انتشارات بین‌المللی گاج

مجموعه کتاب‌های آی‌کیو قرن جدید

ویژه کنکور ۱۴۰۴

جامع کنکور

ریاضیات تجربی

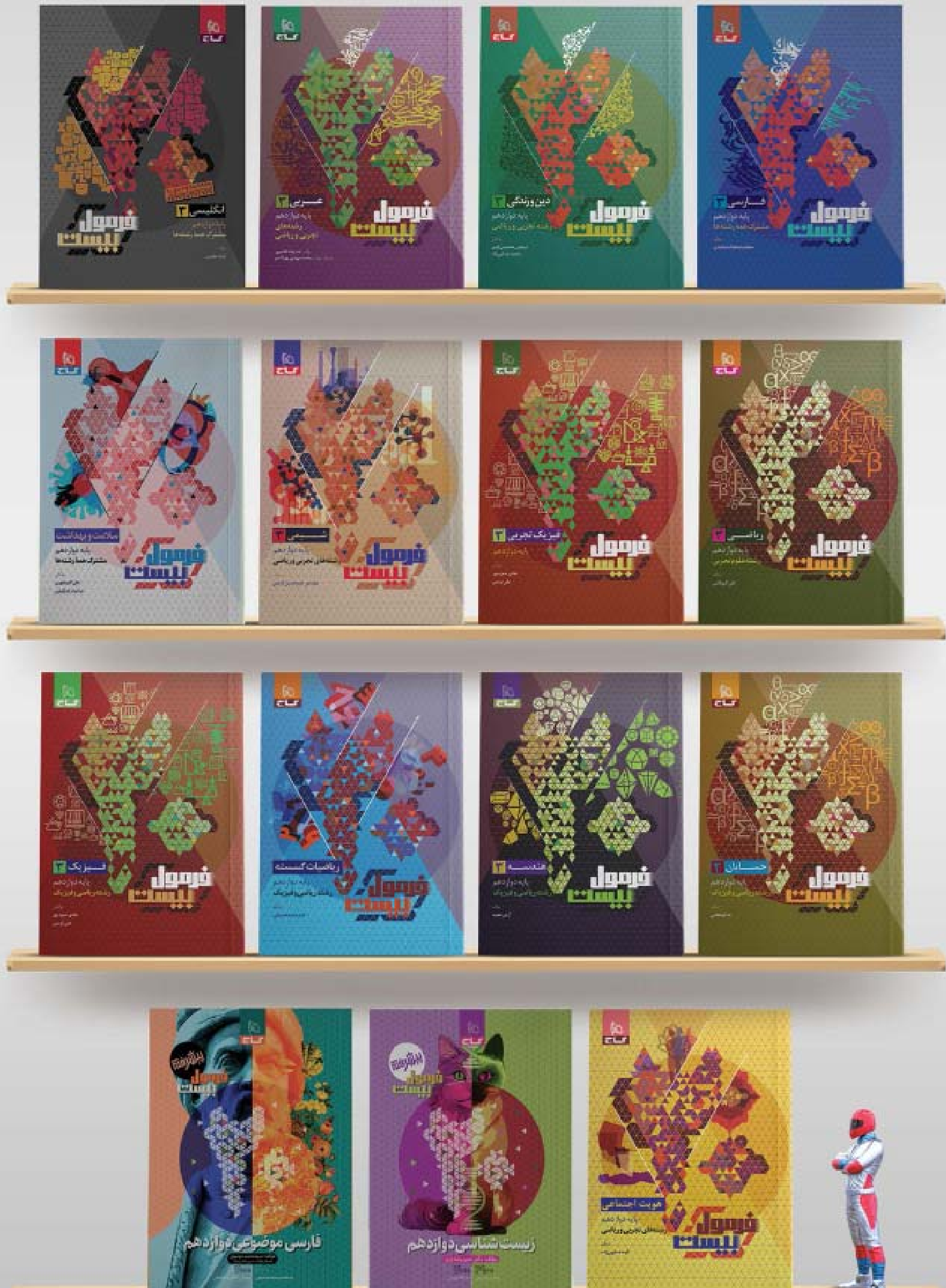
دهم | یازدهم | دوازدهم

+کنکور ۱۴۰۳

مطابق با سبک جدید سؤالات کنکور

مؤلف: مهندس سجاد عظمتی

مجموعه کتاب‌های **فرمول بیست**
ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی



9 786220 308683

مقدمه

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

برای تویی که میخوای آینده‌ات رو خودت بسازی...

برای اینکه بتونی به بهترین شکل ممکن از این کتاب استفاده کنی، اول باید بدونی که تست‌های این کتاب رو به ترتیب سطح‌بندی اون‌ها پاسخ بدی. پس اول توضیحات کاملی راجع به سطح‌بندی تست‌ها براتون انجام میدیم:

سطح‌بندی تست‌ها

تست‌های آبی

در ابتدا باید تست‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده رو جواب بدی. به زبان دیگه، حل تست‌های آبی در گام اول برای هر دانش‌آموزی واجبه. تست‌های آبی، تست‌های مفهومی با محاسبات ساده هستن که اعتماد به نفس تو رو در ابتدا بالا میبرن.

تست‌های قرمز

تست‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده، تست‌های سطح بالاتر، ترکیبی و با محاسبات بیشتر بوده که برای تسلط بر زوایای مختلف مباحث برای تو طراحی شده‌اند. بعد از حل تست‌های آبی، تست‌های قرمز رو حل کن و خودت رو بیشتر به چالش بکش.

تست‌های چالشی

iQ

بعد از اینکه روی تست‌های آبی و قرمز کامل مسلط شدی، و میخوای بیشتر تلاش کنی و درصد بالاتری به دست بیاری، میتونی سراغ تست‌های iQ بری. این تست‌ها سخت، چالشی، ترکیبی و پرمحاسبه بوده و شما رو برای موفقیت در تست‌های سخت کنکور سراسری آماده میکنه.

دقت کنید! تست‌های سخت و چالشی کنکورهای سراسری سال‌های قبل هم، جزء این تست‌ها هستن.

تست‌های جنجالی

TNT

این تست‌ها برای دانش‌آموزانی هست که به فکر درصد بالای ۸۰ بوده و بسیار سخت‌کوش و علاقه‌مند به تست‌های بسیار چالشی هستن. پس این تست‌ها به هیچ عنوان برای همه دانش‌آموزان مناسب نیست. تست‌های TNT بسیار سخت، بسیار چالشی و بسیار پرمحاسبه و خلاقانه بوده و در سال‌های اخیر یک یا دو تست کنکور از این سطح تست‌ها می‌باشد. سؤالات بسیار سخت کنکورهای اخیر باعث شد این سطح‌بندی رو براتون انجام بدیم تا رتبه‌های برتر کنکور هم با دیدن این کتاب لذت ببرن.

معرفی ویژگی‌های کتاب

۱

سرنخ

تا جای ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی قراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت سرنخ دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرنخ هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی.

۲

هایلایت

درسنامه‌های کاربردی

درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخنامه کتاب هایلایت کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن اون‌ها کاربردی‌تر بشه. دیدن جداول و کادربندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.

۳

یه جوره دیگه !

طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سوال رو کمی عوض میکنن و در کنکورهای جدید ازش استفاده میکنن! پس در پاسخنامه کتاب، هر وقت آیکون رو دیدی، بدون میخوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سوال آشنا کنیم.

۴

روش سریع‌تر

در حل برخی از سوال‌ها، در کنار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از روش سریع‌تر سوال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبُر و سریع‌تر در حل سوال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخنامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخنامه رو ببینی.

۵

دام تستی

طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمن روی مباحث مسلطی یا نه، میان در صورت سوال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنن که تو حتی بعد از حل سوال، گزینه غلط رو جواب بدی. در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بندازن! این موارد رو با آیکون دام تستی براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سوال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.

تشکر و قدردانی:

- تشکر ویژه می‌کنم از اساتید عزیزی که در مراحل تالیف، همراه ما بودن به خصوص آقای علی احمدی قزل‌دشت و آقای نریمان فتح‌اللهی که تک‌تک تست‌ها رو با حوصله بررسی کردن. و همچنین تشکر و قدردانی می‌کنیم از اساتید عزیزی که با نظرات و تجربه‌های ارزشمندشون، باعث شدند کتاب بهتری تالیف بشه.
- **اساتید:** معین کرمی، مجید رفعتی، آرش عمید، علی مقدم‌نیا، محمد مصطفی ابراهیمی، عزیزالله علی اصغری، امید شیری‌نژاد.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی

sajad.azemati

فهرست

۱ تابع

۲ معادله و تابع درجه دوم

۳ معادله و نامعادله

۴ قدرمطلق و براکت

۵ تابع نمایی و لگاریتمی

۶ مثلثات

۷ حد و پیوستگی

۸ مشتق

۹ کاربرد مشتق

۱۰ مجموعه، الگو و دنباله

۱۱ توان گویا و عبارت جبری

۱۲ هندسه پایه

۱۳ هندسه تحلیلی

۱۴ آمـار

۱۵ شمارش بدون شمردن

۱۶ احتمال

. فصل اول .

ریاضیات تجربی جامع

تابع

Chapter One

Function

Pythagoras

فصل اول

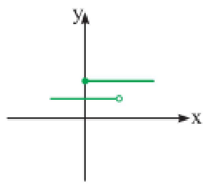
درس اول: مفاهیم تابع

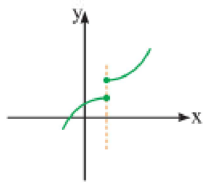
CHAPTER 1

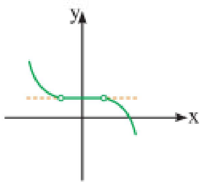
شناسایی تابع

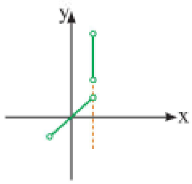
سرنخ سلام. به اولین بخش تابع خوش اومدید. بخش اول رو با شناسایی تابع شروع می‌کنیم.

۱ کدام نمودار زیر مربوط به یک تابع است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

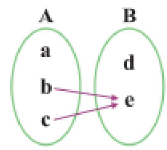
۲ اگر رابطهٔ $f=\{(5,a-2b),(4,a+b),(4,-2),(5,4a-b)\}$ نمایش یک تابع باشد $a-b$ کدام است؟

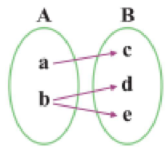
۱) ۳　۲) ۴　۳) ۵　۴) ۶

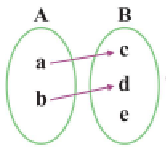
۳ اگر رابطهٔ $f=\{(1,4),(2,4),(3,5),(4,9),(k+1,(k+2)^2)\}$ یک تابع نباشد، مجموع مقادیر k کدام است؟

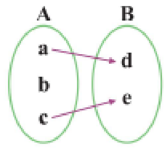
۱) ۲　۲) ۴　۳) ۵　۴) ۶

۴ چه تعداد از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع نیست؟

الف) 

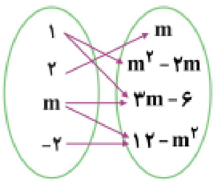
ب) 

پ) 

ت) 

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۵ به ازای چند مقدار قابل قبول m ، نمودار پیکانی مقابل تابع خواهد بود؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

۶ چه تعداد از موارد زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت ریشهٔ چهارم آن را نسبت دهد.

ب) رابطه‌ای که هر عدد را به عددی نسبت می‌دهد که ۳ واحد با آن اختلاف دارد.

پ) رابطه‌ای که به هر عدد فردِ اول، مقسوم‌علیه‌های آن عدد را نسبت دهد.

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) صفر

۷ کدام رابطهٔ زیر تابع نیست؟

۱) $y^2+|x|=0$　۲) $|x+3|+|y-1|=0$　۳) $[x]+[y]=0$　۴) $y=\sqrt{[x]^2+2[x]+1}$

۸ با فرض $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ چند تابع می‌توان از A به B نوشت که شامل زوج مرتب $(c,4)$ باشد؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۴۸

۹ اگر رابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x^2+mx & ; x\geq 1\\ \dfrac{3m^2-2}{x} & ; x\leq 1\end{cases}$ تابع باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۱۰ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+2a & |x|\leq 1\\ ax^2+5 & |x|\geq 1\end{cases}$، ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) ۴۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۵ ۴) ۱۴

۱۱ اگر رابطهٔ $y=\begin{cases}ax+b & ; x\leq 2\\ bx^2+a & ; 2\leq x\leq 3\\ (a-b)x+8 & ; x\geq 3\end{cases}$ نشان‌دهندهٔ یک تابع باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{17}{3}$ ۴) $\frac{15}{7}$

مقدار تابع

سرنخ توی تست‌های زیر، می‌خوایم مقدار تابع رو در نقاط مختلف پیدا کنیم.

۱۲ در تابع $f(x+3)=3x+14$ مقدار $f(5)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) ۲۰

۱۳ اگر $2f(x+4)=f(4)+x^2+5(x+1)+2$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) -3 ۴) ۱

۱۴ اگر $g(3x+1)=\begin{cases}x-2 & ; x\geq 2\\ x^2 & ; x<2\end{cases}$ باشد، مقدار $g(4)+g(10)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵ اگر $f(2x-1)=3x-a$ و $f(3)+f(-3)=9$ باشد، مقدار $f(a+2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶ اگر $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$ باشد، مقدار $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}})$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{3}$ ۲) $2+\sqrt{3}$ ۳) $3+\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}$

۱۷ اگر $f(x)=\sqrt{x^2-6x+14}$ باشد، مقدار $f(3+\sqrt[4]{24})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}+1$ ۲) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-1$

۱۸ اگر $f(x)+3f(\frac{1}{x})=1-x^2$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{21}{32}$

۱۹ اگر $(x+2)f(x)-3xf(x+2)=4x^2-mx+3m-1$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{4}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{25}{4}$ ۴) ۶

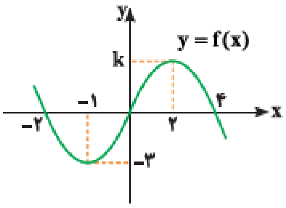
۲۰ اگر $f(x)=\begin{cases}4-f(x) & ; x\geq 1\\ x+1 & ; x<1\end{cases}$ باشد، مقدار $f(1+f(-1))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱ تابع $f(x)=\begin{cases}۳x^۲-۱۲ & ; \quad x<۰\\ ۲x-۴ & ; \quad ۰\le x<۳\\ x^۲-x-۱۲ & ; \quad x\ge ۳\end{cases}$ را در نظر بگیرید. مجموع طول نقاط برخورد تابع f و محور x ها کدام است؟

۱) ۱ ○   ۲) ۲ ○   ۳) ۳ ○   ۴) ۴ ○

۲۲ نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. اگر $g(x)=\begin{cases}۱+f(x) & ; \quad x>۰\\ f^۲(x) & ; \quad x\le ۰\end{cases}$ و $g(-۱)+g(۲)=۱۴$ باشد، مقدار k کدام است؟



۱) ۲ ○
۲) ۳ ○
۳) ۴ ○
۴) ۵ ○

پاسخ حالا می‌خواهیم بریم برای مساحت، محیط، حجم، فاصله، ... یک تابع بنویسیم.

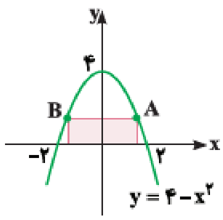
۲۳ کدام تابع مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را برحسب ارتفاع آن بیان می‌کند؟

۱) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}h^۲$ ○   ۲) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۲}h^۲$ ○   ۳) $S=\frac{\sqrt{۳}}{۳}h^۲$ ○   ۴) $S=\frac{\sqrt{۲}}{۲}h^۲$ ○

۲۴ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی که مساحت مستطیل (S) را برحسب محیط آن (P) بیان کند، کدام است؟

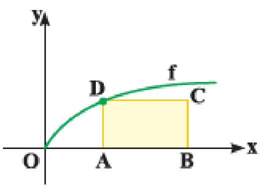
۱) $S(P)=\frac{P^۲-۳۶}{۱۶}$ ○   ۲) $S(P)=P^۲+۳۶$ ○   ۳) $S(P)=\frac{P^۲-۳۶}{۴}$ ○   ۴) $S(P)=\frac{P^۲+۳۶}{۱۶}$ ○

۲۵ در شکل مقابل مستطیلی که دو رأس آن روی نمودار تابع $y=۴-x^۲$ و دو رأس دیگر آن روی محور x ها قرار دارد، مشاهده می‌شود. مساحت مستطیل رنگی برحسب تابعی از x کدام است؟



۱) $f(x)=۴x-x^۳$ ○
۲) $f(x)=۸x-۲x^۳$ ○
۳) $f(x)=۴x-x^۲$ ○
۴) $f(x)=۸x-۲x^۲$ ○

۲۶ مطابق شکل، رأس $A(x,۰)$ و $B(۶,۰)$ از مستطیل ABCD روی محور x ها و رأس D روی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ قرار دارد. مساحت این مستطیل برحسب طول نقطهٔ A کدام است؟

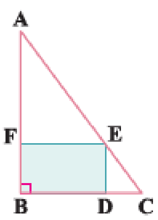


۱) $S(x)=۶-\sqrt{x}$ ○
۲) $S(x)=۶\sqrt{x}-x$ ○
۳) $S(x)=۶\sqrt{x}-x\sqrt{x}$ ○
۴) $S(x)=۶x-\sqrt{x}$ ○

۲۷ مطابق شکل استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره به شعاع x در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۸۰π متر باشد، مساحت استادیوم برحسب تابعی از x کدام است؟

۱) $\pi x(۸۰-x)$ ○   ۲) $\pi x(۴۰-x)$ ○
۳) $۲\pi x(۸۰-x)$ ○   ۴) $۲\pi x(۴۰-x)$ ○

۲۸ در شکل مقابل رأس E از مستطیل BDEF روی وتر AC قرار دارد. اگر $AB=۸$ و $BC=۴$ و $BF=x$ باشد. کدام تابع مساحت مستطیل BDEF را برحسب x بیان می‌کند؟



۱) $f(x)=\frac{x^۲}{۲}-۴x$ ○   ۲) $f(x)=-\frac{x^۲}{۲}+۴x$ ○
۳) $f(x)=-\frac{x^۲}{۴}+۲x$ ○   ۴) $f(x)=-\frac{x^۲}{۲}+۸x$ ○

دامنه و برد تابع

۲۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2+mx+n}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ است، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۱-　　۳) ۳　　۴) ۳-

۳۰ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+1}{3x^2+(2m-n)x+m+n}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-3\}$ است. مقدار mn کدام است؟

۱) ۲۷　　۲) ۱۸۰　　۳) ۱۵۰　　۴) ۱۶۰

۳۱ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{3x+5}{x^2-ax-2}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{1,b\}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۳۲ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^2-|x|+2}{||x|-1|-2}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۳۳ اگر $f(x)=\begin{cases}1 & ; & x>0\\ 0 & ; & x=0\\ -1 & ; & x<0\end{cases}$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{x^2-1}{[x]-f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۳۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۳۵ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{16-2x}+\sqrt[3]{x-5}$ به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-b|<a$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۳۶ در تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{6-x}}{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-3}}}$ مجموع همهٔ عضوهای صحیح دامنه کدام است؟

۱) ۱۸　　۲) ۱۶　　۳) ۱۴　　۴) ۱۳

۳۷ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{|x+2|-|x+5|}}$ شامل چند عدد صحیح منفی نیست؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۳۸ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+2|}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x\le -1$　　۲) $x\ge -1$　　۳) $x\le 1$　　۴) $x\ge 1$

۳۹ تابع $f(x)=\sqrt{3x-|x^2-4x|}$ را در نظر بگیرید. بزرگترین عضو طبیعی دامنه، چند برابر کوچک‌ترین عضو طبیعی آن است؟

۱) ۳/۵　　۲) ۷　　۳) ۳/۵-　　۴) ۷-

۴۰ به ازای چند مقدار صحیح m دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^2-(m+1)x+2-m}$ برابر $\mathbb{R}$ است؟

۱) ۷　　۲) ۸　　۳) ۹　　۴) بی‌شمار

۴۱ دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{2\sin x-1}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$　　۲) $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$　　۳) $[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$　　۴) $[\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}]$

۴۲ اگر $f(x)=2^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)-f(\frac{1}{x})}$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R}-(-1,1)$　　۲) $[-1,0)\cup(0,1]$

۳) $[-1,0)\cup[1,+\infty)$　　۴) $(-\infty,-1]\cup(0,1]$

۴۳ اگر $g(x)=\begin{cases} ۱ & ; \ x>۰ \\ ۰ & ; \ x=۰ \\ -۱ & ; \ x<۰ \end{cases}$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۴^x-۲^{x-۱}}}{۱-g(x)}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۰)$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $[-۱,۰]$ ۴) $(-۱,۱)$

۴۴ اگر $f(x)=۱-(\frac{۱}{۲})^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟ (داخل ۹۳)

۱) $[-۱,۰]$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)$

۴۵ اگر $f(x)=۲^x-۲$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{xf(x)}{x-۲}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۶ دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۲x+۵}}{۱-\log_۲(۳-x)}$ کدام است؟

۱) $[-\frac{۵}{۲},۳]-(-۱,۱)$ ۲) $[-\frac{۵}{۲},۱)\cup(۱,۳)$ ۳) $[-\frac{۵}{۲},۳)$ ۴) $(-\frac{۵}{۲},۳)-[-۱,۱]$

۴۷ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\dfrac{\log_۴(x^۲-x-۲)}{\sqrt{x^۲-۱}+۱}$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$ ۴) $(-۲,۱)$

۴۸ مجموع اعداد صحیح دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\log_x(x^۲-۸x+۱۵)}{\sqrt{۴-|۳-x|}}$ کدام است؟ (شبیه‌ساز داخل ۱۴۰۰)

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

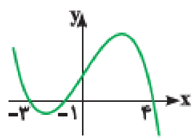
۴۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲-\log_۳(x^۲-۸x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۰ دامنهٔ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (نوبت اول ۱۴۰۲)

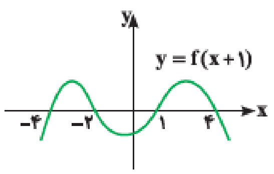
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۱ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟ (خارج ۹۴)



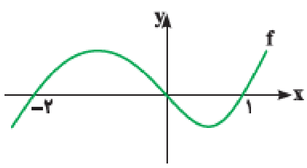
۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$
۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$
۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$
۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۵۲ نمودار تابع $y=f(x+۱)$ به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲+۴x+۳)f(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



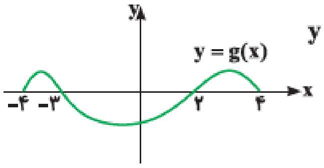
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۵۳ نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-\dfrac{f(x)}{f(۲+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (داخل ۱۴۰۲)



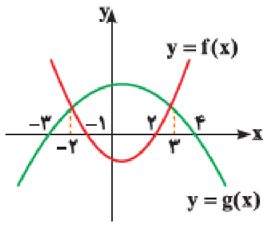
۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

۵۴ اگر $f(x)=\log_2(x+3)$ و نمودار تابع $y=g(x)$ به‌صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{g(x)}{2-f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۵ نمودار دو تابع درجهٔ دوم f و g به‌صورت مقابل است. در تابع $y=\sqrt{f(x)g(x)-g^2(x)}$ مجموع بزرگترین و کوچکترین عضو دامنه کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

سرنخ حالا بریم سراغ سوالات مربوط به بُرد تابع.

۵۶ اگر بُرد تابع $y=\frac{1}{2}x+1$ بازهٔ $[0,\frac{5}{2}]$ باشد، دامنهٔ آن شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۷ بُرد تابع $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-4}+x^2-2x+3$ کدام است؟

۱) $\{4,11\}$ ۲) $\{11\}$ ۳) $\{0,11\}$ ۴) $\varnothing$

۵۸ بُرد تابع $f(x)=\begin{cases}|x-1|+2 & ; \ -3\le x<2\\ -x^2+6x-5 & ; \ 2\le x\end{cases}$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $[2,6]$ ۳) $(-\infty,6]$ ۴) $(-\infty,4]$

۵۹ بُرد تابع $f(x)=2+\sqrt{4x-x^2}$ به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰ بُرد تابع $f(x)=\sqrt{x^2+4x+7}$ به‌صورت بازهٔ $[a,+\infty)$ است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{3}$

۶۱ بُرد تابع $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(0,2]$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $(2,+\infty)$

۶۲ بُرد تابع $f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۳ بُرد تابع $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{m\}$ است. بُرد تابع $g(x)=\frac{m}{m+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $(0,1]$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(0,1)$

۶۴ برد تابع $f(x)=\frac{x^2+7x+12}{x^2-16}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\frac{1}{8},1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\pm 4\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۶۵ بُرد تابع $f(x)=2^{\sqrt{-\cos^2 x}}$ شامل چند عضو صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۶ برد تابع $f(x)=2^{1-\cos x}-1$، شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۷ برد تابع $y=\frac{2}{|x|}(2x^2-3x)$ کدام است؟

۱) $[-3,+\infty)$ ۲) $(-6,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-[-6,-3]$

۳۲۱ اگر $g(x)$ تابعی یک‌به‌یک با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۳x+۴}{g(x)-g(x^{۲}-۳)}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۳۲۲ اگر f تابع یک‌به‌یک روی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، معادله $f(۲^{x})=f(x^{۲})$ چند جواب مثبت دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

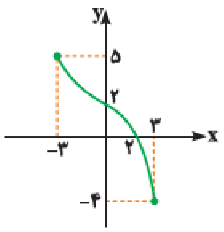
تابع وارون

توی بعضی سؤالا، از تعریف تابع وارون سؤال می‌پرسن، چند تا با هم ببینیم.

۳۲۳ وارون تابع $y=x^{۳}-x+۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (داخل ۱۴۰۱)

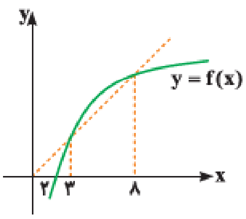
۱) $(-۱,-۲)$　　۲) $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$　　۳) $(۱,۲)$　　۴) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱۱}{۸})$

۳۲۴ نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۳,۳]$ به صورت مقابل است. اگر $\dfrac{f^{-۱}(۵)}{f(a)+f^{-۱}(۰)}=-\dfrac{۳}{۴}$ باشد، مقدار a کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) -۱
۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۲۵ شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟ (داخل ۹۴)



۱) $[۰,۲]$
۲) $[۲,۳]$
۳) $[۲,۸]$
۴) $[۳,۸]$

این قسمت مبحث پر تکرار کنکورهای اخیره که باید مقدار تابع وارون رو در یک نقطه پیدا کنید. توی سه چهار سؤال اول نکته‌ها را یاد می‌گیرین، بعدش کلی تست قشنگارو می‌خونیم.

۳۲۶ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$ باشد. حاصل $g(۴)-g(۱۲)$ کدام است؟ (شبیه‌ساز تجربی ۹۹)

۱) -۱۰　　۲) ۶　　۳) ۱۰　　۴) -۶

۳۲۷ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}\,,x\geq ۱$ باشد، $(gog)(۱)$ کدام است؟ (نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) ۱　　۲) ۴　　۳) ۹　　۴) صفر

۳۲۸ اگر $f(x-۱)=\log_{۳}^{(x+۱)}$ و $g(x)=۲\cos(\frac{\pi x}{۲})$ باشد، مقدار $(f^{-۱}og)(۴)$ کدام است؟

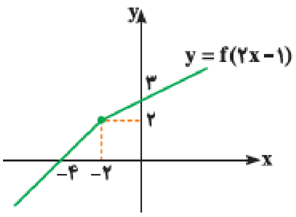
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) -۱　　۴) ۷

۳۲۹ اگر $f^{-۱}(x)=\dfrac{x}{۱+|x|}$ و $g(x)=\sqrt{x}-۱$ باشد، حاصل $(f+g^{-۱})(-\frac{۲}{۵})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲۳}{۲۵}$　　۲) $-\frac{۱۱}{۲۵}$　　۳) $-\frac{۲۳}{۷۵}$　　۴) $-\frac{۱۱}{۷۵}$

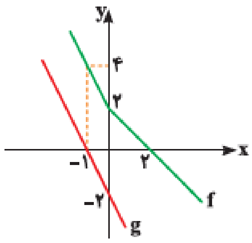
۳۳۰ اگر $f(x)=\begin{cases}۶-۲x\;;\;x<۲\\ ۴-x\;;\;x\geq ۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۲x-۳\;;\;x<۰\\ x-۴\;;\;x\geq ۰\end{cases}$ باشد، مقدار $fog^{-۱}(-۵)+gof^{-۱}(-۲)$ کدام است؟

۱) ۷　　۲) ۸　　۳) ۱۰　　۴) ۱۲



۳۳۱ نمودار تابع $y=f(2x-1)$ به‌صورت مقابل است. مقدار $\dfrac{f^{-1}(2)+f^{-1}(3)}{f(-5)}$ کدام است؟

۱) -7
۲) 2
۳) -3
۴) 5



۳۳۲ با توجه به نمودارهای دو تابع f و g در شکل مقابل، حاصل $gof^{-1}(-2)+g^{-1}of(-1)$ چقدر است؟
(شبیه‌ساز خارج ۱۴۰۱)

۱) -16
۲) -14
۳) -13
۴) -10

۳۳۳ به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+6x^2+ax+1$ خط $10y-x=-10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۱) 15 ۲) 12 ۳) 9 ۴) 5 (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳)

۳۳۴ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{mx-1}}$ در دامنهٔ محدود، خط $y=12-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) 2 ۴) 1 (ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۳۳۵ دو تابع با ضابطه‌های $g=\{(2,5),(3,4),(1,6),(4,7),(8,1)\}$ و $f(x)=2x-5$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1}og)(a)=6$ باشد، a کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4 (ریاضی داخل ۹۳)

۳۳۶ اگر $f=\{(\frac{1}{9},-1),(\frac{1}{3},1),(-\frac{1}{4},3),(\frac{1}{4},-3)\}$ ، $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ و $fog^{-1}(a)=-3$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۳۳۷ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x+9} & ; x\geq 3\\ 3x-x^2 & ; x<3\end{cases}$ و $g=\{(5,2),(7,3),(1,4),(3,6),(9,1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-1}og^{-1})(a)=8$ باشد، a کدام است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 6 ۴) 7

۳۳۸ دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۳۳۹ اگر $f(x)=\frac{2}{5}x-4$ و $g(x)=x^3+x$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(8)$ کدام است؟ (خارج ۹۸)

۱) $1/5$ ۲) 2 ۳) $2/5$ ۴) 3

۳۴۰ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۹)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۴۱ اگر $f(x)=\dfrac{2x+1}{3}$ و $g(x)=\dfrac{2x+a}{a-x}$ باشند و $(fog^{-1})(-1)=-\dfrac{11}{3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۴۲ اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ باشند. تابع $\dfrac{g}{gof^{-1}}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۸)

۱) $\{(4,2),(5,2)\}$ ۲) $\{(4,2),(3,5)\}$ ۳) $\{(5,2),(2,4)\}$ ۴) $\{(3,5),(2,4)\}$

۳۴۳ اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ دو تابع باشند، بُرد تابع $(g^{-1}of)-f$ کدام است؟

۱) $\{-1,4\}$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\{3,4\}$ ۴) $\{2,-1\}$ (ریاضی خارج ۹۸)

۳۴۴ اگر $f(x+1)=\dfrac{g(x)-1}{x}$ و $g^{-1}(x)=1-x$ باشند، مقدار $(fog)(2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 2 ۳) -3 ۴) -5

۳۴۵ اگر $f(x)=x^{۲}+۴x+۱۵$ و $(fog)(x)=x^{۳}g(x)+۴g(x)$ باشد، مقدار $g^{-1}(۳)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۱

می‌دونیم اگه $f(a)=b$ باشه، میشه نتیجه گرفت $f^{-1}(b)=a$ هستش! این ویژگی در حالت کلی‌تر هم قابل استفاده است.

۳۴۶ اگر $f(x^{۳}+۲x)=۲^{x}-۱۴$ باشد، مقدار $f^{-1}(۲)$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۴ ۳) ۷۲ ۴) ۵۴

۳۴۷ اگر $f^{-1}(\frac{x+۲}{x-۱})=x^{۳}-۱$ باشد، مقدار $f(۷)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴۸ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۱}{۲x}$ بر دامنهٔ $(۰,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۹ و مشابه داخل ۹۹)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۴۹ اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۲x}$ باشند، آن‌گاه حاصل $g^{-1}(۶)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵۰ اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ باشند، حاصل $g^{-1}(۱۶)$ کدام است؟ (داخل ۸۹)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون

این بخش رو با وارون کردن تابع‌های خطی شروع می‌کنیم. فقط کافیه جای x و y رو عوض کنید!

۳۵۱ قرینهٔ خطی به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (داخل ۹۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۵۲ نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{x-۳}{۲}$ را در راستای محور yها، ۶ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اگر A نقطهٔ تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد، فاصلهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۳۵۳ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۱)$ از نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x+۲$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

۳۵۴ تابع $f(x)=۲x-۱$ را در نظر بگیرید. اگر $g(x+۱)=f(x)-f^{-1}(x)$ باشد، نمودار تابع $y=g(x)$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۵۵ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۵x+۶}{x-۳}$ به کدام صورت است؟

۱) $y=x-۲\,;\,x\neq ۳$ ۲) $y=x-۲\,;\,x\neq ۱$ ۳) $y=x+۲\,;\,x\neq ۳$ ۴) $y=x+۲\,;\,x\neq ۱$

۳۵۶ اگر دو خط به معادلات $ax+by=۸$ و $۲x-۳y=b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a+b$ کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) ± ۳ ۲) ± ۲ ۳) $۲,-۳$ ۴) $-۲,۳$

۳۵۷ تابع خطی f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳x-۱}{a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(۳f^{-1}(x))=۳x+۵$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

تست‌های زیر مربوط به وارون کردن تابع‌های رادیکالی و درجهٔ دوم و درجهٔ سوم است. توی این سؤالا به محدود کردن دامنه توجه کنید.

۳۵۸ ضابطهٔ وارون تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$ به کدام صورت است؟ (داخل ۹۲)

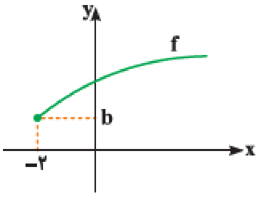
۱) $y=x^{۲}-۴x+۵; x\leq ۲$ ۲) $y=-x^{۲}+۴x-۵; x\leq ۲$

۳) $y=x^{۲}-۴x+۵; x\geq ۱$ ۴) $y=-x^{۲}+۴x-۵; x\geq ۱$

۳۵۹ قرینهٔ نمودار تابع $y=2+\sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

۱) 3 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -4

۳۶۰ نمودار تابع $f(x)=1+\sqrt{x+a}$ به‌صورت زیر است. نمودار این تابع را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(a+b)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) 1
۳) -2
۴) -4

۳۶۱ نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به طرف xهای مثبت و ۱ واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌هیم. نمودار وارون تابع حاصل از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۶۲ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=(x-2)^2+6x$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است، کدام است؟

۱) $-1-\sqrt{x-3}$ ۲) $-1+\sqrt{x-3}$ ۳) $2+\sqrt{x-6}$ ۴) $2-\sqrt{x-6}$

۳۶۳ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=-2+\sqrt{x-3}$ در بازه‌ای که نمودار آن زیر محور xها قرار دارد، کدام است؟

۱) $x^2+4x+7\,;\,-2\le x<0$ ۲) $x^2+4x+7\,;\,3\le x<7$
۳) $x^2-6x+4\,;\,0\le x\le 3$ ۴) $x^2-6x+4\,;\,x\ge 0$

۳۶۴ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=-x^2+2x$ در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، کدام است؟

۱) $1+\sqrt{1-x}\,;\,0<x<1$ ۲) $1+\sqrt{1-x}\,;\,x<1$ ۳) $-1-\sqrt{1-x}\,;\,0<x<1$ ۴) $1-\sqrt{1-x}\,;\,0<x<1$

۳۶۵ نمودار تابع $y=x^2-2x\,;\,x\ge 1$ را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $-1-\sqrt{x-1}$ ۲) $-1+\sqrt{x-1}$ ۳) $-1-\sqrt{x+1}$ ۴) $-1+\sqrt{x+1}$

۳۶۶ اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=(2x-1)g(x)$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $y=f(x)$ با شرط $x\le 1$ کدام است؟

۱) $y=1-\sqrt{x-1}$ ۲) $y=1+\sqrt{x-1}$ ۳) $y=1-\sqrt{x+1}$ ۴) $y=1+\sqrt{x+1}$

۳۶۷ تابع $f(x)=x^2\sqrt{x^2}$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱) $-\sqrt[3]{x}\,;x\ge 0$ ۲) $-\sqrt{x^3}\,;x\le 0$ ۳) $-\sqrt[3]{x}\,;x\le 0$ ۴) $-\sqrt{x^3}\,;x\ge 0$

۳۶۸ اگر $y=\frac{x+2}{4}-\frac{\sqrt{x+1}}{2}$ ضابطهٔ تابع وارون $y=ax+a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 9

۳۶۹ ضابطهٔ وارون $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ کدام است؟ (شبیه‌ساز ریاضی ۱۴۰۲)

۱) $x^2-2x+2\,;\,x\ge 1$ ۲) $x^2-2x\,;\,x\ge 1$ ۳) $x^2+2x+2\,;\,x\ge -1$ ۴) $x^2+2x\,;\,x\ge -1$

۳۷۰ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{4}x-1}$ در دامنهٔ محدود کدام است؟ (شبیه‌ساز ریاضی خارج ۱۴۰۲)

۱) $2\sqrt{4x+4}+2$ ۲) $2\sqrt{4x+4}-2$ ۳) $2\sqrt{x^2+1}+2$ ۴) $2\sqrt{x^2+1}$

سرنخ تابع‌های قدرمطلقی هم در حالت کلی وارون‌پذیر نیستند و برای وارون کردن آن‌ها باید به محدودیت دامنه توجه کنید!

۳۷۱ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{(x+1)^2}-|3x-6|$ در یک بازهٔ نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{1}{2}x-7,x\ge 2$ ۲) $-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2},x\le 3$ ۳) $-2x+14,x\le 3$ ۴) $-2x-\frac{14}{3},x\ge 2$

۳۷۲ نمودار تابع $y=|2x-6|-|x+4|+x$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟ (داخل ۹۴)

۱) $-x+6; x\le -4$
۲) $-x+5; x\ge 2$
۳) $-\frac{1}{2}x+1; -4\le x\le -3$
۴) $-\frac{1}{2}x+1; -4\le x\le 10$

۳۷۳ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|2x-4|-|x+1|+x$ را در بازهٔ اکیداً نزولی در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} و خط $y=x+1$ با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) غیرمتقاطع (شبیه‌ساز ۹۹)

۳۷۴ دو تابع $f(x)=3-\sqrt{x+1}$ و $g(x)=x^2-2x$ را در نظر بگیرید. ضابطهٔ وارون تابع $y=(fog)(x)$ در بازه‌ای که نمودار آن اکیداً نزولی می‌باشد، کدام است؟

۱) $-x+3; x\le 1$
۲) $-x+4; x\le 1$
۳) $-x+3; x\le 3$
۴) $-x+4; x\le 3$

۳۷۵ تابع با ضابطهٔ $y=x|x-2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟ (داخل ۹۴)

۱) $1-\sqrt{1+x}; x\le 0$
۲) $1-\sqrt{1-x}; x\le 1$
۳) $1+\sqrt{1-x}; 0\le x\le 1$
۴) $1-\sqrt{1-x}; 0\le x\le 1$

۳۷۶ اگر $[x]=-1$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $y=|x^2-1|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x-1}; 0<x\le 1$
۲) $-\sqrt{x-1}; 0<x\le 1$
۳) $\sqrt{1-x}; 0\le x<1$
۴) $-\sqrt{1-x}; 0\le x<1$

سرنخ چندتا هم وارون تابع دوضابطه‌ای ببینیم.

۳۷۷ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\ge 0\\ -\sqrt{-x} & ; x<0\end{cases}$ کدام است؟ (داخل ۹۶)

۱) $-x^2$
۲) x^2
۳) $x|x|$
۴) $-x|x|$

۳۷۸ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}3x+1 & ; x>1\\ 2x+2 & : x\le 1\end{cases}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\begin{cases}a(x-1); & x>c\\ bx-1; & x\le c\end{cases}$ است. مقدار $f^{-1}(\frac{b}{a})$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $-\frac{1}{2}$

۳۷۹ اگر $f(x)=\begin{cases}x[x] & ; -1<x<0\\ 2^x & ; 0\le x<2\end{cases}$ باشد، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & ; 0<x<1\\ \log_2 x & ; 1<x\le 4\end{cases}$
۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & ; 0<x<1\\ \log_2 x & ; 1\le x<4\end{cases}$
۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x & ; -1<x<0\\ \log_2 x & ; 1\le x<4\end{cases}$
۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x & ; 0<x<1\\ \log_2 x & ; 1\le x<4\end{cases}$

سرنخ یه روش خیلی خوب برای وارون کردن تابع‌های هموگرافیک داریم که برای حل تست‌های زیر ازش استفاده کنید و لذت ببرید.

۳۸۰ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}+2$ کدام است؟

۱) $\frac{x+2}{x-3}-2$
۲) $\frac{x}{x-5}$
۳) $\frac{x+2}{x-3}+2$
۴) $\frac{x}{x+5}$

۳۸۱ تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{a\}$ و بُرد $\mathbb{R}-\{-2\}$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x)=\frac{5x-3}{bx+4}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۲/۵
۳) ۴-
۴) ۵

۳۸۲ iQ اگر $fof(x)=\frac{af(x)+1}{2f(x)-1}$ و $f^{-1}(0)=-2$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $g(x)=\frac{4x+1}{2x+a}$ کدام است؟

۱) $\frac{-\frac{1}{2}x+1}{2x-4}$
۲) $\frac{-x+2}{2x-4}$
۳) $\frac{-4x+1}{2x+4}$
۴) وارون‌پذیر نیست.

۳۸۳ تابع $f(2x+4)=\frac{4x-6}{2x+a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x)=f^{-1}(x)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 4 ۴) 2

۳۸۴ iQ اگر $x=\frac{f(x)-3x}{f(x)+4}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x-1}{x+7}$ ۲) $\frac{x}{x+7}$ ۳) $\frac{x+1}{x-7}$ ۴) $\frac{x}{x-7}$

۳۸۵ iQ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\frac{ax}{1-|x|}\ ;\ |x|<b$ است. مقدار $a\times b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -2 ۴) 2

برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g

سرنخ توی تست‌های زیر، می‌خوایم نقطهٔ برخورد f^{-1} و g رو بررسی کنیم.

۳۸۶ اگر $f(x)=x^2-2x-3\ ;\ x\geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=\frac{x-9}{2}$ با کدام طول متقاطع هستند؟ (تجربی داخل ۹۸)

۱) 12 ۲) 15 ۳) 18 ۴) 21

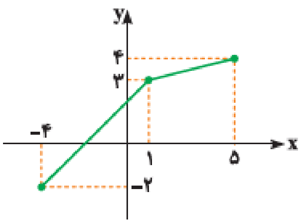
۳۸۷ اگر $f(x)=x^2-3x+1\ ;\ x<\frac{3}{2}$ و $g^{-1}(x)=3x-4$ باشند، نمودارهای دو تابع f^{-1} و g در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۳۸۸ iQ اگر $f(x)=x^2-4x+1\ ;\ x\leq 2$ باشد، نمودار تابع $y=1-f^{-1}(x)$ و $g(x)=\sqrt{f(x)+3}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{13}$ ۴) $\sqrt{6}$

۳۸۹ iQ نمودار تابع f با دامنهٔ $[-4,5]$ به‌صورت مقابل است. نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=x+|x-2|$ در چند نقطه متقاطع هستند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) متقاطع نیستند.

سرنخ برای حل تست‌های مربوط به برخورد f و f^{-1} به صعودی بودن تابع f توجه کنید.

۳۹۰ اگر $f(x)=x^2+2x+1$ با دامنهٔ $(-1,+\infty)$ مفروض باشد، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (داخل ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

۳۹۱ فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y=\sqrt{x+3}-1$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 3 ۴) $2\sqrt{2}$

۳۹۲ نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۶)

۱) $-4,-1$ ۲) $4,-1$ ۳) $-4,1$ ۴) $4,1$

۳۹۳ فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^3+3x-12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۳۹۴ iQ نمودار وارون تابع $y=\log_4^{(2^{x+2}+32)}$ نمودار خود را در نقطهٔ A قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{3}$

ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g

سرنخ به نظرتون fof^{-1} و $f^{-1}of$ با هم برابرند؟ بریم ببینیم با هم.

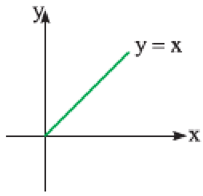
۳۹۵ تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۱}$ را در نظر بگیرید. کدام رابطه نادرست است؟

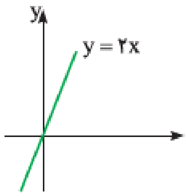
۱) $f^{-1}of(۱)=۱$
۲) $(fof^{-1})(۱)=۱$
۳) $f^{-1}of(۳)=۳$
۴) $fof^{-1}(۳)=۳$

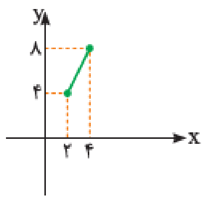
۳۹۶ در کدام تابع زیر رابطهٔ $(f^{-1}of)(x)=(fof^{-1})(x)$ برقرار نیست؟

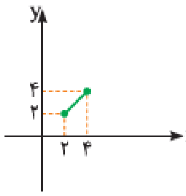
۱) $f(x)=x^۲-۴x+۶;x\ge ۲$
۲) $f(x)=۱+۲^x$
۳) $f(x)=۱+\frac{۱}{x-۱}$
۴) $f(x)=۲+\sqrt{x-۲}$

۳۹۷ اگر $f(x)=۴x-x^۲;x\ge ۲$ باشد، نمودار تابع $y=(f^{-1}of)(x)+(fof^{-1})(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۳۹۸ اگر $f^{-1}(۳x+۱)=g(\frac{x+۳}{۴})$ قابل تعریف باشد، مقدار $(fog)(۳)$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) ۲۴
۴) ۲۸

۳۹۹ با توجه به ماشین مقابل، اگر $f(x)=۳-\sqrt{x+۱}$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y=g(x)$ در کدام بازه زیر محور xها است؟

$x\to \boxed{f}\to \boxed{g}\to x$

۱) $[-۱,۸)$
۲) $(۸,+\infty)$
۳) $(۲,۳]$
۴) $(۲,۴)$

۴۰۰ iQ اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{۲})$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۴

۴۰۱ iQ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}+۳$ باشد، نمودار دو تابع fof^{-1} و $y=\sqrt{-x+۶}$ در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) غیرمتقاطع‌اند.

سرنخ چندتا سؤال هم از وارون کردن ترکیب دو تابع ببینیم.

۴۰۲ دو تابع $f(x)=x^۳+۲$ و $g(x)=\frac{۱-x}{x+۲}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1}og)^{-1}(۲)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۸}{۱۱}$
۲) $-\frac{۱۹}{۱۱}$
۳) $-\frac{۲۰}{۱۱}$
۴) $-\frac{۲۱}{۱۱}$

۴۰۳ اگر $f(x)=-۵+\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x+۳}{x+۲}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

۱) $x-۳$
۲) $\frac{x+۱}{۳}$
۳) $\frac{۳x}{x-۱}$
۴) $x+۳$

۴۰۴ iQ اگر $(fog)(x)=\frac{۳x+۱}{x+۱}$ و $f^{-1}(۴)=۱$ باشد، مقدار $g^{-1}(۱)$ کدام است؟

۱) ۴
۲) -۳
۳) ۱
۴) -۲

فصل اول: تابع

۱ | ۳

نمودار موجود در گزینهٔ «۳»، خود نمایانگر یک تابع است.

> هایلایت
>
> **تابع و تشخیص آن**
>
> اگر یک رابطه به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌های (x , y) باشد، هنگامی این رابطه یک تابع محسوب می‌شود که هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی، دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفهٔ اول یکسان باشند، آنگاه مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز باید یکسان باشد.

۲ | ۲

برای این‌که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(5,4a-b)$ و $(5,a-2b)$ مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند. همچنین در زوج مرتب‌های $(4,-2)$ و $(4,a+b)$ باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند.

$$\begin{cases}4a-b=a-2b\\ a+b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-3\end{cases}$$

بنابراین حاصل $a-b=1-(-3)=4$ است.

۳ | ۴

برای اینکه زوج مرتب f تابع نباشد، باید حالتی ایجاد کنیم که ورودی یکسان اما خروجی متفاوت باشد. یعنی:

$k=0\Rightarrow f=\{\underline{(1,4)},(2,4),(3,5),(4,9),\underline{(1,4)}\}$ تابع هست.

$k=1\Rightarrow f=\{(1,4),\underline{(2,4)},(3,5),(4,9),\underline{(2,9)}\}$ تابع نیست.

$k=2\Rightarrow f=\{(1,4),(2,4),\underline{(3,5)},(4,9),\underline{(3,16)}\}$ تابع نیست.

$k=3\Rightarrow f=\{(1,4),(2,4),(3,5),\underline{(4,9)},\underline{(4,25)}\}$ تابع نیست.

پس مقادیر قابل قبول k برای اینکه f تابع نباشد، برابر است با:

$k=\{1,2,3\}\Rightarrow$ مجموع مقادیر k $=6$

۴ | ۳

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

الف و ت) از عضو a در نمودار (الف) و از عضو b در نمودار (ت) پیکانی خارج نشده؛ پس تابع نیستند.

ب) از عضو b ، ۲ پیکان خارج شده است؛ پس تابع نیست.

پ) از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده است؛ پس تابع است.

۵ | ۱

برای این‌که نمودار پیکانی داده شده، نمایانگر یک تابع باشد، باید $m^2-2m=3m-6$ و $3m-6=12-m^2$ باشد:

$$\begin{cases}m^2-2m=3m-6\Rightarrow m^2-5m+6=0\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=3\end{cases}\\ 3m-6=12-m^2\Rightarrow m^2+3m-18=0\Rightarrow\begin{cases}m=-6\\ m=3\end{cases}\end{cases}$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده، تنها مقدار $m=3$ قابل قبول است.

۶ | ۴

به بررسی موارد داده شده می‌پردازیم:

الف) چون هر عدد مثبت، دارای ۲ ریشهٔ چهارم است، پس این رابطه تابع نیست.

ب) این رابطه بیانگر یک تابع نیست، زیرا برای هر عددی، دو عدد با اختلاف ۳ واحد می‌توان نسبت داد.

پ) می‌دانیم هر عدد فرد اول، دارای ۲ مقسوم‌علیه است. پس این رابطه تابع نیست.

۷ | ۳

می‌دانیم یک رابطه، زمانی یک تابع است که به ازای یک ورودی x ، تنها یک خروجی y حاصل شود، در گزینهٔ «۳» برای $x=0$ بی‌شمار خروجی y داریم.

$$[x]+[y]=0\xrightarrow{x=0}[0]+[y]=0\Rightarrow[y]=0\Rightarrow 0\le y<1$$

پس این رابطه تابع نیست. باقی روابط موجود در گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع هستند.

۸ | ۳

تابع از A به B ، شامل زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه‌های اول آن‌ها، اعضای مجموعه A و مؤلفه‌های دوم آن‌ها، اعضای مجموعه B هستند. می‌توان این تابع را به‌صورت زیر نمایش داد:

$\{(a,\bigcirc),(b,\square),(c,\triangle)\}$

چون طبق سوال، این تابع باید حتماً شامل زوج مرتب $(c,4)$ باشد، داریم:

$\{(a,\bigcirc),(b,\square),(c,4)\}$

با توجه به تابع بالا، به جای مؤلفه دوم‌های $\bigcirc$ و $\square$ ، هر ۴ عضو مجموعهٔ B می‌توانند قرار بگیرند. پس در کل $16=4\times4$ تابع مختلف با این شرایط می‌توان نوشت.

۹ | ۲

برای این‌که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار هر دو ضابطه در نقطهٔ $x=1$ با هم برابر باشند:

$$x=1: 2(1)^2+m(1)=\frac{3m^2-2}{1}\Rightarrow 2+m=3m^2-2$$

$$3m^2-m-4=0\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}m=-1\\ m=\frac{4}{3}\end{cases}$$

۱۰ | ۲

به ازای $x=1$ ، مقدار تابع از ضابطهٔ بالا و ضابطهٔ پایین باید برابر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+2a & ; \ |x|\le1\\ ax^2+5 & ; \ |x|\ge1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=1}\sqrt{4}+2a=a+5\Rightarrow a=3$$

حالا برای پیدا کردن $f(3)$ سراغ ضابطهٔ پایینی می‌رویم:

$$f(3)=3\times3^2+5=32$$

۱۱ | ۱

برای این‌که رابطهٔ داده شده نمایانگر یک تابع باشد، باید مقدار ضابطه‌های $ax+b$ و bx^2+a در نقطهٔ $x=2$ با هم برابر باشند. همچنین مقدار ضابطه‌های bx^2+a و $(a-b)x+8$ نیز باید در $x=3$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} a(2)+b=b(2)^2+a \\ b(3)^2+a=(a-b)(3)+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=4b+a \\ 9b+a=3a-3b+8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=\frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $a+b$ برابر است با:

$$a+b=4+\frac{4}{3}=\frac{12+4}{3}=\frac{16}{3}$$

۱۲ | ۴

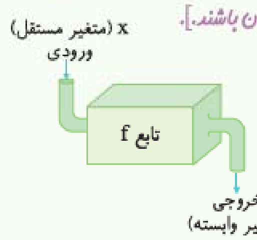
برای پیدا کردن $f(5)$ باید در ضابطهٔ داده شده $x=2$ قرار دهیم:

$$f(x+3)=3x+14 \xrightarrow{x=2} f(5)=20$$

هایلایت

مقدار تابع

می‌توانیم تابع را مانند ماشینی در نظر بگیریم که یک ورودی را دریافت می‌کند و به‌ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد [هر چند ممکن است چند ورودی دارای خروجی‌های یکسان باشند].



منظور از $f(a)$، مقدار تابع f در نقطهٔ $x=a$ است. بنابراین برای محاسبهٔ مقدار تابع در $x=a$، باید در ضابطهٔ تابع x را برداریم و به جای آن a قرار دهیم.

اگر نمودار تابع f موجود باشد، $f(a)$ نشان‌دهندهٔ عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع f با طول $x=a$ است.

۱۳ | ۲

در ضابطهٔ داده شده، به جای x، صفر قرار می‌دهیم:

$$2f(x+4)=f(4)+x^2+5(x+1)+2 \xrightarrow{x=0} 2f(4)=f(4)+7$$

$$\Rightarrow f(4)=7$$

۱۴ | ۱

برای پیدا کردن $g(4)$ در تابع $g(3x+1)$ به جای $x=1$ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطهٔ پایینی برویم:

$$x<2: g(3x+1)=x^2 \xrightarrow{x=1} g(4)=1^2=1$$

حالا برای پیدا کردن $g(10)$ در تابع $g(3x+1)$ به جای $x=3$ قرار می‌دهیم. پس باید سراغ ضابطهٔ بالایی برویم:

$$x\geq 2: g(3x+1)=x-2 \xrightarrow{x=3} g(10)=1$$

بنابراین $g(4)+g(10)=2$ است.

۱۵ | ۳

برای پیدا کردن $f(3)$ در ضابطهٔ تابع، $x=2$ و برای پیدا کردن $f(-3)$ در ضابطهٔ تابع، $x=-1$ قرار می‌دهیم:

$$x=2\,;\, f(3)=6-a$$

$$x=-1\,;\, f(-3)=-3-a$$

حالا، با توجه به این‌که $f(3)+f(-3)=9$ است، پس:

$$(6-a)+(-3-a)=9 \Rightarrow 3-2a=9 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

حالا سراغ پیدا کردن $f(a+2)$ می‌رویم:

$$f(a+2)=f(-1)$$

کافی است در ضابطهٔ $f(2x-1)$، $x=0$ قرار دهیم:

$$f(2x-1)=3x-a \xrightarrow{x=0} f(-1)=-a=3$$

۱۶ | ۴

می‌دانیم $\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$ است. حالا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم و سپس $x=2+\sqrt{3}$ را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=x^3-6x^2+12x-8 \Rightarrow f(x)=(x-2)^3$$

$$\xrightarrow{x=2+\sqrt{3}} f(2+\sqrt{3})=(2+\sqrt{3}-2)^3=(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}$$

۱۷ | ۲

ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+14}=\sqrt{(x-3)^2+5}$$

$$\Rightarrow f(3+\sqrt[4]{24})=\sqrt{(3+\sqrt[4]{24}-3)^2+5}=\sqrt{(\sqrt[4]{24})^2+5}$$

$$=\sqrt{\sqrt{24}+5}=\sqrt{2\sqrt{6}+5}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

۱۸ | ۴

با جای‌گذاری $x=2$ و $x=\frac{1}{2}$ در تساوی $f(x)+3f(\frac{1}{x})=1-x^2$ داریم:

$$x=2: f(2)+3f(\tfrac{1}{2})=-3$$

$$x=\tfrac{1}{2}: f(\tfrac{1}{2})+3f(2)=\tfrac{3}{4}$$

ضابطهٔ پایینی را در -3 ضرب می‌کنیم و دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(2)+3f(\frac{1}{2})=-3 \\ -9f(2)-3f(\frac{1}{2})=-\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow -8f(2)=-\frac{21}{4} \Rightarrow f(2)=\frac{21}{32}$$

۱۹ | ۳

در ضابطهٔ $(x+2)f(x)-2xf(x+2)=4x^2-mx+3m-1$ یک بار $x=0$ و یک بار $x=-2$ قرار می‌دهیم:

$$x=0: 2f(0)-0=3m-1 \Rightarrow f(0)=\frac{3m-1}{2}$$

$$x=-2: 0+6f(0)=16+2m+3m-1 \Rightarrow f(0)=\frac{15+5m}{6}$$

حالا این دو مقدار را با هم برابر قرار می‌دهیم تا m به‌دست آید:

$$\frac{3m-1}{2}=\frac{15+5m}{6} \Rightarrow 9m-3=15+5m \Rightarrow 4m=18$$

$$\Rightarrow m=\frac{9}{2}$$

بنابراین $f(0)=\dfrac{3m-1}{2}=\dfrac{\frac{27}{2}-\frac{2}{2}}{2}=\dfrac{25}{4}$ است.

۲۰ **۲**

با توجه به ضابطهٔ پایینی تابع، مقدار $f(-۱)$ را پیدا می‌کنیم:

$x<۱: f(x)=x+۱\Rightarrow f(-۱)=۰$

پس $f(۱+f(-۱))=f(۱)$ است. با توجه به ضابطهٔ بالایی تابع داریم:

$x\ge ۱: f(x)=۴-f(x)\xrightarrow{x=۱} f(۱)=۴-f(۱)$

$\Rightarrow ۲f(۱)=۴\Rightarrow f(۱)=۲$

۲۱ **۴**

برای پیدا کردن طول نقاط برخورد با محور x ها، باید مشخص کنیم در چه نقاطی، $f(x)=۰$ است:

$x<۰: f(x)=۳x^۲-۱۲=۰\Rightarrow x^۲=۴\xrightarrow{x<۰} x=-۲$

$۰\le x<۳: f(x)=۲x-۴=۰\Rightarrow x=۲$

$x\ge ۳: f(x)=x^۲-x-۱۲=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۳)=۰$

$\xrightarrow{x\ge ۳} x=۴$

پس مجموع طول نقاط برخورد برابر $-۲+۲+۴=۴$ است.

۲۲ **۳**

با توجه به نمودار تابع f در صورت سؤال $f(-۱)=-۳$ و $f(۲)=k$ است. پس با توجه به ضابطهٔ تابع g داریم:

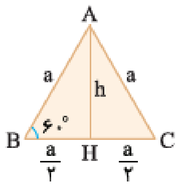
$$g(x)=\begin{cases}۱+f(x) & ;\ x>۰\\ f^۲(x) & ;\ x\le ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}g(۲)=۱+f(۲)=۱+k\\ g(-۱)=f^۲(-۱)=۹\end{array}$$

حالا با توجه به رابطهٔ $g(-۱)+g(۲)=۱۴$ داریم:

$۹+۱+k=۱۴\Rightarrow k=۴$

۲۳ **۳**

ابتدا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC باکمک $\sin ۶۰^\circ$ داریم:



$\sin ۶۰^\circ=\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow a=\frac{۲h}{\sqrt{۳}}$

$\Rightarrow S=a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}=(\frac{۲h}{\sqrt{۳}})^۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

$=\frac{۴h^۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}h^۲$

۲۴ **۱**

اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض کنیم، داریم:

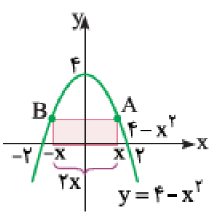
$x=y+۳\Rightarrow y=x-۳$

$P=۲(x+y)=۲(x+x-۳)=۴x-۶\Rightarrow x=\frac{P+۶}{۴}$

$S=xy=x(x-۳)\Rightarrow S(P)=(\frac{P+۶}{۴})(\frac{P+۶}{۴}-۳)$

$\Rightarrow S(P)=(\frac{P+۶}{۴})(\frac{P-۶}{۴})=\frac{P^۲-۳۶}{۱۶}$

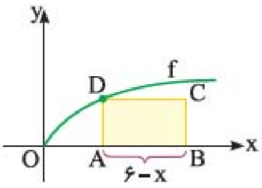
۲۵ **۲**



با توجه به شکل، نقاط $A(x,۴-x^۲)$ و $B(-x,۴-x^۲)$ دو رأس مستطیل هستند. پس یک ضلع مستطیل برابر ۲x و یک ضلع دیگر $۴-x^۲$ است. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$f(x)=۲x(۴-x^۲)=۸x-۲x^۳$

۲۶ **۳**



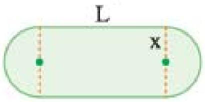
با توجه به این‌که طول نقطهٔ A برابر x و طول نقطهٔ B برابر ۶ است. پس $AB=۶-x$ است. در ضمن نقطهٔ D به طول x روی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ قرار دارد. پس $AD=\sqrt{x}$ است.

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

$S(x)=AD\times AB=\sqrt{x}(۶-x)=۶\sqrt{x}-x\sqrt{x}$

۲۷ **۱**

اگر شعاع نیم‌دایره‌ها را x و طول مستطیل را L در نظر بگیریم از آن‌جایی‌که محیط استادیوم برابر ۸۰π است، پس:



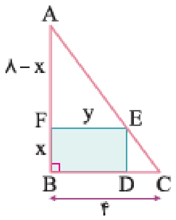
$۲L+۲\pi x=۸۰\pi$

$\Rightarrow L=۴۰\pi-\pi x$

حالا مساحت استادیوم را برحسب x به‌دست می‌آوریم:

$S=L(۲x)+\pi x^۲=(۴۰\pi-\pi x)(۲x)+\pi x^۲=\pi x(۸۰-x)$

۲۸ **۲**



با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$\frac{AF}{AB}=\frac{FE}{BC}\Rightarrow\frac{۸-x}{۸}=\frac{y}{۴}$

$\Rightarrow y=-\frac{x}{۲}+۴$

$\Rightarrow S=xy=x(-\frac{x}{۲}+۴)=-\frac{x^۲}{۲}+۴x$

۲۹ **۴**

چون دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$ است، پس $x=-۱$ و $x=۲$ ریشه‌های مخرج کسر هستند:

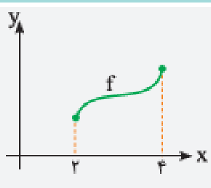
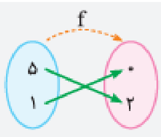
$$\begin{cases}x=-۱ & :\ ۱-m+n=۰\Rightarrow m-n=۱\\ x=۲ & :\ ۴+۲m+n=۰\Rightarrow ۲m+n=-۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ n=-۲\end{cases}\Rightarrow m+n=-۳$$

هایلایت

دامنهٔ تابع

به مجموعهٔ ورودی‌های تابع f، دامنهٔ تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن دامنهٔ تابع	
نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور xها	 $D_f=[۲,۴]$
نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که از اعضای آن، پیکان خارج شده	 $D_f=\{۱,۵\}$
زوج مرتبی: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول	$f=\{(۱,۲),(۵,۰)\}\Rightarrow D_f=\{۱,۵\}$

هایلایت

دامنهٔ توابع معروف

برای تعیین دامنهٔ تابع f با داشتن ضابطهٔ آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱ دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ برابر $\mathbb{R}$ است.

$$f(x)=۲x^۳+۴x^۲-x-۱۰ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

۲ چون عبارت‌های کسری به ازای ریشهٔ مخرج، تعریف‌نشده هستند؛ پس دامنهٔ آن‌ها برابر است با:

$$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

$$f(x)=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x-۱} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$$

۳ در رادیکال‌های با فرجهٔ زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

$$y=\sqrt{۴-x} \Rightarrow ۴-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۴ \Rightarrow D_f=(-\infty,۴]$$

۴ چون $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x\neq ۰$ برقرار باشد، بنابراین:

$$D=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{۲}(k\in\mathbb{Z})\}$$

$$y=x+\tan x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$$

۵ چون $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x\neq ۰$ برقرار باشد، بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$:

$$D=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}$$

$$y=۵+۲\cot x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}$$

۶ در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

$$y=\log_{\bigcirc}\bigcirc \Rightarrow \begin{cases}\bigcirc>۰\\ \bigcirc>۰\ ,\ \bigcirc\neq ۱\end{cases}$$

$$y=\log_{(۳-x)}(x-۱) \Rightarrow \begin{cases} x-۱>۰ \Rightarrow x>۱\\ ۳-x>۰ \Rightarrow ۳>x \Rightarrow D_f=(۱,۲)\cup(۲,۳)\\ ۳-x\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۲\end{cases}$$

هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطهٔ تابع را ساده کنید.

در توابع چندضابطه‌ای، دامنهٔ تابع از اجتماع دامنهٔ همهٔ ضابطه‌ها به‌دست می‌آید.

۳۰ | **۲**

مخرج کسر تابعی از درجهٔ دوم است، بنابراین $x=-۳$، ریشهٔ مضاعف مخرج است و تابع مخرج کسر به صورت $۳(x+۳)^۲$ می‌باشد:

$$۳(x+۳)^۲=۳x^۲+(۲m-n)x+m+n$$

$$۳x^۲+۱۸x+۲۷=۳x^۲+(۲m-n)x+m+n$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲m-n=۱۸\\ m+n=۲۷\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=۱۵\\ n=۱۲\end{cases} \Rightarrow mn=۱۸۰$$

۳۱ | **۲**

$x=۱$ و $x=b$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، پس مخرج کسر را به‌صورت $(x-۱)(x-b)$ در نظر می‌گیریم:

$$(x-۱)(x-b)=x^۲-(۱+b)x+b : \text{مخرج کسر}$$

حالا این عبارت را با $x^۲-ax-۲$ مقایسه می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}b=-۲\\ ۱+b=a \Rightarrow a=-۲+۱=-۱\end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{-۲}{-۱}=۲$$

۳۲ | **۲**

ریشه‌های مخرج کسر را پیدا می‌کنیم:

$$||x|-۱|-۲=۰ \Rightarrow ||x|-۱|=۲ \Rightarrow \begin{cases}|x|-۱=۲ \Rightarrow |x|=۳\\ |x|-۱=-۲ \Rightarrow |x|=-۱ \times\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\pm ۳$$

پس دامنهٔ تابع f به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{-۳,۳\}$ است. یعنی دو عدد صحیح ۳- و ۳ در دامنهٔ تابع حضور ندارند.

۳۳ | **۳**

باید ریشه‌های مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$[x]-f(x)=۰ \Rightarrow [x]=f(x)$$

حالا با توجه به محدودهٔ x داریم:

$$x>۰: [x]=۱ \Rightarrow ۱\leq x<۲$$

$$x=۰: [x]=۰ \Rightarrow x=۰$$

$$x<۰: [x]=-۱ \Rightarrow -۱\leq x<۰$$

پس دامنهٔ تابع f به‌صورت بازهٔ $D_f=(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)\cup[۲,+\infty)$ است که شامل ۳ عدد صحیح $x=-۱,۰,۱$ نیست.

۳۴ | **۱**

باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد و مخرج کسرها نیز صفر نباشد:

$$f(x)=\sqrt{\frac{۱}{x+۲}-\frac{۱}{x}} \Rightarrow \frac{۱}{x+۲}-\frac{۱}{x}\geq ۰ \Rightarrow \frac{-۲}{x(x+۲)}\geq ۰$$

$$\Rightarrow x(x+۲)<۰ \Rightarrow -۲<x<۰$$

پس دامنهٔ این تابع فقط شامل عدد صحیح ۱- است.

۳۵ | **۲**

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجهٔ زوج را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{matrix}۱)\ x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲\\ ۲)\ ۱۶-۲x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۸\end{matrix} \Rightarrow D_f=[۲,۸]$$

پس $a=۲$ و $b=۸$ است. حالا مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-۸|<۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$-۲<x-۸<۲ \Rightarrow ۶<x<۱۰ \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}} x=۷,۸,۹$$

۳۶ | **۲**

عبارت زیر هر یک از رادیکال‌های فرجهٔ زوج *(رادیکال‌های صورت کسر)* باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$۱)\ x+۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۲$$

$$۲)\ ۶-x\geq ۰ \Rightarrow ۶\geq x$$

در ضمن عبارت $\frac{x+۱}{x-۳}$ زیر رادیکال فرجهٔ ۳ قرار دارد که شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند. حالا ریشهٔ مخرج کسرها را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

۱) $\frac{x+۱}{x-۳}\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۱$

۲) $x\neq ۳$

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=[-۲,۶]-\{-۱,۳\}$ است که مجموع عضوهای صحیح آن برابر است با:

$(-۲)+۰+۱+۲+۴+۵+۶=۱۶$

۳۷ **۳**

چون رادیکال در مخرج کسر قرار دارد، پس عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد *(اما صفر نمی‌تواند باشد.)*:

$|x+۲|-|x+۵|>۰ \Rightarrow |x+۲|>|x+۵|$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+۴x+۴>x^۲+۱۰x+۲۵$

$\Rightarrow -۲۱>۶x \Rightarrow -\frac{۲۱}{۶}>x \Rightarrow -۳/۵>x$

دامنهٔ تابع شامل سه عدد صحیح منفی $x=-۳,-۲,-۱$ نیست.

۳۸ **۳**

ابتدا تابع $f(-x)$ را پیدا می‌کنیم:

$f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}=\sqrt{-x+|x-۲|}$

برای تعیین دامنهٔ تابع f، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$-x+|x-۲|\geq ۰ \Rightarrow |x-۲|\geq x$

در ضمن می‌دانیم مجموعه جواب نامعادله $|U|\geq a$ از حل دو نامعادلهٔ $U\geq a$ و $U\leq -a$ به‌دست می‌آید:

$$|x-۲|\geq x \Rightarrow \begin{cases} x-۲\geq x \Rightarrow -۲\geq ۰ \ \text{تناقض} \\ x-۲\leq -x\Rightarrow ۲x\leq ۲\Rightarrow x\leq ۱\end{cases}$$

۳۹ **۲**

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$۳x-|x^۲-۴x|\geq ۰ \Rightarrow ۳x\geq |x^۲-۴x|$

حالا با توجه به ریشه‌های درون قدرمطلق داریم:

۱) $x\leq ۰$ یا $x\geq ۴: ۳x\geq x^۲-۴x \Rightarrow x^۲-۷x\leq ۰$

$\Rightarrow ۰\leq x\leq ۷ \xrightarrow[\text{محدودهٔ x}]{\text{اشتراک با}} ۴\leq x\leq ۷ \cup \{۰\}$

۲) $۰<x<۴: ۳x\geq -x^۲+۴x \Rightarrow x^۲-x\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x\leq ۰\\ \text{یا} \\ x\geq ۱\end{cases}$

$\xrightarrow[\text{محدودهٔ x}]{\text{اشتراک با}} ۱\leq x<۴$

از اجتماع بازه‌های به‌دست آمده از ۱ و ۲ دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $D_f=[۱,۷]\cup\{۰\}$ است. پس بزرگ‌ترین عضو طبیعی دامنه برابر $x=۷$ و کوچک‌ترین عضو طبیعی آن $x=۱$ است و نسبت آن‌ها برابر $\frac{۷}{۱}=۷$ است.

۴۰ **۳**

عبارت زیر رادیکال یک سهمی است که باید همواره نامنفی باشد، یعنی دلتای عبارت $x^۲-(m+۱)x+۲-m$ کوچکتر یا مساوی صفر است:

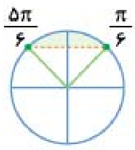
$\Delta\leq ۰ \Rightarrow (m+۱)^۲-۴(۱)(۲-m)\leq ۰$

$\Rightarrow m^۲+۶m-۷\leq ۰ \Rightarrow (m-۱)(m+۷)\leq ۰ \Rightarrow -۷\leq m\leq ۱$

پس به ازای ۹ مقدار صحیح m دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

۴۱ **۲**

چون $۲\sin x-۱$ زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ قرار دارد، پس:



$۲\sin x-۱\geq ۰ \Rightarrow \sin x\geq \frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{۶}\leq x\leq \frac{۵\pi}{۶}$

بنابراین $D_f=[\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}]$ است.

۴۲ **۳**

چون $f(x)=۲^x$ است؛ پس $f(\frac{۱}{x})=۲^{\frac{۱}{x}}$ بوده و برای تعیین دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)-f(\frac{۱}{x})}$ داریم:

$f(x)-f(\frac{۱}{x})\geq ۰ \Rightarrow ۲^x\geq ۲^{\frac{۱}{x}}\Rightarrow x\geq \frac{۱}{x} \Rightarrow x-\frac{۱}{x}\geq ۰$

$\Rightarrow \frac{x^۲-۱}{x}\geq ۰\Rightarrow D_f=[-۱,۰)\cup[۱,+\infty)$

> **روش سریع‌تر** چون $x=۲$ در تابع صدق می‌کند، پس گزینه‌های «۲» و «۴» حذف می‌شوند. در ضمن $x=-۲$ در تابع صدق نمی‌کند؛ پس گزینهٔ «۱» نیز حذف می‌شود.

۴۳ **۳**

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

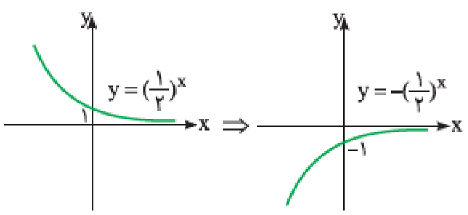
$۴^x-۲^{x-۱}\geq ۰ \Rightarrow ۲^{۲x}\geq ۲^{x-۱}\Rightarrow ۲x\geq x-۱\Rightarrow x\geq -۱$

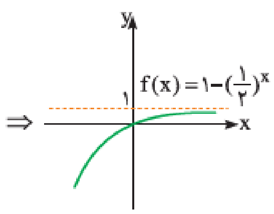
در ضمن مخرج کسر نباید صفر باشد. به ازای $x>۰$ تابع $g(x)$ برابر ۱ است که باعث می‌شود مخرج کسر برابر صفر شود. پس آن را از دامنهٔ تابع کنار می‌گذاریم:

$D_f=[-۱,۰]$

۴۴ **۳**

ابتدا نمودار تابع $f(x)=۱-(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم می‌کنیم:





حال برای تعیین دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x)\geq ۰$ باشد:

$x\geq ۰ , f(x)\geq ۰$: راست وبالای محور xها $\Rightarrow [۰,+\infty)$

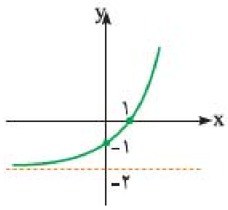
$x\leq ۰, f(x)\leq ۰$: چپ و پایین محور xها $\Rightarrow (-\infty,۰]$

$\Rightarrow \xrightarrow{\cup} D=(-\infty,+\infty)$

روش سریع‌تر چون $x=۲$ و $x=-۲$ در تابع صدق می‌کنند؛ پس گزینهٔ «۳» درست است.

۴۵ | ۴

عبارت زیر رادیکال را به‌صورت $\frac{x}{x-۲}\times f(x)$ در نظر می‌گیریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم. با توجه به این‌که نمودار تابع $f(x)=۲^x-۲$ به‌صورت مقابل است، داریم:



$$g(x)=\sqrt{\frac{x}{x-۲}\times f(x)} \Rightarrow \frac{x}{x-۲}\times f(x)\geq ۰$$

x		۰		۱		۲	
$\frac{x}{x-۲}$	+	۰	−		−	ت.ن	+
$f(x)$	−		−	۰	+		+
$\frac{x}{x-۲}\times f(x)$	−	۰	+	۰	−	ت.ن	+

پس دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $[۰,۱]\cup(۲,+\infty)$ می‌باشد که شامل بی‌شمار عدد طبیعی می‌باشد.

۴۶ | ۲

عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد:

$۳-x>۰\Rightarrow x<۳$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$۲x+۵\geq ۰\Rightarrow x\geq -\frac{۵}{۲}$

حالا ریشهٔ مخرج کسر را پیدا می‌کنیم و از دامنه کنار می‌گذاریم:

$۱-\log_۲^{(۳-x)}=۰\Rightarrow \log_۲^{(۳-x)}=۱\Rightarrow ۳-x=۲\Rightarrow x=۱$

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $[-\frac{۵}{۲},۱)\cup(۱,۳)$ است.

۴۷ | ۱

عبارت جلوی لگاریتم $\log_۴(x^۲-x-۲)$ باید مثبت باشد:

$x^۲-x-۲>۰\Rightarrow (x-۲)(x+۱)>۰\Rightarrow x<-۱$ یا $x>۲$

از طرفی عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$x^۲-۱\geq ۰\Rightarrow x^۲\geq ۱\Rightarrow x\leq -۱$ یا $x\geq ۱$

در ضمن مخرج کسر یعنی $\sqrt{x^۲-۱}+۱$ همواره مثبت است و فاقد ریشهٔ حقیقی است. از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده، دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ است.

۴۸ | ۱

ابتدا دامنهٔ لگاریتم را تعیین می‌کنیم:

۱) $x^۲-۸x+۱۵>۰\Rightarrow(x-۳)(x-۵)>۰\Rightarrow x<۳$ یا $x>۵$

۲) $x>۰$ و $x\neq۱$

حالا سراغ مخرج کسر می‌رویم:

$۴-|۳-x|>۰\Rightarrow|۳-x|<۴\Rightarrow -۴<x-۳<۴\Rightarrow -۱<x<۷$

از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده، دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $D_f=(۰,۱)\cup(۱,۳)\cup(۵,۷)$ است. اعداد صحیح دامنهٔ تابع $x=۶$ و $x=۲$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۸ است.

۴۹ | ۳

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲-\log_۳(x^۲-۸x)}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

۱) $x^۲-۸x>۰\Rightarrow x(x-۸)>۰\Rightarrow x<۰$ یا $x>۸$

۲) $۲-\log_۳(x^۲-۸x)\geq۰\Rightarrow \log_۳(x^۲-۸x)\leq\log_۳^۹$

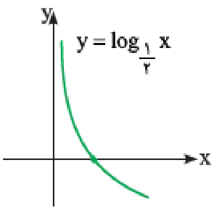
$\Rightarrow x^۲-۸x\leq۹$

$\Rightarrow x^۲-۸x-۹\leq۰\Rightarrow(x-۹)(x+۱)\leq۰\Rightarrow-۱\leq x\leq۹$

با اشتراک (۱) و (۲) دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $[-۱,۰)\cup(۸,۹]$ به‌دست می‌آید که شامل ۲ عدد صحیح است.

۵۰ | ۱

چون $P(x)=\frac{x}{\log_{\frac{۱}{۲}}^x}$ زیر رادیکال با فرجهٔ زوج قرار دارد، پس باید نامنفی باشد، در ضمن با توجه به نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}}^x$ داریم:



x		۰		۱	
x	−	۰	+		+
$\log_{\frac{۱}{۲}} x$			+	۰	−
$P(x)$		ت.ن	+	ت.ن	−

پس دامنهٔ تابع $f(x)$ بازهٔ $(۰,۱)$ می‌باشد که فاقد عدد صحیح است.

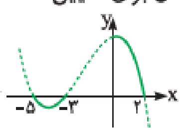
۵۱ | ۴

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

حال برای تعیین دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x)\geq۰$ باشد:

$x\geq۰,f(x)\geq۰$: راست و بالای محور xها

$x\leq۰,f(x)\leq۰$: چپ و پایین محور xها $\Rightarrow$

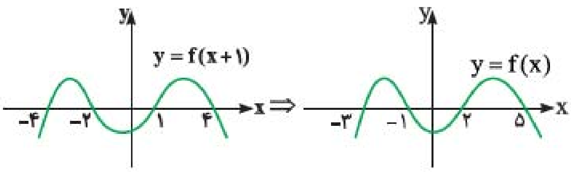


بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت بازهٔ $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$ است.

روش سریع‌تر با جایگذاری $x=-۱$ در تابع به عبارت $\sqrt{-f(-۱)}$ می‌رسیم. از آن‌جایی که $f(-۱)$ مثبت است، پس عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود و گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» حذف می‌شوند.

۵۲ | **۴**

نمودار تابع $y=f(x+۱)$ را ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست آید:



حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲+۴x+۳)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$(x^۲+۴x+۳)f(x)\geq ۰$

x		-۳		-۱		۲		۵	
$x^۲+۴x+۳$	+	۰	-	۰	+		+		+
$f(x)$	-	۰	+	۰	-	۰	+	۰	-
$(x^۲+۴x+۳)f(x)$	-	۰	-	۰	-	۰	+	۰	-

پس دامنهٔ تابع به‌صورت $\{-۳,-۱\}\cup[۲,۵]$ که شامل ۶ عدد صحیح است.

۵۳ | **۱**

با توجه به این‌که در عبارت $P(x)=-\dfrac{f(x)}{f(۲+x)}$ ریشه‌های صورت $x=-۲,۰,۱$ می‌باشد، پس ریشه‌های مخرج $x=-۴,-۲,-۱$ بوده و برای تعیین علامت $P(x)$ داریم:

x		-۴		-۲		-۱		۰		۱	
$P(x)$	-	ت.ن	+	ت.ن	+	ت.ن	-	۰	+	۰	-

$\Rightarrow D_g=(-۴,-۲)\cup(-۲,-۱)\cup[۰,۱]$

بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)$ شامل ۳ عدد صحیح ۱، ۰ و ۳- است.

۵۴ | **۱**

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\log_۲(x+۳)$ را پیدا می‌کنیم:

$x+۳>۰\Rightarrow x>-۳$

حالا عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. برای تعیین علامت باید ریشه‌های صورت و مخرج کسر را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} g(x)=۰\Rightarrow x=-۴,-۳,۲,۴ \\ ۲-f(x)=۰\Rightarrow f(x)=۲\Rightarrow \log_۲(x+۳)=۲\Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{g(x)}{۲-f(x)}\geq ۰\Rightarrow$

x		-۴		-۳		۱		۲		۴	
$g(x)$		۰	+	۰	-		-	۰	+	۰	
$۲-f(x)$			+		+	۰	-		-		
$\dfrac{g(x)}{۲-f(x)}$		ت.ن	+	ت.ن	-	ت.ن	+	۰	-	۰	

با توجه به دامنهٔ تابع $f(x)=\log_۲(x+۳)$، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\dfrac{g(x)}{۲-f(x)}}$ برابر بازهٔ $(۱,۲]$ است که شامل یک عدد صحیح است.

۵۵ | **۱**

باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$f(x)g(x)-g^۲(x)\geq ۰\Rightarrow g(x)(f(x)-g(x))\geq ۰$

ریشه‌های $g(x)=۰$ برابر $x=-۳,۴$ هستند. در ضمن نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در دو نقطهٔ $x=-۲,۳$ متقاطع‌اند، پس ریشه‌های $f(x)-g(x)=۰$ برابر $x=-۲,۳$ هستند. حالا جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x		-۳		-۲		۳		۴	
$g(x)$	-	۰	+		+		+	۰	-
$f(x)-g(x)$	+		+	۰	-	۰	+		+
$g(x)(f(x)-g(x))$	-	۰	+	۰	-	۰	+	۰	-

$\Rightarrow D_y=[-۳,-۲]\cup[۳,۴]$

مجموع بزرگترین و کوچکترین عضو دامنه برابر $-۳+۴=۱$ است.

۵۶ | **۴**

بُرد تابع $y=\frac{۱}{۲}x+۱$ برابر بازهٔ $[۰,\frac{۵}{۲}]$ است، پس:

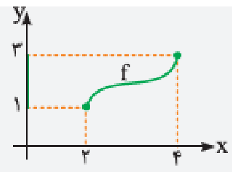
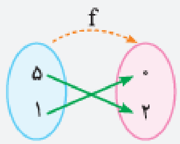
$۰\leq\frac{۱}{۲}x+۱\leq\frac{۵}{۲}\Rightarrow -۱\leq\frac{۱}{۲}x\leq\frac{۳}{۲}\Rightarrow -۲\leq x\leq ۳$

دامنهٔ تابع شامل ۶ عدد صحیح $x=-۲,-۱,۰,۱,۲,۳$ است.

هایلایت

بُرد تابع

به مجموعهٔ خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به‌دست می‌آید، بُرد تابع f می‌گویند و آن را با R_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن بُرد تابع	
نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور yها	 $R_f=[۱,۳]$
نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که به اعضای آن پیکان وارد شده	 $R_f=\{۰,۲\}$
زوج مرتبی: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم	$f=\{(۱,۲),(۵,۰)\}\Rightarrow R_f=\{۰,۲\}$

۵۷ | **۲**

ابتدا دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{۴-x}:۴-x\geq ۰\Rightarrow ۴\geq x \\ \sqrt{x-۴}:x-۴\geq ۰\Rightarrow x\geq ۴ \end{array}\right\}\Rightarrow D_f=\{۴\}$$

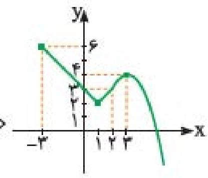
پس تنها عضو دامنهٔ تابع $\{۴\}$ است. حالا بُرد تابع را پیدا می‌کنیم:

$f(۴)=۰+۰+۱۶-۸+۳=۱۱$

۵۸ ۳

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}|x-1|+2 & ; \ -3\le x<2\\ -x^2+6x-5 & ; \ 2\le x\end{cases}\Rightarrow$$



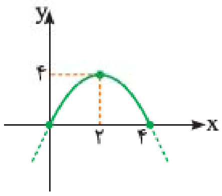
بنابراین برد تابع f برابر $(-\infty,6]$ است.

۵۹ ۲

عبارت زیر رادیکال یعنی $4x-x^2$ باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$4x-x^2\ge 0\Rightarrow x(4-x)\ge 0\Rightarrow 0\le x\le 4$$

حالا به منحنی $y=4x-x^2$ در بازهٔ $0\le x\le 4$ نگاه کنید:



با توجه به این‌که محدودهٔ بُرد $y=4x-x^2$ در بازهٔ $0\le x\le 4$ برابر $0\le y\le 4$ است، پس $0\le\sqrt{4x-x^2}\le 2$ است، بنابراین:

$$2\le 2+\sqrt{4x-x^2}\le 4$$

$$\Rightarrow R_f=[2,4]\Rightarrow b-a=2$$

۶۰ ۴

عبارت زیر رادیکال، یک عبارت درجهٔ دوم همواره مثبت است. پس دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ است. حالا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+7}=\sqrt{(x+2)^2+3}$$

چون کمترین مقدار $y=(x+2)^2+3$ برابر ۳ است، پس:

کمترین مقدار a برابر $\sqrt{3}$ است $\Rightarrow R_f=[\sqrt{3},+\infty)$

۶۱ ۳

دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است. حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

با توجه به این‌که $x^2>0$ است، پس $x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2$ است و بُرد تابع f برابر $[2,+\infty)$ است.

هایلایت

جمع هر عبارت حقیقی با معکوسش به‌صورت زیر است:

۱) $x>0\Rightarrow x+\frac{1}{x}\ge 2$

۲) $x<0\Rightarrow x+\frac{1}{x}\le -2$

به جوره دیگه! بُرد تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ کدام است؟

به جوره دیگه! بُرد تابع $f(x)=|x|+\frac{1}{|x|+4}$ کدام است؟

۶۲ ۱

ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

چون $\sqrt{x^2+1}>0$ است، پس $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ge 2$ است و بُرد تابع f به‌صورت بازهٔ $[2,+\infty)$ است که شامل عدد طبیعی $x=1$ نیست.

۶۳ ۲

می‌دانیم در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و بُرد آن $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

پس بُرد تابع $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$ برابر $\mathbb{R}-\{1\}$ است. حالا بُرد تابع $g(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow 1+\sqrt{x}\ge 1\Rightarrow 0<\frac{1}{1+\sqrt{x}}\le 1$$

پس بُرد این تابع به‌صورت بازهٔ $(0,1]$ است.

۶۴ ۲

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2+7x+12}{x^2-16}=\frac{(x+3)(x+4)}{(x-4)(x+4)}$$

$$=\frac{x+3}{x-4},D_f=\mathbb{R}-\{\pm 4\}$$

چون $x=-4$ جزء دامنهٔ تابع نیست پس $f(-4)=\frac{1}{8}$ هم جزء بُرد تابع f نیست. از طرفی می‌دانیم برد تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است، بنابراین برد تابع f شامل دو عدد $\frac{1}{8}$, ۱ نیست.

$$R_f=\mathbb{R}-\{\frac{1}{8},1\}$$

۶۵ ۱

می‌دانیم $0\le\cos^2 x\le 1$ است. در ضمن عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$-\cos^2 x\ge 0\Rightarrow\cos^2 x\le 0$$

پس نتیجه می‌گیریم فقط $\cos^2 x=0$ قابل قبول است. بنابراین:

$$f(x)=2^{\sqrt{-\cos^2 x}}=2^0=1$$

پس بُرد تابع f شامل یک عضو صحیح است: $R_f=\{1\}$

۶۶ ۳

می‌دانیم $-1\le\cos x\le 1$ است، بنابراین:

$$-1\le\cos x\le 1\xrightarrow{\times(-1)}-1\le-\cos x\le 1\xrightarrow{+1}0\le 1-\cos x\le 2$$

$$\Rightarrow 1\le 2^{1-\cos x}\le 4\xrightarrow{-1}0\le 2^{1-\cos x}-1\le 3\Rightarrow 0\le y\le 3$$

پس برد تابع f شامل ۳ عدد طبیعی است.

۶۷ ۲

ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\begin{cases}\frac{4x^2-6x}{x}; & x>0\\ \frac{-4x^2+6x}{x}; & x<0\end{cases}\Rightarrow y=\begin{cases}4x-6 & ; x>0\\ -4x+6 & ; x<0\end{cases}$$

۳۲۳ | ۲

در میان گزینه‌ها، نمودار تابع $y=x^۳-x+۱$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸})$ می‌گذرد:

$$y=(\frac{۱}{۲})^۳-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱-۴+۸}{۸}=\frac{۵}{۸}$$

پس وارون این تابع از نقطهٔ $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$ می‌گذرد.

هایلایت

۱ شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است.

۲ اگر نقطهٔ (a,b) روی f باشد، نقطهٔ (b,a) روی $f^{-۱}$ است و برعکس.

$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-۱}(b)=a$$

۳ دامنهٔ تابع f با بُرد تابع $f^{-۱}$ برابر است. همچنین بُرد تابع f نیز با دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ برابر است. $R_{f^{-۱}}=D_f\,,D_{f^{-۱}}=R_f$

۴ نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.

۳۲۴ | ۱

با توجه به نمودار، $f(-۳)=۵$ و $f(۲)=۰$ است، پس:

$$\begin{cases}f^{-۱}(۵)=-۳\\ f^{-۱}(۰)=۲\end{cases} \Rightarrow \frac{f^{-۱}(۵)}{f(a)+f^{-۱}(۰)}=-\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{-۳}{f(a)+۲}=-\frac{۳}{۴}$$

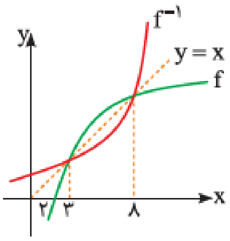
$$\Rightarrow f(a)+۲=۴ \Rightarrow f(a)=۲ \xrightarrow{f(۰)=۲} a=۰$$

۳۲۵ | ۴

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x-f^{-۱}(x)\geq ۰ \Rightarrow x\geq f^{-۱}(x)$$

با توجه به نمودار زیر، بازه‌ای که در آن مقادیر $y=f^{-۱}(x)$ کم‌تر یا مساوی مقادیر $y=x$ باشد، برابر بازهٔ $[۳,۸]$ است.



هایلایت

برای رسم نمودار $f^{-۱}$ از روی نمودار تابع f، باید نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

۳۲۶ | ۲

چون g وارون f است، پس باید $f^{-۱}(۴)-f^{-۱}(۱۲)$ را به‌دست آوریم.

می‌توانیم تابع f را یک بار برابر ۴ و یک بار برابر ۱۲ بگذاریم:

$$\begin{cases}-x+\sqrt{-۲x}=۴ \Rightarrow x=-۲\\ -x+\sqrt{-۲x}=۱۲ \Rightarrow x=-۸\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۴)-f^{-۱}(۱۲)=(-۲)-(-۸)=۶$$

هایلایت

برای محاسبهٔ $f^{-۱}(a)$ بهترین راه این است که معادلهٔ $f(x)=a$ را حل کنیم. جواب این معادله همان $f^{-۱}(a)$ است.

یه جور دیگه! طراح در کنکور تجربی خارج ۹۹ این سؤال رو اینجوری پرسید: فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g(۳)+g(۱۵)$ کدام است؟ جواب:

$$\begin{matrix}g(۳)=f^{-۱}(۳)=۱\\ g(۱۵)=f^{-۱}(۱۵)=۹\end{matrix} \xrightarrow{\text{مجموع}} ۱+۹=۱۰$$

۳۲۷ | ۳

چون $g(۱)=f^{-۱}(۱)$ است، پس:

$$f(x)=x-۲\sqrt{x}+۱=۱ \xrightarrow{x\geq ۱} x=۴ \Rightarrow g(۱)=۴$$

حال مقدار $g(۴)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x-۲\sqrt{x}+۱=۴ \Rightarrow x=۹ \Rightarrow g(۴)=۹ \Rightarrow g(g(۱))=۹$$

یه جوره دیگه! طراح ممکن بود اینجوری بپرسه: اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

$$y=x-۲\sqrt{x}+۱=(\sqrt{x}-۱)^۲ \Rightarrow \sqrt{y}=|\sqrt{x}-۱|$$

$$\xrightarrow{x\geq ۱} \sqrt{x}=\sqrt{y}+۱ \Rightarrow g(x)=(\sqrt{x}+۱)^۲$$

۳۲۸ | ۴

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x-۱)=\log_۳^{(x+۱)} \xrightarrow{x\to x+۱} f(x)=\log_۳^{(x+۲)}$$

حالا سراغ محاسبهٔ $f^{-۱}(g(۴))$ می‌رویم. چون $g(۴)=۲\cos ۲\pi=۲$ است، پس باید $f^{-۱}(۲)$ را پیدا کنیم:

$$f(x)=۲ \Rightarrow \log_۳^{(x+۲)}=۲ \Rightarrow x+۲=۹ \Rightarrow x=۷$$

پس $f^{-۱}(۲)=۷$ است.

یه جوره دیگه! همین سؤالو با یک تابع نمایی هم ببینیم: اگر $g(x)=۲\cos(\frac{\pi x}{۲})$ و $f(x-۱)=۲^{۳x-۴}+۱$ باشد، مقدار $f^{-۱}og(۴)$ کدام است؟ که جوابش برابر است با: $f^{-۱}(g(۴))=f^{-۱}(۲)=\frac{۱}{۳}$

۳۲۹ | ۳

می‌خواهیم حاصل $f(-\frac{۲}{۵})+g^{-۱}(-\frac{۲}{۵})$ را پیدا کنیم. با فرض $f(-\frac{۲}{۵})=a$ و $g^{-۱}(-\frac{۲}{۵})=b$ داریم:

$$۱)\ f^{-۱}(a)=-\frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{a}{۱+|a|}=-\frac{۲}{۵} \xrightarrow{a<۰} \frac{a}{۱-a}=-\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵a=-۲+۲a \Rightarrow ۳a=-۲ \Rightarrow a=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow f(-\frac{۲}{۵})=-\frac{۲}{۳}$$

$$۲)\ g(b)=-\frac{۲}{۵} \Rightarrow \sqrt{b}-۱=-\frac{۲}{۵} \Rightarrow \sqrt{b}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow b=\frac{۹}{۲۵} \Rightarrow g^{-۱}(-\frac{۲}{۵})=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow (f+g^{-۱})(-\frac{۲}{۵})=-\frac{۲}{۳}+\frac{۹}{۲۵}=\frac{-۵۰+۲۷}{۷۵}=-\frac{۲۳}{۷۵}$$

یه جوره دیگه! در آزمون مجدد ۱۴۰۱ طراح اینجوری پرسید: اگر $f(x)=\frac{x}{۱+|x|}$ باشد، حاصل $f^{-۱}(-\frac{۳}{۷})+f^{-۱}(\frac{۵}{۹})$ کدام است؟ جواب: $-\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۱}{۲}$

۳۳۰ | ۳

برای پیدا کردن $f^{-1}(-۲)$ باید در تابع $f(x)=\begin{cases}۶-۲x\ ;\ x<۲\\ ۴-x\ ;\ x\ge ۲\end{cases}$ ضابطهٔ پایینی را برابر ۲- بگذاریم:

$$۴-x=-۲\Rightarrow x=۶\Rightarrow f^{-1}(-۲)=۶$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(-۵)$ باید در تابع $g(x)=\begin{cases}۲x-۳;x<۰\\ x-۴;x\ge ۰\end{cases}$ ضابطهٔ بالایی را برابر ۵- بگذاریم:

$$۲x-۳=-۵\Rightarrow x=-۱\Rightarrow g^{-1}(-۵)=-۱$$

حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$f(g^{-1}(-۵))+g(f^{-1}(-۲))=f(-۱)+g(۶)=۸+۲=۱۰$$

۳۳۱ | ۳

مطابق شکل، نقاط $(-۲,۲),(۰,۳)$ روی نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ قرار دارند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$(-۲,۲)\Rightarrow f(۲\times -۲-۱)=۲\Rightarrow f(-۵)=۲\Rightarrow f^{-1}(۲)=-۵$$

$$(۰,۳)\Rightarrow f(۲\times ۰-۱)=۳\Rightarrow f^{-1}(۳)=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(۲)+f^{-1}(۳)}{f(-۵)}=\frac{(-۵)+(-۱)}{۲}=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

۳۳۲ | ۳

ابتدا با توجه به شکل صورت سؤال، ضابطهٔ توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-۲x+۲\ ;\ x\le ۰\\ -x+۲\ ;\ x>۰\end{cases}\ ,\ g(x)=-۲x-۲$$

حالا برای پیدا کردن $f^{-1}(-۲)$ باید ضابطهٔ پایینی تابع f را برابر ۲- قرار دهیم:

$$-x+۲=-۲\Rightarrow x=۴\Rightarrow f^{-1}(-۲)=۴$$

پس ساده‌شدهٔ عبارت مورد نظر برابر است با:

$$g(f^{-1}(-۲))+g^{-1}(f(-۱))=g(۴)+g^{-1}(۴)$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(۴)$ داریم:

$$g(x)=-۲x-۲=۴\Rightarrow x=-۳\Rightarrow g^{-1}(۴)=-۳$$

$$\Rightarrow g(۴)+g^{-1}(۴)=(-۱۰)+(-۳)=-۱۳$$

۳۳۳ | ۲

ابتدا مختصات نقطه برخورد را به کمک ضابطه خط به‌دست می‌آوریم:

$$۱۰y-x=-۱۰\xrightarrow{y=۱}۱۰-x=-۱۰\Rightarrow x=۲۰$$

پس مختصات نقطه برخورد تابع f^{-1} با خط برابر $(۲۰,۱)$ است و این نقطه روی تابع f^{-1} قرار دارد، یعنی $f^{-1}(۲۰)=۱$ است. داریم:

$$f^{-1}(۲۰)=۱\Rightarrow f(۱)=۲۰\Rightarrow (۱)^۳+۶(۱)^۲+a(۱)+۱=۲۰\Rightarrow a=۱۲$$

۳۳۴ | ۴

چون وارون تابع f خط $y=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند، پس:

$$y=۱۲-x\xrightarrow{y=۱۰}۱۰=۱۲-x\Rightarrow x=۲\Rightarrow (۲,۱۰)\in f^{-1}$$

در نتیجه $(۱۰,۲)\in f$ است، پس:

$$f(۱۰)=۲\Rightarrow \sqrt{۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}}=۲\Rightarrow ۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۰m-۱}=۳\Rightarrow m=۱\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}$$

$$\Rightarrow f(m+۴)=f(۵)=۱$$

۳۳۵ | ۴

چون $f^{-1}(g(a))=۶$ است، پس $f(۶)=g(a)$ است. در ضمن $f(۶)=۷$ است، پس:

$$g(a)=۷\xrightarrow{(۴,۷)\in g}a=۴$$

۳۳۶ | ۳

در تابع f داریم، $f(\frac{۱}{۴})=-۳$ و با توجه به این‌که $f(g^{-1}(a))=-۳$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $g^{-1}(a)=\frac{۱}{۴}$ بنابراین:

$$g^{-1}(a)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow g(\frac{۱}{۴})=a$$

ضابطهٔ $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$g(\frac{۱}{۴})=-(\frac{۱}{۴})\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۸}$$

۳۳۷ | ۲

چون $f^{-1}(g^{-1}(a))=۸$ است، پس $g^{-1}(a)=f(۸)$ است. از طرفی برای پیدا کردن $f(۸)$، باید به سراغ ضابطهٔ بالایی تابع f برویم:

$$x\ge ۳: f(x)=\sqrt{۵x+۹}\xrightarrow{x=۸}f(۸)=\sqrt{۵\times ۸+۹}=۷$$

بنابراین $g^{-1}(a)=۷$ است، یعنی $g(۷)=a$ است. با توجه به تابع g نتیجه می‌گیریم $a=۳$ است.

۳۳۸ | ۲

چون $f^{-1}(g(۲a))=۶$ است، پس $g(۲a)=f(۶)$ است، بنابراین با توجه به تابع‌های f و g داریم:

$$g(۲a)=f(۶)\xrightarrow{f(۶)=۳}g(۲a)=۳\Rightarrow \frac{۲a}{۲a-۱}=۳$$

$$\Rightarrow ۶a-۳=۲a\Rightarrow ۴a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۳۳۹ | ۴

فرض می‌کنیم $(g^{-1}of^{-1})(۸)=\alpha$ باشد، پس:

$$g^{-1}(f^{-1}(۸))=\alpha\Rightarrow g(\alpha)=f^{-1}(۸)\ \ (۱)$$

حال برای محاسبهٔ $f^{-1}(۸)$ ضابطهٔ f را برابر ۸ می‌گذاریم:

$$۸=\frac{۲}{۵}x-۴\Rightarrow \frac{۲}{۵}x=۱۲\Rightarrow x=۳۰\Rightarrow f^{-1}(۸)=۳۰$$

بنابراین از (۱) داریم:

$$g(\alpha)=f^{-1}(۸)=۳۰\Rightarrow \alpha^۳+\alpha=۳۰\Rightarrow \alpha=۳\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۸))=۳$$

۳۴۰ | ۱

ابتدا $f^{-1}(۲۰)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x+\sqrt{x}=۲۰\Rightarrow x=۱۶\Rightarrow f^{-1}(۲۰)=۱۶$$

پس $g^{-1}(f^{-1}(۲۰))=g^{-1}(۱۶)$ است، پس ضابطهٔ g را برابر ۱۶ می‌گذاریم:

$$\frac{۹x+۶}{۱-x}=۱۶\Rightarrow ۹x+۶=۱۶-۱۶x\Rightarrow ۲۵x=۱۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲}{۵}\Rightarrow g^{-1}(۱۶)=\frac{۲}{۵}$$

۳۴۱ | ۳

می‌دانیم $f(g^{-1}(-۱))=-\frac{۱۱}{۳}$ است، پس ابتدا ضابطهٔ تابع f را برابر $-\frac{۱۱}{۳}$ می‌گذاریم:

$$\frac{۲x+۱}{۳}=-\frac{۱۱}{۳}\Rightarrow ۲x=-۱۲\Rightarrow x=-۶$$

پس $f(-6)=-\frac{11}{3}$ است، بنابراین $-6=g^{-1}(-1)$ است. یعنی $g(-6)=-1$ است:

$$g(-6)=\frac{-12+a}{a+6}=-1\Rightarrow -12+a=-a-6\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3$$

۳۴۲ | **۱**

$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(4,3),(6,4)\}$ است، حالا خواهیم داشت:

$$x=2:\frac{g(2)}{g(f^{-1}(2))}=\frac{g(2)}{g(1)}\Rightarrow \times$$

$$x=5:\frac{g(5)}{g(f^{-1}(5))}=\frac{g(5)}{g(2)}=\frac{6}{3}=2$$

$$x=4:\frac{g(4)}{g(f^{-1}(4))}=\frac{g(4)}{g(3)}=\frac{2}{1}=2$$

$$x=6:\frac{g(6)}{g(f^{-1}(6))}=\frac{g(6)}{g(4)}\Rightarrow \times$$

پس تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$ به‌صورت $\{(5,2),(4,2)\}$ است.

۳۴۳ | **۴**

$g^{-1}=\{(3,2),(2,4),(6,5),(1,3)\}$ است. حالا خواهیم داشت:

$$x=1: g^{-1}(f(1))-f(1)=g^{-1}(2)-f(1)=4-2=2$$

$$x=2: g^{-1}(f(2))-f(2)=g^{-1}(5)-f(2)\Rightarrow \times$$

$$x=3: g^{-1}(f(3))-f(3)=g^{-1}(4)-f(3)\Rightarrow \times$$

$$x=4: g^{-1}(f(4))-f(4)=g^{-1}(6)-f(4)=5-6=-1$$

پس برد تابع $(g^{-1}of)-f$ برابر $\{2,-1\}$ است.

۳۴۴ | **۱**

ابتدا مقدار $g(2)$ را به‌دست می‌آوریم، پس ضابطهٔ g^{-1} را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$1-x=2\Rightarrow x=-1\Rightarrow g(2)=-1$$

پس $f(g(2))=f(-1)$ است و داریم:

$$f(x+1)=\frac{g(x)-1}{x}\xrightarrow{x=-2}f(-1)=\frac{g(-2)-1}{-2}$$

حالا برای به‌دست آوردن $g(-2)$، تابع g^{-1} را برابر -2 قرار می‌دهیم:

$$1-x=-2\Rightarrow x=3\Rightarrow g(-2)=3$$

$$\Rightarrow f(-1)=\frac{g(-2)-1}{-2}=\frac{3-1}{-2}=-1$$

۳۴۵ | **۱**

فرض می‌کنیم $g^{-1}(3)=a$ باشد، پس $g(a)=3$ است. حالا در ضابطهٔ fog به جای xها، a قرار می‌دهیم:

$$f(g(a))=a^3g(a)+4g(a)\xrightarrow{g(a)=3}f(3)=3a^3+4\times 3$$

از طرفی با توجه به ضابطهٔ تابع f داریم:

$$f(3)=3^2+4(3)+15=36$$

$$\Rightarrow 3a^3+12=36\Rightarrow 3a^3=24\Rightarrow a^3=8\Rightarrow a=2$$

پس $g^{-1}(3)=a=2$ است.

۳۴۶ | **۳**

چون $f(x^3+2x)=2^x-14$ است، پس $f^{-1}(2^x-14)=x^3+2x$ است و با جای‌گذاری $x=4$ مقدار $f^{-1}(2)$ به‌دست می‌آید:

$$x=4: f^{-1}(2^4-14)=4^3+2\times 4\Rightarrow f^{-1}(2)=72$$

۳۴۷ | **۴**

چون $f^{-1}(\frac{x+2}{x-1})=x^3-1$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت $f(x^3-1)=\frac{x+2}{x-1}$ است. حال چون $f(7)$ را می‌خواهیم، پس داریم:

$$x^3-1=7\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$$

بنابراین با جای‌گذاری $x=2$ در ضابطهٔ تابع داریم:

$$f(2^3-1)=\frac{2+2}{2-1}\Rightarrow f(7)=4$$

۳۴۸ | **۴**

برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد $f^{-1}(x)$ و نیمساز ناحیهٔ دوم یعنی $y=-x\ ;\ x<0$ از ویژگی تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$f^{-1}(x)=-x\Rightarrow f(-x)=x\Rightarrow -x+\frac{1}{2x}=x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x}=2x\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\xrightarrow{x<0}x=-\frac{1}{2}$$

۳۴۹ | **۲**

با فرض $g^{-1}(6)=a$ داریم:

$$g(a)=6\Rightarrow f(a)+\sqrt{f(a)}=6\Rightarrow f(a)=4$$

حال چون $f^{-1}(x)$ داده شده، پس می‌توانیم از $f(a)=4$ نتیجه بگیریم $f^{-1}(4)=a$ است:

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}\xrightarrow{x=4}a=f^{-1}(4)=\sqrt[3]{8}=2\Rightarrow g^{-1}(6)=2$$

۳۵۰ | **۴**

با فرض $g^{-1}(16)=a$ داریم: $g(a)=16\Rightarrow f(3a-4)=16$

حال از $f(3a-4)=16$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(16)=3a-4$ است و خواهیم داشت:

$$f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}\xrightarrow{x=16}3a-4=f^{-1}(16)=16+\sqrt{16}=20$$

$$\Rightarrow a=8$$

بنابراین $g^{-1}(16)=8$ است.

۳۵۱ | **۱**

نمودار هر تابع (به شرط وارون‌پذیر بودن) و وارون آن نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. پس باید وارون تابع خطی داده شده را به‌دست آوریم. بنابراین کافی است جای x و y را عوض کنیم تا معادلهٔ خط d به‌دست آید:

$$3y-2x=4\xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}}d: 3x-2y=4$$

$$\xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدأ}}y=-2$$

روش سریع‌تر می‌توانیم بدون محاسبهٔ تابع وارون، در معادلهٔ خط اولیه به‌جای y صفر بگذاریم.

۳۵۲ | ۴

برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون f، نحوهٔ تشکیل تابع f را بررسی می‌کنیم.

$f: (-3) \rightarrow (\div 2) \qquad f^{-1}: (+3) \leftarrow (\times 2)$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x+3 \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{۶ واحد}} y = 2x+3-6$$

حالا نقطهٔ برخورد تابع حاصل را با تابع f پیدا می‌کنیم:

$$\frac{x-3}{2} = 2x-3 \Rightarrow x-3 = 4x-6 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = -1 \Rightarrow A(1,-1) \Rightarrow OA = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

هایلایت

برای وارون کردن توابعی که در ضابطهٔ آن‌ها یک x وجود دارد، یک راهکار جالب و سریع این است که ابتدا نحوهٔ تشکیل تابع f را پیدا کنید. سپس برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون تابع، اعمال را به طور برعکس و از آخر به اول روی x انجام دهید. در جدول زیر، تعدادی از این اعمال و برعکس آن‌ها آورده شده:

+	−
×	÷
توان ۲	$\sqrt{\ }$
توان ۳	$\sqrt[3]{\ }$
a^x	$\log_a x$

۳۵۳ | ۳

با توجه به تابع $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ داریم:

$f: (\times \frac{2}{3}) \rightarrow (+2) \Rightarrow f^{-1}: (\div \frac{2}{3}) \leftarrow (-2)$

پس $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{\frac{2}{3}} = \frac{3x-6}{2}$ است. حالا معادلهٔ f^{-1} را مرتب می‌کنیم و فاصلهٔ نقطهٔ $A(7,1)$ را از آن پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{3x-6}{2} \Rightarrow 3x - 2y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|21-2-6|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

۳۵۴ | ۲

با توجه به تابع $f(x) = 2x-1$ داریم:

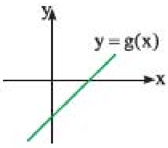
$f: (\times 2) \rightarrow (-1) \Rightarrow f^{-1}: (\div 2) \leftarrow (+1)$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ است و داریم:

$$g(x+1) = f(x) - f^{-1}(x) = 2x-1-\frac{x+1}{2} = \frac{3x-3}{2}$$

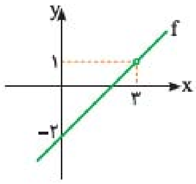
حالا در تابع $g(x+1)$ به جای xها $x-1$ قرار می‌دهیم تا به تابع $g(x)$ برسیم:

$$g(x+1) = \frac{3x-3}{2} \xrightarrow{x \Rightarrow x-1} g(x) = \frac{3(x-1)-3}{2} = \frac{3x-6}{2}$$

$\Rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow$  $\Rightarrow$ از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.

۳۵۵ | ۴

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x-2 \ ; \ x \neq 3 \Rightarrow$ 

عدد ۱ در محدودهٔ بُرد تابع f وجود ندارد، پس: $f^{-1}(x) = x+2 \ ; \ x \neq 1$

۳۵۶ | ۲

چون این دو خط نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن‌اند، پس وارون یکی از آن‌ها با دیگری برابر است. بنابراین در خط $2x - 3y = b$ جای x و y را عوض می‌کنیم تا وارون آن یعنی $2y - 3x = b$ به‌دست آید.

پس $2y - 3x = b$ و $ax + by = 8$ برابرند، پس: $\frac{a}{-3} = \frac{b}{2} = \frac{8}{b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{2} = \frac{8}{b} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \\ \frac{a}{-3} = \frac{b}{2} \Rightarrow ab = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow a+b = -2 \\ b = -4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a+b = 2 \end{cases}$$

۳۵۷ | ۲

با توجه به تابع $f(x) = \frac{3x-1}{a}$ داریم:

$f: (\times 3) \rightarrow (-1) \rightarrow (\div a)$

$\Rightarrow f^{-1}: (\div 3) \leftarrow (+1) \leftarrow (\times a)$

بنابراین $f^{-1}(x) = \frac{ax+1}{3}$ است. حالا $f(3f^{-1}(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(3f^{-1}(x)) = f(ax+1) = \frac{3(ax+1)-1}{a} = \frac{3ax+2}{a} = 3x + \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow 3x + \frac{2}{a} = 3x + 5 \Rightarrow \frac{2}{a} = 5 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

۳۵۸ | ۱

نحوهٔ تولید تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ به‌صورت زیر است:

$f: (-1) \rightarrow (-\sqrt{\ }) \rightarrow (+2)$

$f^{-1}: (+1) \leftarrow (\text{توان ۲}) \leftarrow (-2)$

پس $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$ است. در ضمن بُرد تابع f بازهٔ $(-\infty, 2]$ است، پس دامنهٔ تابع f^{-1} نیز برابر همین بازه است.

روش سریع‌تر چون $f(5) = 0$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(0) = 5$ باشد. فقط گزینهٔ (۱) این ویژگی را دارد.

۳۵۹ **۳**

ابتدا نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم، یعنی آن را وارون می‌کنیم. توجه کنید بُرد تابع f بازهٔ $[2, +\infty)$ است:

$y:$ (−۱) → (√) → (+۲)

$y^{-1}:$ (+۱) ← (توان ۲) ← (−۲)

$$\Rightarrow y^{-1} = (x-2)^2 + 1 ; x \geq 2$$

حالا نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

$$y = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow[\text{۲ واحد راست}]{x \to (x-2)} y = (x-4)^2 + 1$$

$$\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۳ واحد}} g(x) = (x-4)^2 + 1 - 3$$

پس $g(x) = (x-4)^2 - 2$ است و $g(4) = -2$ است.

۳۶۰ **۳**

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$ است. پس $a = 2$ و $b = 1$ می‌باشد. حالا، اگر نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه کنیم، به تابع $y = 1 + \sqrt{-x+2}$ می‌رسیم که بُرد آن به‌صورت بازهٔ $[1, +\infty)$ است. حالا نمودار حاصل را وارون می‌کنیم:

$y:$ (×−۱) → (+۲) → (√) → (+۱)

$y^{-1}:$ (÷−۱) ← (−۲) ← (توان ۲) ← (−۱)

$$\Rightarrow y^{-1} = 2 - (x-1)^2 ; x \geq 1$$

در نتیجه $g(x) = 2 - (x-1)^2 ; x \geq 1$ است و داریم:

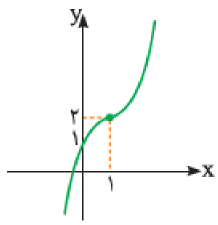
$$g(a+b) = g(2+1) = 2 - (3-1)^2 = 2 - 4 = -2$$

۳۶۱ **۴**

وقتی نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا منتقل کنیم به نمودار $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ می‌رسیم. حالا وارون تابع حاصل را پیدا می‌کنیم:

$y:$ (−۲) → (∛) → (+۱)

$y^{-1}:$ (+۲) ← (توان ۳) ← (−۱) $\Rightarrow y^{-1} = (x-1)^3 + 2$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow$ از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

به جوره دیگه! طراح می تونست یکم تست رو جذاب تر بپرسه! اینجوری: «اگر نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + a$ از نقطهٔ $(2,1)$ بگذرد، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟»

جواب: $(1,2) \in f \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x-2}$

۳۶۲ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4) + 6x = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$$

طول رأس این سهمی برابر $x = -1$ است که در بازهٔ $x \geq -1$ اکیداً صعودی است. حالا ضابطهٔ وارون تابع را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$f:$ (+۱) → (توان ۲) → (+۳)

$f^{-1}:$ (−۱) ← (√) ← (−۳) $\Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-3}$

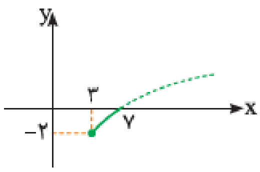
به جوره دیگه! طراح میتونه همین تست رو کمی ساده تر بپرسه:

«ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4 ; x \geq -1$ کدام است؟»

یا اگه بخواد راه عددگذاری رو سفت‌تر کنه، اینجوری بپرسه:

«ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4 ; x \geq -1$ به صورت $f^{-1}(x) = a + \sqrt{x+b}$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟»

۳۶۳ **۱**



مطابق شکل نمودار تابع f در بازهٔ $[3, 7)$ زیر محور xها قرار دارد و محدودهٔ بُرد آن در این بازه به‌صورت $[-2, 0)$ است:

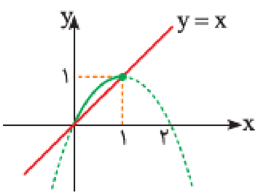
حالا ضابطهٔ وارون تابع را پیدا می‌کنیم:

$f:$ (−۳) → (√) → (−۲)

$f^{-1}:$ (+۳) ← (توان ۲) ← (+۲)

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+2)^2 + 3 ; -2 \leq x \leq 0$$

۳۶۴ **۴**



نمودار تابع f را در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم است، در نظر می‌گیریم: بُرد تابع در این بازه به صورت $(0, 1)$ است. حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم و وارون آن را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1 ; 0 < x < 1$$

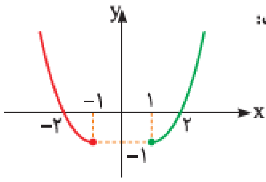
$f:$ (−۱) → (توان ۲) → (×−۱) → (+۱)

$f^{-1}:$ (+۱) ← (−√) ← (÷−۱) ← (−۱)

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x} ; 0 < x < 1$$

۳۶۵ **۳**

وقتی نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x ; x \geq 1$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، باید به جای همهٔ xها، −x قرار دهیم. پس ضابطهٔ آن پس از قرینه نسبت به محور yها به صورت زیر است:



$$y = x^2 + 2x ; x \leq -1$$

$$\Rightarrow y = (x+1)^2 - 1 ; x \leq -1$$

حالا نمودار این تابع را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم یعنی آن را وارون می‌کنیم:

$y: (+1) \rightarrow (\text{توان ۲}) \rightarrow (-1)$

$y^{-1}: (+1) \rightarrow (-\sqrt{\ }) \rightarrow (-1) \Rightarrow y^{-1} = -1-\sqrt{x+1}$

۳۶۶ | **۳**

ابتدا باید ضابطهٔ تابع $y=f(x)$ را پیدا کنیم:

$$fog(x) = (2x-1)g(x) = (2x-1)(2x+1) = 4x^2-1$$

حالا با فرض $g(x) = 2x+1 = t$ داریم:

$$x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = 4x^2-1 \Rightarrow f(t) = 4(\frac{t-1}{2})^2-1 = t^2-2t$$

پس $f(x) = x^2-2x$ است و طبق گفتهٔ صورت سؤال باید ضابطهٔ وارون آن را در $x \le 1$ پیدا کنیم:

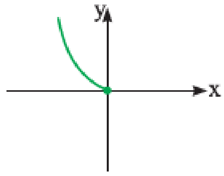
$$f(x) = x^2-2x+1-1 = (x-1)^2-1 \; ; \; x \le 1$$

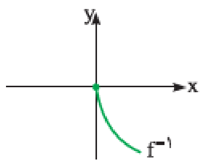
$f: (-1) \rightarrow (\text{توان ۲}) \rightarrow (-1)$

$f^{-1}: (+1) \rightarrow (-\sqrt{\ }) \rightarrow (+1) \Rightarrow f^{-1}(x) = 1-\sqrt{x+1}$

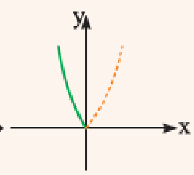
۳۶۷ | **۱**

می‌دانیم $f(x) = x^2\sqrt{x^2} = x^2|x|$ است که در بازهٔ $x \le 0$ نزولی است، پس:

$x \le 0 : f(x) = -x^3 \Rightarrow$ 

$\xrightarrow[y=x]{\text{قرینه‌نسبت‌به}}$  $\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x} \; ; \; x \ge 0$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست از علامت جمع بین x^2 و $\sqrt{x^2}$ استفاده کنه: «تابع $f(x) = x^2+\sqrt{x^2}$ در یک بازهٔ نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه کدام است؟»

$$f(x) = x^2+|x| = \begin{cases} x^2+x \; ; \; x>0 \\ x^2-x \; ; \; x \le 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{رسم}}$$ 

$$\xrightarrow{\text{وارون}} y^{-1} = \frac{1}{2} - \sqrt{x+\frac{1}{4}} \; ; \; x \ge 0$$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده نکنه: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ کدام است؟»

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \; ; \; x \ge 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده نکنه و همچنین بین x و $\sqrt{x}$ علامت جمع قرار بده! ببینیم: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x+\sqrt{x}$ کدام است؟»

جواب: $f(x) = x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = (\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2$$

۳۶۸ | **۳**

می‌دانیم اگر $f^{-1}(a) = b$ باشد، آنگاه $f(b) = a$ خواهد بود. بنابراین در یک عدد دلخواه رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$f(8) = \frac{10}{4} - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 8$$

$$f^{-1}(1) = a(1) + a(\sqrt{1}) = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

۳۶۹ | **۱**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1$$

$f: (-1) \rightarrow (\sqrt{\ }) \rightarrow (+1)$

$f^{-1}: (-1) \rightarrow (\text{توان ۲}) \rightarrow (+1)$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2+1 = x^2-2x+2 \; ; \; x \ge 1$$

روش سریع‌تر عددگذاری کنیم! چون $f(5) = 3$ است، پس گزینه‌ای درست است که $f^{-1}(3) = 5$ باشد. پس گزینهٔ (۱) درست است.

یه جوره دیگه! اگه طراح رادیکال بیرونی رو نذاره، باز هم برای وارون کردن می‌تونیم از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کنیم، مثلاً اینجوری بپرسه «ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x+2\sqrt{x+2}+3$ کدام است؟»

جواب: $f(x) = x+2\sqrt{x+2}+3 = (\sqrt{x+2}+1)^2$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x}-1)^2-2$$

۳۷۰ | **۳**

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$1)\; x \ge 0 \quad 2)\; \frac{1}{4}x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 4 \Rightarrow D_f = [4,+\infty)$$

حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{4}x-1} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2-x} = \sqrt{(\frac{1}{2}x-1)^2-1}$$

نحوهٔ تولید تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$f: (\times\frac{1}{2}) \rightarrow (-1) \rightarrow (\text{توان ۲}) \rightarrow (-1) \rightarrow (\sqrt{\ })$

$f^{-1}: (\text{توان ۲}) \rightarrow (+1) \rightarrow (\sqrt{\ }) \rightarrow (+1) \rightarrow (\div\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2\sqrt{x^2+1}+2$$

روش سریع‌تر میتونیم عددگذاری کنیم! چون $f(4) = 0$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-1}(0) = 4$ باشد، پس گزینهٔ (۳) درست است.

۳۷۱ **۲**

ضابطهٔ تابع را به‌صورت $y=|x+1|-|3x-6|$ ساده می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}2x-7 & ; x\le -1\\ 4x-5 & ; -1<x<2\\ -2x+7 & ; x\ge 2\end{cases}\xrightarrow{\text{نزولی}} y=-2x+7\ ; x\ge 2$$

پس ضابطهٔ وارون تابع در بازه‌ای که نزولی است، به‌صورت $y^{-1}=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\ ; x\le 3$ است.

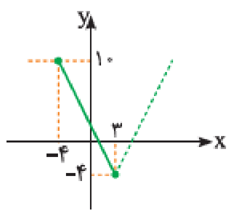
> یه جوره دیگه! طراح می‌تونست خواستهٔ سوال رو کمی سفت‌تر کنه و اینجوری بپرسه: «نمودار وارون تابع در بازهٔ نزولی و نمودار تابع $y=x^2-3x$ در چند نقطه مشترک هستند؟» جواب: در یک نقطه به طول $x=-1$ مشترک‌اند.

> **هایلایت**
>
> برای به‌دست آوردن وارون توابع قدرمطلقی، ابتدا باید تعیین کنیم تابع در کدام بازه یک‌به‌یک است. برای این منظور تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یک‌به‌یک است، تعیین کرده و ضابطهٔ وارون تابع را به‌دست می‌آوریم.

۳۷۲ **۴**

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}10 & ; x<-4\\ -2x+2 & ; -4\le x\le 3\\ 2x-10 & ; x>3\end{cases}\Rightarrow$$

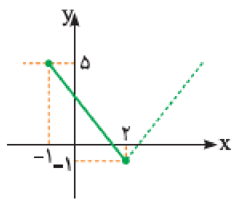


ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$ است. از طرفی چون بُرد تابع f در این بازه برابر $-4\le y\le 10$ است، پس دامنهٔ تابع f^{-1} در این بازه به‌صورت $-4\le x\le 10$ است.

۳۷۳ **۳**

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}5 & ; x<-1\\ -2x+3 & ; -1\le x\le 2\\ 2x-5 & ; x>2\end{cases}\Rightarrow$$



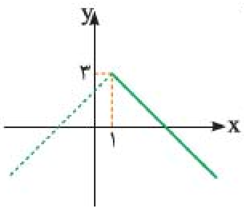
ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2};-1\le x\le 5$ است. حال طول نقطهٔ برخورد منحنی f^{-1} و g را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=x+1\Rightarrow \frac{3}{2}x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

۳۷۴ **۴**

ضابطهٔ $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x))=3-\sqrt{x^2-2x+1}=3-\sqrt{(x-1)^2}=3-|x-1|$$

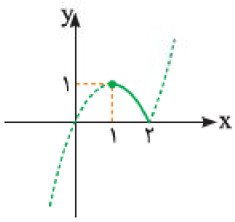


پس نمودار تابع fog به‌صورت زیر است: ضابطهٔ تابع در بازهٔ اکیداً نزولی به‌صورت $y=-x+4$ است و چون بُرد تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر بازهٔ $(-\infty,3]$ است، پس ضابطهٔ وارون آن به‌صورت زیر است: $y=-x+4;x\le 3$

۳۷۵ **۳**

نمودار تابع $f(x)=x|x-2|$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-2);x\le 2\\ x(x-2);x>2\end{cases}\Rightarrow$$



ضابطهٔ وارون تابع f در بازهٔ نزولی به‌صورت زیر است:

$$y=-x(x-2)=-x^2+2x-1+1=-(x-1)^2+1$$

y: (−۱) → (توان ۲) → (x−۱) → (+۱)

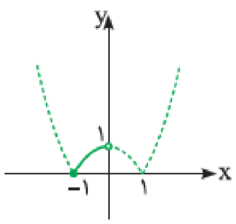
y^{-1}: (+۱) ← ($\sqrt{\ }$) ← (÷−۱) ← (−۱)

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}$$

بُرد تابع f در این بازه برابر $0\le y\le 1$ است، پس دامنهٔ f^{-1} نیز برابر $0\le x\le 1$ است.

۳۷۶ **۴**

چون $[x]=-1$ است، پس $-1\le x<0$ است. حالا نمودار تابع $y=|x^2-1|$ را رسم می‌کنیم:



محدودهٔ برد تابع در بازهٔ مورد نظر برابر بازهٔ $[0,1)$ است. حالا نحوهٔ تولید تابع $y=-x^2+1$ به‌صورت زیر است:

y: (توان ۲) → (×(−۱)) → (+۱)

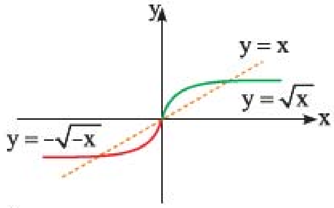
y^{-1}: ($\sqrt{\ }$) ← (÷(−۱)) ← (−۱)

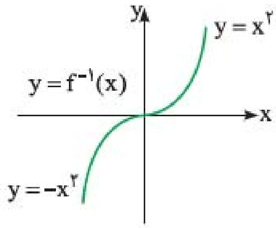
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x};0\le x<1$$

۳۷۷ گزینهٔ ۳

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، با توجه به این که وارون تابع‌های رادیکالی با فرجهٔ ۲، به شکل سهمی هستند خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,;\,x\ge 0\\ -\sqrt{-x}\,;\,x<0\end{cases}\Rightarrow$$





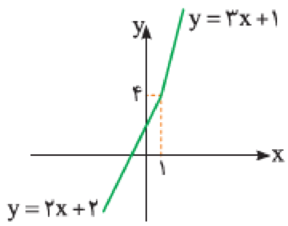
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x|x|\,;\,x\in\mathbb{R}$$

یه جورهٔ دیگه توی کنکور خارج از کشور سال ۹۲، طراح پرسید: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}\,;\,x\neq 0\\ 0\,;\,x=0\end{cases}$ کدام است؟» برای حل کافیه $|x|$ رو باز کنید که جواب میشه: $f^{-1}(x)=x|x|$

۳۷۸ گزینهٔ ۲

نمودار تابع f به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}3x+1\,;\,x>1\\ 2x+2\,;\,x\le 1\end{cases}$$



حالا با توجه به برد هر یک از ضابطه‌ها، ضابطهٔ وارون تابع به شکل زیر است:

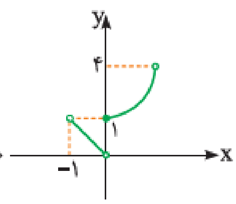
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x-1)\,;\,x>4\\ \frac{x}{2}-1\,;\,x\le 4\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{3},\,b=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{3}{2}}{2}-1=-\frac{1}{4}$$

۳۷۹ گزینهٔ ۲

بهتر است، نمودار تابع f را رسم کنیم. توجه کنید در ضابطهٔ بالایی، وقتی $-1<x<0$ است، پس $[x]=-1$ می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}-x\,;\,-1<x<0\\ 2^x\,;\,0\le x<2\end{cases}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}-x\,;\,0<x<1\\ \log_2^x\,;\,1\le x<4\end{cases}$$

۳۸۰ گزینهٔ ۲

ابتدا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{3x+2+2x-2}{x-1}=\frac{5x}{x-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-5}$$

هایلایت

اگر تابع کسری $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ یک‌به‌یک باشد:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

اگر $a+d=0$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

۳۸۱ گزینهٔ ۴

چون $f^{-1}(x)=\frac{5x-3}{bx+4}$ است، پس $f(x)=\frac{-4x-3}{bx-5}$ است. حالا چون بُرد f برابر $\mathbb{R}-\{-2\}$ است، پس:

$$\frac{-4}{b}=-2\Rightarrow b=2\Rightarrow f(x)=\frac{-4x-3}{2x-5}$$

از طرفی دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{a\}$ است، پس:

$$a=\frac{5}{2}\Rightarrow ab=\frac{5}{2}\times 2=5$$

۳۸۲ گزینهٔ ۴

$$f(f(x))=\frac{af(x)+1}{2f(x)-1}\Rightarrow f(x)=\frac{ax+1}{2x-1}$$

از طرفی چون $f^{-1}(0)=-2$ است، پس $f(-2)=0$ است:

$$f(-2)=\frac{-2a+1}{-4-1}=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

پس $g(x)=\frac{4x+1}{2x+\frac{1}{2}}$ است. چون صورت این کسر، مضربی از مخرج آن است، پس تابع g وارون‌پذیر نیست.

هایلایت

در توابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر صورت و مخرج کسر پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک به یک نبوده و در نتیجه وارون‌پذیر نیست. این اتفاق در صورتی رُخ می‌دهد که $ad=bc$ باشد.

۳۸۳ گزینهٔ ۴

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. برای این‌که $f(x)$ را پیدا کنیم باید در تساوی داده شده به جای xها عبارت $\frac{x-4}{2}$ قرار دهیم:

$$f\left(2\times\frac{x-4}{2}+4\right)=\frac{4\times\frac{x-4}{2}-6}{2\times\frac{x-4}{2}+a}\Rightarrow f(x)=\frac{2x-14}{x+a-4}$$

چون $f(x)=f^{-1}(x)$ است، پس: $(a-4)+(2)=0\Rightarrow a=2$

۳۸۴ **۲**

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x=\frac{f(x)-3x}{f(x)+4}\Rightarrow xf(x)+4x=f(x)-3x$$

$$\Rightarrow xf(x)-f(x)=-7x\Rightarrow f(x)(x-1)=-7x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-7x}{x-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x+7}$$

۳۸۵ **۲**

چون مخرج کسر بزرگ‌تر از صورت کسر است و هم‌چنین علامت آن همواره مثبت است، پس $-1<\frac{x}{1+|x|}<1$ است. یعنی محدودهٔ بُرد تابع f به‌صورت $(-1,1)$ است. حالا ضابطهٔ وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1}\ ;\ x\geq 0\\ \frac{x}{-x+1}\ ;\ x<0\end{cases}\xrightarrow[\text{هموگرافیک}]{\text{طبق وارون}}f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{-x}{x-1}\ ;\ 0\leq x<1\\ \frac{-x}{-x-1}\ ;\ -1<x<0\end{cases}$$

می‌توانیم ضابطهٔ f^{-1} را به‌صورت زیر مرتب کنیم:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x}\ ;\ 0\leq x<1\\ \frac{x}{1+x}\ ;\ -1<x<0\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}\ ;\ \underbrace{-1<x<1}_{|x|<1}$$

با مقایسهٔ ضابطهٔ f^{-1} با صورت سؤال، نتیجه می‌گیریم $a=1$ و $b=1$ است و $a\times b=1$ است.

۳۸۶ **۴**

$$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4\ ;\ x\geq 1$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

f: $(-1)\rightarrow$ (توان ۲) $\rightarrow(-4)$

f^{-1}: $(+1)\leftarrow(+\sqrt{\ })\leftarrow(+4)\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}+1$

حالا نقاط تلاقی نمودارهای f^{-1} و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow\sqrt{x+4}+1=\frac{x-9}{2}\xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{\text{جای‌گذاری}}x=21$$

۳۸۷ **۳**

ابتدا نقطهٔ برخورد f و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=g^{-1}(x)\Rightarrow x^2-3x+1=3x-4\Rightarrow x^2-6x+5=0$$

$$\xrightarrow[x<\frac{3}{2}]{\text{مجموع ضرایب برابر صفر}}\begin{cases}x=1\xrightarrow{y=3x-4}y=-1\Rightarrow A(1,-1)\\ x=5\ \times\end{cases}$$

چون دو تابع f و g^{-1} در نقطهٔ $A(1,-1)$ متقاطع‌اند، پس دو تابع f^{-1} و g در نقطهٔ $A'(-1,1)$ متقاطع‌اند.

هایلایت

اگر دو تابع f و g^{-1} در نقطهٔ $A(a,b)$ متقاطع باشند، آن‌گاه دو تابع f^{-1} و g در نقطهٔ $A'(b,a)$ متقاطع‌اند.

۳۸۸ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3\ ;\ x\leq 2$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

f: $(-2)\rightarrow$ (توان ۲) $\rightarrow(-3)$

f^{-1}: $(+2)\leftarrow(-\sqrt{\ })\leftarrow(+3)\Rightarrow f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+3}$

حالا نقاط تقاطع توابع $y=1-f^{-1}(x)$ و $y=\sqrt{f(x)+3}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$1-f^{-1}(x)=\sqrt{f(x)+3}\Rightarrow\sqrt{x+3}-1=\sqrt{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+3}-1=|x-2|\xrightarrow{x\leq 2}\sqrt{x+3}-1=-(x-2)$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+3}=-x+3\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=6\ \times\end{cases}\xrightarrow{y=|x-2|}y=1$$

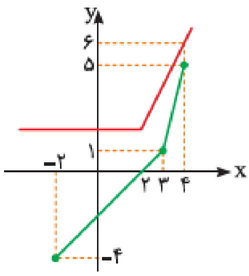
$$\Rightarrow A(1,1)\Rightarrow|OA|=\sqrt{2}$$

۳۸۹ **۴**

با توجه به نمودار تابع f و محدودهٔ دامنه و بُرد آن، ضابطهٔ f^{-1} را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}x+2\ ;\ -4\leq x\leq 1\\ \frac{1}{4}x+\frac{11}{4},1<x\leq 5\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x-2\ ;\ -2\leq x\leq 3\\ 4x-11\ ;\ 3<x\leq 4\end{cases}$$

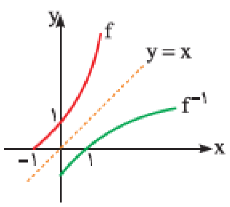
حالا نمودار دو تابع $f^{-1}(x)$ و $g(x)=x+|x-2|$ را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$ متقاطع نیستند

۳۹۰ **۴**

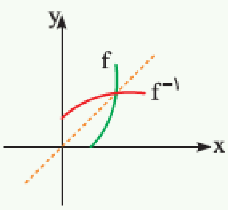
نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$ با دامنهٔ $(-1,+\infty)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد و هیچ نقطهٔ تلاقی با آن ندارد، پس f و f^{-1} همدیگر را قطع نمی‌کنند.



هایلایت

۱ برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و f^{-1}، راهکار کلی این است که ضابطهٔ f^{-1} را به‌دست آوریم و سپس معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل کنیم.

۲ در توابع اکیداً صعودی و توابع هموگرافیک نقاط برخورد f و f^{-1} [در صورت وجود]، همان نقاط برخورد f و خط $y=x$ است. پس در این توابع معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم.



۳۹۱ **۲**

تابع $f(x)=\sqrt{x+3}-1$ یک تابع اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل تقاطع این تابع با وارونش، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+3}-1=x \Rightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \Rightarrow x+3=x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \xrightarrow{y=x} y=1 \\ x=-2 \ \times \end{cases}$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,1)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OM|=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

۳۹۲ **۲**

چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط برخورد f و f^{-1} می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2}=x \Rightarrow x+4=x^2-2x$$

$$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

۳۹۳ **۳**

تابع $f(x)=x^3+3x-12$ از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=x^3$ و $y=3x-12$ به‌دست آمده، پس اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل برخورد این تابع با وارونش، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$x^3+3x-12=x \Rightarrow x^3+2x-12=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,2)$$

$$\Rightarrow OA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

> *یه جوره دیگه! «فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $f(x)=2x-3+\sqrt{x-1}$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟»*
> *جواب: $2\sqrt{2}$*

۳۹۴ **۲**

تابع $y=\log_4(2^{x+2}+32)$ از ترکیب دو تابع اکیداً صعودی $f(x)=\log_4 x$ و $g(x)=2^{x+2}+32$ به‌دست آمده (تابع fog) پس اکیداً صعودی است. پس برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد این تابع با وارونش، داریم:

$$\log_4(2^{x+2}+32)=x \Rightarrow 4^x=2^{x+2}+32 \Rightarrow (2^x)^2-4\times(2^x)-32=0$$

$$\xrightarrow{2^x=t} t^2-4t-32=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-4 \ \times \\ t=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

پس $A(3,3)$ است و فاصلهٔ آن از نقطهٔ $O(0,0)$ برابر $OA=3\sqrt{2}$ است.

۳۹۵ **۴**

دامنهٔ تابع f به‌صورت بازهٔ $[1,+\infty)$ و برد تابع f برابر بازهٔ $(-\infty,2]$ است.
درضمن می‌دانیم $f^{-1}of(x)=x; x\in D_f$ و $fof^{-1}(x)=x; x\in R_f$ است. حالا چون $x=3$ در برد تابع f قرار ندارد، پس $fof^{-1}(3)$ تعریف نشده است.

هایلایت

اگر تابع $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، ترکیب f و f^{-1}، همواره تابعی همانی است:

	ضابطه	دامنه
حالت ۱	$(fof^{-1})(x)=x$	$D_{f^{-1}}=R_f$
حالت ۲	$(f^{-1}of)(x)=x$	$D_f=R_{f^{-1}}$

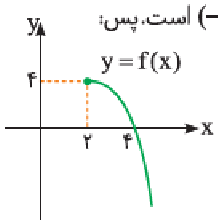
- نمودار تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ برابر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم *(یا بخشی از آن)* است.
- شرط لازم و کافی برای برابر بودن fof^{-1} و $f^{-1}of$ آن است که $D_f=R_f$.
- اگر $(fog)(x)=(gof)(x)=x$ باشد، آن‌گاه f و g وارون یکدیگر هستند.

۳۹۶ **۲**

برای این‌که تساوی داده شده برقرار باشد، باید f تابعی وارون‌پذیر با دامنه و برد یکسان باشد. در میان گزینه‌ها، دامنه و برد توابع موجود در گزینه‌های (۱) و (۴) به‌صورت بازهٔ $[2,+\infty)$ و دامنه و برد تابع گزینهٔ (۳) برابر $\mathbb{R}-\{1\}$ است. اما در گزینهٔ (۲) دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ و بُرد آن برابر $(1,+\infty)$ است.

۳۹۷ **۳**

ابتدا نمودار تابع $f(x)=4x-x^2; x\ge 2$ را رسم می‌کنیم: دامنهٔ تابع f برابر بازهٔ $[2,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $(-\infty,4]$ است. پس:



$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}of(x)=x; x\ge 2 \\ fof^{-1}(x)=x : x\le 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=(f^{-1}of)(x)+(fof^{-1})(x)=x+x=2x; 2\le x\le 4$$

که نمودار این تابع در گزینهٔ (۳) آمده است.

۳۹۸ **۴**

برای پیدا کردن $g(3)$، باید در تساوی داده شده به‌جای x عدد ۹ بگذاریم:

$$f^{-1}(3x+1)=g\left(\frac{x+3}{4}\right) \xrightarrow{x=9} f^{-1}(28)=g(3)$$

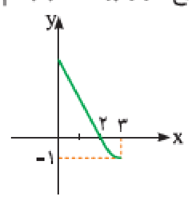
$$\Rightarrow f(g(3))=f(f^{-1}(28))=28$$

۳۹۹ **۳**

چون ترکیب دو تابع f و g برابر x یعنی تابع همانی است، پس دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند، یعنی $g(x)=f^{-1}(x)$ است. حالا نمودار تابع f و وارون آن را رسم می‌کنیم:

f: (+۱) → (−√) → (+۳)

g: (−۱) ← (توان ۲) ← (−۳)



$$\Rightarrow g(x)=(x-3)^2-1 \ ; \ x\le 3$$

> *یه جوره دیگه! طراح به جای این‌که f و g رو به شکل ماشین نمایش بده، می‌تونست بگه «اگر $f(x)=3-\sqrt{x+1}$ و ترکیب دو تابع f و g تابع همانی باشد، ضابطهٔ تابع g کدام است؟»*