

۱۰۱. در محل تقاطع خط  $d$  و خط  $x=4$  در بالای محور  $x$  ها، زاویه حاده  $30^\circ$  ایجاد شده است. اگر خط محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول  $x' > 4$  قطع نماید، شیب این خط کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (4) \quad -\sqrt{3} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2) \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

۱۰۲. خطی با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $120^\circ$  می‌سازد و از نقطه  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  می‌گذرد. عرض از مبدا این خط کدام است؟

$$-4 - \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (4) \quad 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (3) \quad -4 - \sqrt{3} \quad (2) \quad 4 + 2\sqrt{3} \quad (1)$$

۱۰۳. امتداد خطی که از نقطه  $A(-1, 3)$  گذشته و با راستای منفی محور  $x$  ها زاویه  $30^\circ$  می‌سازد محورهای مختصات را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع می‌کند. مساحت مثلث  $OAB$  (O مبدأ مختصات) کدام است؟

$$\frac{28\sqrt{3}}{6} \quad (4) \quad \frac{14\sqrt{3}-9}{3} \quad (3) \quad \frac{28\sqrt{3}-18}{3} \quad (2) \quad \frac{14\sqrt{3}-9}{6} \quad (1)$$

## درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

### اتجاهای مثلثاتی

۱  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

۲  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

۳  $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$

۴  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

۵  $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

۶  $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$

۷  $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta$

مثال تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف  $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

ب  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

الف  $1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \xrightarrow{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

ب  $1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \xrightarrow{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

پاسخ

مثال تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف  $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$

ب  $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta$

الف  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \rightarrow \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta)^2 + (\cos^2 \theta)^2 =$

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

ب  $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \Rightarrow \sin^6 \theta + \cos^6 \theta = (\sin^2 \theta)^3 + (\cos^2 \theta)^3 =$

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^3 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 1^3 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta \times (1) = 1 - 3\sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

پاسخ

نکته

$$1 - 2 \sin x \cos x = (\sin x - \cos x)^2$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$$

درف

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

ب

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

ع

$$\sqrt{1 - 2 \sin x \cos x} = |\sin x - \cos x|$$

مثال تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

درف

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} \times \frac{(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

پاسخ

ب

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

ع

$$\sqrt{1 - 2 \sin x \cos x} = \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 \sin x \cos x} = \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} =$$

$$\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x - \cos x|$$

مثال اگر  $\tan x = -3$ ، حاصل عبارت  $\frac{4 \sin x - 3 \cos x}{\Delta \sin x + 4 \cos x}$  را به دست آورید.

پاسخ

$$\tan x = -3 \Rightarrow \cos x \neq 0$$

$$\frac{4 \sin x - 3 \cos x}{\Delta \sin x + 4 \cos x} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج را بر } \cos x \text{ تقسیم می‌کنیم}} \frac{4 \sin x - 3 \cos x}{\cos x} = \frac{4 \sin x}{\cos x} - \frac{3 \cos x}{\cos x} = \frac{4 \sin x}{\cos x} - 3 = \frac{4 \tan x}{\cos x} - 3$$

$$\frac{4 \tan x - 3}{\Delta \tan x + 4} \xrightarrow{\tan x = -3} \frac{4(-3) - 3}{\Delta(-3) + 4} = \frac{-15}{-11} = \frac{15}{11}$$

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۰۴. کدام جفت از اعداد زیر نمی‌توانند مقادیر سینوس و کسینوس یک زاویه باشند؟

(۱)  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{4}{5}$  (۲) ۰ و ۱ (۳)  $\frac{8}{17}$  و  $\frac{15}{17}$  (۴)  $\frac{7}{8}$  و  $\frac{3}{8}$

۱۰۵. اگر  $\theta$  زاویه حاده و  $\sin \theta = 0/96$  باشد، مقدار  $\sin \theta - \cos \theta$  کدام است؟

(۱)  $0/72$  (۲)  $0/62$  (۳)  $0/66$  (۴)  $0/68$

(مسابقات ریاضی کاتگور ۱۹۹۸)

۱۰۶. اگر  $\cos x = \frac{1}{10}$  و  $0 < x < 90^\circ$ ،  $\sin x$  برابر است با:

(۱)  $\frac{9}{10}$  (۲)  $\frac{3\sqrt{11}}{10}$  (۳)  $\frac{1}{10}$  (۴)  $\frac{9\sqrt{11}}{100}$

۱۰۷. حاصل  $A = 4 \sin^2 15^\circ - 3 \tan^2 30^\circ + 4 \cos^2 15^\circ$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۳

۱۰۸. اگر  $\theta$  زاویه‌ای حاده و  $x = \frac{1}{3} \cos \theta$  و  $y = 2 \sin \theta$  باشد، آنگاه کدام درست است؟

(۱)  $y^2 + 36x^2 = 4$  (۲)  $y^2 + 36x^2 = 9$  (۳)  $36y^2 + x^2 = 4$  (۴)  $36y^2 + x^2 = 9$

۱۰۹. عبارت  $\tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cot^2 \theta \sin^2 \theta$  برابر است با:

(۱) ۱ (۲)  $\cos^2 \theta$  (۳)  $\sin^2 \theta$  (۴)  $\tan^2 \theta$

(کتگور)

(کتلور)

۱۱۰. حاصل عبارت  $\cos \theta (\cos \theta + \sin \theta \tan \theta)$  برابر است با:

$$\sin^2 \theta \quad (۴) \quad ۱ \quad (۳) \quad ۲ \quad (۲) \quad \cos^2 \theta \quad (۱)$$

۱۱۱. حاصل  $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - (1 + \tan \theta)(1 + \cot \theta)$  برابر با کدام است؟

$$-۱ \quad (۴) \quad \text{صفر} \quad (۳) \quad ۱ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۱)$$

(کتلور)

۱۱۲. حاصل عبارت  $\tan \theta \cdot \cot \theta - (1 + \sin \theta \cot \theta)(1 - \cos \theta)$  برابر کدام است؟

$$-\cos^2 \theta \quad (۴) \quad \cos^2 \theta \quad (۳) \quad -\sin^2 \theta \quad (۲) \quad \sin^2 \theta \quad (۱)$$

(کتلور)

۱۱۳. عبارت  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  با کدام برابر نیست؟

$$\cos^4 \theta - \sin^4 \theta \quad (۴) \quad ۲ \cos^2 \theta - ۱ \quad (۳) \quad ۱ - ۲ \sin^2 \theta \quad (۲) \quad ۲ \sin \theta \cos \theta - ۱ \quad (۱)$$

(کتلور)

۱۱۴. حاصل عبارت  $\cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) + (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$ ، کدام است؟

$$۲ \quad (۴) \quad ۱ \quad (۳) \quad \text{صفر} \quad (۲) \quad -۱ \quad (۱)$$

(کتلور)

۱۱۵. حاصل  $(\frac{1}{\cos \theta} - 1)(\frac{1}{\cos \theta} + 1)$  برابر کدام است؟

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (۴) \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (۳) \quad \cot^2 \theta \quad (۲) \quad \tan^2 \theta \quad (۱)$$

۱۱۶. حاصل عبارت  $\frac{\sin \theta}{(\sin \theta)^{-1} + 1} + \frac{\sin \theta}{(\sin \theta)^{-1} - 1}$  کدام است؟

$$۲ \cot^2 \theta \quad (۴) \quad ۲ \cos^2 \theta \quad (۳) \quad ۲ \tan^2 \theta \quad (۲) \quad ۲ \sin^2 \theta \quad (۱)$$

(کتلور)

۱۱۷. ساده شده عبارت  $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$  کدام است؟

$$۱ - ۲ \sin^2 \theta \quad (۴) \quad ۱ - ۲ \cos^2 \theta \quad (۳) \quad ۲ \tan^2 \theta \quad (۲) \quad ۲ \cot^2 \theta \quad (۱)$$

(کتلور)

۱۱۸. حاصل  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \tan \theta \cos^2 \theta$  برابر کدام است؟

$$۰ \quad (۴) \quad ۱ + \cot \theta \quad (۳) \quad \tan \theta \quad (۲) \quad ۱ \quad (۱)$$

۱۱۹. اگر  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$  و  $\cos \alpha + \sin \alpha < 0$  باشد، انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟ (کمان  $\alpha$  در موقعیت استاندارد است.)

$$\text{اول یا دوم} \quad (۱) \quad \text{دوم یا سوم} \quad (۲) \quad \text{سوم یا چهارم} \quad (۳) \quad \text{اول یا چهارم} \quad (۴)$$

(کتلور)

۱۲۰. اگر  $\sin x + \tan x > 0$  و  $\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \tan x < 0$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه است؟

$$\text{اول} \quad (۱) \quad \text{دوم} \quad (۲) \quad \text{سوم} \quad (۳) \quad \text{چهارم} \quad (۴)$$

(کتلور)

۱۲۱. حاصل  $(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta}) - 2 \tan^2 \theta$  کدام است؟

$$۲ \quad (۴) \quad ۱ \quad (۳) \quad \text{صفر} \quad (۲) \quad -۱ \quad (۱)$$

(کتلور)

۱۲۲. ساده شده عبارت  $(1 - \sin^2 \theta)(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}) - (1 - \cos \theta)^2$ ، کدام است؟

$$۲ \cos \theta \quad (۴) \quad -\cos^2 \theta \quad (۳) \quad \cos^2 \theta \quad (۲) \quad \sin^2 \theta \quad (۱)$$

۱۲۳. مقدار کسر  $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$  با کدام عبارت برابر است؟

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \quad (۴) \quad \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad (۳) \quad ۱ + \cot \theta \quad (۲) \quad ۱ + \tan \theta \quad (۱)$$

(کتلور)

۱۲۴. حاصل عبارت  $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$  کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (۴) \quad -۱ \quad (۳) \quad ۲ \quad (۲) \quad -۲ \quad (۱)$$

(مشابه کتلور)

۱۲۵. مقدار عبارت  $y = (\tan x + \cot x)^2 - \tan^2 x - \cot^2 x$  کدام است؟

$$۴ \quad (۴) \quad ۳ \quad (۳) \quad ۲ \quad (۲) \quad ۱ \quad (۱)$$

۱۲۶. اگر  $\cot \theta = \sqrt{x} + 2$  و  $\tan \theta = \sqrt{x} - 2$ ، در این صورت مقدار  $x$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(کنکور)

۱۲۷. اگر  $\tan x = \frac{3}{4}$  باشد، حاصل  $A = \frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\sin x}$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴) ۱

۱۲۸. اگر  $\tan x = 5$  آنگاه مقدار کسر  $\frac{\sin x + 3 \cos x}{\sin x - 3 \cos x}$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $-\frac{2}{3}$

۱۲۹. رابطه  $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x} - \tan x$  وقتی برقرار است که انتهای  $x$  در ..... واقع باشد.

- (۱) ناحیه اول یا دوم (۲) ناحیه اول یا سوم (۳) ناحیه اول یا چهارم (۴) در هر ناحیه

۱۳۰. اگر  $\sqrt{1 + m \tan x} = \frac{1}{\cos x}$  و انتهای کمان  $x$  در ربع چهارم باشد،  $m$  چگونه است؟

- (۱)  $|m| > 1$  (۲)  $|m| < 1$  (۳)  $m > 0$  (۴)  $m < 0$

(مشابه آزار ریاضی ۸۹)

۱۳۱. اگر  $\frac{2 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = 2$  باشد،  $\cot x$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$

(آزار ریاضی ۸۵)

۱۳۲. اگر  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$  و انتهای کمان  $x$  در ربع اول باشد،  $\tan x$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳)  $1\sqrt{5}$  (۴)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۱۳۳. هرگاه سینوس زاویه حاده  $\alpha$  برابر با  $k$  باشد، تانژانت زاویه  $\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$  (۲)  $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$  (۳)  $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$  (۴)  $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$

(کنکور)

۱۳۴. حاصل  $\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$  کدام است؟

- (۱)  $\sin \theta$  (۲)  $\cos \theta$  (۳)  $\sin \theta + \cos \theta$  (۴)  $\sin \theta \cos \theta$

(کنکور)

۱۳۵. حاصل  $(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta)$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\cos^2 \theta$  (۴)  $\cot^2 \theta$

۱۳۶. اگر  $\cot x = -2$  و  $\sin x > 0$  باشد، مقدار  $\cos x$  چقدر است؟

- (۱)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۲)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

۱۳۷. اگر  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  و  $\theta$  زاویه ای منفرجه باشد ( $90^\circ < \theta < 180^\circ$ )، حاصل  $\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta}$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۳۸. اگر  $\frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x - \cos x} = 2$  باشد، حاصل  $\frac{1}{\sin x \cos x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{25}{12}$  (۲)  $-\frac{25}{12}$  (۳)  $\frac{12}{25}$  (۴)  $-\frac{12}{25}$

۱۳۹. اگر انتهای کمان  $x$  در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و داشته باشیم  $\tan x - 3 \cot x = 2$ ، آنگاه مقدار  $\cos x$  کدام

است؟ (کمان  $x$  در موقعیت استاندارد است.)

- (۱)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}}{10}$  (۳)  $-\frac{1}{\sqrt{10}}$  (۴)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$

(کنکور)

۱۴۰. اگر  $x = \frac{2}{\sin \alpha}$  و  $y = 3 \cot \alpha$ ، مقدار  $9x^2$  کدام است؟

$$(1) \quad 4 + 9y^2 \quad (2) \quad 9 + 4y^2 \quad (3) \quad 36 - 4y^2 \quad (4) \quad 36 + 4y^2$$

(کنکور)

۱۴۱. با فرض  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، حاصل عبارت  $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$  کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{4}{9} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{2}{3}$$

(کنکور)

۱۴۲. به ازای کدام مقدار  $A$ ، تساوی  $1 - \tan^4 x = \frac{A}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x}$  یک اتحاد است؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad -1 \quad (4) \quad -2$$

۱۴۳. اگر برای هر  $x$  رابطه  $\cos^4 x = A \cos^4 x - B \cos^2 x + \frac{A}{B}$  برقرار باشد حاصل  $3A - B$  کدام است؟

$$(1) \quad -16 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad -4 \quad (4) \quad 4$$

۱۴۴. **رئوس** اگر  $\theta$  زاویه‌ای حاده باشد و  $\cot \theta = \frac{a-b}{a+b}$ ، آنگاه  $\sin \theta$  کدام است؟ ( $a > b > 0$ )

$$(1) \quad \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a-b} \quad (3) \quad \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} \quad (4) \quad \frac{a-b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

۱۴۵. اگر  $\cot x = a + 2$  و  $\sin x = \frac{1}{b}$ ، آنگاه کدام رابطه درست است؟

$$(1) \quad a^2 + b^2 = 2ab \quad (2) \quad b^2 = 1 + (a+2)^2 \quad (3) \quad (a+1)^2 + b^2 = 1 \quad (4) \quad (a+2)^2 + b^2 = 1$$

(مسابقات ریاضی آمریکا)

۱۴۶. اگر  $\tan x = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ ، که در آن  $a > b > 0$  و  $0^\circ < x < 90^\circ$ ، آنگاه  $\sin x$  برابر است با:

$$(1) \quad \frac{b}{a} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab} \quad (4) \quad \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

(مشابه کنکور)

۱۴۷. **کنکور** اگر  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\sin^2 x \cos^2 x$  کدام است؟

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4) \quad \frac{1}{8}$$

۱۴۸. حاصل عبارت  $\frac{(1 - 2 \sin x \cos x)(1 + 2 \sin x \cos x) + 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$  چیست؟

$$(1) \quad 0 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 1 - \sin^2 x \cos^2 x \quad (4) \quad 1$$

(آزاد ریاضی ۸۶)

۱۴۹. **کنکور** اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  باشد حاصل  $\sin^3 x + \cos^3 x$  چقدر است؟

$$(1) \quad \frac{13}{27} \quad (2) \quad \frac{13}{81} \quad (3) \quad \frac{17}{27} \quad (4) \quad \frac{17}{81}$$

(آزاد ریاضی ۸۷)

۱۵۰. اگر  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5}$  باشد، حاصل  $\sin^6 x + \cos^6 x$  کدام است؟

$$(1) \quad \frac{1}{5} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{2}{5} \quad (4) \quad \frac{3}{7}$$

۱۵۱. ساده شده عبارت  $\frac{1 - (3 \sin^2 x \cos^2 x)^2}{\sin^6 x + \cos^6 x}$  کدام است؟

$$(1) \quad 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \quad (2) \quad 1 - 9 \sin^2 x \cos^2 x \quad (3) \quad 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x \quad (4) \quad 1 + 9 \sin^2 x \cos^2 x$$

## مینیمم و ماکزیمم عبارتهای مثلثاتی

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos y \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -|a| - |b| \leq a \sin x + b \cos y \leq |a| + |b|$$

نکته

به عنوان نمونه:

$$-|2| - |-3| \leq 2 \sin x - 3 \cos y \leq |2| + |-3| \Rightarrow -5 \leq 2 \sin x - 3 \cos y \leq 5$$

نکته اگر  $a \sin x + b \cos y = |a| + |b|$ ، آنگاه  $|\sin x| = |\cos y| = 1$ . مثبت یا منفی یک بودن  $\sin x$  یا  $\cos y$  را علامت ضریبهای  $a$  و  $b$  تعیین می‌کند.

به عنوان نمونه:

$$2 \sin x - 2 \cos y = 4 \Rightarrow 2 \sin x - 2 \cos y = |2| + |-2| \Rightarrow \sin x = 1 \text{ و } \cos y = -1$$

مثال اگر  $\sin x - 2 \cos y = 3$ ، آنگاه حاصل  $\sin^3 x + \cos^3 y$  را به دست آورید.

پاسخ

$$\sin x - 2 \cos y = 3 \Rightarrow \sin x - 2 \cos y = |1| + |-2| \Rightarrow \sin x = 1 \text{ و } \cos y = -1 \Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 y = (1)^3 + (-1)^3 = 0$$

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۵۲. سهم اگر  $\sin \alpha + \sin \beta = 2$ ، حاصل  $\sin^4 \alpha + \cos^3 \beta$  چند است؟

(۱)  $\frac{4\sqrt{2}}{5}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳) ۱ (۴)  $-\frac{1}{2}$

(مشابه آزمایشی سنس تجریمی ۹۰)

۱۵۳. بیش‌ترین مقدار  $\sin(180^\circ \times x) + \sin(180^\circ \times y)$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴) ۲

۱۵۴. اگر  $\sin(x+y) + \sin(2x-y+30^\circ) = 2$  و هر دو زاویه  $x$  و  $y$  حاده باشند، آنگاه مقدار  $x+2y$  کدام است؟

(۱)  $100^\circ$  (۲)  $110^\circ$  (۳)  $120^\circ$  (۴)  $130^\circ$

(مسابقات ریاضی کانگورو ۲۰۰۸)

۱۵۵. مقدار ماکزیمم  $|5 \sin x - 3|$  برابر است با:

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۵۶. **رسور** به ازای کدام مقدار  $x$  گزاره  $\sin a = x^2 - 4x + 5$  می‌تواند همواره درست باشد؟

(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲

(آزاد تجریمی ۸۸)

۱۵۷. **رسور** اگر  $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$  باشد، حاصل  $\sin^3 x + \cos^5 x$  چقدر است؟

(۱)  $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$  (۲)  $\frac{3\sqrt{2}}{8}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

(آزاد تجریمی ۸۷)

۱۵۸. **نکترار** اگر  $\tan x + \frac{1}{\tan x} = k - 1$  باشد، حدود  $k$  برای آنکه معادله جواب داشته باشد کدام است؟

(۱)  $-1 < k < 3$  (۲)  $k \geq 3$  یا  $k \leq -1$  (۳)  $k > 2$  (۴)  $k < -\frac{1}{2}$

(مشابه آزاد ریاضی فارغ از کشور ۸۹)

۱۵۹. تساوی  $\tan x + \cot x = \sqrt{3}$ ، به ازای چند مقدار  $x$  در بازه  $[0, 360^\circ]$  برقرار است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۶۰. اگر  $\tan x + \cot x = -2$  باشد، حاصل  $\sin^6 x + \cos^4 x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{8}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

پاسخ نامه

گزینه ۲. ۱۰۴

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

برای هر زاویه  $\theta$  داریم:

۱ گزینه بررسی:  $(\frac{3}{5})^2 + (-\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1 \checkmark$

۲ گزینه بررسی:  $0^2 + 1^2 = 0 + 1 = 1 \checkmark$

۳ گزینه بررسی:  $(\frac{8}{17})^2 + (\frac{15}{17})^2 = \frac{64}{289} + \frac{225}{289} = \frac{289}{289} = 1 \checkmark$

۴ گزینه بررسی:  $(\frac{3}{8})^2 + (\frac{7}{8})^2 = \frac{9}{64} + \frac{49}{64} = \frac{58}{64} \neq 1 \times$

گزینه ۲. ۱۰۵

$$\sin \theta = 0.96 = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow (\frac{24}{25})^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - (\frac{24}{25})^2 = (1 + \frac{24}{25})(1 - \frac{24}{25}) \Rightarrow$$

$$\cos^2 \theta = \frac{49}{25} \times \frac{1}{25} \xrightarrow{(\theta < 90^\circ)} \cos \theta = \sqrt{\frac{49}{25^2}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{7}{25}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{24}{25} - \frac{7}{25} = \frac{17}{25} = \frac{68}{100} = 0.68$$

گزینه ۲. ۱۰۶

$$\cos x = \frac{1}{10} \text{ و } 0 < x < 90^\circ \Rightarrow \sin x > 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + (\frac{1}{10})^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{1}{100} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{99}{100} \xrightarrow{0 < \sin x} \sin x = \frac{\sqrt{99}}{10} = \frac{3\sqrt{11}}{10}$$

گزینه ۱. ۱۰۷

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan^2 30^\circ = \frac{1}{3}$$

$$4 \sin^2 15^\circ - 3 \tan^2 30^\circ + 4 \cos^2 15^\circ = 4(\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) - 3 \tan^2 30^\circ = 4 \times 1 - 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 1 = 3$$

گزینه ۱. ۱۰۸

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{1}{3} \cos \theta &\Rightarrow 3x = \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta &\Rightarrow \frac{y}{2} = \sin \theta \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1} (3x)^2 + (\frac{y}{2})^2 = 9x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow 36x^2 + y^2 = 4$$

گزینه ۱. ۱۰۹

$$\tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cot^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \times \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \sin^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

گزینه ۲. ۱۱۰

$$\cos \theta (\cos \theta + \sin \theta \tan \theta) = \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}) = \cos^2 \theta + \cos \theta \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

گزینه ۱. ۱۱۱

$$\begin{aligned} (1 + \tan \theta)(1 + \cot \theta) - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} &= (1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta})(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}) - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \\ (\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta})(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}) - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta \cos \theta} = \\ \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} &= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \end{aligned}$$



۱۱۲. گزینه ۴

$$(1 - \cos \theta)(1 + \sin \theta \cot \theta) - \tan \theta \cot \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \sin \theta \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta}) - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) - 1 = 1 - \cos^2 \theta - 1 = -\cos^2 \theta$$

۱۱۳. گزینه ۱

$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 0 = 1 \\ 2 \sin \theta \cos \theta - 1 = 0 - 1 = -1 \end{cases} \quad \times$$

$$\text{گزینه ۲ بررسی: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \xrightarrow{-2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه ۳ بررسی: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \xrightarrow{+\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \Rightarrow 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه ۴ بررسی: } \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1 \times (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \checkmark$$

۱۱۴. گزینه ۴

$$\cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) + (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = \cos^2 \theta (1 + 2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}) + \cos^2 \theta - 1$$

$$= \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

۱۱۵. گزینه ۱

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right) \left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 = \tan^2 \theta$$

۱۱۶. گزینه ۳

$$\frac{\sin \theta}{(\sin \theta)^{-1} + 1} + \frac{\sin \theta}{(\sin \theta)^{-1} - 1} = \frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sin \theta} + 1} + \frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sin \theta} - 1} = \frac{\sin \theta}{\frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta}} + \frac{\sin \theta}{\frac{1 - \sin \theta}{\sin \theta}} =$$

$$\frac{\sin^2 \theta (1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} + \frac{\sin^2 \theta (1 + \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta + \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \tan^2 \theta$$

۱۱۷. گزینه ۴

$$(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

۱۱۸. گزینه ۱

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \tan \theta \cos^2 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) - \left(2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos^2 \theta\right) =$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

۱۱۹. گزینه ۲

$$\left. \begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \end{cases} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

چهار حالت داریم:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \begin{cases} \text{ناحیه اول} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\ \text{ناحیه دوم} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \\ \text{ناحیه سوم} \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \\ \text{ناحیه چهارم} \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases}$$

پس در ناحیه‌های دوم یا سوم است.

۱۲۰.

$$\frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \tan x < 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \cos x < 0$$

چون  $\cos x < 0$ ، پس  $x$  در ناحیه دوم یا سوم قرار دارد. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \sin x + \tan x > 0 &\Rightarrow \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} > 0 \Rightarrow \sin x \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 0 \\ -1 < \cos x < 0 &\Rightarrow \frac{1}{\cos x} < -1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos x} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin x < 0$$

چون  $\sin x < 0$ ، پس  $x$  در ناحیه‌های سوم یا چهارم قرار دارد.

با توجه به اشتراک دو جواب،  $x$  در ناحیه سوم قرار دارد.

۱۲۱.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} - 2 \tan^2 \theta &= \frac{1 \times (1 + \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} + \frac{1 \times (1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} - 2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \\ \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} + \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} - 2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} &= \frac{1 + \sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1 - \sin \theta}{\cos^2 \theta} - 2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2 - 2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2(1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \end{aligned}$$

۱۲۲.

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2 \theta) \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) - (1 - \cos \theta)^2 &= \cos^2 \theta \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) - (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) = \\ \cos^2 \theta + 1 - (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) &= \cos^2 \theta + 1 - 1 - \cos^2 \theta + 2 \cos \theta = 2 \cos \theta \end{aligned}$$

۱۲۳.

$$\begin{aligned} 1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &\Rightarrow 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \Rightarrow (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = \sin \theta \sin \theta \Rightarrow \\ 1 + \cos \theta = \frac{\sin \theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} &\Rightarrow \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

۱۲۴.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2 &= \frac{\sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \\ \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} + \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}} - \left(\frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} + \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}} + 2 \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x}\right) &= -2 \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -2 \end{aligned}$$

۱۲۵.

$$y = (\tan x + \cot x)^2 - \tan^2 x - \cot^2 x = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \tan x \cot x - \tan^2 x - \cot^2 x = 2 \tan x \cot x = 2$$

گزینه ۱. ۱۲۶

$$\tan \theta \times \cot \theta = 1 \Rightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = 1 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 - 2^2 = 1 \Rightarrow x - 4 = 1 \Rightarrow x = 5$$

گزینه ۱. ۱۲۷

راه حل اول:

$$\tan x = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{4} \cos x$$

$$A = \frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\sin x} = \frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\frac{3}{4} \cos x} = \frac{4}{\cos x} - \frac{4}{\cos x} = \frac{4}{\cos x} - \frac{4}{\cos x} = 0$$

$$\tan x = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{\cos x} = \frac{3}{\sin x} \Rightarrow \frac{4}{\cos x} - \frac{3}{\sin x} = 0$$

راه حل دوم:

گزینه ۱. ۱۲۸

$$\frac{\sin x + 3 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = \frac{\frac{\sin x + 3 \cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x - 3 \cos x}{\cos x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{3 \cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{3 \cos x}{\cos x}} = \frac{\tan x + 3}{\tan x - 3} = \frac{5 + 3}{5 - 3} = \frac{8}{2} = 4$$

گزینه ۳. ۱۲۹

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \frac{1}{\cos x} - \tan x \Rightarrow \sqrt{\frac{(1 - \sin x)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^2 x}} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{|1 - \sin x|}{|\cos x|} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \xrightarrow{\sin x < 1} \frac{1 - \sin x}{|\cos x|} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$\Rightarrow |\cos x| = \cos x \Rightarrow 0 < \cos x \Rightarrow x$  در ناحیه اول یا چهارم است.

گزینه ۴. ۱۳۰

$$\sqrt{1 + m \tan x} = \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} 1 + m \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + m \tan x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow m \tan x = \tan^2 x \Rightarrow \tan x = m$$

چون  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$  پس:

چون انتهای کمان  $x$  در ربع چهارم است و در ربع چهارم  $\tan x < 0$  می‌باشد پس:  $m < 0$  است.

گزینه ۱. ۱۳۱

$$\frac{2 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = 2 \Rightarrow 2 \cos x = 2(\sin x + 3 \cos x) \Rightarrow 2 \cos x = 2 \sin x + 6 \cos x \Rightarrow$$

$$-4 \cos x = 2 \sin x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{-4} \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۴. ۱۳۲

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{5}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{9} \xrightarrow{0 < x < 90^\circ} \sin x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۱۳۳. گزینه ۲

$$\sin \alpha = k$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - k^2 \xrightarrow{0 < \alpha < 90^\circ} \cos \alpha = \sqrt{1 - k^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}$$

۱۳۴. گزینه ۲

$$\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{\sin \theta \times \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \times \cos \theta$$

۱۳۵. گزینه ۲

$$(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta \times \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1$$

۱۳۶. گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} \cot x < 0 \Rightarrow \text{ناحیه دوم یا چهارم} \\ \sin x > 0 \Rightarrow \text{ناحیه اول یا دوم} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ناحیه دوم} \Rightarrow \cos x < 0$$

$$\cot x = -2 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \xrightarrow{\cos x < 0} \cos x = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۱۳۷. گزینه ۱

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\cos \theta < 0} \cos \theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}} = -2$$

۱۳۸. گزینه ۱

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x - \cos x} = 2 \Rightarrow \sin x + 2 \cos x = 2(2 \sin x - \cos x) \Rightarrow \sin x + 2 \cos x = 4 \sin x - 2 \cos x \Rightarrow$$

$$4 \cos x = 3 \sin x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cot x = \frac{3}{4} \\ \tan x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

چون  $\tan x > 0$ ، می‌فهمیم  $x$  یا در ناحیه اول یا در ناحیه سوم قرار دارد. سپس به کمک اتحادها داریم:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \pm \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \pm \frac{5}{3}$$

چون  $x$  در ناحیه‌های اول یا سوم قرار دارد، پس  $\sin x$  و  $\cos x$  هم‌علامت هستند. پس داریم:

$$\frac{1}{\sin x \times \cos x} = \frac{1}{\sin x} \times \frac{1}{\cos x} = \frac{5}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{12}$$

فرض می‌کنیم  $a = \tan x$ ، سپس یک «معادله گویا» حل می‌کنیم:

$$\tan x = a \Rightarrow \cot x = \frac{1}{a}$$

$$\tan x - 3 \cot x = 2 \Rightarrow a - \frac{3}{a} = 2 \xrightarrow{\times a} a^2 - 3 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ یا } a = -1$$

$$\Rightarrow \tan x = 3 \text{ یا } \tan x = -1$$

کمان  $x$  در ناحیه سوم است، پس  $\tan x > 0$ ، در نتیجه  $\tan x = 3$ .

مقدار  $\cos x$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + 3^2 = 10 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

چون در ناحیه سوم است، پس  $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{10}}$ .

$$x = \frac{2}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$y = 3 \cot \alpha \Rightarrow \frac{y}{3} = \cot \alpha$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 + \frac{y^2}{9} \Rightarrow 9x^2 = 36 + 4y^2$$

ابتدا  $\sin^2 \theta$  را به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{2}{3}$$

همچنین داریم:

$$\left. \begin{aligned} \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ 1 + \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta = \frac{2}{3}$$

راه حل اول:

$$\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \tan^2 x - 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 \xrightarrow{\times \cos^4 x} 1 + A \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x \Rightarrow$$

$$1 + A \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \Rightarrow 1 + A \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x \Rightarrow (1 - \sin^2 x) + A \cos^2 x = -\cos^2 x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + A \cos^2 x = -\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x(1 + A) = -\cos^2 x \Rightarrow 1 + A = -1 \Rightarrow A = -2$$

راه حل دوم: یک اتحاد به ازای همه مقادیرهای تعریف شده  $x$  برقرار است. پس به ازای  $x = 0$  نیز برقرار است.

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 x &= 0 \\ x = 0 \Rightarrow \tan^2 x &= 0 \\ \cos^2 x &= \cos^4 x = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{A}{1} = 0 - 1 \Rightarrow 1 + A = -1 \Rightarrow A = -2$$

گزینه ۲. ۱۴۳

با قرار دادن مقادیر مختلف دلخواه برای  $x$  در تساوی داده شده به راحتی می‌توانیم پارامترهای  $A$  و  $B$  را تعیین کنیم به صورت زیر:

$$\text{اگر } x = 90^\circ \Rightarrow \cos^4(90^\circ) = A \cos^4(90^\circ) - B \cos^2(90^\circ) + \frac{A}{B} \Rightarrow 1 = 0 - 0 + \frac{A}{B} \Rightarrow A = B$$

$$\text{اگر } x = 45^\circ \Rightarrow \cos^4(45^\circ) = A \cos^4(45^\circ) - B \cos^2(45^\circ) + \frac{A}{B} \Rightarrow -1 = \frac{A}{4} - \frac{B}{2} + \frac{A}{B} \Rightarrow \frac{A}{4} - \frac{B}{2} = -1 - \frac{A}{B}$$

$$\text{چون } \frac{A}{A=B} - \frac{A}{4} - \frac{A}{2} = -2 \Rightarrow -\frac{A}{4} = -2 \Rightarrow A = 8 \Rightarrow B = 8 \Rightarrow 3A - B = 16$$

گزینه ۲. ۱۴۴

$$\cot \theta = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{2a^2 + 2b^2}{(a+b)^2} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{(a+b)^2}{2a^2 + 2b^2} \xrightarrow{\cdot \sin \theta} \sin \theta = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2a^2 + 2b^2}} \Rightarrow$$

$$\sin \theta = \frac{|a+b|}{\sqrt{2a^2 + 2b^2}} \xrightarrow{a>b>0} \sin \theta = \frac{a+b}{\sqrt{2a^2 + 2b^2}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{a+b}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$$

گزینه ۲. ۱۴۵

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^2} = 1 + (a+2)^2 \Rightarrow b^2 = 1 + (a+2)^2$$

گزینه ۲. ۱۴۶

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\frac{a^2 - b^2}{2ab}} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2 = 1 + \frac{4a^2b^2}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4} = \frac{a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b^2}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{2a^2b^2}{a^4 + b^4 + 2a^2b^2}$$

$$= \frac{(2ab)^2}{(a^2 + b^2)^2} \xrightarrow{\sin x > 0} \sin x = \frac{(2ab)^2}{(a^2 + b^2)^2} \Rightarrow \sin x = \frac{|2ab|}{|(a^2 + b^2)|} \xrightarrow{a>b>0} \sin x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

گزینه ۲. ۱۴۷

نکته به کمک اتحاد  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  می‌توان نوشت:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

پس می‌نویسیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \quad *$$

$$\frac{(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)(1 + 2\sin^2 x \cos^2 x) + 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} =$$

$$\frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} = 1$$

**نکته** اگر مقدار  $\sin x + \cos x$  را داشته باشیم، می‌توان مقدار  $\sin x \cos x$  را به دست آورد:

$$\sin x + \cos x = a \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = a^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = a^2 \Rightarrow$$

$$1 + 2\sin x \cos x = a^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{a^2 - 1}{2}$$

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow 2\sin x \cos x = -\frac{8}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9}$$

سپس به کمک اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \left(-\frac{4}{9}\right)\right) = \frac{1}{3} \times \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{5} + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

سپس به کمک اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$a^6 + b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 + b^3 - a^3 b^3) \Rightarrow$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^3 x + \cos^3 x)(\sin^3 x + \cos^3 x - \sin^3 x \cos^3 x) = 1 \times \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \underbrace{(\sin^3 x + \cos^3 x)^3}_{1} - 3\sin^2 x \cos^2 x \underbrace{(\sin^3 x + \cos^3 x)}_{1} = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

به کمک نکته گفته شده داریم:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a + b) \Rightarrow 1 - b^3 = (1 - b)(1 + b)$$

$$\frac{1 - (3\sin^2 x \cos^2 x)^3}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \frac{(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x)(1 + 3\sin^2 x \cos^2 x)}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x} = 1 + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha \leq 1 \\ \sin \beta \leq 1 \\ \sin \alpha + \sin \beta = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta = 1$$

$$\sin \beta = 1 \Rightarrow \cos \beta = 0$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \beta = 1^4 + 0^4 = 1$$

گزینه ۲. ۱۵۳

مقدار سینوس هر زاویه‌ای بین ۱ و -۱ است. پس ماکزیمم مقدار سینوس هر زاویه ۱ است. پس می‌توان نوشت:

$$x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 180^\circ \times x + \sin 180^\circ \times y = \sin 90^\circ + \sin 90^\circ = 1 + 1 = 2$$

گزینه ۲. ۱۵۴

$$\left. \begin{array}{l} \sin(x+y) \leq 1 \\ \sin(2x-y+30^\circ) \leq 1 \\ \sin(x+y) + \sin(2x-y+30^\circ) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(x+y) = \sin(2x-y+30^\circ) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=90^\circ \\ 2x-y+30^\circ=90^\circ \end{cases}$$

دستگاه دو معادله و دو مجهول را حل می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} x+y=90^\circ \\ 2x-y+30^\circ=90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y=90^\circ \\ 2x-y=60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow x=50^\circ, y=40^\circ \Rightarrow x+2y=50^\circ+2 \times 40^\circ=130^\circ$$

گزینه ۲. ۱۵۵

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 &\Rightarrow -5 \leq 5 \sin x \leq 5 \Rightarrow -8 \leq 5 \sin x - 3 \leq 2 \Rightarrow |5 \sin x - 3| \leq 8 \\ x = -90^\circ &\Rightarrow |5 \sin x - 3| = |5 \sin(-90^\circ) - 3| = |5 \times (-1) - 3| = |-5 - 3| = |-8| = 8 \end{aligned}$$

گزینه ۲. ۱۵۶

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$$

پس مینیمم مقدار  $x^2 - 4x + 5$  برابر با ۱ است (زیرا  $(x-2)^2$  همواره مثبت است)، این مقدار مینیمم به ازای  $x=2$  است. از طرفی ماکزیمم مقدار  $\sin a$  برابر با ۱ است. پس می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x^2 - 4x + 5 \\ \sin a \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin a = x^2 - 4x + 5 = 1 \Rightarrow (x-2)^2 + 1 = 1 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

گزینه ۱. ۱۵۷

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = (-\sqrt{2})^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2 \sin x \cos x = 2 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1$$

پس داریم:

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} - \underbrace{2 \sin x \cos x}_{=1} = 0 \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$$

بنابراین یک دستگاه دو معادله و دو مجهول تشکیل می‌دهیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x + \cos x = -\sqrt{2} \\ \sin x = \cos x \end{array} \right. \Rightarrow \sin x = \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^3 x + \cos^5 x = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

گزینه ۲. ۱۵۸

نکته

$$\left. \begin{array}{l} a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2 \\ a > 0 \Rightarrow 2 \leq a + \frac{1}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{یا} \left. \begin{array}{l} \tan x < 0 \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} \leq -2 \\ \tan x > 0 \Rightarrow 2 \leq \tan x + \frac{1}{\tan x} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{یا} \left. \begin{array}{l} \tan x + \cot x \leq -2 \quad (\tan x < 0) \\ \tan x + \cot x \geq 2 \quad (\tan x > 0) \end{array} \right.$$

بنابراین داریم:

$$k-1 \leq -2 \Rightarrow k \leq -1$$

$$k-1 \geq 2 \Rightarrow k \geq 3$$



۱۵۹. گزینه ۱

با توجه به نکته مثال قبل داریم:

$$\tan x + \cot x \geq 2 \text{ یا } \tan x + \cot x \leq -2$$

پس هیچ مقداری برای  $x$  وجود ندارد که  $-2 < \tan x + \cot x < 2$  شود. به عبارتی هیچ مقداری برای  $x$  وجود ندارد که  $\tan x + \cot x = \sqrt{3}$  زیرا  $-2 < \sqrt{3} < 2$  است.

۱۶۰. گزینه ۱

فرض می‌کنیم  $\tan x = a$ ، پس:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{a}$$

$$\tan x + \cot x = a + \frac{1}{a} = -2 \Rightarrow (a + \frac{1}{a})a = -2a \Rightarrow a^2 + 1 = -2a \Rightarrow a^2 + 1 + 2a = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$a = -1 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\tan x = -1} 1 + (-1)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \left. \begin{array}{l} \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

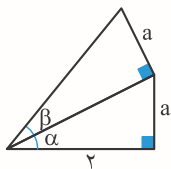
$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$



## آزمون فصل ۲

## مثلثات

۱. در شکل زیر، مقدار  $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$  کدام است؟



$$\frac{\sqrt{4+a^2}}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{4+a^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \quad (4)$$

$$\sqrt{a^2+1} \quad (3)$$

۲. اگر  $\sin x = 3m + 1$  باشد، کدام نابرابری درست است؟

$$0 \leq m \leq 2 \quad (4)$$

$$-\frac{2}{3} \leq m \leq 0 \quad (3)$$

$$-1 \leq m \leq 2 \quad (2)$$

$$-2 \leq m \leq 0 \quad (1)$$

۳. در مثلث ABC اگر  $\hat{C} = 105^\circ$  و  $\sin 2\hat{A} = \sin 3\hat{B}$  باشد آن گاه زاویه A چند درجه است؟

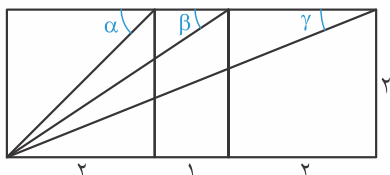
$$30^\circ \quad (4)$$

$$20^\circ \quad (3)$$

$$60^\circ \quad (2)$$

$$45^\circ \quad (1)$$

۴. با توجه به شکل، مقدار عبارت  $\sin \alpha + 3 \cos \beta - 2 \tan \gamma$  کدام است؟



$$\frac{1}{3} - \sqrt{2} \quad (2)$$

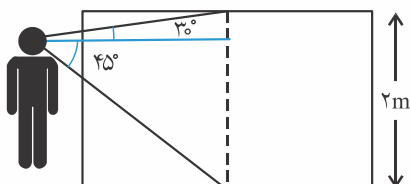
$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{13}}{13} - \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

۵. مطابق شکل زیر شخصی مقابل یک تابلوی نقاشی ۲ متری ایستاده است. اگر آن شخص سر خود را تکان ندهد بالای تابلو

را تحت زاویه  $30^\circ$  و پایین آن را تحت زاویه  $45^\circ$  می بیند. فاصله آن شخص تا تابلو چند متر است؟



$$5 - \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} - 1 \quad (2)$$

$$3 - \sqrt{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} - 1 \quad (4)$$

۶. هواپیمایی می خواهد از روی یک باند به طول ۳ کیلومتر بلند شود. ابتدا  $180^\circ$  متر روی باند حرکت می کند تا سرعت لازم

را پیدا کند. سپس با زاویه  $\theta$  از روی باند بلند می شود. وقتی به انتهای بالای باند می رسد  $80^\circ$  متر ارتفاع دارد. برای زاویه

$\theta$  کدام درست است؟

$$\tan \theta = \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\cot \theta = \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \quad (1)$$

۷. در مثلث ABC نقاط D و E به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند به طوری که  $\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3}$  و  $\frac{EA}{EC} = \frac{3}{5}$ ، مساحت

مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث ABC است؟

$$24 \quad (4)$$

$$21 \quad (3)$$

$$18 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

۸. اگر  $90^\circ < x < 180^\circ$ ، مقدار عبارت  $\frac{1}{4} \cos(-2x)$  در چه بازه ای قرار می گیرد؟

$$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad (4)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad (3)$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right) \quad (2)$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \quad (1)$$

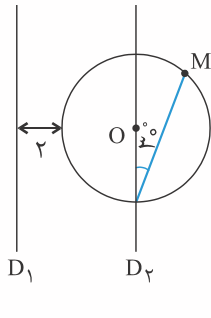
۹. کدام گزینه صحیح است؟

$$\cos 50^\circ < \cos 40^\circ \quad (2)$$

$$\sin 50^\circ < \sin 40^\circ \quad (1)$$

$$\cot 40^\circ < \cot 50^\circ \quad (4)$$

$$\tan 50^\circ < \tan 40^\circ \quad (3)$$



۱۰. در شکل مقابل خطوط  $D_1$  و  $D_2$  موازی و مرکز دایره به شعاع ۳ واحد بر روی خط  $D_2$  قرار دارد. فاصله نقطه  $M$  از خط  $D_1$  چه قدر است؟

- (۱)  $5 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $5 + \sqrt{3}$  (۳)  $5 + \frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{13}{2}$

۱۱. اگر  $-20^\circ < x < 30^\circ$  و  $\cos 2x = \frac{2m-3}{2}$ ، مجموعه تمام مقادیر  $m$  در کدام بازه است؟

- (۱)  $[2, 2/5)$  (۲)  $(2, 2/5]$  (۳)  $(\frac{1}{2}, 1]$  (۴)  $(\frac{1}{2}, 1)$

۱۲. اگر  $\sin(\frac{180^\circ \cos x}{\pi}) = a$  باشد، کدام بازه زیر حدود تغییرات  $a$  را نشان می‌دهد؟

- (۱)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (۲)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  (۳)  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  (۴)  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

۱۳. حاصل عددی  $\cos 22/5^\circ + \cos 45^\circ + \cos 67/5^\circ + \cos 90^\circ + \cos 112/5^\circ + \cos 135^\circ + \cos 157/5^\circ$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳) صفر (۴) ۱

۱۴. اگر  $21^\circ \leq x \leq 33^\circ$  باشد، بیش‌ترین مقدار  $\cot x - \frac{1 + \cos x}{\sin x}$  چه قدر است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $\sqrt{3}$  (۴) ۲

۱۵. زاویه بین خط  $d: \sqrt{3}y = x + 1$  و نیمساز ناحیه اول و سوم چقدر است؟

- (۱)  $75^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $135^\circ$  (۴)  $15^\circ$

۱۶. اگر  $\cot x = 2$  حاصل  $A = \frac{\cos^4 x}{3 + \sin^2 x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{10}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{3}{10}$  (۴)  $\frac{2}{5}$

۱۷. اگر  $(a \in \mathbb{R})$ ؛  $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$ ، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۸. ساده شده عبارت  $\frac{\tan^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x - 3\sin^2 x + 2}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan^2 x$  (۲)  $\tan^4 x$  (۳)  $\tan^6 x$  (۴)  $\tan^8 x$

۱۹. اگر  $27^\circ < \alpha < 315^\circ$ ، حاصل عبارت  $\sqrt{\sin^2 \alpha (1 + \cot \alpha) + \cos^2 \alpha (1 + \tan \alpha)}$  کدام است؟

- (۱)  $\cos \alpha - \sin \alpha$  (۲)  $-\sin \alpha - \cos \alpha$  (۳)  $\sin \alpha + \cos \alpha$  (۴)  $\sin \alpha - \cos \alpha$

۲۰. اگر  $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$  باشد حاصل  $\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}$  چه قدر است؟

- (۱)  $5\sqrt{\frac{2}{7}}$  (۲)  $3\sqrt{\frac{2}{7}}$  (۳)  $4\sqrt{\frac{2}{7}}$  (۴)  $\frac{18}{7}$

(کنکور سراسری)

۲۱. اگر  $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} > \sqrt{1 + 2\sin x \cos x}$  آن‌گاه انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

(کنکور)

۲۲. در صورتی که  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{3}{2}$ ، مقدار  $\tan \theta$  برابر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

(کنکور)

۲۳. اگر  $\tan x = -\frac{1}{4}$  و  $\cos x < 0$ ، مقدار  $\sin x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

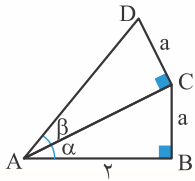
۲۴. اگر  $\tan a = -\frac{1}{3}$  و انتهای زاویه  $a$  در موقعیت استاندارد در ربع چهارم مثلثاتی باشد، مختصات محل برخورد ضلع انتهای زاویه با دایره مثلثاتی کدام است؟

- (۱)  $(1, -3)$  (۲)  $(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$  (۳)  $(1, -\frac{1}{3})$  (۴)  $(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$

(کنکور)

۲۵. اگر  $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$  باشد، آنگاه مقدار عبارت  $\sin^2 x + \cos^5 x$  چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳)  $2 - \sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{2} - 1$



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 2^2 + a^2 = 4 + a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{4 + a^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2} \\ \tan \beta &= \frac{CD}{AC} = \frac{a}{\sqrt{4 + a^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{\sqrt{4 + a^2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 + a^2}}{1} = \frac{\sqrt{4 + a^2}}{2}$$

۱. گزینه ۲

۲. گزینه ۲

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نکته برای مقدار سینوس هر زاویه‌ای می‌دانیم:

$$-1 \leq 3m + 1 \leq 1 \Rightarrow -1 - 1 \leq 3m + 1 - 1 \leq 1 - 1 \Rightarrow -2 \leq 3m \leq 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq m \leq 0$$

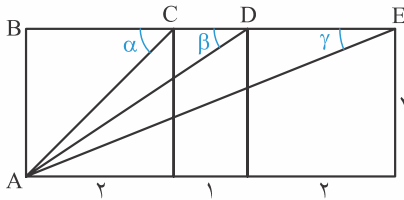
۳. گزینه ۱

$$\sin \widehat{A} = \sin \widehat{B} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \quad (1)$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{C} = 105^\circ} \widehat{A} + \widehat{B} = 75^\circ \quad (2)$$

$$\text{از (1) و (2)} \Rightarrow \widehat{A} + \frac{2}{3}\widehat{A} = 75^\circ \Rightarrow \frac{5\widehat{A}}{3} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ$$

۴. گزینه ۱



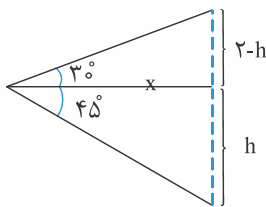
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow AD = \sqrt{13}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{AB}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \beta &= \frac{BD}{AD} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \tan \gamma &= \frac{AB}{BE} = \frac{2}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \alpha + 3 \cos \beta - 2 \tan \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9\sqrt{13}}{13} - \frac{4}{5}$$

۵. گزینه ۱

مطابق شکل مقابل داریم:



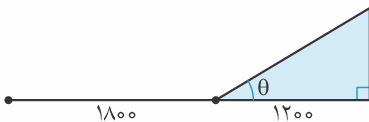
$$\tan 45^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow 1 = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \quad (1)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{2-h}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2-h}{x} \Rightarrow 2-h = \frac{x\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

از جمع طرفین روابط (۱) و (۲) داریم:

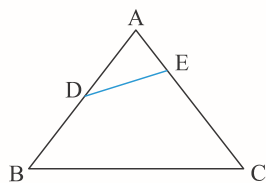
$$2 = x + x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{3 + \sqrt{3}} = \frac{6(3 - \sqrt{3})}{9 - 3} = 3 - \sqrt{3}$$

۶. گزینه ۲



$$\tan \theta = \frac{1200}{1800} = \frac{2}{3}$$

با توجه به مفروضات مسأله شکل مقابل را رسم می‌کنیم و داریم:



$$\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AD = \frac{2}{5} AB \quad (1)$$

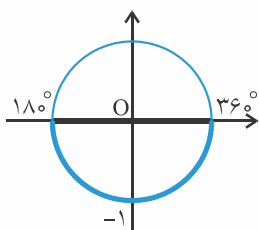
$$\frac{EA}{EC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AE = \frac{3}{8} AC \quad (2)$$

از طرفی دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle ADE$  در زاویه  $\hat{A}$  مشترک هستند پس مساحت دو مثلث را با اضلاع مجاور به زاویه مشترک می‌نویسیم یعنی:

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times AE \times \sin \hat{A}}{\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}} \stackrel{\text{طبق (2), (1)}}{=} \frac{\frac{2}{5} AB \times \frac{3}{8} AC}{AB \times AC} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

$$90^\circ < x < 180^\circ \Rightarrow 180^\circ < 2x < 360^\circ$$

$$\cos \theta = \cos(-\theta) \Rightarrow \cos 2x = \cos(-2x) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(-2x)$$

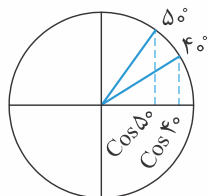


محدوده  $2x$  را روی دایره مثلثاتی می‌بینیم:

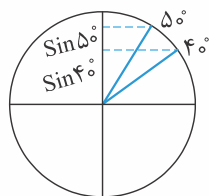
پس داریم:

$$\begin{aligned} -1 < \cos 2x < 1 &\xrightarrow{\cos 2x = \cos(-2x)} -1 < \cos(-2x) < 1 \Rightarrow \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(-2x) < \frac{\sqrt{2}}{2} &\rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

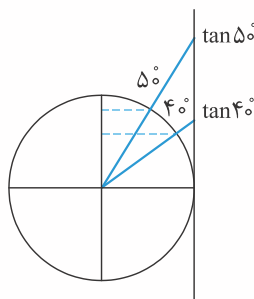
می‌دانیم در ناحیه اول مثلثاتی با افزایش مقدار زاویه حاده  $\alpha$ ،  $\sin \alpha$  و  $\tan \alpha$  افزایش ولی  $\cos \alpha$  و  $\cot \alpha$  کاهش می‌یابند. به بیان دیگر در ناحیه اول برای زاویه حاده  $\alpha$  توابع  $\sin \alpha$  و  $\tan \alpha$  صعودی و توابع  $\cos \alpha$  و  $\cot \alpha$  نزولی‌اند پس در این سؤال چون  $50^\circ > 40^\circ$  می‌توان نتیجه گرفت  $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$  است و گزینه ۲ صحیح می‌باشد. این مطلب را در شکل‌های زیر نیز می‌توان مشاهده کرد:



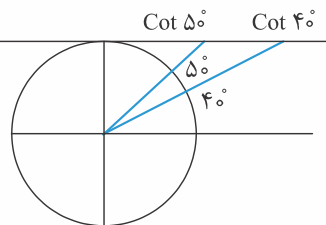
$$\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$$



$$\sin 50^\circ > \sin 40^\circ$$



$$\tan 50^\circ > \tan 40^\circ$$



$$\cot 50^\circ < \cot 40^\circ$$

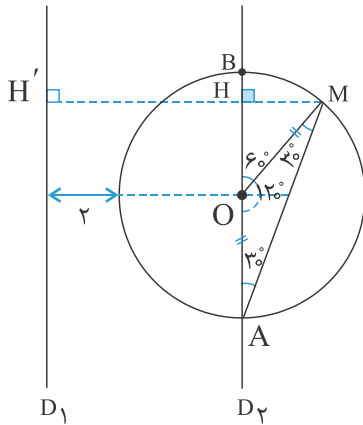
۱۰. گزینه ۱

با توجه به شکل مقابل چون زاویه  $\widehat{BAM} = 30^\circ$  است لذا  $\widehat{BOM} = 60^\circ$  می‌باشد. همچنین در مثلث قائم‌الزاویه  $OMH$  داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{MH}{OM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MH}{3} \Rightarrow MH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

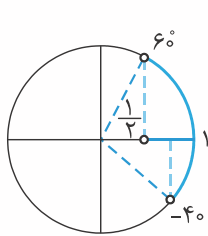
پس فاصله نقطه  $M$  از خط  $D_1$  با توجه به موازی بودن دو خط  $D_1, D_2$  برابر است با:

$$MH' = MH + HH' = MH + (R + 2) \frac{R = 3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 5$$



۱۱. گزینه ۲

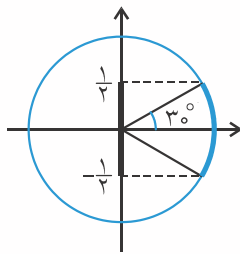
طبق فرض  $-20^\circ < x < 30^\circ \Rightarrow -40^\circ < 2x < 60^\circ$



مطابق شکل مقابل می‌بینیم هرگاه  $2x$  از  $-40^\circ$  درجه تا  $60^\circ$  تغییر کند مقدار  $\cos 2x$  از  $\frac{1}{2}$  تا ۱ تغییر می‌کند البته  $\cos 2x$  مقدار ۱ را می‌تواند داشته باشد ولی مقدار  $\frac{1}{2}$  را نمی‌تواند اختیار کند به بیان دیگر  $\frac{1}{2} < \cos 2x \leq 1$  است. در این جا نیازی به دانستن مقدار  $\cos(-40^\circ)$  نیست چون  $\cos 60^\circ < \cos(-40^\circ)$ . پس با توجه به این که  $\cos 2x = \frac{2m-3}{2}$  است داریم:

$$\frac{1}{2} < \frac{2m-3}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < 2m-3 \leq 2 \Rightarrow 4 < 2m \leq 5 \Rightarrow 2 < m \leq 2.5$$

۱۲. گزینه ۲



$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -30^\circ \leq \frac{180^\circ \cos x}{6} \leq 30^\circ$$

اگر فرض کنیم  $\alpha = \frac{180^\circ \cos x}{6}$ ، محدوده  $\alpha$  به صورت رنگی و پُررنگ در شکل مشخص شده است. پس  $-\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{1}{2}$ .

۱۳. گزینه ۲

$$\begin{aligned} \cos 157/5^\circ &= \cos(180^\circ - 22/5^\circ) = -\cos 22/5^\circ \\ \cos 112/5^\circ &= \cos(180^\circ - 67/5^\circ) = -\cos 67/5^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 135^\circ &= \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ \\ \cos 90^\circ &= 0 \end{aligned}$$

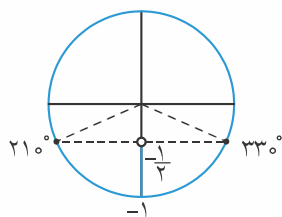
پس حاصل عبارت خواسته شده برابر ۰ است.

۱۴. گزینه ۲

$$\cot x = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\cos x - 1 - \cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\sin x}$$

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

سپس با توجه به این که  $21^\circ < x \leq 33^\circ$  است باید محدوده تغییرات  $\frac{-1}{\sin x}$  را به دست آوریم.



همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینیم وقتی  $x$  در بازه  $[21^\circ, 33^\circ]$  تغییر می‌کند مقدار  $\sin x$  در بازه  $[-1, \frac{1}{2}]$  است.

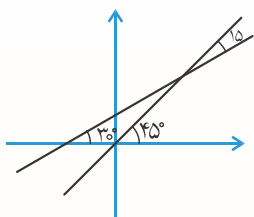
$$-1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq -\sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{-\sin x} \leq 2 \Rightarrow \max\left(-\frac{1}{\sin x}\right) = 2$$

پس:

۱۵. گزینه ۲

$$d: \sqrt{3}y = x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \theta \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

با توجه به شکل، زاویه بین خط  $d$  و نیمساز ناحیه‌های اول و سوم برابر است با  $15^\circ$ .



۱۶. گزینه ۲

$$A = \frac{\cos^4 x}{3 + \sin^2 x} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را بر } \sin^4 x} A = \frac{\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}}{3\left(\frac{1}{\sin^4 x}\right) + \frac{\sin^2 x}{\sin^4 x}} = \frac{\cot^4 x}{3\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\cot^4 x}{3(1 + \cot^2 x)^2 + (1 + \cot^2 x)}$$

$$\xrightarrow[\text{طبق فرض } \cot x = 2]{\text{طبق فرض}} A = \frac{2^4}{3(5)^2 + 5} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$$

۱۷. گزینه ۲

چون  $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$  پس می‌توان نتیجه گرفت  $\cos x > 0$  است. (چون سمت راست تساوی همواره مثبت است).

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cot x}{\cot x - a^2} \xrightarrow[\text{دو طرف تساوی را عکس می‌کنیم}]{\text{دو طرف تساوی را عکس می‌کنیم}} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cot x - a^2}{\cot x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{\cot x - a^2}{\cot x}$$

$$\Rightarrow \cot x + \tan x = \cot x - a^2 \Rightarrow \tan x = -a^2 < 0$$

پس باید انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم و یا چهارم باشد.

از طرفی چون گفتیم  $\cos x > 0$  پس قطعاً انتهای کمان  $x$  در ناحیه چهارم است.

۱۸. گزینه ۲

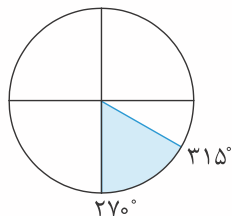
$$\frac{\tan^4 x - \sin^4 x}{\sin^4 x - 3\sin^2 x + 2} = \frac{\tan^4 x \left(1 - \frac{\sin^4 x}{\tan^4 x}\right)}{(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x - 2)} = \frac{\tan^4 x (1 - \cos^4 x)}{(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x - 2)} = \frac{\tan^4 x (1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)}{- (1 - \sin^2 x)(1 - \cos^2 x - 2)}$$

$$= \frac{\tan^4 x \sin^2 x (1 + \cos^2 x)}{-\cos^2 x (-(1 + \cos^2 x))} = \tan^4 x \cdot \tan^2 x = \tan^6 x$$

۱۹. گزینه ۲

$$A = \sqrt{\sin^2 \alpha (1 + \cot \alpha) + \cos^2 \alpha (1 + \tan \alpha)} = \sqrt{\sin^2 \alpha \left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) + \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha + \cos \alpha|$$



$$270^\circ < \alpha < 315^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ , \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$$

با توجه به این‌که:

و نیز در بازه داده شده  $|\sin \alpha| > |\cos \alpha|$  لذا عبارت  $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$  است پس:

$$A = |\sin \alpha + \cos \alpha| = -\sin \alpha - \cos \alpha$$

۲۰. گزینه ۲

$$A = \sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} \Rightarrow A^2 = \tan x + \cot x + 2\sqrt{\tan x \cdot \cot x} \Rightarrow A^2 = \tan x + \cot x + 2 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} + 2$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{\sin x \cos x} + 2$$



$$\sin x + \cos x = \frac{4}{3} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{16}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{5}{18}$$

با توجه به فرض داریم:

$$A^2 = \frac{1}{\frac{5}{18}} + 2 = \frac{18}{5} + 2 = \frac{32}{5} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{32}{5}} = 4\sqrt{\frac{2}{5}}$$

پس:

۲۱. **قرینه**

از نامساوی  $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} > \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x} \geq 0$  می‌توانیم نتیجه بگیریم که  $\cos x > 0$  است.

$$\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} = \cos x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos x \left( \frac{1}{|\cos x|} \right) = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x} < 1 \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x < 1$$

از طرفی:

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x < 0 \xrightarrow{\text{چون } \cos x > 0} \sin x < 0$$

با توجه به این که  $\sin x < 0$ ,  $\cos x > 0$  پس انتهای کمان  $x$  در ناحیه چهارم است.

۲۲. **قرینه**

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \sin \theta = 3(\sin \theta - \cos \theta) \Rightarrow 2 \sin \theta = 3 \sin \theta - 3 \cos \theta \Rightarrow$$

$$-\sin \theta = -3 \cos \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 3 \Rightarrow \tan \theta = 3$$

۲۳. **قرینه**

ابتدا علامت  $\sin x$  را پیدا می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \tan x < 0 \Rightarrow x \text{ در ناحیه دوم یا چهارم} \\ \cos x < 0 \Rightarrow x \text{ در ناحیه دوم یا سوم} \end{array} \right\} \Rightarrow x \text{ در ناحیه دوم} \Rightarrow \sin x > 0$$

سپس به کمک اتحادهایی که یاد گرفتیم، داریم:

$$\tan x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cot x = -2$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + (-2)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5} \xrightarrow{\sin x > 0} \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

۲۴. **قرینه**

$a$  در ناحیه چهارم است، پس  $\sin a < 0$  و  $\cos a > 0$ .

به کمک اتحادهایی که یاد گرفتیم، داریم:

$$\tan a = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cot a = -3$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{9}{10} \xrightarrow{\cos a > 0} \cos a = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{1}{\sin^2 a} = 1 + \cot^2 a \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 a} = 1 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1}{10} \xrightarrow{\sin a < 0} \sin a = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

پس مختصات محل برخورد با دایره مثلثاتی  $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$  است.

۲۵. **قرینه**

فرض می‌کنیم  $\sin x = a$ ، پس:

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a \times \left(a + \frac{1}{a}\right) = 2a \Rightarrow a^2 + 1 = 2a \Rightarrow a^2 + 1 - 2a = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$a = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow \cos x = 0$$

پس داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1^2 + 0^2 = 1$$