$۱-a$	d	$a+۵$	$b+۱$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۷۷- اگر نمودار ون مقابل، نمایش تابعی ثابت باشد، b کدام است؟



۱) -۶ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۳

۵۷۸- کدام گزینه نشان‌دهندهٔ یک تابع ثابت است؟

۵۷۹- تابع ثابت f از نقطهٔ $(۶,-۲)$ می‌گذرد. اگر $f(۱-a)=۲a-۴$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۵۸۰- اگر f تابعی ثابت و $f(۲)=a+۳$ و $f(-۱)=۲a-۱$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸۱- اگر f تابعی ثابت و $\frac{۲f(۱)-۳f(۴)}{۹-f(۰)}=۴$ باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -۹ ۳) ۱۲ ۴) -۱۲

۵۸۲- اگر f تابعی ثابت و $f(f(-۴))=۱-f(۴^۳)+f(۴^۲)+f(۴)$ باشد، حاصل $f(۸)$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) $۲^۲$ ۲) $۲^۳$ ۳) $۲^{-۲}$ ۴) $۲^{-۳}$

۵۸۳- اگر f تابعی ثابت و $f(a+b)=f(a)\times f(b)$ باشد، مقدار $f(\frac{b}{a})$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) فقط ۱ ۲) فقط -۱ ۳) فقط صفر ۴) صفر یا ۱

۵۸۴- اگر $f(x)=ax+a-۲$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۵۸۵- اگر $f(x)=a(x+۲)-۴x+b$ تابعی ثابت و $f(b)=\frac{b}{۲}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) -۱۶ ۳) ۶۴ ۴) -۶۴

۵۸۶- اگر $f(x)=\frac{x^۲-۷x-۸}{۲x+۲}+ax$ تابعی ثابت باشد، مقدار $a^۲f(a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

تابع چندضابطه‌ای

۵۸۷- تابع f به اعداد بزرگ‌تر از یک، مجذور آن‌ها و به سایر اعداد، قرینه‌شان را نسبت می‌دهد. ضابطهٔ f کدام است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x>۱\\ -x & x\le ۱\end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۱\\ -x & x<۱\end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۱\\ \frac{۱}{x} & x<۱\end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۱\\ \frac{۱}{x} & x\le ۱\end{cases}$

۵۸۸- اگر $f(x)=\begin{cases}۵x+۳ & x\ge ۲\\ ۲-۳x & x<۲\end{cases}$ باشد، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۴ ۳) ۸ ۴) ۱۳

۵۸۹- در تابع $f(x)=\begin{cases}۲x^۲-x & x\ge ۱\\ ۵ & -۱<x<۱\\ -\sqrt{۱-x} & x\le -۱\end{cases}$، حاصل $f(\frac{۵}{۲})+f(\sqrt{۲}-۲)+۲f(\frac{-۵}{۴})$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۵۹۰- اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲+۲x & x\ge ۰\\ \frac{a}{x} & x<۰\end{cases}$ و $f(\sqrt{۳}-۱)+۵f(\frac{-۱}{۴})=-۳۸$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۵۹۱- در تابع $f(x)=\begin{cases}x+۲ & x\ge ۱\\ ۲x-۳ & x<۱\end{cases}$، اگر $f(a)=۵$ باشد، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

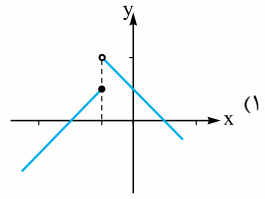
۵۹۲- اگر رابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^۲+x & x\ge ۲\\ a-x & x\le ۲\end{cases}$ تابع باشد، a چه‌قدر است؟

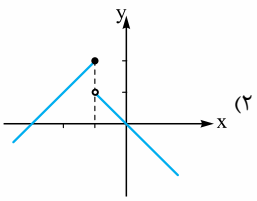
۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

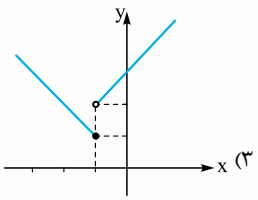
۵۹۳- اگر هزینهٔ پارکینگ یک فروشگاه در روز جمعه براساس مدت‌زمان سپری‌شده (x) از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح، از تابع $f(x)=\begin{cases}۴ & ۰\le x<۳\\ x+۲ & ۳\le x<۹\\ x+۳ & ۹\le x\le ۱۶\end{cases}$ پیروی کند، هزینهٔ پارکینگ خودرویی که از ساعت ۹ تا ۱۷ داخل پارکینگ است، کدام است؟ (هر واحد هزینهٔ $f(x)$ را معادل با ۵۰۰۰ تومان در نظر بگیرید.) (کتاب درسی)

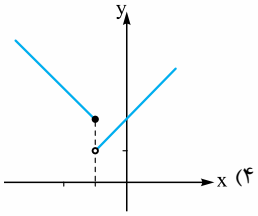
۱) ۵۰۰۰۰ ۲) ۵۵۰۰۰ ۳) ۶۰۰۰۰ ۴) ۷۰۰۰۰

۵۹۴- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+1 & x>-1\\ x+2 & x\le -1\end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟

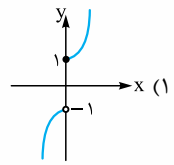
۱) 

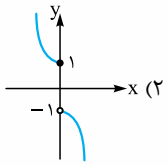
۲) 

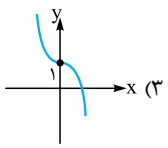
۳) 

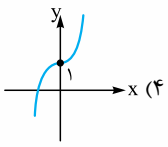
۴) 

۵۹۵- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ 1-x^2 & x\le 0\end{cases}$ به کدام صورت است؟

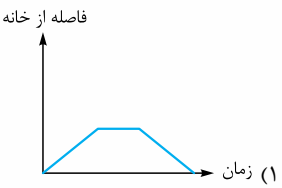
۱) 

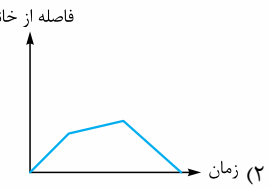
۲) 

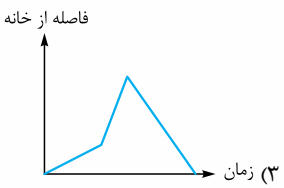
۳) 

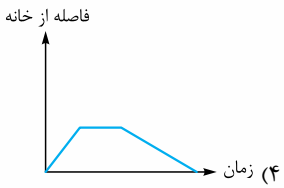
۴) 

۵۹۶- کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند مربوط به داستان «بهزاد برای قدم‌زدن از خانه خارج شده است. در ابتدا آهسته قدم می‌زند و سپس سرعتش را بیشتر می‌کند تا به پارک برسد. سپس از مسیری که آمده بود، برمی‌گردد و به خانه می‌رسد.» باشد؟ (کتاب درسی)

۱) 

۲) 

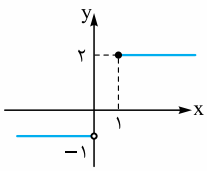
۳) 

۴) 

۵۹۷- کدام‌یک از خط‌های زیر، تابع $f(x)=\begin{cases}-x & x\ge 0\\ 2-x & x<0\end{cases}$ را قطع نمی‌کند؟

۱) $y=-2$ ۲) $y=-1$ ۳) $y=0$ ۴) $y=1$

۵۹۸- کدام گزینه، ضابطهٔ تابع رسم‌شده است؟



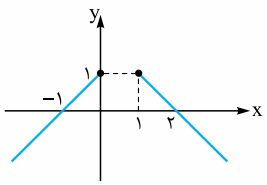
۱) $f(x)=\begin{cases}2 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 2\\ 0 & x<-1\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}2 & x\ge 1\\ -1 & x<0\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 2\\ -1 & x<0\end{cases}$

۵۹۹- کدام گزینه ضابطهٔ تابع رسم‌شده را نشان می‌دهد؟



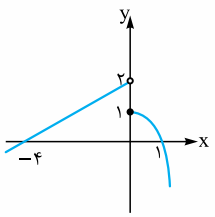
۱) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 0\\ x-2 & x\ge 1\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}-x+1 & x\le 1\\ x-2 & x\ge 1\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}-x+1 & x\le 1\\ -x+2 & x\ge 1\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 0\\ -x+2 & x\ge 1\end{cases}$

۶۰۰- کدام گزینه، ضابطهٔ نمودار مقابل است؟



۱) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\ge 0\\ \frac{x}{2}+2 & x<0\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\ge 0\\ 2x+2 & x<0\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\ge 0\\ 2x+2 & x<0\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\ge 0\\ \frac{x}{2}+2 & x<0\end{cases}$

۶۰۱- برد تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & -2\le x<3\\ -2x+7 & 3\le x<5\end{cases}$ کدام است؟

۱) $-3<y<4$ ۲) $-3<y\le 1$ ۳) $-4<y<3$ ۴) $1\le y<4$

۶۰۲- اگر f تابعی همانی باشد، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) −۳ ۳) ۲ ۴) −۲

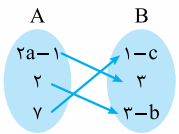
۶۰۳- اگر $f=\{(۲,a-۱),(-۳,b+۱)\}$ تابعی همانی باشد، $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۷ ۴) −۷

۶۰۴- تابع $f=\{(a-۱۱,۷-a),(۶b,b^۲+a),(c-a,\frac{b}{۳}+۱)\}$ همانی است. مقدار c کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

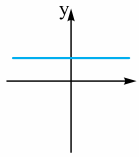
۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

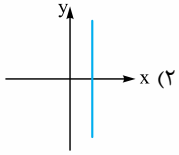
۶۰۵- اگر نمایش پیکانی مقابل یک تابع همانی باشد، میانگین اعداد a، b و c کدام است؟

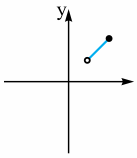


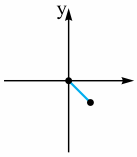
۱) −۱ ۲) −۲ ۳) −۳ ۴) ۳

۶۰۶- کدام گزینه نمودار یک تابع همانی است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۰۷- اگر f تابعی همانی و $f(a)=۸-a$ باشد، مقدار $f(-a)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) −۴ ۳) ۲ ۴) −۲

MIX ۶۰۸- اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی و $g(۲)=\frac{۴f(۲)+g(۸)}{f(x)-g(-۱)}$ باشد، مقدار $f(۰)$ کدام است؟

۱) −۳ ۲) ۳ ۳) −۲ ۴) ۲

۶۰۹- تابع ثابت f و تابع همانی g در نقطهٔ $A(۲-۳a,a+۱۰)$ متقاطع‌اند. مقدار $f(a)+g(\frac{a}{۲})$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۶۱۰- اگر تابع $f(x)=(a-۱)x+b+۲$ یک تابع همانی باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) −۳ ۳) ۴ ۴) −۴

۶۱۱- اگر $f(x)=\frac{۲x^۳+۳x^۲+cx+d}{ax^۲+bx-۱}$، تابع همانی باشد، مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۱۲- اگر تابع $f(x)=a(x+۱)^۲+x^۲+bx+c+۳$، همانی باشد، مقدار $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۲ ۴) −۲

۶۱۳- اگر نقطهٔ $(۴m-۳,۲m+۷)$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) ۵ ۴) −۵

۶۱۴- اگر نقطهٔ $(m,m^۲-m-۸)$ روی نیمساز ناحیهٔ سوم باشد، m کدام است؟

۱) فقط −۲ ۲) فقط ۴ ۳) ۲ یا −۴ ۴) −۲ یا ۴

۶۱۵- اگر هر سه زوج مرتب $(n^۲-۳n,۴)$، $(۲۰,n^۲+n)$ و $(۱,m+n)$ بر روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشند، m کدام است؟ (خارج ۹۸)

۱) −۳ ۲) −۲ ۳) ۲ ۴) ۶

تثبیت و تسلط

۶۱۶- رابطهٔ $f=\{(m+۳n,۲t^۲),(-۲,n^۲+۲n),(۱-۳m,۸)\}$ یک تابع ثابت با دامنهٔ دوعضوی است. اگر m و n عضوی از اعداد طبیعی باشند، مجموع دو عضو دامنه چه‌قدر است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲۳ ۲) ۲۱ ۳) ۵ ۴) ۳

MIX ۶۱۷- تابع ثابت $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ از نقطهٔ (۵,۲) عبور می‌کند. میانگین مقادیر $f(۱)+۱$، $f(۲)+۲$، ... و $f(۱۰)+۱۰$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۷/۵ ۳) ۶/۵ ۴) ۸

۶۱۸- دو نقطهٔ $(۲a+۱,۱۳-۲b)$ و $(a-b,b-۵)$ روی تابع ثابت f و به فاصلهٔ ۵ واحد از هم قرار دارند. بیشترین مقدار $[\frac{b}{a}]$ کدام است؟

۱) −۱ ۲) ۱ ۳) −۳ ۴) ۳

MIX ۶۱۹- انحراف معیار اعضای بُرد تابع f صفر است. اگر $f(a)f(b)=f(a)+f(b)+۱۶$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای $f(a)+f(b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۶۲۰- برد تابع $f(x)=(a-1)x^2+(b+3)x+b-a$، مجموعهٔ $\{c\}$ است. اگر رابطهٔ $\{(-a^2,k+c),(\frac{c}{2},1-k),(\frac{b}{3},2k-7)\}$ تابع باشد، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۲۱- اگر $f(x)=(2x+a)(x-2)+bx^2+7x$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(5)+4f(1)$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۶۲۲- اگر $f(x)=\begin{cases}-1 & x\geq 1\\ 2 & x<1\end{cases}$ باشد، حاصل $f(-a^2)-f(a^2+\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt{2}$ ۳) -3 ۴) ۳

۶۲۳- در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{4x+a} & x\geq 1\\ \sqrt{8-2x} & x<1\end{cases}$، اگر $f(-14)+f(6)=9$ باشد، مقدار $[f(a)]$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۲۴- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x<1\\ x^2+10x & x\geq 1\end{cases}$، مجموع مقادیر a برای آن‌که $f(a)=24$ باشد، کدام است؟

۱) -16 ۲) -2 ۳) ۸ ۴) -8

۶۲۵- در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-7 & x\geq a\\ x^2-4x+11 & x\leq a\end{cases}$، مقدار $f(2-\sqrt{a})$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

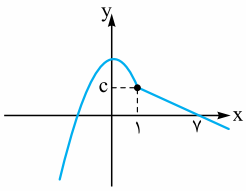
۶۲۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(a-1)x+4+2b & x>2\\ (b+3a)x^2+c & x\leq 2\end{cases}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۶۲۷- مساحت محصور بین نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x+6 & x<-1\\ 4 & -1\leq x\leq 3\\ -x+7 & x>3\end{cases}$ و محور xها کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

۶۲۸- اگر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & x\leq 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$ به شکل زیر باشد، عرض نقطهٔ ماکزیمم سهمی $y=ax^2+2bx+c$ کدام است؟



۱) $\frac{51}{2}$ ۲) $\frac{53}{2}$ ۳) $\frac{55}{2}$ ۴) $\frac{57}{2}$

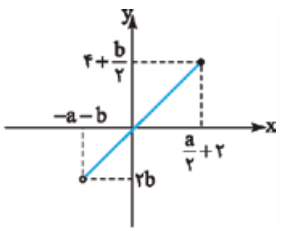
۶۲۹- تابع $f=\{(2,2n^2-3n),(m+3n,2),(m,-t^2)\}$ یک تابع همانی است. اگر میانگین m، n و t، صفر باشد، مقدار t کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{2}$ (سراسری مجرد ۱۴۰۱)

۶۳۰- اگر $f=\{(n^2+2n,8),(n+3,k),(m+7,t)\}$ یک تابع همانی با دامنهٔ دوعضوی و $m,n\in\mathbb{N}$ باشد، مقدار $m+t+k$ کدام است؟ (مثل کنکور)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۶۳۱- اگر نمودار مقابل مربوط به یک تابع همانی باشد، مقدار $2a-b$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۶۳۲- اگر f تابعی همانی و $f(a^2-1)-f(3a^2)=f(8a-11)$ باشد، بیشترین مقدار $\frac{f(a-3)}{f(a+1)}$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۱ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۶۳۳- اگر f تابعی همانی و $4^{f(2x)+f(x^2)}=8^{f(20)}$ باشد، حاصل $x+1$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\sqrt{29}$ ۲) $\sqrt{30}$ ۳) $\sqrt{31}$ ۴) $\sqrt{33}$

۶۳۴- تابع $f(x)=\sqrt{4x^2-20x+25}+ax+b$ با دامنهٔ $x<\frac{5}{2}$ یک تابع همانی است. مقدار b^2-a^3 کدام است؟

۱) -2 ۲) ۱۷ ۳) -11 ۴) -8

۶۳۵- اگر تابع $f(x)=(x+a)(x+b)-(x-1)(x+3)$ تابعی همانی باشد، مقدار a^2+b^2 کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۶۳۶- $f(x)=\frac{ax+3}{12x+a}$ تابعی ثابت که نمودارش زیر محور xها می‌باشد و $g(x)=(a+b)x+\frac{c}{x}$ تابعی همانی است. اگر نمودار تابع $h(x)=kf(x)+ax-b$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند، k کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

۶۳۷- اگر f تابع ثابت و برای $m,n,k\in\mathbb{N}$، $f(kx)=(k^2-3)f(x)$ و تابع g به صورت زیر، یک تابع همانی باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟ (خارج ۱۴۰۲)

$$g=\{(k,n^2-3n+4),(2n,m^2-4m+4),(f(n),n-4)\}$$

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) صفر

۶۳۸- نقاط $A(a^2-6ab,-9b^2)$ و $B(\frac{a}{b},c+2)$ به ترتیب روی نیمساز ناحیهٔ سوم و نیمساز ناحیهٔ چهارم هستند. c کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۴- ۳) ۵- ۴) ۶-

۶۳۹- نقطهٔ A روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. اگر آن را ۲ واحد به پایین و سپس ۴ واحد به چپ ببریم، بر روی نقطهٔ B واقع بر نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار می‌گیرد. حاصل‌ضرب طول نقطهٔ A و عرض نقطهٔ B کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۶ ۴) ۶-

۶۴۰- برای برخی مقادیر x، زوج مرتب $(f(x)+f(-x),3x^2-17x+10)$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارد. اگر تابع f همانی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، اختلاف مقادیر x کدام است؟ (سراسری نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{13}{3}$ ۴) $\frac{17}{3}$

۶۴۱- تابع f، تابع ثابت و برای $m,n\in\mathbb{N}$ داریم $f(m)+f(n)=f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(2n^2-7n+1,-f(m))$ و $(m^2-4m+6,nf(n))$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشند، مقدار $[\frac{mn}{5}]$ کدام است؟ (سراسری نوبت دوم ۱۴۰۲)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

فراتر از انتظار (تست‌های این بخش را حتماً با مشورت معلم یا مشاور خود حل کنید؛ این توصیه را جدی بگیرید!)

۶۴۲- اگر f تابعی ثابت و $f(100)=250$ و $f(1)-2f(2)+3f(3)-4f(4)+\cdots+99f(99)-100f(100)$ باشد، حاصل $\frac{2f(1)-8}{f(2)-1}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۴۳- تابع $f(x)=ax+b$، از سه نقطهٔ $(1,x_1)$، $(2,x_2)$ و $(4,x_3)$ می‌گذرد. اگر واریانس داده‌های x_1، x_2 و x_3، کم‌ترین مقدار باشد، حاصل $\frac{x_1+x_2+x_3}{b}-a$ کدام می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۶۴۴- اگر مجموعهٔ $\{k+1,6-c\}$ بُرد تابع $\begin{cases}f:\{1,2,3,\ldots,10\}\to B\\ f(x)=ax^2+bx+c\end{cases}$ باشد، حاصل ck کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۶۴۵- تابع $\begin{cases}f:A\to\mathbb{R}\\ f(x)=\sqrt{4x^2-12x+9}+2x\end{cases}$ تابعی ثابت است. A کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\{x\mid x\in\mathbb{R},0<x<2\}$ ۲) $\{x\mid x\in\mathbb{R},-1<x<1\}$ ۳) $\{x\mid x\in\mathbb{R},1<x<3\}$ ۴) $\{x\mid x\in\mathbb{R},\sqrt{2}<x<\sqrt{3}\}$

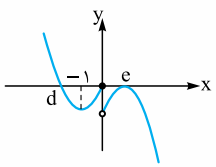
۶۴۶- تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^4+12x^2+36}}{3x^2+bx+c}$ تابعی ثابت است. مقدار k در تساوی $cf(c)+k=b$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۳ ۴) ۳-

۶۴۷- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+k & x\geq 2\\ 9-x & -1\leq x\leq 2\\ 2x+m & x\leq -1\end{cases}$ در چند نقطه، خط $y=8$ را قطع می‌کند. مجموع طول این نقاط کدام است؟

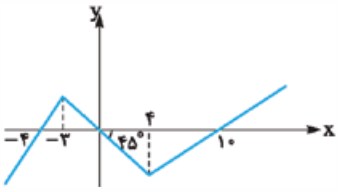
۱) $\sqrt{5}-1$ ۲) $\sqrt{5}+1$ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۴۸- نمودار تابع $y=\begin{cases}x^2+ax+b & x\leq 0\\ cx^2+4x+c & x>0\end{cases}$ به شکل روبه‌رو است. مقدار $a+b+c+d+e$ کدام است؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۱-

۶۴۹- نمودار تابع سه‌ضابطه‌ای $f(x)$ به صورت مقابل است. اگر نقاط $(x_1, 20)$ و $(x_2, -9)$ روی این تابع باشند، حاصل $x_1 + x_2$ کدام است؟



۱) ۳۱
۲) ۳۲
۳) ۳۳
۴) ۳۴

۶۵۰- تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & -5 \le x < 0 \\ 2x - 6 & 0 \le x \le 3 \end{cases}$ مفروض است. با حذف کدام‌یک از اعداد زیر از دامنه، برد f تغییر می‌کند؟

۱) $x = -4$
۲) $x = -1$
۳) $x = 0$
۴) $x = 2$

۶۵۱- تابع همانی f، سهمی $y = ax^2 - x$ را در دو نقطه به طول‌های $b + 2$ و $b - 4$ قطع می‌کند. مجموع مقادیر ممکن برای $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

۶۵۲- تابع f، تابع ثابت و برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $2f(m+n) = f(m)f(n) + 1$. اگر برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $g(m+n) = mf(n) + nf(m)$ باشد، جمع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $f(2)x^2 - 3g(2)x + g(4) = 0$، چند برابر ضرب ریشه‌های آن است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{3}{4}$

درس ۶: توابع پلکانی، علامت، جزء صحیح و قدرمطلق

تابع پلکانی

توابع چندضابطه‌ای زیر را ببینید:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -3 & x \le 0 \end{cases} \quad \text{(عدد ثابت)}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & 2 \le x < 4 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ 4 & -3 < x \le -1 \end{cases} \quad \text{(عدد ثابت)}$$

تابع f، یک تابع ۲ضابطه‌ای است که هر دو ضابطه‌اش عدد ثابت هستند. تابع g نیز یک تابع ۳ضابطه‌ای است که هر سه ضابطه‌اش عدد ثابت می‌باشد. به این‌جور توابع چندضابطه‌ای که **تمام ضابطه‌هایشان عدد ثابت** هستند، **توابع پلکانی** می‌گوییم.

مثال آموزشی: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (a+2)x + 3 & x \ge 1 \\ \frac{b}{x} + a^2 & x < 1 \end{cases}$ یک تابع پلکانی باشد، مقدار a، b و $f(a)$ را به دست آورید.

پاسخ: باید هر دو ضابطه، عدد ثابت باشند. در ضابطهٔ بالایی، ضریب x باید صفر باشد:

$$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

در ضابطهٔ پایینی هم ضریب $\frac{1}{x}$ که b می‌باشد باید صفر باشد: $b = 0$

با جای‌گذاری $a = -2$ و $b = 0$ ضابطه را می‌نویسیم:

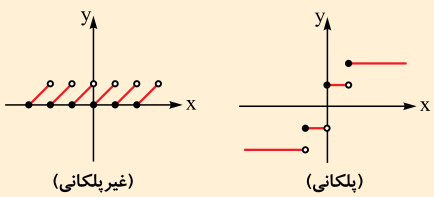
$$f(x) = \begin{cases} \underbrace{(-2+2)}_{\text{صفر}}x + 3 & x \ge 1 \\ \frac{0}{x} + (-2)^2 & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & x \ge 1 \\ 4 & x < 1 \end{cases}$$

مقدار $f(a)$ یا همان $f(-2)$ از ضابطهٔ پایین به دست می‌آید: $f(a) = f(-2) \overset{\text{ضابطهٔ پایین}}{=\!=} 4$

نکته: از آن‌جایی که نمودار تابع ثابت، یک خط افقی است، پس تابع پلکانی از چند خط افقی تشکیل می‌شود.

مثلاً نمودار سمت راست یک تابع پلکانی است. (چون همهٔ خط‌ها افقی هستند.)

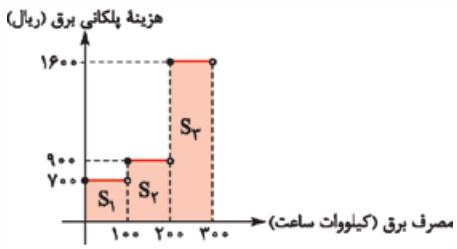
ولی نمودار سمت چپ پلکانی نیست. (چون خط‌ها افقی نیستند و شیب دارند.)



مسائل مالیات و قبض آب و برق یکی از جاهایی که در زندگی روزانه، تابع پلکانی را می‌بینیم، محاسبهٔ مالیات حقوق‌ها یا محاسبهٔ هزینهٔ برق و آب مصرفی است.

در نمودار پلکانی مربوط به مالیات حقوق‌ها، اگر بخواهیم مالیات مربوط به حقوق aتومانی را حساب کنیم باید مساحت زیر تابع پلکانی تا محور xها را از $x = 0$ تا $x = a$ حساب کنیم. عدد به دست آمده، همان عدد مالیات است. دربارهٔ نمودار برق یا آب هم همین‌طور است و مساحت زیر این نمودار تا محور xها از $x = 0$ تا $x = a$، هزینهٔ مصرف آب (یا برق) به میزان a واحد است.

مثلاً سطح رنگی در نمودار مقابل، مربوط به هزینهٔ برق مصرفی، به ازای ۳۰۰ کیلووات ساعت است.



هزینهٔ برق مصرفی $= S_1 + S_2 + S_3 = (100 \times 700) + (100 \times 900) + (100 \times 1600) = 70000 + 90000 + 160000 = 320000$

پس باید ماکسیمم تابع درجه‌دوم $f(x)=-\frac{1}{10}x^2+x+120$ را حساب کنیم.

ابتدا x رأس: $x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(-\frac{1}{10})}=\frac{-\frac{1}{1}}{-\frac{2}{10}}=\frac{10}{2}=5$

با جای‌گذاری $x=5$ در $f(x)$، داریم:

$f(x)=(30+x)(4-\frac{1}{10}x) \Rightarrow f(5)=(30+5)(4-\frac{1}{10}\times 5)$

$=(35)(4-0/5)=(35)(3/5)=122/5$

۵۴۹. ۴ تابع درآمد را می‌نویسیم:

درآمد = قیمت فروش هر کالا × تعداد کالا $\Rightarrow R(x)=120x$

برای به دست آوردن نقطهٔ سربه‌سر باید تابع درآمد و هزینه را برابر قرار دهیم:

درآمد = هزینه $\Rightarrow C(x)=R(x) \Rightarrow x^2-40x-3600=120x$

$\Rightarrow x^2\underbrace{-160}_{\text{جمع}}x\underbrace{-3600}_{\text{ضرب}}=0$

دو عدد که جمعشان -160 و ضربشان -3600 باشد، -180 و $+20$ هستند. معادله را به کمک تجزیه با اتحاد جمله‌مشترک حل می‌کنیم:

$x^2-160x-3600=0 \Rightarrow (x-180)(x+20)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=180 \checkmark \\ x=-20 \times \end{cases}$ تعداد کالا نمی‌تواند منفی باشد.

تیزبازی اگر برای حل معادلهٔ درجه‌دوم $x^2-160x-3600=0$، نمی‌توانستید دو عدد 20 و -180 را حدس بزنید، آن را به شکل $x^2-160x=3600$ و بعد به شکل $x(x-160)=3600$ بنویسید و از گزینه‌ها کمک بگیرید.

۵۵۰. ۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ سربه‌سر 20 است؛ پس اختلاف ریشه‌های معادلهٔ «$=0$ سود» باید 20 باشد. اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $-\frac{1}{4}x^2+6x+k=0$ را حساب می‌کنیم:

$M=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{36-4(\frac{-1}{4})(k)}}{|\frac{-1}{4}|}=\frac{\sqrt{36+k}}{\frac{1}{4}}=4\sqrt{36+k}$

عبارت به دست آمده را برابر با 20 قرار می‌دهیم:

$4\sqrt{36+k}=20 \xrightarrow{\div 4} \sqrt{36+k}=5$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 36+k=25 \Rightarrow k=-11$

هزینهٔ اولیهٔ تولید یک کالا ۱۴ و هزینهٔ تولید هر واحد کالا ۸ است؛ پس تابع هزینه به صورت زیر است:

هزینهٔ کل = هزینهٔ ثابت + هزینهٔ هر کالا × (تعداد) $=14+8x$

با داشتن تابع سود و هزینه، تابع درآمد را می‌نویسیم:

$P(x)=R(x)-C(x) \Rightarrow P(x)+C(x)=R(x)$

$\Rightarrow R(x)=(-\frac{1}{4}x^2+6x-11)+(14+8x)=-\frac{1}{4}x^2+14x+3$

بیشترین درآمد را حساب می‌کنیم:

$\max(R)=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=\frac{-(14^2-4(\frac{-1}{4})(3))}{4(\frac{-1}{4})}$

$=\frac{-(196+3)}{-1}=199$

۵۵۱. ۱ قیمت فروش هر کالا k واحد پول است؛ پس تابع درآمد به صورت مقابل است:

درآمد = قیمت هر کالا (k) × تعداد کالا (x) $\Rightarrow R(x)=k.x$

با داشتن توابع درآمد و هزینه، تابع سود را می‌نویسیم:

$P(x)=R(x)-C(x) \Rightarrow P(x)=kx-(\frac{x^2}{2}+30x+70)$

$=\frac{-x^2}{2}+\underbrace{kx-30x}_{\text{فاکتور از x}}-70 \Rightarrow P(x)=\underbrace{\frac{-1}{2}}_{a}x^2+\underbrace{(k-30)}_{b}x\underbrace{-70}_{c}$

تابع سود در x رأسش بیشترین سود را می‌دهد:

$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-(k-30)}{2(\frac{-1}{2})}=\frac{-(k-30)}{-1}=k-30$

این عدد باید ۹۰ باشد: $k-30=90 \Rightarrow k=120$

پس ضابطهٔ تابع سود به صورت زیر می‌شود:

$P(x)=\frac{-1}{2}x^2+(k-30)x-70 \xrightarrow{k=120} P(x)=\frac{-1}{2}x^2+90x-70$

سود ماکزیمم به ازای $x=90$ به دست می‌آید:

$P(90)=\frac{-1}{2}(90)^2+90(90)-70=-4050+8100-70=\underbrace{3980}_{t}$

خواستهٔ سؤال برابر است با: $t+k=3980+120=4100$

۵۵۲. ۴ تابع درآمد را می‌نویسیم:

$R(x)=$ تعداد کالا × قیمت هر کالا $=A\times x=Ax$

با داشتن تابع هزینهٔ $C(x)=x^2+40x+600$ و تابع درآمد $R(x)=Ax$، تابع سود را می‌نویسیم:

$P(x)=R(x)-C(x) \Rightarrow P(x)=Ax-(x^2+40x+600)$

$=Ax-x^2-40x-600 \Rightarrow P(x)=\underbrace{-1}_{a}x^2+\underbrace{(A-40)}_{b}x\underbrace{-600}_{c}$

چون ماکزیمم سود ۱۰۰۰ است، پس باید $\frac{-\Delta}{4a}$ برابر ۱۰۰۰ باشد.

$\frac{-\Delta}{4a}=1000 \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} -\Delta=4000a \Rightarrow -(b^2-4ac)=4000a$

$\Rightarrow -((A-40)^2-4(-1)(-600))=4000(-1)$

$\xrightarrow[\text{قرینه می‌کنیم.}]{\text{دو طرف را}} (A-40)^2-2400=4000 \Rightarrow (A-40)^2=6400$

$\Rightarrow A-40=\pm 80 \Rightarrow \begin{cases} A-40=80 \Rightarrow A=120 \checkmark \\ A-40=-80 \Rightarrow A=-40 \times \end{cases}$ (قیمت کالا منفی نمی‌شود.)

برای مشاهده پاسخ سوالات ۵۵۳ تا ۵۷۰ منو اسکن کن

۵۷۱. ۳ در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت، مؤلفهٔ دوم تمام زوج مرتب‌ها باید یکسان باشد: $(2,6),(-5,a+2),(4,2b)$

پس $a+2$ و $2b$ باید برابر باشند:

$\begin{cases} a+2=6 \Rightarrow a=4 \\ 2b=6 \Rightarrow b=\frac{6}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=4+3=7$

۵۷۲. ۳ مؤلفهٔ دوم همهٔ زوج مرتب‌ها باید برابر باشد. از $(2,a-3b)$ و $(-1,12+a)$ شروع می‌کنیم (چون aها ساده می‌شوند و بعدش b به دست می‌آید):

$12+a=a-3b \Rightarrow 3b=-12 \Rightarrow b=-4$

جای تمام bها، -4 قرار می‌دهیم:

$f=\{(2,a-3b),(-5,3a+b),(6,c+1),(-1,12+a)\}$

$\xrightarrow{b=-4} f=\{(2,a+12),(-5,3a-4),(6,c+1),(-1,12+a)\}$

مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب $(۲, a+۱۲)$ و $(-۵, ۳a-۴)$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$۳a-۴=a+۱۲ \Rightarrow ۲a=۱۶ \Rightarrow a=۸$$

حالا مؤلفه‌های دوم $(۲, a+۱۲)$ و $(۶, c+۱)$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$a+۱۲=c+۱ \xrightarrow{a=۸} ۲۰=c+۱ \Rightarrow c=۱۹$$

۵۷۳. **۲** اگر f تابعی ثابت باشد، برد آن شامل یک عضو است و تمام مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های آن با هم برابرند. پس در این‌جا $y_۳ = y_۲ = y_۱$.

یادآوری ۱ برای چند دادهٔ یکسان، میانگین برابر با یکی از آن‌ها است.

پس میانگین این سه داده برابر با $y_۱$ یا $y_۲$ یا $y_۳$ است.

یادآوری ۲ واریانس چند عدد یکسان، برابر با صفر است.

پس واریانس اعداد $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$ که همگی با هم برابرند، برابر با صفر است.

پس جمع میانگین و واریانس برابر است با: $\bar{y}+\sigma^۲ = y_۳ + ۰ = y_۳$

البته جواب $y_۱$ یا $y_۲$ هم می‌توانست باشد.

۵۷۴. **۲** باید مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها برابر باشند:

$$۳m-۱ = k^۲-k = ۲$$

$۳m-۱$ و $k^۲-k$ را برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۳m-۱=۲ \rightarrow ۳m=۳ \rightarrow m=۱ \\ k^۲-k=۲ \end{cases}$$

دقت کنید نیازی به محاسبهٔ k نیست و همین که بدانیم $k^۲-k$ برابر با ۲ است، کافیست. با جای‌گذاری $m=۱$ و $k^۲-k=۲$، اعضای دامنهٔ f را می‌نویسیم:

$$f=\{(\underbrace{m}_{۱}, ۳m-۱), (\underbrace{-۱}_{۲}, k^۲-k), (\underbrace{k^۲-k}_{۲}, ۲)\} \rightarrow D_f=\{۱,-۱,۲\}$$

حاصل‌ضرب اعضای D_f برابر است با: $۱\times(-۱)\times۲=-۲$

۵۷۵. **۴** در تابع ثابت، مؤلفهٔ دوم تمام زوج مرتب‌ها با هم برابر است؛ پس $n^۲-۲n$، ۸، t و $۳m+۲$ با هم برابرند:

- $t=۸$
- $۳m+۲=۸ \Rightarrow ۳m=۶ \Rightarrow m=۲$
- $n^۲-۲n=۸ \Rightarrow n^۲-۲n-۸=۰ \Rightarrow (n-۴)(n+۲)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=۴ \\ n=-۲ \end{cases}$$

برای t و m، یک مقدار به دست آمد ولی برای n، دو مقدار. باید هر دو را امتحان کنیم.

- یک بار $n=۴$، $m=۲$ و $t=۸$ را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f=\{(۳,۸),(۲,۸),\cancel{(۳,۸)},(۴,۸)\}$$

به خاطر تکراری‌بودن حذف می‌شود.

پس در این حالت تابع f دارای ۳ عضو (زوج مرتب) است و داریم:

$$m+n+t=۲+۴+۸=۱۴$$

- با این‌که حالت قبل قطعاً جواب بود ولی یک بار هم با $n=-۲$، $m=۲$ و $t=۸$، تابع را می‌نویسیم:

$$f=\{(۳,۸),(۲,۸),(-۹,۸),(۴,۸)\}$$

در این حالت تابع ۴عضوی شد؛ پس قابل قبول نیست!

۵۷۶. **۲**

منظورش اینه تابع خطی با شیب صفر ← یعنی ← تابع ثابت

چون تابع ثابت است، پس اعداد سطر دوم جدول باید با هم برابر باشند:

$$۱-a=d=a+۵=b+۱$$

با برابری $۱-a$ و $a+۵$ شروع می‌کنیم:

$$a+۵=۱-a \Rightarrow ۲a=-۴ \Rightarrow a=-۲$$

حالا $b+۱$ را با $a+۵$ برابر قرار می‌دهیم:

$$b+۱=a+۵ \xrightarrow{a=-۲} b+۱=۳ \Rightarrow b=۲$$

۵۷۷. **۱** باید اعدادی که به آن‌ها پیکان وارد شده، یکسان باشند:

$$\frac{a}{۲}+b=\sqrt{a}+\frac{۳}{۲}=\frac{۲۵+۲b}{۲}$$

با $\frac{a}{۲}+b$ و $\frac{۲۵+۲b}{۲}$ شروع می‌کنیم:

$$\frac{a}{۲}+b=\frac{۲۵+۲b}{۲} \xrightarrow{\times ۲} a+۲b=۲b+۲۵ \Rightarrow a=۲۵$$

حالا $\frac{۲۵+۲b}{۲}$ و $\sqrt{a}+\frac{۳}{۲}$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{a}+\frac{۳}{۲}=\frac{۲b+۲۵}{۲} \xrightarrow{a=۲۵} \underbrace{\sqrt{۲۵}}_{۵}+\frac{۳}{۲}=\frac{۲۵+۲b}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۳}{۲}=\frac{۲۵+۲b}{۲} \Rightarrow ۱۳=۲۵+۲b \Rightarrow ۲b=-۱۲ \Rightarrow b=-۶$$

۵۷۸. **۲** نمودار تابع ثابت، روی یک خط افقی قرار دارد. این شرط فقط در **۲** دیده می‌شود.

۵۷۹. **۲** از این‌که تابع ثابت f از نقطهٔ $(۲,-۶)$ می‌گذرد، نتیجه می‌گیریم برد تابع f، $\{-۶\}$ و ضابطه‌اش به صورت $f(x)=-۶$ است.

در تساوی $f(۱-a)=۲a-۴$، عبارت $۲a-۴$، باید برابر -۶ باشد:

$$۲a-۴=-۶ \Rightarrow ۲a=-۲ \Rightarrow a=-۱$$

۵۸۰. **۴** در تابع ثابت، تمام خروجی‌ها (yها) با هم برابرند؛ پس در این‌جا باید $a+۳$ و $۲a-۱$ برابر باشند:

$$۲a-۱=a+۳ \Rightarrow ۲a-a=۳+۱ \Rightarrow a=۴$$

۵۸۱. **۳** تابع f ثابت است؛ پس حق داریم جای تمام (ابرها) f(a)ها، c قرار دهیم:

$$\frac{۲f(۱)-۳f(۴)}{۹-f(۰)}=۴ \Rightarrow \frac{۲c-۳c}{۹-c}=۴ \Rightarrow \frac{-c}{۹-c}=۴$$

$$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} -c=۳۶-۴c \Rightarrow ۴c-c=۳۶ \Rightarrow ۳c=۳۶ \Rightarrow c=۱۲$$

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=۱۲$ است و در نتیجه: $f(۲)=۱۲$

۵۸۲. **۳**

از قیافش نترس اگر در تساوی داده شده، جای تمام (ابرها) f(a)ها، c قرار دهیم، تساوی داده‌شده ساده‌تر می‌شود.

$$\underbrace{f(۴)}_{c}+\underbrace{f(۴^۲)}_{c}+\underbrace{f(۴^۳)}_{c}=۱-\underbrace{f(f(-۴))}_{c} \Rightarrow c+c+c=۱-c$$

$$\Rightarrow ۴c=۱ \Rightarrow c=\frac{۱}{۴}$$

پس مقدار $f(۸)$ هم همان $c=\frac{۱}{۴}$ است که با $۲^{-۲}$ برابر می‌باشد.

۵۸۳. **۴** f تابعی ثابت است؛ پس ضابطه‌اش به صورت $f(x)=c$ است.

جای تمام (ابرها) f(a)ها، c قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(a+b)}_{c}=\underbrace{f(a)}_{c}+\underbrace{f(b)}_{c} \Rightarrow c=c.c \Rightarrow c=c^۲$$

$$\Rightarrow c^۲-c=۰ \xrightarrow{\text{فاکتور از } c} c(c-۱)=۰ \Rightarrow c=۰ \ , \ c=۱$$

پس مقدار $f(\frac{b}{a})$ یا صفر است یا ۱.

۵۸۴. **۴** در ضابطهٔ تابع ثابت f، خبری از x نیست و فقط یک عدد خالی داریم!

ضریب x یعنی a باید صفر باشد: $f(x)=ax+a-۲ \xrightarrow{a=۰} f(x)=-۲$

پس مقدار این تابع به ازای هر x ورودی، -۲ است: $f(۱)=-۲$

۵۸۵. **۴** ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x+۲)-۴x+b=ax+۲a-۴x+b$$

در دو جملهٔ ax و $-۴x$، از x فاکتور می‌گیریم: $f(x)=(a-۴)x+۲a+b$

در تابع ثابت، x نباید داشته باشیم؛ پس ضریبش صفر است:

$$a-۴=۰ \Rightarrow a=۴$$

با جای‌گذاری $a=۴$، ضابطهٔ f به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(x)=(a-۴)x+۲a+b \xrightarrow{a=۴} f(x)=۸+b$$

پس مقدار تابع f به ازای هر x ورودی باید $b+8$ باشد؛ یعنی از $f(b)=\frac{b}{2}$ نتیجه می‌گیریم $\frac{b}{2}$ همان $b+8$ است:

$$8+b=\frac{b}{2} \xrightarrow{\times 2} 16+2b=b \Rightarrow b=-16$$

در نتیجه: $ab=4\times(-16)=-64$

۵۸۶. ۲ صورت کسر را با اتحاد جمله‌مشترک و مخرج را با فاکتورگیری تجزیه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-7x-8}{2x+2}+ax=\frac{(x-8)(x+1)}{2(x+1)}+ax$$

$$=\frac{x-8}{2}+ax=\frac{x}{2}-\frac{8}{2}+ax$$

در جملات $\frac{x}{2}$ و ax از x فاکتور می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{x}{2}+ax-4=x(\frac{1}{2}+a)-4$$

چون f ثابت است، ضریب x باید صفر باشد:

$$\frac{1}{2}+a=0 \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$$

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=-4$ شد. در نتیجه:

$$a^2\times f(a)=(\frac{-1}{2})^2\times(-4)=\frac{1}{4}\times(-4)=-1$$

۵۸۷. ۱ f، تابعی دوضابطه‌ای است.

ضابطهٔ اول: دامنه‌اش اعداد بزرگ‌تر از یک $(x>1)$ و ضابطه‌اش، مجذور x، یعنی x^2 است.

ضابطهٔ دوم: دامنه‌اش مابقی اعداد، یعنی اعداد کوچک‌تر یا مساوی یک $(x\le 1)$ و ضابطه‌اش، قرینهٔ x، یعنی $-x$ است.

پس:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x>1\\ -x & x\le 1\end{cases}$$

۵۸۸. ۱ برای محاسبهٔ $f(1)$ باید مقدار تابع را به ازای ورودی $x=1$ به دست آوریم. $x=1$ در محدودهٔ $x<2$ است؛ پس برای محاسبهٔ $f(1)$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم و جای xهایش ۱ را قرار می‌دهیم:

$$x<2: f(x)=2-3x \Rightarrow f(1)=2-3(1)=2-3=-1$$

۵۸۹. ۲ عدد $\frac{5}{2}$ در محدودهٔ $x\ge 1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبهٔ $f(\frac{5}{2})$ سراغ ضابطهٔ بالایی می‌رویم:

$$x\ge 1: f(x)=2x^2-x \Rightarrow f(\frac{5}{2})=2(\frac{5}{2})^2-\frac{5}{2}=\frac{25}{2}-\frac{5}{2}=\frac{20}{2}=10$$

$\sqrt{2}$ تقریباً ۱/۴ است؛ پس $2-\sqrt{2}$ تقریباً ۰/۶ $=2-1/4$ می‌شود که در محدودهٔ $-1<x<1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبهٔ $f(2-\sqrt{2})$ سراغ ضابطهٔ وسطی می‌رویم:

$$-1<x<1: f(x)=5 \Rightarrow f(2-\sqrt{2})=5$$

عدد $\frac{-5}{4}$ در محدودهٔ $x\le -1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبهٔ $f(\frac{-5}{4})$ سراغ ضابطهٔ پایینی می‌رویم:

$$x\le -1: f(x)=-\sqrt{1-x} \Rightarrow f(\frac{-5}{4})=-\sqrt{1+\frac{5}{4}}=-\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{3}{2}$$

سه مقدار به دست آمده را در عبارت خواسته‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(\frac{5}{2})+f(\sqrt{2}-2)+2f(\frac{-5}{4})=10+5+2(\frac{-3}{2})=15-3=12$$

۵۹۰. ۱ $\sqrt{3}$ تقریباً ۱/۷ است، پس $x=\sqrt{3}-1\simeq 0/7$ در محدودهٔ $x\ge 0$ است، در نتیجه برای محاسبهٔ $f(\sqrt{3}-1)$ از ضابطهٔ اول استفاده می‌کنیم: $f(x)=x^2+2x \Rightarrow f(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)$

$$=(3+1-2\sqrt{3})+2\sqrt{3}-2=4-\cancel{2\sqrt{3}}+\cancel{2\sqrt{3}}-2=2$$

$x=\frac{-1}{4}$ در محدودهٔ $x<0$ است؛ پس برای محاسبهٔ $f(\frac{-1}{4})$، سراغ ضابطهٔ دوم می‌رویم:

$$f(x)=\frac{a}{x} \Rightarrow f(\frac{-1}{4})=\frac{a}{\frac{-1}{4}}=-4a$$

معادله را می‌نویسیم: $f(\sqrt{3}-1)+5f(\frac{-1}{4})=-38 \Rightarrow 2+5(-4a)=-38$

$$\Rightarrow 2-20a=-38 \Rightarrow -20a=-40 \Rightarrow a=2$$

۵۹۱. ۱ چون نمی‌دانیم a در کدام‌یک از محدوده‌های $x\ge 1$ و $x<1$ قرار دارد، باید هر دو حالت را حل کنیم و جواب به دست آمده را بررسی کنیم. فرض کنیم a در محدودهٔ $x\ge 1$ است؛ پس برای محاسبهٔ $f(a)$ در ضابطهٔ اول یعنی $x+2$، جای x، a می‌گذاریم:

$$f(x)=x+2 \Rightarrow \underbrace{f(a)}_{5}=a+2 \Rightarrow 5=a+2 \Rightarrow a=3 \checkmark$$

$a=3$ در محدودهٔ $x\ge 1$ است؛ پس قابل قبول است.

فرض کنیم a در محدودهٔ $x<1$ است؛ پس برای محاسبهٔ $f(a)$ در ضابطهٔ دوم یعنی $2x-3$، جای x، a می‌گذاریم: $f(x)=2x-3 \Rightarrow \underbrace{f(a)}_{5}=2a-3$

$$\Rightarrow 5=2a-3 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=\frac{8}{2}=4 \times$$

$a=4$ در محدودهٔ $x<1$ قرار ندارد؛ پس قابل قبول نیست.

۵۹۲. ۴ دامنهٔ ضابطه‌ها به صورت $x\ge 2$ و $x\le 2$ است. $x=2$ در هر دو ضابطه مشترک است. مقدار $f(2)$ را به کمک هر دو ضابطه حساب می‌کنیم:

ضابطهٔ بالا: $f(2)=a(2)^2+2=4a+2$

ضابطهٔ پایین: $f(2)=a-2$

این دو مقدار باید برابر باشند، چون در غیر این صورت f تابع نیست (به ازای $x=2$ دو خروجی متفاوت می‌دهد):

$$4a+2=a-2 \Rightarrow 3a=-4 \Rightarrow a=-\frac{4}{3}$$

۵۹۳. ۱

منظورش اینه

$$f(x)=\begin{cases}4 & 0\le x<3\\ x+2 & 3\le x<9\\ x+3 & 9\le x\le 16\end{cases} \xleftarrow{\text{یعنی}}$$

x تعداد ساعات حضور در پارکینگ است. اگر خودرویی بین صفر تا ۳ ساعت داخل پارکینگ باشد، ۴ واحد هزینه پرداخت می‌کند. اگر بین ۳ تا ۹ ساعت داخل پارکینگ باشد، معادل با $x+2$ واحد هزینه پرداخت می‌کند و اگر بین ۹ تا ۱۶ ساعت داخل پارکینگ باشد، معادل با $x+3$ واحد هزینه پرداخت می‌کند.

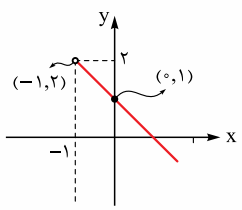
چون $17-9=8$ در محدودهٔ $3\le x<9$ قرار می‌گیرد، پس با ضابطهٔ وسط کار داریم: $3\le x<9: f(x)=x+2 \Rightarrow f(8)=8+2=10$

پس این شخص ۱۰ واحد هزینه پرداخت می‌کند. چون هر واحد هزینه معادل با ۵۰۰۰ تومان بوده است، پس $10\times 5000=50000$ تومان پرداخت می‌کند.

۵۹۴. ۱ ابتدا در محدودهٔ $x>-1$، تابع $y=-x+1$ را رسم می‌کنیم. برای رسم خط کافی است دو نقطه از آن را داشته باشیم. بهتر است x را -1 (که لب مرز است) و صفر (که در محدودهٔ $x>-1$ قرار دارد) بدهیم.

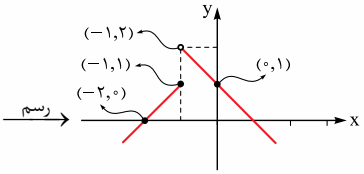
x	-1	0
$y=-x+1$	2	1
(x,y)	$(-1,2)$	$(0,1)$

رسم →



در محدودهٔ $x \le -1$، تابع $y = x + 2$ را رسم می‌کنیم. بهتر است x را -1 (که لب مرز است) و -2 (که در محدودهٔ $x \le -1$ قرار دارد) بدهیم:

x	-1	-2
$y = x + 2$	1	0
(x, y)	$(-1, 1)$	$(-2, 0)$



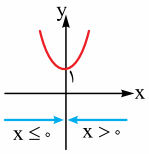
نمودار به دست آمده، همان نمودار ۱ است.

تیزبازی به ازای $x = -1$ از ضابطهٔ پایین خروجی می‌گیرد:
$y = x + 2 = -1 + 2 = 1$
پس نقطهٔ $(-1, 1)$ باید روی نمودار باشد. در نتیجه ۲ و ۴ رد می‌شوند.
به ازای $x = 1$ از ضابطهٔ بالایی خروجی می‌گیرد: $y = -x + 1 = -1 + 1 = 0$
پس نقطهٔ $(1, 0)$ باید روی نمودار باشد. از بین دو گزینهٔ باقی‌مانده، فقط ۱ این شرط را دارد.

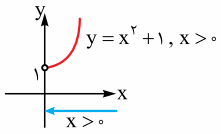
۵۹۵. **۴** هر ضابطه را در محدودهٔ دامنهٔ خودش رسم می‌کنیم.

اول سهمی $y = x^2 + 1$ را به ازای $x > 0$ رسم می‌کنیم.

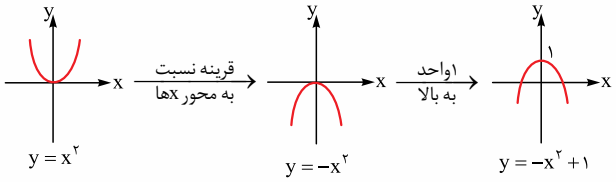
برای رسم سهمی $y = x^2 + 1$، نمودار سهمی $y = x^2$ را یک واحد به بالا می‌بریم:



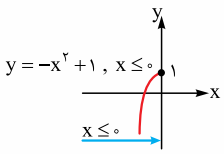
در محدودهٔ $x > 0$، قسمت سمت چپ محور yها نمودار بالا حذف می‌شود و فقط سمت راست محور yها می‌ماند.



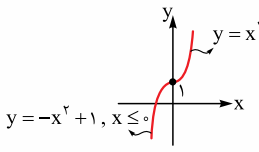
حالا باید سهمی $y = -x^2 + 1$ را به ازای $x \le 0$ رسم کنیم. برای رسم سهمی $y = -x^2 + 1$، اول نمودار سهمی $y = x^2$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم (تا نمودار $y = -x^2$ به دست آید). بعد آن را یک واحد به بالا می‌بریم (تا نمودار $y = -x^2 + 1$ به دست آید).



در محدودهٔ $x \le 0$، قسمت سمت راست محور yها در نمودار بالا حذف می‌شود و فقط سمت چپ آن می‌ماند:



حالا دو نمودار به دست آمده را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



تیزبازی مقدار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 - x^2 & x \le 0 \end{cases}$ را در $x = -1$ حساب می‌کنیم.

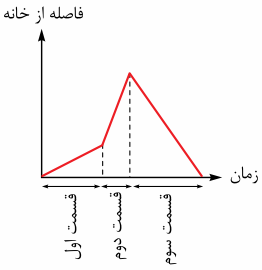
به ازای $x = -1$ داریم: $f(-1) \xrightarrow{\text{ضابطهٔ پایین}} 1 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$

نقطهٔ $(-1, 0)$ روی نمودار ۱، ۲ و ۳ نیست؛ پس جواب ۴ است.

۵۹۶. **۳** نمودارهای ۱ و ۴ نمی‌توانند جواب باشند؛ چون در این دو نمودار، در یک بازهٔ زمانی، فاصلهٔ بهزاد از خانه ثابت مانده است و این به معنی آن است که بهزاد در مسیر توقف کرده است که این موضوع در داستان قید نشده است؛ پس جواب، ۲ یا ۳ است.

از آن‌جا که بهزاد ابتدا آهسته‌تر قدم می‌زد و سپس سرعت می‌گیرد، شیب قسمت اول باید کم‌تر از شیب قسمت دوم باشد.

در ۳، شیب قسمت اول، کم‌تر از شیب قسمت دوم است؛ پس جواب ۳ است.



قسمت اول: بهزاد آهسته از خانه دور می‌شود.

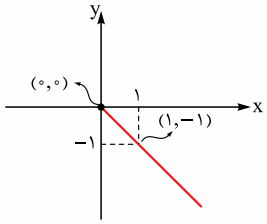
قسمت دوم: بهزاد با سرعت بیشتری به سمت پارک می‌رود و هم‌چنان در حال دورشدن از خانه است!

قسمت سوم: بهزاد به سمت خانه برمی‌گردد و فاصله‌اش از خانه رو به کم‌شدن است.

۵۹۷. **۴** تابعی دوضابطه‌ای است. این تابع دوضابطه‌ای را در دو بخش جدا رسم می‌کنیم.

ابتدا در محدودهٔ $x \ge 0$، تابع $y = -x$ را رسم می‌کنیم. بهتر است x را صفر (که لب مرز است) و ۱ (که در محدودهٔ $x \ge 0$ قرار دارد) بدهیم.

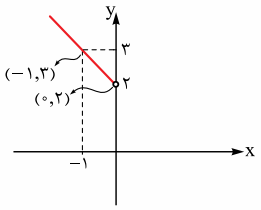
x	0	1
$y = -x$	0	-1
(x, y)	$(0, 0)$	$(1, -1)$



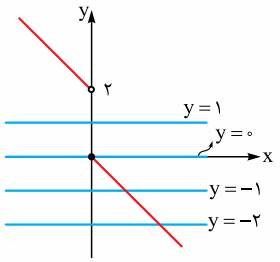
در محدودهٔ $x < 0$، تابع $y = 2 - x$ را رسم می‌کنیم. بهتر است x را صفر (که لب مرز است) و -1 (که در محدودهٔ $x < 0$ قرار دارد) بدهیم.

فقط دقت کنید در این حالت به ازای $x = 0$، نقطه‌ای که به دست می‌آید را باید توخالی بگذاریم. (چون خود $x = 0$ در محدودهٔ دامنهٔ ضابطهٔ پایینی نیست.)

x	0	-1
$y = 2 - x$	2	3
(x, y)	$(0, 2)$	$(-1, 3)$

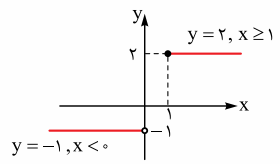


حالا نمودار f (هر دو ضابطه) را به همراه چهار خط داده‌شده در گزینه‌ها رسم می‌کنیم:



فقط خط $y = 1$ از بین این چهار خط، نمودار تابع f را قطع نمی‌کند.

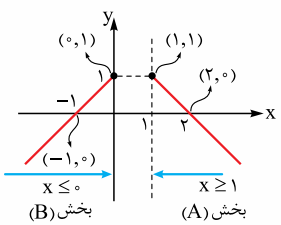
۵۹۸. **۳** تابع رسم‌شده از دو خط افقی تشکیل شده است. ضابطهٔ خط‌های افقی به صورت «$y =$ *عددی*» است. به ازای $x \ge 1$، ضابطهٔ $y = 2$ و به ازای $x < 0$، ضابطهٔ $y = -1$ است.



پس ضابطهٔ تابع به صورت مقابل است:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \ge 1 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

۵۹۹. **۴** تابع رسم‌شده از دو بخش تشکیل شده است. هر دو بخش یک خط هستند. برای به دست آوردن معادلهٔ یک خط، نیاز به شیب و یک نقطه از آن خط داریم:



بخش (A): یک خط است که از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(۱,۱)$ گذشته است. شیب آن را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱-۰}{۱-۲}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

حالا با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً $(۲,۰)$) معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۰=-۱(x-۲) \Rightarrow y=-x+۲$$

پس ضابطهٔ اول به صورت $y=-x+۲$ با شرط دامنهٔ $x\geq ۱$ است.

بخش (B): یک خط است که از دو نقطهٔ $(-۱,۰)$ و $(۰,۱)$ می‌گذرد. شیب آن را حساب می‌کنیم:

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱-۰}{۰-(-۱)}=\frac{۱}{۱}=۱$$

با داشتن شیب و یک نقطه از خط (مثلاً $(-۱,۰)$) معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۰=۱(x-(-۱)) \Rightarrow y=x+۱$$

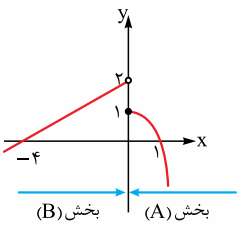
پس ضابطهٔ دوم هم به صورت $y=x+۱$ با شرط دامنهٔ $x\leq ۰$ است. در نهایت ضابطهٔ f به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x\geq ۱\\ x+۱ & x\leq ۰\end{cases}$$

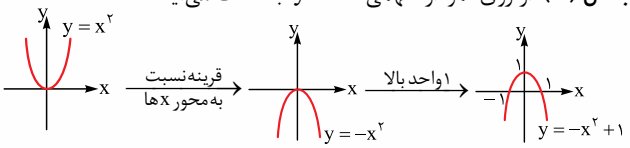
تیزبازی نقطهٔ $(۱,۱)$ روی نمودار تابع است. در بین گزینه‌ها با جای‌گذاری $x=۱$، فقط خروجی ۳ و ۴، عدد ۱ می‌شود؛ پس دو گزینهٔ دیگر حذف می‌شوند.

نقطهٔ $(-۱,۰)$ نیز روی تابع است که در بین دو گزینهٔ باقی‌مانده، فقط در ۴ صدق می‌کند.

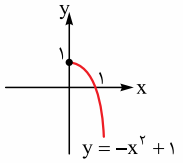
۶۰۰. **۴** نمودار رسم‌شده از دو بخش تشکیل شده است. بخش سمت راست مربوط به یک سهمی و بخش سمت چپ مربوط به یک خط است:



بخش (A): از روی نمودار سهمی $y=x^۲$ به دست می‌آید:



بخش (A)، قسمت سمت راست همین شکل است؛ یعنی همین شکل با دامنهٔ $x\geq ۰$:



بخش (B): یک خط است که از دو نقطهٔ $A(۰,۲)$ و $B(-۴,۰)$ می‌گذرد. شیب آن برابر است با:

$$m=\frac{۰-۲}{-۴-۰}=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$$

با داشتن شیب $(m=\frac{۱}{۲})$ و عرض از مبدأ $(h=۲)$ معادلهٔ خط به صورت $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ درمی‌آید. پس ضابطهٔ دوم هم به شکل $y=\frac{x}{۲}+۲$ با دامنهٔ $x<۰$ است.

در نتیجه:

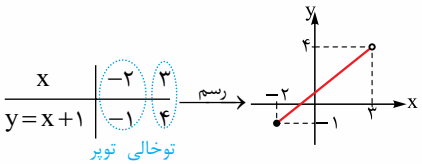
$$f(x)=\begin{cases}۱-x^۲ & x\geq ۰\\ \frac{x}{۲}+۲ & x<۰\end{cases}$$

تیزبازی نقطهٔ $(۰,۱)$ روی تابع است. در بین گزینه‌ها با جای‌گذاری $x=۰$، فقط خروجی ۲ و ۴، عدد ۱ می‌شود؛ پس دو گزینهٔ دیگر حذف می‌شوند.

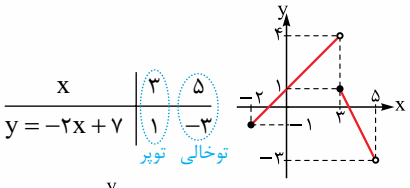
نقطهٔ $(-۴,۰)$ روی تابع است که در بین دو گزینهٔ باقی‌مانده، فقط در ۴ صدق می‌کند.

۶۰۱. **۱** نمودار هر ضابطه را در دامنه‌اش رسم می‌کنیم:

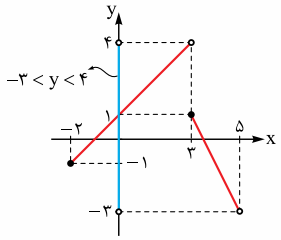
ضابطهٔ اول یک خط راست است. با دادن xهای سر و ته بازه، دو نقطه از آن را مشخص می‌کنیم:



ضابطهٔ دوم هم یک خط راست است. همان کار را می‌کنیم و نمودار این بخش را به نمودار ضابطهٔ بالایی اضافه می‌کنیم:



حالا نمودار به دست آمده را روی محور yها می‌کوبیم تا برد به دست آید:



پس برد محدودهٔ $-۳<y<۴$ است.

۶۰۲. **۳** در تابع همانی به ازای هر عددی که وارد تابع می‌شود، همان عدد از تابع خارج می‌شود؛ پس در این‌جا باید ورودی $a+۳$ با خروجی $۹-۲a$ برابر باشد:

$$a+۳=۹-۲a \Rightarrow a+۲a=۹-۳ \Rightarrow ۳a=۶ \quad a=۲$$

۶۰۳. **۴** در تابع همانی مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در زوج مرتب $(a-۱,۲)$، باید ۲ و $a-۱$ با هم برابر باشند:

$$a-۱=۲ \Rightarrow a=۳$$

در زوج مرتب $(-۳,b+۱)$، باید -۳ و $b+۱$ با هم برابر باشند:

$$b+۱=-۳ \Rightarrow b=-۴$$

پس:

$$b-a=-۴-۳=-۷$$

۶۰۴. **۱** در زوج مرتب $(a-۱۱,۷-a)$، مؤلفهٔ اول و دوم را برابر قرار می‌دهیم:

$$a-۱۱=۷-a \Rightarrow ۲a=۱۸ \Rightarrow a=۹$$

در زوج مرتب $(۶b,b^۲+\overset{۹}{a})$، مؤلفهٔ اول و دوم را برابر قرار می‌دهیم:

$$۶b=b^۲+۹ \Rightarrow b^۲-۶b+۹=۰ \xrightarrow[\text{مربع}]{\text{اتحاد}} (b-۳)^۲=۰ \Rightarrow b=۳$$

در زوج مرتب $(c-a,\frac{b}{۳}+۱)$، مؤلفهٔ اول و دوم را برابر قرار می‌دهیم:

$$c-a=\frac{b}{۳}+۱ \xrightarrow[b=۳]{a=۹} c-۹=\frac{۳}{۳}+۱ \Rightarrow c-۹=۲ \Rightarrow c=۱۱$$

۶۰۵. **۱** در نمایش پیکانی تابع همانی، اعداد سر و ته پیکان باید با هم برابر باشند؛ پس:

$$۲a-۱=۳ \Rightarrow ۲a=۴ \Rightarrow a=۲$$

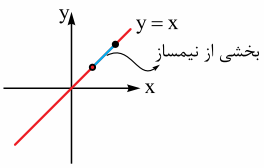
$$۲=۳-b \Rightarrow b=۳-۲ \Rightarrow b=۱$$

$$۷=۱-c \Rightarrow c=۱-۷ \Rightarrow c=-۶$$

حالا میانگین سه عدد a، b و c را حساب می‌کنیم:

$$\text{میانگین}=\frac{a+b+c}{۳}=\frac{۲+۱+(-۶)}{۳}=\frac{-۳}{۳}=-۱$$

۶۰۶. **۳** نمودار تابع همانی حتماً روی خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) یا بخشی از آن قرار دارد.



بین گزینه‌ها تنها نموداری که روی $y=x$ قرار دارد، ۳ است.

۶۰۷. **۲** از $f(a)=۸-a$ می‌فهمیم که نقطهٔ $(a,۸-a)$ روی تابع f است. چون f همانی است، پس باید مؤلفهٔ x و y نقاط آن با هم برابر باشند:

$$a=۸-a \Rightarrow a+a=۸ \Rightarrow ۲a=۸ \Rightarrow a=\frac{۸}{۲}=۴$$

چون $a=۴$ شد، پس $-a=-۴$ است. حالا $f(-a)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(-a)=f(-۴)\overset{\text{همانی}}{=}-۴$$

۶۰۸. **۱** f تابعی ثابت است؛ پس جای تمام($\heartsuit$)ها، c قرار می‌دهیم:

$$\frac{۴f(۲)+g(۸)}{f(x)-g(-۱)}=g(۲)\ \Rightarrow\ \frac{۴c+g(۸)}{c-g(-۱)}=g(۲)$$

از طرفی g تابعی همانی است؛ پس $g(a)$ برابر با a است: $\frac{۴c+۸}{c-(-۱)}=۲$

معادلهٔ بالا را طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$\frac{۴c+۸}{c+۱}=۲\ \Rightarrow\ ۴c+۸=۲c+۲\ \Rightarrow\ ۴c-۲c=۲-۸$$
$$\Rightarrow\ ۲c=-۶\ \Rightarrow\ c=-۳$$

یعنی ضابطهٔ تابع ثابت f به صورت $f(x)=-۳$ است و در نتیجه: $f(۰)=-۳$

۶۰۹. **۲** نقطهٔ $A(۲-۳a\,,\,a+۱۰)$ روی تابع همانی g قرار دارد؛ پس طول و عرضش برابر است: $۲-۳a=a+۱۰\ \Rightarrow\ -۴a=۸\ \Rightarrow\ a=-۲$

با جای‌گذاری $a=-۲$، نقطهٔ A به صورت زیر می‌شود:

$$A(\underbrace{۲-۳a}_{۸},\underbrace{a+۱۰}_{۸})\ \Rightarrow\ A(۸,۸)$$

چون نقطهٔ $(۸,۸)$ روی تابع ثابت f قرار دارد و ضابطهٔ تابع ثابت به صورت $f(x)=c$ است، پس c باید ۸ باشد: $f(x)=۸$

$$f(a)+g(\frac{a}{۲})=\underbrace{f(-۲)}_{\text{ثابت}}+\underbrace{g(-۱)}_{\text{همانی}}=۸+(-۱)=۷$$

۶۱۰. **۳** ضابطهٔ تابع همانی به صورت $f(x)=x$ است؛ پس ضریب x باید ۱ و عددی که بعد از x می‌آید (یا همان عدد ثابت) باید صفر باشد:

$$f(x)=\underbrace{(a-۱)}_{۱}x+\underbrace{b+۲}_{\text{صفر}}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a-۱=۱\ \Rightarrow\ a=۲\\ b+۲=۰\ \Rightarrow\ b=-۲\end{cases}$$

پس: $a-b=۲-(-۲)=۴$

۶۱۱. **۴**

از قیافش نترس فقط کافیه کسر داده‌شده را مساوی x بگذاریم و طرفین‌وسطین کنیم.

ضابطهٔ تابع داده‌شده را برابر با x قرار می‌دهیم و طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$\frac{۲x^۳+۳x^۲+cx+d}{ax^۲+bx-۱}=x\ \Rightarrow\ ۲x^۳+۳x^۲+cx+d=ax^۳+bx^۲-۱x$$

حالا ضرایب عبارت‌های هم‌درجه در دو طرف تساوی را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$۲x^۳+۳x^۲+cx+d=ax^۳+bx^۲-۱x+۰$$

پس: $a+b+c+d=۲+۳+(-۱)+۰=۴$

۶۱۲. **۲**

از قیافش نترس اگر در ضابطهٔ f، جملات هم‌درجه را کنار هم بنویسیم، کار ساده‌تر می‌شود.

ضابطهٔ f را باز می‌کنیم:

$$f(x)=a(x+۱)^۲+x^۲+bx+c+۳$$
$$=a(x^۲+۲x+۱)+x^۲+bx+c+۳$$
$$=ax^۲+۲ax+a+x^۲+bx+c+۳$$

عبارت‌های هم‌درجه را کنار هم می‌نویسیم:

$$f(x)=\underline{ax^۲}+\underline{\underline{۲ax}}+\underline{\underline{\underline{a}}}+\underline{x^۲}+\underline{\underline{bx}}+\underline{\underline{\underline{c}}}+\underline{\underline{\underline{۳}}}$$
$$=(a+۱)x^۲+(۲a+b)x+(a+c+۳)$$

طبق ضابطهٔ تابع همانی، باید ضریب $x^۲$ و عدد ثابت انتهایی صفر و ضریب x، یک باشد:

$$\underbrace{(a+۱)}_{\text{صفر}}x^۲+\underbrace{(۲a+b)}_{۱}x+\underbrace{(a+c+۳)}_{\text{صفر}}$$

پس:

۱) $a+۱=۰\ \Rightarrow\ a=-۱$

۲) $۲a+b=۱\xrightarrow{a=-۱}-۲+b=۱\ \Rightarrow\ b=۳$

۳) $a+c+۳=۰\xrightarrow{a=-۱}-۱+c+۳=۰\ \Rightarrow\ c=-۲$

در نتیجه: $\frac{a+b}{c}=\frac{-۱+۳}{-۲}=\frac{۲}{-۲}=-۱$

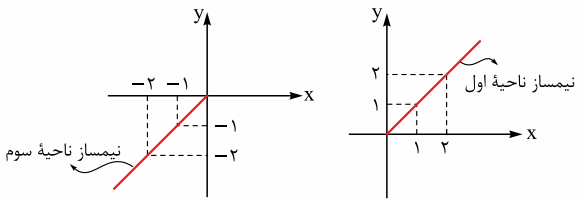
۶۱۳. **۳** نقطه‌ای که روی نیمساز ربع اول و سوم است، مؤلفهٔ اول و دوم زوج مرتبش با هم برابرند؛ پس برای آن‌که نقطهٔ $(\underbrace{۴m-۳}_{\text{مؤلفهٔ اول}},\underbrace{۲m+۷}_{\text{مؤلفهٔ دوم}})$ روی نیمساز ربع اول و سوم باشد، باید:

$$۴m-۳=۲m+۷\ \Rightarrow\ ۴m-۲m=۷+۳\ \Rightarrow\ ۲m=۱۰\ \Rightarrow\ m=۵$$

۶۱۴. **۱** اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ سوم باشد، دارای طول (x) و عرض (y) برابر است. در این‌جا هم که نقطهٔ $(m,m^۲-m-۸)$ روی نیمساز ناحیهٔ سوم است، پس باید m و $m^۲-m-۸$ با هم برابر باشند:

$$m^۲-m-۸=m\ \Rightarrow\ m^۲-۲m-۸=۰$$
$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}}(m-۴)(m+۲)=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}m=۴\\ m=-۲\end{cases}$$

دقت کنید اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ اول باشد، دارای طول و عرض **برابر با علامت مثبت** است و اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ سوم باشد، دارای طول و عرض **برابر با علامت منفی** است.



پس در این‌جا که نقطه روی نیمساز ناحیهٔ سوم است، طول و عرض باید هر دو منفی باشند. طول نقطهٔ $(m,m^۲-m-۸)$، برابر با m است؛ پس m باید عددی منفی باشد. در نتیجه $m=-۲$ قبول است و $m=۴$ رد می‌شود.

۶۱۵. **۱** اگر نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشد، مؤلفهٔ اول و دومش یکسان است.

برای نقطهٔ $(n^۲-۳n,۴)$، طول و عرض را برابر قرار می‌دهیم:

$$\text{عرض}=\text{طول}\ \Rightarrow\ n^۲-۳n=۴\ \Rightarrow\ n^۲-۳n-۴=۰$$
$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}}(n-۴)(n+۱)=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}n=۴\\ n=-۱\end{cases}$$

برای نقطهٔ $(\underbrace{n^۲+n}_{\text{عرض}},\underbrace{۲۰}_{\text{طول}})$، طول و عرض را برابر قرار می‌دهیم:

$$\text{عرض}=\text{طول}\ \Rightarrow\ n^۲+n=۲۰\ \Rightarrow\ n^۲+n-۲۰=۰$$
$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}}(n+۵)(n-۴)=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}n=-۵\\ n=۴\end{cases}$$

از معادلهٔ اول، مقدار n، برابر با «۴ و ۱-» و از معادلهٔ دوم، مقدار n، برابر با «۴ و ۵-» شد. برای آن‌که هر دو معادله برقرار باشند، باید جواب مشترک این دو معادله یعنی $n=۴$ را در نظر بگیریم.

برای نقطهٔ $(۱,m+n)$، طول و عرض را برابر قرار می‌دهیم:

$$m+n=۱\xrightarrow{n=۴}m+۴=۱\ \Rightarrow\ m=-۳$$

۶۱۶. **۳**

استراتژی y همهٔ زوج مرتب‌ها را برابر قرار دهید. از دوتا n به دست آمده، اونی که عدد طبیعی شده را قبول می‌کنیم. بعد m باید طوری انتخاب شود که ۲تا از مؤلفه‌های اول هم تکراری شوند. (چون تابع ۲عضوی است.)

در تابع ثابت، مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌ها با هم برابر است؛ پس در تابع $f=\{(m+3n,2t^2),(-2,n^2+2n),(1-3m,8)\}$ باید $2t^2$، n^2+2n و ۸ برابر باشند:

$2t^2=8 \Rightarrow t^2=4$

$n^2+2n=8 \Rightarrow n^2+2n-8=0$

$\xrightarrow[\text{جمله‌مشترک}]{\text{تجزیه با}} (n+4)(n-2)=0 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} n=-4 & \times \\ n=2 & \checkmark \end{cases}$

به ازای $n=2$ و $t^2=4$، تابع به صورت زیر است:

$f=\{(m+6,8),(-2,8),(1-3m,8)\}$

برای آن‌که دامنهٔ تابع، ۲عضوی باشد باید از بین سه عضو دامنه (یعنی $m+6$، -2 و $1-3m$)، دوتا شبیه هم باشند. حواستان هم باشد که m باید عدد طبیعی باشد. چند حالت ممکن را بررسی می‌کنیم:

۱) $m+6$ و -2 برابر باشند: $m+6=-2 \Rightarrow \underbrace{m=-8}_{\text{طبیعی نیست}}$ ×

۲) $1-3m$ و -2 برابر باشند:

$1-3m=-2 \Rightarrow -3m=-3 \Rightarrow m=1$ ✓

۳) $m+6$ و $1-3m$ برابر باشند:

$m+6=1-3m \Rightarrow 4m=-5 \Rightarrow \underbrace{m=\frac{-5}{4}}_{\text{طبیعی نیست.}}$ ×

پس $m=1$ است و تابع به شکل زیر می‌شود:

$f=\{(\underbrace{m+6}_{7},8),(-2,8),(\underbrace{1-3m}_{-2},8)\}$

از بین دو زوج مرتب تکراری، یکی را حذف می‌کنیم: $f=\{(7,8),(-2,8)\}$

مجموع اعضای دامنهٔ f را حساب می‌کنیم: $7+(-2)=5$

۶۱۷. ۲ وقتی تابع ثابت از نقطهٔ $(5,2)$ عبور می‌کند یعنی بردش $\{2\}$ است، پس خروجی‌اش به ازای تمام ورودی‌ها ۲ می‌باشد؛ بنابراین:

$f(1)=f(2)=\cdots=f(10)=2$

الان قرار است میانگین اعداد زیر را حساب کنیم:

$\underbrace{f(1)+1}_{2+1}, \underbrace{f(2)+2}_{2+2}, \underbrace{f(3)+3}_{2+3}, \ldots, \underbrace{f(10)+10}_{2+10}$

یادآوری از آمار می‌دانیم اگر به همهٔ داده‌ها k واحد اضافه شود، به میانگینشان هم k واحد اضافه می‌شود.

اعداد بالا همان اعداد ۱ تا ۱۰ هستند که به هر کدام ۲ واحد اضافه شده است. میانگین اعداد ۱ تا ۱۰، میانگین دو عدد وسطشان یعنی ۵ و ۶ است که برابر با $\frac{5+6}{2}=5/5$ می‌شود. حالا به $5/5$، ۲ واحد اضافه می‌کنیم تا میانگین این اعداد به دست آید: $5/5+2=7/5$ = میانگین نهایی

۶۱۸. ۱ باید عرض دو نقطهٔ $(2a+1,13-2b)$ و $(a-b,b-5)$ که روی یک تابع ثابت قرار دارند، یکسان باشد:

$b-5=13-2b \Rightarrow 3b=18 \Rightarrow b=6$

با جای‌گذاری $b=6$، مختصات دو نقطه را می‌نویسیم:

$(2a+1,13-2b) \xrightarrow{b=6} (2a+1,1)$

$(a-b,b-5) \xrightarrow{b=6} (a-6,1)$

از آن‌جایی که با دو نقطه با عرض یکسان روبه‌رو هستیم، برای آن‌که فاصلهٔ دو نقطه ۵ واحد باشد، باید اختلاف طول دو نقطه ۵ باشد؛ پس دو حالت داریم:

۱) یک بار $2a+1$ منهای $a-6$ را برابر ۵ می‌گذاریم:

$(2a+1)-(a-6)=5 \Rightarrow a+7=5 \Rightarrow a=-2$

۲) یک بار هم $a-6$ منهای $2a+1$ را برابر ۵ می‌گذاریم:

$(a-6)-(2a+1)=5 \Rightarrow -a-7=5 \Rightarrow a=-12$

مقدار $[\frac{b}{a}]$ را در دو حالت حساب می‌کنیم:

حالت اول: $\begin{cases} b=6 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow [\frac{b}{a}]=[\frac{6}{-2}]=[-3]=-3$

حالت دوم: $\begin{cases} b=6 \\ a=-12 \end{cases} \Rightarrow [\frac{b}{a}]=[\frac{6}{-12}]=[-0/5]=-1$

بیشترین مقدارش -1 است.

۶۱۹. ۲

یادآوری اگر انحراف معیار تعدادی داده صفر باشد، آن داده‌ها برابرند.

انحراف معیار اعضای برد f صفر است؛ پس اعضای برد f یکسان بوده‌اند و در نتیجه f تابعی ثابت است.

چون f تابعی ثابت است، پس جای تمام fها (☁)، c قرار می‌دهیم:

$\underbrace{3f(a)}_{c}\underbrace{f(b)}_{c}=\underbrace{f(a)}_{c}+\underbrace{f(b)}_{c}+16 \Rightarrow 3c^2=2c+16 \Rightarrow \underbrace{3}_{A}c^2\underbrace{-2}_{B}c\underbrace{-16}_{C}=0$

دلتا و بعدش ریشه‌ها را حساب می‌کنیم:

$\Delta=B^2-4AC=(-2)^2-4(3)(-16)=4+192=196=14^2$

$c=\frac{-B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{14^2}}{2(3)}=\frac{2\pm14}{6} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\frac{16}{6}=\frac{8}{3} \\ c_2=\frac{-12}{6}=-2 \end{cases}$

۱) یک بار ضابطهٔ f به صورت $f(x)=\frac{8}{3}$ است. در این حالت داریم:

$f(a)+f(b)=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

۲) یک بار هم ضابطهٔ f به صورت $f(x)=-2$ است. در این حالت داریم:

$f(a)+f(b)=(-2)+(-2)=-4$

مجموع مقادیر بالا برابر است با: $\frac{16}{3}+(-4)=\frac{16}{3}+\frac{-12}{3}=\frac{4}{3}$

۶۲۰. ۳

منظورش اینه برد تابع ...، مجموعهٔ $\{c\}$ است. ← یعنی ← برد تابع ... تک‌عضوی است. ← یعنی ← تابع ... ثابت است.

در تابع ثابت، ضریب x و x^2 باید صفر باشد (کلاً نباید هیچ توانی از x داشته باشیم):

$f(x)=\underbrace{(a-1)}_{\text{صفر}}x^2+\underbrace{(b+3)}_{\text{صفر}}x+b-a$

ضریب $x^2=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$

ضریب $x=0 \Rightarrow b+3=0 \Rightarrow b=-3$

پس ضابطهٔ f به صورت زیر است:

$f(x)=b-a \xrightarrow[b=-3]{a=1} f(x)=-3-1=-4$

در نتیجه برد f، مجموعهٔ تک‌عضوی $\{-4\}$ است؛ پس $c=-4$.

رابطهٔ داده‌شده را می‌نویسیم: $\{(-a^2,k+c),(\frac{c}{2},1-k),(\frac{b}{3},2k-7)\}$

$\xrightarrow[c=-4]{a=1,b=-3} \{(-1,k-4),(\frac{-4}{2},1-k),(\frac{-3}{3},2k-7)\}$

دو زوج مرتب $(-1,k-4)$ و $(\underbrace{\frac{-3}{3}}_{-1},2k-7)$، مؤلفه‌های اول یکسانی دارند؛ پس مؤلفه‌های دومشان هم باید برابر باشند: $2k-7=k-4 \Rightarrow k=3$

۶۲۱. **۳** ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(2x+a)(x-2)+bx^2+7x=2x^2-4x+ax-2a+bx^2+7x$$

جملات هم‌درجه را کنار هم می‌نویسیم:

$$f(x)=\underbrace{2x^2+bx^2}_{\text{فاکتور از } x^2}\underbrace{-4x+ax+7x}_{\text{فاکتور از } x}-2a$$

$$=(2+b)x^2+(-4+a+7)x-2a=(2+b)x^2+(3+a)x-2a$$

ضریب x^2 و x باید صفر باشد:

$$\begin{cases}2+b=0 \Rightarrow b=-2\\ 3+a=0 \Rightarrow a=-3\end{cases}$$

پس ضابطهٔ f به شکل زیر است:

$$f(x)=\underbrace{(2+b)}_{\text{حذف}}x^2+\underbrace{(3+a)}_{\text{حذف}}x-2\underbrace{a}_{-3}=-2(-3)=6$$

ضابطهٔ f به شکل $f(x)=6$ شد؛ پس هر جا ($\bigcirc$) f دیدیم، جایش ۶ قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(5)}_{6}+4\underbrace{f(1)}_{6}=6+24=30$$

۶۲۲. **۴**

از قیافش نترس باید ببینید $-a^2$ و $a^2+\sqrt{2}$ در کدام محدوده دامنه قرار می‌گیرند.

هر عددی به توان عدد زوج برسد، جوابش عددی بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ پس a^2 همیشه بزرگ‌تر یا مساوی صفر است: $a^2\geq 0$. در نتیجه قرینه‌اش یعنی $-a^2$ همیشه کوچک‌تر یا مساوی صفر است: $-a^2\leq 0$

برای محاسبهٔ مقدار تابع f به ازای اعداد کوچک‌تر یا مساوی صفر باید به سراغ ضابطهٔ دوم برویم، چون این اعداد در محدودهٔ $x<1$ قرار دارند. از آن‌جایی که خروجی این ضابطه، عدد ثابت ۲ است، پس: $f(-a^2)=2$

از طرفی اگر به دو طرف نامساوی $a^2\geq 0$، عدد $\sqrt{2}$ را اضافه کنیم به $a^2+\sqrt{2}\geq \underbrace{\sqrt{2}}_{1/4}$ می‌رسیم. چون $a^2+\sqrt{2}$ از ۱/۴ بزرگ‌تر است، پس از ۱ هم بزرگ‌تر است (یعنی مربوط به ضابطه‌ای می‌شود که دامنه‌اش $x>1$ است). در نتیجه برای محاسبهٔ $f(a^2+\sqrt{2})$ سراغ ضابطهٔ اول می‌رویم که خروجی‌اش عدد ۱− است: $f(a^2+\sqrt{2})=-1$

پس: $f(-a^2)-f(a^2+\sqrt{2})=2-(-1)=3$

تیزبازی جای a هر عددی دوست داریم قرار می‌دهیم؛ مثلاً a را صفر می‌دهیم:

$$f(-a^2)-f(a^2+\sqrt{2})\xrightarrow{a=0} f(0)-f(\sqrt{2})=2-(-1)=3$$

ضابطهٔ بالا ضابطهٔ پایین

۶۲۳. **۲** $x=-14$ در دامنهٔ $x<1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبهٔ $f(-14)$ از ضابطهٔ پایینی استفاده می‌کنیم:

$$x<1: f(x)=\sqrt{8-2x} \Rightarrow f(-14)=\sqrt{8-2(-14)}$$
$$=\sqrt{8+28}=\sqrt{36}=6$$

$x=6$ در دامنهٔ $x\geq 1$ قرار دارد؛ پس برای محاسبهٔ $f(6)$ از ضابطهٔ بالایی استفاده می‌کنیم:

$$x\geq 1: f(x)=\sqrt[3]{4x+a} \Rightarrow f(6)=\sqrt[3]{4(6)+a}=\sqrt[3]{24+a}$$

مقادیر به دست آمده را در تساوی $f(-14)+f(6)=9$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$6+\sqrt[3]{24+a}=9 \Rightarrow \sqrt[3]{24+a}=3$$

زیر رادیکال باید چه عددی باشد تا فرجهٔ سوم آن ۳ باشد؟ باید 3^3 یعنی ۲۷ باشد؛ پس $24+a$ را مساوی ۲۷ قرار می‌دهیم: $24+a=27 \Rightarrow a=3$

برای محاسبهٔ $f(a)$ که همان $f(3)$ است باید سراغ ضابطهٔ بالا برویم:

$$x\geq 1: f(x)=\sqrt[3]{4x+3} \Rightarrow f(3)=\sqrt[3]{4(3)+3}=\sqrt[3]{15}$$

حالا باید جزء صحیح $\sqrt[3]{15}$ را حساب کنیم. چون $2^3<15<3^3$ است، پس $2<\sqrt[3]{15}<3$ و در نتیجه: $[\sqrt[3]{15}]=[2/\ldots]=2$

۶۲۴. **۲** برای a، دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $a<1$ باشد، برای محاسبهٔ $f(a)$ سراغ ضابطهٔ بالایی می‌رویم. خروجی‌اش a^2-2a می‌شود و آن را با ۲۴ برابر می‌گذاریم:

$$a^2-2a=24 \Rightarrow a^2-2a-24=0 \Rightarrow (a-6)(a+4)=0 \Rightarrow \begin{cases}a=-4 \checkmark\\ a=6 \times\end{cases}$$

جوابی که در محدودهٔ $a<1$ است قبول می‌باشد: $a=-4$

حالت دوم: اگر $a\geq 1$ باشد، برای محاسبهٔ $f(a)$ سراغ ضابطهٔ پایینی می‌رویم. خروجی‌اش a^2+10a می‌شود و آن را با ۲۴ برابر می‌گذاریم:

$$a^2+10a=24 \Rightarrow a^2+10a-24=0 \Rightarrow (a+12)(a-2)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases}a=-12 \times\\ a=2 \checkmark\end{cases}$$

جوابی که در محدودهٔ $a\geq 1$ است قبول می‌باشد: $a=2$

مجموع مقادیر a برابر است با: $-4+2=-2$

۶۲۵. **۴** برای آن‌که ضابطهٔ به فرم $\begin{cases}A & x\geq a\\ B & x\leq a\end{cases}$، تابع باشد، باید مقدار A و B به ازای $x=a$ برابر باشد. در هر دو ضابطهٔ بالا و پایین، جای xها، a قرار می‌دهیم:

ضابطهٔ بالا: $x^2+2x-7 \xrightarrow{x=a} a^2+2a-7$

ضابطهٔ پایین: $x^2-4x+11 \xrightarrow{x=a} a^2-4a+11$

باید دو مقدار دست آمده برابر باشند (در غیر این صورت، f تابع نیست):

$$a^2+2a-7=a^2-4a+11 \Rightarrow 2a+4a=11+7$$
$$\Rightarrow 6a=18 \Rightarrow a=3$$

برای به دست آوردن $f(\underbrace{2-\sqrt{3}}_{\text{تقریباً } 0/3})$ باید سراغ ضابطه با دامنهٔ $x\leq 3$ برویم.

تیزبازی اگر جای ۱۱، بنویسیم $7+4$ و بعد در آن مربع کامل بسازیم، می‌توانیم با محاسبات کم‌تری به خواستهٔ سؤال برسیم:

$$x\leq 3: f(x)=x^2-4x+\underbrace{11}_{4+7}=\underbrace{x^2-4x+4}_{\text{مربع کامل}}+7=(x-2)^2+7$$
$$\xrightarrow{x=2-\sqrt{3}} f(2-\sqrt{3})=(2-\sqrt{3}-2)^2+7$$
$$=(-\sqrt{3})^2+7=3+7=10$$

۶۲۶. **۴** برای آن‌که یک تابع دوضابطه‌ای، تابعی ثابت باشد، باید هر دو ضابطه‌اش یک عدد یکسان باشند.

در ضابطهٔ اول، باید ضریب x، صفر باشد: $a-1=0 \Rightarrow a=1$

در ضابطهٔ دوم، باید ضریب x^2، صفر باشد:

$$b+3a=0 \xrightarrow{a=1} b+3=0 \Rightarrow b=-3$$

با جای‌گذاری $a=1$ و $b=-3$، ضابطهٔ f به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(x)=\begin{cases}\overbrace{(a-1)}^{\text{صفر}}x+4+2b & x>2\\ \underbrace{(b+3a)}_{\text{صفر}}x^2+c & x\leq 2\end{cases}=\begin{cases}4+2b & x>2\\ c & x\leq 2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{b=-3}\begin{cases}-2 & x>2\\ c & x\leq 2\end{cases}\xrightarrow[\text{(ضابطه‌ها یکسان)}]{\text{تابع ثابت}} c=-2$$

در نتیجه: $a+b+c=1+(-3)+(-2)=-4$

۶۲۷. **۳**

از قیافش نترس اگر نمودار f را بکشید، شکل محصور بین f و محور xها برایتان آشناست.

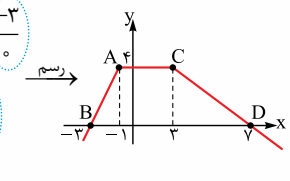
ضابطهٔ وسطی که خط افقی $(y=۴)$ است. برای رسم دو ضابطهٔ دیگر هم کافیست دو نقطه از خط را بدهیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۶ & x<-۱\\ ۴ & -۱\le x\le ۳\\ -x+۷ & x>۳\end{cases}$$

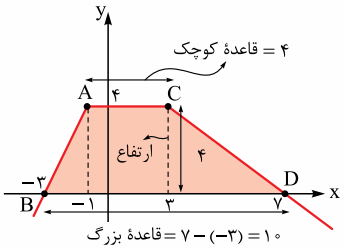
x	A: −۱	B: −۳
y	۴	۰

x	C: ۳	D: ۷
y	۴	۰

رسم →



شکل محصور بین نمودار f و محور xها یک ذوزنقه با قاعده‌های ۴ و ۱۰ ارتفاع ۴ شد:



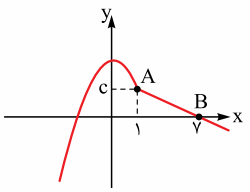
مساحت ذوزنقه را حساب می‌کنیم:

$$S=\frac{(\text{قاعدهٔ کوچک}+\text{قاعدهٔ بزرگ})\times\text{ارتفاع}}{۲}=\frac{(۴+۱۰)\times ۴}{۲}=۲۸$$

۶۲۸. ۳

منظورش اینه عرض نقطهٔ ماکزیمم سهمی ← یعنی ← عرض نقطهٔ رأس سهمی

پارت ۱ با توجه به شکل، مختصات نقطهٔ A به طول ۱ را از ضابطهٔ بالا حساب می‌کنیم:



$$x\le ۱: f(x)=۴-x^۲$$
$$\Rightarrow f(۱)=۴-۱^۲=۳$$

پس مختصات A به صورت $(۱,۳)$ و در نتیجه $c=۳$ است.

ضابطهٔ پایینی مربوط به خطی است که از نقاط $A(۱,۳)$ و $B(۷,۰)$ می‌گذرد.

شیب خط را حساب می‌کنیم: $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-۳}{۷-۱}=\frac{-۳}{۶}=\frac{-۱}{۲}$

حالا با داشتن شیب $m=\frac{-۱}{۲}$ و یک نقطه از خط $(۷,۰)$، معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y-۰=\frac{-۱}{۲}(x-۷)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}$$

پس ضابطهٔ پایینی به صورت $\underbrace{\frac{-۱}{۲}}_{a}x+\underbrace{\frac{۷}{۲}}_{b}$ است.

پارت ۲ در نتیجه سهمی $y=ax^۲+۲bx+c$ به صورت زیر می‌شود:

$$y=\frac{-۱}{۲}x^۲+۷x+۳$$

طول رأس برابر است با: $x_S=\frac{-B}{۲A}=\frac{-۷}{۲(\frac{-۱}{۲})}=\frac{-۷}{-۱}=۷$

با جای‌گذاری $x_S=۷$ در ضابطهٔ سهمی، عرض رأس درمی‌آید:

$$y_S=\frac{-۱}{۲}(۷)^۲+۷(۷)+۳=\frac{-۴۹}{۲}+۴۹+۳=\frac{-۴۹+۹۸+۶}{۲}=\frac{۵۵}{۲}$$

۶۲۹. ۲ باید مؤلفهٔ اول و دوم هر زوج مرتب، با هم برابر باشند. با زوج مرتب $(۲,۲n^۲-۳n)$ شروع می‌کنیم: $۲=۲n^۲-۳n\Rightarrow ۲n^۲-۳n-۲=۰$

دلتا را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۳)^۲-۴(۲)(-۲)=۹+۱۶=۲۵$$

ریشه‌ها برابر است با:

$$n=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۳\pm۵}{۲(۲)}\Rightarrow\begin{cases}n_۱=\frac{۸}{۴}=۲\\ n_۲=-\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

حالا سراغ $(m+۳n,۲)$ می‌رویم. باید $m+۳n$ و ۲ برابر باشند:

$$m+۳n=۲\Rightarrow m=۲-۳n$$

به ازای هر دو مقدار n، مقدار m را حساب می‌کنیم:

۱) اگر $n_۱=۲$ باشد: $m_۱=۲-۳n_۱=۲-۳(۲)=۲-۶=-۴$

۲) اگر $n_۲=\frac{-۱}{۲}$ باشد: $m_۲=۲-۳n_۲=۲-۳(\frac{-۱}{۲})=۲+\frac{۳}{۲}=\frac{۷}{۲}$

در آخر هم نوبت $(m,-t^۲)$ است. باید $m=-t^۲$ باشد. از آن‌جایی که $t^۲\ge ۰$، پس $-t^۲\le ۰$ است و m نیز باید عددی کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد؛ پس $m_۱=-۴$ قبول است (و در nها هم $n_۱=۲$ قبول است). در نتیجه:

$$m=-t^۲\Rightarrow -۴=-t^۲\Rightarrow t^۲=۴\Rightarrow t=\pm۲$$

با داشتن $n=۲$ و $m=-۴$، برای آن‌که میانگین m، n و t صفر شود (میانگین زمانی صفر می‌شود که جمعشان صفر باشد)، فقط $t=۲$ قبول است.

۶۳۰. ۴ در تابع همانی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند:

۱) $(n^۲+۲n,۸)\Rightarrow n^۲+۲n=۸\Rightarrow n^۲+۲n-۸=۰$

$$\Rightarrow (n+۴)(n-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=-۴\ \times\ (n\in\mathbb{N})\\ n=۲\ \checkmark\end{cases}$$

۲) $(n+۳,k)\Rightarrow n+۳=k\xrightarrow{n=۲}k=۵$

تا این‌جا تابع به شکل $f=\{(۸,۸),(۵,۵),(m+۷,t)\}$ درآمد.

چون تابع دوعضوی است، پس $m+۷$ باید با ۵ یا ۸ برابر باشد.

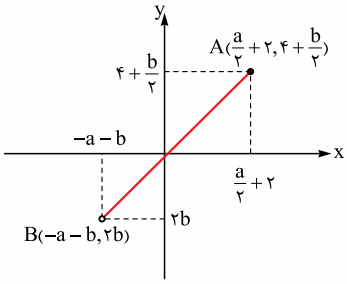
$$\begin{cases}m+۷=۵\Rightarrow m=-۲\ \times\ (m\in\mathbb{N})\\ m+۷=۸\Rightarrow m=۱\ \checkmark\end{cases}$$

حالا مؤلفه‌های زوج مرتب سوم را برابر قرار می‌دهیم:

$$(m+۷,t)\Rightarrow m+۷=t\xrightarrow{m=۱}t=۸$$

پس: $m+t+k=۱+۸+۵=۱۴$

۶۳۱. ۳ دو نقطه روی تابع همانی مشخص می‌کنیم:



$$A(\frac{a}{۲}+۲,۴+\frac{b}{۲})$$
$$B(-a-b,۲b)$$

طول و عرض نقطهٔ A را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{a}{۲}+۲=۴+\frac{b}{۲}\xrightarrow{\times ۲}a+۴=۸+b$$

طول و عرض نقطهٔ B را برابر قرار می‌دهیم:

$$-a-b=۲b\Rightarrow -a=۳b\Rightarrow a=-۳b$$

در معادلهٔ $a+۴=۸+b$، جای a، $-۳b$ قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{a}_{-۳b}+۴=۸+b\Rightarrow -۳b+۴=۸+b\Rightarrow -۴b=۴\Rightarrow b=-۱$$

پس: $a=-۳b=-۳(-۱)=۳$

با جای‌گذاری $a=۳$ و $b=-۱$، داریم: $۲a-b=۲(۳)-(-۱)=۶+۱=۷$

۶۳۲. ۴ جای تمام (ابرها) fها، را قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(a^۲-۱)}_{a^۲-۱}-\underbrace{f(۳a^۲)}_{۳a^۲}=\underbrace{f(۸a-۱۱)}_{۸a-۱۱}\Rightarrow a^۲-۱-۳a^۲=۸a-۱۱$$

$$\Rightarrow ۲a^۲+۸a-۱۰=۰\xrightarrow{\div ۲}a^۲+۴a-۵=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}} (a+5)(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=-5 \\ a_2=1 \end{cases}$$

در هر دو حالت، مقدار $\frac{f(a-3)}{f(a+1)}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{f(a-3)}{f(a+1)} \overset{\text{همانی}}{=\!=} \frac{a-3}{a+1} \begin{cases} a_1=-5 \to \frac{-5-3}{-5+1}=\frac{-8}{-4}=2 \\ a_2=1 \to \frac{1-3}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$

پس بیشترین مقدارش برابر با ۲ است.

۶۳۳. ۳ جای تمام (ابر) fها، ابر را می‌نویسیم:

$$4^{\overbrace{f(2x)}^{2x}+\overbrace{f(x^2)}^{x^2}} = 8^{\overbrace{f(20)}^{20}} \Rightarrow 4^{2x+x^2}=8^{20}$$

جای ۴ و ۸ به ترتیب 2^2 و 2^3 می‌نویسیم:

$$(2^2)^{2x+x^2}=(2^3)^{20} \Rightarrow 2^{4x+2x^2}=2^{60}$$

پایه‌ها برابرند؛ پس توان‌ها باید برابر باشند:

$$2x^2+4x=60 \xrightarrow{\div 2} x^2+2x=30$$

به دو طرف ۱ واحد اضافه می‌کنیم:

$$\underbrace{x^2+2x}_{\text{اتحاد مربع}}+1=30+1 \Rightarrow (x+1)^2=31 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x+1=\pm\sqrt{31}$$

فقط $+\sqrt{31}$ در گزینه دیده می‌شود.

۶۳۴. ۱

از قیافش نترس رادیکال باید حذف شود؛ پس احتمالاً زیر رادیکال باید به شکل ابر^2 درآید.

عبارت زیر رادیکال مربع کامل است:

$$f(x)=\sqrt{\underbrace{4x^2-20x+25}_{(2x-5)^2}}+ax+b=|2x-5|+ax+b$$

با توجه به دامنهٔ $(x<\frac{5}{2})$، عبارت داخل قدرمطلق، منفی است؛ پس قرینه‌اش از آن خارج می‌شود:

$$f(x)=-2x+5+ax+b \xrightarrow[\text{از x فاکتور می‌گیریم.}]{\text{بین 2x- و ax}}$$

$$f(x)=(a-2)x+(b+5)$$

با توجه به ضابطهٔ تابع همانی $(y=x)$، ضریب x باید ۱ و عدد $b+5$ باید صفر باشد:

$$\begin{cases} a-2=1 \Rightarrow a=3 \\ b+5=0 \Rightarrow b=-5 \end{cases}$$

پس:

$$b^2-a^3=(-5)^2-3^3=25-27=-2$$

۶۳۵. ۳

استراتژی نیازی به محاسبهٔ خود a و b نیست. با داشتن $a+b$ و ab، به کمک اتحاد مربع، حاصل a^2+b^2 به دست می‌آید.

ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\underbrace{(x+a)(x+b)}_{\text{جمله‌مشترک}}-\underbrace{(x-1)(x+3)}_{\text{جمله‌مشترک}}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x^2+(a+b)x+ab)-(x^2+2x-3)$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2+(a+b)x+ab-x^2-2x+3$$

در دو جمله‌ای که زیرشان یک خط کشیدیم، از x فاکتور می‌گیریم:

$$f(x)=x(a+b-2)+ab+3$$

در ضابطهٔ تابع همانی، ضریب x باید ۱ و عدد ثابت انتهایی باید صفر باشد:

$$f(x)=x\underbrace{(a+b-2)}_{1}+\underbrace{ab+3}_{\text{صفر}} \Rightarrow \begin{cases} a+b-2=1 \Rightarrow a+b=3 \\ ab+3=0 \Rightarrow ab=-3 \end{cases}$$

از اتحاد مربع می‌دانیم: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$a+b=3$ و $ab=-3$ را در تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(\underbrace{a+b}_{3})^2=a^2+b^2+2\underbrace{ab}_{-3} \Rightarrow 9=a^2+b^2-6 \Rightarrow a^2+b^2=15$$

۶۳۶. ۲

نکته: تابع $y=\frac{Ax+B}{Cx+D}$ با شرط $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$ تابعی ثابت است.

پارت ۱ تابع $f(x)=\frac{ax+3}{12x+a}$ ثابت است؛ پس طبق نکتهٔ گفته‌شده داریم:

$$\frac{a}{12}=\frac{3}{a} \Rightarrow a^2=36 \Rightarrow a=\pm 6$$

به ازای هر دو مقدار a، ضابطهٔ f را می‌نویسیم. هر کدام برابر با عددی منفی شد، قبول است (چون باید زیر محور xها باشد).

$$a=6: f(x)=\frac{6x+3}{12x+6}=\frac{3(2x+1)}{6(2x+1)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad \times$$

$$a=-6: f(x)=\frac{-6x+3}{12x-6}=\frac{-3(2x-1)}{6(2x-1)}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2} \quad \checkmark$$

پارت ۲ با جای‌گذاری $a=-6$، ضابطهٔ g به شکل زیر می‌شود:

$$g(x)=(a+b)x+\frac{c}{x} \xrightarrow{a=-6} g(x)=(-6+b)x+\frac{c}{x}$$

برای آن‌که g همانی باشد، باید ضریب x برابر یک و ضریب $\frac{1}{x}$ برابر صفر باشد:

$$-6+b=1 \Rightarrow b=7 \quad \text{و} \quad c=0$$

پارت ۳ تابع h را تشکیل می‌دهیم:

$$h(x)=k\underbrace{f(x)}_{\frac{-1}{2}}+ax-b \xrightarrow[b=7]{a=-6} h(x)=\frac{-k}{2}-6x-7$$

تابع h، محور xها را در -1 قطع می‌کند؛ پس نقطهٔ $(-1,0)$ روی آن است:

$$h(-1)=0 \Rightarrow \frac{-k}{2}+6-7=0 \Rightarrow \frac{-k}{2}=1 \Rightarrow k=-2$$

۶۳۷. ۳ **پارت ۱** تابع f ثابت است، پس ضابطه‌اش به صورت $f(x)=c$ است و می‌توانیم جای تمام (ابر) fها، عدد c را قرار دهیم:

$$\underbrace{f(kx)}_{c}=(k^2-3)\underbrace{f(x)}_{c} \Rightarrow c=(k^2-3)c$$

با فرض $c\neq 0$ جلو می‌رویم و cها را از دو طرف تساوی خط می‌زنیم. (اگر به جواب نرسیدیم، سراغ حالت $c=0$ می‌رویم.)

$$\cancel{c}^{1}=(k^2-3)\cancel{c}^{1} \Rightarrow 1=k^2-3 \Rightarrow k^2=4 \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} k=2$$

پارت ۲ با جای‌گذاری $k=2$، تابع g را می‌نویسیم:

$$g=\{(2,n^2-3n+4),(2n,m^2-4m+4),(f(n),n-4)\}$$

چون g همانی است، پس مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب $(2,n^2-3n+4)$ برابرند:

$$n^2-3n+4=2 \Rightarrow n^2-3n+2=0 \Rightarrow (n-2)(n-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=1 \end{cases}$$

هر دو n به دست آمده طبیعی هستند. یک بار به ازای $n=1$ و یک بار به ازای $n=2$، مؤلفهٔ اول و دوم زوج مرتب $(2n,m^2-4m+4)$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$n=1 \Rightarrow 2=m^2-4m+4 \Rightarrow m^2-4m+2=0$$

دلتای این معادله را حساب می‌کنیم: $\Delta=(-4)^2-4(1)(2)=16-8=8$

چون ۸، مربع کامل نیست، پس این معادله، m طبیعی به ما نمی‌دهد.

$n=۲ \Rightarrow ۴=m^۲-۴m+۴ \Rightarrow m^۲-۴m=۰$

$\xrightarrow{\text{فاکتور}} m(m-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۰ \times \\ m=۴ \checkmark \end{cases}$

تنها m طبیعی به دست آمده، $m=۴$ است.

تا این‌جا $n=۲$ و $m=۴$ شد، می‌ماند زوج مرتب سوم یعنی $(f(n), n-۴)$:

$\underbrace{f(n)}_{c}=n-۴ \xrightarrow[n=۲]{f\ \text{ثابت}} c=۲-۴ \Rightarrow c=-۲$

f ثابت است، پس $f(m)$ هم برابر با c یعنی -۲ است: $f(m)=-۲$

چون به جواب رسیدیم، سراغ حالت $c=۰$ نمی‌رویم!

۶۳۸. ۳ نقطهٔ $A(a^۲-۶ab,-۹b^۲)$ روی نیمساز ناحیهٔ سوم است، پس طول و عرض آن برابرند: $a^۲-۶ab=-۹b^۲ \Rightarrow a^۲+۹b^۲-۶ab=۰$

$\xrightarrow[\text{مربع}]{\text{اتحاد}} (a-۳b)^۲=۰ \Rightarrow a-۳b=۰ \Rightarrow a=۳b \Rightarrow \frac{a}{b}=۳ \ (*)$

نقطهٔ $B(\frac{a}{b}, c+۲)$ روی نیمساز ناحیهٔ چهارم است، پس طول و عرض آن قرینه‌اند:

$\frac{a}{b}=-(c+۲) \overset{(*)}{\Rightarrow} ۳=-c-۲ \Rightarrow c=-۵$

۶۳۹. ۱ نقطهٔ A روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است، پس طول و عرضش برابرند. مختصاتش را به شکل $A(a,a)$ می‌نویسیم.

این نقطه را ۲ واحد به پایین می‌بریم (پس از عرضش ۲تا کم می‌شود) و بعد ۴تا به چپ می‌بریم (پس از طولش ۴تا کم می‌شود)؛ پس مختصات B به صورت $B(\underbrace{a-۴}_{x_B}, \underbrace{a-۲}_{y_B})$ است.

چون B روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم است، پس طول و عرضش قرینه‌اند:

$y_B=-x_B \Rightarrow a-۲=-(a-۴) \Rightarrow a-۲=-a+۴$

$\Rightarrow ۲a=۶ \Rightarrow a=۳$

مختصات A و B را می‌نویسیم: $\begin{cases} A(a,a) \Rightarrow A(۳,۳) \\ B(a-۴,a-۲) \Rightarrow B(-۱,۱) \end{cases}$

حاصل‌ضرب طول A و عرض B برابر است با: $x_A \times y_B=۳\times۱=۳$

۶۴۰. ۳ f تابعی همانی است، پس: $f(x)+f(-x)=x+(-x)=۰$

زوج مرتبمان را ساده می‌کنیم:

$(\underbrace{f(x)+f(-x)}_{۰}, ۳x^۲-۱۷x+۱۰)=(۰, ۳x^۲-۱۷x+۱۰)$

نقطهٔ $(۰, ۳x^۲-۱۷x+۱۰)$ روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارد، پس طول و عرض قرینهٔ هم هستند. چون طول نقطه صفر است، پس عرضش هم باید صفر باشد: $۳x^۲-۱۷x+۱۰=۰$

یادآوری اختلاف جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم از رابطهٔ $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به دست می‌آید.

اختلاف جواب‌های معادلهٔ بالا برابر است با:

$|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{(-۱۷)^۲-۴(۳)(۱۰)}}{|۳|}=\frac{\sqrt{۱۶۹}}{۳}=\frac{۱۳}{۳}$

۶۴۱. ۳ f تابع ثابت است، پس جای تمام $f(c)$ها، c می‌نویسیم:

$f(m)+f(n)=f(m)f(n) \Rightarrow c+c=c\times c$

$\Rightarrow ۲c=c^۲ \Rightarrow c^۲-۲c=۰ \Rightarrow c(c-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} c=۰ \\ c=۲ \end{cases}$

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=۲$ یا $f(x)=۰$ است.

با فرض $f(x)=۲$، دو زوج مرتب داده‌شده که روی نیمساز ربع ۱ و ۳ هستند را ساده‌تر می‌نویسیم: $(۲n^۲-۷n+۱, -\underbrace{f(m)}_{۲}) = (۲n^۲-۷n+۱, -۲)$

$(m^۲-۴m+۶, n\underbrace{f(n)}_{۲}) = (m^۲-۴m+۶, ۲n)$

در زوج مرتب اول، مؤلفهٔ اول و دوم برابرند:

$۲n^۲-۷n+۱=-۲ \Rightarrow ۲n^۲-۷n+۳=۰$

$\xrightarrow{\Delta=۴۹-۲۴=۲۵} n=\frac{۷\pm۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} n=۳ \checkmark \\ n=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \times \end{cases}$

چون n طبیعی است فقط $n=۳$ قبول است.

تذکر اگر $f(x)=۰$ را می‌گرفتیم، معادلهٔ $۲n^۲-۷n+۱=\underbrace{-f(m)}_{۰}$، ریشهٔ طبیعی نداشت؛ برای همین $f(x)=۰$ رد می‌شود.

در زوج مرتب دوم هم، مؤلفهٔ اول و دوم برابرند:

$m^۲-۴m+۶=۲n \xrightarrow{n=۳} m^۲-۴m+۶=۶$

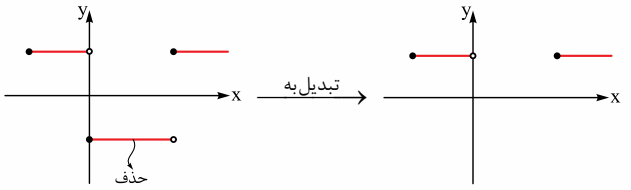
$\Rightarrow m^۲-۴m=۰ \Rightarrow m(m-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۰ \times \\ m=۴ \checkmark (m\in\mathbb{N}) \end{cases}$

مقدار عبارت خواسته‌شده برابر است با: $[\frac{mn}{۵}]=[\frac{۴\times۳}{۵}]=[۲/۴]=۲$

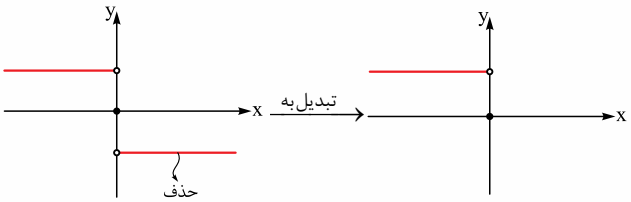
برای مشاهده پاسخ سوالات ۶۴۲ تا ۶۵۲ منو اسکن کن

۶۵۳. ۲ در بین ۴ گزینه، نمودار ۱ و ۴، تابع پلکانی محسوب نمی‌شوند، چون پاره‌خط غیرافقی دارند.

در بین ۲ و ۳، در ۲ با حذف پاره‌خط زیر محور xها، ۲ پاره‌خط دیگر در یک امتداد قرار می‌گیرند و تابع ثابت می‌شود:



ولی در ۳، اگر نیم‌خط پایینی حذف شود، شکل به صورت زیر می‌شود که به خاطر تک‌نقطه‌ای که روی مبدأ قرار دارد، تابع ثابت نیست (اگر نیم‌خط بالایی هم حذف شود، باز هم همین است):



۶۵۴. ۲ تابع پلکانی، تابعی چندضابطه‌ای است که تمام ضابطه‌هایش عدد ثابت باشند. فقط تابع ۲ این ویژگی را دارد:

$f(x)=\begin{cases} ۲ & x>۰ \\ -۳ & x<-۱ \end{cases}$ (اعداد ثابت)

۶۵۵. ۳ باید ضابطهٔ اول را درست کنیم. نباید x در آن باشد. باید ضریب x یعنی $k-۱$ صفر باشد: $k-۱=۰ \Rightarrow k=۱$

با $k=۱$ تابع را دوباره می‌نویسیم:

$f(x)=\begin{cases} (k-۱)x+۵ & x\geq ۰ \\ k+۲ & x<۰ \end{cases} \xrightarrow{k=۱} f(x)=\begin{cases} ۵ & x\geq ۰ \\ ۳ & x<۰ \end{cases}$

برای به دست آوردن $f(-۱)$ سراغ ضابطهٔ دوم می‌رویم، چون -۱ در محدودهٔ $x<۰$ است و خروجی ضابطهٔ دوم عدد ۳ است؛ پس: $f(-۱)=۳$