فهرست

امتحان نهایی

بارم‌بندی درس ریاضیات گسسته

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم
اول		۱۵	۵
دوم	تا صفحه ۴۲	۵	۲
	صفحه ۴۲ به بعد	–	۵
سوم		–	۸
جمع		۲۰	۲۰

۱
بخش

درسنامه
و سؤالات تشریحی

فصل اول

۱ آشنایی با نظریهٔ اعداد

فصل اول ریاضیات گسسته دارای ۷ بسته است که در آن‌ها مباحثی همچون استدلال استنتاجی، مثال نقض، برهان خلف، اثبات بازگشتی، بخش‌پذیری، مقسوم‌علیه مشترک، هم‌نهشتی، باقیمانده تقسیم اعداد و معادلهٔ هم‌نهشتی مطرح شده است. از این فصل در نوبت اول ۱۵ نمره و در نوبت دوم ۵ نمره سؤال مطرح می‌شود.

فیلم شب امتحان

فصل ۱

برای استفاده از فیلم آموزشی شب امتحان این فصل QR-code مقابل را اسکن کنید.

بسته اول

استدلال استنتاجی و مثال نقض و اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

استدلال ریاضی

استدلال و اثبات در ریاضیات جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال، امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و درک آن کمک می‌نماید.
حال به بررسی بعضی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات می‌پردازیم.

اثبات مستقیم (استدلال استنتاجی)

اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد ولی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم.

نکته وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

سؤال **با استفاده از اثبات مستقیم نشان دهید مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.**

پاسخ فرض می‌کنیم که دو عدد فرد به‌صورت $a = ۲k + ۱$ و $b = ۲k' + ۱$ که $k' \in \mathbb{Z}$ و k باشند.

مجموع دو عدد فرد: $a + b = (۲k + ۱) + (۲k' + ۱) = ۲k + ۲k' + ۲ = ۲(\underbrace{k + k' + ۱}_{k''}) = ۲k''$

$۲k''$ عددی زوج است.

سؤال **با استفاده از اثبات مستقیم نشان دهید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی، همواره مضرب ۶ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم a، $a + ۱$ و $a + ۲$ سه عدد متوالی باشند. از هر دو عدد متوالی یکی به ۲ بخش‌پذیر است. بنابراین یکی از دو عدد a یا $a + ۱$ زوج است، بنابراین $a(a + ۱)(a + ۲)$ مضرب ۲ است. هم‌چنین از هر سه عدد صحیح متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین $a(a + ۱)(a + ۲)$ مضرب ۳ می‌باشد. عدد $a(a + ۱)(a + ۲)$ هم به ۲ و هم به ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین مضرب ۶ می‌باشد.

سؤال **با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر به سه برابر عددی فرد، یک واحد اضافه شود، عددی زوج به‌دست می‌آید.** خرداد ۹۴

پاسخ فرض می‌کنیم که $a = ۲k + ۱ \;,\; (k \in \mathbb{Z})$ عددی فرد است.

$$۳a + ۱ = ۳(۲k + ۱) + ۱ = ۶k + ۳ + ۱ = ۶k + ۴ = ۲(\underbrace{۳k + ۲}_{k'}) = ۲k'$$

بنابراین سه برابر عددی فرد به اضافهٔ یک، عددی زوج است.

مثال نقض

استدلال مستقیم به ما اطمینان می‌دهد که نتیجهٔ به‌دست آمده حتماً درست است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

مثال نقض: به مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گویند.

سؤال **برای اثبات نادرستی هریک از گزاره‌های زیر یک مثال نقض ارائه دهید.**

آ) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ‌تر است.

ب) اگر x و y اعداد گنگی باشند، آن‌گاه x^y یک عدد گنگ است.

پاسخ آ) مثال نقض $x=\frac{1}{2}$ برای رد این گزاره کافی است، زیرا: $x^2=\frac{1}{4} \not> x=\frac{1}{2}$

ب) مثال نقض $x=2^{\sqrt{2}}$ و $y=\sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم. $x^y=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^2=4\in\mathbb{Q}$ (اعداد گویا)

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است که همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم و هر حالت را به طور مستقیم اثبات کنیم. سپس با توجه به هم‌ارزی $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$، حکم کلی مسئله اثبات می‌شود.

سؤال **با استفاده از روش اشباع نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، همواره عددی زوج است.**

پاسخ فرض کنیم a و $a+1$ دو عدد صحیح متوالی باشند. دو حالت وجود دارد:

حالت اول a عددی زوج است، بنابراین داریم:

$$a=2k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow a(a+1)=2k(2k+1)=2(\underbrace{k(2k+1)}_{k'})=2k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

پس $a(a+1)$ زوج است.

حالت دوم a عددی فرد است، بنابراین داریم:

$$a=2k+1\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow a(a+1)=(2k+1)\underbrace{(2k+2)}_{2(k+1)}=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k'}=2k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

پس $a(a+1)$ زوج است.

اگر زوج بودن a را با p و فرد بودن a را با q و زوج بودن $a(a+1)$ را با r نمایش دهیم، در بالا ثابت کردیم که $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ و با توجه به هم‌ارزی $p\vee q\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ حکم ثابت می‌شود.

سؤال **برای هر عدد طبیعی n، n^2+7n-5 عددی فرد است.**

پاسخ هر عدد طبیعی زوج یا فرد است. بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول n زوج است، بنابراین داریم:

$$n=2k\ ,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow n^2+7n-5=(2k)^2+7(2k)-5=4k^2+14k-5=4k^2+14k-6+1$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}}2\underbrace{(2k^2+7k-3)}_{k'}+1=2k'+1\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

که حاصل n^2+7n-5 یک عدد فرد است.

حالت دوم n فرد است، بنابراین داریم:

$$n=2k-1\ ,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow n^2+7n-5=(2k-1)^2+7(2k-1)-5$$

$$=4k^2-4k+1+14k-7-5=4k^2+10k\underbrace{-11}_{-12+1}\xrightarrow{\text{فاکتور}}2\underbrace{(2k^2+5k-6)}_{k'}+1=2k'+1\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$$

که حاصل n^2+7n-5 باز هم یک عدد فرد است.

لذا در دو حالت برای هر عدد طبیعی n، n^2+7n-5 عددی فرد است.

بسته ۱ **پرسش‌های تشریحی** استدلال استنتاجی و مثال نقض و اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

● **جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.**

۱ . عبارت «مربع هر عدد گنگ، عددی گویا است.» نادرست است و مثال نقض آن عدد .... می‌باشد. (خرداد ۹۶)

۲ . مثال نقض، مثالی است که نشان می‌دهد نتیجهٔ کلی .... است.

۳ . هنگامی از استدلال .... استفاده می‌کنیم که مطمئن هستیم، نتیجهٔ مسأله همیشه درست است.

● **درستی یا نادرستی عبارات در سؤال‌های ۴ تا ۱۶ را مشخص کنید.**

۴ . حاصل‌ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است. (خرداد ۱۴۰۰)

۵ . مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. (شهریور ۹۸)

۶ . برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، $۲^n - ۱$ اول است. (شهریور ۹۸ و دی ۹۹)

۷ . مربع هر عدد حقیقی مثبت است.

۸ . اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، یک عدد زوج حاصل می‌شود.

۹ . بین هر دو عدد گنگ، عدد گویا وجود دارد.

۱۰ . عدد $۳^n + ۴$ برای هر عدد طبیعی n ، عدد اول است.

۱۱ . اگر $|a| = |b|$ باشد، آن‌گاه $a = b$

۱۲ . برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (شهریور ۹۹)

۱۳ . اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ ، آن‌گاه $a = ۰$ یا $b = ۰$. (شهریور ۹۹)

۱۴ . اگر $a , b \in \mathbb{R}$ ، داریم: $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۲$ (شهریور ۹۹)

۱۵ . حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۹۹ و شهریور ۹۹)

۱۶ . اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است. (خرداد ۹۹)

۱۷ . با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است. (دی ۹۵)

۱۸ . کدام‌یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید. (شهریور ۹۳)

آ) توان دوم یک عدد، همیشه از آن عدد بزرگ‌تر است.

ب) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

۱۹ . با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است. (خرداد ۹۳)

۲۰ . با استدلال استنتاجی ثابت کنید:

آ) تفاضل مربعات دو عدد فرد، همواره مضرب ۴ است. (دی ۹۰)

ب) اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $x(x+۳)$ مضرب ۱۸ است. (شهریور ۹۱)

۲۱ . با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع سه عدد صحیح متوالی همواره مضرب ۳ است.

۲۲ . با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر P و $P + ۲$ ، $(P \geq ۵)$ دو عدد اول باشند، آن‌گاه $P + ۱$ مضرب ۶ است.

۲۳ . با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب چهار عدد صحیح متوالی به اضافهٔ یک، مربع کامل است.

۲۴ . ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n ؛ (مشابه مثال صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

آ) $n^۲ + ۵n - ۹$ یک عدد فرد است.

ب) $۲n^۲ + ۶n - ۱۲$ عددی زوج است.

۲۵ . ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است. (خرداد ۱۴۰۱)

۲۶ . $A=\{۲,۳,۵\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است و $n\in S$ ، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۳}$ یک عدد زوج باشد، ثابت کنید $n\in A$

(مشابه تمرین کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

۲۷ . اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲+b^۲+۴$ زوج است. (مشابه تمرین کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

۲۸ . با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مربع هر عدد صحیح فرد به‌صورت $۸k+۱$ است که در آن $k\in\mathbb{Z}$.

۲۹ . با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب هر دو عدد به‌صورت $۶q+۵$ ، عددی به‌صورت $۶q+۱$ است. $(q\in\mathbb{Z})$

۳۰ . آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت؟

● برای اثبات نادرستی هریک از احکام سؤالات ۳۱ تا ۴۲ یک مثال نقض ارائه دهید.

۳۱ . مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گنگ، گنگ است.

۳۲ . همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد.

۳۳ . اگر $(a-۱)(b-۱)=۰$ آن‌گاه $a=۱\wedge b=۱$ می‌باشد.

۳۴ . برای هر عدد حقیقی مثبت x ، داریم $۳^x\geq ۳$.

۳۵ . اگر x و y دو عدد گنگ باشند، آن‌گاه $\frac{۲x+y}{۲x-y}$ نیز عدد گنگ است.

۳۶ . به ازای هر عدد طبیعی n ، $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است.

۳۷ . اگر a ، b و c سه عدد گنگ باشند، آن‌گاه $abc^۳$ یک عدد گنگ است.

۳۸ . محیط دایره همواره عددی گنگ است.

۳۹ . مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (دی ۹۲)

۴۰ . برای هر عدد طبیعی n ، عدد $۳^n+۲$ اول است. (دی ۹۲)

۴۱ . اگر $xy=۰$ ، آن‌گاه $x=۰$ و $y=۰$ (دی ۸۹)

۴۲ . اگر a ، b و c اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است. (خرداد ۹۱)

۴۳ . هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

آ) برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n+۱$ اول است.

ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

۴۴ . کدام‌یک از احکام زیر درست است؟ احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید. (شهریور ۹۴)

آ) اگر $x>۲$ ، آن‌گاه $x>\frac{۵}{۲}$

ب) اگر x و y هر دو گویا باشند، آن گاه $x+y$ گویا است.

۴۵ . درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید. (خرداد ۹۰)

آ) به ازای هیچ دو عدد اول a و b ، عدد $a+b$ اول نیست.

ب) اگر x فرد باشد، آن‌گاه $x(x+۲)$ هم فرد است.

بسته دوم

برهان خلف و اثبات بازگشتی

صفحه ۵ تا ۸ کتاب درسی

الف اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

همان‌طور که در دو سال گذشته و در هندسه (۱) با اثبات غیرمستقیم آشنا شدید، گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد (فرض خلف)، آن‌گاه با استفاده از روش اثبات مستقیم به یک تناقض می‌رسیم. از این تناقض معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست بوده است و در نتیجه حکم اولیه درست است. این روش استدلال را برهان خلف می‌گوییم.

سؤال **نشان دهید که با فرض صحیح بودن n، اگر n^2 فرد باشد، n نیز فرد است.**

پاسخ فرض می‌کنیم که n یک عدد صحیح و n^2 عددی فرد است. اگر n عدد فرد نباشد، یک عدد زوج است (فرض خلف). یعنی $n = 2k\ ,\ (k \in \mathbb{Z})$

n^2 یک عدد صحیح زوج است. $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k'}) = 2k'$

بنابراین با فرض مسئله در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

مراحل اثبات به روش برهان خلف

۱ فرض می‌کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد (فرض خلف).

۲ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به‌دست می‌دهد که حقایق دانسته‌شده را نقض می‌کند.

۳ حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود که فرض خلف نادرست است. بنابراین نتیجهٔ مطلوب درست است.

سؤال **ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $x-y$ گنگ است.**

پاسخ فرض کنیم که x گویا و y گنگ است. نشان می‌دهیم $x-y$ یک عدد گنگ است.

فرض خلف: فرض کنیم $x-y$ گویا باشد (گنگ نباشد). چون تفاضل دو عدد گویا نیز گویا است، پس $x-y-x \in \mathbb{Q}$ یعنی $-y \in \mathbb{Q}$ و $y \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن y تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

سؤال **می‌دانیم $\sqrt{3}$ یک عدد گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ یک عدد گنگ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم که $\sqrt{\sqrt{3}+2}$ یک عدد گنگ نباشد، بنابراین یک عدد گویا است (فرض خلف).

$$\text{عدد گویا } a = \sqrt{\sqrt{3}+2} \xrightarrow[\text{عددی گویا است.}]{\text{مربع عدد گویا}} a^2 = (\sqrt{\sqrt{3}+2})^2 = \sqrt{3}+2 \Rightarrow a^2 - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow \text{گنگ} = \text{گویا}$$

چون تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است و طبق فرض مسأله $\sqrt{3}$ گنگ است پس در این تساوی به تناقض می‌رسیم و فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

سؤال **با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی، $x \neq 3$ و $x + 4y^2 = 7$ آن‌گاه $y \neq -1$ است.** شهریور ۹۳

پاسخ ابتدا حکم مسأله را نقض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $y = -1$ باشد (فرض خلف).

$$y = -1 \Rightarrow x + 4(-1)^2 = 7 \Rightarrow x = 3$$

که با فرض مسأله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم $y \neq -1$ برقرار است.

سؤال **با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5}$ عددی گنگ است.** خرداد ۹۶

پاسخ فرض کنیم $\sqrt{5}$ گنگ نباشد، یعنی گویا باشد (فرض خلف). در این صورت اعداد صحیح a و b وجود دارند به طوری‌که a و b نسبت به هم اول هستند و داریم:

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}\ ,\ (a,b) = 1\ ,\ a,b \in \mathbb{Z}\ ,\ b \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} 5 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 5b^2 \Rightarrow \text{مضرب ۵ است. } a^2 \Rightarrow \text{مضرب ۵ است. } a$$

$$\Rightarrow a = 5k\ ,\ a^2 = 5b^2 \Rightarrow 25k^2 = 5b^2 \Rightarrow b^2 = 5k^2 \Rightarrow \text{مضرب ۵ است. } b^2 \Rightarrow \text{مضرب ۵ است. } b$$

لذا a و b هر دو مضرب ۵ هستند که با فرض اول بودن a و b نسبت به هم، در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و در نتیجه حکم درست است، یعنی $\sqrt{5}$ عددی گنگ است.

! نکته البته توجه کنید که گاهی اوقات برای رد ادعایی فرض می‌کنیم که آن ادعا درست است و با استفاده از دانسته‌ها به مطالب نادرست می‌رسیم، در این حالت نیز از فرض خلف استفاده کرده‌ایم.

ب اثبات بازگشتی ـ گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم. اگر P و Q دو گزارهٔ هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزارهٔ درست است.

بر عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزارهٔ هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آن‌ها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود.

به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم، به طوری‌که اگر P ، Q و R سه گزاره باشند و $R \Leftrightarrow Q$ و $Q \Leftrightarrow P$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک تکلیف دو گزارهٔ دیگر را معلوم خواهد کرد. با تکرار این کار و با استفاده از درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی و یا فرض مسأله می‌رسیم.

در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن روش بازگشتی هم می‌گویند)، توانایی ارائهٔ ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال $(a+b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$ یک ترکیب دو شرطی درست است. ولی $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ یک ترکیب دو شرطی درست نیست، زیرا:

$a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$

سؤال اگر a و b دو عدد مثبت باشند، به روش بازگشتی ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

پاسخ فرض کنیم که حکم درست است، پس باید به یک رابطهٔ بدیهی برسیم.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \xleftrightarrow[ab>0]{\times ab} a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (بدیهی است.)}$$

آخرین گزاره یعنی $(a-b)^2 \geq 0$ همواره برقرار است، به عبارت دیگر حکم، هم‌ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است.

سؤال اگر a ، b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$ خرداد ۹۱

پاسخ

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2a - 2b - 2c \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

نامساوی اخیر بدیهی است.

سؤال اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطهٔ زیر را بررسی کنید: خرداد ۹۴

$$a^2 + 1 \geq b(2-b)$$

پاسخ نامساوی اخیر بدیهی است.

$$a^2 + 1 \geq b(2-b) \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2b - b^2 \Leftrightarrow a^2 + (b^2 - 2b + 1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 \geq 0$$

بسته ۲ **پرسش‌های تشریحی** برهان خلف و اثبات بازگشتی

- **جاهای خالی را با کلمات مناسب پرکنید.**

۴۶ . در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم .... باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های .... و مبتنی بر فرض به یک نتیجهٔ .... با فرض می‌رسیم و از آن‌جا معلوم می‌شود که فرضِ .... بودنِ حکم باطل است و .... حکم ثابت می‌گردد.

۴۷ . حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی .... است.

۴۸ . حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی .... (گنگ، گویا) است. (دی ۱۴۰۰)

۴۹ . اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های .... می‌نامند.

۵۰ . میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها .... نیست.

- **درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.**

۵۱ . اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارز هستند.

۵۲ . اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، آن‌گاه $\alpha - \beta$ گویا است.

۵۳ . اگر $y \neq 1$ و $x^3 + 2y = 10$، آن‌گاه $x \neq 2$ است.

۵۴ . اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند، آن‌گاه $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ است.

۵۵ . هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطهٔ $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ برقرار باشد. (خرداد ۱۴۰۰)

۵۶ . با استفاده از استدلال برهان خلف، ثابت کنید که با فرض صحیح بودن n، اگر n^2 زوج باشد، n نیز زوج است. (شهریور ۹۴)

۵۷ . با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{5}$ گنگ باشد، $\sqrt{5} + 3$ هم گنگ است. (دی ۹۵)

۵۸ . اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f - g$ در $x = a$ ناپیوسته است. (برهان خلف)

(مشابه تمرین کار در کلاس قسمت (ب) صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۵۹ . با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $5n + 3$ زوج باشد، آن‌گاه n یک عدد فرد است. (خرداد ۹۱ و مشابه شهریور ۹۰)

۶۰ . می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ نیز گنگ می‌باشد. (شهریور ۹۱)

۶۱ . ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (شهریور ۱۴۰۰)

۶۲ . می‌دانیم $\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ اعداد گنگ هستند، با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ نیز گنگ است. (دی ۹۰)

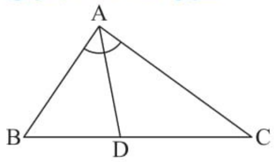
۶۳ . با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. (خرداد ۹۹ خارج)

۶۴ . a_1، a_2 و a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است. (شهریور ۱۴۰۱)

۶۵ . a_1، a_2، a_3، a_4 و a_5 عددهایی صحیح هستند و b_1، b_2، b_3، b_4 و b_5 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$ عددی زوج است. (مشابه مثال صفحهٔ ۶ کتاب درسی)

۶۶ . ثابت کنید عدد حقیقی مانند x وجود دارد که $x^3 < x^2$. (تمرین ۲ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۶۷ . اگر n^3 مضرب ۵ باشد، نشان دهید n نیز مضرب ۵ است. (برهان خلف)



۶۸ . فرض کنید AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد. اگر $BD \neq DC$، ثابت کنید $AB \neq AC$.

۶۹ . اگر x یک عدد گویا و $\sqrt{3}$ یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $2x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ یک عدد گنگ است.

۷۰ . می‌دانیم $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ اعدادی گنگ هستند، با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ نیز گنگ است.

۷۱ . با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\log_{۲} ۵$ عددی گنگ است.

۷۲ . اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و هم‌چنین $۲\alpha + \beta$ گنگ هستند. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۸ کتاب درسی، دی ۹۹ و ۱۴۰۰)

۷۳ . با استفاده از برهان خلف و با فرض صحیح بودن n ، نشان دهید اگر $n^۲$ مضربی از ۶ باشد، آن‌گاه n نیز مضربی از ۶ است.

۷۴ . با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، ثابت کنید:

آ) از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.

ب) اگر سه خط راست d ، d' و d'' دوبه‌دو متمایز باشند و $d \parallel d'$ و $d' \parallel d''$ ، آن‌گاه $d \parallel d''$.

۷۵ . آیا اعداد صحیح مانند a و b وجود دارند که $a^۲ + b^۲ = (a-b)^۲$. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۷۶ . با استفاده از اثبات بازگشتی برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y نشان دهید $x + y \geq ۲\sqrt{xy}$. (شهریور ۹۵)

۷۷ . به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > ۰$ آن‌گاه $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$. (دی ۹۸)

۷۸ . اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲$. (خرداد ۹۹)

۷۹ . ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ (شهریور ۹۹)

۸۰ . ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست. (خرداد ۹۸)

۸۱ . با استفاده از استدلال بازگشتی، ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌ها است. (شهریور ۹۴ و خرداد ۱۴۰۰)

۸۲ . اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید $a^۲ + b^۲ \geq ۲(b-۱)$. (شهریور ۹۳)

۸۳ . آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $(a+b \neq ۰)$, $\frac{۱}{a+b} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$. (تمرین ۵ صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۸۴ . اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید $ab \leq (\frac{a+b}{۲})^۲$. (خرداد ۹۳)

۸۵ . اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$. (خرداد ۹۲ و خارج دی ۹۸)

۸۶ . اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$. (دی ۹۲)

۸۷ . اگر x ، y و z سه عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + xz + yz$. (شهریور ۹۸)

۸۸ . اگر a و b اعدادی حقیقی باشند، به طوری‌که $ab < ۰$ ، ثابت کنید $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -۲$. (شهریور ۹۱)

۸۹ . اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطهٔ $x^۴ + y^۴ \geq x^۳y + xy^۳$ را ثابت کنید. (دی ۹۰)

۹۰ . با اثبات بازگشتی نشان دهید: $(a, b \in \mathbb{R}^+)$, $\frac{a}{b^۲} + \frac{b}{a^۲} \geq \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$ (شهریور ۸۹)

۹۱ . اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، به روش بازگشتی ثابت کنید $\frac{۴}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \frac{۱}{\sqrt{a}} + \frac{۱}{\sqrt{b}}$ (خرداد ۸۷)

۹۲ . اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$y^۲ + ۱ \geq ۲x(y - x + ۱)$$

۹۳ . اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$x^۲ + y^۲ - xy \geq x + y - ۱$$

۹۴ . اگر x ، y و z سه عدد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq x + y + z$$

بسته سوم

بخش‌پذیری در اعداد صحیح[1]

صفحه ۹ تا ۱۲ کتاب درسی

شمارنده

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی شیء بدون آن‌که باقی‌مانده‌ای داشته باشد را، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیاء توسط شمارنده‌ها می‌نامیم. به عنوان مثال ۱۸ شیء را می‌توان توسط شمارنده‌های ۱۸ یعنی ۱، ۲، ۳، ۶، ۹ و ۱۸ شمارش کرد. برای نمایش این مفهوم از نماد « | » به معنی عاد کردن یا همان شمردن استفاده می‌کنیم. به طوری‌که می‌نویسیم ۱۸ | ۳ و می‌خوانیم:

آ) ۳ می‌شمارد عدد ۱۸ را

ب) ۳ عاد می‌کند عدد ۱۸ را

پ) عدد ۱۸ بر ۳ بخش‌پذیر است. (باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است.)

عاد کردن

عدد صحیح a که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است (یا a، b را می‌شمارد یا b بر a بخش‌پذیر است یا $a \mid b$)، هرگاه عدد صحیحی چون q وجود داشته باشد به طوری‌که $b = aq$. (اگر b بر a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند، آن را به‌صورت $a \nmid b$ نمایش می‌دهیم.)

قرارداد چون بی‌شمار عدد صحیح مانند q وجود دارد که در $q \times ۰ = ۰$ صدق می‌کند، به معنی آن است که صفر عدد صفر را می‌شمارد و این به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

! نکته اگر a عددی طبیعی باشد، داریم $a \mid ۱$ و $a \mid a$ یعنی هر عدد بر خودش و عدد ۱ بخش‌پذیر است، مانند:

$$۱ \mid ۷ \xleftrightarrow{(q=۷)} ۷ = ۱ \times ۷ \ , \ ۵ \mid ۵ \xleftrightarrow{(q=۱۱)} ۵ = ۵ \times ۱$$

سؤال **با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، دلیل درستی رابطه‌های زیر را بیان کنید.**

۱) $۵ \mid ۴۵$ ۲) $-۳ \mid ۳۹$ ۳) $۴ \mid -۳۲$ ۴) $۵ \nmid ۱۷$

پاسخ

۱) $۵ \mid ۴۵ \xleftrightarrow{q=۹} ۴۵ = ۵ \times ۹$

۲) $-۳ \mid ۳۹ \xleftrightarrow{q=-۱۳} ۳۹ = (-۳) \times (-۱۳)$

۳) $۴ \mid -۳۲ \xleftrightarrow{q=-۸} -۳۲ = ۴ \times (-۸)$

۴) $۵ \nmid ۱۷ \Rightarrow \frac{۱۷}{۵} \notin \mathbb{Z}$

خواص و ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

۱) اگر a عاد کند عدد ۱ را آن‌گاه $a = ۱$ یا $a = -۱$

$$a \mid ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

۲) برای هر عدد طبیعی m و n که n بزرگ‌تر یا مساوی m باشد، داریم $a^m \mid a^n$.

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, m \le n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

مثال $۲^۴ \mid ۲^۹ \xrightarrow{q=۲^۵} ۲^۹ = ۲^۴ \times ۲^۵$

۳) اگر عدد a عدد b را بشمارد، آن‌گاه هر مضرب عدد b را نیز می‌شمارد، یعنی:

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

مثال $۷ \mid ۱۴ \Rightarrow ۷ \mid ۱۴ \times ۵ \ , \ ۷ \mid ۱۴ \times (-۳) \ , \ ۷ \mid ۱۴ \times ۱۲$

۴) اگر a عدد b را بشمارد، آن‌گاه $b^۲$ را می‌شمارد و در حالت کلی $(n \in \mathbb{N})$ ، b^n را می‌شمارد.

$$a \mid b \Rightarrow a \mid b^۲ \quad , \quad a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$$

مثال $۳ \mid ۶ \Rightarrow ۳ \mid ۶^۲$ ، $۳ \mid ۶ \Rightarrow ۳ \mid ۶^n$

۵) اگر عدد a، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد، آن‌گاه a، عدد c را می‌شمارد. این خاصیت را خاصیت تعدی برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

مثال $۳ \mid ۹ \wedge ۹ \mid ۱۸ \Rightarrow ۳ \mid ۱۸$

۱. تا پایان این فصل، منظور از عدد، عدد صحیح است.

۶ هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$$

مثال $۷ \mid ۱۴ \wedge ۷ \mid ۲۱ \Rightarrow \begin{cases} ۷ \mid ۱۴ + ۲۱ \Rightarrow ۷ \mid ۳۵ \\ ۷ \mid ۱۴ - ۲۱ \Rightarrow ۷ \mid -۷ \end{cases}$

۷ اگر $a \mid b$ و $b \neq ۰$ در این‌صورت $|a| \leq |b|$.

$$a \mid b \wedge b \neq ۰ \Rightarrow |a| \leq |b|$$

از این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که اگر $a \mid b$ و $b \mid a$، آن‌گاه $a = \pm b$.

مثال $۵ \mid -۲۵ \Rightarrow |۵| \leq |-۲۵| \Rightarrow ۵ \leq ۲۵$ ، $-۵ \mid ۲۵ \Rightarrow |-۵| \leq |۲۵| \Rightarrow ۵ \leq ۲۵$ ، $-۵ \mid -۲۵ \Rightarrow |-۵| \leq |-۲۵| \Rightarrow ۵ \leq ۲۵$

۸ اگر $a \mid b$، آن‌گاه داریم $a^n \mid b^n$.

$$a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$$

مثال $۳ \mid -۶ \Rightarrow \begin{cases} ۳^۲ \mid (-۶)^۲ \Rightarrow ۹ \mid ۳۶ \\ ۳^۳ \mid (-۶)^۳ \Rightarrow ۲۷ \mid -۲۱۶ \end{cases}$

۹ اگر $a \mid b$ و $c \mid d$، آن‌گاه داریم $ac \mid bd$.

(دو طرف بخش‌پذیری را می‌توان در هم ضرب کرد.)

$$a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$$

مثال $۴ \mid ۱۲ \,,\, ۵ \mid ۱۵ \Rightarrow ۴ \times ۵ \mid ۱۲ \times ۱۵ \Rightarrow ۲۰ \mid ۱۸۰$

۱۰ اگر $a \mid b$ و $a \mid c$، آن‌گاه $a \mid mb \pm nc$ (m و n اعداد صحیح‌اند.)

$$a \mid b \wedge a \mid c \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a \mid mb \pm nc \,,\, (n, m \in \mathbb{Z})$$

مثال $۲ \mid ۶ \,,\, ۲ \mid ۴ \xrightarrow{n=۵, m=۳} \begin{cases} ۲ \mid ۳ \times ۶ + ۵ \times ۴ \Rightarrow ۲ \mid ۱۸ + ۲۰ \Rightarrow ۲ \mid ۳۸ \\ ۲ \mid ۳ \times ۶ - ۵ \times ۴ \Rightarrow ۲ \mid ۱۸ - ۲۰ \Rightarrow ۲ \mid -۲ \end{cases}$

سؤال **از رابطهٔ $۱ \mid ۵n^۲ - ۸n + ۴$ چند مقدار طبیعی برای n به‌دست می‌آید؟**

پاسخ با توجه به ویژگی شمارهٔ یک داریم:

$$۵n^۲ - ۸n + ۴ = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۵n^۲ - ۸n + ۴ = +۱ \\ ۵n^۲ - ۸n + ۴ = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵n^۲ - ۸n + ۳ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۶۴ - ۴(۵)(۳) = ۴} n_۱ = ۱ \,,\, n_۲ = \frac{۳}{۵} \notin \mathbb{N} \quad (\text{غ ق ق}) \\ ۵n^۲ - ۸n + ۵ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۶۴ - ۴(۵)(۵) = -۳۶} \Delta = -۳۶ < ۰ \quad \text{معادله جواب ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین فقط یک مقدار عدد طبیعی یعنی $n = ۱$ به‌دست می‌آید.

عدد اول

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. این مجموعه که مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, \dots\}$ نمایش داده می‌شود.

نکته اگر p عددی اول و a عددی طبیعی باشد و $a \mid p$، در این‌صورت $a = ۱$ یا $a = p$.

سؤال **اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $(۷k + ۸)$ و $(۶k + ۵)$ را عاد کند، ثابت کنید $a = ۱$ یا $a = ۱۳$.**

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} a \mid ۷k + ۸ \xrightarrow{(\times ۶)} a \mid ۶(۷k + ۸) \Rightarrow a \mid ۴۲k + ۴۸ \\ a \mid ۶k + ۵ \xrightarrow{(\times ۷)} a \mid ۷(۶k + ۵) \Rightarrow a \mid ۴۲k + ۳۵ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ویژگی ۱۰}]{\text{ترکیب خطی}} a \mid (۴۲k + ۴۸) - (۴۲k + ۳۵)$$

$$\Rightarrow a \mid \cancel{۴۲k} + ۴۸ - \cancel{۴۲k} - ۳۵ \Rightarrow a \mid ۱۳ \xrightarrow{\text{۱۳ عددی اول است.}} a = ۱۳ \text{ یا } a = ۱$$

بسته ۳ **پرسش‌های تشریحی** بخش‌پذیری در اعداد صحیح

● درجاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۹۵ . اگر $a \mid 1$ آن‌گاه a برابر .... یا .... است.

۹۶ . اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a \mid p$ ، در این‌صورت a برابر .... یا .... است.

۹۷ . اگر $a \mid b$ و $b \mid a$ ، آن‌گاه a برابر .... یا .... است.

۹۸ . اگر $a \mid b$ و .... ، آن‌گاه $ac \mid bd$.

۹۹ . اگر $a \mid 0$ آن‌گاه a برابر .... است.

۱۰۰ . a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفراست. اگر $a \mid b$ ، آن‌گاه عدد .... شمارندهٔ عدد .... است. (خرداد ۱۴۰۰)

۱۰۱ . اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a \mid b$ ، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: .... $(a \mid mb\ ,\ ma \mid b)$. (دی ۱۴۰۰)

● درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های سؤالات ۱۰۲ تا ۱۰۷ را با دلیل بیان کنید.

۱۰۲ . اگر $a \mid 17$ ، آن‌گاه $a \mid 51$

۱۰۳ . اگر $a \mid 24$ ، آن‌گاه $a \mid 6$ یا $a \mid 8$

۱۰۴ . اگر $a \mid 19$ ، آن‌گاه $4a \mid 76$

۱۰۵ . اگر $a \mid 3$ ، آن‌گاه $a \mid 243$

۱۰۶ . از این‌که $a \mid b+c$ ، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a \mid c$ یا $a \mid b$

۱۰۷ . اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $|a| > |b|$ (خرداد ۱۴۰۱)

۱۰۸ . اگر فرض کنیم $ab = cd$ (a ، b ، c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این‌صورت سه رابطهٔ عاد کردن را از این تساوی نتیجه بگیرید.
(مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۱۰۹ . از رابطهٔ $2n^2 - 7n + 4 \mid 1$ چند مقدار طبیعی برای n به‌دست می‌آید؟

۱۱۰ . اگر $a \mid b$ ثابت کنید: $a \mid -b$ ، $-a \mid b$ و $-a \mid -b$ (تمرین ۲ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۱۱۱ . ثابت کنید اگر a عدد b را بشمارد، آن‌گاه b^2 را می‌شمارد و در حالت کلی $(n \in \mathbb{N})$, b^n را می‌شمارد.

آ $a \mid b \Rightarrow a \mid b^2$

ب $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

۱۱۲ . در صورت درست بودن عبارت‌های زیر، آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض برای آن‌ها بیاورید.

آ آیا از این‌که $a \mid bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ چرا؟

ب آیا از این‌که $a \mid b$ و $c \mid d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c \mid b+d$ ؟ چرا؟

۱۱۳ . آیا از این‌که $a \mid b$ می‌توان نتیجه گرفت $ka \mid kb$ ؟ آیا از $ka \mid kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a \mid b$ ؟ $(k \neq 0)$

۱۱۴ . ثابت کنید اگر عدد a ، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد، آن‌گاه a ، عدد c را می‌شمارد. $(a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c)$

۱۱۵ . ثابت کنید هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد. $(a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c)$

آیا عکس این مطلب درست است؟ $(a \mid b \pm c \Rightarrow a \mid b\ ,\ a \mid c)$

۱۱۶ . ویژگی‌های زیر را ثابت کنید:

آ ثابت کنید اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \leq |b|$ $(a\ ,\ b \in \mathbb{Z})$

ب ثابت کنید اگر $a \mid b$ و $b \mid a$ ، آن‌گاه $a = \pm b$

پ اگر $a \mid b$ ، نشان دهید $a^n \mid b^n$ (تمرین ۲ کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

۱۱۷ . اگر عدد طبیعی $a > 1$، در دو شرط $a \mid 4k+9$ و $a \mid 6k+14$ صدق کند، مقدار a را بیابید. (دی ۹۸)

۱۱۸ . اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ در این‌صورت باقی‌مانده تقسیم عدد a^2+b^2+3 را بر ۸ بیابید. (تمرین ۱۰ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی دی ۹۷)

۱۱۹ . اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(6m+5)$ و $(5m+4)$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱۲۰ . اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n \mid 9k+7$ و $n \mid 7k+6$ ، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$. (خرداد ۹۹)

۱۲۱ . اگر عدد طبیعی a، دو عدد $(5k+9)$ و $(8k+13)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = 1$ یا $a = 7$ (شهریور ۱۴۰۱)

۱۲۲ . اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۷۰ که به‌صورت $5n+2$ و $2n-3$ بوده و نسبت به هم اول نیستند را به‌دست آورید.

۱۲۳ . اگر $a > 1$ و $a \mid 4k+5$ و $a \mid 7k+6$ ، ثابت کنید a عددی اول است. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۱۲۴ . اگر $a > 1$ ، $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ، ثابت کنید a عددی اول است. (شهریور ۱۴۰۰)

۱۲۵ . اگر k ای در $\mathbb{Z}$ باشد که داشته باشیم $5 \mid 4k+2$ ، ثابت کنید: $25 \mid 16k^2+36k+14$. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۱۲۶ . اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد، به طوری که $5 \mid 4k+1$ ، ثابت کنید: $25 \mid 16k^2+28k+6$. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۲۷ . اگر $m,n \in \mathbb{Z}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ در این‌صورت ثابت کنید: $m \le n\ ,\ a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^n$. (تمرین ۸ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی – شهریور ۱۴۰۰)

۱۲۸ . اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ ثابت کنید: $ac \mid bd$.

۱۲۹ . اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ نشان دهید که: $a \mid mb \pm nc$.

۱۳۰ . ابتدا نشان دهید که $10!+3$ بر ۳ بخش‌پذیر است و سپس ۹ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اول نباشند؟

یادداشت:

فصل ۱ آشنایی با نظریهٔ اعداد

۱ | عددی مانند $\sqrt{3}+1$ یا $\sqrt{2}+1$

۲ | نادرست

۳ | استنتاجی (اثبات مستقیم)

۴ | درست، زیرا حاصل‌ضرب سه عدد متوالی هم بر عدد ۲ بخش‌پذیر است و هم بر عدد ۳ بخش‌پذیر است، در نتیجه به عدد ۶ بخش‌پذیر است.

۵ | درست، (استدلال استنتاجی)

هر دو عدد فرد $\begin{cases} a=2k+1\\ b=2k'+1\end{cases} \Rightarrow a+b = 2k+1+2k'+1$

$= 2k+2k'+2 = 2(\underbrace{k+k'+1}_{k''}) = 2k''$ عدد زوج

۶ | نادرست، مثال نقض: $2^n-1 \xrightarrow{(n=4)} 2^4-1 = 16-1 = 15$

۱۵ عدد اول نیست.

۷ | نادرست، مثال نقض: $x=0$

۸ | درست

۹ | درست

۱۰ | نادرست، مثال نقض: $n=4$ که $3^4+4=85$ عدد اول نیست.

۱۱ | نادرست، چون $|a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$

۱۲ | نادرست، مثال نقض:

$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=9\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{4+9}\neq\sqrt{4}+\sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{13}\neq 5$

۱۳ | درست، زیرا برای a دو حالت ممکن است، رخ دهد:

حالت اول اگر $a=0$ در این حالت حکم برقرار است، زیرا $a\times b=0$

حالت دوم اگر $a\neq 0$ در این حالت a^{-1} (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab=0$ در a^{-1} داریم:

$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1}\times 0 \Rightarrow b=0$

بنابراین در دو حالت حکم برقرار است.

۱۴ | نادرست، مثال نقض:

$a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$

$\begin{cases}a=-2\\b=1\end{cases} \Rightarrow -2<1 \not\Leftrightarrow (-2)^2<(1)^2$

۱۵ | نادرست، مثال نقض:

دو عدد گنگ $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=-\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow a+b=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}$ عددی گویا

۱۶ | درست، $a=2k+1$ را به‌عنوان یک عدد فرد در نظر می‌گیریم و طرفین را به توان ۲ رسانده و از آن یک واحد کم می‌کنیم، حاصل باید مضرب ۸ باشد.

عدد فرد $a=2k+1 \Rightarrow a^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1$

$=4\underbrace{k(k+1)}_{2k'}=4\times 2k'=8k'$

(دقت کنید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی مضرب ۲ است.

$k(k+1)=2k'$

۱۷ | فرض می‌کنیم که سه عدد زوج متوالی به‌صورت $c=2k+4\ (k\in\mathbb{Z})$ و $b=2k+2$ و $a=2k$ باشد.

$a\times b\times c=(2k)\times(2k+2)\times(2k+4)$

$=2(k)\times 2(k+1)\times 2(k+2)=8\underbrace{(k)(k+1)(k+2)}_{k'}=8k'$

پس حاصل‌ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۱۸ | آ) این حکم نادرست است. زیرا اگر $x=\frac{1}{2}$، آن‌گاه $x^2=\frac{1}{4}<x=\frac{1}{2}$

ب) حکم درست است. زیرا اگر فرض کنیم $2k$ و $2k+2$ دو عدد صحیح زوج متوالی باشند، آن‌گاه:

$2k(2k+2)=2k(2(k+1))=4\underbrace{k(k+1)}_{2k'}=8k',\ k'\in\mathbb{Z}$

۱۹ | فرض کنیم $2k+1$ و $2k'+1$، $(k,k'\in\mathbb{Z})$ دو عدد صحیح فرد باشند، داریم:

$(2k+1)^2+(2k'+1)^2=(4k^2+4k+1)+(4k'^2+4k'+1)$

$=4k^2+4k'^2+4k+4k'+2$

$=2(\underbrace{2k^2+2k'^2+2k+2k'+1}_{k''\in\mathbb{Z}})=2k''$ (عدد زوج)

۲۰ | آ) فرض کنیم دو عدد فرد به‌صورت $2k+1$ و $2k'+1$ باشند $(k,k'\in\mathbb{Z})$. در این‌صورت داریم:

$(2k+1)^2-(2k'+1)^2=(4k^2+4k+1)-(4k'^2+4k'+1)$

$=4(\underbrace{k^2+k-k'^2-k'}_{k''})=4k'',\ k''\in\mathbb{Z}$

ب) فرض کنیم x عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، در این‌صورت:

$x=3k,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x(x+3)=3k(3k+3)$

$=9\underbrace{k(k+1)}_{\text{زوج}}=9(2k')=18k',\ k'\in\mathbb{Z}$

۲۱ | فرض کنیم a، $a+1$ و $a+2$ سه عدد صحیح متوالی باشند، داریم:

$a+(a+1)+(a+2)=3a+3=3\underbrace{(a+1)}_{a'\in\mathbb{Z}}=3a'$

بنابراین حاصل‌جمع سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

۲۲ | از هر دو عدد متوالی یکی زوج است. دو عدد P و $P+1$ متوالی می‌باشند و P زوج نمی‌باشد، (زیرا P اول و $P\geq 5$ است.) بنابراین $P+1$ زوج است. از طرفی از هر سه عدد متوالی یکی مضرب ۳ می‌باشد و P، $P+1$ و $P+2$ سه عدد متوالی می‌باشند و چون P و $P+2$ مضرب ۳ نمی‌باشند، لذا $P+1$ مضرب ۳ است. $P+1$ هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ می‌باشد و در نتیجه مضرب ۶ است.

۲۳ | چهار عدد صحیح متوالی را به ترتیب $k, k+1, k+2, k+3$ در نظر می‌گیریم و حاصل‌ضرب آن‌ها به اضافهٔ یک را می‌نویسیم.

$$(k)(k+1)(k+2)(k+3)+1=(k^2+3k)(k^2+3k+2)+1$$

در هم ضرب می‌کنیم. — در دو جمله ضرب می‌کنیم.

$$=(k^2+3k)^2+2(k^2+3k)+1$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع کامل}} (k^2+3k+1)^2$$ مربع کامل

---

۲۴ | آ) برای اثبات دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول n زوج است. به عبارت دیگر $n=2k\ ,\ (k\in\mathbb{N})$ در این حالت داریم: $n^2+5n-9=(2k)^2+5(2k)-9=4k^2+10k-9$

$$=4k^2+10k-10+1=2(\underbrace{2k^2+5k-5}_{k'})+1=2k'+1$$

که حاصل یک عدد فرد است.

حالت دوم n فرد است. به عبارت دیگر $n=2k-1\ ,\ (k\in\mathbb{N})$ در این حالت داریم: $n^2+5n-9=(2k-1)^2+5(2k-1)-9$

$$=4k^2-4k+1+10k-5-9$$

$$=4k^2+6k-14+1=2(\underbrace{2k^2+3k-7}_{k'})+1=2k'+1$$

باز هم حاصل یک عدد فرد است.

در هر دو حالت n^2+5n-9 یک عدد فرد می‌باشد.

ب) **روش اول** برای اثبات دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول n زوج است. به عبارت دیگر $n=2k\ ,\ (k\in\mathbb{N})$ در این حالت داریم:

$$2n^2+6n-12=2(2k)^2+6(2k)-12$$

$$=8k^2+12k-12=2(\underbrace{4k^2+6k-6}_{k'})=2k'$$

که حاصل یک عدد زوج است.

حالت دوم n فرد است. به عبارت دیگر $n=2k-1\ ,\ (k\in\mathbb{N})$ در این حالت داریم:

$$2n^2+6n-12=2(2k-1)^2+6(2k-1)-12$$

$$=8k^2-8k+2+12k-6-12$$

$$=8k^2+4k-16=2(\underbrace{4k^2+2k-8}_{k'})=2k'$$

باز هم حاصل یک عدد زوج است.

در هر دو حالت $2n^2+6n-12$ یک عدد زوج می‌باشد.

روش دوم توجه کنید که به‌صورت مستقیم هم می‌توانیم اثبات کنیم، برای این کار داریم:

$$2n^2+6n-12=2(\underbrace{n^2+3n-6}_{k})=2k\Rightarrow$$ همواره زوج است.

---

۲۵ | عدد زوج $n=2k(k\in\mathbb{Z})$ را در نظر می‌گیریم.

$$n=2k\Rightarrow n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7$$

$$=4k^2-10k+6+1=2(\underbrace{2k^2-5k+3}_{k'})+1=2k'+1$$

در نتیجه n^2-5n+7 عددی فرد است.

---

۲۶ | هر یک از حالت‌های اعداد مجموعهٔ S را بررسی می‌کنیم:

$\frac{n^2(n+1)^2}{3}$:

$n=1 \longrightarrow \frac{1^2(1+1)^2}{3}=\frac{4}{3}$ زوج نیست.

$n=2 \longrightarrow \frac{2^2(2+1)^2}{3}=\frac{4\times9}{3}=4\times3=12$ زوج است.

$n=3 \longrightarrow \frac{3^2(3+1)^2}{3}=\frac{9\times16}{3}=3\times16=48$ زوج است.

$n=4 \longrightarrow \frac{4^2(4+1)^2}{3}=\frac{16\times25}{3}=\frac{400}{3}$ زوج نیست.

$n=5 \longrightarrow \frac{5^2(5+1)^2}{3}=\frac{25\times36}{3}=25\times12=300$ زوج است.

بنابراین حاصل به ازای اعداد مجموعهٔ A زوج است و $n\in A$ می‌باشد.

---

۲۷ | a و b دو عدد صحیح است و چون ab عددی فرد است، بنابراین هر دو عدد a و b باید فرد باشد. فرض کنیم.

$$a=2k+1\quad(k\in\mathbb{Z})$$

$$b=2k'+1\quad(k\in\mathbb{Z})$$

$$a^2+b^2+4=(2k+1)^2+(2k'+1)^2+4$$

$$=4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1+4$$

$$=4k^2+4k+4k'^2+4k'+6=2(\underbrace{2k^2+2k+2k'^2+2k'+3}_{k''})=2k''$$

بنابراین a^2+b^2+4 یک عدد زوج است.

---

۲۸ | فرض کنیم a یک عدد صحیح فرد باشد، در این‌صورت:

$$a=2m+1\ ,\ m\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=4m(m+1)+1 \qquad (1)$$

$m(m+1)$ حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی است، بنابراین عددی زوج است، پس:

$$m(m+1)=2k \xrightarrow{(1)} a^2=4(2k)+1=8k+1\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

---

۲۹ | فرض کنیم $6q+5$ و $6q'+5$ دو عدد دلخواه باشند، در این‌صورت:

$$(6q+5)(6q'+5)=36qq'+30q+30q'+25$$

$$=(36qq'+30q+30q'+24)+1$$

$$=6(\underbrace{6qq'+5q+5q'+4}_{k})+1=6k+1$$

در واقع ثابت کرده‌ایم که اگر حاصل‌ضرب دو عددی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۶ برابر ۵ است را بر ۶ تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر ۱ می‌شود.

---

۳۰ | بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع اعداد متوالی نوشت. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

$$15=1+2+3+4+5\ ,\ 74=17+18+19+20$$

$$100=18+19+20+21+22$$

اما عدد ۸ را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعداد متوالی نوشت. در واقع عدد ۸ مثال نقضی است که نشان می‌دهد هر عدد طبیعی را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعداد متوالی نوشت.

۳۱ | اگر مثال نقض را $y=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

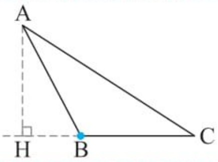
$x+y=-\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۰\in\mathbb{Q}$

$xy=(-\sqrt{۲})(\sqrt{۲})=-۲\in\mathbb{Q}\ ,\ \frac{x}{y}=\frac{-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=-۱\in\mathbb{Q}$

و اگر $x=۱+\sqrt{۲}$ و $y=\sqrt{۲}$ آن‌گاه $x-y=۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۱\in\mathbb{Q}$

---

۳۲ | مثال نقض: در مثلث منفرجه‌الزاویهٔ مقابل، ارتفاع AH خارج مثلث واقع می‌شود:



---

۳۳ | نادرست. $a=۱$ یا $b=۱$ درست است، زیرا:

$(a-۱)(b-۱)=۰\Rightarrow a-۱=۰$ یا $b-۱=۰\Rightarrow a=۱$ یا $b=۱$

پس به عنوان مثال نقض اگر $a=۱$ و $b=۴$ باشد، آن‌گاه:

$(a-۱)(b-۱)=۰$

---

۳۴ | مثال نقض $x=\frac{۱}{۲}$، پس:

$۳^{\frac{۱}{۲}}\ngeq ۳\Rightarrow\sqrt{۳}\ngeq ۳$

---

۳۵ | مثال نقض $x=\sqrt{۲}$ و $y=-۲\sqrt{۲}$،

$\frac{۲x+y}{۲x-y}=\frac{۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}}=\frac{۰}{۴\sqrt{۲}}=۰\in\mathbb{Q}$

---

۳۶ | با قرار دادن $n=۴۱$، عدد $n^۲+n+۴۱$ بر ۴۱ بخش‌پذیر است زیرا $۴۱^۲+۴۱+۴۱=۴۱(۴۱+۱+۱)=۴۳\times۴۱$ (مثال نقض)، بنابراین عدد غیراول می‌باشد. (توجه کنید تمام اعداد طبیعی مضرب ۴۱، مثال نقض خواهند بود.)

---

۳۷ | مثال نقض: اگر $a=\sqrt{۲}$ و $b=\sqrt{۸}$ و $c=\sqrt[۳]{۳}$ باشد، آن‌گاه:

$abc^۳=(\sqrt{۲})(\sqrt{۸})(\sqrt[۳]{۳})^۳=\sqrt{۱۶}\times۳=۴\times۳=۱۲\in\mathbb{Q}$

---

۳۸ | مثال نقض: اگر $R=\frac{۱}{\pi}$ (شعاع دایره) قرار دهیم، آن‌گاه:

محیط دایره $=۲\pi R=۲\pi(\frac{۱}{\pi})=۲\in\mathbb{Q}$

۳۹ | اگر $x=\sqrt{۲}$ و $y=-\sqrt{۲}$، آن‌گاه: $x+y=۰\in\mathbb{Q}$

---

۴۰ | اگر $n=۵$، آن‌گاه عدد $۳^n+۲=۳^۵+۲=۲۴۵$ یک عدد مرکب است (۲۴۵ بر ۵ بخش‌پذیر است).

---

۴۱ | اگر $x=۲$ و $y=۰$، آن‌گاه $xy=۰$ ولی $x\neq۰$

---

۴۲ | اگر $a=c=۲$ و $b=۱$، آن‌گاه $b\sqrt{ac}=۲$ یک عدد گویا است.

---

۴۳ | آ) نادرست است. زیرا طبق مثال نقض $n=۳$ عدد $۲^n+۱=۲^۳+۱=۹$ عددی اول نیست.

ب) درست است، عدد $a=۲k+۱$ را یک عدد فرد در نظر می‌گیریم.

$a=۲k+۱\Rightarrow a^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱$

$=۲\underbrace{(۲k^۲+۲k)}_{k'}+۱\Rightarrow a^۲=۲k'+۱$

مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

---

۴۴ | آ) نادرست است. مثال نقض $x=۲/۱$، در فرض صدق می‌کند ولی در حکم صدق نمی‌کند.

ب) درست است، بنابراین با استفاده از اثبات مستقیم، حکم را ثابت می‌کنیم.

فرض: $x=\frac{a}{b}\ ,\ y=\frac{c}{d}\ (a,b,c,d\in\mathbb{Z}\ ,\ b,d\neq۰)$

$x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\in\mathbb{Q}$

صورت و مخرج کسر عددی صحیح است و $bd\neq۰$ در نتیجه $x+y$ گویا است.

---

۴۵ | آ) نادرست است، زیرا اگر $a=۳$ و $b=۲$، آن‌گاه $a+b=۵$ عدد اول است.

ب) درست است، زیرا اگر $x=۲k+۱$ (عدد فرد) باشد که در آن $k\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه:

$x(x+۲)=(۲k+۱)(۲k+۳)=۴k^۲+\underbrace{۶k+۲k}_{۸k}+۳$

$=۲\underbrace{(۲k^۲+۴k+۱)}_{k'}+۱=۲k'+۱$

بنابراین $x(x+۲)$ یک عدد فرد است.

---

۴۶ | آ) طبق تعریف برهان خلف، در جاهای خالی به ترتیب داریم:

نادرست - درست - غیرممکن (متضاد) - نادرست - درستی

---

۴۷ | طبق برهان خلف، ثابت می‌شود که حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی **گنگ** است.

اثبات: فرض کنیم که a یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $a+x$ یک عدد گنگ است. اگر $a+x$ گنگ نباشد (فرض خلف)، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $a+x$ و a باید عددی گویا باشد، یعنی:

$\cancel{a}+x-\cancel{a}\in\mathbb{Q}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$

که $x\in\mathbb{Q}$ با فرض مسأله تناقض دارد و در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

---

۴۸ | طبق برهان خلف، ثابت می‌شود که حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی **گنگ** است.

اثبات: فرض کنیم a یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی ax عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه‌بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویا است. بنابراین داریم:

$\frac{۱}{\cancel{a}}(\cancel{a}x)\in\mathbb{Q}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$

که با فرض در تناقض است.

۴۹ | طبق تعریف اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (**هم‌ارزش**) می‌نامند.

---

۵۰ | طبق اثبات بازگشتی، ثابت می‌شود که میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها **کم‌تر** نیست.

اثبات: اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود:

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$$

پس:

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\geq ۲\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\geq ۰\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geq ۰$$

این گزاره همیشه درست است.

---

۵۱ | آ) درست است، زیرا اگر n زوج باشد، آن‌گاه $n^۲$ زوج است و اگر $n^۲$ زوج باشد، آن‌گاه n زوج است.

$$n=۲k\Rightarrow n^۲=(۲k)^۲=۴k^۲=۲\underbrace{(۲k^۲)}_{k'}=۲k'$$ زوج

در نتیجه $n^۲$ زوج است.

برای اثبات عکس قضیهٔ شرطی یعنی اگر $n^۲$ زوج باشد، آن‌گاه n زوج است از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

برهان خلف: فرض می‌کنیم که n زوج نباشد، پس n فرد است.

$$n=۲k+۱\Rightarrow n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱$$ فرد

$$=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k}_{k'})+۱=۲k'+۱$$

با فرض تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. بنابراین زوج بودن n و زوج بودن $n^۲$ هم‌ارز هستند.

---

۵۲ | نادرست است. زیرا می‌توانیم برای رد کردن این حکم از مثال نقض استفاده کنیم.

$$\alpha=۱+\sqrt{۲}\ ,\ \beta=۱-\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta=۱+\cancel{\sqrt{۲}}+۱-\cancel{\sqrt{۲}}=۲\in\mathbb{Q}$$ گویا

ولی $\alpha-\beta=۱+\sqrt{۲}-(۱-\sqrt{۲})=\cancel{۱}+\sqrt{۲}-\cancel{۱}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}\notin\mathbb{Q}$

---

۵۳ | درست است، زیرا طبق برهان خلف می‌توانیم ثابت کنیم.

فرض می‌کنیم که $x=۲$ (فرض خلف).

$$x^۳+۲y=۱۰\xrightarrow{x=۲}۲^۳+۲y=۱۰\Rightarrow ۲y=۱۰-۸$$

$$\Rightarrow ۲y=۲\Rightarrow y=\frac{۲}{۲}=۱$$

که با فرض مسأله در تناقض است. فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

---

۵۴ | نادرست است، زیرا طبق اثبات بازگشتی داریم:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}<۲\Leftrightarrow\frac{x^۲+y^۲}{xy}<۲\Leftrightarrow x^۲+y^۲<۲xy\Leftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲<۰$$

$\Leftrightarrow(x-y)^۲<۰$ به ازای هیچ x و y برقرار نیست.

---

۵۵ | نادرست است. زیرا:

$$x^۲+y^۲=(x+y)^۲\Rightarrow x^۲+y^۲=x^۲+۲xy+y^۲$$

$$\Rightarrow ۲xy=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ \text{یا}\\ y=۰\end{cases}$$

پس اعداد صحیح مانند $x=۰$ و $y=۲$ وجود دارد که رابطه برقرار است.

---

۵۶ | ابتدا حکم مسأله را نقیض می‌کنیم. فرض کنیم n فرد باشد، $n=۲k+۱\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$ یک عدد صحیح فرد است (فرض خلف).

$$n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k}_{k'})+۱=۲k'+۱$$

$n^۲$ یک عدد فرد می‌شود که با فرض مسأله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

---

۵۷ | ابتدا حکم مسأله را نقیض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $۳+\sqrt{۵}$ گنگ نباشد یعنی $۳+\sqrt{۵}$ گویا است (فرض خلف). پس آن را به‌صورت کسر گویای زیر در نظر می‌گیریم.

$$۳+\sqrt{۵}=\frac{a}{b}\ ,\ (b\neq ۰)\Rightarrow\underbrace{\sqrt{۵}}_{\text{گنگ}}=\frac{a}{b}-۳=\underbrace{\frac{a-۳b}{b}}_{\text{گویا}}\in\mathbb{Q}$$

به تناقض در یک تساوی رسیدیم، بنابراین فرض خلف باطل و حکم که $۳+\sqrt{۵}$ عدد گنگ است، ثابت می‌شود.

---

۵۸ | ابتدا حکم مسأله را نقیض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $h=f-g$ در $x=a$ پیوسته است (فرض خلف).

$$(f-g)(x)=h(x)$$

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=h(x)\Rightarrow g(x)=f(x)-h(x)$$

تفاضل دو تابع پیوسته نیز پیوسته است. پس:

$$\underbrace{g(x)}_{\text{در } x=a \text{ ناپیوسته}}=\underbrace{f(x)-h(x)}_{\text{در } x=a \text{ پیوسته}}$$

به تناقض در تساوی رسیدیم بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

---

۵۹ | فرض کنیم n فرد نباشد، پس n یک عدد زوج است (فرض خلف)، داریم: $n=۲k\ ,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow ۵n+۳=۵(۲k)+۳=۱۰k+۳$

$$=۲(\underbrace{۵k+۱}_{k'})+۱=۲k'+۱\ ,\ k'\in\mathbb{N}$$

یعنی $۵n+۳$ یک عدد فرد است که با فرض در تناقض است، لذا فرض خلف باطل و حکم صحیح است.

---

۶۰ | فرض کنیم $\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}$ یک عدد گنگ نباشد، پس یک عدد گویا است (فرض خلف)، داریم:

$$\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}=a\ ,\ a\in\mathbb{Q}-\{۰\}\xrightarrow{\text{به توان ۳}}۱+\sqrt{۲}=a^۳$$

$$\Rightarrow\sqrt{۲}=a^۳-۱\Rightarrow$$ عدد گویا = عدد گنگ

(البته می‌دانیم که هر عدد گویا به توان ۳ باز هم گویا است.)

این تناقض (برابری عدد گویا با عدد گنگ) نشان می‌دهد فرض خلف باطل و حکم صحیح است.

۶۱ | فرض کنیم که a یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $a+x$ یک عدد گنگ است.

فرض خلف: فرض کنیم $a+x$ گویا باشد. چون تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است پس $a+x-a \in \mathbb{Q}$ یعنی $x \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس با فرض خلف در تناقض است و حکم ثابت می‌شود.

۶۲ | فرض کنیم $a = ۳\sqrt{۲} + \sqrt{۵}$ عدد گویا باشد (فرض خلف)، داریم:

$$۳\sqrt{۲} + \sqrt{۵} = a \ , \ a \in \mathbb{Q} - \{۰\}$$

$$\Rightarrow ۳\sqrt{۲} = a - \sqrt{۵} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۸ = a^۲ + ۵ - ۲a\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow ۲a\sqrt{۵} = a^۲ - ۱۳ \Rightarrow \sqrt{۵} = \frac{a^۲ - ۱۳}{۲a} \Rightarrow \text{عدد گویا} = \text{عدد گنگ}$$

این تناقض (برابری عدد گویا با عدد گنگ) نشان می‌دهد فرض خلف باطل و حکم صحیح است.

۶۳ | فرض خلف: فرض می‌کنیم $\frac{۱}{x}$ گنگ نباشد پس گویا است. چون می‌دانیم وارون هر عدد گویای ناصفر یک عدد گویا است پس وارون $\frac{۱}{x}$ یعنی x هم یک عدد گویا است. با فرض مسئله به تناقض رسیدیم پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۶۴ | با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم.

اگر $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)(a_۳ - b_۳)$ زوج نباشد، (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل $(a_۱ - b_۱)$ ، $(a_۲ - b_۲)$ و $(a_۳ - b_۳)$ هم باید عدد فرد باشند. (زیرا اگر یک عدد زوج وجود داشته باشد، حاصل‌ضرب زوج می‌شود) و در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید عدد فرد باشد، یعنی $(a_۱ - b_۱) + (a_۲ - b_۲) + (a_۳ - b_۳)$ باید عدد فرد باشد، اما چون اعداد یکسان است و فقط جابجا شده‌اند، مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است و مجموع فرد نمی‌شود. با این تناقض، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۶۵ | برای آن‌که مسأله را بهتر بفهمیم می‌توانیم برای $a_۱$ تا $a_۵$ به ترتیب اعداد ۱ تا ۵ را در نظر بگیریم و برای $b_۱$ تا $b_۵$ به ترتیب اعداد ۲، ۴، ۱، ۵ و ۳ را در نظر بگیریم. داریم:

$$(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)\cdots(a_۵ - b_۵) = (۱-۲)(۲-۴)(۳-۱)(۴-۵)(۵-۳)$$
$$= (-۱)(-۲)(۲)(-۱)(۲) = -۸$$

یک عدد زوج می‌باشد.

اگر $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)(a_۳ - b_۳)(a_۴ - b_۴)(a_۵ - b_۵)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عدد فرد است. پس هر پنج عامل $a_۱ - b_۱$ ، $a_۲ - b_۲$ ، $a_۳ - b_۳$ ، $a_۴ - b_۴$ و $a_۵ - b_۵$ هم باید عدد فرد باشند (زیرا اگر یک عدد زوج وجود داشته باشد، حاصل‌ضرب زوج می‌شود) و در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید عدد فرد باشد، یعنی $(a_۱ - b_۱) + (a_۲ - b_۲) + (a_۳ - b_۳) + (a_۴ - b_۴) + (a_۵ - b_۵)$ باید عدد فرد باشد. اما چون اعداد یکسان است و فقط جابه‌جا شده‌اند مجموع این پنج عبارت صفر است و مجموع فرد نمی‌شود. با این تناقض، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۶۶ | برای اثبات چون به ازای اعداد حقیقی مانند x است بنابراین حداقل یک عدد حقیقی باید به‌دست آوریم.

$$x^۳ < x^۲ \Leftrightarrow x^۳ - x^۲ < ۰ \Leftrightarrow x^۲(x-۱) < ۰$$

x		۰		۱	
$x^۲$	+	۰	+		+
x-۱	−		−	۰	+
	−	۰	−	۰	+

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, ۰) \cup (۰, ۱)$$

و این نامساوی به ازای بازهٔ $(-\infty, ۰) \cup (۰, ۱)$ دارای جواب می‌باشد.

۶۷ | فرض کنیم n مضرب ۵ نباشد (فرض خلف)، در این‌صورت بنابر قضیهٔ تقسیم داریم: $n = ۵q + r \ , \ r \in \{۱,۲,۳,۴\}$

در نتیجه:

$$n^۳ = (۵q + r)^۳ = ۱۲۵q^۳ + ۷۵q^۲r + ۱۵qr^۲ + r^۳$$
$$= ۵(۲۵q^۳ + ۱۵q^۲r + ۳qr^۲) + r^۳$$
$$= ۵q' + r^۳ \ , \ q' \in \mathbb{Z} \ , \ r^۳ \in \{۱,۸,۲۷,۶۴\}$$

هیچ‌یک از $r^۳$ ها مضرب ۵ نمی‌باشند، در نتیجه $n^۳$ مضرب ۵ نمی‌باشد که با فرض مسأله در تناقض است.

با این تناقض معلوم می‌شود که فرض خلف باطل است و در نتیجه حکم درست است، یعنی n مضرب ۵ است.

۶۸ | فرض کنیم نتیجهٔ مطلوب یعنی $AB \neq AC$ درست نباشد (فرض خلف)، بنابراین $AB = AC$ و در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد، بنابراین AD میانهٔ مثلث ABC است و در نتیجه $BD = DC$ ، که با فرض $BD \neq DC$ در تناقض است. بنابراین فرض خلف نادرست است و در نتیجه $AB \neq AC$

۶۹ | فرض کنیم $۲x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ عدد گنگ نباشد، پس یک عدد گویا است (فرض خلف). بنابراین:

$$۲x + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = a \ , \ a \in \mathbb{Q} \Rightarrow ۴x + \sqrt{۳} = ۲a \Rightarrow \underbrace{\sqrt{۳}}_{\text{عدد گنگ}} = \underbrace{۲a - ۴x}_{\text{عدد گویا}}$$

با این تناقض معلوم می‌شود که فرض خلف باطل و در نتیجه حکم درست است.

۷۰ | فرض کنیم $\frac{۱}{\sqrt{۳} + \sqrt{۷}}$ عدد گنگ نباشد، لذا یک عدد گویا است (فرض خلف). بنابراین:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳} + \sqrt{۷}} = a \ , \ a \in \mathbb{Q} \ , \ a \neq ۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳} + \sqrt{۷} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۱}{a} - \sqrt{۷}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} ۳ = ۷ + \frac{۱}{a^۲} - \frac{۲}{a}\sqrt{۷} \Rightarrow \frac{۲}{a}\sqrt{۷} = \frac{۱}{a^۲} + ۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{۷} = \frac{۱}{۲a} + ۲a \Rightarrow \text{عدد گنگ} = \text{عدد گویا}$$

با این تناقض (برابری عدد گویا و عدد گنگ)، معلوم می‌شود که فرض خلف باطل و در نتیجه حکم درست است.

۷۱ فرض کنیم $\log_۲ ۵$ یک عدد گنگ نباشد (فرض خلف)، بنابراین $\log_۲ ۵$ یک عدد گویا است و داریم:

$$\log_۲ ۵ = \frac{a}{b}\ ,\ a, b \in \mathbb{N}$$ ($\log_۲ ۵$ یک عدد مثبت است.)

$$\Rightarrow ۵ = ۲^{\frac{a}{b}} \xrightarrow{\text{به توان } b} ۵^b = ۲^a \quad (a, b \neq ۰)$$

سمت چپ تساوی آخر یک عدد فرد و ۲^a یک عدد زوج است و این دو عدد نمی‌توانند با هم برابر باشند. بنابراین با این تناقض نتیجه می‌شود که فرض خلف باطل و در نتیجه حکم درست است.

۷۲ با توجه به فرض مسأله، α و β دو عدد گنگ هستند و $\alpha + \beta$ گویا می‌باشد. ابتدا فرض می‌کنیم که $\alpha - \beta$ گنگ نیست (فرض خلف). بنابراین $(\alpha - \beta)$ گویا است و می‌دانیم که مجموع دو عدد گویا یک عدد گویا است و $\alpha - \beta$ و $\alpha + \beta$ را با یکدیگر جمع می‌کنیم.

$$(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta) = ۲\alpha$$ گویا است.

با فرض مسأله که α گنگ است به تناقض می‌رسیم بنابراین فرض خلف باطل و حکم که $\alpha - \beta$ گنگ است ثابت می‌شود.

هم‌چنین فرض می‌کنیم که $۲\alpha + \beta$ گنگ نیست یعنی گویا است (فرض خلف). می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است و $\alpha + \beta$ طبق فرض گویا است و $۲\alpha + \beta$ نیز طبق فرض خلف گویا است. پس تفاضل این دو را می‌نویسیم.

$$۲\alpha + \beta - (\alpha + \beta) = ۲\alpha + \cancel{\beta} - \alpha - \cancel{\beta} = \alpha$$ گویا

با فرض مسأله که α گنگ است به تناقض می‌رسیم. بنابراین فرض خلف باطل و حکم که $۲\alpha + \beta$ گنگ است ثابت می‌شود.

۷۳ فرض کنیم n مضرب ۶ نباشد (فرض خلف)، در این‌صورت بنابر قضیهٔ تقسیم داریم: $n = ۶q + r\ ,\ r \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

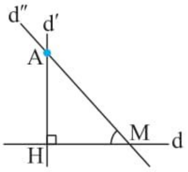
(توجه کنیم که باقی‌ماندهٔ n بر ۶، صفر نیست.)

بنابراین: $$n^۲ = (۶q + r)^۲ = ۳۶q^۲ + ۱۲qr + r^۲ = ۶\underbrace{(۶q^۲ + ۲qr)}_{q'} + r^۲$$

$$= ۶q' + r^۲\ ,\ q' \in \mathbb{Z}$$

که در آن $r^۲ \in \{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵\}$. هیچ‌یک از $r^۲$ها مضرب ۶ نمی‌باشند، بنابراین $n^۲$ مضرب ۶ نمی‌باشد و با فرض مسأله در تناقض است. با این تناقض معلوم می‌شود که فرض خلف باطل است و در نتیجه حکم درست است، یعنی n مضرب ۶ است.

۷۴ آ) خط d و نقطهٔ A را خارج آن در نظر می‌گیریم. فرض کنیم دو خط متمایز d' و d'' از A گذشته و بر d عمود باشند (فرض خلف) و خط d را در نقاط متمایز H و M قطع کنند.



در مثلث AHM داریم:

$$\widehat{A} + \widehat{H} + \widehat{M} = ۱۸۰^\circ + \widehat{A} > ۱۸۰^\circ$$

با این تناقض نتیجه می‌شود فرض خلف باطل و در نتیجه حکم درست بوده است.

ب) **روش اول** فرض کنیم $d \parallel d'$ و $d' \parallel d''$ ولی $d \nparallel d''$ (فرض خلف). دو خط d و d'' موازی نیستند، بنابراین همدیگر را در یک نقطه مانند A قطع می‌کنند. پس از نقطهٔ A دو خط متمایز d و d'' به موازات d' رسم شده است که با اصل توازی (از هر نقطه خارج یک خط، فقط یک خط به موازات خط مفروض می‌توان رسم کرد.) در تناقض است. با این تناقض فرض خلف باطل و در نتیجه حکم درست است.

روش دوم فرض کنیم $d \nparallel d''$ (فرض خلف) بنابراین خط d و d'' متقاطع هستند. چون $d' \parallel d''$ است، پس هر خطی که d'' را قطع کند، خط d' را نیز قطع می‌کند، بنابراین خط d خط d' را نیز قطع می‌کند، چرا که خط d'' را قطع کرده است و این تناقض با فرض $d \parallel d'$ است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۷۵ بله، اگر یکی از اعداد a یا b عدد صفر باشند، به ازای هر عدد صحیح دیگر این تساوی برقرار است.

$$a^۲ + b^۲ = (a - b)^۲ \Leftrightarrow \cancel{a^۲} + \cancel{b^۲} = \cancel{a^۲} - ۲ab + \cancel{b^۲}$$

$$\Rightarrow -۲ab = ۰ \Rightarrow ab = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ \text{یا} \\ b = ۰ \end{cases}$$

۷۶ چون هر دو عدد x و y اعداد حقیقی مثبت است، طرفین نامساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$x + y \geq ۲\sqrt{xy} \Leftrightarrow (x + y)^۲ \geq (۲\sqrt{xy})^۲$$

$$\Leftrightarrow x^۲ + ۲xy + y^۲ \geq ۴xy \Leftrightarrow x^۲ + ۲xy + y^۲ - ۴xy \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow x^۲ - ۲xy + y^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow (x - y)^۲ \geq ۰$$ (بدیهی است.)

۷۷ $$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \xleftrightarrow{a>۰} a^۲ + ۱ \geq ۲a$$

$$\Leftrightarrow a^۲ - ۲a + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (a - ۱)^۲ \geq ۰$$

درستی عبارت بدیهی است.

۷۸ فرض می‌کنیم که حکم درست است پس باید به یک رابطهٔ بدیهی برسیم.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲ \Leftrightarrow \frac{x^۲ + y^۲}{xy} \geq ۲ \xleftrightarrow[xy>۰]{\times xy} x^۲ + y^۲ \geq ۲xy$$

$$\Leftrightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \Leftrightarrow (x - y)^۲ \geq ۰$$ (بدیهی است.)

۷۹ اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشد، برای درستی حکم باید به یک رابطهٔ بدیهی برسیم.

$$\frac{a + b}{۲} \geq \sqrt{ab} \xRightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(\frac{a + b}{۲}\right)^۲ \geq (\sqrt{ab})^۲$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^۲ + b^۲ + ۲ab}{۴} \geq ab \Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + ۲ab \geq ۴ab$$

$$\Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + ۲ab - ۴ab \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow a^۲ + b^۲ - ۲ab \geq ۰ \Leftrightarrow (a - b)^۲ \geq ۰$$ (گزاره همیشه درست)

۸۰ اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، واسطهٔ هندسی $\sqrt{ab}$ و واسطهٔ حسابی $\frac{a+b}{2}$ است. داریم:

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0$$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$ گزاره همیشه درست.

۸۱ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، حکم ما برابر $ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$ خواهد بود.

$$ab \le \frac{a^2+b^2}{2} \xleftrightarrow{\times 2} 2ab\le a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ (بدیهی است.)

۸۲

$$a^2+b^2\ge 2(b-1)\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2b-2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2b+\overbrace{2}^{1+1}\ge 0 \Leftrightarrow a^2+1+b^2-2b+1\ge 0$$

$\Leftrightarrow a^2+1+(b-1)^2\ge 0$ (بدیهی است.)

۸۳

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2=ab\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+ab+b^2=0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4b^2=-3b^2<0\\ \text{ضریب } a^2>0\end{cases}$$

بنابراین، معادله جواب ندارد و هیچ مقدار حقیقی برای تساوی $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ وجود ندارد.

۸۴

$$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab\le\frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4ab\le a^2+b^2+2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$$

درستی عبارت، بدیهی است.

۸۵

$$x^2+y^2+1\ge xy+x+y \xleftrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2\ge 2xy+2x+2y$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\ge 0$$

درستی عبارت بدیهی است.

۸۶

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b} \xleftrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲}} a+b+2\sqrt{ab}\ge a+b$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}\ge 0$$

درستی عبارت بدیهی است.

۸۷

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+xz+yz$$

$$\xleftrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2z^2\ge 2xy+2xz+2yz$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2)\ge 0$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\ge 0$ (بدیهی است.)

آخرین گزاره برقرار است زیرا مجموع مربعات سه عبارت، همواره مثبت یا مساوی صفر است.

۸۸

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\le -2\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{ab}\le -2 \xleftrightarrow{ab<0} a^2+b^2\ge -2ab$$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab\ge 0\Leftrightarrow (a+b)^2\ge 0$ (بدیهی است.)

۸۹

$$x^4+y^4\ge x^3y+xy^3 \Leftrightarrow \underline{x^4}+\underline{\underline{y^4}}-\underline{x^3y}-\underline{\underline{xy^3}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-y)+y^3\underbrace{(y-x)}_{-(x-y)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-y)-y^3(x-y)\ge 0\Leftrightarrow (x^3-y^3)(x-y)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)(x-y)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(x^2+xy+y^2)\ge 0$$

با توجه به این‌که x و $y>0$ است، رابطهٔ بالا بدیهی است.

۹۰

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Leftrightarrow\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}\ge\frac{a+b}{ab}$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)\Leftrightarrow \underline{a^3}+\underline{\underline{b^3}}-\underline{a^2b}-\underline{\underline{ab^2}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)\ge 0\Leftrightarrow a^2(a-b)-b^2(a-b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2)\ge 0\Leftrightarrow (a-b)(a-b)(a+b)\ge 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\ge 0$ a و $b\in\mathbb{R}^+$ بنابراین بدیهی است.

۹۱

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\ge\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}\ge\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\ge 4\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}\ge 4\sqrt{ab}$$

$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$ (بدیهی است.)

۹۲

$$y^2+1\ge 2x(y-x+1)\Leftrightarrow y^2+1\ge 2xy-2x^2+2x$$

$$\Leftrightarrow y^2+1-2xy+2x^2-2x\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-2xy+x^2)+(x^2-2x+1)\ge 0$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2\ge 0$ (بدیهی است.)