



پایه یازدهم

مادر برای بیست ریاضی ۲



دکتر کوروش اسلامی

درسنامه سؤال‌های امتحانی با پاسخ تشریحی امتحان نهایی

درسنامه‌های کاملاً کاربردی و کامل با بیش از ۲۰۰ مثال هدفمند منطبق با رویکرد جدید امتحان نهایی

بیش از ۷۰۰ نمونه سؤال امتحانی به همراه پاسخ‌های کاملاً یاددهنده

پوشش کامل تمام مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی

شامل سؤال‌های امتحانی دشوار جهت شبیه‌سازی سؤالات دشوار احتمالی در امتحان نهایی

امتحان‌های فصل به فصل، نوبت اول و دوم و نهایی

به همراه یک جلد ضمیمه رایگان، شامل خلاصه درس‌های شب امتحانی با بررسی پرتکرارترین

ایده‌های امتحان نهایی در قالب مثال‌های کاربردی



مقدمه ناشر

در مملکت ما از قدیم‌الایام تا به امروز مردم برای رشته تجربی سر و دست می‌شکوندن. چون از راه این رشته می‌تونن طبیب بشن و مطب بزنن و سری توی سرا در بیان. برای همین در مملکت ما از لحظه‌ای که بچه‌ای جیغ حیاتش رو می‌کشه بهش می‌گن: سلام دکتر جان! انگار انسان‌ها دو دسته‌اند: دکتر و هیچی! یعنی یا دکتر می‌شی یا هیچی نمی‌شی! این نوع تفکر باعث شده که در مملکت ما تعداد آدمایی که ستینگز (settings) کارخونه‌شون ریاضیه ولی می‌رن تجربی زیاد بشه.^۱ ندایی در ناخودآگاه این آدم‌ها هست که فریاد می‌زنه: «من ریاضی می‌خوام!!!!!!»

و البته این‌که توی مملکت ما خیلی چیزها افراط و تفریطیه گاهی هم چیز بدی نیست. مثلاً خدا رو شکر بچه‌های تجربی کمی افراطی ریاضی می‌خونن و این خبر خوبیه برای تجربی‌رفته‌های ریاضی‌دوست! و خلاصه این‌که در مملکت ما اگر رشته‌ات تجربیه و می‌خوای دکتر بشی باید خیلی خوب ریاضی و فیزیک بخونی (حتی گاهی بیشتر از ریاضیا!)

کتاب ماجرای بیست ریاضی ۲ طوری نوشته شده که هم ریاضی رو خیلی راحت بفهمی و هم در امتحان‌های تشریحی خیلی راحت ۲۰ بگیری. چون خداوند مؤلف این کتاب رو برای خوب فهموندن ریاضی به بندگان خلق کرده. جا داره همین‌جا به دکتر کوروش اسلامی بگم: کوروش جان ممنون که قبول کردی این کتاب رو تألیف کنی. مطمئنم که بچه‌های تجربی دعای می‌کنن. در ضمن سپاس از همه دست‌اندرکاران تولید این کتاب از جمله خانم انسیه‌سادات میرجعفری که نیروی محرکه واحد تألیف کتابای ماجراست و ویراستاران خوبمون خانم مریم نظری، آقایان صادق محمدی و پیام ابراهیم‌نژاد و صد البته دوستان خستگی‌ناپذیرمون در واحد تولید. دست همتون درد نکنه.

شاد باشید از ته دل.

۱- از حق نگذریم، شاید دلیل این‌که پزشکای ایرانی تو دنیا بهترین همینه.

مقدمه مؤلف

سلام

کتاب‌های ماجرا اولش قرار بود خیلی ماجراجویانه‌تر و جالب‌تر نوشته شوند. حتی توی جلسه‌هایی که در این باره داشتیم، بعضی‌ها می‌گفتند که متن کتاب ماجرا باید مثل یک داستان باشد، کلی پیشنهاد دیگر هم بود: کاریکاتور، جوک، انیمیشن و ... اما در عمل، کتاب‌های ماجرا این‌طور شدند که می‌بینید. علتش هم به نظرم کاملاً معلوم است؛ ماجرای هر کسی با هر کدام از درس‌هایش، یک ماجرای منحصر به فرد است. ممکن است من با درس ریاضی‌ام ماجرا داشته باشم، شما با درس فارسی‌تان و دیگری با هر درس دیگری، تازه ماجراهای هر کدام از ما با درس‌ها و معلم‌هایمان طیف خیلی وسیعی دارد: تراژدی، کمدی، اخلاق‌مدار، انگیزشی، سرگرم‌کننده و ...

خلاصه‌اش این که تصمیم گرفتیم متن کتاب ماجرا را به توضیح هر چه بهتر درس‌ها و طرح مجموعه‌ای از سؤال‌های خوب اختصاص دهیم. حالا بگذارید در مورد این کتاب برایتان بگویم:

شما که دانش‌آموز پایهٔ یازدهم رشتهٔ تجربی هستید باید بدانید که کتاب درسی‌تان نسبتاً پربار و پرکار است؛ یعنی این شماست و یک کتاب درسی پرملات!

پس بهتر است از همین الآن (که البته نمی‌دانم کی و کجای سال تحصیلی است) همهٔ حرف و حدیث‌ها را بگذارید کنار و درس ریاضی را خوب و دقیق بخوانید.

سعی‌ام این بوده که بدون زیاده‌گویی، همه‌چیز را توضیح دهم و بعدش هم تمرین‌های لازم و کافی (یعنی نه کم‌تر و نه بیشتر) برای تسلط‌تان بنویسم. تا این جایش یعنی نوشتن کتاب، وظیفهٔ من بود، اما کار شما چیست؟ یا چه‌طور از این کتاب استفاده کنید: **۱** درس‌نامه‌ها را با صبر و حوصله بخوانید. به هر مثالی که رسیدید. اول سعی کنید خودتان حل کنید و بعد چه حل کردید و چه نه، جواب مثال را بخوانید و یاد بگیرید.

۲ یک بار که درس‌نامه را خواندید، برگردید و سعی کنید مثال‌ها را خودتان حل کنید. یک کار خیلی خوب (و البته یک کم سخت!) که می‌توانید بکنید این است که در دور اول خواندن درس‌نامه، صورت مثال‌ها را در برگه‌های جداگانه‌ای بنویسید و بعد از تمام‌شدن درس‌نامه، مثال‌ها را بدون استفاده از کتاب حل کنید.

۳ حالا بروید سراغ «سؤالات امتحانی»؛ علت این که اسم این قسمت را گذاشته‌ایم سؤالات امتحانی، این است که سؤالات این قسمت طوری طراحی شده‌اند که ممکن است نمونه‌شان را در هر آزمونی ببینید.

سؤال‌های با علامت ، **سفت‌ترین سؤال** هر درس **هستن**، **آله به کمتر از ۲۰ راضی نمیشی**، **بعد از تسلط رو سؤال‌های دیگه، برو سراغ اون‌ها**.

۴ در آخر هر فصل یک آزمون منتخب از سؤال‌های امتحانی مدارس سراسر کشور آورده‌ایم، تا با حال و هوای انواع سؤال‌ها بیشتر آشنا شوید. از حل این سؤالات هم غفلت نکنید!

۵ برای حل سؤال‌ها زمانتان را برنامه‌ریزی کنید. ممکن است تعداد سؤال‌های یک فصل برای یک بار حل کردن زیاد باشد، در این صورت سؤال‌ها را به چند قسمت تقسیم کنید و در زمان‌های مشخصی آن‌ها را حل کنید.

۶ در فاصله‌های منظم و قبل از هر آزمون یا امتحان جدی، دوباره تمرین‌ها را حل کنید.

پیشنهاد می‌کنم هر ماجرای را که در مورد هر قسمت از درس‌های ریاضی مربوط به این کتاب (چه در خانه یا در کلاس) برایتان اتفاق می‌افتد بنویسید و برایمان بفرستید. ما این ماجراها را می‌خوانیم و آن‌هایی را که جالب‌تر باشند در کتاب سال آینده چاپ می‌کنیم.

تشخیص این جالب‌بودن هم با ماست. به هر حال با همین نوشتن‌هاست که چیزهایی که برای شما یا ما خاطره (ماجرا) است برای دیگران جوک می‌شود!

در پایان از خانم‌ها سمیرا هاشمی و مهشاد زاهدی که با تماس‌های خود در رفع اشکالات این کتاب در چاپ جدید ما را یاری کردند، بسیار تشکر می‌کنیم.

خندان و پیروز باشید.



۲۴	درسنامه ۶: معادله‌های گویا	۷
۲۶	درسنامه ۷: معادلات رادیکالی	۱۰
۲۸	آزمون جمع‌بندی فصل اول	۱۴
۲۹	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۱۶
۳۹	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل اول	۱۸

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درسنامه ۱: هندسه تحلیلی - یادآوری
درسنامه ۲: هندسه تحلیلی
درسنامه ۳: تابع درجه ۲ و معادله درجه دوم
درسنامه ۴: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲
درسنامه ۵: ماکسیمم یا مینیمم سهمی



فصل دوم: هندسه

درسنامه ۱: ترسیم‌های هندسی
درسنامه ۲: استدلال و نسبت
درسنامه ۳: قضیه تالس
درسنامه ۴: تشابه مثلث‌ها

۶۳	درسنامه ۵: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه	۴۴
۶۶	آزمون جمع‌بندی فصل دوم	۵۰
۶۸	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۵۵
۷۶	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل دوم	۵۹



فصل سوم: تابع

درسنامه ۱: آشنایی با برخی از انواع توابع
درسنامه ۲: تابع جزء صحیح
درسنامه ۳: وارون تابع و تابع یک‌به‌یک
درسنامه ۴: به دست آوردن ضابطه تابع وارون

۹۵	درسنامه ۵: اعمال روی تابع	۷۹
۱۰۰	آزمون جمع‌بندی فصل سوم	۸۵
۱۰۱	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۸۹
۱۱۵	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل سوم	۹۲



فصل چهارم: مثلثات

درسنامه ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
درسنامه ۲: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
درسنامه ۳: توابع مثلثاتی

۱۴۵	آزمون جمع‌بندی فصل چهارم	۱۱۸
۱۴۶	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۱۲۶
۱۵۵	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل چهارم	۱۳۷



فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درسنامه ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
درسنامه ۲: تابع لگاریتمی
درسنامه ۳: ویژگی‌ها و قوانین لگاریتم
درسنامه ۴: معادله‌های لگاریتمی

۱۵۷	درسنامه ۵: نمودارها و کاربردهای توابع لگاریتمی و نمایی	۱۷۲
۱۶۲	آزمون جمع‌بندی فصل پنجم	۱۷۷
۱۶۶	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۱۷۸
۱۷۰	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل پنجم	۱۸۷



فصل ششم: حد و پیوستگی

درسنامه ۱: فرایندهای حدی
درسنامه ۲: محاسبه حد تابع
درسنامه ۳: پیوستگی

۲۱۲	آزمون جمع‌بندی فصل ششم	۱۹۱
۲۱۳	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۱۹۵
۲۲۶	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل ششم	۲۰۳



فصل هفتم: آمار و احتمال

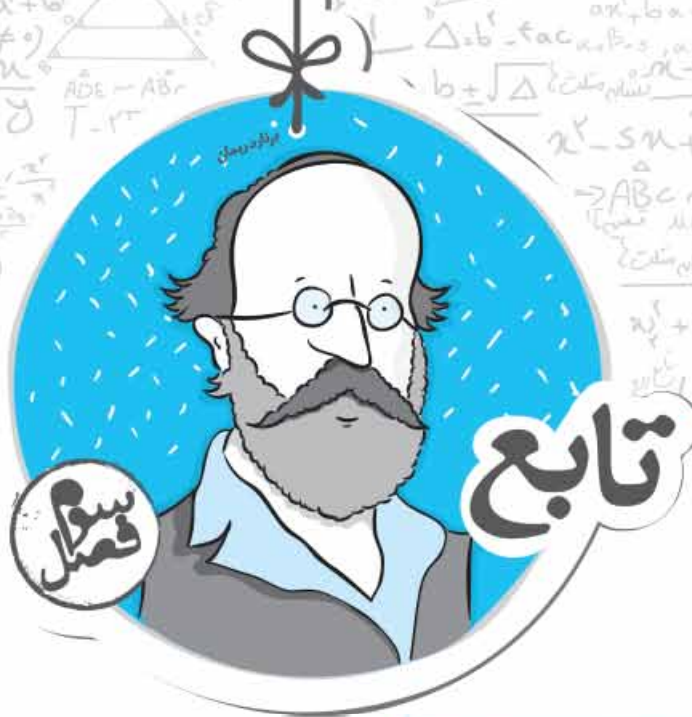
درسنامه ۱: احتمال شرطی
درسنامه ۲: پیشامدهای مستقل
درسنامه ۳: آمار توصیفی

۲۴۰	آزمون جمع‌بندی فصل هفتم	۲۲۸
۲۴۱	پاسخ سؤال‌های امتحانی	۲۳۳
۲۴۷	پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل هفتم	۲۳۵

شماره صفحه امتحان

۲۵۱	۲۴۹
۲۵۵	۲۵۳
۲۵۹	۲۵۷
۲۶۴	۲۶۲
۲۶۹	۲۶۷
۲۷۳	۲۷۱

امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول
امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
امتحان شماره (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم - نهایی خرداد ۱۴۰۲
امتحان شماره (۶): نمونه امتحان نیم‌سال دوم - نهایی خرداد ۱۴۰۳



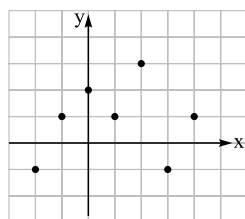
۱ آشنایی با برخی از انواع تابع

سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم.

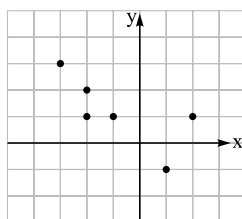
دیدیم: تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی مؤلفه‌های اول یکسان نداشته باشند. به بیان دیگر تابع، رابطه‌ای بین X و Y است که در آن به ازای هر مقدار X دقیقاً یک مقدار برای Y به دست آید.

اگر نمودار یک تابع را در دستگاه مختصات رسم کنیم هر خط موازی محور Y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

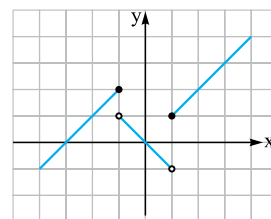
مثال کدامیک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟



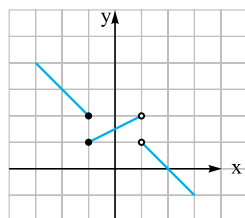
(الف)



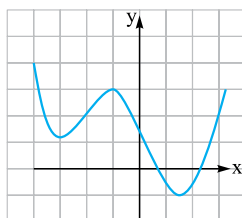
(ب)



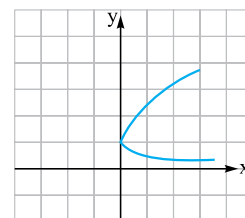
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

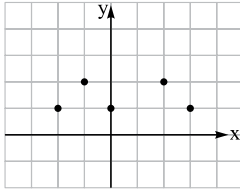
پاسخ طبق توضیحات بالا و تابع اند و بقیه تابع نیستند.

دامنه

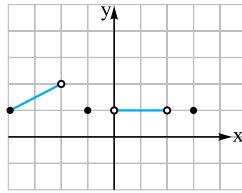
دامنه تابع مجموعه مقادیر مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب یا مجموعه X های تابع است. روی نمودار تابع نیز، مجموعه X های نقاط نمودار (یا همان تصویر نمودار روی محور X ها) نشان‌دهنده دامنه تابع است.

مثلاً در تابع $f = \{(0, 2), (1, 3), (5, -3)\}$ دامنه برابر است با $D_f = \{0, 1, 5\}$.

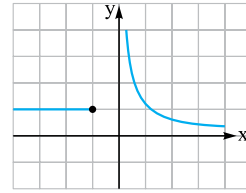
مثال: دامنه هر کدام از تابع های زیر را تعیین کنید.



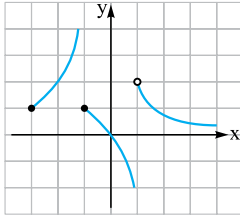
(الف)



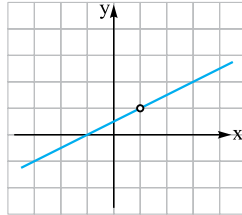
(ب)



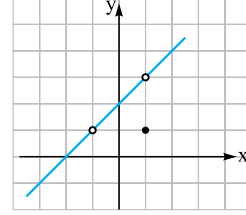
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

پاسخ: دامنه تابع شکل (الف) برابر مجموعه نقاط $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ است. دقت کنید که دامنه (و نمودار) این تابع از نقاط مجزا تشکیل شده است. در شکل (ب) دامنه برابر است با $\{-2, -1\} \cup \{0\} \cup (1, 2) \cup \{3\}$. در شکل (پ) دامنه برابر است با $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$. دقت کنید که وقتی نمودار تابع تا انتهای محور ادامه دارد منظورمان این است که دامنه تا $+\infty$ یا $-\infty$ می رود. در (ت) دامنه برابر است با $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. دقت کنید که نقطه $x = -1$ مقدار مشخصی ($y = 1$) دارد و متعلق به دامنه تابع است. دامنه شکل (ث) برابر است با $\mathbb{R} - \{1\}$. و در آخر دامنه شکل (ج) برابر است با $\mathbb{R} - \{-1\}$. دقت کنید که با این که در $x = 1$ یک نقطه توخالی داریم ولی چون تابع در $x = 1$ تعریف شده است (و y اش برابر ۱ است) پس $x = 1$ جزء دامنه تابع است.

ضابطه تابع

رابطه ای که y را به x مرتبط می کند یا از آن مقدار y را بر حسب x به دست می آوریم، ضابطه تابع است. هر تابع با ضابطه و دامنه اش مشخص می شود. یعنی برای مشخص بودن یک تابع باید همیشه ضابطه و دامنه اش را داشته باشیم. اگر در تابعی فقط ضابطه را داشته باشیم بنا به قرارداد دامنه را بزرگ ترین مجموعه ممکن برای تعریف شده بودن تابع در نظر می گیریم.

مثال: تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x$

دامنه $= \{-1, 0, 1, 2\}$

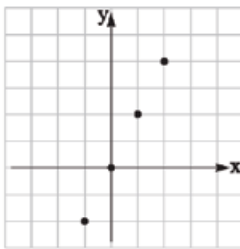
ب) $f(x) = 2x$

دامنه $= (-1, 2]$

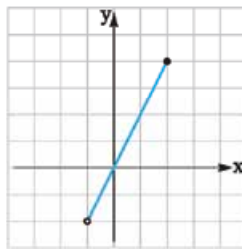
پ) $f(x) = 2x$

دامنه $= \mathbb{R}$

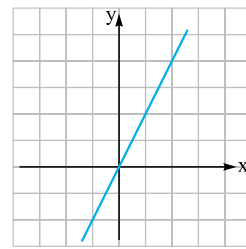
پاسخ: نمودار تابع تمام یا قسمتی از خط $y = 2x$ است. فقط موقع رسم نمودار باید به دامنه توجه کنیم و نمودار را با توجه به دامنه رسم کنیم:



(الف)



(ب)



(پ)

ضابطه تابع خطی

برای نوشتن ضابطه یک تابع خطی، اول شیب خط را با استفاده از مختصات دو نقطه از آن از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ پیدا می کنیم و بعد معادله خط را با استفاده از رابطه $y = mx + h$ یا $(y - y_1) = m(x - x_1)$ می نویسیم. در این حالت هم باید دامنه تابع را مشخص کنیم.

توابع گویا

به هر تابعی که ضابطه اش به شکل $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ نوشته می شود که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله ای باشند می گوییم یک تابع گویا. در این تعریف دقت کنید:

۱) $q(x)$ باید مخالف صفر باشد (چرا؟)

۲) $q(x)$ می تواند برابر یک عدد ثابت (و در حالت خاص ۱) باشد؛ یعنی به عنوان مثال سه تابع $f(x) = 3$ و $f(x) = 3x$ و $f(x) = \frac{3}{x}$ هر سه گویا هستند.

مثال: کدام یک از ضابطه‌های زیر متعلق به یک تابع گویا است؟

الف) $f(x) = \sqrt{2}$

ب) $f(x) = \sqrt{3x}$

پ) $f(x) = \sqrt{3x}$

ت) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

ث) $f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{2}-1}$

ج) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2x+1}$

چ) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + \frac{1}{2}x - 1}}{2x^2 - x + \sqrt{3}}$

ح) $f(x) = \frac{2x - \frac{1}{x+1}}{3x + \frac{1}{x}}$

خ) $f(x) = 2|x| + 1$

پاسخ: در هر کدام که بتوانیم تابع را به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ بنویسیم که در $p(x)$ و $q(x)$ توان x اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، تابع گویا است. با این حساب **الف)**، **ب)**، **ج)**، **د)**، **ه)** و **و)** گویا هستند ولی **ث)** (چون توان x برابر $\frac{1}{2}$ است) و **چ)** (توان x در صورت برابر $\frac{1}{3}$ است) و **خ)** (داخل قدرمطلق است) گویا نیستند.

دامنه توابع گویا

دیدیم ضابطه توابع گویا به صورت کسری است، پس تابع در هر نقطه‌ای که مخرج کسر برابر صفر شود تعریف نشده است. یعنی برای پیدا کردن دامنه یک تابع گویا مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم و بعد دامنه را به صورت {ریشه‌های مخرج} - $\mathbb{R}$ می‌نویسیم. مثلاً برای پیدا کردن دامنه تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ عبارت مخرج یعنی $x-2=0 \Rightarrow x=2$ پس دامنه برابر است با $\mathbb{R} - \{2\}$.

توجه: دقت کنید که قبل از پیدا کردن دامنه تابع، نباید ضابطه تابع را ساده کنیم. مثلاً در تابع $f(x) = \frac{2x-6}{x-3}$ دامنه برابر است با $\mathbb{R} - \{3\}$. چون ریشه مخرج $x=3$ است و اگر تابع را به صورت $f(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2$ ساده کنیم، دامنه این تابع جدید می‌شود $\mathbb{R}$ که درست نیست.

مثال: دامنه توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

ب) $f(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)(x+2)}$

پ) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

ت) $f(x) = \frac{2x-6}{x^2-7x+12}$

ث) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+3}$

ج) $f(x) = \frac{2x^3-x}{x^3-x^2-2x}$

پاسخ: در هر کدام مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

الف) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ب) $f(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)(x+2)}$

$(x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1, -2\}$

پ) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

$x^2-9=0 \Rightarrow (x-3)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3, -3\}$

ت) $f(x) = \frac{2x-6}{x^2-7x+12}$

$x^2-7x+12=0 \Rightarrow (x-3)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3, 4\}$

ث) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+3}$

$x^2+2x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow$ ریشه ندارد $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

ج) $f(x) = \frac{2x^3-x}{x^3-x^2-2x}$

$x^3-x^2-2x=0 \Rightarrow x(x^2-x-2)=0 \Rightarrow x(x-2)(x+1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 2, -1\}$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g با هم مساوی اند اگر: **۱)** دامنه‌هایشان با هم برابر باشد. **۲)** به ازای x های یکسان، y های یکسان داشته باشند که معمولاً شرط دوم به این منجر می‌شود که ضابطه دو تابع به ازای اعضای دامنه با هم برابر باشند. نمودار دو تابع مساوی دقیقاً روی هم منطبق می‌شوند.

مثال تعیین کنید کدام جفت از تابع‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

الف) $f(x) = 3x$, $g(x) = \frac{3x^2}{x}$

ب) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$, $g(x) = x$

پ) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, $g(x) = \frac{x}{|x|}$

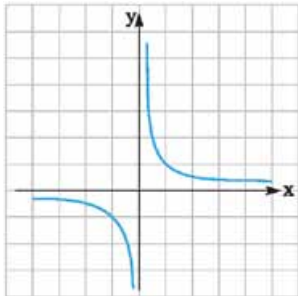
پس دو تابع مساوی نیستند $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

پاسخ

دو تابع مساوی‌اند $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x$, $g(x) = x$

دو تابع مساوی‌اند $\Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
 $g(x) = \frac{x}{|x|} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

رسم توابع گویا

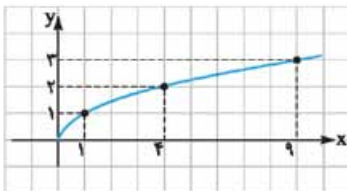


نمودار تابع‌های گویای ساده را می‌توانیم با استفاده از نقطه‌یابی رسم کنیم. بیایید با هم نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را ببینیم:

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ نه محور عرض‌ها را قطع می‌کند و نه محور طول‌ها را. دامنهٔ تابع $\mathbb{R} - \{0\}$ است. (برد این تابع هم $\mathbb{R} - \{0\}$ است)

در تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در محدودهٔ $x > 0$ با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد و همین‌طور در محدودهٔ $x < 0$ هم با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد.

رسم توابع رادیکالی



نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را می‌توانیم با نقطه‌یابی رسم کنیم.

دامنه و برد تابع $f(x) = \sqrt{x}$ برابر بازهٔ $[0, +\infty)$ است.

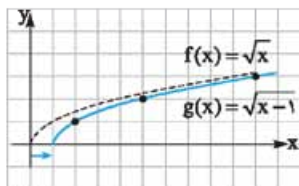
نمودار تابع‌های به شکل $f(x) = \sqrt{x-a} + b$ را می‌توانیم با انتقال نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ (که در سال قبل یاد گرفتیم) رسم کنیم.

مثال نمودار تابع‌های زیر را با استفاده از انتقال نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ رسم کنید و سپس دامنه و برد هر کدام را بنویسید.

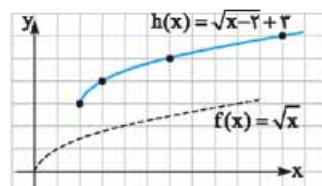
الف) $g(x) = \sqrt{x-1}$

ب) $h(x) = \sqrt{x-2} + 3$

برای رسم $g(x)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد در راستای محور x انتقال دهیم و برای رسم $h(x)$ باید نمودار تابع $f(x)$ را ۲ واحد در راستای محور x و ۳ واحد در راستای محور y انتقال دهیم.



دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{x-1}$ بازهٔ $[1, +\infty)$ و برد آن بازهٔ $[0, +\infty)$ است.



دامنهٔ تابع $h(x) = \sqrt{x-2} + 3$ بازهٔ $[2, +\infty)$ و برد آن بازهٔ $[3, +\infty)$ است.

دامنه توابع رادیکالی (با فرجه زوج) را می‌توانیم به طور مستقیم و بدون رسم نمودار تابع هم پیدا کنیم. برای این کار کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم. به عبارت دیگر:

برای پیدا کردن دامنه تابع $y = \sqrt{g(x)}$ باید مجموعه جواب نامعادله $g(x) \geq 0$ را پیدا کنیم.

مثال دامنه تابع‌های زیر را پیدا کنید:

الف) $f(x) = \sqrt{3x-5}$

ب) $g(x) = \sqrt{\frac{1}{7-2x}}$

پاسخ عبارت‌های زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

الف) $3x-5 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow D_f = [\frac{5}{3}, +\infty)$

ب) $\frac{1}{7-2x} \geq 0 \Rightarrow 7-2x > 0 \Rightarrow 2x < 7 \Rightarrow x < \frac{7}{2} \Rightarrow D_g = (-\infty, \frac{7}{2})$

حواسمان هست که در (ب) عبارت مخرج نباید صفر باشد.

بعضی وقت‌ها لازم است برای تعیین دامنه توابع رادیکالی و حل نامعادله نوشته‌شده از روش تعیین علامت استفاده کنیم:

مثال دامنه تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{2x^2-32}$

ب) $g(x) = \sqrt{\frac{5}{18-2x^2}}$

الف) $f(x) = \sqrt{2x^2-32}$

$2x^2-32 \geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} 2x^2=32 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=-4, x=4$

رسم جدول $\Rightarrow$

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
f		+	-	+

 $\Rightarrow D_f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

ب) $g(x) = \sqrt{\frac{5}{18-2x^2}}$

$18-2x^2 > 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} -2x^2=-18 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=-3, x=3$

رسم جدول $\Rightarrow$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
f		-	+	-

 $\Rightarrow D_g = (-3, 3)$

البته نامعادله‌های بالا را می‌توانستیم با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق هم حل کنیم.

$2x^2-32 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq 32 \Rightarrow x^2 \geq 16 \xrightarrow{\text{جذر}} |x| \geq 4 \Rightarrow x \leq -4 \text{ یا } x \geq 4$ به این شکل:

$18-2x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2 < 18 \Rightarrow x^2 < 9 \xrightarrow{\text{جذر}} |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را پر کنید.

۱- دامنه یک تابع گویا برابر است با

۲- دو تابع f و g وقتی با هم مساوی‌اند که ... (۱) ... و ... (۲) ...

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

درست نادرست



۳- دو تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$ با هم مساوی‌اند.

۴- دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ و $g(x) = |x|$ با هم مساوی‌اند.

۵- یک بازیکن فوتبال ده پناستی زده و ۶۰ درصد آن‌ها را گل کرده است. اگر این بازیکن بتواند تمام پناستی‌هایی که از این به بعد می‌زند را گل کند:

الف) ضابطه تابعی را که نشان‌دهنده درصد پناستی‌های گل‌شده بعد از زدن x پناستی دیگر است، بنویسید.

ب) او حداقل چند پناستی دیگر باید بزند تا درصد گل‌شدن پناستی‌هایش بالاتر از ۹۵ درصد باشد؟

کدام یک از ضابطه‌های زیر متعلق به یک تابع گویا است؟

$$۶-f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x - \sqrt{2}}$$

$$۷-f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$$

$$۸-f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x^2 - \frac{1}{x}}$$

$$۹-f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x+1}$$

$$۱۰-f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}$$

$$۱۱-f(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)^2$$

دامنه تابع‌های زیر را پیدا کنید.

$$۱۲-f(x) = \frac{2x+1}{2x^2+x-1}$$

$$۱۳-f(x) = \frac{x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+3}$$

$$۱۴-f(x) = \frac{1}{x^3-x}$$

$$۱۵-f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1}-1}$$

$$۱۶-f(x) = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}}$$

$$۱۷-f(x) = \frac{x}{x^6 - 5x^2 + 4}$$

۱۸- ضابطه تابع گویایی را بنویسید که دامنه‌اش مجموعه‌های زیر باشد.

الف) $\mathbb{R}$

ب) $\mathbb{R} - \{-1\}$

پ) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

ت) $\mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌های داده شده رسم کنید.

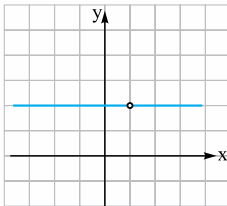
$$۱۹-f(x) = \frac{1}{|x|} \quad [-3, 3]$$

$$۲۰-f(x) = \frac{1}{x-3} \quad [-1, 7]$$

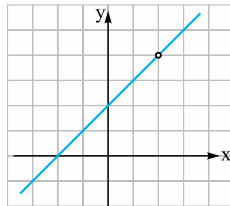
$$۲۱-f(x) = -\frac{4}{x} \quad [-8, 8]$$

$$۲۲-f(x) = \frac{2}{x} \quad [-4, 4]$$

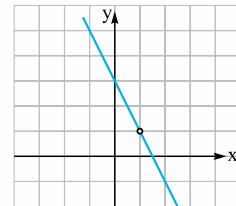
۲۳- ضابطه تابع گویایی را بنویسید که نمودارش در زیر داده شده است.



(الف)



(ب)



(پ)

دامنه تابع‌های زیر را پیدا کنید.

$$۲۴-f(x) = \sqrt{x-3} + 3$$

$$۲۵-f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

$$۲۶-f(x) = \sqrt{4-x} + 1$$

$$۲۷-f(x) = \sqrt{-5-x}$$

$$۲۸-f(x) = \sqrt{x^2-9}$$

$$۲۹-f(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$$

$$۳۰-f(x) = \sqrt{-x^2-x+6}$$

$$۳۱-f(x) = \sqrt{x^2-2x}$$

$$۳۲-f(x) = \sqrt{x^2-x}$$

$$۳۳-f(x) = \sqrt{4x-x^2}$$

$$۳۴-f(x) = \sqrt{x^2-x^2}$$

$$۳۵-f(x) = \sqrt{x^4-x^2}$$

دامنه تابع‌های زیر را پیدا کنید.

$$۳۶-f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

$$۳۷-f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$$

۳۸- اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-x^2+ax+b}$ بازه $[-3, 2]$ باشد. مقدار a و b را پیدا کنید.

۳۹- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ برابر بازه $[2, +\infty)$ و $f(3) = 2$ است. مقدار a و b را پیدا کنید.

نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

$$۴۰-f(x) = \sqrt{x+2} + 1$$

$$۴۱-f(x) = \sqrt{x-3} - 2$$

۴۲- نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x-3}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

کدام یک از جفت تابع‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

$43-f(x) = \frac{x^6-1}{x^2-1}, g(x) = x^2+1$

$44-f(x) = \frac{x^6-1}{x^2+1}, g(x) = x^2-1$

$45-f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}, g(x) = \frac{x^2-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$

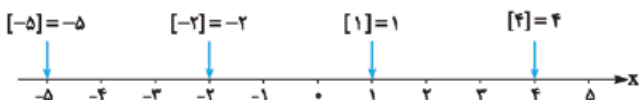
۴۶- اگر دو تابع مقابل با هم برابر باشند، مقادیر a و b را بیابید.

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq a \\ b-1 & x = a \end{cases}$ و $g(x) = x+2$

تابع جزء صحیح

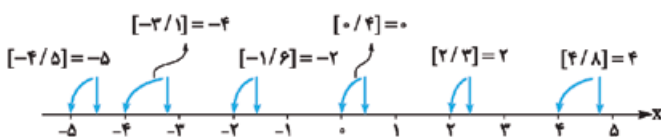
جزء صحیح هر عدد مثل x که آن را با $[x]$ نشان می‌دهیم برابر است با بزرگ‌ترین عدد صحیحی که کوچک‌تر یا مساوی آن عدد باشد. با این تعریف

نتیجه می‌گیریم:



اگر عددی صحیح باشد، جزء صحیحش برابر خودش است.

اگر عددی صحیح نباشد، جزء صحیحش برابر اولین عدد صحیح سمت چپش روی محور اعداد است:



اگر k عددی صحیح باشد داریم $[x+k] = [x] + k$.

مثال مقدار جزء صحیح‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $[-0.4]$

ب) $[0.001]$

پ) $[\frac{6}{5}]$

ت) $[-\frac{17}{4}]$

ث) $[\pi]$

ج) $[\tan 60^\circ]$

چ) $[8 \cos 45^\circ]$

ح) $[-\frac{\pi}{2}]$

خ) $[\sin 30^\circ]$

د) $[-238/26]$

ذ) $[3\frac{4}{7}]$

ر) $[-(7\frac{11}{15})]$

پاسخ: طبق آن چه دیدید، داریم:

الف) -۱

پ) ۰

ب) ۱ (چون $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$)

ت) -۵ (چون $-\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4}$)

ث) ۳ (چون $\pi \approx 3.14$)

چ) ۱ (چون $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$)

خ) ۵ (چون $8 \cos 45^\circ = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 5.6$)

ح) -۲ (چون $-\frac{\pi}{2} \approx -1.57$)

ذ) ۰ (چون $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$)

ر) -۲۳۹

د) ۳ (چون $3\frac{4}{7} = 3 + \frac{4}{7}$)

ر) -۸ (چون $-(7\frac{11}{15}) = -7 - \frac{11}{15}$)

تابع جزء صحیح

به تابع $f(x) = [x]$ می‌گوییم تابع جزء صحیح، دامنه این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

تابع جزء صحیح یک تابع پله‌ای است، یعنی می‌توان دامنه‌اش را به صورت بازه‌های مجزایی نوشت که به اعداد متعلق به هر کدام از این بازه‌ها فقط یک عدد (در برد تابع) نسبت داده می‌شود. مثلاً در مورد تابع جزء صحیح یعنی $f(x) = [x]$ در بازه $[-3, 3]$ می‌توانیم بنویسیم:

$-3 \leq x < -2 \Rightarrow f(x) = [x] = -3$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = [x] = -2$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = [x] = -1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = [x] = 0$

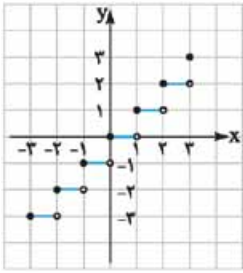
$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = [x] = 1$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = [x] = 2$

$x = 3 \Rightarrow f(x) = [x] = 3$

رسم تابع جزء صحیح

حالا برای رسم تابع نقاط ابتدایی و انتهایی هر کدام از بازه‌ها را رسم و با یک پاره‌خط افقی به هم وصل می‌کنیم. دقت کنید نقاطی را که متعلق به x های دارای مساوی هستند، توپر و نقاطی را که متعلق به x های بدون علامت مساوی هستند توخالی رسم می‌کنیم:



از همین روش می‌توانیم برای رسم نمودار توابع ساده شامل $[x]$ استفاده کنیم.

مثال: نمودار تابع‌های زیر را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

الف) $f(x) = [x] + 1$

ب) $f(x) = x[x] - 1$

پاسخ: بازه $[-2, 2]$ را به بازه‌های $-2 \leq x < -1$ و $-1 \leq x < 0$ و $0 \leq x < 1$ و $1 \leq x < 2$ و نقطه $x = 2$ تقسیم می‌کنیم و در هر کدام ابتدا ضابطه تابع را با قراردادن مقدار جزء صحیح ساده می‌کنیم و بعد مختصات دو نقطه ابتدا و انتهای هر بازه را مشخص می‌کنیم.

الف $f(x) = [x] + 1$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = -2 + 1 = -1$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = -1 + 1 = 0$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = 0 + 1 = 1$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = 1 + 1 = 2$

$x = 2 \Rightarrow f(x) = [x] + 1 = 2 + 1 = 3$

توخرالی

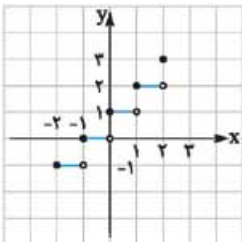
-2	-1
-1	-1

-1	0
0	0

0	1
1	1

1	2
2	2

2	3
---	---



حالا نقاط را مشخص و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

ب $f(x) = x[x] - 1$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = -2x - 1$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = -x - 1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = -1$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = x - 1$

$x = 2 \Rightarrow f(x) = x[x] - 1 = 3$

توخرالی

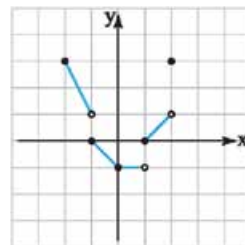
-2	-1
3	1

-1	0
0	-1

0	1
-1	-1

1	2
0	1

2	3
---	---



مثال نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = [2x] \quad [-1, 1]$$

پاسخ اول حدود تغییرات $2x$ را با توجه به بازه داده شده پیدا می‌کنیم:

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 2$$

حالا بازه $-2 \leq 2x \leq 2$ را به بازه‌هایی به طول ۱ واحد تقسیم می‌کنیم. در هر قسمت مقدار جزء صحیح و اول و آخر بازه (برحسب x) و نقاط اول و آخر بازه را تعیین می‌کنیم:

$$-2 \leq 2x < -1 \Rightarrow y = -2 \quad \text{و} \quad -1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{array} \right|$$

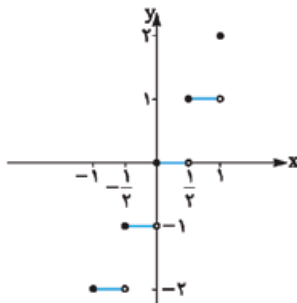
$$-1 \leq 2x < 0 \Rightarrow y = -1 \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right|$$

$$0 \leq 2x < 1 \Rightarrow y = 0 \quad \text{و} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right|$$

$$1 \leq 2x < 2 \Rightarrow y = 1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right|$$

$$2x = 2 \Rightarrow y = 2 \quad \text{و} \quad x = 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right|$$

حالا نمودار را با رسم پاره‌خط‌های هر قسمت رسم می‌کنیم. (نقاط اول بازه که مساوی دارند توپر و نقاط آخر بازه که مساوی ندارند تو خالی رسم می‌شوند).



ویژگی‌های تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح ویژگی‌های زیادی دارد. بهتر است چندتایشان را که مهم است بدانید:

۱ برای هر عدد حقیقی x داریم $[x] \leq x < [x] + 1$

این ویژگی از تعریف مستقیم جزء صحیح به دست می‌آید:

مثلاً: $2 \leq 2/5 < 3$ یا $[2/5] \leq 2/5 < [2/5] + 1 \Rightarrow 2 \leq 2/5 < 3$

۲ هر عدد صحیح را که به صورت جمع یا تفریق داخل جزء صحیح باشد می‌توانیم بیرون بیاوریم؛ یعنی اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد داریم $[x+k] = [x] + k$.

مثلاً $[x+1] = [x] + 1$ یا $[x-2] = [x] - 2$.

۳ همیشه تفاضل هر عدد و جزء صحیحش، عددی بین صفر و ۱ است؛ یعنی $0 \leq x - [x] < 1$.

مثلاً: $0 < 0/5 < 1$ یا $2/5 - [2/5] = 2/5 - 0 = 0/5 \Rightarrow 0 < 0/5 < 1$ یا $-3/4 - [-3/4] = -3/4 - (-4) = 0/6 \Rightarrow 0 < 0/6 < 1$.

۴ حاصل $[x] + [-x]$ (یعنی جزء صحیح هر عدد به علاوه جزء صحیح قرینه آن عدد) یا برابر صفر است یا برابر -1 ، اگر x صحیح باشد. حاصل برابر

صفر است و اگر x صحیح نباشد، حاصل برابر -1 است؛ یعنی: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0$ یا $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1$.

از این ویژگی می‌توانیم برای پیدا کردن جواب معادله‌هایی به صورت $[x] + [-x] = a$ استفاده کنیم. مثلاً:

همه اعداد صحیح = مجموعه جواب یا $[x] + [-x] = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

همه اعداد غیر صحیح = مجموعه جواب یا $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ یا $[x] + [-x] = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

جواب ندارد $[x] + [-x] = 1 \Rightarrow$

حل معادله شامل جزء صحیح

حل معادله‌های شامل جزء صحیح راه‌های بسیار متنوعی دارد، اما اصلی‌ترین راه حل این است که با استفاده از ویژگی‌های جزء صحیح معادله را طوری ساده کنیم که مقدار جزء صحیح به دست بیاید. جواب معادله در صورتی که مقدار جزء صحیح یک عدد صحیح باشد با استفاده از ویژگی زیر به دست می‌آید:

$$[a] = k \Rightarrow k \leq a < k+1$$

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $[2x-1] = 5$

ب) $[2-3x] = -2$

پاسخ: $[2x-1] = 5 \Rightarrow [2x] - 1 = 5 \Rightarrow [2x] = 6 \Rightarrow 6 \leq 2x < 7 \Rightarrow 3 \leq x < \frac{7}{2}$

ب: $[2-3x] = -2 \Rightarrow 2 + [-3x] = -2 \Rightarrow [-3x] = -4 \Rightarrow -4 \leq -3x < -3 \Rightarrow 1 < x \leq \frac{4}{3}$

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x + [2x] = -9$

ب) $x - [3x] = 7$

پاسخ: در معادله $x + [2x] = 9$ مقدار $[2x]$ و -9 هر دو صحیح‌اند؛ پس x هم باید صحیح باشد پس $2x$ هم صحیح است و در نتیجه:

$$x + 2x = -9 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -3$$

ب: در معادله $x - [3x] = 7$ مقدار $[3x]$ و 7 صحیح‌اند؛ پس x هم صحیح است و در نتیجه:

$$x - 3x = 7 \Rightarrow -2x = 7 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

غیرقابل قبول

مثال: معادله $2[x]^2 - 9[x-1] - 5 = 0$ را حل کنید.

پاسخ: می‌دانیم $[x-1] = [x] - 1$ ، پس معادله به شکل $2[x]^2 - 9[x] + 9 - 5 = 0$ یا $2[x]^2 - 9[x] + 4 = 0$ درمی‌آید. حالا اگر

فرض کنیم $[x] = t$ داریم:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \xrightarrow{\text{فرمول}} t = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{16}{4} = 4 \\ t = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$[x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$

$$[x] = \frac{1}{2}$$

غیرقابل قبول

پس می‌نویسیم:

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را پر کنید.

۴۷- جزء صحیح هر عدد حقیقی برابر است با عدد صحیحی که یا مساوی آن عدد باشد.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

درست نادرست



۴۸- اگر k یک عدد صحیح باشد، $[x+k] = [x] + k$.

۴۹- اگر k یک عدد صحیح باشد، $[k-x] = k - [x]$.

۵۰- اگر k یک عدد صحیح باشد، $[kx] = k[x]$.

۵۱- برد تابع $f(x) = [x]$ کدام است؟

(۴) اعداد صحیح

(۳) اعداد طبیعی

(۲) اعداد گویا

(۱) اعداد حقیقی

۵۲- اعضای یک تیم والیبال قرار است به یک مسافرت تفریحی بروند. مربی تیم برای آن که بتواند وضعیت جسمی بازیکنان را کنترل کند با آن‌ها قرار می‌گذارد که بعد از برگشتن به ازای هر کیلو اضافه‌وزن جریمه بدهند. جدول جریمه‌ها به صورت زیر است:

اضافه‌وزن به کیلوگرم	۱ تا	از ۱ تا ۲	از ۲ تا ۳	از ۳ تا ۵	از ۵ به بالا
جریمه به تومان	۱۰ هزار	۳۰ هزار	۶۰ هزار	۱۰۰ هزار	۵۰۰ هزار

الف) ضابطه تابع جریمه را بر حسب x کیلوگرم اضافه‌وزن بنویسید.

ب) نمودار تابع جریمه را رسم کنید.

۵۳- مقدار جزء صحیح‌های زیر را تعیین کنید.

- الف) $[0/99]$ ب) $[-0/99]$ پ) $[\sqrt{10}]$ ت) $[\sqrt[3]{100}]$
 ث) $[(17/2)^2]$ ج) $[(10/1)^3]$ چ) $[8/9 \times 9/1]$ ح) $[2/01 \times 2/02]$

۵۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{3}{[\frac{x}{7}] - 1}$ را تعیین کنید.

۵۵- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

- الف) $[\frac{6}{1}] + [\frac{6}{2}] + [\frac{6}{3}] + \dots + [\frac{6}{600}]$ ب) $[10^{-4}] + [10^{-3}] + [10^{-2}] + \dots + [10^4]$
 پ) $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{20}]$ ت) $[\sqrt[3]{-8}] + [\sqrt[3]{-7}] + \dots + [\sqrt[3]{0}] + [\sqrt[3]{1}] + \dots + [\sqrt[3]{8}]$

۵۶- اگر $[x] = [y]$ باشد محدوده تغییرات $|x - y|$ را تعیین کنید.

۵۷- اگر $[x]^2 - [x] = 0$ باشد، حدود x را پیدا کنید.

۵۸- معادله‌های زیر را حل کنید.

- الف) $2[x - 3] - 6 = 0$ ب) $x + [2x - 1] = -4$
 پ) $2x + [x] = 4$ ت) $[x]^2 - 3[x - 1] - 3 = 0$
 ث) $[x - 1]^2 - 4 = 0$ ج) $[x + 2]^2 - 7[x] - 4 = 0$

نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌های داده شده رسم کنید.

- ۵۹- $f(x) = [x - 2]$ ، $[-2, 2]$ ۶۰- $f(x) = x - [x]$ ، $[-2, 3]$ ۶۱- $f(x) = x + [x]$ ، $[-2, 2]$

۶۲- نمودار تابع $y = x[-2x] + 1$ را در بازه $(-2, 0)$ رسم کنید.

۳ وارون تابع و تابع یک به یک

در سال گذشته دیدیم که یکی از روش‌های نمایش تابع، استفاده از زوج مرتب است. حالا اگر تابعی مانند f با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داشته باشیم، جای مؤلفه‌های اول و دوم هر کدام از زوج مرتب‌ها را جابه‌جا کنیم، رابطه‌ای به دست می‌آید که به آن می‌گوییم وارون تابع f و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

مثال: وارون تابع‌های زیر را بنویسید و بگویید وارون کدام یک از این تابع‌ها، خودش هم تابع است؟

- الف) $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, -1), (4, 1)\}$ ب) $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}$
 پ) $h = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$

پاسخ: کافی است جای مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب را عوض کنیم:

الف) $f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (-1, 3), (1, 4)\}$

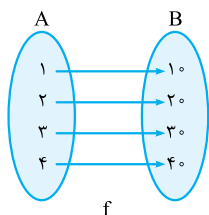
ب) $g^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

پ) $h^{-1} = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

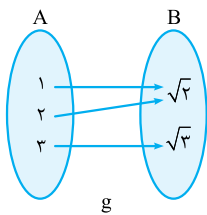
از بین سه رابطه نوشته شده فقط f^{-1} تابع است ولی g^{-1} و h^{-1} تابع نیستند چون دارای زوج مرتب‌هایی هستند که مؤلفه‌های اول یکسان و مؤلفه‌های دوم متفاوت دارند.

۴ وارون نمودار پیکانی

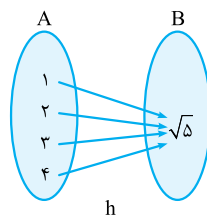
در نمودار پیکانی برای نوشتن رابطه وارون کافی است جهت پیکان را عوض کنیم یا جای مجموعه اول و دوم را عوض کنیم:



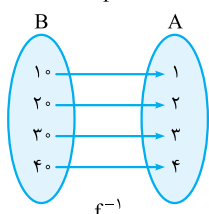
f



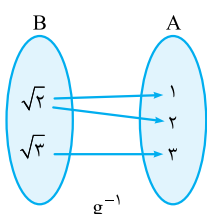
g



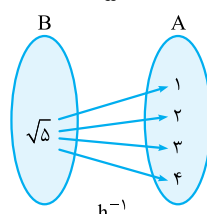
h



f^{-1}



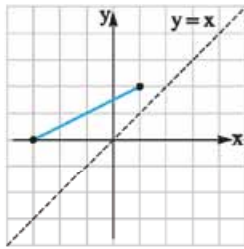
g^{-1}



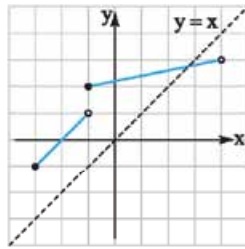
h^{-1}

همان طور که می بینید در سه شکل بالا f و f^{-1} هر دو تابع اند اما g^{-1} و h^{-1} تابع نیستند. برای رسم نمودار وارون یک تابع باید جای x و y های نقاط روی نمودار را عوض کنیم؛ یعنی قرینه نمودار را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم مختصات رسم کنیم.

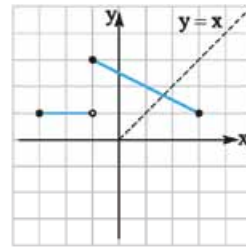
مثال: نمودار وارون تابع های زیر را رسم کنید و بگویید وارون کدام ها تابع است؟



(الف)

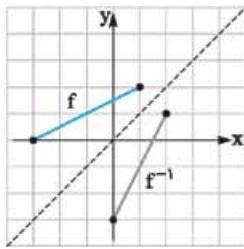


(ب)

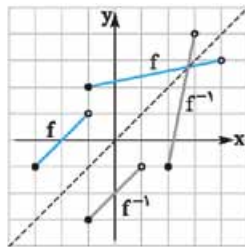


(پ)

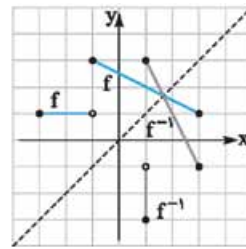
پاسخ: کافی است قرینه نمودارها را نسبت به خط نیمساز ناحیه اول و سوم $(y=x)$ رسم کنیم:



الف



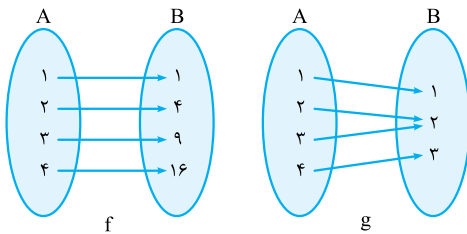
ب



پ

از بین نمودارهای بالا وارون تابع f در شکل های الف و ب تابع است اما وارون تابع f در شکل پ، تابع نیست.

تابع یک به یک



دیدیم که بعضی از تابع ها وارونشان هم تابع است و بعضی نه. به تابع هایی که وارونشان هم یک تابع است می گوئیم تابع های یک به یک.

تابع یک به یک تابعی است که در آن به هر عضو دامنه فقط یک عضو منحصربه فرد از برد تابع نسبت داده شود؛

مثلاً در شکل بالا f و g هر دو تابع اند و f یک به یک است، اما g یک به یک نیست چون به اعضای ۲ و ۳ از دامنه g ، یک عضو یکسان (یعنی ۲) از برد g نسبت داده شده است.

به بیان دیگر اگر تابعی یک به یک باشد در ضابطه تابع به ازای هر x دقیقاً یک y داریم و به ازای هر y هم دقیقاً یک x داریم.

برای بررسی یک به یک بودن یک تابع از روی نمودار آن، خطوطی موازی محور x ها رسم می کنیم. اگر هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، تابع یک به یک است.

به تابع هایی که وارونشان هم تابع است می گوئیم تابع وارون پذیر. شرط وارون پذیر بودن یک تابع، یک به یک بودن آن است.

الف) $f = \{(1, 2), (2, \sqrt{2}), (3, \sqrt[3]{2}), (4, \sqrt[4]{2})\}$

مثال: کدام یک از تابع های زیر یک به یک است؟

ب) $g = \{(1, 2), (2, \sqrt[3]{4}), (3, \sqrt[3]{8}), (4, \sqrt[3]{16})\}$

پ) $h = \{(1, \sin 3^\circ), (2, \sin 6^\circ), (3, \cos 45^\circ), (4, \cos 6^\circ)\}$

پاسخ: f یک به یک است زیرا تمام مؤلفه های دوم زوج مرتب ها (y ها) با هم متفاوت اند. g یک به یک نیست چون $\sqrt[3]{8} = 2$ است و در دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(3, 2)$ دو y یکسان داریم. h یک به یک نیست چون $\sin 3^\circ = \frac{1}{4}$ و $\cos 6^\circ = \frac{1}{4}$ پس در دو زوج مرتب $(1, \frac{1}{4})$ و $(4, \frac{1}{4})$ دو y یکسان داریم.

مثال: مقدار m را طوری پیدا کنید که تابع $f = \{(1, 3), (2, 1), (1, m^2 + 2), (3m, m)\}$ یک تابع یک به یک باشد.

پاسخ: اول می رویم سراغ تابع بودن f . چون در f دو زوج مرتب $(1, 3)$ و $(1, m^2 + 2)$ را داریم پس باید $m^2 + 2 = 3$ باشد، یعنی $m^2 = 1$ و

در نتیجه $m = 1$ یا $m = -1$ ، حالا f را به ازای $m = 1$ و $m = -1$ می نویسیم:

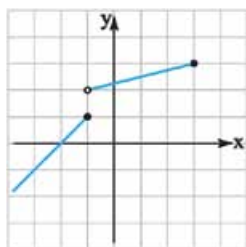
$m = 1 \Rightarrow f = \{(1, 3), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$

$m = -1 \Rightarrow f = \{(1, 3), (2, 1), (1, 3), (-3, -1)\}$

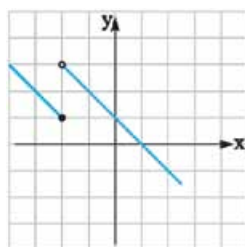
می بینیم که به ازای $m = 1$ تابع f یک به یک نیست چون در آن دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(3, 1)$ را داریم (دو y یکسان) ولی به ازای

$m = -1$ تابع f یک به یک است. پس جواب سؤال $m = -1$ است.

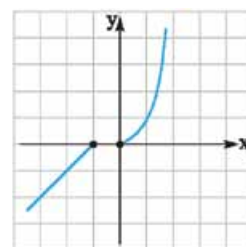
مثال: کدام یک از نمودارهای زیر متعلق به یک تابع یک به یک است؟



(الف)

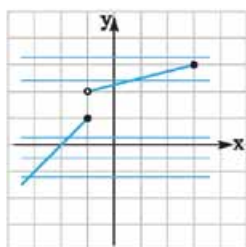


(ب)

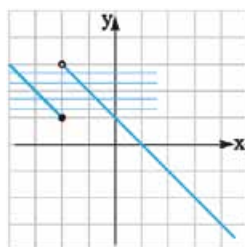


(پ)

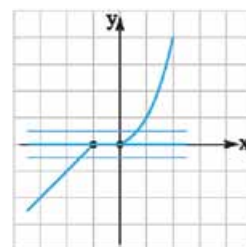
پاسخ: در هر کدام از نمودارها بررسی می کنیم که خطوط موازی محور x ها نمودار تابع را در چند نقطه قطع می کند:



الف



ب



پ

در شکل **الف** هر خط موازی محور x ها (هر جا که رسم کنیم) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند. (یعنی یا قطع نمی کند و یا فقط در یک نقطه قطع می کند) پس تابع شکل **الف** یک به یک است. در شکل **ب** همان طور که می بینید تمام خطوط افقی که در فاصله $1 \leq y < 3$ رسم می شوند نمودار را در دو نقطه قطع می کنند پس تابع یک به یک نیست. در شکل **پ** تمام خطوط افقی نمودار را در یک نقطه قطع می کند مگر خط $y = 0$ (یعنی همان محور x ها) و همین یک خط (یعنی یک y مشترک در دو نقطه) باعث می شود که تابع یک به یک نباشد.

سؤال های امتحانی

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

نادرست درست

☐	☐
☐	☐
☐	☐

۶۳- اگر تابع f یک به یک باشد، وارون تابع f نیز یک تابع است.

۶۴- تابعی یک به یک است اگر هر خط موازی محور y ها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۶۵- اگر تابعی یک به یک نباشد، می توانیم با محدود کردن دامنه، آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کنیم.

الف) $f = \{(2, -1), (-1, 3), (3, 2), (1, 1)\}$

۶۶- وارون هر کدام از تابع های زیر را بنویسید و بگویید وارون کدام، یک تابع است؟

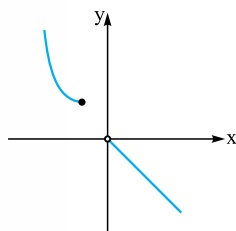
ب) $g = \{(3, 2), (2, 3), (1, 2), (-2, 1)\}$

پ) $h = \{(2, \sqrt{2}), (4, \sqrt{4}), (8, \sqrt{8}), (16, \sqrt[4]{16})\}$

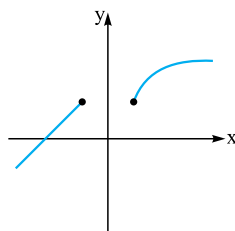
در هر مورد نمودار تابع های زیر و نمودار وارون آن ها را روی یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۶۷- $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

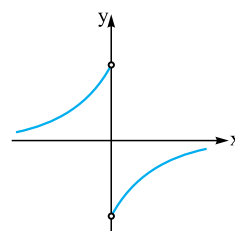
۶۸- $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$



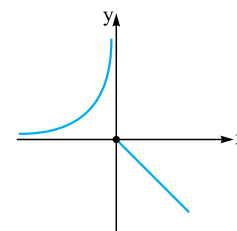
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۶۹- کدام تابع یک به یک است؟

۷۰- کدام تابع یک به یک است؟

الف) $f(x) = 3x + 2$

ب) $f(x) = 2x^2 - 1$

پ) $f(x) = \sqrt{x-2}$

ت) $f(x) = \frac{1}{x}$

ث) $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$

ج) $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$

۷۱- مقدار m و n را طوری پیدا کنید تا $f = \{(1, m+1), (m+3, 3m), (1, m^2+1), (3, n-2)\}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد.

درست	نادرست
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐
☐	☐

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۷۲- یک تابع خطی همواره یک‌به‌یک است.

۷۳- یک سهمی با دامنه R هرگز یک‌به‌یک نیست.

۷۴- یک تابع چندضابطه‌ای ممکن است یک‌به‌یک باشد.

۷۵- هر تابعی که وارون داشته باشد یک‌به‌یک است.

۷۶- هر تابعی که یک‌به‌یک باشد تابع وارون دارد.

۷۷- برای رسم نمودار تابع وارون، قرینه نمودار تابع را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم.

با رسم نمودار تابع تعیین کنید تابع‌های زیر در کدام یک از بازه‌های $(-\infty, 0]$ ، $[0, 1)$ ، $[-1, 2]$ ، $[1, +\infty)$ یک به یک هستند؟

$$78-f(x) = 3x + 2 \quad (-\infty, 0], [0, 1), [-1, 2], [1, +\infty) \quad 79-f(x) = [x] + 1 \quad (-\infty, 0], [0, 1), [-1, 2], [1, +\infty)$$

$$80-f(x) = x - [x] \quad (-\infty, 0], [0, 1), [-1, 2], [1, +\infty) \quad 81-f(x) = x^2 - 2x \quad (-\infty, 0], [0, 1), [-1, 2], [1, +\infty)$$

$$82-f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ x-2 & x > 1 \end{cases} \quad 83-f(x) = \frac{1}{|x|} \quad (-\infty, 0], [0, 1), [-1, 2], [1, +\infty)$$

۸۴- تابع f با دامنه $[-2, 2]$ به صورت $f(x) = \begin{cases} -x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ تعریف شده است. a چه اعدادی می‌تواند باشد تا f یک تابع یک‌به‌یک شود؟

۸۵- تابع f با دامنه $[-2, 2]$ و برد $[1, 3]$ مفروض است. چند نمودار برای f می‌توانید مثال بزنید که f تابعی یک‌به‌یک باشد؟ چندتا از این نمودارها خطی‌اند؟

۴ به دست آوردن ضابطه تابع وارون

گفتیم اگر تابع یک‌به‌یک باشد، وارونش هم یک تابع است. به این تابع می‌گوییم تابع وارون تابع اول. برای پیدا کردن تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک این کارها را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱ به جای $f(x)$ (یا هر حرف دیگری که برای معرفی تابع استفاده شده باشد) می‌گذاریم y .

۲ در رابطه نوشته شده x را بر حسب y پیدا می‌کنیم.

۳ جای x و y را عوض می‌کنیم.

۴ در رابطه آخر به جای y می‌گذاریم $f^{-1}(x)$.

مثال: ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = 3x - 5$ را پیدا کنید.

پاسخ: مراحل را که گفتیم به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) = 3x - 5 &\xrightarrow{(1)} y = 3x - 5 \xrightarrow{(2)} 3x = y + 5 \Rightarrow x = \frac{1}{3}y + \frac{5}{3} \xrightarrow{(3)} y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \\ &\xrightarrow{(4)} f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

مثال: ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 3$ را پیدا کنید.

$$f(x) = x^3 + 3 \Rightarrow y = x^3 + 3 \Rightarrow x^3 = y - 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-3}$$

دامنه تابع وارون

در درس قبل گفتیم هر تابع با ضابطه و دامنه‌اش مشخص می‌شود. در مورد تابع وارون هم، بعد از پیدا کردن تابع وارون، باید دامنه تابع وارون را هم به دست آوریم.

برای پیدا کردن دامنه تابع وارون، باید برد خود تابع را پیدا کنیم. (پرو)

یعنی از همان اول برد تابع را پیدا می‌کنیم و در آخر به عنوان دامنه تابع وارون می‌نویسیم.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل سوم	رشته علوم تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com
۱	دامنه تابع‌های زیر را پیدا کنید. الف) $f(x) = \frac{x(x-1)^2}{x^2 - 3x^2 + 2x}$ ب) $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x-2}}$			
۲	تساوی دو تابع زیر را بررسی کنید. $f(x) = \sqrt{(x-2)^2(x-3)}$ $g(x) = x-2 \sqrt{x-3}$			
۳	معادله زیر را حل کنید. $[x-2 + [x]] = 4$			
۴	تابع $y = x + [x]$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.			
۵	a و b را طوری به دست آورید که تابع $f = \{(a-b, 3), (5, 2), (-4, 3), (5, a+3), (1, 1)\}$ وارون‌پذیر باشد.			
۶	دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، مقدار a چه قدر است؟			
۷	تابع $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 1 \\ x + a & x < 1 \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود a را بیابید.			
۸	وارون تابع $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 4}$ را به دست آورید.			
۹	الف) نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x$ را رسم کنید. ب) با محدود کردن، ضابطه تابع وارون را بیابید.			
۱۰	ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ را به دست آورید.			
۱۱	اگر در تابع خطی $f(1) = 3$ و $f(3) = 7$ باشد، ضابطه وارون f را مشخص کنید.			
۱۲	اگر $f = \{(2, 1), (3, 2), (1, 3), (0, 4)\}$ و $g^{-1} = \{(3, 1), (4, 2), (1, 3), (5, 4)\}$ باشند، تابع $\frac{g^{-1} - 2f}{f^{-1}}$ را به دست آورید.			
۱۳	اگر دو تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = -3x + 3$ باشند، مطلوب است: الف) دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}$ ب) $(2f - g)(0)$			
۱۴	نمودار تابع مقابل را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & x > 2 \\ 2\sqrt{x+2} & -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$			

۱- {ریشه‌های مخرج} - $\mathbb{R}$

۲- (۱) دامنه‌هایشان مساوی باشد. (۲) به ازای x های یکسان y های یکسان داشته باشند. (یا ضابطه‌هایشان مساوی باشد).

۳- درست

۴- نادرست

۵- الف) چون بعد از ۱۰ پناالتی اول، x پناالتی زده شده، پس در کل $x + 10$ پناالتی زده شده است و از این پناالتی‌ها، ۶۰ درصد ده پناالتی اول یعنی ۶ پناالتی به علاوه x پناالتی دیگر یعنی $x + 6$ پناالتی گل شده است. پس ضابطه‌ی تابعی که نشان‌دهنده درصد پناالتی‌های گل شده است، برابر است با:

$$f(x) = \frac{x+6}{x+10} \times 100$$

ب) برای آن که درصد پناالتی‌های گل شده از ۹۵ درصد بیشتر باشد، باید داشته باشیم:

$$f(x) > 95 \Rightarrow \frac{x+6}{x+10} \times 100 > 95$$

$\Rightarrow 100x + 600 > 95x + 950 \Rightarrow 5x > 350 \Rightarrow x > 70$ و چون $x > 70$ است پس باید حداقل ۷۱ پناالتی دیگر بزنند.

۶- گویا

۷- غیر گویا

۸- گویا

۹- گویا (چون $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

۱۰- گویا

۱۱- گویا

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x^2+x-1} \quad 2x^2+x-1=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-3}{4} = -1 \\ x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+3}$$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, -3\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x}$$

$$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} \quad \text{ریشه مخرج‌ها}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \frac{1}{x-1}-1=0 \Rightarrow \frac{1}{x-1}=1 \\ \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\frac{x}{x-2} + 1}$$

$$\text{ریشه مخرج‌ها} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1, 2, -2\}$$

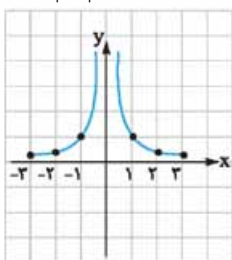
$$\text{الف) } f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\text{ب) } f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{پ) } f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

$$\text{ت) } f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$$

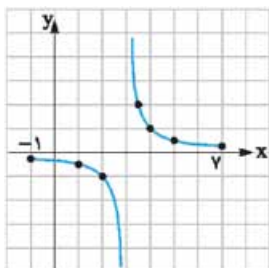
$$y = \frac{1}{|x|} \quad [-3, 3]$$



x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \quad [-1, 7]$$

x	-1	1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	4	5	7
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$



۲۴- برای پیدا کردن دامنه، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \sqrt{x-3} + 3$$

$$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{4-x} + 1$$

$$4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_f = (-\infty, 4]$$

$$f(x) = \sqrt{-5-x}$$

$$-5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq -5 \Rightarrow D_f = (-\infty, -5]$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-9}$$

$$x^2-9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \xrightarrow{\text{جذر}} |x| \geq 3 \Rightarrow x \leq -3$$

$$\text{یا } x \geq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$$

$$x^2-2x-8 \geq 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=4, x=-2$$

$$\text{رسم جدول} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -2 & 4 & +\infty \\ \hline & & + & - & + \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{دامنه}} (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2-x+6}$$

$$-x^2-x+6 \geq 0 \Rightarrow -(x^2+x-6) \geq 0$$

$$\Rightarrow -(x+3)(x-2) \geq 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=-3, x=+2$$

$$\text{رسم جدول} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -3 & +2 & +\infty \\ \hline & & + & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow D_f = [-3, +2]$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x}$$

$$x^2-2x \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=0, x=2$$

$$\text{رسم جدول} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & 0 & 2 & +\infty \\ \hline & & + & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-x}$$

$$x^2-x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=0, x=-1, x=1$$

$$\text{رسم جدول} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -1 & 0 & 1 & +\infty \\ \hline & & - & + & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow D_f = [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{4x-x^2}$$

$$4x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0$$

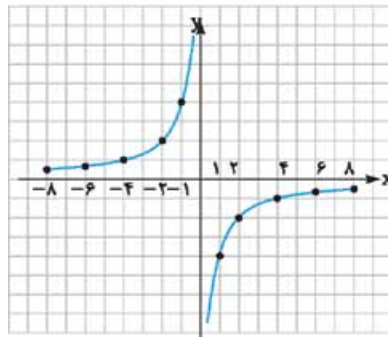
$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=0, x=-2, x=2$$

$$\text{رسم جدول} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -2 & 0 & 2 & +\infty \\ \hline & & + & - & + & - \end{array}$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [0, 2]$$

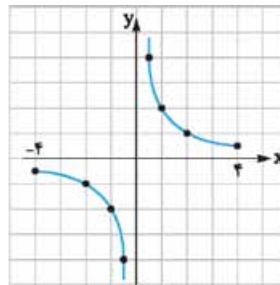
$$f(x) = -\frac{4}{x} \quad [-8, 8] \quad -21$$

x	-8	-6	-4	-2	-1	1	2	4	6	8
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$



$$f(x) = \frac{2}{x} \quad [-4, 4] \quad -22$$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$



۲۳- الف) شکل داده شده تابع ثابت $f(x) = 2$ است که $x=1$ متعلق به دامنه‌اش نیست، پس باید عامل صفرکننده $x-1$ را در صورت و مخرج داشته باشیم؛ یعنی:

$$f(x) = \frac{2x-2}{x-1} \text{ یا } f(x) = \frac{2(x-1)}{x-1}$$

ب) نمودار داده شده یک تابع خطی است که از نقاط $(0, 2)$ و $(1, 3)$ می‌گذرد، پس:

$$(0, 2), (1, 3) \Rightarrow m = \frac{3-2}{1-0} = 1 \Rightarrow y = x + 2$$

بنابراین ضابطه تابع باید به شکل $f(x) = x + 2, x \neq 2$ باشد (چون $x=2$ جزء دامنه تابع نیست) یعنی می‌توانیم ضابطه را به شکل زیر بنویسیم:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

پ) نمودار داده شده یک تابع خطی است که از نقاط $(2, -1)$ و $(0, 3)$ می‌گذرد و $x=1$ جزو دامنه تابع نیست، پس مثل قسمت قبل داریم:

$$(0, 3), (2, -1) \Rightarrow m = \frac{-1-3}{2-0} = -2 \Rightarrow y = -2x + 3$$

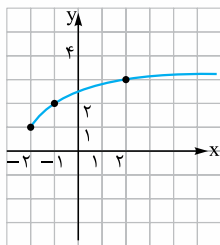
$$\Rightarrow f(x) = \frac{(-2x+3)(x-1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2+2x+3x-3}{x-1} = \frac{-2x^2+5x-3}{x-1}$$

از طرف دیگر چون دامنه $(2, +\infty)$ است؛ پس $x=2$ باید ریشه عبارت زیر رادیکال باشد. بنابراین:

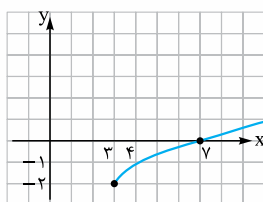
حالا این دو معادله را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2a+b=4 \\ 2a+b=0 \end{cases} \xrightarrow{\ominus} a=4, b=-8$$



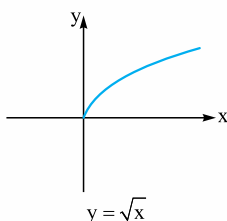
$$f(x) = \sqrt{x+2} + 1$$

x	-2	-1	2	7
y	1	2	3	4

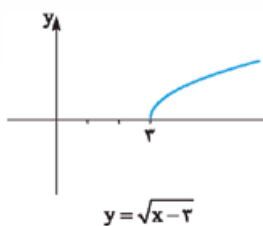


$$f(x) = \sqrt{x-3} - 2$$

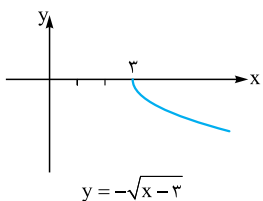
x	3	4	7	12
y	-2	-1	0	1



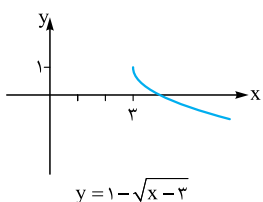
انتقال $(+3)$ واحد
در راستای محور x ها



قرینه نسبت به
محور x ها



انتقال $(+1)$
واحد در راستای محور y ها



طبق نمودار دامنه و برد برابرند با: $D_f = [3, +\infty)$ و $R_f = (-\infty, 1]$

۴۳- ابتدا دامنه دو تابع داده شده را با هم مقایسه می‌کنیم و اگر دامنه‌ها مساوی بود، می‌رویم سراغ بررسی برابری ضابطه دو تابع.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \\ g(x) = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^2}$$

-۳۴

$$x^3 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(x-1) \geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=0, x=1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^2	+	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$x^2(x-1)$	-	-	+	+

$$\Rightarrow D_f = \{0\} \cup [1, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$$

-۳۵

$$x^4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(x-1)(x+1) \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=0, x=-1, x=1$$

رسم جدول $\Rightarrow$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+	+
$x+1$	-	+	+	+	+
$x^2(x-1)(x+1)$	+	-	-	+	+

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \cup \{0\}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

-۳۶

$$\frac{x-2}{x+2} \geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x=2, x=-2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	+	+
$x+2$	-	+	+	+
$\frac{x-2}{x+2}$	+	-	+	+

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$$

-۳۷

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad \text{اشتراک} \quad x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

۳۸- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + ax + b}$ بازه $[-3, 2]$ است؛

پس عبارت زیر رادیکال باید به صورت $-(x+3)(x-2)$ باشد.

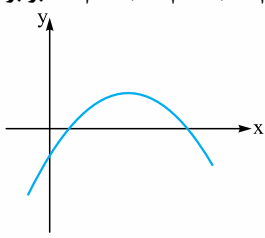
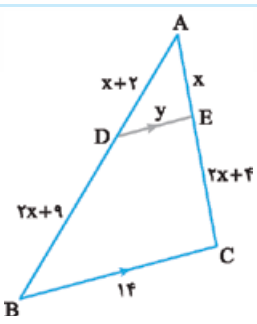
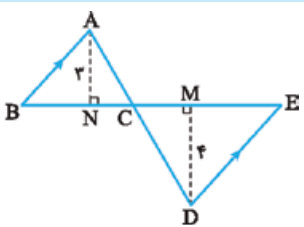
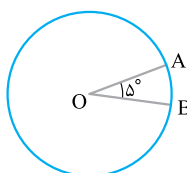
چون مرزهای دامنه (همان ریشه‌های جدول تعیین علامت) -3 و 2 هستند پس باید دو عامل $(x+3)$ که ریشه‌اش -3 است و $(x-2)$ که ریشه‌اش 2 است داشته باشیم؛ پس:

$$-(x+3)(x-2) = -(x^2 - 2x + 3x - 6) = -x^2 - x + 6$$

و با مقایسه $-x^2 - x + 6$ با $-x^2 + ax + b$ نتیجه می‌گیریم $a = -1$ و $b = 6$ باشد.

۳۹- در تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ اولاً $f(3) = 2$ است؛ پس:

$$2 = \sqrt{3a+b} \Rightarrow 3a+b=4$$

ردیف	امتحان شماره ۶ - نهایی خرداد ۱۴۰۳	رشته تجربی	ریاضی ۲	نمره
۱	درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) معادله $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی است. ب) دو تابع $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ با هم برابرند. پ) نمودار تابع $f(x) = \cos(\frac{19\pi}{4} + x)$ بر نمودار $g(x) = \sin x$ منطبق است.		kheilisabz.com	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارتهای مناسب کامل کنید. الف) اگر واریانس دادههای x_1, x_2, x_3, x_4 برابر ۷ باشد، آنگاه واریانس دادههای $3x_1 - 2, 3x_2 - 2, 3x_3 - 2, 3x_4 - 2$ برابر است. ب) در سهمی با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ که نمودار آن به صورت مقابل است، علامت $b \times c$ می باشد. پ) برد تابع با ضابطه $y = 3^x$ بازه است. ت) انتهای کمان زاویه ۶ رادیان در ربع دایره مثلثاتی قرار دارد.			۱
۳	خط $4x - 3y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $(3, -1)$ مماس است. مساحت دایره را محاسبه کنید.			۰/۷۵
۴	الف) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ باشند. ب) معادله $\sqrt{x+2} + 4 = x$ را حل کنید.			۱/۷۵
۵	در شکل مقابل $BC \parallel DE$ می باشد. مقادیر x و y را محاسبه کنید.			۱
۶	در شکل مقابل $AB \parallel ED$ است؛ الف) نشان دهید دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ متشابه هستند. ب) اگر $BE = 7$ ، $AN = 3$ و $DM = 4$ باشد، آنگاه طول ضلع BC را محاسبه کنید.			۱
۷	نمودار تابع $y = 1 - 2 x $ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)			۰/۷۵
۸	الف) اگر وارون تابع $f(x) = ax + 4$ از نقطه $(\frac{5}{3}, 5)$ بگذرد، آنگاه ضابطه وارون f را به دست آورید. ب) اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \frac{5x+4}{x-3}$ باشند، آنگاه دامنه و ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.			۲
۹	الف) دوندهای مطابق شکل، روی مسیر دایره‌ای از نقطه A به نقطه B می رسد. اگر شعاع دایره برابر ۹ متر باشد، آنگاه طول کمان AB چند متر است؟ ($\angle AOB = 15^\circ$) ب) حاصل عبارت زیر را به دست آورید. $A = \tan(\frac{11\pi}{3}) \cos(-\frac{3\pi}{4}) + \sin(66^\circ) \cot(-30^\circ)$			۱/۷۵
۱۰	نمودار تابع $y = 1 - \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.			۰/۷۵

نمونه امتحان نیم سال دوم	رشته تجربی	ریاضی ۲	
ردیف	امتحان شماره ۶ - نهایی خرداد ۱۴۰۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com نمره
۱۱	معادلات زیر را حل کنید.	الف) $(\frac{1}{16})^{2x-1} = 3 \cdot 2^{1-x}$ ب) $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$	۱/۵
۱۲	الف) اگر $\log 2 = m$ و $\log 3 = n$ باشند، آن گاه مقدار $\log \frac{\sqrt{27}}{16}$ را بر حسب m و n به دست آورید. ب) در دستگاه مختصات مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = a + \log_7(x + b)$ رسم شده است. مقادیر a و b را به دست آورید.		۱/۲۵
۱۳	نمودار تابع f به صورت مقابل داده شده است. مطلوب است: الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ پ) آیا تابع f در بازه $[-1, 1]$ پیوسته است؟		۰/۷۵
۱۴	حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.) الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 + 3x - 10}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{ 2 - x }{[x] + 1}$		۱/۲۵
۱۵	پیوستگی تابع زیر را در $x = 0$ بررسی کنید.	$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & x < 0 \\ \sqrt{x} & x = 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$	۱
۱۶	در پرتاب دو تاس با هم، دو پیشامد A و B را به صورت زیر تعریف می کنیم: A : مجموع عددهای روشده ۸ باشد. B : عددهای روشده برابر باشند. الف) احتمال $P(B A)$ را به دست آورید. ب) آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ چرا؟		۱/۲۵
۱۷	در داده های ۱۴، ۲۳، ۸، ۱۷، ۲۶، ۱۱ و ۲۰: الف) چارک سوم را به دست آورید. ب) ضریب تغییرات داده ها را محاسبه کنید.		۱/۵
جمع نمرات			
۲۰			

پاسخ نامه تشریحی امتحان شماره (۶)

$$D_f = \mathbb{R} \text{ (۰/۲۵)}, D_f = \mathbb{R} - \{3\} \text{ (۰/۲۵)}$$

(ب)

(ب) نادرست (۰/۲۵)

(الف) نادرست (۰/۲۵)

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{3, -\frac{4}{5}\} \text{ (۰/۲۵)}$$

(پ) درست (۰/۲۵)

(ب) منفی (۰/۲۵)

(۲- الف) ۶۳ (۰/۲۵)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{\frac{5x+4}{x-3}} = \frac{(x+1)(x-3)}{5x+4} \text{ (۰/۲۵)}$$

(ت) چهارم (۰/۲۵)

(پ) (۰, +∞) (۰/۲۵)

$$15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ (۰/۲۵)}, L = 9 \times \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} \text{ (۰/۲۵)}$$

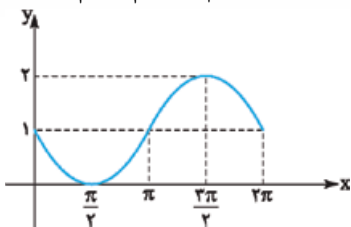
(۹- الف)

$$\tan\left(\frac{11\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \text{ (۰/۲۵)}, \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\sin(66^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۰/۲۵)}, \cot(-3^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$A = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-1}{2} \text{ (۰/۲۵)}$$

(۱۰- (رسم شکل ۰/۷۵)



$$2^{-8x+4} = 2^{5-5x} \Rightarrow -8x+4 = 5-5x \text{ (الف ۰/۲۵)}$$

(۱۱- الف)

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\log_7(x^2-1) - \log_7(x+3) = 1$$

(ب) راه اول:

$$\Rightarrow \log_7\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+3} = 7$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (۰/۲۵)} \\ x = -2 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$$

$$\log_7(x^2-1) = \log_7(7) + \log_7(x+3)$$

راه دوم:

$$\Rightarrow \log_7(x^2-1) = \log_7(7x+9)$$

$$\Rightarrow x^2-1 = 7x+9 \Rightarrow x^2-7x-10 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (۰/۲۵)} \\ x = -2 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$$

(۱۲- الف)

$$\log\left(\frac{\sqrt{27}}{16}\right) = \log(\sqrt{27}) - \log(16) = \log(3^{\frac{3}{2}}) - \log(2^4)$$

$$= \frac{3}{2}n - 4m$$

$$b = -2 \text{ (۰/۲۵)}$$

(ب)

$$(2/5, 0) \in f \Rightarrow 0 = a + \log_7(2/5 - 2)$$

$$\Rightarrow a + \log_7(7^{-1}) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ (۰/۲۵)}$$

$$S = 9\pi \text{ (۰/۲۵)}$$

$$r = \frac{|12+3|}{\sqrt{16+9}} = 3 \text{ (۰/۲۵)}$$

(۴- الف) راه اول:

$$S = \frac{2-\sqrt{3}}{5} + \frac{2+\sqrt{3}}{5} = \frac{4}{5} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$P = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{5}\right)\left(\frac{2+\sqrt{3}}{5}\right) = \frac{1}{25} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0 \text{ (۰/۲۵)}$$

راه دوم:

$$\left(x - \frac{2-\sqrt{3}}{5}\right)\left(x - \frac{2+\sqrt{3}}{5}\right) = x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0 \text{ (۰/۷۵)}$$

(ب)

$$\sqrt{x+2} = x-4 \Rightarrow x+2 = x^2-8x+16 \Rightarrow x^2-9x+14 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7 \text{ (۰/۲۵)} \\ x = 2 \text{ غلط (۰/۲۵)} \end{cases}$$

(۵-)

$$\frac{x+2}{2x+9} = \frac{x}{2x+4} \Rightarrow x = 8 \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\frac{x}{3x+4} = \frac{y}{14} \Rightarrow \frac{1}{28} = \frac{y}{14} \Rightarrow y = 4 \text{ (۰/۲۵)}$$

(۶- الف)

$$\left. \begin{matrix} C_1 = C_2 \text{ (۰/۲۵)} \\ B = E \text{ (۰/۲۵)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE$$

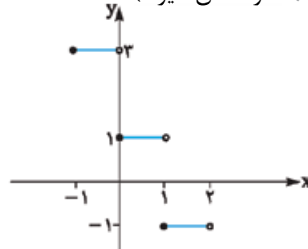
(ب) راه اول:

$$\frac{BC}{CE} = \frac{3}{4} \xrightarrow{BC=x} \frac{x}{7-x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 3 \text{ (۰/۲۵)}$$

راه دوم:

$$\frac{BC}{CE} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BC}{BC+CE} = \frac{3}{7} \Rightarrow BC = 3 \text{ (۰/۲۵)}$$

(۷- (به رسم درست هر پاره خط ۰/۲۵ نمره تعلق گیرد.)



$$\left(\frac{5}{3}, 5\right) \in f \Rightarrow 5 = \frac{5}{3}a + 4 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \text{ (۰/۲۵)} \text{ (۸- الف)}$$

$$y = \frac{3}{5}x + 4 \Rightarrow y - 4 = \frac{3}{5}x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5}{3}(x - 4)$$

۱۳- الف) وجود ندارد. (۰/۲۵) ب) ۱ (۰/۲۵)

پ) خیر (۰/۲۵)

۱۴- الف)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4+2x+x^2}{-(x+5)} = -\frac{12}{7} \quad (۰/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|2-x|}{[x]+1} = \frac{1(۰/۲۵)}{3(۰/۲۵)} \quad (ب)$$

۱۵-

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + \cos x) = 1 \quad (۰/۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \quad (۰/۲۵)$$

$$f(0) = \sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow (۰/۲۵) \text{ در } f \text{ در } 0 \text{ پیوسته نیست.}$$

۱۶- الف) راه اول:

$$A = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \Rightarrow n(A) = 5 \quad (۰/۲۵)$$

$$A \cap B = \{(4, 4)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{1}{5} \quad (۰/۲۵)$$

راه دوم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}(۰/۲۵)}{\frac{5}{36}(۰/۲۵)} = \frac{1}{5} \quad (۰/۲۵)$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \neq P(B|A) \quad (ب) \text{ راه اول:}$$

A و B مستقل نیستند. (۰/۲۵)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{5}{36} \times \frac{6}{36} \neq \frac{1}{36} \quad (۰/۲۵) \text{ راه دوم:}$$

A و B مستقل نیستند. (۰/۲۵)

$$8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 \quad (۱۷- الف)$$

$$Q_3 = 23 \quad (۰/۲۵)$$

$$\bar{x} = 17 \quad (۰/۲۵) \quad (ب)$$

$$\sigma^2 = \frac{81 + 36 + 9 + 0 + 9 + 36 + 81}{7} = \frac{252}{7} = 36 \quad (۰/۲۵)$$

$$\sigma = 6 \quad (۰/۲۵), CV = \frac{6}{17} \quad (۰/۲۵)$$