مقدمهٔ ناشر

خیلیا برای فرار از درس ریاضی و خیلیا به عشق درس ریاضی رشته‌شون رو انتخاب می‌کنن. گروه اول همیشه در شگفت‌اند که این ریاضی مگه چی داره که بعضیا دیوانه‌وار عاشقشن و باهاش حال می‌کنن؟!

ولی گروه دوم، مثل خودِ شما که رشتشون ریاضیه بهتر از هر کس می‌دونین که «لذتی که در حل مسئله هست حتی در انتقام هم نیست!». اون لحظهٔ باشکوه، حس عجیبی به آدم می‌ده. همون لحظه که میگی «آهان! فهمیدم!». همون لحظهٔ کشف جواب! انگار با آرپی‌جی زدی وسط تانک دشمن. هر چی مسئله چغرتر و بدبدن‌تر، این حس قوی‌تر و لذت‌بخش‌تر.

نمی‌دونم توی اون لحظه کدوم محرک باعث می‌شه که چه بخشی از مغزمون دستور صادر کنه تا چه هورمونی از کجای بدنمون فوران کنه! ولی هر چی که هست معرکه است. مخصوصن اگه با یه مسئلهٔ هندسه طرف باشیم.

امیدواریم این کتاب براتون پر از این لحظه‌های ناب باشه و با خوندنش هم حسابی کیف کنید و هم توی کنکورها حسابی بترکونید.

برای به ثمر رسیدن این کتاب آدمای مهم و زیادی زحمت کشیدن. دم همتون گرم.

مصطفی جان و علیرضا جان، خسته نباشین! انصافن خوب کتابی شد. رسول خان، ممنون که از اول تا آخر خط کنارمون بودی.

زنده باد دوستای خستگی‌ناپذیرمون در واحد تألیف و تولید خیلی‌سبز و درود بر ویراستارای خوب و دقیقمون.

بروبچه‌های ریاضی، دم شما هم گرم

مواظب خودتون باشید!

مقدمهٔ مولف

به کتاب پرسش‌های چهارگزینه‌ای هندسهٔ جامع خوش آمدید.

حتماً می‌دانید که درس هندسه در کنکورهای نظام جدید (از سال ۱۳۹۸ به بعد) بیشتر از قبل اهمیت پیدا کرده و سهم قابل توجهی از تست‌های ریاضیات را به خود اختصاص داده است. پس لازم است برای رسیدن به یک نتیجهٔ عالی به این درس توجه ویژه‌ای داشته باشید. این کتاب هم برای همین کار تألیف شده است و قرار است شما را برای آزمون‌های آزمایشی، امتحانات مدرسه و در نهایت برای کنکور آماده کند.

دربارهٔ کتاب:

- درس‌نامه‌ها با دقت و وسواس زیاد و تا حد ممکن خودآموز و کاربردی نوشته شده است. تلاش کردیم از چهارچوب مباحث نظام جدید خارج نشویم.
- برای طراحی تست‌ها، تمام فعالیت‌ها و تمرین‌های کتاب درسی و سؤالات کنکور بیست سال اخیر را به دقت بررسی کردیم و برای دسته‌بندی و چیدمان تست‌ها روند آموزشی مناسب را معیار قرار داده‌ایم.
- پاسخ‌های تشریحی به صورت گام به گام و با توضیح کافی نوشته شده‌اند.
- در تست‌های هر درس، کنار تست‌های عادی یک آیکون گذاشته‌ایم. قرار است شما بعد از حل هر تست و بررسی پاسخنامهٔ آن این آیکون را به یکی از سه آیکون زیر تبدیل کنید:

یعنی تست آسان　　یعنی تست متوسط　　یعنی تست دشوار

این نمادگذاری باعث می‌شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید بتوانید تصمیم بگیرید که کدام تست‌ها را باید حل کنید.

- شمارهٔ تست‌های مهم را رنگی کرده‌ایم. از این تست‌ها برای مرور و جمع‌بندی مباحث استفاده کنید. برای بعضی از تست‌ها هم نماد داریم. این نماد نشان‌دهندهٔ تست‌های دشوار است.
- برای سه فصل اول، که مربوط به کل کتاب درسی هندسهٔ دوازدهم هستند و حجم زیادی دارند، یک آزمون جامع در پایان فصل قرار داده‌ایم.

قدردانی:

- مخاطب اولین تشکر دکتر کمیل نصری است؛ بابت اعتمادشان به ما.
- از دکتر کورش اسلامی، مهندس سروش موئینی و دکتر علی‌اصغر شریفی بابت نظرات و پیشنهادهای سازنده‌شان تشکر می‌کنیم.
- تشکر ویژه از مدیر تألیف باهوش و باسواد، مهندس نوید شاهی و دوست عزیزمان مهندس رسول محسنی‌منش که سهم ویژه‌ای در تولید کتاب، از ابتدا تا انتها داشتند. طی جلسات متعددی، ساعت‌های زیادی صرف ویرایش و اصلاح نوشته‌هایمان کردیم تا کتاب به شکلی که می‌بینید، درآید. جلسه‌های دوشنبه عصر برای ما بسیار شیرین بود.
- از تیم اجرایی، به ویژه خانم هدی ملک‌پور گرامی و واحد تولید خیلی‌سبز، خیلی خیلی ممنونیم. دمتان گرم.

فهرست

فصل	درس	درس‌نامه	تست
فصل اول ماتریس و کاربردها	درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها	۸	۴۲
	درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان	۲۳	۵۰
فصل دوم آشنایی با مقاطع مخروطی	درس ۱: مکان هندسی	۶۸	۱۰۱
	درس ۲: دایره	۷۰	۱۰۲
	درس ۳: بیضی	۸۲	۱۰۷
	درس ۴: سهمی	۹۳	۱۱۲
فصل سوم بردارها	درس ۱: معرفی فضای R^3	۱۲۱	۱۴۱
	درس ۲: ضرب داخلی دو بردار	۱۳۳	۱۴۸
	درس ۳: ضرب خارجی دو بردار	۱۳۷	۱۵۴
فصل چهارم ترسیم‌های هندسی و استدلال		۱۵۹	۱۶۸
فصل پنجم قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردها		۱۷۶	۱۸۸
فصل ششم چندضلعی‌ها		۱۹۹	۲۲۱
فصل هفتم تجسم فضایی		۲۳۵	۲۴۷
فصل هشتم دایره		۲۵۶	۲۷۰
فصل نهم تبدیل‌های هندسی و کاربردها		۲۸۱	۲۹۱
فصل دهم روابط طولی در مثلث		۳۰۰	۳۱۴
پاسخ‌نامهٔ تشریحی			۳۲۴

دترمینان ماتریس ۳×۳

دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ را با دو روش کلی می‌توانیم حساب کنیم: ۱) ساروس ۲) بسط دترمینان برحسب یک سطر یا ستون که هر کدام از این‌ها را مفصل بحث می‌کنیم:

۱) ساروس: فرض کنید دترمینان ماتریس A را می‌خواهیم به دست آوریم $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. در ابتدا ستون‌های اول و دوم ماتریس را در سمت راست ماتریس می‌نویسیم، سپس مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی و دو خط موازی آن را منهای مجموع حاصلضرب درایه‌های روی قطر فرعی و دو خط موازی آن می‌کنیم:

$$|A| \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{|A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)}$$

$$\begin{array}{cccccc} ceg & afh & bdi & aei & bfg & cdh \end{array}$$

مثال دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ با روش ساروس به صورت زیر، به دست می‌آید:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow |A|=(-2+40+0)-(-15+4+0)=38-(-11)=49$$

تست ۱ برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ با روش ساروس از مدل زیر، استفاده شده است. مقدار دترمینان A کدام است؟

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & y & 0 & & 5 \\ 2 & 1 & 2 & & \end{array}\right|$$

۱) -16 ۲) -17 ۳) -18 ۴) -19

پاسخ ۴ در روش ساروس باید ۲ ستون اول را در سمت راست ماتریس بنویسیم، پس $x=1$ و $y=5$ داده است. حالا روش ساروس را می‌نویسیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow |A|=(10-3)-(30-4)=-19$$

$$\begin{array}{cccccc} 30 & 0 & -4 & 10 & 0 & -3 \end{array}$$

۲) روش بسط دترمینان:

دترمینان ۳×۳ را می‌توانیم برحسب یک سطر یا یک ستون دلخواه بنویسیم. مثلاً در ماتریس زیر دترمینان را برحسب سطر اول مینویسیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

و دقت کنید که دترمینان ۲×۲ای که در a_{11} ضرب شد در واقع باقی‌ماندهٔ ماتریسی بود که از حذف سطر و ستون اول باقی مانده بود و همین‌طور می‌توانیم برحسب سطر دوم، ستون سوم و ... بنویسیم.

مثال دترمینان ماتریس روبه‌رو را با روش بسط برحسب سطر اول به صورت زیر، حساب می‌کنیم:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow |A|=1\times\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=(3-4)-2(-1-8)+0=17$$

حالا همین دترمینان را یک بار دیگر با بسط برحسب ستون دوم حساب می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2^{-} & 0 \\ -1 & 3^{+} & 4 \\ 2 & 1^{-} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=-2\times\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-2\times(-9)+3(1)-(4)=17$$

حواستون باشه که در روش بسط، علامت روی قطر اصلی، مثبت و بقیه یکی‌درمیان مثبت و منفی هستند. مثلاً در روش بسط با ستون سوم، عدد ۰ مثبت، عدد ۴ منفی و عدد ۱ که روی قطر اصلی است، مثبت است و برای یک ماتریس ۳×۳ داریم:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

تست حاصل $\begin{vmatrix} ۳ & -۴ & ۱ \\ ۳ & -۴ & ۷ \\ ۵ & ۶ & -۳ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) -۲۲۴ ۲) -۲۲۶ ۳) -۲۲۸ ۴) -۲۳۰

پاسخ ۳ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} ۳ & -۴ & ۱ \\ ۳ & -۴ & ۷ \\ ۵ & ۶ & -۳ \end{vmatrix} = ۳\begin{vmatrix} -۴ & ۷ \\ ۶ & -۳ \end{vmatrix} + ۴\begin{vmatrix} ۳ & ۷ \\ ۵ & -۳ \end{vmatrix} + ۱\times\begin{vmatrix} ۳ & -۴ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix} = ۳(-۳۰)+۴(-۴۴)+(۳۸) = -۲۲۸$$

تست اگر دترمینان ماتریس روبه‌رو -۴ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & a & ۰ \\ a & ۲ & a \\ ۳ & ۲a & ۱ \end{bmatrix}$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۲ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$|A| = ۲\times\begin{vmatrix} ۲ & a \\ ۲a & ۱ \end{vmatrix} - a\times\begin{vmatrix} a & a \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} + ۰ = ۲(۲-۲a^۲) - a(a-۳a)$$

$$= ۴-۴a^۲+۲a^۲ = ۴-۲a^۲ = -۴ \Rightarrow ۲a^۲ = ۸ \Rightarrow a^۲ = ۴ \Rightarrow a = \pm ۲$$

و چون مقدار مثبت a را می‌خواهیم $a = ۲$ قابل قبول است.

تست مجموع جواب‌های معادلهٔ روبه‌رو کدام است؟

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۴ & x+۵ \\ x-۱ & ۶ & -۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ ۳ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۴ & x+۵ \\ x-۱ & ۶ & -۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۱\times\begin{vmatrix} ۴ & x+۵ \\ ۶ & -۱ \end{vmatrix} - ۲\begin{vmatrix} -۲ & x+۵ \\ x-۱ & -۱ \end{vmatrix} + ۳\begin{vmatrix} -۲ & ۴ \\ x-۱ & ۶ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow (-۴-۶x-۳۰) - ۲(۲-x^۲-۴x+۵) + ۳(-۱۲-۴x+۴) = ۰$$

حالا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$-۶x-۳۴+۲x^۲+۸x-۱۴-۲۴-۱۲x = ۰ \Rightarrow ۲x^۲-۱۰x-۷۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲-۵x-۳۶ = ۰ \Rightarrow (x-۹)(x+۴) = ۰ \Rightarrow x = ۹, -۴$$

و جمع جواب‌ها برابر ۵ است.

تست با حل معادلهٔ روبه‌رو، یک معادلهٔ خط برحسب x و y به دست می‌آید. شیب آن کدام است؟

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۱) $\dfrac{d-b}{a-c}$ ۲) $\dfrac{a-b}{c-d}$ ۳) $\dfrac{a-c}{b-d}$ ۴) $\dfrac{b-d}{a-c}$

پاسخ ۴ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} b & ۱ \\ d & ۱ \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} a & ۱ \\ c & ۱ \end{vmatrix} + ۱\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow x(b-d) - y(a-c) + (ad-bc) = ۰$$

حالا باید y را تنها کنیم و ضریب x، شیب خط می‌شود:

$$\Rightarrow y(a-c) = x(b-d) + \overset{(\text{مهم نیست})}{\triangle} \Rightarrow y = \frac{b-d}{a-c}x + \bigcirc$$

بسط دترمینان براساس یک سطر یا یک ستون خاص

معمولاً دترمینان‌های ۳×۳ را با ساروس و یا برحسب سطر اول می‌نویسیم مگر در حالت‌های زیر:

۱) **حالت اول**: در برخی ماتریس‌ها در یک سطر یا ستون تعدادی صفر داریم که بهتر است براساس آن سطر یا ستون بنویسیم تا کارمان در محاسبات راحت‌تر باشد.

مثال در محاسبهٔ دترمینان ماتریس روبه‌رو بهتر است بسط برحسب ستون سوم بنویسیم، چون دو درایهٔ آن صفر است:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۵ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۲\times\begin{vmatrix} -۱ & ۵ \\ ۴ & ۲ \end{vmatrix} + ۰ = ۲(-۲-۲۰) = -۴۴$$

تست | در معادلهٔ روبه‌رو مقدار x کدام است؟

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & x & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۱۶$$

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۱ | با توجه به این‌که در ستون اول دوتا صفر داریم پس برای راحتی محاسبات بهتر است دترمینان را براساس ستون اول بنویسیم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & x & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۲\times\begin{vmatrix} x & -۱ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} + ۰ = ۲(۵x+۳) = ۱۶ \Rightarrow ۵x+۳=۸ \Rightarrow x=۱$$

۲) **حالت دوم**: به‌جز حالتی که در یک سطر یا یک ستون تعدادی صفر داشته باشیم، گاهی صورت سؤال طوری طراحی شده که ما مجبور می‌شویم برحسب سطر یا ستون خاص بسط ماتریس را بنویسیم.

مثلاً | فرض کنید صورت تست رابطهٔ روبه‌رو را داده و از ما x را می‌خواهد:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۷ & ۳ \\ -۱ & ۳ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۴\begin{vmatrix} ۷ & ۳ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} + x$$

در این‌جا باید دترمینان را برحسب سطر سوم یا ستون اول بنویسیم تا ۴ در بسط باشد و بقیهٔ بسط مقدار x را می‌دهد، که در این‌جا برحسب سطر سوم می‌نویسیم. (اگر برحسب ستون اول هم بنویسیم فرقی نمی‌کند.)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۷ & ۳ \\ -۱ & ۳ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۴\begin{vmatrix} ۷ & ۳ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} \underbrace{-۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix} + ۲\begin{vmatrix} ۱ & ۷ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix}}_{x} \Rightarrow x = -۱\times(۵+۳)+۲(۳+۷)=۱۲$$

تست | اگر $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ x & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = A + x\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}$ باشد، مقدار A کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ ۱ | **راه I** بسط ماتریس را برحسب ستون اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ x & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = \underbrace{۱\times\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} - ۲\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}}_{A} + x\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \Rightarrow A = ۱\times(-۲-۱)-۲(۴-۷)=۳$$

راه II می‌توانیم به x صفر بدهیم تا از جریان محاسبات خارج شود و دترمینان ماتریس روبه‌رو را به دست آوریم:

بسط حول ستون اول:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱\times\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} - ۲\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = (-۲-۱)-۲(۴-۷)=۳$$

نکته اگر در ماتریس ۳×۳ به یک درایه عددی اضافه و یا کم کنیم و دترمینان تغییری نکند، دترمینان ۲ در ۲ با حذف سطر و ستون آن درایه باید صفر باشد.

مثلاً | در ماتریس زیر اگر به x سه واحد اضافه کنیم و دترمینان تغییر نکند، با حذف سطر و ستون مربوط به x به دترمینان ۲ در ۲ی زیر می‌رسیم که باید صفر باشد و مقدار y به دست می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & y \\ x & ۵ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & y \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۲y-۱۲=۰ \Rightarrow y=۶$$

تست | در دترمینان $\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix}$ اگر به عنصر واقع بر سطر سوم و ستون سوم ۴ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییری نکند، آن‌گاه a کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ ۲ | سطر سوم و ستون سوم را حذف می‌کنیم و دترمینان باقی‌مانده باید صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۳ & a \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۲a+۳=۰ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

تست | اگر درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & a \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ را دو برابر کنیم، از حاصل دترمینان آن ۳ واحد کم می‌شود. مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

پاسخ ۱ ابتدا اطلاعات مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲a \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & a \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} - ۳$$

حالا چون هم a در سطر دوم است و هم صفر داریم، دترمینان را برحسب سطر دوم می‌نویسیم:

$$۰ + ۱\times\cancel{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix}} - ۲a\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ + ۱\times\cancel{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix}} - a\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} - ۳ \Rightarrow ۶a = ۳a - ۳ \Rightarrow ۳a = -۳ \Rightarrow a = -۱$$

قوانین دترمینان

دترمینان ویژگی‌هایی دارد که با کمک آن‌ها مسئله‌ها ساده‌تر حل می‌شوند و گاهی نیازی به روش ساروس یا بسط دترمینان نیست.

۱	دترمینان ماتریس A^n برابر است با دترمینان ماتریس A به توان n.	$\|A^n\| = \|A\|^n$
۲	اگر دترمینان ماتریس $A\times B$ را بخواهیم، لازم نیست که خود ماتریس $A\times B$ را حساب کنیم و کافی است دترمینان A را در دترمینان B ضرب کنیم.	$\|A\times B\| = \|A\|\times\|B\|$
۳	دترمینان ماتریس‌های قطری و بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است.	$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = abc$ $\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{vmatrix} = abc$ $\begin{vmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} = abc$
۴	دترمینان ماتریس شبه‌قطری و شبه بالا مثلثی و شبه پایین مثلثی مطابق جدول روبه‌رو برابر منفیِ حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر فرعی است.	$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & a \\ ۰ & b & ۰ \\ c & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = -abc$ $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & a \\ ۰ & b & d \\ c & e & f \end{vmatrix} = -abc$ $\begin{vmatrix} e & d & a \\ f & b & ۰ \\ c & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = -abc$
۵	اگر در تمام درایه‌های یک ماتریس ۲×۲ عدد K ضرب شود، دترمینان، $K^۲$ برابر می‌شود.	$\|KA_{۲\times۲}\| = K^۲\|A\|$
۶	اگر تمام درایه‌های یک ماتریس ۳×۳ در عدد K ضرب شود، دترمینان، $K^۳$ برابر می‌شود.	$\|KA_{۳\times۳}\| = K^۳\|A\|$
۷	اگر عدد K در یک دترمینان ضرب شود، تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون دلخواه را در K ضرب می‌کنیم: $K\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ka & Kb & Kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & Kb & c \\ d & Ke & f \\ g & Kh & i \end{vmatrix} = \cdots$ و برعکس: می‌توان از یک سطر یا یک ستون دترمینان عامل مشترکی را فاکتور گرفت و به بیرون دترمینان انتقال داد.	
۸	اگر دو ماتریس برابر باشند، دترمینان آن‌ها با هم برابر است ولی عکس این قضیه برقرار نیست.	
۹	دترمینان ماتریس‌های AB و BA با هم برابر است:	$\|AB\| = \|BA\| = \|A\|\|B\|$
۱۰	دترمینان جمع و تفریق دو ماتریس تفکیک‌پذیر نمی‌باشد:	$\|A+B\| \neq \|A\|+\|B\|$

مثلاً اگر دترمینان ماتریس A را برابر ۳ داشته باشیم، برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس $A^۴$، لازم نیست که ماتریس A را به توان ۴ برسانیم، فقط کافی است که دترمینان A را به توان ۴ برسانیم، یعنی داریم:

$$|A^۴|=|A|^۴=۳^۴=۸۱$$

مثلاً اگر A ماتریس زیر باشد، دترمینان A برابر $-(۱)(۲)(-۳)$ و برابر ۶ است و دترمینان ماتریس $A^۲$ هم بدون حساب‌کردن خود ماتریس $A^۲$ به راحتی برابر $|A|^۲=۶^۲$ و برابر ۳۶ است.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۷ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $A^۳-۲A^۲$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) -۲۷ ۳) ۹ ۴) -۹

پاسخ **۱** می‌دانیم دترمینان ماتریس پایین مثلثی A برابر $-۳=(۳)(۱)(-۱)$ است. حالا از عبارت $A^۳-۲A^۲$ یک $A^۲$ فاکتور می‌گیریم:

$$|A^۳-۲A^۲|=|A^۲(A-۲I)|=|A^۲|\times|A-۲I|=۹\times|A-۲I|=۹|A-۲I|$$

حالا ماتریس $A-۲I$ را هم تشکیل می‌دهیم: (البته معلوم است که باز هم پایین مثلثی می‌شود.)

$$A-۲I=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۷ & -۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۵ & ۷ & -۳ \end{bmatrix}$$

پس $|A-۲I|$ هم برابر $۳=(۱)(-۱)(-۳)$ می‌شود و بنابراین دترمینان ماتریس $A^۳-۲A^۲$ برابر می‌شود با:

$$|A^۳-۲A^۲|=|A^۲|\times|A-۲I|=۹\times۳=۲۷$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & -a & -۲ \\ ۱ & a & ۱ \end{bmatrix}$ و $|۲A^۳|=۶۴$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **۲** ابتدا دترمینان A را با بسط برحسب سطر اول حساب می‌کنیم:

$$|A|=۱\times\begin{vmatrix} -a & -۲ \\ a & ۱ \end{vmatrix}+۰=-a+۲a=a \Rightarrow |۲A^۳|=۲^۳\times|A|^۳=۸|A|^۳=۸a^۳=۶۴ \Rightarrow a^۳=۸ \Rightarrow a=۲$$

تست دترمینان ماتریس مرتبهٔ ۲، A برابر -۲ است. دترمینان ماتریس $|A|\times A^۳$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۸ ۳) -۱۶ ۴) -۳۲

پاسخ **۴** می‌دانیم اگر عدد k در ماتریس $A_{۲\times۲}$ ضرب شود، دترمینان، $k^۲$ برابر می‌شود:

$$\Rightarrow ||\underbrace{A}_{k}|\times A^۳|=\underbrace{|A|^۲}_{k^۲}\times|A^۳|=|A|^۲\times|A|^۳=|A|^۵=(-۲)^۵=-۳۲$$

تست ماتریس A از مرتبهٔ ۲ و می‌دانیم $||A|A|+|\frac{۳}{|A|}A|=۱۰|A|$ است. $|A^۲|$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

پاسخ **۲** طبق قوانین دترمینان، داریم:

$$||A|A|+|\frac{۳}{|A|}A|=|A|^۲\times|A|+\frac{۹}{|A|^۲}\times|A|=|A|^۳+\frac{۹}{|A|}=۱۰|A|$$

حالا اگر طرفین را در $|A|$ ضرب کنیم و $|A|^۲$ را x بگیریم، داریم:

$$\xrightarrow{\times|A|}|A|^۴+۹=۱۰|A|^۲\xrightarrow{|A|^۲=x}x^۲+۹=۱۰x \Rightarrow x^۲-۱۰x+۹=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۹)=۰ \Rightarrow x=۱,۹$$

بنابراین $|A|^۲$ برابر ۱ یا ۹ است.

تست اگر $\begin{vmatrix} a & ۲b & c \\ ۵d & ۱۰e & ۵f \\ g & ۲h & i \end{vmatrix}=۲۰$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} a & b & ۴c \\ ۳c & ۳d & ۱۲f \\ e & f & ۴i \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

پاسخ ۴ در ابتدا از سطر دوم عبارت $\begin{vmatrix} a & ۲b & c \\ ۵d & ۱۰e & ۵f \\ g & ۲h & i \end{vmatrix}$، عدد ۵ را فاکتور می‌گیریم و با ۲۰ ساده می‌کنیم و سپس از ستون دوم هم از عدد ۲ فاکتور می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & ۲b & c \\ ۵d & ۱۰e & ۵f \\ g & ۲h & i \end{vmatrix}=۵\begin{vmatrix} a & ۲b & c \\ d & ۲e & f \\ g & ۲h & i \end{vmatrix}=۲۰ \xrightarrow{\div ۵} \begin{vmatrix} a & ۲b & c \\ d & ۲e & f \\ g & ۲h & i \end{vmatrix}=۴$$

$$\Rightarrow ۲\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=۴ \xrightarrow{\div ۲} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=۲$$

حالا این دترمینان را در ۳×۴ ضرب می‌کنیم و ضرب ۳ را به سطر دوم و ضرب ۴ را به ستون سوم می‌دهیم:

$$\xrightarrow{\times ۱۲} ۴\times ۳\times \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=۴\times ۳\times ۲=۲۴ \Rightarrow ۴\begin{vmatrix} a & b & c \\ ۳d & ۳e & ۳f \\ g & h & i \end{vmatrix}=۲۴ \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & ۴c \\ ۳d & ۳e & ۱۲f \\ g & h & ۴i \end{vmatrix}=۲۴$$

تست برای ماتریس A مربعی مرتبهٔ ۳ رابطهٔ روبه‌رو برقرار است. دترمینان ماتریس $A^۲$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۷ & -۴ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۱ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۶ & ۵ \end{bmatrix}=۴I$$

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ ۲ از دو طرف حاصل‌ضرب، دترمینان می‌گیریم و ماتریس سمت چپ، پایین‌مثلثی و برای ماتریس سمت راست هم دترمینان، منفیِ حاصل‌ضرب قطر فرعی است:

$$\Rightarrow (\underbrace{۱\times(-۴)\times ۱}_{-۴})\times |A|\times (\underbrace{-(۲)(۱)(-۱)}_{۲})=|۴I|=۴^۳\,|I|=۶۴ \Rightarrow |A|=-۸ \Rightarrow |A^۲|=۶۴$$

دترمینان ماتریس وارون

با توجه به رابطهٔ $A\times A^{-۱}=I$، اگر از دو طرف، دترمینان بگیریم به رابطهٔ بسیار مهم زیر می‌رسیم:

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$، با توجه به این‌که $\det(A)=۱\times ۴-۲\times ۳=-۲$ است، پس بدون محاسبهٔ $A^{-۱}$ می‌توانیم متوجه شویم که دترمینان $A^{-۱}$ برابر $\frac{۱}{|A|}$ یا همان $-\frac{۱}{۲}$ است:

$$\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{-۲}$$

تست اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $B^۴A^{-۱}B^{-۲}A^۲$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

پاسخ ۳ در ابتدا دقت کنید که $|A|=۲$ و $|B|=-۳$ است. حالا دترمینان ماتریس $B^۴A^{-۱}B^{-۲}A^۲$ را به صورت ضرب دترمینان‌ها می‌نویسیم:

$$\Rightarrow |B^۴A^{-۱}B^{-۲}A^۲|=|B^۴|\times|A^{-۱}|\times|B^{-۲}|\times|A^۲|=|B|^۴\times\frac{۱}{|A|}\times\frac{۱}{|B|^۲}\times|A|^۲=|B|^۲\times|A|=(-۳)^۲\times ۲=۱۸$$

تست اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و $|A|=-۳$ و $|I+A|=۱۵$ باشد، حاصل $|A^{-۱}+I|$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) −۵ ۳) ۱۵ ۴) −۱۵

پاسخ ۲ در ابتدا دقت کنید که $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{-۱}{۳}$ است. حالا دو طرف عبارت $|I+A|=۱۵$ را در $|A^{-۱}|$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow |A^{-۱}|\times|I+A|=۱۵|A^{-۱}| \Rightarrow |A^{-۱}(I+A)|=۱۵(-\frac{۱}{۳})=-۵$$

$$\Rightarrow |A^{-۱}I+\underbrace{A^{-۱}A}_{I}|=-۵ \Rightarrow |A^{-۱}+I|=-۵$$

روش عددگذاری در دترمینان

یک‌سری از تست‌های دترمینان از بقایای تست‌های مرسوم نظام قدیم هستند. در این‌جور مسائل با دترمینان‌هایی سروکار داریم که درایه‌های ماتریس را پارامترها تشکیل می‌دهند. در نظام قدیم بچه‌ها برای حل این تیپ سؤال‌ها یک سری قوانین در کتاب درسی داشتند که اتفاقاً دست و پا گیر بودند و استفاده از آن‌ها خیلی هم راحت نبود. ما در حل این تیپ سؤال‌ها که در ادامه می‌بینید از عددگذاری استفاده می‌کنیم یعنی به جای پارامترها عددهای ۰، ۱، ۱− و ۲ و کلاً اعداد کوچک را چک می‌کنیم که در بین این‌ها صفر از همه بهتر است. البته باید نیم نگاهی به گزینه‌ها هم داشته باشیم که با جای‌گذاری مثلاً ۰ یا ۱، گزینه‌ها یکسان نشوند. اگر چندتا متغیر هم داشتیم بهتر است تا حد ممکن همهٔ آن‌ها را یکسان قرار دهیم.

مثلاً اگر $a+b+c=1$ باشد و بخواهیم دترمینان روبه‌رو را حساب کنیم:

$$D=\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & c+2 \end{vmatrix}$$

و گزینه‌ها هم همگی عدد باشند و ربطی به a، b و c نداشته باشند، کافی است $a=1$ و $b=c=0$ قرار دهیم تا هم شرط مسئله $(a+b+c=1)$ برقرار باشد و هم محاسبهٔ دترمینان به دلیل وجود صفرها راحت‌تر شود:

$$\xrightarrow[b=c=0]{a=1} D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{(پایین مثلثی) حاصل‌ضرب روی}} 3(2)(2)=12$$

تست مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} b+c & a+c & b+a \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $a+b+c$
۳) $2(a+b+c)$
۴) $3(a+b+c)$

پاسخ ۱ در ابتدا به گزینه‌ها نگاه می‌کنیم. اگر هر سه‌تای a، b و c را صفر بگذاریم، گزینه‌ها یکی می‌شوند، پس این عددگذاری مناسب نیست. حالا اگر $a=1$ و $b=c=0$ بگذاریم، گزینه‌ها با هم فرق می‌کنند، پس جای‌گذاری می‌کنیم:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب سطر دوم}]{\text{بسط دترمینان}} -1\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

حالا در گزینه‌ها با جای‌گذاری $a=1$ و $b=c=0$، تنها ۱ است که صفر می‌شود و جواب مسئله است.

تست حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c+2 \\ 3a & 3b+2 & 3c+3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $3a$
۲) $-a$
۳) a
۴) abc

پاسخ ۲ باز هم گزینه‌ها را نگاه می‌کنیم و $a=0$ انتخاب خوبی نیست (چون هر ۴ گزینه یکسان می‌شوند)، پس به جای a، ۱ می‌گذاریم ولی برای راحتی کار b و c را صفر در نظر می‌گیریم:

$$\xrightarrow[b=c=0]{a=1} D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب سطر اول}]{\text{بسط دترمینان}} 1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+0=1\times(3-4)=-1$$

حالا باید ببینیم کدام گزینه با جای‌گذاری $a=1$ و $b=c=0$ عدد ۱− را می‌دهد، که جواب $-a$ و ۲ است.

تست اگر دترمینان $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ a & b & -1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-D-2$
۲) $-D-1$
۳) $-D$
۴) $-D+1$

پاسخ ۱ باز هم عددگذاری می‌کنیم، مثلاً $a=b=0$ را در نظر می‌گیریم و D را حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب سطر دوم}]{\text{بسط دترمینان}} -1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+0=-1\times(5-4)=-1$$

و دترمینان دوم را هم با جای‌گذاری $a=b=0$ حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow D'=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب سطر سوم}]{\text{بسط دترمینان}} -1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-1$$

حالا باید ببینیم که در کدام گزینه اگر به جای D مقدار -1 بگذاریم به جواب $D'=-1$ می‌رسیم، که جواب $-D-2$ و ۱ است.

$$-D-2=-(-1)-2=-1$$

تست ۲ اگر داشته باشیم $\begin{vmatrix} a+b+3c & a & b \\ c & 3a+b+c & b \\ c & a & a+3b+c \end{vmatrix}=24$، مقدار $(a+b+c)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۲ در این مسئله نمی‌توانیم هر سه مقدار a، b و c را عدد بدهیم چون باید جواب دترمینان حتماً ۲۴ شود. پس c و b را صفر قرار می‌دهیم و مقدار دترمینان را برحسب a به دست می‌آوریم و مساوی ۲۴ قرار می‌دهیم تا a به دست آید و سپس حاصل $(a+b+c)$ مشخص شود:

$$\xrightarrow{b=c=0} \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 3a & 0 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب ستون اول}]{\text{بسط دترمینان}} a\times\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ a & a \end{vmatrix}+0=a(3a^2)=3a^3 \Rightarrow 3a^3=24 \Rightarrow a^3=8 \Rightarrow a=2$$

و در نتیجه:

$$a+b+c=2+0+0=2$$

(حواستون باشه در مسئله فرقی نمی‌کرد که c و b را صفر قرار دهیم و a را به دست آوریم و یا مثلاً c و a را صفر قرار دهیم و b را به دست آوریم، در هر حالت جواب $a+b+c=2$ به دست می‌آید.)

دترمینان ماتریس ۳×۳

۲۱۴- مقدار $\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) -۲۰

۲۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ & -۴ \\ ۳ & ۰ & -۴ \\ ۳ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$، مقدار دترمینان A کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۱

۲۱۶- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ -۲ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟ (خارج ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۲ ۴) ۲۵

۲۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۵ & -۱۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $A \times B$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۱۸- ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} ۲ & i < j \\ ۰ & i = j \\ -۱ & i > j \end{cases}$ مفروض است. $|A|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & -a & -۲ \\ ۱ & a & ۱ \end{bmatrix}$ و $|A| = ۴$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$، حاصل $|B|^۲ \times |A|^۳$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) -۴

۲۲۱- اگر حاصل دترمینان مقابل ۶ باشد، a کدام است؟

$$D = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & a \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -a \end{vmatrix}$$

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲۲- به ازای کدام مقدار a، حاصل دترمینان روبه‌رو برابر ۲ است؟

$$D=\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & -۱ \\ ۴ & a & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{vmatrix}$$

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

۲۲۳- حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & y & x \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $۳y-x-۲$ ۲) $۳x-y-۲$ ۳) $۳y+x-۲$ ۴) $۳x+y-۲$

۲۲۴- مجموع دترمینان $\begin{vmatrix} x & ۰ & x \\ ۰ & y & ۰ \\ t & ۰ & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ۰ & x & ۰ \\ z & ۰ & y \\ ۰ & t & ۰ \end{vmatrix}$ برابر است با:

۱) $xy(z-t)$ ۲) $xy(t-z)$ ۳) صفر ۴) $۲xyzt$

۲۲۵- اگر $\begin{vmatrix} ۰ & y & x \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix}=۲$ باشد، کدام رابطه بین x و y برقرار است؟

۱) $y=۲x-۲$ ۲) $y=-۲x+۲$ ۳) $y=-۲x-۲$ ۴) $y=۲x+۲$

۲۲۶- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۰ & ۱۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۹ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۷ & ۰ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ \hdashline B \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان حاصل از حذف سطر چهارم و ستون سوم ماتریس C کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۲۲۷- اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & a \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، دترمینان ماتریس $B=\left[\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{A} & ۳ \\ & & ۲ \\ \hdashline ۰ & -۱ & ۱ \end{array}\right]$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۲۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$، $B=۳A-۲I$ و $C=\left[\begin{array}{c:c} B & A \\ \hdashline A & B \end{array}\right]$، دترمینان حاصل از حذف سطر دوم و ستون سوم ماتریس C کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۱

۲۲۹- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\left[\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{A^۲+I} & ۱ \\ & & ۲ \\ \hdashline -۱ & ۳ & ۰ \end{array}\right]$ باشد، حاصل دترمینان B کدام است؟

۱) -۳۳ ۲) -۳۵ ۳) -۳۷ ۴) -۳۹

۲۳۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $B=\left[\begin{array}{cc:c} -۱ & ۰ & ۱ \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{۲A^{-۱}} & ۰ \\ & & ۰ \end{array}\right]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۳۱- به ازای کدام مقدار k، معادلهٔ دترمینان $\begin{vmatrix} k & ۰ & x \\ ۰ & x+۱ & ۱ \\ x+۲ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}=۰$ فقط یک ریشه دارد؟

۱) $k=۱$ ۲) $k=-۱$ ۳) $k=۰$ ۴) $k=۲$

۲۳۲- معادلهٔ $\begin{vmatrix} -۱ & ۲x & ۱ \\ ۱ & -۲x & ۱ \\ ۲ & -۴x & ۱ \end{vmatrix}=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) بی‌شمار ۳) ۱ ۴) صفر

۲۳۳- جواب‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & -۴ \\ ۱ & ۲-x & ۱ \\ ۳-x & ۲ & ۳ \end{vmatrix}=۰$ کدام است؟ (سراسری ۹۹)

۱) -۴ و ۱ ۲) ۴ و ۱ ۳) ۵ و ۱ ۴) ۵ و ۲

۲۳۴- جواب‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ x+۵ & ۴ & -۲ \\ -۱ & ۶ & x-۱ \end{vmatrix}=۰$ کدام است؟ (خارج ۹۹)

۱) -۹ و ۴ ۲) -۸ و ۳ ۳) ۹ و -۴ ۴) ۸ و -۳

۲۳۵- معادلهٔ دترمینانی $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & x^2 & x^2 \\ 1 & x^3 & x \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۲۳۶- اگر $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -x & 3 \\ 2x-1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه به ازای چند مقدار حقیقی x، داریم: $|A| = 5$

۱) هیچ مقدار ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۳۷- اگر $A = [i^2 + 2j]_{3\times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} m & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقدار m، رابطهٔ $|AB| = 2$ برقرار است؟

۱) هیچ مقدار ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

بسط دترمینان براساس سطر یا ستونی خاص

۲۳۸- حاصل دترمینان $D = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) a^2 ۳) a ۴) $5a^2$

۲۳۹- اگر $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = A + x\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ باشد، مقدار A کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -6

۲۴۰- اگر $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & x & 5 \end{vmatrix} = A - x\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$، مقدار A کدام است؟

۱) -20 ۲) -15 ۳) -10 ۴) -5

۲۴۱- اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$ باشد، دترمینان $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & 4 & b \\ 2 & 15 & 1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

۲۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، $|A| = -2$ و $B = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 3 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A}} & -1 \\ & & 4 \end{array}\right]$ باشد، دترمینان B کدام است؟

۱) -2 ۲) ۳ ۳) -6 ۴) ۱۲

۲۴۳- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 12 \\ a & 2b & 5 \\ 6 & c^3 & 2 \end{bmatrix}$، اگر با اضافه‌کردن a واحد به عدد ۳- دترمینان تغییر نکند، مقدار a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۲۴۴- به کدام درایه از ماتریس مقابل می‌توان ۴ واحد اضافه کرد بدون آن‌که دترمینان تغییر نکند؟

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

۱) a_{11} ۲) a_{32} ۳) a_{23} ۴) a_{22}

۲۴۵- اگر از هر درایهٔ واقع در سطر دوم دترمینان زیر، ۲ برابر شمارهٔ ستون آن کم شود، به مقدار دترمینان اولیه، چه‌قدر افزوده می‌شود؟ (سراسری ۹۷)

$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

۱) ۱۳۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۶

۲۴۶- اگر به تمام درایه‌های ستون دوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ یک واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان اولیه کدام عدد اضافه می‌شود؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۳ ۴) ۶ (سراسری ۹۶)

۲۴۷- در دترمینان $\begin{vmatrix} ۳ & ۴ & ۲ \\ ۱ & a & -۳ \\ -۲ & ۴ & ۴ \end{vmatrix}$ اگر به عنصر واقع در سطر سوم و ستون سوم ۵ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییر نکند، a کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۳

۲۴۸- اگر با اضافه‌کردن ۴ واحد به درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ a & ۵ \end{bmatrix}$ دترمینان آن تغییری نکند، آن‌گاه دترمینان ماتریس زیر کدام است؟

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ -۱۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & a \end{bmatrix}$$

۱) -۶ ۲) -۷ ۳) -۸ ۴) -۹

۲۴۹- چه‌قدر به درایهٔ سطر دوم و ستوم سوم ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ -۳ & -۵۰ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۱۳ \end{bmatrix}$ اضافه کنیم تا مقدار دترمینان آن ۱۰ واحد کاهش یابد؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) -۱۰ ۴) ۱۰

۲۵۰- در دترمینان $\begin{vmatrix} ۵ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ a & ۴ & ۷ \end{vmatrix}$ اگر به جای عدد ۲ $-$ مقدار ۱۵ را بگذاریم، دترمینان تغییری نمی‌کند. مقدار a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۱

دترمینان ماتریس‌های خاص را می‌توان به کمک جدولی در درس‌نامه به راحتی محاسبه کرد.

۲۵۱- اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۳ & a+۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & a-۱ \end{bmatrix}$ برابر $a^۳+a+۲$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۵۲- اگر $\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix}=k_۱$ و $\begin{vmatrix} a+۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix}=k_۲$ کدام رابطه درست است؟

۱) $k_۲-k_۱=bc$ ۲) $k_۱-k_۲=bc$ ۳) $k_۱+k_۲=bc$ ۴) $k_۱+k_۲=-bc$

۲۵۳- اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $a_{ij}=\begin{cases} ۲|A|^۲ & i<j \\ |A| & i=j \\ ۰ & i>j \end{cases}$ در این صورت مقدار مثبت $|A|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵۴- اگر A ماتریس مربعی باشد که در رابطهٔ $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}=۱۰I_۳$ صدق کند، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱

۲۵۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & m \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} |A| & ۰ & ۰ \\ |A| & ۲|A| & ۰ \\ ۰ & ۰ & |A| \end{bmatrix}$ و $|B|=۵۴$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۵۶- اگر دترمینان ماتریس اسکالر $A_{۳\times۳}$ برابر ۲۷ باشد، مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس 2A کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۲۵۷- اگر A یک ماتریس اسکالر مرتبهٔ ۳ و داشته باشیم $|A+۲I|=۱$ دترمینان ماتریس $A^۲+I$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۵۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ و $b_{ij}=-a_{ji}$ باشد، دترمینان ماتریس $B+۲I$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

قوانین دترمینان

۲۵۹- اگر A ماتریس ۳×۳ و $|A|=۴$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $|A|A$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۶۴ ۲) ۹۶ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

۲۶۰- اگر $A=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||2A^{2}|-3A|$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) -36 ۴) -18

۲۶۱- اگر $A=\begin{bmatrix}-3&5\\1&-2\end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان ماتریس $A^{3}|A^{2}|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) -1 ۴) -3

۲۶۲- اگر $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&-7\\4&0&1\end{bmatrix}$ باشد حاصل $|A^{3}|$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۸ ۳) ۱ ۴) -8

۲۶۳- اگر $A=\begin{bmatrix}4&2&3\\0&0&2\\1&1&x^{2}\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A^{2} کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

۲۶۴- اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\a^{2}&-a&-2\\3&a&1\end{bmatrix}$ و $|A^{4}|=25$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$ ۳) $-\sqrt{5}$ ۴) صفر

۲۶۵- اگر $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&-1&0\\2&1&5\end{vmatrix}=3$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix}2x&2y&2z\\2&-2&0\\2&1&5\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) -3

۲۶۶- اگر $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=-2$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix}a_1&3b_1&c_1\\-2a_2&6b_2&-2c_2\\a_3&-3b_3&c_3\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) -12 ۲) -6 ۳) ۶ ۴) ۱۲

۲۶۷- دو سطر یک ماتریس 4×4 را در عدد ۲ و سه ستون آن را در -3 ضرب کرده‌ایم. دترمینان حاصل چند برابر شده است؟

۱) -6 ۲) -36 ۳) -54 ۴) -108

۲۶۸- دترمینان ماتریس $A_{3\times 3}$ برابر ۳ است. اگر همهٔ درایه‌های ماتریس به غیر از a_{12}، a_{22} و a_{32} را در ۲ ضرب کنیم، دترمینان ماتریس جدید کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۲۶۹- برای ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۳ رابطهٔ روبه‌رو برقرار است. مقدار $|A|$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-1&0\\3&2&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&4\\-3&0&5\end{bmatrix}=2I$$

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$

۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۷۰- اگر $A^{3}=\begin{bmatrix}27&0\\|A|&-1\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $\frac{|A|A^{2}}{3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۲۷۱- اگر A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ و $||A|A|+|\frac{2}{|A|}A^{-1}|=4$ باشد، آن‌گاه $|(A^{3})^{-1}|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۷۲- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}-1 & i<j\\ 0 & i=j\\ 2 & i>j\end{cases}$ باشد، حاصل $|2|A|A^{2}|$ کدام است؟

۱) -256 ۲) -128 ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

۲۷۳- ماتریس‌های A و B مربعی از مرتبهٔ 3×3 هستند. اگر $|A|=3$ و $||A|B|=-54$ باشد، حاصل $|A|B|^{2}|$ کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۹۲ ۳) -128 ۴) -192

۲۷۴- ماتریس A مربعی از مرتبهٔ ۴ است. اگر دترمینان آن برابر ۲ باشد، دترمینان ماتریس $A^{3}|A|A^{2}|$ کدام است؟

۱) 2^{38} ۲) 2^{39} ۳) 2^{40} ۴) 2^{41}

۲۷۵- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$ و $CA=۳B-C$ باشد، دترمینان ماتریس C کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۲۷۶- اگر $A_{۳\times۳}$ و داشته باشیم $A^۲+A+I=\bar{O}$، حاصل $|A^۲|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷۷- اگر A ماتریس ۳×۳ و $A^۲=۲I+۴A$ باشد، دترمینان ماتریس $(۲I-A)^۲$ کدام است؟

۱) ۲۱۶- ۲) ۲۱۶ ۳) ۳۶- ۴) ۳۶

۲۷۸- اگر A یک ماتریس ۲×۲ و داشته باشیم $(A-I_۲)^۲=A+۳I_۲$ باشد، دترمینان ماتریس $A^۲-۳A$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۷۹- اگر A مرتبهٔ ۳ و $A^۳=-I$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{|A+I|}{|A^۲-I|}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۳-

۲۸۰- اگر A ماتریس ۳×۳ و $||A|A^۲|-|\frac{۲}{|A|}A^۳|=۲۴$ باشد، حاصل $||A|A|-|A|A|-۳A|$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

۲۸۱- اگر $A^۳=\begin{bmatrix}x^۲+۱ & -۲\\ ۴ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||A|A+A|$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۴- ۴) ۸-

۲۸۲- اگر $۳A=\begin{bmatrix}|A| & ۴\\ ۲ & -|A|\end{bmatrix}$ باشد، بیشترین مقدار $|-\frac{۱}{۴}A|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۸۳- اگر $۲A^۲=\begin{bmatrix}|A| & |۲A|\\ ۱ & |A^{-۱}|\end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|۲A|+۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۳|A| & ۰ & |A|\\ ۰ & |A| & ۰\\ -۲|A| & ۰ & -|A|\end{bmatrix}$ و A وارون‌پذیر باشد، مقدار دترمینان $||A|^۲\times A^۴|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۵- اگر $A_{۲\times۲}$ و $A^۲=\bar{O}$ و $|A+I|=۳$ باشد، دترمینان ماتریس $A-I$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳-

۲۸۶- اگر A ماتریس ۳×۳ و $A^۲=\bar{O}$ و $|A-۲I|=۳۲$ باشد، دترمینان ماتریس $(A+۲I)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۴- ۴) ۸-

۲۸۷- اگر A ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ و $A^۳=۳I$ و $|A^۲+A+I|=۴$ باشد، دترمینان ماتریس $(A-I)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

دترمینان ماتریس وارون

۲۸۸- اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $A^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۸۹- اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۳ & -۱\\ ۱ & ۴ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $(A^۳)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶۲۵}$

۲۹۰- اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||A|A^{-۱}|$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۴- ۴) ۸-

۲۹۱- اگر $A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $(5A)(2A^{-1})$ چند برابر دترمینان A^{-1} است؟

۱) ۱۰ ۲) 10^2 ۳) 10^3 ۴) 10^4

۲۹۲- اگر A ماتریس ۲×۲ و وارون‌پذیر و $A^{-1}\times\begin{bmatrix}1&-2\\0&2\end{bmatrix}\times A^3=A\times\begin{bmatrix}1&0\\3&6\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(A^2)^{-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{27}$

۲۹۳- اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل دترمینان ماتریس $A^3B^{-1}B^2A^{-1}$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

۲۹۴- اگر A ماتریس مربعی ۲×۲ و وارون‌پذیر و k یک عدد حقیقی و داشته باشیم $\det((kA)^{-1})=\frac{8}{k^3\det(A)}$، مقدار k کدام است؟ $(k\neq 0)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۹۵- اگر A یک ماتریس مربعی ۲×۲ و معکوس‌پذیر و داشته باشیم $A^2=4A+2I$، دترمینان A^{-1} کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) -4

۲۹۶- اگر ماتریس‌های مربعی ۲×۲ و وارون‌پذیر A و B در رابطهٔ $(A^{-1}BA)^5=\begin{bmatrix}-64&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس B کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -4 ۴) -16

۲۹۷- اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}$ و $P=2\begin{bmatrix}-1&3\\2&-5\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(P^{-1}AP)^6$ کدام است؟ (خارج ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۹۸- اگر $A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&-1\end{bmatrix}$ و B ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ باشد و داشته باشیم $(A^{-1}BA)^2=A+2I_2$ دترمینان ماتریس $(B^2)^{-1}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۲۹۹- اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&3&0\\2&0&4\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $-\frac{1}{3}A^4A^{-1}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) -8 ۴) -27

۳۰۰- اگر $A=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&0\\2&1\end{bmatrix}$ باشد، حاصل عبارت $|B|\times|3A^{-1}+2B^{-1}|\times|A|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۰۱- اگر دترمینان ماتریس مربعی $A+B$ برابر ۵ باشد، دترمینان ماتریس $A(A^{-1}+B^{-1})B$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۲۵

۳۰۲- اگر A ماتریس مربعی و وارون‌پذیر مرتبهٔ ۲ باشد و $A^2=\bar{O}$ و $|A+I|=4$ باشد، $|A-I|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۲۵

۳۰۳- اگر A ماتریس مربعی و وارون‌پذیر باشد، حاصل $|I+2A^{-1}|$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\frac{|2I-A|}{|A|}$ ۲) $\frac{|2I+A|}{|A|}$ ۳) $\frac{|A|}{|2I-A|}$ ۴) $\frac{|A|}{|2I+A|}$

۳۰۴- اگر A و B ماتریس مربعی و وارون‌پذیر و $|I+ABA^{-1}|=4$ باشد، دترمینان ماتریس $(B+I)^2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱۶

۳۰۵- اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ و $|3A+2B|=3$ و $|A^{-1}|=\frac{1}{3}$ باشد، دترمینان $2A^{-1}B+3I$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۶- اگر A وارون‌پذیر و $A(A-I)=\bar{O}$ باشد، دترمینان ماتریس $(2A^2+3A)^{-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{25}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) ۵ ۴) ۲۵

۳۰۷- اگر A و B دو ماتریس مربعی و $|A+B|=10$ و $|B|=2$ باشد، دترمینان $I+AB^{-1}$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۲

روش عددگذاری در دترمینان

۳۰۸- حاصل $D=\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟ (خارج ۸۸)

۱) a ۲) $4a$ ۳) صفر ۴) 1

۳۰۹- اگر دترمینان $D=\begin{vmatrix} 6 & 3x & 2x \\ 3x & 2x & 6 \\ 2x & 6 & 3x \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $D'=\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 6 \\ 9 & 2x & 9 \\ 3x & 4 & 4 \end{vmatrix}$ کدام است؟ (سراسری ۹۳)

۱) $-2D$ ۲) $-D$ ۳) $\frac{1}{2}D$ ۴) D

۳۱۰- حاصل دترمینان $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-a^2$ ۲) a^2 ۳) $1-a$ ۴) $1+a$

۳۱۱- اگر $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ ac & ab & bc \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix}$ کدام است؟ (سراسری ۹۳)

۱) $-D$ ۲) D ۳) $(a+b+c)D$ ۴) $abcD$

۳۱۲- اگر ۲، b و a سه عدد متمایز باشند، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4(a+b) \\ 1 & a+1 & a^2(b+2) \\ 1 & b+1 & b^2(a+2) \end{vmatrix}$ کدام است؟ (خارج ۸۹)

۱) صفر ۲) $4ab$ ۳) $(a-2)(b-2)$ ۴) $2(a-2)(b-2)$

۳۱۳- اگر a، b و c سه عدد حقیقی متمایز باشند، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & a & bc-a^2 \\ 1 & b & ac-b^2 \\ 1 & c & ab-c^2 \end{vmatrix}$ کدام است؟ (خارج ۸۶)

۱) صفر ۲) abc ۳) $a+b+c$ ۴) $(a-b)(b-c)(c-a)$

۳۱۴- حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$ با شرط $y=x+z$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) $2x(x+z)$ ۲) $x(x+z)$ ۳) $x^2(x+z)$ ۴) $2x^2(x+z)$

۳۱۵- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} b+c & a+c & b+a \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $a+b+c$ ۲) صفر ۳) 2 ۴) $2(a+b+c)$

۳۱۶- حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c+2 \\ 3a & 3b+2 & 3c+3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $3a$ ۲) $2a$ ۳) $-2a$ ۴) $-a$

۳۱۷- اگر $k=\begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 3 & 1 & a \\ 1 & b & 2 \end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} 2a-2 & 0 & 0 \\ 1 & b & 2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) $-2k$ ۳) $-k$ ۴) k

۳۱۸- اگر $k=\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a & b & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & -3 \\ 2a & 2b & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) $-2k$ ۳) $\frac{k}{2}$ ۴) $-\frac{k}{2}$

۳۱۹- اگر $k=\begin{vmatrix}2&3&1\\a&1&5\\1&4&1\end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}4&3&1\\2a&1&5\\3&4&1\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) $2k+1$ ۳) $2k+14$ ۴) $2k+15$

۳۲۰- اگر $k=\begin{vmatrix}a&b&c\\2&1&1\\3&2&-1\end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix}6&4&-2\\2a+1&2b&2c\\4&2&2\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $8k+12$ ۲) $8k-12$ ۳) $-8k+12$ ۴) $-8k-12$

۳۲۱- اگر $k=\begin{vmatrix}2&3&a\\4&1&2\\-1&2&3\end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}6&4&a+1\\2&8&2\\4&-2&3\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-4k+36$ ۲) $-4k-36$ ۳) $4k-36$ ۴) $4k+36$

۳۲۲- اگر $k_1=\begin{vmatrix}2&a&3a\\2&2a&4a\\2&0&5a\end{vmatrix}$ و $k_2=\begin{vmatrix}3&3a&a\\4&4a&a\\5&2a&a\end{vmatrix}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $k_1=-2k_2$ ۲) $k_1=2k_2$ ۳) $k_1=-k_2$ ۴) $k_1=k_2$

۳۲۳- اگر $k=\begin{vmatrix}a&b&3\\1&-1&2\\-1&2&3\end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix}a-2&b+2&4\\1&-1&2\\1&-2&-3\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $k+5$ ۲) $-k-5$ ۳) $-k-3$ ۴) $k+3$

۳۲۴- اگر $D=\begin{vmatrix}1&2&4\\a&b&1\\2&5&1\end{vmatrix}$، آن‌گاه دترمینان $\begin{vmatrix}1&2&4\\4&10&2\\a&b&-1\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-2D-4$ ۲) $-2D+2$ ۳) $2D-1$ ۴) $2D+1$

۳۲۵- اگر $A=\begin{vmatrix}-a&b&0\\-1&-b&a\\a&-b&b\end{vmatrix}$، مقدار $\begin{vmatrix}b-a&1&0\\-b-1&-1&2a\\a-b&-1&2b\end{vmatrix}$ چیست؟

۱) $-\frac{2}{b}A$ ۲) $-2bA$ ۳) $2bA$ ۴) $\frac{2}{b}A$

۳۲۶- اگر $A=\begin{bmatrix}5+a&b&c\\a&5+b&c\\a&b&5+c\end{bmatrix}$ باشد و $a+b+c=7$، دترمینان ماتریس $(5A^{-1})$ کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{5}{7}$ ۳) $\frac{25}{12}$ ۴) $\frac{25}{7}$

۳۲۷- در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a+x&a&a\\b&b+x&b\\c&c&c+x\end{bmatrix}$ اگر مجموع تمام درایه‌ها برابر ۶ و مقدار $|A|=8$ باشد، x کدام است؟

۱) صفر ۲) ±1 ۳) ±2 ۴) ±3

آزمون

۳۲۸- در ماتریس $A=[i+j-1]_{n\times n}$ درایهٔ سطر اول و ستون آخر، ۲ برابر درایهٔ سطر دوم و ستون سوم است. در این ماتریس a_{n2} کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۳۲۹- اگر $I=\begin{bmatrix}4&a\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{3a}{2}\\0&b\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -1

۳۳۰- در ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$، اگر $a_{ij}=\begin{cases}2 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$ باشد، ماتریس A^2-4A برابر کدام است؟ (خارج ۹۴)

۱) $2I$ ۲) $3I$ ۳) $4I$ ۴) $5I$

۳۳۱- مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس اسکالر A از مرتبهٔ ۳، برابر ۳ است. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^3 کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

۳۳۲- اگر A ماتریس وارون‌پذیر و $A^2-2A+2I=\bar{O}$ باشد، حاصل $((A-I)^{-1})^2$ کدام است؟

۱) I ۲) $2I$ ۳) $-I$ ۴) $-2I$

۳۳۳- اگر $A+2B=3AB$ و A و B وارون‌پذیر باشند، حاصل $2A^{-1}+B^{-1}$ کدام است؟

۱) $3A^{-1}B^{-}$ ۲) $3I$ ۳) $3B^{-1}A^{-1}$ ۴) $3AB$

۳۳۴- اگر $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & x & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\2\\2\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -4 ۳) 4 ۴) 5

۳۳۵- اگر A و B ماتریس‌های مربعی و $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix}x & 3\\ 1 & y\end{bmatrix}$ باشد، $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳۶- ماتریس A از مرتبهٔ ۳ است. اگر مقدار دترمینان A برابر ۳ باشد، دترمینان ماتریس $\frac{3}{|A^{-1}|}A$ کدام است؟

۱) 3^6 ۲) 3^7 ۳) 3^8 ۴) 3^9

۳۳۷- A یک ماتریس وارون‌پذیر از مرتبهٔ ۲ و $B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -4 & |A|\end{bmatrix}$ و $A^{-1}B=3I$ باشد، $|A^3|$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

۳۳۸- اگر $K=\begin{vmatrix}a+b & 1 & 2\\ a & b & 1\\ 2a & 1 & -1\end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix}a+b & 1 & 2\\ a-b & 0 & -3\\ 2a & 2b & 2\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) $-2k$ ۳) $\frac{k}{2}$ ۴) $-\frac{k}{2}$

.۲۱۴ (گزینه ۳)

$$\begin{vmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{برحسب سطر اول}]{\text{بسط دترمینان}}3\times\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=3\times(9-1)-1\times(3-1)+1\times(1-3)=24-2-2=20$$

.۲۱۵ (گزینه ۲)

$$\xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{بسط برحسب}}|A|=\begin{vmatrix}4&-1&-4\\3&0&-4\\3&-1&-3\end{vmatrix}$$

$$=1\times\begin{vmatrix}3&-4\\3&-3\end{vmatrix}+0+1\times\begin{vmatrix}4&-4\\3&-4\end{vmatrix}$$

$$=1\times(\underbrace{-9+12}_{3})+(\underbrace{-16+12}_{-4})=-1$$

.۲۱۶ (گزینه ۴) بسط دترمینان را برحسب سطر دوم که یک درایهٔ صفر دارد، می‌نویسیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&0&5\\-2&6&1\end{vmatrix}=-3\times\begin{vmatrix}-1&4\\6&1\end{vmatrix}+0-5\times\begin{vmatrix}2&-1\\-2&6\end{vmatrix}$$

$$=-3(\underbrace{-1-24}_{-25})-5(\underbrace{12-2}_{10})=75-50=25$$

.۲۱۷ (گزینه ۴) (راه آ) ماتریس $A\times B$ را تشکیل می‌دهیم و دترمینان می‌گیریم:

$$AB=\begin{bmatrix}-2&3\\5&-11\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-2&5\\11&5&-23\\-2&-1&4\end{bmatrix}$$

حال برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$|AB|=-3\begin{vmatrix}5&-23\\-1&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}11&-23\\-2&4\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}11&5\\-2&-1\end{vmatrix}$$

$$=-3(\underbrace{20-23}_{-3})+2(\underbrace{44-46}_{-2})+5(\underbrace{-11+10}_{-1})=9-4-5=0$$

.۲۱۸ (گزینه ۴) مطابق تعریف ماتریس A را می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}0&2&2\\-1&0&2\\-1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{برحسب}}|A|=0-2\begin{vmatrix}-1&2\\-1&0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-1\end{vmatrix}$$

$$=-2(0+2)+2(1-0)=-4+2=-2$$

.۲۱۹ (گزینه ۴) بسط دترمینان برحسب سطر اول را می‌نویسیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&-a&-2\\1&a&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}-a&-2\\a&1\end{vmatrix}+0=(-a+2a)=a$$

حالا داریم: $|A|=4\Rightarrow a=4$

.۲۲۰ (گزینه ۲) در گام اول، دترمینان A را برحسب ستون دوم می‌نویسیم:

$$|A|=-1\times\begin{vmatrix}2&3\\2&2\end{vmatrix}=-1\times(4-6)=2$$

و در گام دوم، دترمینان B را هم برحسب ستون دوم می‌نویسیم:

$$|B|=1\times\begin{vmatrix}1&3\\3&8\end{vmatrix}=1\times(8-9)=-1$$

$$\Rightarrow |A|^3|B|^2=2^3\times(-1)^2=8$$

.۲۲۱ (گزینه ۲) برحسب ستون سوم بسط می‌دهیم:

$$D=\begin{vmatrix}1&0&a\\-1&1&0\\1&1&-a\end{vmatrix}=a\times\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}-0+(-a)\times\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}$$

$$=a(-1-1)-0+(-a)(1-0)=-2a-a=-3a=6\Rightarrow a=-2$$

.۲۲۲ (گزینه ۲) بسط دترمینان را برحسب ستون دوم می‌نویسیم:

$$\Rightarrow D=\begin{vmatrix}2&0&-1\\4&a&2\\1&3&0\end{vmatrix}=-0+a\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&-1\\4&2\end{vmatrix}$$

$$=a(0+1)-3(\underbrace{4+4}_{8})=a-24=2\Rightarrow a=26$$

.۲۲۳ (گزینه ۱) دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&-1\\x&y&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}0&-1\\y&1\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}2&-1\\x&1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}2&0\\x&y\end{vmatrix}$$

$$=(0+y)-1\times(2+x)+(2y+0)=3y-x-2$$

.۲۲۴ (گزینه ۲) هر کدام از دترمینان‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$D_1=\begin{vmatrix}0&x&0\\y&0&z\\0&t&0\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}}-x\begin{vmatrix}y&z\\0&0\end{vmatrix}=-x(0)=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}x&0&x\\0&y&0\\z&0&t\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط برحسب}}y\times\begin{vmatrix}x&x\\z&t\end{vmatrix}=y\times(xt-xz)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از x}}xy(t-z)$$

و در نهایت: $D_1+D_2=0+xy(t-z)=xy(t-z)$

۲۲۵. گزینه ۲ دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix} = x\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} - y\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 0$$

$$= x(1+1) - y(\underbrace{\cancel{1-2}}_{-1}) = 2x+y \Rightarrow 2x+y=2 \Rightarrow y=-2x+2$$

۲۲۶. گزینه ۱ ماتریس C را تشکیل می‌دهیم:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 12 & 1\\ 0 & -1 & 9 & 2\\ 4 & 1 & 7 & 0\end{bmatrix}$$

سطر چهارم و ستون سوم را حذف می‌کنیم و دترمینان می‌گیریم:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{بسط برحسب}} 1\times\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} - (-1)\times\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix} + 0$$

$$= (0+1)+(4+4) = 9$$

۲۲۷. گزینه ۲ اگر A وارون‌پذیر نباشد، باید $|A|=0$ باشد:

$$|A| = 4\times1-(-2)a=0 \Rightarrow a=-2$$

حالا دترمینان B را تشکیل می‌دهیم:

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب ستون اول}]{\text{بسط دترمینان}} 1\times\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} + 0$$

$$= (\underbrace{\cancel{4+2}}_{6}) + 2(\underbrace{\cancel{-2+3}}_{1}) = 6+2 = 8$$

۲۲۸. گزینه ۳ در گام اول، ماتریس B را تشکیل می‌دهیم:

$$B = 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\ -3 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

در گام دوم، ماتریس C را تشکیل می‌دهیم:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & A \end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 4 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -3 & 4\end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} A & B \end{array} \end{array}$$

و در گام آخر، سطر دوم و ستون سوم را حذف می‌کنیم و دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix} = 0$$

۲۲۹. گزینه ۳ در گام اول، ماتریس A^2+I را تشکیل می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2+I = \begin{bmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

در گام دوم، ماتریس B را می‌نویسیم و دترمینان می‌گیریم:

$$B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ -3 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} 5\times\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix} - 0 + 1\times\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= 5(0-6) - 0 + 1\times(-9+2) = -30-7 = -37$$

۲۳۰. گزینه ۴ راه I در گام اول A^{-1} را حساب می‌کنیم:

$$A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\cancel{1\times5-2\times3}}_{-1}}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & +2\\ +3 & -1\end{bmatrix}$$

در گام دوم دترمینان B را تشکیل می‌دهیم:

$$|B| = \begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ -10 & 4 & 0\\ 6 & -2 & 0\end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون سوم}]{\text{بسط برحسب}} 1\times\begin{vmatrix}-10 & 4\\ 6 & -2\end{vmatrix} + 0$$

$$= 20-24 = -4$$

راه II در ماتریس B برحسب ستون سوم می‌نویسیم:

$$|B| = \left|\begin{array}{cc:c} -1 & 0 & 1\\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{2A^{-1}} & \begin{array}{c}0\\0\end{array}\end{array}\right| = 1\times|2A^{-1}| = 2^2\times|A^{-1}| = \frac{2^2}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4$$

۲۳۱. گزینه ۲ بسط دترمینان را برحسب ستون دوم که ۲تا صفر دارد می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix}x & 0 & k\\ 1 & x+1 & 0\\ 2 & 0 & x+2\end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix}x & k\\ 2 & x+2\end{vmatrix}$$

$$= (x+1)(x^2+2x-2k) = 0$$

معادله دارای ریشهٔ $x=-1$ هست، پس معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+2x-2k=0$ یا نباید ریشه داشته باشد یا ریشهٔ آن فقط $x=-1$ باشد:

$$\begin{cases} \text{حالت اول}: \Delta<0 \Rightarrow 4+8k<0 \Rightarrow k<-\frac{1}{2}\\ \text{یا}\\ \text{حالت دوم}: x^2+2x-2k=(x+1)^2=x^2+2x+1 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

پس مجموعه‌جواب $k\le-\frac{1}{2}$ است که در گزینه‌ها فقط $k=-1$ در این شرط صدق می‌کند.

۲۳۲. گزینه ۲ بسط دترمینان را برحسب ستون اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix}1 & 2x & -1\\ 1 & -2x & 1\\ 1 & -4x & 2\end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix}-2x & 1\\ -4x & 2\end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix}2x & -1\\ -4x & 2\end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix}2x & -1\\ -2x & 1\end{vmatrix}$$

$$= 1\times(\overbrace{\cancel{-4x+4x}}^{0}) - 1\times(\overbrace{\cancel{4x-4x}}^{0}) + 1\times(\overbrace{\cancel{2x-2x}}^{0}) = 0$$

و مستقل از تعداد x، دترمینان همیشه صفر است، پس x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد و معادله بی‌شمار جواب دارد.

۲۳۳. گزینه ۳ بسط دترمینان برحسب سطر اول را می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix}-4 & 1 & 1\\ 1 & 2-x & 1\\ 3 & 2 & 3-x\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4\times\begin{vmatrix}2-x & 1\\ 2 & 3-x\end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3-x\end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix}1 & 2-x\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4(6+x^2-5x-2) - (3-x-3) + (2-6+3x) = 0$$

$$\Rightarrow -16-4x^2+20x+x-4+3x = 0$$

$$\Rightarrow -4x^2+24x-20=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } (-4)} x^2-6x+5=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5)=0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ یا } 5$$

۲۳۴. گزینه ۳ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1\times\begin{vmatrix} 4 & x+5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} -2 & x+5 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x-1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-4-6x-30)+(-2)(2-x^2-4x+5)+3(-12-4x+4)=0$$

$$\Rightarrow -6x-34+2x^2+8x-14-24-12x=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-10x-72=0 \xrightarrow{\div 2} x^2-5x-36=0$$

$$\Rightarrow (x-9)(x+4)=0 \Rightarrow x=9, x=-4$$

۲۳۵. گزینه ۱ بسط دترمینان را برحسب ستون اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & x^2 & x^2 \\ 1 & x^3 & x \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ x^3 & x \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} x & x^3 \\ x^3 & x \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} x & x^3 \\ x^2 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x^3-x^5)-(x^2-x^6)+(x^3-x^5)=0$$

$$\xrightarrow{\text{از } x^2 \text{ فاکتور می‌گیریم.}} x^2(x-x^3-1+x^4+x-x^3)=0$$

$$\Rightarrow x^2(x^4-2x^3+2x-1)=0$$

حالا عبارت داخل پرانتز را تجزیه می‌کنیم:

$$\Rightarrow x^2[(x^4-1)-2x(x^2-1)]=0$$

$$\Rightarrow x^2[(x^2-1)(x^2+1)-2x(x^2-1)]=0$$

$$\Rightarrow x^2(x^2-1)(\underbrace{x^2+1-2x}_{(x-1)^2})=0 \Rightarrow x=0,1,-1$$

۲۳۶. گزینه ۱ می‌دانیم اگر $A_{3\times3}=B_{3\times2}\times C_{2\times3}$ باشد، همواره دترمینان A برابر صفر است و هیچ‌گاه رابطهٔ $|A|=5$ برقرار نیست.

۲۳۷. گزینه ۱ می‌دانیم که اگر $C_{3\times3}=A_{3\times2}\times B_{2\times3}$ باشد، دترمینان C همواره برابر صفر است و به ازای هیچ مقداری از m مقدار دترمینان ۲ نمی‌شود.

۲۳۸. گزینه ۲ چون در سطر سوم ۲تا صفر داریم، پس بسط دترمینان برحسب سطر سوم را می‌نویسیم:

$$D = a\begin{vmatrix} a & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 = a(3a-2a) = a^2$$

۲۳۹. گزینه ۴ با توجه به صورت تست متوجه می‌شویم که باید دترمینان را برحسب ستون اول یا سطر سوم بنویسیم. (و فرقی هم نمی‌کند) که ما این‌جا برحسب ستون اول می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{1\times\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{A} + x\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow A = (\underbrace{-4-4}_{-8}) - \underbrace{2(6-7)}_{2} = -8+2 = -6$$

۲۴۰. گزینه ۲ بسط دترمینان را برحسب سطر سوم می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & x & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{2(3+2)+5(-5-0)}_{A} - x\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow A = 10-25 = -15$$

۲۴۱. گزینه ۳ بسط دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$0+1\times\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+0 = 1\times4 = 4$$

۲۴۲. گزینه ۳ بسط دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$|B| = 0-0+3|A| = 3(-2) = -6$$

۲۴۳. گزینه ۳ می‌دانیم که باید با حذف سطر و ستون مربوط به $a_{12}=-3$، دترمینان ماتریس باقی‌مانده صفر شود.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 12 \\ a & 2b & 5 \\ 6 & c^3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a-30=0 \Rightarrow a=15$$

۲۴۴. گزینه ۴ باید درایه‌ای را انتخاب کنیم که با حذف سطر و ستون آن، دترمینان باقی‌مانده صفر شود. تمام گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم. با انتخاب ۴ داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{a_{22}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\times(6)-2(3)=0$$

۲۴۵. گزینه ۴ ابتدا دترمینان اولیه را حساب می‌کنیم:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \overset{\text{بسط برحسب}}{\underset{\text{ستون اول}}{=\!=\!=}} 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 0 + 2\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-4+5)+2(-4+3) = 3$$

و سپس دترمینان دوم:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0-2\times1 & 1-2\times2 & -1-2\times3 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & -7 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{بسط برحسب}}{\underset{\text{سطر اول}}{=\!=\!=}} 5\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5(47)-4(22)-3(-4) = 159$$

و بنابراین داریم:

$$D_2 - D_1 = 159-3 = 156$$

۲۴۶. گزینه ۱ ابتدا $|A|$ را حساب می‌کنیم:

$$|A| \overset{\text{بسط برحسب}}{\underset{\text{ستون دوم}}{=\!=\!=}} -3\times\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0 = -3(30-21) = -27$$

و حالا یک واحد به درایه‌های ستون دوم اضافه می‌کنیم و دوباره دترمینان می‌گیریم:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \overset{\text{ساروس}}{=\!=\!=} \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{array}\right|$$

$$12 \quad 14 \quad 120 \quad 12 \quad 84 \quad 20$$

$$= (12+84+80)-(12+14+120) = -30$$

$$\xrightarrow{|B|-|A|} -30-(-27) = -3$$

۲۴۷. گزینه ۱ یعنی اگر $a_{33}=-2$ به $a_{33}=-2+5=3$ تغییر کند، دترمینان ثابت می‌ماند. پس باید دترمینان 2×2ای که از حذف طرف سطر سوم و ستون سوم باقی می‌ماند، صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a+12=0 \Rightarrow a=-6$$

۲۴۸. گزینه ۴

نکته می‌دانیم که در ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ اگر به تمامی درایه‌ها k واحد اضافه کنیم و دترمینان تغییر نکند، باید $a+d=b+c$ باشد.

$$\Rightarrow ۲+a=۳+۵ \Rightarrow a=۶$$

حالا بسط دترمینان A را برحسب سطر اول که دوتا صفر دارد می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{a=۶} |A|=\begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ -۱۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{vmatrix}=۳\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix}-۰+۰=۳(\overset{-۳}{\cancel{۱۲-۱۵}})=-۹$$

۲۴۹. گزینه ۳ بسط دترمینان را برحسب سطر دوم در دو حالت می‌نویسیم:

$$D_۱=\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ -۳ & -۵۰ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۱۳ \end{vmatrix}=۳\times\begin{vmatrix} ۳ & ۰ \\ ۵ & ۱۳ \end{vmatrix}-۵۰\times\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱۳ \end{vmatrix}-۲\times\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}$$

و در حالت دوم $a_{۲۳}=۲+x$ در نظر می‌گیریم:

$$D_۲=\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ -۳ & -۵۰ & ۲+x \\ ۲ & ۵ & ۱۳ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط برحسب}} ۳\begin{vmatrix} ۳ & ۰ \\ ۵ & ۱۳ \end{vmatrix}-۵۰\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱۳ \end{vmatrix}-(x+۲)\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}$$

که دو عبارت اول در بسط $D_۱$ و $D_۲$ یکسان است، پس داریم:

$$D_۱-D_۲=-۲\times\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}}_{-۱}+(x+۲)\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}}_{-۱}$$

$$=۲-x-۲=-x=۱۰ \Rightarrow x=-۱۰$$

۲۵۰. گزینه ۲ می‌دانیم که باید دترمینان ۲×۲ای که با حذف سطر دوم و ستون اول باقی می‌ماند صفر باشد

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۴ & a \end{vmatrix}=۰ \Rightarrow ۲a-۲۰=۰ \Rightarrow a=۱۰$$

۲۵۱. گزینه ۱ چون ماتریس پایین‌مثلثی است، پس دترمینان آن برابر حاصل‌ضرب قطر اصلی است:

$$\Rightarrow |A|=a(a+۱)(a-۱)=a(a^۲-۱)=\cancel{a^۳}-a=\cancel{a^۳}+a+۲$$

$$\Rightarrow ۲a=-۲ \Rightarrow a=-۱$$

۲۵۲. گزینه ۳ می‌دانیم $k_۱$ برابر منفی حاصل‌ضرب قطر فرعی و $k_۲$ برابر با حاصل‌ضرب قطر اصلی است:

$$\begin{cases} k_۱=-abc \\ k_۲=(a+۱)bc=abc+bc \end{cases} \xrightarrow{(+)} k_۱+k_۲=bc$$

۲۵۳. گزینه ۲ ماتریس A را می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix} |A| & ۲|A|^۲ & ۲|A|^۲ \\ ۰ & |A| & ۲|A|^۲ \\ ۰ & ۰ & |A| \end{bmatrix}$$

و چون ماتریس A بالامثلثی است، پس داریم:

$$|A|=|A|\times|A|\times|A|=|A|^۳ \Rightarrow |A|^۳-|A|=۰$$

$$\Rightarrow |A|(|A|^۲-۱)=۰ \Rightarrow |A|=۰,۱,-۱$$

که مقدار مثبت دترمینان A برابر ۱ است.

۲۵۴. گزینه ۲

نکته $|ABC|=|A||B||C|$

و دترمینان سمت چپ A حاصل‌ضرب قطر اصلی و دترمینان ماتریس راست A برابر منفیِ حاصل‌ضرب قطر فرعی است.

$$\Rightarrow (-۲)\times|A|\times(-۵)=\begin{vmatrix} ۱۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ \end{vmatrix}=۱۰۰۰ \Rightarrow |A|=۱۰۰$$

۲۵۵. گزینه ۲ دترمینان B برابر حاصل‌ضرب قطر اصلی می‌شود:

$$\Rightarrow |B|=۲|A|^۳=۵۴ \Rightarrow |A|^۳=۲۷ \Rightarrow |A|=۳$$

و از طرفی داریم: $|A|=۱(-۱)-۲m=-۱-۲m=۳ \Rightarrow m=-۲$

۲۵۶. گزینه ۲ ماتریس A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=k^۳=۲۷ \Rightarrow k=۳$$

$$\Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

و جمع درایه‌های ستون اول ماتریس ۲A برابر ۶ است.

۲۵۷. گزینه ۴ ماتریس A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}$$

و $A+۲I$ را می‌سازیم:

$$\Rightarrow A+۲I=\begin{bmatrix} k+۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & k+۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & k+۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+۲I|=(k+۲)^۳=۱ \Rightarrow k+۲=۱ \Rightarrow k=-۱$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲+I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

و دترمینان $A^۲+I$ برابر $۲^۳=۸$ است.

۲۵۸. گزینه ۳ ابتدا ماتریس $B+۲I$ را تشکیل می‌دهیم.

در ماتریس B همهٔ درایه‌های A منفی می‌شوند و بالامثلثی تبدیل به پایین‌مثلثی می‌شود (مثلاً $b_{۲۳}=-a_{۳۲}$):

$$B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & -۱ & ۰ \\ -۳ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}$$

و حالا $B+۲I$ را می‌نویسیم:

$$B+۲I=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & -۱ & ۰ \\ -۳ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

و بنابراین: $|B+۲I|=۱(۱)(-۲)=-۲$

۲۵۹. گزینه ۴ می‌دانیم: $|kA_{۳\times۳}|=k^۳|A|$

در نتیجه:

$$|\underset{۴}{\cancel{|A|}}A|=۴^۳|A|=۴^۳\times۴=۴^۴=۲۵۶$$

۲۶۰. گزینهٔ ۲ در ابتدا $|A|$ را حساب می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&5\\1&3\end{vmatrix}=2(3)-(1)(5)=1$$

یادآوری

$$|kA_{2\times2}|=k^2|A|$$

و سپس داریم:

$$|2A^2|=2^2\times|A|^2=4|A|^2=4$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}}\ |-3A|2A^2||=|-3A\times4|=|-12A|$$

$$=(-12)^2\underbrace{\cancel{|A|}}_{1}=144\times1=144$$

۲۶۱. گزینهٔ ۱ در گام اول $|A|$ را حساب می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}-3&5\\1&-2\end{vmatrix}=(-3)(-2)-(1)(5)=1$$

و در گام دوم از رابطهٔ $|A^n|=|A|^n$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow\ |\underbrace{\cancel{|A^3|}}_{1}A^3|=|A^3|=|A|^3=1^3=1$$

۲۶۲. گزینهٔ ۴ **یادآوری**

$$|A^n|=|A|^n$$

$$\Rightarrow\ |A|=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-7\\4&0&1\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{بسط برحسب}}1\times\begin{vmatrix}2&1\\4&1\end{vmatrix}+0=2-4=-2$$

و در نتیجه:

$$|A^3|=|A|^3=(-2)^3=-8$$

۲۶۳. گزینهٔ ۱ در گام اول دترمینان A را حساب می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}4&2&3\\0&0&2\\1&1&x^2\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط برحسب}}-2\times\begin{vmatrix}4&2\\1&1\end{vmatrix}+0=-2(4-2)=-4$$

و در نهایت:

$$|A^2|=|A|^2=(-4)^2=16$$

۲۶۴. گزینهٔ ۲ در گام اول دترمینان A را حساب می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\a^2&-a&-2\\3&a&1\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}}1\times\begin{vmatrix}-a&-2\\a&1\end{vmatrix}+0$$

$$=(-a+2a)=a$$

و در نتیجه:

$$|A^4|=|A|^4=a^4=25\ \Rightarrow\ a=\pm\sqrt{5}$$

۲۶۵. گزینهٔ ۱

یادآوری

$$k\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\x&y&z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ka&kb&kc\\d&e&f\\x&y&z\end{vmatrix}$$

اگر در یک ماتریس یک سطر یا یک ستون ماتریس را k برابر کنیم، دترمینان k برابر می‌شود.

در گام اول، سطر اول ماتریس را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2\times\begin{vmatrix}x&y&z\\1&-1&0\\2&1&5\end{vmatrix}=2\times3\ \xrightarrow{\text{ضرب در سطر اول}}\ \begin{vmatrix}2x&2y&2z\\1&-1&0\\2&1&5\end{vmatrix}=6$$

و در گام دوم، سطر دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\rightarrow\ 2\times\begin{vmatrix}2x&2y&2z\\1&-1&0\\2&1&5\end{vmatrix}=2\times6$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در سطر دوم}}\ \begin{vmatrix}2x&2y&2z\\2&-2&0\\2&1&5\end{vmatrix}=12$$

۲۶۶. گزینهٔ ۱ در دترمینان مورد نظر از سطر دوم عدد (-2) و از ستون دوم عدد (-3) فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix}a_1&-3b_1&c_1\\-2a_2&6b_2&-2c_2\\a_3&-3b_3&c_3\end{vmatrix}=(-2)(-3)\underbrace{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}_{-2}$$

$$=(-2)(-3)(-2)=-12$$

۲۶۷. گزینهٔ ۴ می‌دانیم که اگر هر سطر یا هر ستون ماتریس را در k ضرب کنیم، دترمینان k برابر می‌شود، پس در این‌جا داریم:

$$\frac{D'}{D}=\underbrace{(2)(2)}_{\text{۲ سطر}}\underbrace{(-3)(-3)(-3)}_{\text{۳ ستون}}=-108$$

۲۶۸. گزینهٔ ۱ مطابق شکل زیر یعنی فقط ستون دوم ضرب نشده است و ستون اول و دوم در ۲ ضرب شده و در نتیجه دترمینان $2\times2=4$ برابر شده است.

$$\begin{bmatrix}2a_{11}&a_{11}&2a_{13}\\2a_{21}&a_{22}&2a_{23}\\2a_{31}&a_{32}&2a_{33}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \text{دترمینان جدید}=4\times|A|=4\times3=12$$

۲۶۹. گزینهٔ ۳ از دو طرف دترمینان می‌گیریم:

$$\underbrace{\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&0\\3&2&1\end{vmatrix}}_{2(-1)(1)}\times|A|\times\underbrace{\begin{vmatrix}0&0&1\\0&2&4\\-3&0&5\end{vmatrix}}_{-(1)(2)(-3)}=|2I|=2^3|I|=8$$

و در نتیجه:

$$\Rightarrow\ -2|A|\times6=8\ \Rightarrow\ |A|=-\frac{2}{3}$$

۲۷۰. گزینهٔ ۳ در گام اول، دترمینان A^3 را حساب می‌کنیم:

$$|A^3|=\begin{vmatrix}27&0\\|A|&-1\end{vmatrix}=27(-1)-0=-27\ \Rightarrow\ |A|^3=27$$

$$\Rightarrow\ |A|=3$$

در گام دوم، طبق رابطهٔ $|kA_{2\times2}|=k^2|A|$ داریم:

$$\left|\frac{|A|}{3}A^2\right|=\Big(\frac{\overset{3}{\cancel{|A|}}}{3}\Big)^2|A^2|=1\times|A|^2=|A|^2=3^2=9$$

۲۷۱. گزینهٔ ۴ برای راحتی محاسبهٔ $|A|=x$ در نظر می‌گیریم:

$$|xA|+\left|\frac{2}{x}A^{-1}\right|=x^2|A|+\frac{4}{x^2}|A^{-1}|=x^2(x)+\frac{4}{x^2}\times\frac{1}{x}$$

$$=x^3+\frac{4}{x^3}=4\ \xrightarrow{\times x^3}\ x^6+4=4x^3$$

$$\Rightarrow\ x^6-4x^3+4=0\ \Rightarrow\ (x^3-2)^2=0\ \Rightarrow\ x^3=2$$

$$\Rightarrow\ |A|^3=2$$

در گام نهایی طبق خواص دترمینان داریم:

$$|(A^3)^{-1}|=|(A^{-1})^3|=|A^{-1}|^3=\Big(\frac{1}{|A|}\Big)^3=\frac{1}{|A|^3}=\frac{1}{2}$$

۲۷۲. گزینه ۱ ماتریس A را می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}۰&-۱&-۱\\۲&۰&-۱\\۲&۲&۰\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}} |A|=۰+۱\times\begin{vmatrix}۲&-۱\\۲&۰\end{vmatrix}-۱\times\begin{vmatrix}۲&۰\\۲&۲\end{vmatrix}$$

$$=(۰+۲)-(۴-۰)=-۲$$

حالا داریم:

$$|۲\underbrace{\cancel{|A|}}_{-۲}A^۲|=|-۴A^۲|=(-۴)^۳|A^۲|=-۶۴|A|^۲$$

$$=-۶۴\underbrace{\cancel{(-۲)^۲}}_{۴}=-۲۵۶$$

۲۷۳. گزینه ۲

اشاره: $|kA_{۳\times۳}|=k^۳|A|$

$$\Rightarrow ||A|B|=|۳B|=۳^۳|B|=-۵۴ \xrightarrow{\div ۲۷} |B|=-۲$$

$$\Rightarrow ||B|^۲A|=|۴A|=۴^۳|A|=۶۴\times۳=۱۹۲$$

۲۷۴. گزینه ۲ یادآوری $|kA_{n\times n}|=k^n|A|$

$$|A|=۲ \Rightarrow |||A^۲|A|A^۳|=|۴A|A^۳|$$

$$=|۴^۴\times \underbrace{\cancel{|A|}}_{۲}A^۳|=|۲^۹A^۳|=(۲^۹)^۴|A^۳|$$

$$=۲^{۳۶}\times۲^۳=۲^{۳۹}$$

۲۷۵. گزینه ۳ در گام اول عبارت را ساده می‌کنیم:

$$CA=۳B-C \Rightarrow CA+C=۳B \Rightarrow C(A+I)=۳B \quad (*)$$

در گام دوم ماتریس $A+I$ را حساب می‌کنیم:

$$A+I=\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۰\\۱&۳\end{bmatrix}\Rightarrow |A+I|=۹$$

$$|B|=\begin{vmatrix}۱&۳\\۲&۵\end{vmatrix}=۵-۶=-۱$$

و در گام نهایی از دو طرف عبارت (*) دترمینان می‌گیریم:

$$|C(A+I)|=|۳B_{۲\times۲}|\Rightarrow |C|\times\underbrace{\cancel{|A+I|}}_{۹}=۳^۲\underbrace{\cancel{|B|}}_{-۱}\Rightarrow |C|=-۱$$

۲۷۶. گزینه ۱ از چاق و لاغر کمک می‌گیریم:

$$A^۲+A+I=\bar{O} \xrightarrow{\times(A-I)} \underbrace{\cancel{(A-I)(A^۲+A+I)}}_{A^۳-I^۳}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^۳=I\Rightarrow |A|^۳=|I|=۱\Rightarrow|A|=۱$$

و در نهایت داریم: $|A^۲|=|A|^۲=۱^۲=۱$

۲۷۷. گزینه ۲ اتحاد $(۲I-A)^۲$ را باز می‌کنیم:

$$(۲I-A)^۲=۴I+A^۲-۴A$$

حالا به جای $A^۲$ طبق فرض مسئله $۲I+۴A$ می‌گذاریم:

$$\Rightarrow (۲I-A)^۲=۴I+(۲I+۴A)-۴A=۶I$$

$$\Rightarrow |(۲I-A)^۲|=|۶I_۳|=۶^۳|I|=۲۱۶\times۱=۲۱۶$$

۲۷۸. گزینه ۳ در گام اول اتحاد را ساده می‌کنیم:

$$(A-I)^۲=A+۳I\Rightarrow A^۲-۲A+I=A+۳I$$

$$\Rightarrow A^۲-۳A=۲I=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A^۲-۳A|=\begin{vmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{vmatrix}=۲\times۲=۴$$

۲۷۹. گزینه ۲ در ابتدا دترمینان A را حساب می‌کنیم:

$$A^۳=-I\Rightarrow |A^۳|=|-I|=-۱\Rightarrow|A|^۳=-۱\Rightarrow|A|=-۱$$

و در گام دوم به جای $-I$ در عبارت خواسته‌شده $A^۳$ می‌گذاریم:

$$\Rightarrow \frac{|A+I|}{|A^۲-I|}=\frac{|A+I|}{|A^۲+A^۳|}=\frac{|A+I|}{|A^۲(A+I)|}=\frac{\cancel{|A+I|}}{|A^۲|\times\cancel{|A+I|}}$$

$$=\frac{۱}{|A^۲|}=\frac{۱}{|A|^۲}=\frac{۱}{(-۱)^۲}=۱$$

۲۸۰. گزینه ۳ گفتیم که اگر A ماتریس ۳×۳ باشد، داریم:

$$|kA|=k^۳|A|$$

$$\Rightarrow ||A|A^۲|-|\frac{۲}{|A|}A^۳|=|A|^۳\times|A^۲|-\frac{۸}{|A|^۳}\times|A^۳|$$

$$=|A|^۳\times|A|^۲-\frac{۸}{\cancel{|A|^۳}}\times\cancel{|A|^۳}=|A|^۵-۸=۲۴$$

$$\Rightarrow |A|^۵=۳۲\Rightarrow|A|=۲$$

حالا به جای |A| مقدار ۲ قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow |۳A-\overset{۲}{\cancel{|A|}}A|=|۳A-۲A|=|A|=۲$$

۲۸۱. گزینه ۲ با حساب‌کردن دترمینان $A^۳$، دترمینان A هم حساب می‌شود:

$$|A^۳|=\begin{vmatrix}-۲&x^۲+۱\\۰&۴\end{vmatrix}=-۸-۰=-۸$$

$$\Rightarrow|A|^۳=-۸\Rightarrow|A|=-۲$$

بنابراین داریم:

$$|\underbrace{\cancel{|A|}}_{۲}A+A|=|-۲A+A|=|-A|=|A|=-۲$$

۲۸۲. گزینه ۲ در گام اول دترمینان A را حساب می‌کنیم:

$$|۳A|=\begin{vmatrix}۴&|A|\\-|A|&۲\end{vmatrix}\Rightarrow \underbrace{\cancel{۳^۲}}_{۹}\times|A|=۴(۲)+|A|^۲$$

$$\Rightarrow |A|^۲-۹|A|+۸=۰\Rightarrow (|A|-۱)(|A|-۸)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases}|A|=۱\\|A|=۸\end{cases}$$

در گام دوم $|-\frac{۱}{۴}A|$ را حساب می‌کنیم:

$$|-\frac{۱}{۴}A|=(-\frac{۱}{۴})^۲\times|A|=\frac{|A|}{۱۶}$$

که بیشترین مقدار مربوط به $|A|=۸$ و جواب برابر $\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$ است.

۲۸۳. گزینه ۳ از طرفین تساوی داده‌شده دترمینان می‌گیریم:

$$|۲A^۲|=\begin{vmatrix}|۲A|&|A|\\|A^{-۱}|&۱\end{vmatrix}\Rightarrow ۴|A|^۲=\underbrace{\cancel{|۲A|}}_{۴|A|}\times۱-\underbrace{\cancel{|A|\times|A^{-۱}|}}_{۱}$$

$$\Rightarrow ۴|A|^۲-۴|A|+۱=۰\Rightarrow(۲|A|-۱)^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲|A|-۱=۰\Rightarrow|A|=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه داریم:

$$|۲A|+۱=۲^۲\times|A|+۱=۴(\frac{۱}{۲})+۱=۳$$

۲۸۴. گزینهٔ ۱ دترمینان A را برحسب ستون دوم که دوتا صفر دارد می‌نویسیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 3|A| \\ 0 & |A| & 0 \\ -|A| & 0 & -2|A| \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط برحسب}} |A| \times \begin{vmatrix} |A| & 3|A| \\ -|A| & -2|A| \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\div|A|]{|A|\neq 0} 1 = \begin{vmatrix} |A| & 3|A| \\ -|A| & -2|A| \end{vmatrix}$$

$$= -2|A|^2 + 3|A|^2 = |A|^2 \Rightarrow |A|^2 = 1$$

در نتیجه:

$$|\underset{1}{\cancel{|A|^2}} \times A^4| = |A^4| = |A|^4 = (\underset{1}{\cancel{|A|^2}})^2 = 1$$

۲۸۵. گزینهٔ ۱ چون با $A+I$ و $A-I$ کار داریم، پس ضرب آن‌ها را انجام می‌دهیم که مزدوج است:

$$(A-I)\times(A+I) = A^2 - I = \bar{O} - I = -I$$

و در نتیجه:

$$|(A-I)(A+I)| = |-I|$$

$$\Rightarrow |A-I| \times \underset{3}{\cancel{|A+I|}} = 1 \Rightarrow |A-I| = \frac{1}{3}$$

۲۸۶. گزینهٔ ۲ با توجه به $(A-2I)$ و $(A+2I)$ از ضرب آن‌ها و اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$(A-2I)(A+2I) = A^2 - 4I^2 = \bar{O} - 4I = -4I$$

$$\Rightarrow |(A-2I)(A+2I)| = \underset{32}{\cancel{|A-2I|}} \times |A+2I| = |-4I|$$

$$= \underset{-64}{\cancel{-4^3}}|I| \Rightarrow |A+2I| = -\frac{64}{32} = -2$$

۲۸۷. گزینهٔ ۲ از رابطهٔ $A^3 = 3I$ به رابطهٔ $A^3 - I = 2I$ می‌رسیم و اتحاد چاق و لاغر می‌زنیم:

$$\Rightarrow A^3 - I = (A-I)(A^2 + A + I)$$

$$\Rightarrow \underset{2I}{\cancel{|A^3 - I|}} = |(A-I)| \times |\underset{4}{\cancel{A^2 + A + I}}|$$

$$\Rightarrow 2^3 \underset{1}{\cancel{|I|}} = |A-I| \times 4 \Rightarrow |A-I| = \frac{8}{4} = 2$$

۲۸۸. گزینهٔ ۳ می‌دانیم $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$، پس در ابتدا $|A|$ را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{ماتریس بالامثلثی}} |A| = 1 \times 3 \times 1 = 3 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$$

۲۸۹. گزینهٔ ۳ ابتدا دترمینان A را با بسط، برحسب ستون سوم حساب می‌کنیم:

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 1 \times (3+2) = 5$$

حالا داریم:

$$|(A^3)^{-1}| = |(A^{-1})^3| = |A^{-1}|^3 = (\frac{1}{|A|})^3 = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

۲۹۰. گزینهٔ ۲ داریم:

$$|A^{-1}| = 4(1) - 2(3) = -2 \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A|^{-1}} = -\frac{1}{2}$$

از طرفی می‌دانیم $|kA_{2\times2}| = k^2|A|$، پس:

$$||A^{-1}|A| = |-2A| = (-2)^2|A| = 4|A| = 4(-\frac{1}{2}) = -2$$

۲۹۱. گزینهٔ ۳ ماتریس $(5A)(2A^{-1})$ را ساده می‌کنیم:

$$(5A)(2A^{-1}) = 10AA^{-1} = 10I = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det((5A)(2A^{-})) = 100 = 10^2$$

از طرفی داریم:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4(1) - (-2)(3)} = \frac{1}{10}$$

و در نتیجه:

نسبت دترمینان‌ها: $\frac{10^2}{\frac{1}{10}} = 10^3$

۲۹۲. گزینهٔ ۳ از دو طرف تساوی، دترمینان می‌گیریم:

$$|A^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times A^3| = |A \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}|$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times |A^3| = |A| \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|A|} \times (2) \times |A|^3 = |A| \times 6 \Rightarrow |A| = 3$$

حالا داریم:

$$|(A^2)^{-1}| = \frac{1}{|A^2|} = \frac{1}{|A|^2} = \frac{1}{9}$$

۲۹۳. گزینهٔ ۲ ابتدا دترمینان A و B را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} |A| = 1(0) - (-1)(2) = 2 \\ |B| = 3(1) - 0(1) = 3 \end{cases}$$

و حالا داریم:

$$|A^3B^{-1}B^2A^{-1}| = |A|^3 \times |B^{-1}| \times |B|^2 \times |A|^{-1}$$

$$= |A^3| \times \frac{1}{|B|} \times |B|^2 \times \frac{1}{|A|} = |A|^2 \times |B| = 4 \times 3 = 12$$

۲۹۴. گزینهٔ ۴ می‌دانیم: $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

حالا از دو طرف، دترمینان می‌گیریم:

$$|(kA)^{-1}| = |\frac{1}{k}A^{-1}| = \frac{1}{k^2}|A^{-1}| = \frac{1}{k^2|A|} = \frac{8}{k^3|A|}$$

و با ساده‌کردن داریم:

$$\Rightarrow k = 8$$

۲۹۵. گزینهٔ ۲ یادآوری

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

رابطهٔ کیلی ـ همیلتون: $\Rightarrow A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$

طبق رابطهٔ کیلی ـ همیلتون $|A| = -2$ است و بنابراین داریم:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

۲۹۶. گزینهٔ ۲ می‌دانیم: $(A^{-1}BA)^5 = A^{-1}B^5A$

$$\Rightarrow |(A^{-1}BA)^5| = |A^{-1}| \times |B^5| \times |A| = \frac{1}{\cancel{|A|}} \times |B^5| \times \cancel{|A|}$$

$$= \underset{-32}{\cancel{(-64) \times (\frac{1}{2})}} \Rightarrow |B|^5 = -32 \Rightarrow |B| = -2$$

۲۹۷. گزینهٔ ۱ می‌دانیم: $(P^{-1}AP)^6 = P^{-1}A^6P$

و باید دترمینان بگیریم:

$$\Rightarrow |(P^{-1}AP)^6| = |P^{-1}A^6P| = |P^{-1}| \times |A|^6$$

$$= \frac{1}{\cancel{|P|}} \times |A|^6 \times \cancel{|P|} = |A|^6$$

و در نهایت $|A|$ را حساب می‌کنیم و به توان ۶ می‌رسانیم:

$$|A|=2(-2)-(-1)(3)=-1 \Rightarrow |A|^6=1$$

۲۹۸. گزینه ۴ رابطهٔ $(A^{-1}BA)^2$ را ساده می‌کنیم و از دو طرف تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$A+2I=(A^{-1}BA)^2=A^{-1}B^2A$$

$$\Rightarrow |A+2I|=|(A^{-1}BA^2)|=|A^{-1}B^2A|=\underbrace{\cancel{|A^{-1}|}}_{\frac{1}{|A|}}|B^2||A|=|B|^2$$

$$\Rightarrow |A+2I|=|B|^2$$

حالا $A+2I$ را حساب می‌کنیم:

$$A+2I=\begin{bmatrix}1&-2\\3&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\3&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+2I|=3-(-6)=9=|B|^2$$

از طرفی مسئله دترمینان $(B^2)^{-1}$ را خواسته، که داریم:

$$|(B^2)^{-1}|=\frac{1}{|B^2|}=\frac{1}{|B|^2}=\frac{1}{9}$$

۲۹۹. گزینه ۳ در گام اول با بسط دترمینان A برحسب ستون دوم داریم:

$$|A|=3\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}+0=3(4-2)=6$$

در گام دوم داریم:

$$|-\frac{1}{3}A^4A^{-1}|=(-\frac{1}{3})^3|A|^4\times\underbrace{\cancel{|A^{-1}|}}_{\frac{1}{|A|}}$$

$$=-\frac{1}{27}\times|A|^3=-\frac{1}{27}\times 6^3=-8$$

۳۰۰. گزینه ۴ می‌دانیم:

$$|A|\times|3A^{-1}+2B^{-1}|\times|B|=|A(3A^{-1}+2B^{-1})\times B|$$

حالا ماتریس را با پخش‌کردن ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow A(3A^{-1}+2B^{-1})B=(3I+2AB^{-1})\times B$$

$$=(3B+2A\underbrace{B^{-1}B}_{I})=3B+2A$$

پس کافی است ماتریس $3B+2A$ را حساب کرده و دترمینان بگیریم:

$$\Rightarrow 3B+2A=\begin{bmatrix}-3&0\\6&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&2\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\6&7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A(3A^{-1}+2B^{-1})\times B|=|3B+2A|=\begin{vmatrix}3&2\\6&7\end{vmatrix}$$

$$=3(7)-2(6)=9$$

۳۰۱. گزینه ۳ ابتدا عبارت $A(A^{-1}+B^{-1})B$ را با پخش‌کردن، ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow A(A^{-1}+B^{-1})B=(\underbrace{AA^{-1}}_{I}+AB^{-1})B$$

$$=(I+AB^{-1})B=\underbrace{IB}_{IB}+A\underbrace{B^{-1}B}_{I}$$

و در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow |A(A^{-1}+B^{-1})B|=|A+B|=5$$

۳۰۲. گزینه ۴ با توجه به صورت سؤال دو ماتریس $A+I$ و $A-I$ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(A+I)(A-I)=\underbrace{A^2}_{\bar{O}}-I=-I$$

حالا از دو طرف دترمینان می‌گیریم:

$$\Rightarrow \underbrace{|A+I|}_{I}\times|A-I|=|-I|=1 \Rightarrow |A-I|=\frac{1}{4}=0/25$$

۳۰۳. گزینه ۲ در ماتریس $I+2A^{-1}$ یک ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$A\times(I+2A^{-1})=A+2I$$

حالا از دو طرف دترمینان می‌گیریم:

$$\Rightarrow |A|\times|I+2A^{-1}|=|A+2I|$$

$$\xrightarrow{\div|A|} |I+2A^{-1}|=\frac{|A+2I|}{|A|}$$

۳۰۴. گزینه ۴ ماتریس I را به صورت AA^{-1} می‌نویسیم:

$$I+ABA^{-1}=AA^{-1}+ABA^{-1}$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{از چپ A}} A(A^{-1}+BA^{-1})$$

و حالا از راست از A^{-1} فاکتور می‌گیریم:

$$\Rightarrow I+ABA^{-1}=A(I+B)A^{-1}$$

$$\Rightarrow |I+ABA^{-1}|=|A(I+B)A^{-1}|$$

$$=|A|\times|I+B|\times\underbrace{|A^{-1}|}_{\frac{1}{|A|}}=|I+B|$$

و در نتیجه $|I+B|$ برابر ۴ است و در نهایت داریم:

$$|(B+I)^2|=|B+I|^2=4^2=16$$

۳۰۵. گزینه ۱ دو ماتریس A^{-1} و $3A+2B$ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1}(3A+2B)=3\underbrace{A^{-1}A}_{I}+2A^{-1}B=3I+2A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \underbrace{|A^{-1}|}_{\frac{1}{3}}\times|\underbrace{3A+2B}_{3}|=|3I+2A^{-1}B| \Rightarrow |3I+2A^{-1}B|=1$$

۳۰۶. گزینه ۱ ابتدا $A(A-I)=\bar{O}$ را ساده می‌کنیم:

$$A^2-A=\bar{O} \Rightarrow A^2=A \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{دترمینان}} |A^2|=|A|$$

$$\Rightarrow |A|^2=|A| \Rightarrow |A|=0,1$$

ولی چون A وارون‌پذیر است، پس $|A|\neq 0$ و در نتیجه $|A|=1$ است. حالا داریم:

$$2A^2+3A=2(A)+3A=5A$$

$$\Rightarrow |2A^2+3A|=|5A|=25|A|=25$$

و در نتیجه:

$$\Rightarrow |(2A^2+3A)^{-1}|=\frac{1}{|(2A^2+3A)|}=\frac{1}{25}$$

۳۰۷. گزینه ۳ از سمت راست $A+B$ ماتریس B را فاکتور می‌گیریم:

$$A+B=AI+B=A\underbrace{B^{-1}B}_{I}+B=(AB^{-1}+I)B$$

و حالا دترمینان ضرب دو ماتریس را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow |A+B|=|AB^{-1}+I|\times|B| \Rightarrow 10=|AB^{-1}+I|\times 2$$

$$\Rightarrow |AB^{-1}+I|=5$$

۳۰۸. گزینه ۳ عدد a را ۱− قرار می‌دهیم (با قراردادن $a=-1$ تمام گزینه‌ها با هم متفاوت می‌شوند):

$$D=\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} -1\times\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}+0+1\times\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}$$

$$=-\underbrace{(\cancel{4-3})}_{1}+(1-0)=-1+1=0$$

و بنابراین ۳ صحیح است.

۳۰۹. گزینه ۲ **راه I** $x=1$ قرار می‌دهیم و هر دو دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$D=\begin{vmatrix}6 & 3x & 2x\\ 3x & 2x & 6\\ 2x & 6 & 3x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overset{+}{6} & \overset{-}{3} & \overset{+}{2}\\ 3 & 2 & 6\\ 2 & 6 & 3\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} 6(-30)-3(-3)+2(14)=-143$$

$$D'=\begin{vmatrix}x^2 & x^2 & 6\\ 9 & 2x & 9\\ 3x & 4 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{6}\\ 9 & 2 & 9\\ 3 & 4 & 4\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} 1(-28)-(+9)+6(30)=143$$

راه II

$$D=\begin{vmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 6 & 0\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} 6\times\begin{vmatrix}0 & 6\\ 6 & 0\end{vmatrix}=-6^3$$

$$D'=\begin{vmatrix}0 & 0 & 6\\ 9 & 0 & 9\\ 0 & 4 & 4\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} 6\times\begin{vmatrix}9 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=6(36)=6^3$$

و بنابراین رابطهٔ $D'=-D$ برقرار است.

۳۱۰. گزینه ۲ $a=1$ قرار می‌دهیم:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1\\ 1 & 1 & 1-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{ستون سوم}]{\text{بسط برحسب}} 1\times\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\times1-1\times0=1$$

و در بین گزینه‌ها $D=a^2=1^2$ قابل‌قبول است.

۳۱۱. گزینه ۱ عددهای $a=0$، $b=1$ و $c=2$ را جای‌گذاری می‌کنیم و هر دو دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ bc & ac & ab\\ ac & ab & bc\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر سوم}]{\text{بسط برحسب}} 2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2(0-2)=-4$$

$$D'=\begin{vmatrix}a+b & b & ab\\ b+c & c & bc\\ a+c & a & ac\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر سوم}]{\text{بسط برحسب}} 2\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2(2-0)=4$$

و بنابراین با توجه به گزینه‌ها رابطهٔ $D'=-D$ برقرار است.

۳۱۲. گزینه ۱ فرض می‌کنیم $a=1$ و $b=-1$ و داریم:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4(a+b)\\ 1 & a+1 & a^2(b+2)\\ 1 & b+1 & b^2(a+2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} 1\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-6=0$$

و تنها ۱ است که با جای‌گذاری $a=1$ و $b=-1$ به جواب صفر می‌رسد.

۳۱۳. گزینه ۱ فرض کنید $a=1$، $b=2$ و $c=-1$ باشد، در این صورت مقدار گزینه‌ها برابر صفر، ۲-، ۲ و ۶ می‌شود که با هم متفاوت‌اند. حالا دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}1 & a & bc-a^2\\ 1 & b & ac-b^2\\ 1 & c & ab-c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & -1\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ساروس}} (2-5+3)-(-6+5+1)=0$$

و بنابراین جواب ۱ است.

۳۱۴. گزینه ۴ با انتخاب $x=y=-1$ و $z=0$ هم شرط $y=x+z$ درست می‌شود و هم گزینه‌ها به ترتیب ۲، ۱، ۱- و ۲- می‌شوند که با هم متفاوت هستند. حالا دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}1+x & x & y+z\\ 1 & y & x+z\\ 1 & z & x+y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}0 & -1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ساروس}} (0+1+0)-(+1+0+1)=-1$$

پس ۳ یعنی $x^2(x+z)$ که با عددگذاری ما همان ۱- بود را انتخاب می‌کنیم.

۳۱۵. گزینه ۲ با عددگذاری $a=b=c=1$ تمام گزینه‌ها متفاوت می‌شوند و به ترتیب ۳، ۰، ۲ و ۶ هستند. حالا داریم:

$$\begin{vmatrix}b+c & a+c & b+a\\ a & b & c\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{ساروس}}\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & 1\\ 2 & 2\end{matrix}$$

$$=(4+4+4)-(4+4+4)=0$$

و در نتیجه ۲ جواب است.

تذکر اگر در یک ماتریس دو سطر یا ستون برابر هم (یا ضریبی از هم) باشند، دترمینان همیشه صفر است.

۳۱۶. گزینه ۴ چون گزینه‌ها به b و c بستگی ندارد آن‌ها را صفر می‌گذاریم و برای راحتی محاسبه $a=1$ را هم جای‌گذاری می‌کنیم به این ترتیب گزینه‌ها ۳، ۲، ۲- و ۱- می‌شوند:

$$\xrightarrow[b=c=0]{a=1}\begin{vmatrix}a & b & c\\ 2a & 2b+1 & 2c+2\\ 3a & 3b+2 & 3c+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}}$$

$$1\times\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}+0=1\times(3-4)=-1$$

و جواب ۴ یا همان $-a$ است.

۳۱۷. گزینه ۲ با عددگذاری $a=b=0$ داریم:

$$k=\begin{vmatrix}a & b & 2\\ 3 & 1 & a\\ 1 & b & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} 2\times\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2$$

$$D=\begin{vmatrix}2a-2 & 0 & 0\\ 1 & b & 2\\ 3 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} -2\times\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2(-2)=4$$

پس با توجه به گزینه‌ها $k=-2$ و $D=4$ رابطهٔ $D=-2k$ برقرار است.

۳۱۸. گزینه ۲ با عددگذاری $a=۰$ و $b=۱$ داریم:

$$k=\begin{vmatrix} a+b & ۱ & ۲ \\ a & b & ۱ \\ ۲a & ۱ & -۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} ۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}=-۲$$

$$D=\begin{vmatrix} a+b & ۱ & ۲ \\ a-b & ۰ & -۳ \\ ۲a & ۲b & ۲ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{بسط برحسب}} ۱\times\begin{vmatrix} ۰ & -۳ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix}+۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix}+۰$$

$$=۱\times(۰+۶)+۱\times(۲-۴)=۴$$

و با توجه به گزینه‌ها و $k=-۲$ و $D=۴$ رابطهٔ $D=-۲k$ صحیح است.

۳۱۹. گزینه ۳ مقدار $a=۰$ را جای‌گذاری می‌کنیم و دترمینان‌ها را حساب می‌کنیم:

$$k=\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ a & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۱ \end{vmatrix}\xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{بسط برحسب}} ۲\times\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix}+۱\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix}$$

$$=۲\,\underbrace{\cancel{(۱-۲۰)}}_{-۱۹}+۱\times\underbrace{\cancel{(۱۵-۱)}}_{۱۴}=-۲۴$$

$$D=\begin{vmatrix} ۴ & ۳ & ۱ \\ ۲a & ۱ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۴ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{vmatrix}=۴\times\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix}+۳\times\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix}$$

$$=۴\,\underbrace{\cancel{(۱-۲۰)}}_{-۱۹}+۳\,\underbrace{\cancel{(۱۵-۱)}}_{۱۴}=-۳۴$$

که با توجه به گزینه‌ها رابطهٔ $D=۲k+۱۴$ برقرار است.

۳۲۰. گزینه ۲ عددگذاری $a=۱$ و $b=c=۰$ را انجام می‌دهیم:

$$k=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} ۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}=۱\times(-۱-۲)=-۳$$

$$D=\begin{vmatrix} ۶ & ۴ & -۲ \\ ۲a+۱ & ۲b & ۲c \\ ۴ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۶ & ۴ & -۲ \\ ۳ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط برحسب}} -۳\times\begin{vmatrix} ۴ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix}=-۳\times(۸+۴)=-۳۶$$

و با مقایسهٔ $k=-۳$ و $D=-۳۶$ در گزینه‌ها رابطهٔ $D=۸k-۱۲$ صحیح است.

۳۲۱. گزینه ۲ با جای‌گذاری $a=۰$ داریم:

$$k=\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} ۲\times\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}-۳\begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$=۲(-۱)-۳(۱۴)=-۴۴$$

$$D=\begin{vmatrix} ۶ & ۴ & a+۱ \\ ۲ & ۸ & ۲ \\ ۴ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۶ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۸ & ۲ \\ ۴ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} ۶\begin{vmatrix} ۸ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{vmatrix}-۴\begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix}+۱\times\begin{vmatrix} ۲ & ۸ \\ ۴ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$=۶(۲۸)-۴(-۲)+(-۳۶)=۱۴۰$$

که با توجه به گزینه‌های مشابه و $k=-۴۴$ و $D=۱۴۰$ رابطهٔ $D=-۴k-۳۶$ برقرار است.

۳۲۲. گزینه ۱ با جای‌گذاری $a=۱$ داریم:

$$k_۱ \xrightarrow{\text{ساروس}} \left|\begin{matrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{matrix}\right|\begin{matrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{matrix}=(۲۰+۸+۰)-(۱۰+۰+۱۲)=۶$$

$$۱۲ \quad ۰ \quad ۱۰ \quad ۲۰ \quad ۸ \quad ۰$$

$$k_۲=\begin{vmatrix} ۳ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۴ & ۱ \\ ۵ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}\xrightarrow[\text{ستون سوم}]{\text{بسط برحسب}} ۱\times\begin{vmatrix} ۴ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix}-۱\times\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ ۵ & ۲ \end{vmatrix}+۱\times\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ ۴ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$=۱\times(-۱۲)-۱\times(-۹)+۰=-۳$$

که با توجه به $k_۱=۶$ و $k_۲=-۳$ در گزینه‌ها رابطهٔ $k_۱=-۲k_۲$ برقرار است.

۳۲۳. گزینه ۲ با جای‌گذاری $a=b=۰$ داریم:

$$k=\begin{vmatrix} a & b & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} ۳\times\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}+۰=۳(۲-۱)=۳$$

$$D=\begin{vmatrix} a-۲ & b+۲ & ۴ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -۲ & ۲ & ۴ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} -۲ & ۲ & ۴ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{matrix}\right|\begin{matrix} -۲ & ۲ \\ ۱ & -۱ \\ ۱ & -۲ \end{matrix}$$

$$-۴ \quad ۸ \quad -۶ \quad -۶ \quad ۴ \quad -۸$$

$$=(\underbrace{\cancel{-۶+۴}-۸}_{-۱۰})-(\underbrace{\cancel{-۴+۸}-۶}_{-۲})=-۸$$

که با توجه به مقدارهای $k=۳$ و $D=-۸$ و (۲) یعنی رابطهٔ $D=-k-۵$ برقرار است.

۳۲۴. گزینه ۱ برای عددگذاری $a=b=۰$ رانتخاب می‌کنیم و داریم:

$$D=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ a & b & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط برحسب}} -۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}=-۱(۵-۴)=-۱$$

$$D'=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۴ & ۱۰ & ۲ \\ a & b & -۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۴ & ۱۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر سوم}]{\text{بسط برحسب}} -۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱۰ \end{vmatrix}=-۱\times(۱۰-۸)=-۲$$

که با توجه به مقدارهای $D=-۱$ و $D'=-۲$ و گزینه‌ها، رابطهٔ $D'=-۲D-۴$ برقرار است.

۳۲۵. گزینه ۴ عددگذاری $a=۰$ و $b=۲$ را در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow A=\begin{vmatrix} ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۲ \end{vmatrix}\xrightarrow[\text{ستون سوم}]{\text{بسط برحسب}} ۲\begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix}=۲(۲)=۴$$

حالا دترمینان دوم را هم حساب می‌کنیم:

$$B=\begin{vmatrix} b-a & ۱ & ۰ \\ -b-۱ & -۱ & ۲a \\ a-b & -۱ & ۲b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & -۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{ستون اول}]{\text{بسط برحسب}} ۴\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۳ & -۱ \end{vmatrix}=۴(۱)=۴$$

حالا در گزینه‌ها $A=4$ و $b=2$ را جایگزین می‌کنیم و تنها (۴) که به صورت $B=\frac{2}{b}A$ است، جواب مسئله است.

۳۲۶. گزینه ۱ با جای‌گذاری $a=7$ و $b=c=0$ داریم:

$$|A|=\begin{vmatrix}12&0&0\\7&5&0\\7&0&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{پایین‌مثلثی}}12\times5\times5=12\times5^2$$

حالا داریم:

$$|5A^{-1}_{3\times3}|=5^3|A^{-1}|=5^3\times\frac{1}{|A|}=\frac{5^3}{12\times5^2}=\frac{5}{12}$$

۳۲۷. گزینه ۳ مجموع تمام داده‌ها برابر $3(a+b+c+x)=6$ است و در نتیجه:

$$a+b+c+x=2$$

حالا برای راحتی کار $b=c=0$ در نظر می‌گیریم و داریم: $a+x=2$

$$|A|=\begin{vmatrix}a+x&a&a\\b&b+x&b\\c&c&c+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overset{2}{\cancel{a+x}}&a&a\\0&x&0\\0&0&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{بالامثلثی}}2x^2\Rightarrow 2x^2=8\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2$$

۳۲۸. گزینه ۱ مرتبهٔ ماتریس $n\times n$ است. پس ماتریس n تا ستون دارد و منظور از درایهٔ سطر اول و ستون آخر، a_{1n} است. بنابراین داریم:

$$a_{1n}=1+n-1=n\ ,\ a_{23}=2+3-1=4$$

در نتیجه:

$$\frac{a_{1n}}{a_{23}}=2\Rightarrow\frac{n}{4}=2\Rightarrow n=8$$

یعنی مرتبهٔ ماتریس 8×8 است و مسئله از ما a_{82} را خواسته که کافی است در فرمول درایهٔ عمومی جای‌گذاری کنیم:

$$a_{82}=8+2-1=9$$

۳۲۹. گزینه ۳ ضرب دو ماتریس را می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{3a}{2}\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&a\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&a\\0&\frac{b}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

و داریم:

$$\Rightarrow a=0\ ,\ \frac{b}{2}=1\Rightarrow b=2\Rightarrow a+b=2$$

۳۳۰. گزینه ۴ در گام اول، ماتریس A را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}}A^2=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$A^2-4A=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-4\times\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2-4A=5I$$

۳۳۱. گزینه ۳ در هر سطر یا ستون ماتریس اسکالر، فقط یک عدد روی قطر اصلی داریم و چون در مسئله این عدد را ۳ داده است، پس ماتریس به صورت $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ یا همان ماتریس $3I$ است. حالا ماتریس A^3 همان $27I$ است که دوباره در هر سطر یا هر ستون فقط یک عدد ۲۷ دارد و جمع درایه‌های ستون دوم A^3 هم ۲۷ می‌شود:

$$A^3=\begin{bmatrix}27&0&0\\0&27&0\\0&0&27\end{bmatrix}$$

۳۳۲. گزینه ۳ می‌دانیم $(A^{-1})^2=(A^2)^{-1}$ و در نتیجه:

$$((A-I)^{-1})^2=((A-I)^2)^{-1}=(A^2-2A+I)^{-1}$$

و به جای A^2 ماتریس $2A-2I$ می‌گذاریم:

$$\Rightarrow((A-I)^{-1})^2=(\cancel{2A}-2I-\cancel{2A}+I)^{-1}=(-I)^{-1}=-I$$

۳۳۳. گزینه ۲ ابتدا عبارت را از چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times A^{-1}}I+2A^{-1}B=3\underbrace{A^{-1}A}_{I}B=3B$$

و حالا از راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$B^{-1}+2A^{-1}\underbrace{BB^{-1}}_{I}=3\underbrace{BB^{-1}}_{I}\Rightarrow B^{-1}+2A^{-1}=3I$$

۳۳۴. گزینه ۳ دستگاه معادلات را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}-y+2(2)=-1\Rightarrow y=5\\y+2x-2=1\end{cases}$$

و $y=5$ را در معادلهٔ دوم جایگزین می‌کنیم و x را حساب می‌کنیم:

$$5+2x-2=1\Rightarrow 2x=-2\Rightarrow x=-1$$

و در نهایت:

$$\Rightarrow x+y=-1+5=4$$

۳۳۵. گزینه ۳ می‌دانیم در ضرب ماتریس‌های 2×2ی AB و BA، دترمینان‌ها برابر و جمع درایه‌های قطر اصلی هم با هم برابر است:

$$\Rightarrow x+y=1+2=3$$

۳۳۶. گزینه ۲ در گام اول داریم:

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{3}{|A^{-1}|}=\frac{3}{\frac{1}{3}}=9$$

و در نتیجه:

$$|\underbrace{\cancel{\frac{3}{|A^{-1}|}}}_{9}A|=|9A|=9^3\times|A|=9^3\times3=3^6\times3=3^7$$

۳۳۷. گزینه ۲ در گام اول $|B|$ را از دو رابطه حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}|B|=\begin{vmatrix}5&1\\-4&|A|\end{vmatrix}=5|A|+4\\A^{-1}B=3I\Rightarrow\underbrace{|\cancel{A^{-1}}|}_{\frac{1}{|A|}}|B|=9|I|=9\Rightarrow|B|=9|A|\end{cases}$$

در گام دوم این دو معادله را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow 5|A|+4=9|A|\Rightarrow 4|A|=4\Rightarrow|A|=1$$

و در نتیجه $|A^3|=|A|^3=1^3=1$

۳۳۸. گزینه ۲ اگر $a=b=0$ قرار دهیم از دترمینان اول $k=0$ به دست می‌آید و تمام گزینه‌ها یکی می‌شود که مناسب نیست. پس $a=1$ و $b=0$ انتخاب می‌کنیم:

$$k=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&1\\2&1&-1\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط برحسب}}-1\times\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}+0-1\times\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-4$$

و همین‌طور با جای‌گذاری $a=1$ و $b=0$ دترمینان دوم را هم حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow D=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&-3\\2&0&2\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{برحسب ستون دوم}]{\text{دترمینان}}-1\times\begin{vmatrix}1&-3\\2&2\end{vmatrix}=-8$$

حالا در گزینه‌ها $k=4$ را جایگزین می‌کنیم و گزینه‌ای درست است که به ما -8 بدهد که جواب $-2k$ و (۲) است.