



مابرای بیست

پایه یازدهم

ریاضی و آمار انسانی



مهندس امیر زراندوز - مهندس زهرا جالینوسی

درسنامه سؤال‌های امتحانی با پاسخ تشریحی امتحان نهایی

درسنامه‌های کاملاً کاربردی، روان و گویا منطبق بر کتاب درسی به همراه مثال‌های آموزشی فراوان
بیش از ۴۵۰ سؤال امتحان نهایی، تألیفی و برگرفته از آزمون‌های مدارس برتر کشور با پاسخ‌های کاملاً تشریحی

پوشش کامل تمام مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی

ارائه سؤال‌های امتحانی دشوار جهت شبیه‌سازی و پیش‌بینی سؤالات دشوار امتحان نهایی

تیپ‌بندی سؤال‌های امتحانی در قالب «در امتحان چه خبر؟»

امتحان‌های نوبت اول و دوم

به همراه یک جلد ضمیمه رایگان شامل خلاصه‌های فصل به فصل شب امتحانی



Jet Questions
سؤال‌های پیشرو
برای بیست گرفتن

یه کم قبل تر بیشترِ کسایی که رشتهٔ انسانی رو انتخاب می‌کردن از ریاضی و علوم متنفر بودن و وقتی بهشون می‌گفتی که تو رشتهٔ انسانی هم باید ریاضی بخونید، حالشون بد می‌شد! ولی حالا فرق کرده الان خیلی از رشته انسانی تا سال نهم نمرهٔ ریاضی و علومشون ۱۹ و ۲۰ بوده و خداروشکر رشتهٔ انسانی رو به خاطر علاقهٔ بیشتر به علوم انسانی انتخاب می‌کنن، نه به خاطر فرار از ریاضی و علوم. این تصمیم درست بچه‌ها، هم به نفع خودشونه هم به نفع جامعه‌شون و هم به نفع بشریت.

این اتفاق به ما انگیزهٔ مضاعف داد تا کتاب ریاضی و آمار رشتهٔ انسانی رو با بهترین مؤلفینمون و با وسواس زیاد بنویسیم تا بچه‌های انسانی از خوندن ریاضی کیف کنن. علاوه بر این کتابای ماجرای بیست واقعاً برای ۲۰ گرفتن نوشته شدن (واقعاً که می‌گم یعنی واقعاً نه الکی!) پس با خوندن این کتاب هم از ریاضی خوندن کیف می‌کنید و هم حال ۲۰ گرفتنو می‌برید.

جا داره به لطف تولید این کتاب خوب علاوه بر مؤلفین به خانم زهره قموشی به خاطر نظارت، هماهنگی و پیگیری‌هاشون در واحد تألیف و ویراستارای خوبمون حسین اسدزاده، علیرضا محمدی و پوپک مقدم و بچه‌های پرتلاش واحد تولید خیلی سبز بگیم دست همتون درد نکنه. خیلی سبز به وجود شما افتخار می‌کنه.

دو دوتای زندگیتون همیشه چهارتا!

مقدمهٔ ناشر^۳



کتاب ریاضی و آمار یازدهم، یکی از مفهومی‌ترین و پرچالش‌ترین کتاب‌های مقطع یازدهم است. مفهومی از این لحاظ که اکثر مباحث آن برای بچه‌ها جدید است به طوری که بسیاری از همکاران و دبیران معتقدند بیش از ۹۰٪ مباحث این کتاب، هیچ سابقه‌ای در کتاب‌های درسی رشته انسانی نداشته‌اند. از این لحاظ می‌گوییم چالشی که مباحثی مثل ترکیب گزاره‌ها، انواع استدلال‌ها، اعمال روی توابع، تابع جزء صحیح و شاخص‌های آماری و سری زمانی، مفاهیمی دشوار هستند، اما ما کتابی برایتان نوشته‌ایم که با خواندن آن، می‌توانید مباحث دشوار یازدهم را خوب بفهمید و به طور کامل بر آن‌ها احاطه پیدا کنید. پس اصلاً نگران نباشید. سعی کرده‌ایم علاوه بر این که تمام تمرینات، مثال‌ها، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها را پوشش دهیم سؤالات دشوارتر را چندین بار مشابه‌سازی کنیم تا کاملاً برایتان جا بیفتد. توصیه مهم ما به شما دانش‌آموزان خوب انسانی این است که با توجه به تأثیر ۶۰ درصدی امتحان نهایی در کنکور، مطالعه ریاضی را به شب‌های نزدیک امتحان موکول نکنید و هر هفته، حداقل ۲ ساعت این درس را مطالعه کنید.


اگر به طور تدریجی ریاضی را یاد بگیرید، شب امتحان فقط کافی است چند نمونه سؤال را از آخر همین کتاب حل کنید و مطمئن باشید که در امتحان ۲۰ می‌گیرید.

کتاب **ماجرای بیست ریاضی و آمار یازدهم** از چند بخش تشکیل شده است:

درس‌نامه: سعی کردیم خیلی ساده، روان و کاربردی درس رو آموزش بدیم. مطالب اضافه در این کتاب نمی‌بینید اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهایی لازمه رو دارید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسیه، البته بیشتر جاها برای این که مطالب، طولانی نشه و حوصله‌تون سر نره درس به چند بخش تقسیم شده و سؤال‌های هر قسمت رو جداگانه آوردیم.

در امتحان چه خبر: حجم مطالب در این کتاب زیاده پس خیلی مهمه که تا می‌تونید، مطالب رو تیپ‌بندی شده و منظم یاد بگیرید. ما سعی کردیم توی کادرهای «در امتحان چه خبر؟» این کار رو برای شما انجام بدیم. مطالب هر درس رو تیپ‌بندی کردیم و سؤال‌های مربوط به هر تیپ رو هم مشخص کردیم؛ پس می‌تونید برید و سؤال‌های هر تیپی رو که خوب یاد نگرفتید دوباره و دوباره حل کنید و بهشون مسلط بشید.

سؤال‌های امتحانی: همه مثال‌ها و تمرین‌های کتاب و کار در کلاس‌ها، فعالیت‌ها و همه سؤال‌های نهایی خرداد ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ توی این کتاب موجوده و به قول معروف پوشش کامل کتاب درسی و امتحان‌های نهایی به‌جوری رعایت شده که بعد خوندن «ماجرای بیست» دیگه هیچ نگرانی‌ای ندارید که چیزی جا افتاده باشه.

سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت  است، سطح دشوارتری نسبت به بقیه سؤال‌ها داره و شما رو برای سؤال‌های سخت نهایی آماده می‌کنه.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها، حتماً پاسخ‌ها را تحلیل کنید.

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب دو امتحان ترم اول داریم و چهارتا امتحان ترم دوم. حتماً قبل امتحان نهایی این سؤال‌ها رو حل کنید و به بارم‌بندی اون‌ها هم توجه کنید که بدونید باید چه‌جوری جواب بدی که مصحح بهتون نمره کامل بده.

در پایان بر خود لازم می‌دانم سپاس و قدردانی کنم از تلاش‌ها و زحمات:

۱ جناب آقای دکتر نصری عزیز، مدیر خلاق و خوش فکر انتشارات خیلی سبز

۲ جناب آقای مهندس مهدی هاشمی که با نظارت بر تألیف، نظرات بسیار ارزشمندی را مطرح می‌کردن.

۳ سرکار خانم زهره قموشی که در این پروژه هم مثل همیشه، خیلی در کارشان مصمم و منظم و پیگیر کار بودند.

۴ علیرضا محمدی، پوپک مقدم و حسین اسدزاده ویراستاران خوب این کتاب.

امیر زراندوز

زهره جالینوسی

شهریور ۱۴۰۳

فهرست

فصل اول

- ۷ آشنایی با منطق و استدلال ریاضی
- ۲۹ پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل دوم

- ۳۹ تابع
- ۶۷ پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل سوم

- ۸۲ آمار
- ۹۴ پاسخ سؤال‌های امتحانی

امتحانات

- ۱۰۰ نمونه امتحان نیم‌سال اول (امتحان شماره ۱)
- ۱۰۲ پاسخ نمونه امتحان نیم‌سال اول (امتحان شماره ۱)
- ۱۰۳ نمونه امتحان نیم‌سال اول (امتحان شماره ۲)
- ۱۰۴ پاسخ نمونه امتحان نیم‌سال اول (امتحان شماره ۲)
- ۱۰۵ نمونه امتحان نیم‌سال دوم (امتحان شماره ۳)
- ۱۰۷ پاسخ نمونه امتحان نیم‌سال دوم (امتحان شماره ۳)
- ۱۰۹ نمونه امتحان نیم‌سال دوم (امتحان شماره ۴)
- ۱۱۱ پاسخ نمونه امتحان نیم‌سال دوم (امتحان شماره ۴)
- ۱۱۳ نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۲)
- ۱۱۵ پاسخ نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۲)
- ۱۱۶ نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۳)
- ۱۱۸ پاسخ نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۳)



فصل ۱: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

بخش ۱: منطق ریاضی و گزاره‌ها

تعریف منطق منطق در لغت به معنی کلمه و گفتار است (از نطق می‌آید). ولی از نظر فلاسفه و منطق‌دانان، به معنی قانون درست فکر کردن است. به عبارت دیگر می‌توان گفت:

۱ منطق، استدلال‌ها را بررسی می‌کند و درستی یا نادرستی آن‌ها را مشخص می‌کند؛ زیرا اگر برای اثبات یک موضوع، استدلال‌های ما نادرست باشند نتیجه به دست آمده هم، قابل قبول نخواهد بود.

۲ منطق، ابزاری است از نوع قاعده و قانون که به کار بردن آن، ذهن را از خطای در تفکر مصون نگه می‌دارد.

نکته: اولین نفری که قواعد ذهن انسان را به دست آورد و با ترتیبی خاص، دسته‌بندی کرد، ارسطو بود.

تعریف منطق ریاضی

به نظر شما کاربرد دستور زبان فارسی چیست؟ حتماً پاسخ می‌دهید که دستور زبان فارسی، علمی است که روش درست گفتن و درست نوشتن را به ما می‌آموزد. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، **منطق ریاضی**، دستور این زبان است. به عبارت دیگر، **منطق ریاضی** روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را به ما آموزش می‌دهد.

مفهوم گزاره‌ها

در منطقی ریاضی، گزاره، جمله‌ای است خبری که دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را داشته باشد هر چند که ممکن است از درستی یا نادرستی آن، اطلاعی نداشته باشیم. ضمناً جملات امری، پرسشی و عاطفی، گزاره محسوب نمی‌شوند. به مثال‌های زیر دقت کنید:

«۲ عددی اول است.» ← یک گزاره است و ارزش آن، درست است.

« $5^2 > 3^3$ » ← یک گزاره است و ارزش آن نادرست است چون $25 < 27$ کوچک‌تر از ۲۷ است.

«بیشتر درس بخوان.» ← گزاره نیست. (جمله امری است.)

«چه ماشین زیبایی!» ← گزاره نیست. (جمله عاطفی است.)

«شما امسال کنکور می‌دهید؟» ← گزاره نیست. (جمله پرسشی است.)

سوال (شاگرد): بپوشید مگه $5^2 > 3^3$ جمله فبری محسوب می‌شه؟ من که کلمه فارسی توش نمی‌بینم!

دبیر: فب شما $(5^2 > 3^3)$ رو چه بوری می‌فونی؟ مگه نمی‌گی، « 5^2 بزرگ‌تر از 3^3 است.» پس دیدی که $(5^2 > 3^3)$ یه جمله فبریه و متمماً لازم نیست جمله، فارسی باشه. فیلی وقتاً از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنیم.

تذکر مهم ۱: در بعضی از جملات خبری، اصولاً نمی‌شود درباره درستی یا نادرستی دقیق آن‌ها اظهار نظر کنیم؛ لذا آن‌ها را گزاره محسوب نمی‌کنیم؛ مثلاً جمله خبری «متوازی‌الاضلاع، زیباترین شکل هندسی است.» گزاره محسوب نمی‌شود؛ چون زیبایی، موضوعی سلیقه‌ای است و اصولاً از نظر منطقی ریاضی، جمله مذکور، قابل ارزش‌گذاری نیست؛ ولی گاهی اوقات، تعیین ارزش یک گزاره، دشوار است ولی می‌دانیم بالأخره یا ارزش درست دارد یا نادرست. مثلاً شاید تعیین ارزش جمله « 52391 اول است» دشوار باشد ولی بالأخره عدد 52391 یا اول است یا مرکب. پس جمله مورد نظر، گزاره است.

تذکر مهم ۲: عبارتی مثل « X عددی زوج است.» گزاره محسوب نمی‌شود؛ چون مقدار X به ما داده نشده؛ یعنی مثلاً اگر X برابر ۴ باشد، به عبارتی درست می‌رسیم و اگر X برابر ۳ باشد، به عبارتی نادرست تبدیل می‌شود، ولی عبارتی مثل « a^2 همواره نامنفی است.» گزاره است؛ چون ارزش آن کاملاً معلوم است؛ یعنی a هر چه باشد a^2 نامنفی است؛ پس گزاره‌ای درست داریم.

مثال: کدام یک از جملات و عبارات زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) کباب، خوشمزه‌تر از پیتزا است. (ب) عدد $\sqrt{3}$ گویا است.

پ) افلاطون، شاگرد سقراط بود. (ت) اصالت شما برای کدام شهر است؟

ث) عدد $(-2)^{2n+1}$ همواره عددی منفی است. $(n \in \mathbb{N})$ (ج) $-3 \geq -10$

چ) $0/2 \times \frac{1}{4} = 0/1$ (ح) کوچک‌ترین عدد طبیعی دورقمی مربع کامل، عدد ۱۶ است.

خ) $-y$ همواره عددی منفی است.

پاسخ: الف) گزاره نیست. (برای مقایسه مزه غذاها نمی‌توانیم ارزش‌گذاری کنیم.)

ب) گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون $\sqrt{3}$ گنگ است.

پ) گزاره است و ارزش آن، درست است. (جمله پرسشی است.)

ث) گزاره است و ارزش آن، درست است؛ چون n هر عدد طبیعی که باشد $(2n+1)$ فرد می‌شود و می‌دانیم عدد (-2) به هر توان فردی که برسد جواب

باز هم منفی می‌شود.

ج گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون $10 - 1$ کوچکتر از $3 -$ است.

ج گزاره است و ارزش آن، درست است زیرا: $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0.01$

ح گزاره است و ارزش آن، درست است؛ چون اولاً 16 مربع کامل است؛ یعنی جذر کامل دارد ($\sqrt{16} = 4$) و ثانیاً 16 کوچکترین عدد طبیعی دورقمی است که این خاصیت را دارد.

خ این جمله گزاره محسوب نمی‌شود چون مقدار Y به ما داده نشده است، مثلاً اگر Y برابر 2 باشد، گزاره درست و اگر برابر $2 -$ باشد، گزاره نادرست است.

جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها)

در منطق ریاضی، هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی کوچک مانند s, t, q, p و ... نمایش می‌دهیم. ضمناً بعضی گزاره‌ها خود، ترکیبی از دو یا چند گزاره ساده هستند که به آن‌ها گزاره‌های ترکیبی (مرکب) می‌گوییم. کمی جلوتر با انواع گزاره‌های ترکیبی آشنا می‌شوید. جبر گزاره‌ها کارش این است که به وسیله یک سری قراردادهای و نمادگذاری‌ها ارزش یک گزاره را تعیین می‌کند.

در جدول‌های زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده‌اند. به هر یک از ردیف‌های این جدول‌ها، یک حالت ارزشی هم می‌گوییم. ارزش درست یک گزاره را با «د» یا «T» و ارزش نادرست آن را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. (True یعنی درست و False یعنی نادرست).

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

p
T (درست)
F (نادرست)

حالت ۴

حالت ۲

تعداد حالت‌های ارزشی یک گزاره $= 2^1 = 2$

تعداد حالت‌های ارزشی دو گزاره $= 2^2 = 4$

تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره $= 2^3 = 8$

نتیجه: اگر تعداد گزاره‌ها n باشد، در جدول ارزشی آن‌ها، تعداد حالت‌ها برابر با 2^n خواهد بود؛ مثلاً اگر تعداد گزاره‌ها 4 باشد، در جدول ارزشی مربوط به آن‌ها $2^4 = 16$ حالت مختلف وجود دارد.

مثال: یک جدول ارزش‌گذاری دارای 128 ردیف است.

الف) در این جدول چند گزاره ساده وجود دارد؟

ب) اگر یک گزاره به گزاره‌های این جدول اضافه کنیم، تعداد ردیف‌های آن چند برابر می‌شود؟

$$2^n = 128 \Rightarrow n = 7$$

پاسخ: الف) اگر تعداد گزاره‌ها را n در نظر بگیریم، طبق نتیجه قبل داریم:

پس 7 گزاره ساده داریم.

ب) حالا اگر یک گزاره اضافه کنیم، یعنی $n = 8$ ، تعداد ردیف‌ها برابر می‌شود با $2^8 = 256$ که نسبت به حالت قبل $2 = \frac{2^8}{2^7}$ برابر شده است.

نقیض یک گزاره

نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش آن گزاره باشد. نقیض یک گزاره مثل p را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم. $\sim p$ را این‌طور می‌خوانیم: «چنین نیست که p »، یا «نقیض p ». جدول ارزش نقیض یک گزاره نسبت به خود آن گزاره به شکل روبه‌رو است:

p	$\sim p$
T	F
F	T

اگر گزاره ساده p به شکل یک جمله فارسی باشد، برای ساختن نقیض آن، بهترین روش این است که فعل جمله را منفی کنیم؛ البته این کار، تنها راه ساختن نقیض نیست؛ مثلاً نقیض گزاره « 6 عددی زوج است.» را به 3 صورت می‌توان بیان کرد:

نقیض • چنین نیست که 6 عددی زوج باشد.

6 عددی زوج است. • نقیض 6 عددی زوج نیست. (متداول‌ترین جمله)

نقیض 6 عددی فرد است.



تذکر مهم: گاهی اوقات، گزاره ساده مورد نظر، شامل یک نماد ریاضی است که نقیض این نماد طبق جدول زیر، تعیین می‌شود:

نماد ریاضی	<	>	≤	≥	=	≠	∈	∉	⊆	⊄
نقیض نماد	≥ یا <	≤ یا >	>	<	≠	=	∉	∈	⊄	⊆

مثلاً نقیض گزاره $\frac{1}{3} = 2x + 5$ برابر است با: $\frac{1}{3} \neq 2x + 5$ و یا نقیض گزاره $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ عبارت است از: $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}$ ؛ همچنین نقیض گزاره $8 \geq 3$ برابر است با $8 < 3$.

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید؛ سپس ارزش درستی هر گزاره و نقیضش را تعیین کنید:

- الف) 51 عددی اول است. (ب) $2^3 + 2^4 = 2^5$
 پ) کسر $\frac{5x}{x^2 - 3}$ عبارتی گویا است. (ت) $(4 \times 9) > (5 \times 6)$
 ث) $4 \in \mathbb{N}$ (ج) a^2 عددی نامنفی است. (ا عدد حقیقی است.)

پاسخ: الف) 51 عددی اول است. نقیض 51 عددی اول نیست. (چنین نیست که 51 عددی اول باشد.)
 نادرست (F) درست (T)

ب) می‌دانیم که: $2^3 = 8$ ، $2^4 = 16$ و $2^5 = 32$ ؛ لذا $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24 \neq 32 = 2^5$ ؛ بنابراین گزاره داده شده نادرست است و نقیض آن برابر است با: $2^3 + 2^4 \neq 2^5$ درست است.

پ) کسر $\frac{5x}{x^2 - 3}$ عبارتی گویا است. نقیض کسر $\frac{5x}{x^2 - 3}$ عبارتی گویا نیست.
 درست (T) نادرست (F)

ت) $36 > 30$ درست (T) نقیض $36 \leq 30$ (یا $36 \not\leq 30$) نادرست (F)

ث) $4 \in \mathbb{N}$ درست (T) نقیض $4 \notin \mathbb{N}$ نادرست (F)

ج) a^2 عددی نامنفی است. نقیض a^2 عددی نامنفی نیست. (چنین نیست که a^2 عددی نامنفی باشد.)
 درست (T) نادرست (F)

تذکر: هر عدد حقیقی که باشد، a^2 مثبت یا صفر است چون توان a زوج است. یعنی a^2 همواره نامنفی است.

نکته: به طور کلی، اعداد به سه دسته مثبت، منفی و صفر تقسیم می‌شوند. خیلی‌ها به اشتباه فکر می‌کنند نقیض عبارت « a عددی مثبت است» برابر است با عبارت: « a عددی منفی است». علت، این است که اگر a مثبت نباشد، لزوماً منفی هم نیست؛ بلکه ممکن است صفر باشد. پس نقیض عبارت « a عددی مثبت است» را به 3 مدل می‌توان بیان کرد. « a عددی مثبت نیست.» یا « a عددی منفی یا صفر است.» یا «چنین نیست که a عددی مثبت باشد.»

گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره p و q یکسان باشد به آن‌ها **گزاره‌های هم‌ارز** می‌گوییم و این موضوع را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی p هر ارزشی داشته باشد (درست یا نادرست) q هم همان ارزش را دارد؛ مثلاً گزاره‌های « 25 عددی مربع کامل است.» و « $-3 \in \mathbb{Z}$ » هم‌ارز هستند؛ زیرا هر دوی آن‌ها ارزش درست (T) دارند.

هم‌چنین گزاره‌های « $\sqrt{3} > 3$ » و « $(-5)^2 = -25$ » هم‌ارز می‌باشند؛ چون هر دوی آن‌ها دارای ارزش نادرست (F) هستند.

توجه: واضح است که اگر $p \equiv q$ باشد، نقیض‌های آن‌ها نیز هم‌ارزند؛ یعنی: $\sim p \equiv \sim q$.

مثال: نقیض عبارت‌های زیر را به شکل هم‌ارزی بنویسید.

الف) $(\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}$ ب) $2^{10} > 2^{14}$ پ) $x = y$
پاسخ:
 الف) $\sim [(\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}] \equiv (\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$ ب) $\sim (2^{10} > 2^{14}) \equiv (2^{10} \leq 2^{14})$ پ) $\sim (x = y) \equiv (x \neq y)$

تذکر مهم: نقیض نقیض یک گزاره، هم‌ارز با همان گزاره است؛ یعنی: $\sim(\sim p) \equiv p$

(این موضوع شما را یادچی میندازه؟ بله! قرینه قرینه هر عدد، برابر است با خود آن عدد.)

مثال: 4 عددی مربع کامل است. نقیض 4 عددی مربع کامل نیست. نقیض 4 عددی مربع کامل است.
 گزاره p گزاره $\sim p$ گزاره $\sim(\sim p)$

نیپ ۱ مهم‌ترین و پرسؤال‌ترین سؤال این درس، مشخص کردن گزاره بودن یا نبودن جملات فارسی و ریاضی و همچنین ارزش درست یا نادرست گزاره‌هاست.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۳ تا ۲۱ - ۲۴ تا ۶۲

نیپ ۲ سؤال تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری کم‌تر پرسیده می‌شود ولی بهتر است راه‌حل آن را بلد باشیم.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۱، ۲، ۲۲ و ۲۳

سؤال‌های امتحانی

سؤال‌هایی که علامت دارند، سخت‌ترین سؤال‌های بخش، آگه به کم‌تر از ۲۰٪ اطمینان نمیشی، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگه، برو سراغ اون‌ها ...

■ جاهای خالی را با اعداد و عبارات مناسب پر کنید.

۱- جدول ارزش‌گذاری مربوط به ۶ گزاره دارای ردیف (حالت ارزشی) است.

۲- یک جدول ارزش‌گذاری دارای ۱۰۲۴ ردیف است. این جدول دارای گزاره است.

۳- هر جمله خبری که دقیقاً دارای یک ارزش درست یا نادرست باشد، یک محسوب می‌شود.

■ کدام‌یک از جملات یا عبارات‌های زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید:

۴- امروز به سینما نرو.

۵- سیب قرمز از سیب زرد خوشمزه‌تر است.

۶- 10^4 عدد بسیار بزرگی است.

۷- عدد ۱۲ یک عدد اول است.

۸- میانه داده‌های ۱، ۳، ۴، ۸، ۱۷، ۲۰، ۳۱، ۵۴ عدد $12/5$ است.

۹- از نمودار حبابی برای نمایش هم‌زمان ۲ متغیر استفاده می‌شود.

۱۰- عدد طبیعی $(4a + 5)$ ، همواره زوج است. (a عددی طبیعی است.)

۱۱- عدد $(-3)^{2n}$ همواره عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

۱۲- بزرگ‌ترین عدد اول دورقمی، برابر ۸۹ نیست.

۱۳- عبارت $\frac{|x|}{3x^2 + 5x}$ یک عبارت گویا نیست.

۱۴- رابطه $f = \{(4, 5), (2, 1), (10, 20)\}$ یک تابع است.

۱۵- بُرد تابع $y = 3$ برابر است با کل اعداد حقیقی.

۱۶- نمودار سهمی $y = 3 - x^2$ از نواحی دوم و سوم نمی‌گذرد.

۱۷- تعداد هلی‌کوپترهای ارتش‌های کشورهای مختلف، متغیری کمی با مقیاس نسبتی است.

۱۸- واریانس، جذر انحراف معیار است.

۱۹- چه هوای خوبی!

۲۰- رنگ مورد علاقه شما چیست؟

■ پاسخ کامل دهید.

۲۱- ارزش گزاره «عدد ۹ مربع کامل است.» را مشخص کرده، سپس نقیض آن را بنویسید.

۲۲- جدول ارزش‌گذاری ترکیب سه جمله را بنویسید.

■ گزینه درست را انتخاب کنید.

۲۳- اگر تعداد حالت‌ها در جدول ارزشی ۳۲ حالت باشد، تعداد گزاره‌ها برابر است با:

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۴- کدام‌یک از عبارات‌های زیر یک گزاره است؟

(۱) چه هوای خوبی! (۲) ۲ یک عدد اول است. (۳) تخته را پاک کن. (۴) کلید خانه را آورده‌ای؟

۲۵- کدام‌یک از جملات زیر گزاره است؟

(۱) لطفاً در را باز کن. (۲) چه هوای سردی! (۳) شما اهل کجایی؟ (۴) عدد ۷ عددی اول است

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(نهایی فرورد ۱۴۰۲)

(مشابه نهایی شهریور ۱۴۰۲)

(نهایی فرورد ۱۴۰۳)

(نهایی فرورد ۱۴۰۳)

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
$10^3 + 10^4 = 10^7$ -۲۸ -۲۷ -۲۶
مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت است. -۳۱ -۳۰ -۲۹
..... -۳۴ -۳۳	$-8 \geq -10$ -۳۲
..... -۳۷ -۳۶	 -۳۵
طول رأس سهمی $y = x^2 - 8x + 5$ برابر با $x = 3$ است. -۴۰ -۳۹ -۳۸
..... -۴۳ -۴۲	در تجزیه عبارت $4x^2 - 8x - 21$ عامل $(2x + 3)$ وجود ندارد. -۴۱
در داده‌های ۵ و ۲۸۰۰، ۴۲۰۰، ۱۲۰۰۰ شاخص میانه بهتر از شاخص میانگین، برای نمایش محل تمرکز داده‌ها است. -۴۶ -۴۵ -۴۴
مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج است. -۴۹ -۴۸ -۴۷
قرینه هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد است. -۵۲ -۵۱ -۵۰
معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، از خود آن عدد کوچک‌تر است. -۵۵ -۵۴ -۵۳
مجموع دو عدد $1 - \sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{3}$ ، عددی گنگ است. -۵۸ -۵۷ -۵۶

نمونه: $\sim (3 \in \mathbb{N}) \equiv 3 \notin \mathbb{N}$

$\sim (\sqrt{3} + \sqrt{10} = \sqrt{13}) \equiv ?$

$\sim (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}) \equiv ?$

$\sim (5^2 \leq 3^2) \equiv ?$

$\sim (21 \text{ عددی مرکب است}) \equiv ?$

هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید.

..... -۵۹

..... -۶۰

..... -۶۱

..... -۶۲

بخش ۲: گزاره‌های عطفی و فصلی

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها، به شکل‌های مختلفی می‌توانیم گزاره‌های ساده را با هم ترکیب کنیم تا گزاره‌های مرکب ساخته شوند. در کتاب درسی، ترکیب گزاره‌ها را با ۴ رابط «و»، «یا»، «اگر ... آن‌گاه ...»، «اگر ... آن‌گاه ... و برعکس» انجام می‌دهیم. در این درس‌نامه می‌خواهیم ارزش گزاره‌های عطفی و فصلی را تعیین کنیم. ابتدا گزاره عطفی را بررسی می‌کنیم.

ترکیب عطفی دو گزاره اگر دو گزاره ساده را با حرف «و» به هم مربوط کنیم، گزاره مرکبی ساخته می‌شود که آن را ترکیب عطفی آن دو گزاره می‌نامیم.

ترکیب عطفی p و q را با نماد $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم و آن را «p و q» می‌خوانیم. به مثال‌های زیر دقت کنید:

$$\underbrace{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}}_q \text{ و } \underbrace{2 \leq 5}_p : p \wedge q \iff \begin{cases} \text{گزاره } p: 2 \leq 5 \\ \text{گزاره } q: \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \end{cases}$$

جدول ارزش‌گذاری $p \wedge q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$p \wedge q$ فقط وقتی درست است که هم p و هم q درست باشند.

اگر حداقل یکی از دو گزاره p و q نادرست باشند؛ $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) تهران پایتخت ایران است و پاریس پایتخت ایتالیا است.

$$b) \quad \mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N} \text{ و } \sqrt{3} \notin \mathbb{N}$$

پ) ۱۱۰ عددی مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است.

 ت) $\frac{1}{5}$ عددی گنگ است و رابطه $g = \{(1, 2), (3, 4)\}$ تابع است.

پاسخ: الف) تهران پایتخت ایران است و پاریس پایتخت ایتالیا است. \Leftrightarrow یکی از گزاره‌ها نادرست است، پس کل گزاره، نادرست (F) است.

 ب) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$ و $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$ \Leftrightarrow کل گزاره، درست (T) است.

 پ) ۱۱۰ عددی مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است. \Leftrightarrow حداقل یکی از گزاره‌ها نادرست است، پس کل گزاره، نادرست (F) است.

 ت) $\frac{1}{5}$ عددی گنگ است و رابطه $g = \{(1, 2), (3, 4)\}$ تابع است. \Leftrightarrow یکی از گزاره‌ها نادرست است، پس کل گزاره، نادرست (F) است.

ترکیب فصلی دو گزاره اگر دو گزاره ساده را با حرف «یا» به هم مربوط کنیم، گزاره مرکب حاصل، **ترکیب فصلی** آن دو گزاره نام دارد. ترکیب فصلی

 دو گزاره p و q را به شکل $p \vee q$ نمایش داده و آن را به صورت «p یا q» می‌خوانیم؛ مثلاً:

 گزاره p: عدد ۱۲۰ بر ۵ بخش پذیر است. \leftarrow گزاره $p \vee q$: عدد ۱۲۰ بر ۵ بخش پذیر است یا مربع عدد ۱۰، برابر ۲۰ است.
 گزاره q: مربع عدد ۱۰، برابر ۲۰ است.

 گزاره p: تهران در ایران است. \leftarrow گزاره $p \vee q$: تهران در ایران است یا تهران در آسیا است. (به طور خلاصه تهران در ایران یا آسیا است).
 گزاره q: تهران در آسیا است.

 جدول ارزش گذاری $p \vee q$ به شکل روبه‌رو است:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

 $p \vee q$ وقتی درست است که حداقل یکی از دو گزاره درست باشند.

 $p \vee q$ فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا که لازم است از جدول ارزش گذاری استفاده کنید:

الف) ۱۳ عدد اول یا مربع کامل است.

 ب) معادله $x^2 - 16 = 0$ دو ریشه دارد یا ۴۹ مضرب ۷ است.

 پ) $(5^\circ \neq 1)$ \vee $(3 > 10)$

ت) ۱ عدد اول است یا ۳۶ جذر ۶ است.

پاسخ: الف) ۱۳ عدد اول یا مربع کامل است. \Leftrightarrow یکی از گزاره‌ها درست است، پس کل گزاره، درست (T) است.
 ب) ابتدا معادله داده شده را حل می‌کنیم: $(x^2 - 16 = 0) \Rightarrow x^2 = 16 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 4$ (پس معادله ۲ ریشه دارد).
 پ) $(5^\circ \neq 1) \vee (3 > 10)$ \Leftrightarrow هر دو گزاره نادرست است، پس کل گزاره، نادرست (F) است.
 ت) ۱ عدد اول است یا ۳۶ جذر ۶ است. \Leftrightarrow هر دو گزاره نادرست است، پس کل گزاره، نادرست (F) است.

 معادله $x^2 - 16 = 0$ دو ریشه دارد یا ۴۹ مضرب ۷ است. \Leftrightarrow کل گزاره درست (T) است.

 می‌دانیم هر عدد به جز صفر به توان صفر برسد، جواب برابر ۱ می‌شود؛ پس، $5^\circ = 1$
 $(5^\circ \neq 1) \vee (3 > 10)$ \Leftrightarrow هر دو گزاره نادرست است، پس کل گزاره، نادرست (F) است.

می‌دانیم ۱ عددی اول نیست (یک فقط فرد است نه اول). ضمناً ۳۶ مربع (مجذور) ۶ است نه جذر ۶؛ پس خواهیم داشت:

 ۱ عدد اول است یا ۳۶ جذر ۶ است \Leftrightarrow هر دو گزاره نادرست است، پس کل گزاره، نادرست (F) است.

مثال: جدول ارزش گذاری مقابل را از چپ به راست پُر کنید تا ارزش گزاره $q \wedge \sim (p \vee \sim q)$ مشخص شود.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim (p \vee \sim q)$	$q \wedge \sim (p \vee \sim q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

پاسخ: در تمام جدول‌ها، دو ستون مربوط به p و q مانند دو ستون سمت چپ در جدول متن سؤال هستند، سپس نگاه کنید گزاره داده شده از چه اجزائی تشکیل شده است. الان در گزاره $q \wedge \sim (p \vee \sim q)$ اجزای گزاره عبارت‌اند از: $\sim q$ ، $p \vee \sim q$ ، $\sim (p \vee \sim q)$ و در نهایت، $q \wedge \sim (p \vee \sim q)$ که به ترتیب آن‌ها را ارزش گذاری می‌کنیم:

نقیض می‌شود

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim (p \vee \sim q)$	$q \wedge \sim (p \vee \sim q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F

ستون نتیجه

مثال: جدول ارزش گذاری گزاره $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ را تشکیل دهید.

پاسخ: در گزاره مورد نظر، با دو گزاره اصلی p و q مواجه‌ایم؛ پس دو ستون ابتدای جدول p و q هستند. سپس $\sim p$ و $\sim q$ را قرار می‌دهیم در نهایت $(p \wedge \sim q)$ و $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ را تشکیل می‌دهیم.

همیشه جدول را از چپ به راست تشکیل می‌دهیم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T

خاصیت‌های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی دو گزاره p و q

یک سری قانون برای ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره وجود دارند که یادگیری آن‌ها سرعت محاسبات را افزایش می‌دهد. البته تمام این قوانین و هم‌ارزی‌ها را می‌توانیم به کمک رسم جدول ارزش گذاری، اثبات کنیم ولی ما فقط آن‌هایی را ثابت می‌کنیم که ممکن است در مدارس جنبه امتحانی داشته باشند. (در تمام هم‌ارزی‌های زیر، منظور از T گزاره همیشه درست و منظور از F گزاره همیشه نادرست است و p، q، r گزاره‌های دلخواه هستند.)

قوانین مربوط به ترکیب عطفی	قوانین مربوط به ترکیب فصلی
$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
$(p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p$	$(p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T$
$(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$	$(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$
$(p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \wedge p) \equiv F$ (بالأفوه یکی از p یا $\sim p$ نادرست است.)	$(p \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$ (بالأفوه یکی از p یا $\sim p$ درست است.)
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ جابه‌جایی	$p \vee q \equiv q \vee p$ جابه‌جایی
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ شرکت پذیری	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ شرکت پذیری
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ توزیع پذیری	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ توزیع پذیری
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ دمرگان	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ دمرگان
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ جذب	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ جذب
$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ شبه جذب	$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ شبه جذب

همان طور که گفتیم تمام این فرمول‌ها توسط جدول ارزش‌گذاری، قابل اثبات است؛ مثلاً قانون جذب $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ را اثبات می‌کنیم:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

ملاحظه می‌کنید که ارزش گزاره $p \wedge (p \vee q)$ همیشه با ارزش p برابر است، پس $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ برخی دیگر از هم‌ارزی‌های بالا را در سؤال‌های امتحانی اثبات کرده‌ایم.

مثال: بدون رسم جدول، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید: (T و F به ترتیب گزاره‌های همیشه درست و همیشه نادرست هستند).

- الف) $\sim p \vee \sim F \equiv ?$ ب) $\sim p \wedge F \equiv ?$ پ) $\sim (\sim p) \wedge \sim p \equiv ?$
 ت) $(\sim p \wedge F) \vee (\sim p \vee T) \equiv ?$ ث) $(F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv ?$ ج) $q \vee \sim (p \vee \sim q) \equiv ?$

پاسخ: دقت کنید که نقیض F می‌شود T و نقیض T می‌شود F؛ پس خواهیم داشت:

الف) $\sim p \vee \sim F \equiv \sim p \vee T \equiv T$ ب) $\sim p \wedge F \equiv F$
 پ) $\underbrace{\sim(\sim p)}_p \wedge \sim p \equiv p \wedge \sim p \equiv F$ ت) $\underbrace{(F \vee \sim p)}_F \vee \underbrace{(\sim p \vee T)}_T \equiv F \vee T \equiv T$
 ث) $(F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$ ج) $q \vee \sim (p \vee \sim q) \equiv q \vee (\sim p \wedge q) \equiv q$
 (شبه جذب) (جذب) (دمرگان)

در امتحان چه خبر؟

در این درس گزاره‌های عطفی و فصلی را یاد گرفتیم که به صورت زیر از آن‌ها سؤال خواهیم داشت:

تیپ ۱ سؤالات جای خالی یا درست - نادرست از تعاریف اولیه

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۶۳ تا ۷۱

تیپ ۲ ارزش‌گذاری گزاره‌های مرکب فارسی که ساده‌ترین حالت استفاده از جدول‌های ارزش‌گذاری است.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۷۵ تا ۱۰۱

تیپ ۳ با استفاده از جدول ارزش‌گذاری یا بدون آن و فقط استفاده از قوانین عطفی و فصلی ارزش‌هم‌ارزی‌ها را مشخص می‌کنیم.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۷۲ تا ۷۴ - ۱۰۲ تا ۱۱۹

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

۶۳- ترکیب دو گزاره وقتی ارزش درست دارد که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشد.

۶۴- اگر حداقل یکی از دو گزاره ارزش درست داشته باشد، در این صورت ارزش ترکیب آن‌ها درست است.

۶۵- گزاره $p \vee \sim p$ همواره یک گزاره است. (درست - نادرست)

۶۶- اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزاره $p \vee \sim q$ همواره است.

۶۷- نقیض گزاره $p \vee \sim q$ گزاره است.

هم‌ارزی‌های درست را با و هم‌ارزی‌های نادرست را با مشخص کنید

۶۸- $p \wedge (p \vee q) \equiv q$

۶۹- $(\sim p \vee \sim q) \equiv \sim (p \vee q)$

۷۰- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

۷۱- گزاره $(p \wedge \sim p)$ همیشه نادرست است.

گزینه درست را انتخاب کنید.

۷۲- اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، در چه صورت ارزش گزاره مرکب $p \wedge q$ درست است؟

- (۱) p درست و q نادرست (۲) p و q هر دو درست (۳) p و q هر دو نادرست (۴) گزینه ۱ و ۳

۷۳- برای ترکیب فصلی دو گزاره p و q از حرف ربط استفاده شده و آن را با نماد $p \dots q$ نشان می‌دهیم.

- (۱) و - (۲) و - (۳) یا - (۴) یا -

۷۴- هم‌ارز گزاره $(p \wedge q) \sim$ کدام گزاره است؟

- (۱) $\sim (p \vee q)$ (۲) $(p \vee \sim q)$ (۳) $(\sim p \vee \sim q)$ (۴) $(p \wedge \sim q)$

(نهایی فرورد ۱۴۰۲)

(نهایی شهریور ۱۴۰۲)

(نهایی فرورد ۱۴۰۳)

(نهایی فرورد ۱۴۰۳)

■ در جدول زیر، روبروی گزاره‌های داده‌شده ارزش آن‌ها را با علامت ✓ مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده‌شده با یک یا دو گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید:

(مشابه فعالیت‌ها و تمرینات کتاب درسی)

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
-۷۵	۷۵ عددی اول است و $(-۳)^۴$ عددی منفی نیست.		
-۷۶ و رنگ چشم افراد، متغیر کیفی اسمی است.	✓	
-۷۷	مقسوم‌علیه‌های (شمارنده‌های) طبیعی عدد ۱۲ عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ و	✓	
-۷۸	۱۲۱ مضرب ۱۱ است و $\frac{1}{۳} > \frac{1}{۲}$		
-۷۹ و	✓	
-۸۰	همه سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شوند و سوره بقره طولانی‌ترین سوره قرآن است.		
-۸۱	مجموعه $\{\emptyset\}$ تهی است و $\{۰, ۱, ۲, ۳\} \subseteq \mathbb{N}$		
-۸۲	$\sqrt{۹+۱۰۰} = ۳+۱۰$ و $(\frac{-۲}{۳})^{-۳} \times ۳^{-۲} = \frac{1}{۸}$		
-۸۳	$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$ و $(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$		
-۸۴	(شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است) \wedge (یکی از معایب سرشماری، عدم امکان استفاده در بررسی‌های مخرّب است).		
-۸۵	$(-۵ \neq -\sqrt{(-۵)^۲}) \wedge ((\frac{۲}{۳})^۰ = ۱)$		
-۸۶	عدد ۲ زوج و اول است.		
-۸۷	نمودار خط $x = ۳$ از ناحیه اول و چهارم می‌گذرد.		
-۸۸	هفته ۷ روز دارد و	✓	(نوبتی شهریور ۱۳۰۲)
-۸۹ یا ۵ عددی زوج است.	✓	(نوبتی شهریور ۱۳۰۲)
-۹۰	کسر $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ عبارتی گویا است یا ۹۱ عددی مرکب است.		
-۹۱	قرآن ۱۱۸ سوره دارد یا	✓	
-۹۲	ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست یا	✓	
-۹۳ یا معادله $x^۲ + x + ۳ = ۰$ دو ریشه دارد.	✓	
-۹۴	افلاطون، شاگرد سقراط بود یا هفته هفت روز دارد.		
-۹۵	اعداد سطر سوم مثلث خیام (۱، ۲، ۱) هستند یا سهمی $f(x) = x^۲ + ۱$ ماکزیمم دارد.		
-۹۶	در تابع $f(t) = \sqrt{t+1}$ متغیر مستقل برابر $f(t)$ است یا وزن افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است.		
-۹۷	رابطه  تابع است یا نمودار میله‌ای، یک نمودار تک‌متغیره است.		
-۹۸	$(\frac{1}{۲} \in \mathbb{Z}) \vee (\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q})$		
-۹۹	$(\frac{۲^۳ \times ۳^{-۲}}{۲^{-۵} \times ۳^۴} \times \frac{۶^۷}{۸^۵} = ۲) \vee (\sqrt{x^۲} = x)$		
-۱۰۰	عدد ۱۹ زوج یا مربع کامل است.		
-۱۰۱	عدد ۲۴ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.		

بدون رسم جدول ارزش گذاری طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید.

$$\sim (p \wedge \sim T) \vee (F \vee (p \wedge F)) \equiv ? \quad -102 \quad (\sim p \vee T) \wedge (F \wedge \sim p) \equiv ? \quad -103$$

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

با استفاده از جدول ارزش گذاری، درستی یا نادرستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad -104 \quad (\text{نهایی فرداد } 11402) \quad -105 \quad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad -106 \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad -107$$

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \quad -108 \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p \quad -109$$

$$(p \wedge \sim p) \equiv F \quad -110 \quad (p \vee \sim p) \equiv T \quad -111$$

$$p \wedge (\sim p \wedge \sim q) \equiv T \quad -112 \quad (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p \quad -113$$

$$p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F \quad -114$$

(برگرفته از متن کتاب درسی)

۱۱۵- اگر گزاره $p \vee \sim (p \wedge \sim q)$ نادرست باشد، ارزش گزاره‌های زیر چیست؟

$$\text{الف) } (q \vee r) \vee p \quad \text{ب) } \sim (p \wedge q) \wedge \sim r$$

۱۱۶- اگر $p \wedge q$ گزاره‌ای درست باشد ارزش گزاره $p \vee (q \wedge r)$ را تعیین کنید.

۱۱۷- اگر $p \wedge q \equiv F$ باشد ثابت کنید که: $(\sim p \vee q) \wedge p \equiv F$

۱۱۸- اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)$ را بدون رسم تعیین کنید.

۱۱۹- اگر ارزش گزاره $p \vee (\sim q \vee p)$ نادرست باشد، بدون رسم جدول ارزش گزاره $(\sim r) \wedge (\sim (p \vee q))$ را تعیین کنید.

بخش ۳: گزاره شرطی و دوشروطی

ترکیب شرطی دو گزاره

اگر بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از نماد « \Rightarrow » استفاده کرده و می‌نویسیم: $p \Rightarrow q$ و آن را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

اگر p آن‌گاه q . \leftarrow p نتیجه می‌دهد q را. \leftarrow q از p نتیجه می‌شود.

\leftarrow شرط کافی است برای q
 \leftarrow شرط لازم است برای p

ضمناً در گزاره « $p \Rightarrow q$ » به p مقدم و به q تالی می‌گوییم.

مثلاً گزاره شرطی «اگر یک چهارضلعی، مستطیل باشد، آن‌گاه قطرهاش با هم برابرند.» را به شکل‌های زیر هم می‌توان بیان کرد:

\leftarrow مستطیل بودن یک چهارضلعی، نتیجه می‌دهد مساوی بودن قطرهای آن را.
 \leftarrow مستطیل بودن یک چهارضلعی، شرط کافی است برای مساوی بودن قطرهای آن.

\leftarrow (دو قطرش با هم برابرند.) \Rightarrow (چهارضلعی، مستطیل است).
 \leftarrow مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی، شرط لازم است برای مستطیل بودن آن.

در گزاره شرطی بالا p و q به هم وابسته هستند؛ یعنی با فرض درست بودن گزاره «چهارضلعی، مستطیل است.» درستی یا نادرستی گزاره «قطرهای چهارضلعی با هم برابرند» را بررسی می‌کنیم؛ ولی در علم منطق، گاهی p و q ربطی به هم ندارند که در این صورت باید ارزش تک‌تک آن‌ها را تعیین کنیم؛ مثلاً اگر $5 > 3$ باشد، آن‌گاه تهران پایتخت ایران است. ملاحظه می‌کنید که گزاره‌های p و q ارتباطی به هم ندارند؛ پس نمی‌توانیم بدون بررسی گزاره p (نادرست) گزاره q (درست) را بررسی کنیم.

بگوییم p درست است. (دیدید که $5 > 3$ نادرست بود؛ یعنی تماماً باید بررسی کنیم و چشم‌پوشی نمی‌کنیم p درست است؛ ولی q به هم وابسته بودن، چشم‌پوشی نمی‌کنیم p درست است و فقط q را بررسی می‌کنیم.)



$3^n = 32 = 2^5 \Rightarrow n = 5$

F . ۲۵

$10^3 + 10^4 \neq 10^7$. ۲۷

F . ۲۹

۳۰. مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت نیست.

T . ۳۲

$-8 < -10$. ۳۴

۳ . ۲۳

۲ . ۲۴

T . ۲۶

F . ۲۸

T . ۳۱

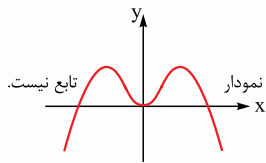
F . ۳۳

T . ۳۵

توضیح: هر خط عمودی دلخواه (هر خط موازی محور عرض‌ها) نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس نمودار، تابع است.

F . ۳۶

۳۷



T . ۳۸

۳۹. طول رأس سهمی $y = x^2 - 8x + 5$ برابر با ۳ نیست.

F . ۴۰

توضیح: طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ است؛ لذا در گزاره داده‌شده خواهیم داشت:

$x = \frac{-(-8)}{2(1)} = 4$

F . ۴۱

$(2x)^2 - 4(2x) - 21 = (2x - 7)(2x + 3)$
اتحاد جمله مشترک

توضیح:

T . ۴۲

۴۳. در تجزیه $4x^2 - 8x - 21$ عامل $(2x + 3)$ وجود دارد.

F . ۴۴

۴۵. در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰۰، ۲۸۰۰۰ و ۵ برای نمایش محل تمرکز داده‌ها، میانه بهتر از میانگین نیست.

T . ۴۶

توضیح: چون داده ۵ دورافتاده است (از بقیه داده‌ها خیلی کوچک‌تر است)، شاخص میانه بهتر از شاخص میانگین است.

F . ۴۷

۴۸. مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج نیست. (عددی فرد است.)

T . ۵۰

T . ۴۹

۵۱. قرینه هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد نیست.

F . ۵۲

توضیح: مثلاً قرینه ۵ - می‌شود ۵ که کوچک‌تر از ۵ - نیست؛ پس گزاره داده‌شده نادرست است.

F . ۵۳

۵۴. معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ از خود آن عدد، کوچک‌تر نیست.

T . ۵۵

توضیح: مثلاً معکوس ۲ می‌شود $\frac{1}{2}$ که از خود ۲ کوچک‌تر است؛ یا معکوس ۱۰ می‌شود $\frac{1}{10}$ که از خود ۱۰ کوچک‌تر است. برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر ۱ این خاصیت وجود دارد؛ پس گزاره بالا درست است.

T . ۵۶

۵۷. مجموع دو عدد $1 - \sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{3}$ عددی گنگ نیست.

F . ۵۸

توضیح: جمع این دو عدد گویا است؛ زیرا: $1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2$

پاسخ‌نامه تشریحی فصل اول

$2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$ (۱۰) . ۲

$2^6 = 64$ (۶۴) . ۱

۳. گزاره

۴. جمله داده‌شده، امری است و خبری نمی‌باشد؛ پس گزاره نیست.

۵. گزاره نیست، چون نمی‌توانیم در مورد درستی یا نادرستی این جمله اظهار نظر کنیم.

۶. گزاره نیست؛ چون هر کسی در مورد بسیار بزرگ بودن 10^4 می‌تواند برداشت خاصی داشته باشد؛ یعنی ممکن است یک نفر بگوید 10^4 خیلی بزرگ است و نفر دیگر بگوید 10^4 اصلاً بزرگ نیست؛ پس ارزش‌گذاری این جمله، امکان‌پذیر نبوده و لذا گزاره نیست.

۷. یک گزاره نادرست است، چون عدد ۱۲ عددی مرکب است: $12 = 2^2 \times 3$

۸. یک گزاره درست است، زیرا: $1, 3, 4, 8, 17, 20, 31, 54$

میانگین $= \frac{8+17}{2} = \frac{25}{2} = 12/5$

۹. یک گزاره نادرست است، چون از نمودار حبابی معمولاً برای نمایش هم‌زمان ۳ متغیر استفاده می‌شود.

۱۰. یک گزاره نادرست است، چون مثلاً اگر a برابر با ۱ باشد، حاصل $(4a + 5)$ برابر ۹ می‌شود که فرد است.

۱۱. یک گزاره نادرست است، چون مثلاً اگر $n = 1$ باشد؛ آن‌گاه:

$(-3)^{2n} = (-3)^2 = 9$

۱۲. یک گزاره درست است، چون بزرگ‌ترین عدد اول دورقمی، ۹۷ است.

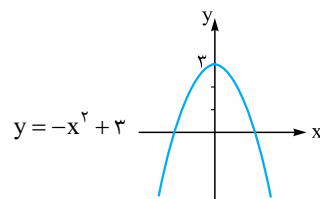
۱۳. یک گزاره درست است، چون به خاطر وجود $|x|$ عبارت $\frac{|x|}{3x^2 + 5x}$ گویا نیست.

۱۴. یک گزاره درست است، چون عضوهای اول زوج‌مرتب‌ها، همگی مختلف‌اند.

۱۵. یک گزاره نادرست است، چون بُرد تابع $y = 3$ برابر $\{3\}$ است. (دامنه تابع $y = 3$ برابر کل اعداد حقیقی است.)

۱۶. یک گزاره نادرست است، زیرا

این سهمی از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.



۱۷. یک گزاره درست است، چون اولاً تعداد هلی‌کوپترهای کشورهای قابل مقایسه‌اند؛ ثانیاً اختلاف هر دوی آن‌ها با معنی است و ثالثاً نسبت هر دو مقدار آن‌ها نیز با معنی است.

۱۸. یک گزاره نادرست است؛ چون انحراف معیار جذر واریانس است.

۱۹. گزاره نیست، زیرا جمله خبری نیست.

۲۰. گزاره نیست، زیرا جمله خبری نیست.

۲۱. ارزش گزاره: درست.

نقیض: عدد ۹ مربع کامل نیست (یا چنین نیست که عدد ۹ مربع کامل است).

۲۲. $2^3 = 8$ = تعداد ردیف

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

۸۴. نادرست؛ گزاره «شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است.» نادرست است.

(شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است)
F (شیب هر خط عمودی، تعریف نشده است.)

۸ (یکی از معایب سرشماری، عدم امکان استفاده در بررسی‌های مخرب است)
T

پس در کل، این گزاره نادرست است.

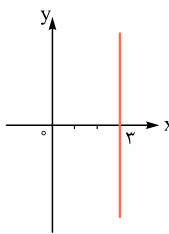
۸۵. نادرست؛ $(\frac{2}{3})^0 = 1$ و $(-\sqrt{(-5)^2}) \wedge (-5 \neq -\sqrt{(-5)^2})$ پس این گزاره، در کل نادرست

است. دقت کنید که هر عدد به توان صفر برسد جواب ۱ است.

ضمناً: $-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$

۸۶. درست؛ عدد ۲، هم زوج است و هم اول؛ پس گزاره مورد نظر، درست است.

۸۷. درست؛ نمودار خط $x = 3$ به شکل مقابل است:



ملاحظه می‌کنید که این خط از نواحی اول و چهارم x می‌گذرد؛ پس گزاره داده شده، درست است.

۸۸. درست؛ گزاره «هفته ۷ روز دارد و» درست است. ترکیب عطفی

دو گزاره زمانی درست است که هر دو درست باشند؛ پس باید یک عبارت درست مثل « $5 \geq 1$ » در جای خالی بنویسیم.

۸۹. نادرست؛ گزاره «..... یا ۵ عددی زوج است.» نادرست است. ترکیب

فصلی دو گزاره زمانی نادرست است که هر دو نادرست باشند؛ پس در جای خالی باید یک عبارت نادرست مثل «ماه، قمر سیاره زحل است» بنویسیم.

۹۰. درست؛ کسر $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ گویا است یا 91 عددی مرکب است.
T (۹۱ بر ۷ و ۱۳ بخش پذیر است.)

≤ کل گزاره، درست است.

۹۱. درست؛

قرآن ۱۸ سوره دارد یا آخرین پیامبر الهی، حضرت محمد (ص) بود.
F (قرآن ۱۴ سوره دارد) T

≤ کل گزاره، درست است.

طبق فرض سؤال، کل گزاره باید درست باشد به همین علت، یک گزاره ساده

درست، در جای خالی قرار دادیم؛ چون می‌دانیم که $T \vee F \equiv T$

۹۲. نادرست؛

ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست یا ۲ عددی فرد است.
F T

≤ کل گزاره نادرست است.

۹۳. درست؛

۳ عددی اول است یا معادله $x^2 + x + 3 = 0$ دو ریشه دارد.
T F (دلتهای معادله منفی است پس ریشه ندارد.)

≤ کل گزاره درست است.

در جای خالی، گزاره درست قرار دادیم؛ زیرا می‌دانیم که: $T \vee F \equiv T$

۹۴. درست؛ افلاطون شاگرد سقراط بود یا هفته هفت روز دارد.
T T

≤ کل گزاره درست است.

۹۵. درست؛ اعداد سطر سوم مثلث خیام (۱ ۲ ۱) هستند
T

یا سهمی $y = x^2 + 1$ ماکزیمم دارد. ≤ کل گزاره درست است.

F (ضریب x^2 مثبت است؛ پس سهمی مینیمم دارد.)

۵۹. $\sqrt{3} + \sqrt{10} \neq \sqrt{13}$

۶۰. $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Q}$

۶۱. $5^2 > 3^2$

۶۲. ۲۱ عددی اول است. **۶۳.** عطفی

۶۴. فصلی

۶۵. درست (چون حداقل یکی از گزاره‌های p یا نقیض آن (p) درست خواهد بود.)

۶۶. درست

$$p \vee \sim q \equiv T \vee \sim F \equiv T \vee T \equiv T$$

\downarrow T \downarrow F \downarrow T

۶۷. $\sim p \wedge q$

۶۸. نادرست؛ زیرا $p \wedge (p \vee q)$ طبق قانون جذب همواره برابر p است.

۶۹. نادرست؛ زیرا طبق قانون دمورگان داریم: $(\sim p \vee \sim q) \equiv \sim (p \wedge q)$

۷۰. درست؛ طبق قانون توزیع پذیری این گزاره درست است.

۷۱. درست

۷۲. ۲ **۷۳.** ۳

۷۴. $\sim (p \wedge q) = (\sim p \vee \sim q)$

۷۵. نادرست؛ ۷۵ عددی اول است و $(-3)^4$ عددی منفی نیست. ≤ در کل

نادرست است.

۷۶. درست؛ چون «گزاره رنگ چشم افراد، کیفی اِسمی است.» گزاره‌ای

درست است؛ پس باید در جای خالی، گزاره‌ای درست قرار دهیم تا ارزش کل گزاره عطفی درست شود. در جای خالی، هر گزاره درست دلخواهی می‌تواند قرار داد؛ مانند: «۲ عددی اول است.»

۷۷. نادرست؛ گزاره «مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ عبارت‌اند از:

۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ و ۱» درست است؛ پس برای آن که کل گزاره عطفی نادرست

باشد باید در جای خالی، یک گزاره نادرست دلخواه قرار دهیم؛ مثلاً:

«۵ عددی زوج است»

۷۸. درست؛ ۱۲۱ مضرب ۱۱ است و $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ≤ کل گزاره درست است.

۷۹. باید دو گزاره دلخواه درست مثال بنزیم تا کل گزاره، درست شود. مثلاً:

۴ عددی طبیعی است و $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

۸۰. نادرست؛ همه سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شوند و

F (سوره توبه با بسم‌الله شروع نمی‌شود.)

سوره بقره طولانی‌ترین سوره قرآن است. ≤ پس در کل، گزاره نادرست است.

۸۱. نادرست؛ مجموعه $\{\emptyset\}$ تهی است و $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$ ≤ پس کل گزاره

F (مجموعه $\{\emptyset\}$ یک F (صفر، عدد طبیعی نیست.)

عضو دارد و تهی نیست.)

نادرست است.

۸۲. نادرست؛ $(-\frac{2}{3})^3 \times \frac{1}{3^3} = (-\frac{2}{3} \times \frac{1}{3})^3 = (-\frac{2}{9})^3 = -\frac{8}{729}$

$(-\frac{2}{3})^{-3} \times 3^{-2} = \frac{1}{(-\frac{2}{3})^3} \times \frac{1}{3^2} = \frac{1}{-\frac{8}{27}} \times \frac{1}{9} = -\frac{27}{72} = -\frac{3}{8}$ ≤ در کل نادرست است.

F (بین ۹ و ۱۰۰ جمع است و نمی‌توانیم آن‌ها را تک تک

از رادیکال خارج کنیم، اگر ضرب یا تقسیم بود می‌شد.)

۸۳. درست؛ هر دو اتحاد داده شده درست هستند؛ پس کل گزاره درست است.



۱۰۵

p	q	~p	~q	p ∨ q	~(p ∨ q)	~p ∧ ~q
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

پس هم‌ارزی موردنظر، درست است. (قانون دمرگان است.)

۱۰۶

p	q	r	q ∨ r	p ∧ (q ∨ r)	p ∧ q	p ∧ r	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

۱۰۷

p	q	r	q ∧ r	p ∨ (q ∧ r)	p ∨ q	p ∨ r	(p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

۱۰۸

p	q	p ∧ q	p ∨ (p ∧ q)
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

پس هم‌ارزی $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ نادرست است.

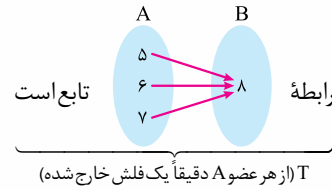
۱۰۹

p	q	~p	~p ∨ q	p ∧ (~p ∨ q)	p ∧ q
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

۹۶. نادرست؛ در تابع $f(t) = \sqrt{t+1}$ متغیر مستقل $f(t)$ است یا $f(t)$ متغیر مستقل و $f(t)$ متغیر وابسته است.

وزن افراد، کمی فاصله‌ای است. \Leftarrow پس کل گزاره نادرست است. F (وزن، متغیر کمی نسبتی است.)



۹۷. درست؛ رابطه

T (از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج شده)

یا نمودار میلی‌ای، یک نمودار تک متغیره است. \Leftarrow کل گزاره، درست است. T

۹۸. درست؛ $(\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}) \vee (\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q})$ \Leftarrow کل گزاره، درست است.

۹۹. درست؛ می‌دانیم $\sqrt{x^2} = |x|$ یعنی هرگاه عبارتی از رادیکال با فرجه زوج خارج شود، باید از قدرمطلق استفاده کنیم؛ پس چون یک گزاره از دو گزاره ساده داده‌شده درست است، می‌توانیم گزاره دیگر را بررسی نکنیم و بلافاصله بگوییم ارزش کل گزاره فصلی درست است ولی برای تمرین بیشتر، گزاره دیگر را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\frac{2^3 \times 3^{-2}}{2^{-5} \times 3^4} \times \frac{(2 \times 3)^7}{(2^2)^5} = \frac{2^3 \times 3^{25}}{2^2 \times 3^4} \times \frac{2^7 \times 3^7}{2^{10}} = \frac{2^4 \times 3^7}{3^6 \times 2^4} = 3$$

$$\left(\frac{2^3 \times 3^{-2}}{2^{-5} \times 3^4} \times \frac{6^7}{8^5} = 2 \right) \vee (\sqrt{x^2} = |x|) \Rightarrow \text{کل گزاره درست است.}$$

۱۰۰. نادرست؛ عدد ۱۹ زوج یا ۱۹ مربع کامل است. \Leftarrow در کل، نادرست است.

۱۰۱. درست؛ عدد ۲۴ بر ۳ بخش پذیر است یا ۲۴ بر ۵ بخش پذیر است. \Leftarrow

در کل، درست است.

$$(\sim p \vee T) \wedge (F \wedge \sim p) \equiv T \wedge F \equiv F$$

۱۰۲

$$\sim (p \wedge \sim T) \vee (F \vee (p \wedge F)) \equiv \sim (p \wedge F) \vee F \equiv F \vee F$$

$$\equiv T \vee F \equiv T$$

۱۰۴. به کمک دو ستون p و q گزاره $p \wedge q$ را ارزش گذاری کرده‌ایم این موضوع را با فلش‌هایی که از p و q به $p \wedge q$ رفته‌اند مشخص کرده‌ایم به همین ترتیب، از $\sim p$ و $\sim q$ ارزش $\sim p \vee \sim q$ را نتیجه گرفته‌ایم.

p	q	~p	~q	p ∧ q	~(p ∧ q)	~p ∨ ~q
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است. (قانون دمرگان است.)

آزمون‌های

نوبت اول

دوم و

نمونه امتحان نیمسال اول	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار ۲																
ردیف	امتحان شماره ۱	Kheilisabz.com																
نمره	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه																	
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که p درست و q نادرست باشد. ب) اگر ۴ گزاره داشته باشیم، تعداد حالتها در جدول ارزشی برابر ۳۲ است.	۰/۵																
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) نقیض گزاره $p \vee \sim p$ ، گزاره است. ب) منطق را عموماً به معنای بررسی تعبیر می کنند.	۰/۵																
۳	گزینه درست را انتخاب کنید. الف) برای ترکیب فصلی دو گزاره p و q از حرف ربط استفاده می شود و آن را با نماد p q نمایش می دهند. (۱) و - \vee (۲) و - \wedge (۳) یا - \vee (۴) یا - \wedge ب) نقیض گزاره «همه اعداد اول، فرد هستند.» کدام است؟ (۱) هیچ عدد اولی، فرد نیست. (۲) بعضی از اعداد اول، فرد هستند. (۳) همه اعداد صحیح، اول هستند. (۴) بعضی از اعداد گنگ، اول هستند.	۰/۵																
۴	در هر قسمت، جاهای خالی را با «است» یا «نیست» پر کنید.	۱/۵																
<table border="1"> <thead> <tr> <th>ردیف</th> <th>گزاره مرکب</th> <th>درست</th> <th>نادرست</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۱</td> <td>معادله $x^2 + x + 4 = 0$ دو ریشه دارد یا ۲۵ مربع کامل</td> <td>✓</td> <td></td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td>(عدد ۱۹ زوج) $(\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Z})$ ✓</td> <td></td> <td>✓</td> </tr> <tr> <td>۳</td> <td>(خط $y = 4$ افقی) $(-32 = -5^2)$ ✓</td> <td>✓</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست	۱	معادله $x^2 + x + 4 = 0$ دو ریشه دارد یا ۲۵ مربع کامل	✓		۲	(عدد ۱۹ زوج) $(\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Z})$ ✓		✓	۳	(خط $y = 4$ افقی) $(-32 = -5^2)$ ✓	✓	
ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست															
۱	معادله $x^2 + x + 4 = 0$ دو ریشه دارد یا ۲۵ مربع کامل	✓																
۲	(عدد ۱۹ زوج) $(\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Z})$ ✓		✓															
۳	(خط $y = 4$ افقی) $(-32 = -5^2)$ ✓	✓																
۵	اگر ارزش گزاره p درست، ارزش گزاره q نادرست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش گزاره های زیر را بدون رسم جدول تعیین کنید. الف) $(p \wedge r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q) \wedge [\sim q \Rightarrow (p \wedge r)]$ ب) ب) $p \equiv ? \Rightarrow (\sim q \vee \sim r) \Rightarrow (\sim p)$	۲																
۶	با استفاده از جدول ارزش گذاری، درستی قاعده قیاس استثنایی یعنی گزاره $q \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge p]$ را نشان دهید.	۲																
۷	به کمک استدلال عکس نقیض، ثابت کنید که: «اگر n^2 فرد باشد، آن گاه n فرد است.» ($n \in \mathbb{Z}$) (n فرد است) $\Rightarrow (n^2$ فرد باشد)	۲																
۸	در کدام قسمت، دو عبارت کنار هم، نقیض هم نیستند؟ الف) a عددی زوج است. - a عددی فرد است. ب) b عددی گویا نیست. - b عددی گویا است. پ) y مربع کامل است. - چنین نیست که y مربع کامل باشد. ت) x عددی مثبت است. - x عددی منفی است.	۰/۵																
۹	نام استدلال زیر چیست؟ آیا روش به کار رفته در آن درست است یا خیر؟ نتیجه آن چه طور؟ مقدمه ۱: اگر دو عدد زوج باشند، آن گاه مجموع آنها نیز زوج است. مقدمه ۲: مجموع دو عدد، زوج است. ∴ آن دو عدد زوج اند.	۱/۵																
۱۰	می خواهیم از رابطه $x = \frac{x-y}{z-y}$ مقدار y را بر حسب بقیه متغیرها به دست آوریم. در چه مرحله ای از محاسبات، اشتباه رخ داده است؟ $x = \frac{x-y}{z-y} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}$ $xz - xy = x - y \xrightarrow[\text{به یک طرف}]{\text{بردن } y \text{ ها}}$ $y - xy = x - xz \xrightarrow{\text{فکتورگیری}}$ $y(1-x) = x(1-z)$ $\xrightarrow[\text{بر } (1-x)]{\text{تقسیم دو طرف}}$ $y = \frac{x(1-z)}{1-x}$	۲																

نمونه امتحان نیم سال اول	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار ۲										
ردیف	امتحان شماره ۱	Kheilisabz.com										
نمره	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه											
۱۱	کدام تابع، ثابت و کدام همانی است؟	<p>الف) </p> <p>ب) </p>										
۱۲	اگر f تابع همانی باشد، مقادیر a, b, c و d را به دست آورید.	$f = \{(a, 3), (b + 3, 2b), (25, 5c), (1 + d, 9)\}$										
۱۳	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 0 \\ 3 - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و مقدارهای $f(0)$ ، $f(\sqrt{2})$ و $f(-\frac{1}{3})$ را به دست آورید.	۲										
۱۴	اگر $f = \{(14, 2a), (b, 4), (12, 3a - 2b)\}$ تابع ثابت باشد، a و b را پیدا کنید.	۱										
۱۵	ضابطه تابع مقابل را بنویسید:	<p>۱/۵ </p>										
۱۶	برای جدول زیر یک ضابطه مناسب بنویسید و سپس نمودار آن را رسم کرده و بگویید نام این نوع تابع چیست؟ هم چنین دامنه و برد آن را تعیین کنید. خودروی ۲۴۰م که وارد پارکینگ می شود، چه هزینه ای باید بپردازد؟ اگر یک خودرو ۳۰۰۰ تومان پرداخت کرده باشد، شماره خودرو در چه محدوده ای است؟	۱										
<table border="1"> <thead> <tr> <th>x تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت</th> <th>y هزینه دریافتی از هر خودرو (تومان)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۰ - ۱۰۰</td> <td>رایگان</td> </tr> <tr> <td>۱۰۰ - ۲۰۰</td> <td>۱۰۰۰ تومان</td> </tr> <tr> <td>۲۰۰ - ۳۰۰</td> <td>۲۰۰۰ تومان</td> </tr> <tr> <td>۳۰۰ - ۴۰۰</td> <td>۳۰۰۰ تومان</td> </tr> </tbody> </table>		x تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت	y هزینه دریافتی از هر خودرو (تومان)	۰ - ۱۰۰	رایگان	۱۰۰ - ۲۰۰	۱۰۰۰ تومان	۲۰۰ - ۳۰۰	۲۰۰۰ تومان	۳۰۰ - ۴۰۰	۳۰۰۰ تومان	
x تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت	y هزینه دریافتی از هر خودرو (تومان)											
۰ - ۱۰۰	رایگان											
۱۰۰ - ۲۰۰	۱۰۰۰ تومان											
۲۰۰ - ۳۰۰	۲۰۰۰ تومان											
۳۰۰ - ۴۰۰	۳۰۰۰ تومان											
۲۰	جمع نمرات											

تساوی را بر صفر تقسیم کنیم؛ ولی اگر در متن سؤال، گفته می‌شد $x \neq 1$ است، راه حل داده شده، هیچ اشکالی نداشت.

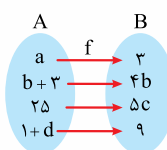
۱۱. الف تابع f ثابت است؛ چون به هر x از دامنه، عدد یکسانی را نسبت می‌دهد.

ب تابع g همانی است؛ چون به هر عضو از دامنه، همان مقدار از بُرد را نسبت می‌دهد.

۱۲. در هر زوج مرتب، عضو اول باید با عضو دوم برابر باشد، لذا:

$$a = 3, b + 3 = 4b \Rightarrow b - 4b = -3 \Rightarrow -3b = -3 \Rightarrow b = 1$$

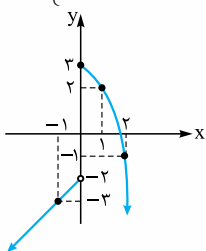
$$25 = 5c \Rightarrow c = \frac{25}{5} = 5, 1 + d = 9 \Rightarrow d = 9 - 1 = 8$$



تذکر: تابع f در متن سؤال، ممکن است به صورت

زیر نیز مطرح شود:

$$y = \begin{cases} x-2 & x < 0 \\ 3-x^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l|l} x & y \\ \hline 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}$$



$$f(0) = 3 - 0^2 = 3$$

$$f(\sqrt{2}) = 3 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$$

$$f(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3}) - 2 = -\frac{7}{3}$$

۱۴. تمام عضوهای دوم باید ۴ باشند، لذا:

$$3a - 2b = 4 \xrightarrow{(a=2)} 3(2) - 2b = 4 \Rightarrow -2b = -2 \Rightarrow b = 1$$

۱۵. خط سمت چپ: $y = 5, x \leq -2$

$$\text{خط وسط: } (A(-2, 5), B(0, 0)) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 5}{0 + 2} = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = -\frac{5}{2}(x + 2)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{5}{2}x, -2 < x < 0$$

$$\text{خط سمت راست: } (B(0, 0), C(2, 2)) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{2}(x - 0)$$

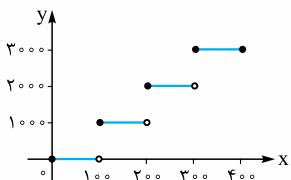
$$\Rightarrow y = \frac{2}{2}x, x \geq 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq -2 \\ -\frac{5}{2}x & -2 < x < 0 \\ \frac{2}{2}x & x \geq 0 \end{cases}$$

۱۶. نام تابع، پلکانی است. خودروی ۲۴۰م باید ۲۰۰۰ تومان بپردازد؛ چون

$x = 240$ در دامنه ردیف سوم تابع قرار دارد. ضمناً اگر یک خودرو ۳۰۰۰ تومان

پرداخت کرده باشد، شمارش بین ۳۰۰ و ۴۰۰ است (ردیف آخر تابع)



$$y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 100 \\ 10000 & 10000 \leq x < 200 \\ 20000 & 20000 \leq x < 300 \\ 30000 & 30000 \leq x \leq 400 \end{cases}$$

۱. الف درست **ب** نادرست $2^4 = 16$

۲. الف $p \wedge p$ **ب** استدلال

۳. الف **۳** **ب** **۱**

۴. ردیف (۱):

$$\text{معادله } x^2 + x + 4 = 0 \text{ دو ریشه دارد یا ۲۵ مربع کامل است.}$$

T (دلنا منفی است) F

ردیف (۲): (عدد ۱۹ زوج است) $(\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Z}) \wedge$

T F

ردیف (۳): (خط $y = 4$ افقی نیست) $(2^{-5} = -32) \Leftrightarrow$

F F

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

تذکر:

۵. الف $\sim(\sim q \vee \sim r) \Rightarrow p \equiv \sim(\sim F \vee \sim r)$

$$\Rightarrow T \equiv \sim(\underbrace{T \vee r}_T) \Rightarrow T \equiv F \Rightarrow T \equiv T$$

ب $(p \Leftrightarrow q) \wedge [\sim q \Rightarrow (p \wedge r)] \equiv (T \Leftrightarrow F) \wedge$

$$[\sim F \Rightarrow (\underbrace{T \wedge r}_r)] \equiv F \wedge [T \Rightarrow r] \equiv F \wedge r \equiv F$$

۶.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

۷. عکس نقیض گزاره داده شده، چنین می‌شود:

$(n^2 \text{ زوج است}) \Rightarrow (n \text{ زوج است})$

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

به هر عدد صحیح k که بدهید، حاصل $4k^2$ عددی زوج است، پس ثابت کردیم که n^2 هم زوج است.

۸. الف نقیض هم هستند، چون اگر عددی زوج نباشد، حتماً فرد است.

ب نقیض هم هستند؛ چون کلمه نیست به است تبدیل شده است. (فعل جمله، نقیض شده)

پ نقیض هم هستند؛ چون عبارت «چنین نیست که» به ابتدای گزاره اول اضافه شده است.

ت نقیض هم نیستند؛ چون اگر عددی مثبت نباشد، ممکن است منفی هم نباشد (می‌تواند صفر باشد).

۹. این استدلال به شکل زیر است:

$$\text{مقدمه ۱: اگر } p \text{ آنگاه } q$$

$$\text{مقدمه ۲: } q$$

$$q \therefore$$

پس مغالطه است و می‌دانیم روش مغالطه، همیشه نادرست است ولی نتیجه آن باید بررسی شود. مجموع دو عدد ۵ و ۷ می‌شود ۱۲ که زوج است و خود اعداد ۵ و ۷ فردند. ولی مجموع دو عدد ۴ و ۶ می‌شود ۱۰ که زوج است و خود اعداد ۴ و ۶ هم زوج‌اند؛ پس نتیجه این مغالطه، گاهی درست و گاهی نادرست است.

۱۰. نمی‌توانیم دو طرف تساوی $y(1-x) = x(1-z)$ را بر $(1-x)$ تقسیم کنیم؛ زیرا اگر $x = 1$ باشد، حاصل $(1-x)$ صفر است و نمی‌توانیم دو طرف