



وہاں سے کہیں  
میں پہنچوں  
اور وہاں سے کہیں  
میں پہنچوں



۳ ریاضی

پایہ دوازدهم  
رشته علوم تجربی

مؤلف  
علی اکبر طالبی

فرمولہ  
بیسٹ



# فرمول بسیار

۱۰  
نمونه  
امتحانی

۸۰۰  
پرسش  
تشریحی

۸۰  
صفحه  
درسنامه



۱۰+

ساعت  
فیلم  
آموزشی  
ویژه  
شب  
امتحان



9 786220 306894

تهران، میدان انقلاب  
نیش بازارچه کتاب

[www.gajmarket.com](http://www.gajmarket.com)

## پیشگفتار

### ن و القلم و ما یسطرون

توی سال دوازدهم، اولویت اصلی با تست‌زنی و کاملاً هم کار درستییه، اما خب یه مشکلی وجود داره و چیزی نیست جز امتحان‌های مدارس (نیمسال اول) و امتحان‌های نهایی کشوری (نیمسال دوم)!

مدل و نحوه پاسخگویی به سؤالات تشریحی، کاملاً متفاوت از سؤالات تستیه و تمام کاری که توی این کتاب کردیم، همینه که ابتدا با یک آموزش ساده و کامل روی تمام تکنیک‌های امتحان‌های نهایی مسلط بشین و بعدش با سیل عظیمی از سؤالات تشریحی مواجه میشین.

### در این کتاب...

۱. تمام مطالب کتاب تو درس‌نامه‌ها پوشش داده شده، پس درس‌نامه‌ها رو خوب بخون و تمام مثال‌هاش رو حل کن. در ضمن نکته‌ها و فرمول‌ها رو خوب به خاطر بسپار.
۲. تمام سؤالات امتحانات نهایی رو تو این کتاب گردآوری کردیم تا با نحوه سؤالات امتحان نهایی آشنا بشین.
۳. تمام تمرینات کتاب درسی مشابه‌سازی شده و یا نمونه اون رو به صورت امتحان نهایی آوردیم.
۴. تست‌های با علامت 🌟 ویژه دانش‌آموزان سخت‌کوش می‌باشد.
۵. برای جمع‌بندی و دوره کردن مطالب در شب امتحان، به فیلم‌های آموزشی ویژه شب امتحان که QR-code آن در ابتدای هر فصل اومده، مراجعه کن.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

علی‌اکبر طالبی

## فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سوالات
235 min	۱۱۲	۶ تا ۲۸
152 min	۱۲۸	۲۹ تا ۴۲
45 min	۱۳۸	۴۳ تا ۵۸
80 min	۱۴۵	۵۹ تا ۷۵
50 min	۱۵۷	۷۶ تا ۸۶
38 min	۱۶۶	۸۷ تا ۱۰۴
12 min	۱۷۸	۱۰۵ تا ۱۱۰

فصل اول: تابع

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

فصل چهارم: مشتق

فصل پنجم: کاربرد مشتق

فصل ششم: هندسه

فصل هفتم: احتمال

## امتحان نهایی



بارم‌بندی درس ریاضی ۳		
نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل
۲/۵	۷	اول
۲/۵	۵	دوم
۲/۵	۵	سوم
۱	۳	تا صفحه ۷۶
۳/۵	-	صفحه ۷۷ به بعد
۳	-	چهارم پنجم
۳	-	ششم
۲	-	هفتم
۲۰	۲۰	جمع

۱۸۴	آزمون ۱: شهریور ماه ۱۴۰۰
۱۸۵	آزمون ۲: دی ماه ۱۴۰۰
۱۸۶	آزمون ۳: خرداد ماه ۱۴۰۱
۱۸۷	آزمون ۴: شهریور ماه ۱۴۰۱
۱۸۹	آزمون ۵: دی ماه ۱۴۰۱
۱۹۰	آزمون ۶: خرداد ماه ۱۴۰۲
۱۹۲	آزمون ۷: شهریور ماه ۱۴۰۲
۱۹۳	آزمون ۸: دی ماه ۱۴۰۲
۱۹۵	آزمون ۹: خرداد ماه ۱۴۰۳
۱۹۶	آزمون ۱۰: مرداد ماه ۱۴۰۳
۱۹۸	پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۱۰

1

بخش



# درستامه

و سوالات تشریحی



## فصل اول

# تابع

ریاضی دوازدهم

فیلم  
شب  
امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

بسته ۴



بسته ۲ و ۳



بسته ۱



توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

صفحه ۲ تا ۱۰ کتاب درسی

بسته اول



بسته اول شامل تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع صعودی و نزولی است که معمولاً در امتحان نوبتی به صورت درست یا نادرست و هم‌پنین تکمیل کردن جای خالی، از آن سؤال مطرح می‌شود.

### الف توابع چند جمله‌ای

توابعی را که ضابطه آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطه  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  که در آن  $a_0, a_1, \dots, a_n$  اعداد حقیقی،  $a_n \neq 0$  و  $n \in \mathbb{W}$ ، تابع چندجمله‌ای از درجه  $n$  می‌گوییم.

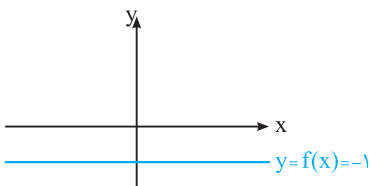
**نکته!** دامنه توابع چندجمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی، یعنی  $\mathbb{R}$  خواهد بود. برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد، همواره برابر  $\mathbb{R}$  است.

**مثال** هریک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنه  $\mathbb{R}$  می‌باشند:  
 $f(x) = 2x^5 - 4x^3 - \frac{1}{2}x + 3$        $g(x) = -3x^2 + 5x + 1$   
 f یک تابع چند جمله‌ای از درجه فرد ۵ است و در نتیجه برد تابع f برابر  $\mathbb{R}$  است.

**یادآوری** با انواع توابع چندجمله‌ای قبلاً آشنا شده‌ایم، تعریف آن‌ها به صورت یادآوری گفته می‌شود:

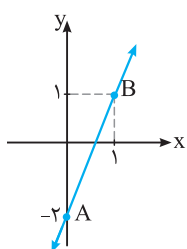
**۱** تابع چندجمله‌ای از درجه صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطه تابع ثابت به صورت  $f(x) = a$  است که در آن a یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به صورت یک خط به موازات محور x ها می‌باشد.

**مثال** نمودار تابع  $f(x) = -1$  به صورت مقابل است:



**۲** تابع چندجمله‌ای از درجه یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطه آن به صورت  $f(x) = ax + b$ ،  $a \neq 0$  می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطه دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.

**مثال** تابع  $f(x) = 3x - 2$  یک تابع دو جمله‌ای از درجه اول است. برای رسم نمودار، دو نقطه دلخواه روی آن مشخص می‌کنیم:



$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0) - 2 = -2 \Rightarrow A(0, -2)$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 3(1) - 2 = 1 \Rightarrow B(1, 1)$$

دو نقطه A و B را روی دستگاه مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم.

**۳** تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ که ضابطه آن به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ،  $a \neq 0$  است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم:

$$S(x = -\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a})$$

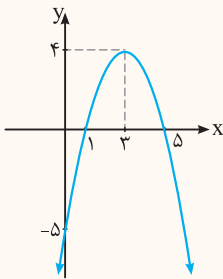
اگر  $a > 0$ ، سهمی رو به بالا و اگر  $a < 0$ ، آن‌گاه سهمی رو به پایین است. در سهمی خط  $x = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است.

**نکته**! برای رسم سهمی می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

**سؤال** نمودار تابع درجه دوم به معادله  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$  را رسم کنید.

**پاسخ** ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3 \Rightarrow y_s = f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$$



حالا مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را نیز به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = -5, \quad y = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 6x + 5 = 0$$

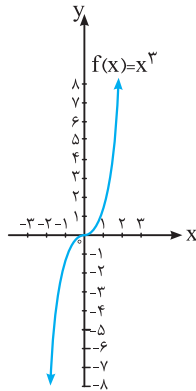
$$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 5$$

	S			
x	0	1	3	5
y	-5	0	4	0

علاوه بر نمودارهایی که تاکنون یاد گرفته‌اید، نمودار  $y = x^3$  را نیز فقط کنید که با توجه به آن و به کمک انتقال و ... نمودارهای دیگری را رسم می‌کنیم.

### تابع درجه ۳

x	f(x) = x <sup>3</sup>
-۲	-۸
-۱	-۱
- $\frac{1}{2}$	- $\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
۱	۱
۲	۸



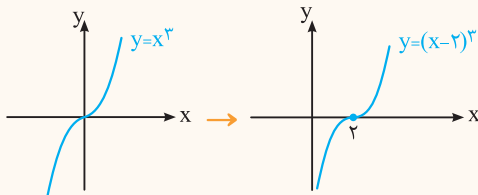
تابع چندجمله‌ای با ضابطه  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ،  $a \neq 0$  یک تابع درجه ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر  $\mathbb{R}$ ، یعنی مجموعه اعداد حقیقی است. نمودار تابع  $y = x^3$  به کمک نقطه یابی به صورت مقابل است:

**نکته**! فقط نمودار توابعی به صورت  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  را می‌توان رسم کرد که با کمک اتحادها به صورت  $y = a(x-b)^3 + c$  نوشته شود. به عنوان مثال، ضابطه تابع  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  به صورت  $y = (x+1)^3$  است و می‌توان نمودار آن را به کمک انتقال رسم کرد.

اگر نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

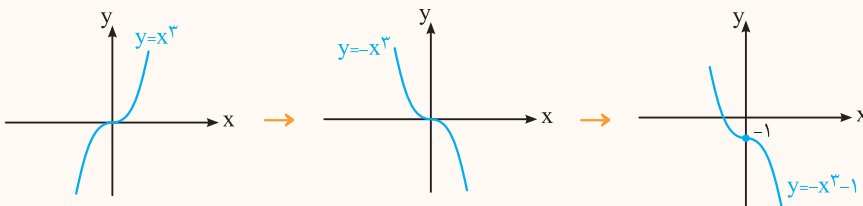
**۱**  $y = -x^3 - 1$

**۲**  $y = (x-2)^3$



**پاسخ ۱** اگر نمودار  $y = x^3$  را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع  $y = (x-2)^3$  به دست می‌آید.

**۲** ابتدا نمودار  $y = x^3$  را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار  $y = -x^3$  به دست آید. با انتقال نمودار  $y = -x^3$  به اندازه یک واحد به سمت پایین، نمودار  $y = -x^3 - 1$  رسم می‌شود:



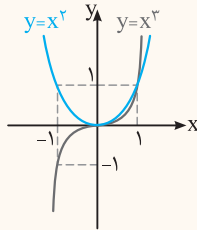
**تنگر: حواست باشه!** مقایسه نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  که در یک بازه، کدام بالاتر و یا پایین تر قرار می‌گیرد، از سؤالات امتحانی است.

**سؤال** نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید که در کدام بازه، نمودار  $y = x^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^3$  قرار می‌گیرد؟

**پاسخ** برای مقایسه نمودار دو تابع، ابتدا نقاطی را که مقدار دو تابع برابر می‌شوند را مشخص می‌کنیم. یعنی باید معادله  $x^2 = x^3$  را حل کنیم:

$$x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1-x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

X	-1	0	1	2
$y = x^2$	1	0	1	4
$y = x^3$	-1	0	1	8



پس دو تابع در دو نقطه با طول های  $x = 1$  و  $x = 0$  برهم منطبق اند.

از دو نقطه کمکی دیگر نیز برای رسم نمودار استفاده می‌کنیم.

نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، در بازه  $(-\infty, 0)$  و  $(0, 1)$ ، نمودار  $y = x^2$  بالاتر از

نمودار  $y = x^3$  قرار دارد و در بازه  $(1, +\infty)$ ، نمودار  $y = x^3$  بالاتر

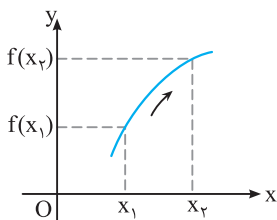
از نمودار  $y = x^2$  قرار دارد.

در این قسمت، تعریف توابع یکنوا و اکیدا یکنوا را یاد می‌گیریم. توابعی را بررسی می‌کنیم که ابتدا نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم و سپس به سؤالات پاسخ می‌دهیم.

## ب توابع اکیدا صعودی و نزولی

فرض کنیم  $A \subseteq D_f$  باشد؛

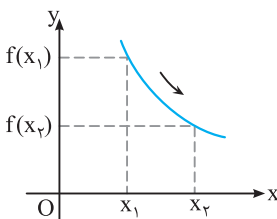
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



**تعریف** می‌گوییم تابع  $f$  روی  $A$  اکیدا صعودی است هرگاه برای هر  $x_1, x_2 \in A$  داشته باشیم:

در نمودار توابع اکیدا صعودی، وقتی روی محور  $x$  ها، از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار همواره در حال بالا رفتن است.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$



**تعریف** می‌گوییم  $f$  روی  $A$  اکیدا نزولی است، هرگاه برای هر  $x_1, x_2 \in A$  داشته باشیم:

در نمودار مقابل، وقتی مقدار  $x$  در دامنه  $f$  افزایش می‌یابد، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد. در واقع نمودار از چپ به راست، در حال پایین آمدن است.

**تعریف** به تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد، تابع اکیدا یکنوا می‌گوییم.

## توابع صعودی و نزولی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

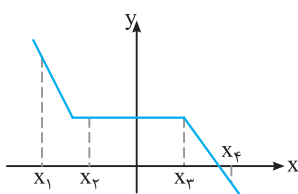
**تعریف** تابع  $f$  روی  $A$  صعودی است اگر و فقط اگر برای هر  $x_1, x_2 \in A$ :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

و تابع  $f$  روی  $A$  نزولی است اگر و تنها اگر برای هر  $x_1, x_2 \in A$ :

**مثال** در نمودار زیر، هر چه مقدار  $x$  در دامنه تابع  $f$  بیش تر می‌شود، مقدار  $y$  یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند. طبق تعریف، تابع  $f$ ، تابعی نزولی است.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$



**تعریف** به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

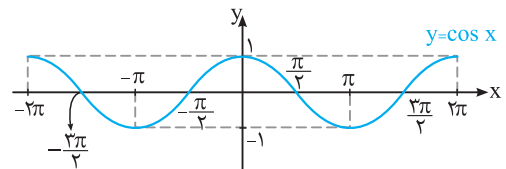
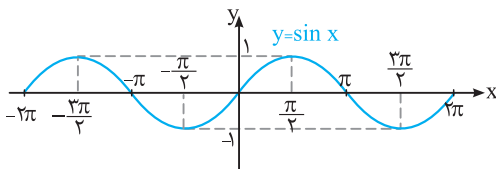
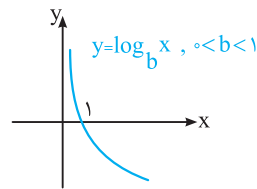
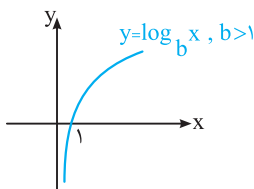
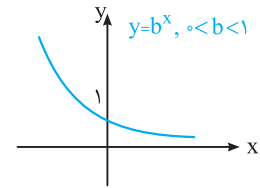
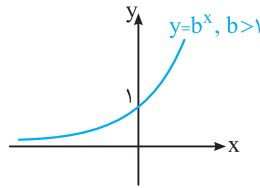
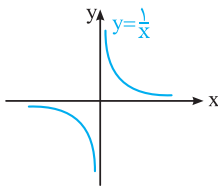
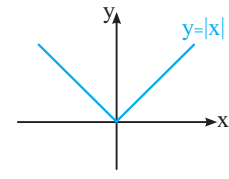
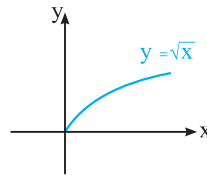
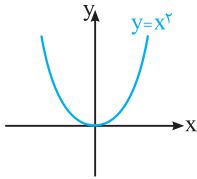
**تنگر: حواست باشه!** تعریف تابع ثابت و این نکته که تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است، در امتحان مطرح می‌شود.



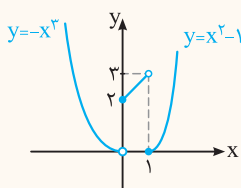
**تعریف** تابع  $f$  را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر  $x$  در این بازه، مقدار  $f$  ثابت باشد.

**نکته** با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود و در نتیجه تابعی یکنوا است.

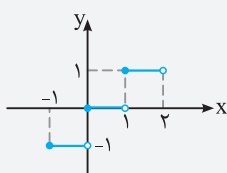
**یادآوری** در این قسمت برخی از نمودارهایی را که باید به عنوان نمودار اصلی حفظ باشیم و از آن‌ها در یکنوایی استفاده کنیم را رسم کرده‌ایم:



**سؤال** نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & 0 \leq x < 1 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$  را رسم کنید و مشخص کنید تابع  $f$  در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است؟



**پاسخ** با رسم سهمی  $y = x^2 - 1$  در بازه  $[1, +\infty)$ ، خط  $y = x + 2$  در بازه  $[0, 1)$  و تابع درجه سوم  $y = -x^3$  در بازه  $(-\infty, 0)$ ، نمودار تابع  $f$  به دست می‌آید.  
باتوجه به نمودار تابع  $f$ ، تابع  $f$  روی بازه  $(-\infty, 0)$ ، تابعی اکیداً نزولی، روی بازه  $[0, 1)$ ، تابعی اکیداً صعودی و در بازه  $[1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً صعودی است. توجه کنید که تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً یکنوا نیست.



**نکته** تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار می‌تواند خطی به موازات محور  $x$ ‌ها باشد.

**مثال** تابع  $y = [x]$  که نمودار آن به صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

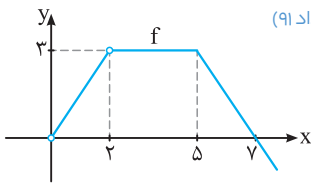
● درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.
۲. دامنه توابع چندجمله‌ای برابر  $\mathbb{R}$  است.
۳. تابع  $y = -x^3 + 2$  در دامنه تعریفش صعودی است.
۴. تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  در دامنه اش اکیداً نزولی است.
۵. تابع  $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$  یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.
۶. برد تابع  $f(x) = 4x^3 + x - 1$  برابر  $\mathbb{R}$  است.
۷. تابع  $y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x$  یک تابع چندجمله‌ای نیست.
۸. تابع  $f(x) = \sin x + 5x$  یک تابع چندجمله‌ای است.
۹. تابع  $f(x) = |x|$  در تمام دامنه اش صعودی است.
۱۰. هر تابع اکیداً یکتوا، یکتوا نیست.
۱۱. تابع  $y = (\frac{1}{4})^x$  در دامنه خود یک تابع اکیداً نزولی است.
۱۲. بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.
۱۳. تابع  $y = \sqrt{2}x - x^2$  یک تابع درجه دوم است.
۱۴. تابع  $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیداً صعودی است.
۱۵. تابع  $y = 2^x - 2$  صعودی است.

- (دی ۹۷، خرداد ۹۹)  
(شهریور ۱۴۰۰)  
(شهریور ۹۸)  
(شهریور ۱۴۰۰)  
(دی ۱۴۰۰)  
(خرداد ۹۹ خارج)  
(دی ۹۹ خارج)  
(خرداد ۹۹ خارج)  
(دی ۹۹ خارج)  
(شهریور ۱۴۰۰ خارج)  
(خرداد ۱۴۰۲)  
(خرداد ۱۴۰۱)  
(خرداد ۱۴۰۱)  
(خرداد ۱۴۰۱ خارج)

● در سؤال‌های ۱۶ تا ۲۲، در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

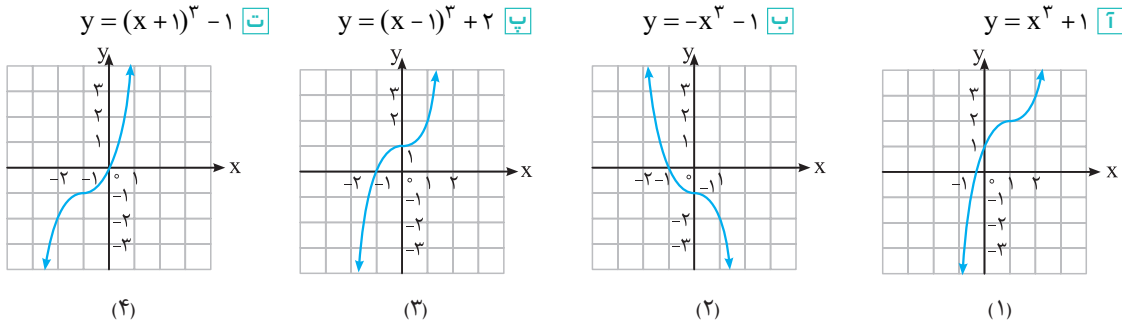
۱۶. توابع اکیداً یکتوا، همواره ..... هستند.
۱۷. در بازه  $(0, 1)$ ، نمودار تابع  $y = x^3$ ، نمودار تابع  $y = x^2$  قرار دارد.
۱۸. تابع  $y = (x + 1)^3$  در دامنه تعریف خود ..... (صعودی - نزولی) است.
۱۹. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع ..... نامیده می‌شود.
۲۰. تابع  $y = 2^x$  در دامنه تعریف خود ..... (اکیداً صعودی - اکیداً نزولی) است.
۲۱. تابع  $f$  با نمودار مقابل در بازه ..... اکیداً صعودی و در بازه ..... اکیداً نزولی و در بازه  $(2, 5]$ ، ..... است. (خرداد ۹۱)



(خرداد ۱۴۰۳)

(مشابه کاردرکلاس صفحه ۵ کتاب درسی)

۲۲. تابع  $g(x) = x^2 - 4x + 5$  در بازه  $(-\infty, a]$  اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار  $a$  برابر ..... است.
۲۳. ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.



(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

● نمودار توابع سؤال‌های ۲۴ تا ۲۸ را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

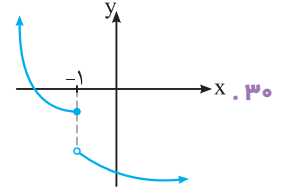
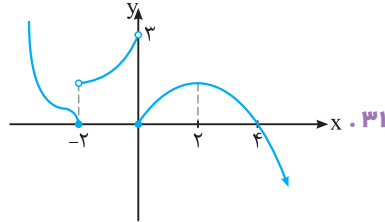
- |  |  |  |
|--|--|--|
| <p>۲۸. <math>y = -(x-1)^3 - 1</math></p> | <p>۲۶. <math>y = (x+2)^3 - 1</math></p> <p>(خرداد ۱۴۰۳) ۲۷. <math>y = (x-2)^3 + 1</math></p> | <p>۲۴. <math>y = x^3 - 1</math></p> <p>۲۵. <math>y = -x^3 - 2</math></p> |
|--|--|--|

۲۹. نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید در کدام بازه، نمودار کدام تابع بالاتر و کدام پایین تر است؟

(فعالیت صفحه ۴ کتاب درسی)

● در هر کدام از توابع سوالات ۳۰ و ۳۱، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند.

(مشابه کاردرکلاس صفحه ۸ کتاب درسی)



۳۲. روی بازه  $[0, 2]$  نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه  $[0, 1]$  اکیداً صعودی و روی بازه  $[1, 2]$  اکیداً نزولی باشد.

۳۳. نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد ولی روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی نباشد. (تمرین ۷ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

(مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۳۴. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

۳۵. ضابطه تابعی را بنویسید که در دامنه خود غیریکتوا باشد.

● نمودار توابع سوالات ۳۶ تا ۴۲ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

۴۰.  $f(x) = -x^3 + 2$

۳۶.  $f(x) = -x^2 + 4x$

۴۱.  $f(x) = x^2 |x|$

۳۷.  $f(x) = x + |x|$

۴۲.  $f(x) = \cos x, x \in [-\pi, 2\pi]$

۳۸.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

۳۹.  $f(x) = \frac{1}{x}$

۴۳. نمودار هر یک از توابع  $y = b^x$  و  $y = \log_b x$  را در حالت‌های  $b > 1$  و  $0 < b < 1$  رسم کنید و در هر حالت نوع یکنوایی تابع را مشخص کنید.

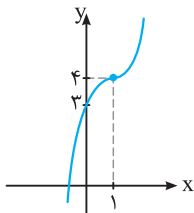
هم چنین با رسم توابع  $y = 2^x - 2$  و  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ ، نوع یکنوایی آن‌ها را مشخص کنید.

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

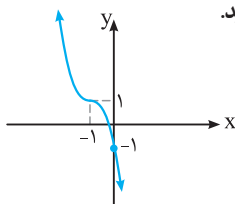
۴۴. تابع  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ -x-1 & x \leq 0 \end{cases}$  در بازه  $(-\infty, a]$  نزولی است. حداکثر مقدار  $a$  چقدر است؟

۴۵. نمودار تابع  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  را رسم کنید.

۴۶. نمودار تابع  $y = a(x-b)^2 + c$  به صورت مقابل است. مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  را مشخص کنید.



۴۷. نمودار تابع  $f(x) = a(x+b)^2 + c$  به صورت مقابل است. اگر  $g(x) = b(x-a)^2 + c$  باشد، مقدار  $g(2)$  را به دست آورید.



۴۸. نمودار  $f(x) = x^3$  را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $g$  حاصل شود.

نمودار توابع  $f$  و  $g$  با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟

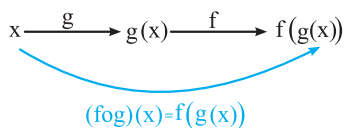




در این قسمت از دو تابع  $f$  و  $g$ ، تابع جدیدی می‌سازیم که به آن ترکیب توابع می‌گوییم. مسائل مهم در این درسنامه به دست آوردن ضابطه تابع مرکب، مقدار عددی و دامنه تابع مرکب با استفاده از تعریف است.

### ترکیب توابع

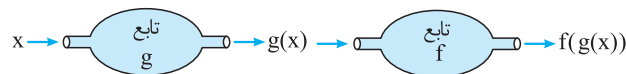
**تعریف** ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  تابعی است که آن را با نماد  $f \circ g$  نشان می‌دهیم (بخوانید اف اچ جی) و به صورت  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  یا  $f \circ g : x \rightarrow f(g(x))$  تعریف می‌کنیم.



نمودار ترکیب دو تابع به صورت مقابل است:

#### مراحل ساخت تابع $f \circ g$ :

- 1  $x$  باید در دامنه  $g$  باشد. در مرحله اول،  $x$  ورودی و  $g(x)$  خروجی است.
- 2  $g(x)$  باید در دامنه  $f$  باشد. در مرحله دوم،  $g(x)$  ورودی و  $f(g(x))$  خروجی است.



**نکته** برای به دست آوردن ضابطه  $(f \circ g)(x)$ ، در تابع  $f$  به جای  $x$  ضابطه  $g(x)$  را قرار می‌دهیم.

**سؤال** اگر  $f(x) = 3x - 2$  و  $g(x) = 4x - 5$  دو تابع باشند، ضابطه هر یک از توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را مشخص کنید.

**پاسخ** اگر در ضابطه تابع  $f$  به جای  $x$ ،  $g(x)$  قرار دهیم، ضابطه تابع  $(f \circ g)(x)$  مشخص می‌شود:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x - 5) = 3(4x - 5) - 2 = 12x - 15 - 2 = 12x - 17$$

هم‌چنین با قرار دادن  $f(x)$  به جای  $x$  در ضابطه تابع  $g$ ، ضابطه تابع  $(g \circ f)(x)$  مشخص می‌شود:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = 4(3x - 2) - 5 = 12x - 8 - 5 = 12x - 13$$

**نکته** همان‌طور که در این سؤال می‌بینیم، ضابطه  $f \circ g$  و  $g \circ f$  لزوماً یکی نیستند. ممکن است در مثال‌هایی  $f \circ g$  و  $g \circ f$  یکسان شوند.

**سؤال** اگر  $f(x) = x^2 - 5x + 2$  و  $g(x) = 2x - 1$  باشند، جواب‌های معادله  $(f \circ g)(x) = -4$  را مشخص کنید. **مشابه تمرین ۹ کتاب درسی**

**پاسخ** ضابطه تابع  $f \circ g$  را به دست می‌آوریم و آن را مساوی  $-4$  قرار می‌دهیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2$$

$$(f \circ g)(x) = -4 \Rightarrow (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2 = -4$$

$$A^2 - 5A + 2 = -4 \Rightarrow A^2 - 5A + 6 = 0 \Rightarrow (A - 2)(A - 3) = 0$$

با فرض  $A = 2x - 1$ ، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

#### تلاش: حواست باشه

اینکه ضابطه دو تابع  $f$  و  $g$  را داشته باشیم و بخواهیم مقدار عددی  $f \circ g$  یا  $g \circ f$  را به دست بیاوریم، در سؤالات امتحان نهایی وجود دارد.

**سؤال** اگر  $f(x) = \sqrt{2x+1}$  و  $g(x) = \frac{x}{x+1}$  دو تابع باشند، مقدار عددی  $(fog)(-3)$  و  $(gof)(4)$  را به دست آورید.

**پاسخ** مقدار عددی  $(fog)(-3)$  برابر  $f(g(-3))$  است. ابتدا مقدار  $g(-3)$  را با قرار دادن عدد  $-3$  به جای  $x$  در ضابطه  $g$  به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow g(-3) = \frac{-3}{-3+1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(g(-3)) = f\left(\frac{3}{2}\right)$$

حال باید در ضابطه  $f$  به جای  $x$ ،  $\frac{3}{2}$  قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow (fog)(-3) = 2$$

برای به دست آوردن مقدار  $(gof)(4)$ ، یعنی  $g(f(4))$  ابتدا مقدار  $f(4)$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f(4) = \sqrt{2 \times 4 + 1} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow g(f(4)) = g(3)$$

حال باید مقدار  $g(3)$  را از ضابطه  $g(x)$  به دست بیاوریم:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow g(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \Rightarrow g(f(4)) = g(3) = \frac{3}{4}$$

**سؤال** اگر  $f = \{(2, -1), (1, 4), (3, 0), (5, 2)\}$  و  $g = \{(4, 2), (3, 1), (2, 1), (1, 6)\}$  دو تابع باشند، هر یک از توابع  $gog$  و  $fog$  را به صورت

**مشابه تمرین 1 کتاب درسی**

مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

**پاسخ** برای مشخص کردن تابع  $fog$ ، ابتدا تابع روی  $g$  اثر می‌کند:

$$\left. \begin{array}{ll} 4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -1 & 3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 \\ (fog)(4) = -1 & (fog)(3) = 4 \\ 2 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 & 1 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} ? \\ (fog)(2) = 4 & (fog)(1) \text{ وجود ندارد} \end{array} \right\} \Rightarrow fog = \{(4, -1), (3, 4), (2, 4)\}$$

برای مشخص کردن تابع  $gog$ ، داریم:

$$(gog)(4) = g(g(4)) = g(2) = 1 \Rightarrow (4, 1) \in gog, (gog)(3) = g(g(3)) = g(1) = 6 \Rightarrow (3, 6) \in gog$$

$$(gog)(2) = g(g(2)) = g(1) = 6 \Rightarrow (2, 6) \in gog, (gog)(1) = g(g(1)) = g(6) \text{ تعریف نشده}$$

$$gog = \{(4, 1), (3, 6), (2, 6)\}$$

بنابراین:

**سؤال** تابع  $h(x) = (x^3 - 1)^2$  را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دوروش).

**پاسخ روش اول** تابع  $y = x^3$  را به عنوان تابع  $g(x)$  در نظر می‌گیریم و با قرار دادن  $x$  به جای  $x^3$ ، تابع حاصل را  $f(x)$  در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^3, f(x) = (x-1)^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3 - 1)^2$$

**روش دوم** تابع  $y = x^3 - 1$  را به عنوان تابع  $g(x)$  در نظر می‌گیریم و با قرار دادن  $x$  به جای  $x^3 - 1$ ، تابع حاصل را  $f(x)$  در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^3 - 1, f(x) = x^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3 - 1) = (x^3 - 1)^2$$

### دامنه تابع مرکب

برای محاسبه دامنه تابع  $gof$  دوروش وجود دارد:

**روش اول** تابع  $gof(x)$  را تشکیل دهیم و دامنه تابع به دست آمده را تعیین کنیم (در این روش نباید ضابطه تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

**سؤال** اگر  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  باشد، دامنه تابع  $fog$  را به دست آورید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2$$

**پاسخ**

$$D_{fog} = [0, +\infty), x \geq 0 \Rightarrow (fog)(x) = x$$

دامنه تابع  $y = (\sqrt{x})^2$  مجموعه  $[0, +\infty)$  است، بنابراین:

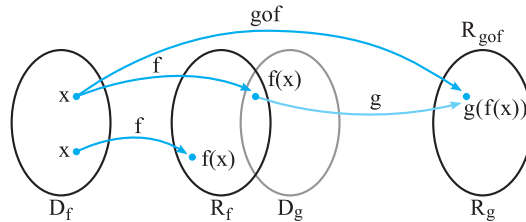
توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای  $(\sqrt{x})^2$ ،  $x$  بنویسیم، ضابطه تابع به صورت  $(fog)(x) = x$  درمی‌آید که دامنه آن برابر  $\mathbb{R}$  خواهد بود.

بنابراین ضروری است که ابتدا دامنه تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

**تلنگر: حواست باشه**

تعیین دامنه ترکیب دو تابع، یکی از سوالات پرتکرار امتحان نهایی است.

**روش دوم** دامنه تابع مرکب  $g \circ f$ ، مجموعه  $x$  هایی است که همزمان در دو شرط زیر صدق کنند:



۱  $x$  در دامنه  $f$  قرار داشته باشد.

۲  $f(x)$  در دامنه  $g$  قرار داشته باشد.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین دامنه تابع  $g \circ f$  را می توان به صورت مقابل نوشت:

**توجه** اگر  $f(x)$  در دامنه تابع  $g$  وجود نداشته باشد، آن گاه مقدار  $g(f(x))$  تعریف نشده است.

**نکته** برای به دست آوردن دامنه تابع  $f \circ g$ :

- ۱ دامنه توابع  $f$  و  $g$  را به دست می آوریم.
- ۲ شرط  $x \in D_f$  را که معمولاً یک نامعادله است، حل می کنیم و جواب آن را به دست می آوریم.
- ۳ باید از دامنه  $g$  و جوابی که از مرحله ۲ به دست می آید اشتراک بگیریم.

**سؤال** اگر  $f(x) = \frac{x-1}{2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-2}$  دو تابع باشند. آن گاه:

۱ دامنه تابع  $g \circ f$  را به کمک تعریف به دست آورید.

۲ مقدار تابع  $f \circ g$  را به ازای  $x = 11$  به دست آورید.

**پاسخ** ۱ دامنه تابع درجه اول  $f$  برابر  $\mathbb{R}$  است. برای به دست آوردن دامنه تابع رادیکالی  $g$ ، داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{2} \geq 2\}$$

طبق تعریف، دامنه تابع  $g \circ f$  به صورت مقابل است:

$$\frac{x-1}{2} \geq 2 \Rightarrow x-1 \geq 4 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} = [5, +\infty)$$

۲ مقدار تابع  $f \circ g$  به ازای  $x = 11$ ، برابر  $f(g(11))$  است:

$$g(x) = \sqrt{x-2} \Rightarrow g(11) = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow f(g(11)) = f(3) = \frac{3-1}{2} = 1$$

**تلنگر: حواست باشه**

یکی از تمرینات کتاب درسی که سؤال امتحان نهایی نیز از آن مطرح شده است، به دست آوردن ضابطه  $g(x)$  با در اختیار داشتن ضابطه توابع  $f(g(x))$  و  $f(x)$  است.

**محاسبه  $g(x)$  با در اختیار داشتن  $f(g(x))$  و  $f(x)$**

اگر  $f(g(x))$  و  $f(x)$  معلوم باشند و  $g(x)$  را بخواهیم، ابتدا از روی ضابطه تابع  $f$ ،  $f(g(x))$  را به دست می آوریم و سپس آن را با ضابطه  $f(g(x))$  داده شده برابر قرار می دهیم و از این تساوی ضابطه  $g(x)$  را تعیین می کنیم.

**مشابه تمرین ۳ کتاب درسی**

**سؤال** اگر  $f(g(x)) = 2x$  و  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  باشد، ضابطه  $g(x)$  را مشخص کنید.

**پاسخ** از ضابطه  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ،  $f(g(x)) = 2x$  را به دست می آوریم:

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-1}, f(g(x)) = 2x \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-1} = \frac{2x}{1}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2xg(x) - 2x \Rightarrow g(x) - 2xg(x) = -2x \Rightarrow g(x)(1-2x) = -2x \Rightarrow g(x) = \frac{-2x}{1-2x}$$



ترکیب توابع

● کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

۴۹. اگر  $f(7) = 5$  و  $g(4) = 7$ ، آن گاه  $(f \circ g)(4) = 5$

۵۰. اگر  $f(x) = 2x - 3$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ، آن گاه  $(f \circ g)(1) = f(1)$

۵۱. اگر  $f(x) = x - 2$  و  $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه تابع  $g \circ f$  تهی است.

۵۲. اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = \sin x$  باشند، آن گاه  $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}$  خواهد بود.

۵۳. اگر  $f$  تابعی با دامنه  $D_f$  و برد  $R_f$  و  $g$  تابعی با دامنه  $D_g$  و برد  $R_g$  باشد، آن گاه شرط تشکیل تابع  $f \circ g$  آن است که  $D_f \cap R_g \neq \emptyset$  باشد.

۵۴. برای دو تابع  $f$  و  $g$  که  $f \neq g$ ، تساوی  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$  هیچ وقت برقرار نیست.

● در سؤالات ۵۵ تا ۵۹، در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۵۵. اگر  $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ ، مقدار  $f \circ f(1)$  برابر ..... است.

۵۶. دامنه تابع ..... برابر  $\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$  است.

۵۷. تابع  $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^2$  به صورت ترکیب دو تابع  $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$  و  $g(x) = \dots$  است.

۵۸. اگر  $f(3) = 7$  و  $g(-1) = 3$  باشد، آن گاه  $(f \circ g)(-1)$  برابر ..... است.

۵۹. اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = 2x - 1$  باشد، آن گاه  $(f \circ g)(5)$  برابر ..... است.

(دی ۱۴۰۲)

(دی ۹۷)

(دی ۱۴۰۱ خارج)

(شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۶۰. اگر  $f = \{(1, 4), (2, 3), (5, -1), (0, 2)\}$  و  $g = \{(4, -2), (-1, 5), (2, 1), (3, 0)\}$  دو تابع باشند، توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۲۲ کتاب درسی)

۶۱. اگر  $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$  و  $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$  توابع  $f \circ g$  را در صورت وجود بنویسید.

(شهریور ۱۴۰۰)

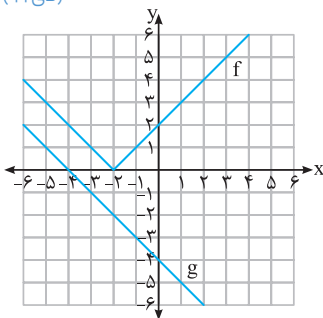
● با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

$x$	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵
$g(x)$	۲	۳	۴	-۲

۶۲.  $(g \circ f)(1)$

۶۳.  $(f \circ (f + g))(0)$

(دی ۹۹)



(مشابه تمرین ۸ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

● با توجه به نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  به دو سؤال زیر پاسخ دهید:

۶۴. مقدار  $f \circ g(-1)$  را محاسبه کنید.

۶۵. اگر  $g(3t - 1) = 0$ ، آن گاه مقدار  $t$  را به دست آورید.

۶۶. با توجه به نمودار توابع  $f$  و  $g$ ، هر یک از مقادیر زیر را به دست آورید.

پ  $(g \circ f)(4)$

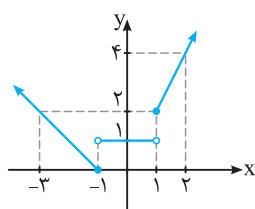
ج  $(g \circ g)(5)$

ب  $(g \circ f)(0)$

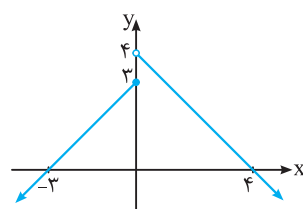
ث  $(f \circ f)(-4)$

ا  $(f \circ g)(2)$

ت  $(f \circ g)(-1)$



نمودار تابع  $g$



نمودار تابع  $f$

● در سوالات ۶۷ و ۶۸، با توجه به ضابطه‌های  $f(x)$  و  $g(x)$ ، معادلات مورد نظر را تشکیل دهید و آن‌ها را حل کنید. (مشابه تمرین ۹ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

۶۷.  $(f \circ g)(x) = -23$ ،  $f(x) = 4x - 1$ ،  $g(x) = 5x + 2$

۶۸.  $(g \circ f)(x) = -1$ ،  $g(x) = 2x + 5$ ،  $f(x) = 3x^2 - 4x - 7$

۶۹. اگر  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(x) = 3x + k$  باشد، مقدار  $k$  را طوری بیابید که  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$  (شهریور ۸۷)

۷۰. توابع  $f(x) = \frac{x+3}{2x}$  و  $g(x) = 3x - 1$  را در نظر بگیرید. دامنه  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف به دست آورید. (دی ۹۷)

● توابع  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$  داده شده‌اند؛ با توجه به آن‌ها به سوالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۴)

۷۱. دامنه تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۷۲. تابع  $g \circ f$  را تشکیل دهید.

● دو تابع  $f(x) = \sqrt{1-x}$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$  را در نظر بگیرید و با توجه به آن‌ها به سوالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۵)

۷۳. دامنه تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۷۴. مقدار  $(g \circ f)(-3)$  را به دست آورید.

● اگر  $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$  و  $g(x) = \sqrt{1-x}$  دو تابع باشند؛ به سوالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۱)

۷۵. دامنه توابع  $f$  و  $g$  را به دست آورید.

۷۶. دامنه تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

۷۷. ضابطه  $f \circ g$  را بنویسید.

● اگر  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = x - 1$ ، آن‌گاه: (خرداد ۱۴۰۲)

۷۸. دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۷۹. ضابطه تابع  $f \circ g$  را بنویسید.

● دو تابع  $g(x) = \frac{3}{x}$  و  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  داده شده‌اند؛ با توجه به آن‌ها به سوالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۸ خارج)

۸۰. ضابطه تابع  $f \circ g$  را بنویسید.

۸۱. دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

● توابع  $f$  و  $g$  با ضابطه‌های  $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  و  $f(x) = \sqrt{x - 6}$  داده شده‌اند؛ با توجه به آن‌ها به سوالات زیر پاسخ دهید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۲۲ کتاب درسی)

۸۲. ضابطه تابع  $g \circ f$  را بنویسید.

۸۳. دامنه تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

● توابع  $f(x) = \sqrt{x-4}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$  داده شده‌اند، با توجه به آن‌ها به سوالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۸)

۸۴. ضابطه تابع  $g \circ f$  را تعیین کنید.

۸۵. دامنه تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف آن به دست آورید.

● اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = 2x^2 - 1$  باشد؛ به سه سؤال زیر پاسخ دهید: (شهریور ۹۸ و ۹۹، خرداد ۱۴۰۰)

۸۶. دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۸۷. مقدار  $(g \circ f)(2)$  را تعیین کنید.

۸۸. ضابطه تابع  $f \circ g$  را بنویسید.

● اگر  $f(x) = x^2 - 5$  و  $g(x) = \sqrt{x+6}$  باشد، دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف به دست آورید. (دی ۹۸)

۹۰. اگر ورودی ماشین زیر ۳ باشد، مقدار خروجی آن چه قدر است؟

$$x \text{ ورودی} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow \text{خروجی}$$

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۲۲ کتاب درسی)

● در سؤالات ۹۱ تا ۹۴ هر یک از توابع را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.

۹۱.  $y = \sqrt[3]{1-2x}$  (خرداد ۱۴۰۱ خارج) ۹۲.  $y = (2x^3 - x^2 + 5)^4$  ۹۳.  $y = \sqrt{x^2 + 3}$  ۹۴.  $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

(خرداد ۹۹ و خرداد ۹۹ خارج)

۹۵. اگر  $f(x) = 3x - 4$  و  $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$  باشد، ضابطه تابع  $g(x)$  را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۲۲ کتاب درسی)

۹۶. اگر  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  باشد، تابع  $g(x)$  را به گونه‌ای مشخص کنید که  $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$

(شهریور ۹۲)

۹۷. اگر  $f(x) = x + a$  و  $g(x) = x^2 + bx$  باشد،  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که داشته باشیم  $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 1$

(شهریور ۸۸)

۹۸. اگر  $f(x) = x + a$  و  $g(x) = ax^2 + bx + c$  باشند،  $a$ ،  $b$  و  $c$  را طوری تعیین کنید که داشته باشیم  $(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 4$

۹۹. اگر  $f(3x + 2) = 9x^2 - 6x$  باشد، ضابطه تابع  $f$  را مشخص کنید.

۱۰۰. اگر  $g(x) = \frac{x-1}{x}$  و  $f(g(x)) = x + 3$  باشد، ضابطه تابع  $f$  را مشخص کنید.

۱۰۱. اگر  $f(x) = \log_7(x-1)$  و  $g(x) = \sqrt{x-4}$  باشد، دامنه تابع  $g \circ f$  را به دست آورید.

۱۰۲. اگر  $f(x) = x - 2$  و  $g(x) = x^2 - 5x + 4$  باشد، روی چه بازه‌ای نمودار تابع  $g \circ f$ ، پایین محور  $x$  ها قرار می‌گیرد؟

۱۰۳. اگر  $f(x) = 2x - \sqrt{x}$  و  $g = \{(1, 5), (6, 3), (2, 6)\}$  دو تابع باشند به طوری که  $g(f(a)) = 3$  باشد، مقدار  $a$  را به دست آورید.

تبدیل نمودار توابع

صفحه ۱۵ تا ۲۳ کتاب درسی

بسته سوم



با رسم نمودار توابع برید به کمک انتقال از روی نمودار برقی از توابع خاص آشنایی دارید. در این بسته ابتدا این مطالب را یادآوری می‌کنیم و سپس رسم‌های بریدری را بیان می‌کنیم. رسم‌های بریدری، رسم نمودار  $y = f(kx)$  از روی نمودار  $y = f(x)$  است.

## الف تغییرات نمودار در راستای محور $y$ ها

فرض کنیم نمودار  $y = f(x)$  را در اختیار داشته باشیم و  $k$  عددی حقیقی و مثبت باشد. اگر نقطه  $A(a, b)$ ، نقطه‌ای روی نمودار  $y = f(x)$  باشد، آن‌گاه نقطه  $A'(a, b + k)$ ، نقطه‌ای روی نمودار تابع  $y = f(x) + k$  می‌باشد. پس برای رسیدن به نقطه  $A'$  از نقطه  $A$ ، کافی است نقطه  $A$  را به اندازه  $k$  واحد به سمت بالا انتقال دهیم. بنابراین:

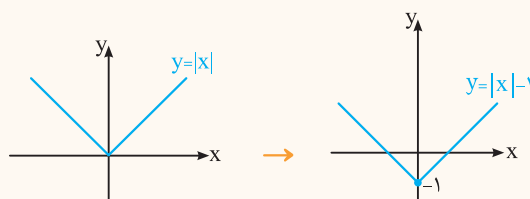
۱. برای رسم نمودار  $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار  $y = f(x)$  را  $k$  واحد در جهت مثبت محور  $y$  ها (به بالا) انتقال دهیم.

به همین ترتیب:

۲. برای رسم نمودار  $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار  $y = f(x)$  را  $k$  واحد در جهت منفی محور  $y$  ها (به پایین) انتقال دهیم.

سؤال نمودار  $y = |x| - 1$  را به کمک انتقال رسم کنید.

پاسخ برای رسم نمودار  $y = |x| - 1$  باید نمودار  $f(x) = |x|$  را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم.





۴  
بخش



پاسخنامه

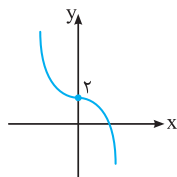
**فصل ۱**  
**تابع**

۱ | درست

۲ | درست

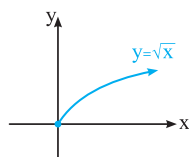
۳ | نادرست

نمودار تابع  $y = -x^2 + 2$  به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع اکیداً نزولی است.



۴ | نادرست

نمودار  $y = \sqrt{x}$  به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع در دامنه‌اش، اکیداً صعودی است.


 ۵ | درست، زیرا بزرگ‌ترین توان  $x$  برابر ۳ است.

۶ | درست

برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد برابر  $\mathbb{R}$  است.  $f$  یک تابع سه‌جمله‌ای از درجه ۳ است و در نتیجه برد آن برابر  $\mathbb{R}$  است.

۷ | نادرست

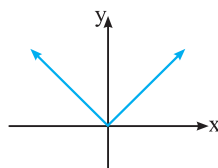
$y$  تابع سه‌جمله‌ای از درجه ۵ است.

۸ | نادرست

عبارت  $\sin x$  در ضابطه تابع چندجمله‌ای وجود ندارد.

۹ | نادرست

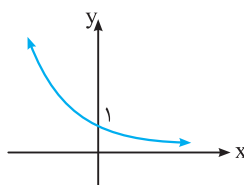
نمودار  $y = |x|$  به صورت مقابل است. تابع در بازه  $[-\infty, 0]$  نزولی و در بازه  $[0, +\infty)$  صعودی است و در نتیجه تابع روی  $\mathbb{R}$ ، یکنوا نیست.



۱۰ | نادرست

۱۱ | درست

نمودار تابع نمایی  $y = (\frac{1}{3})^x$  با توجه به اینکه پایه عددی بین ۰ و یک است، تابعی اکیداً نزولی است.



۱۲ | درست

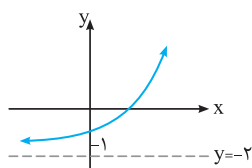
تمام توابع ثابت، جواب می‌باشند. ( $y = 1$ ،  $y = 2$ ، ...)

۱۳ | درست

۱۴ | درست

۱۵ | درست

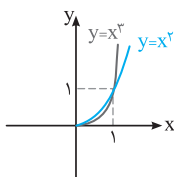
تابع نمایی وقتی که پایه بزرگ‌تر از یک باشد، تابعی اکیداً صعودی است و در نتیجه با انتقال آن به سمت پایین نیز اکیداً صعودی باقی می‌ماند.



۱۶ | یکنوا

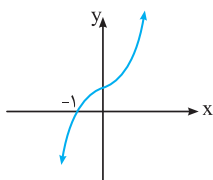
۱۷ | پایین

نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  در بازه  $(0, 1)$  به صورت مقابل است:



۱۸ | صعودی

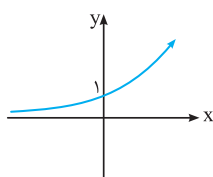
نمودار تابع  $y = (x+1)^3$  به صورت مقابل است:



۱۹ | ثابت

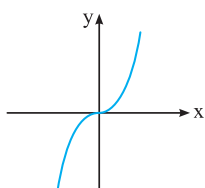
۲۰ | اکیداً صعودی

نمودار تابع  $y = 2^x$  به صورت مقابل است که تابعی اکیداً صعودی است:


 ۲۱ |  $(0, 2)$ ،  $(5, +\infty)$ ، ثابت

۲۲ | ۲

تابع در بازه  $[-\infty, -\frac{b}{2a}]$  نزولی است:  $-\frac{4}{2(1)} = -2 = -\frac{b}{2a}$



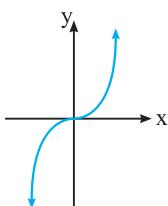
۲۳ | اگر نمودار  $y = x^3$  که به صورت مقابل می‌باشد را به اندازه یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار  $y = x^3 + 1$  به دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال یافته نمودار  $y = x^3$  به اندازه یک واحد به سمت بالا است.

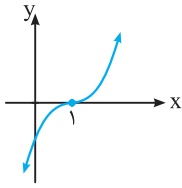
ب) اگر نمودار  $y = x^3$  را ابتدا نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار  $y = -x^3 - 1$  به دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار  $y = -x^3 - 1$  می‌باشد.

پ) اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار  $y = (x-1)^3 + 2$  به دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار  $y = (x-1)^3 + 2$  می‌باشد.

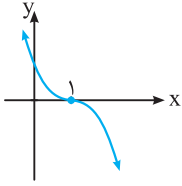
ت) اگر نمودار  $y = x^3$  را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار  $y = (x+1)^3 - 1$  به دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار  $y = (x+1)^3 - 1$  می‌باشد.

• نمودار تابع  $y = x^3$  به صورت مقابل است:

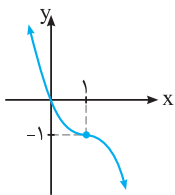




۲۸ | اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار  $y = (x-1)^3$  به دست می‌آید:



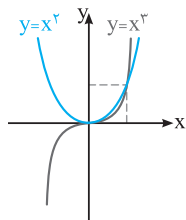
با قرینه کردن نمودار  $y = (x-1)^3$  نسبت به محور  $x$  ها، نمودار  $y = -(x-1)^3$  به دست می‌آید:



نمودار  $y = -(x-1)^3$  را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار  $y = -(x-1)^3 - 1$  به دست آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.

۲۹ | در بازه  $(-\infty, 0)$ ،  $x^2$  عددی مثبت و  $x^3$  عددی منفی است. پس در بازه  $(-\infty, 0)$ ، نمودار  $y = x^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^3$  است. در

$x = 0$  و  $x = 1$  مقدار دو تابع برابرند و در نتیجه دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند. در بازه  $(0, 1)$ ،  $x^2$  بیش‌تر از  $x^3$  است و در نتیجه نمودار  $y = x^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^3$  قرار می‌گیرد و برای  $x \in (1, +\infty)$ ، مقادیر  $x^2$



بیش‌تر از مقادیر  $x^3$  است و در نتیجه نمودار  $y = x^3$  بالاتر از نمودار  $y = x^2$  قرار می‌گیرد. نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:

• فرض کنیم  $A \subseteq D_f$  باشد. تابع  $f$  روی  $A$  اکیداً صعودی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع  $f$  روی  $A$  اکیداً نزولی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع  $f$  روی  $A$  صعودی است، هرگاه:

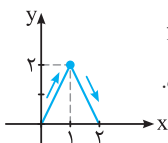
$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع  $f$  روی  $A$  نزولی است، هرگاه:

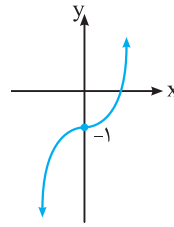
$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

۳۰ | با توجه به شکل و با افزایش  $x$ ، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً نزولی است.

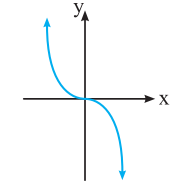
۳۱ | با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های  $(-\infty, -2]$  و  $[2, +\infty)$ ، اکیداً نزولی و در بازه‌های  $(-2, 0)$  و  $[0, 2]$ ، تابعی اکیداً صعودی است.



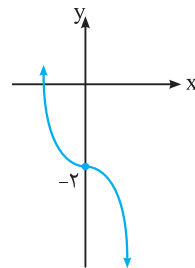
۳۲ | اگر نمودار  $f$  به صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمودار  $f$  در بازه  $[0, 1]$  در حال صعود و در بازه  $[1, 2]$  در حال نزول است.



۲۴ | اگر نمودار  $y = x^3$  را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار  $y = x^3 - 1$  به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.

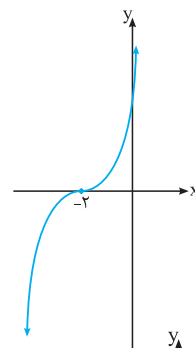


۲۵ | ابتدا نمودار  $y = x^3$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم تا نمودار  $y = -x^3$  به دست آید:

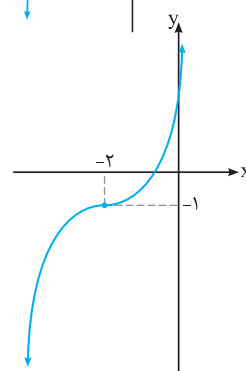


با انتقال نمودار  $y = -x^3$  به اندازه دو واحد به سمت پایین، نمودار  $y = -x^3 - 2$  به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.

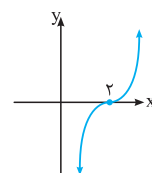
۲۶ | با انتقال نمودار  $y = x^3$  به اندازه ۲ واحد به سمت چپ، نمودار  $y = (x+2)^3$  به دست می‌آید:



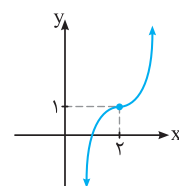
نمودار  $y = (x+2)^3$  را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار  $y = (x+2)^3 - 1$  به دست آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.

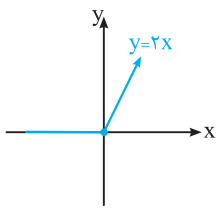


۲۷ | اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار  $y = (x-2)^3$  به دست می‌آید:

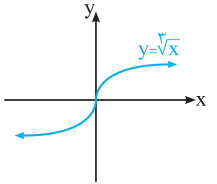


با انتقال نمودار  $y = (x-2)^3$  به اندازه یک واحد به سمت بالا نمودار  $y = (x-2)^3 + 1$  به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  است.

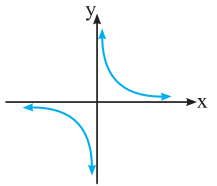




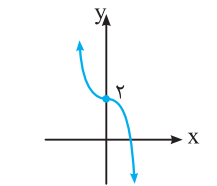
با رسم تابع ثابت  $y = 0$  برای  $x < 0$  و نیم‌خط  $y = 2x$  برای  $x \geq 0$ ، نمودار تابع  $f$  رسم می‌شود: نمودار  $f$  در بازه  $[0, +\infty)$  اکیداً صعودی و در بازه  $(-\infty, 0)$ ، هم صعودی و هم نزولی است ( $f$  تابع ثابت است). تابع  $f$  در بازه  $(-\infty, +\infty)$  صعودی است.



۳۸ | نمودار تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  به صورت مقابل است: با توجه به نمودار، تابع روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی است.



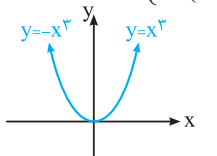
۳۹ | نمودار تابع گویای  $y = \frac{1}{x}$  به صورت مقابل است: تابع در بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً نزولی است. ولی تابع روی  $\mathbb{R}$  غیریکنوا است.



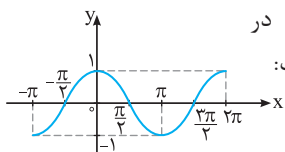
۴۰ | نمودار تابع  $y = -x^3 + 2$  به صورت مقابل است: تابع روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً نزولی است.

۴۱ | ابتدا با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = x^2 |x| = \begin{cases} x^2(x) & x \geq 0 \\ x^2(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$



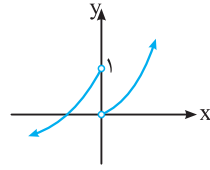
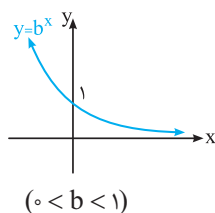
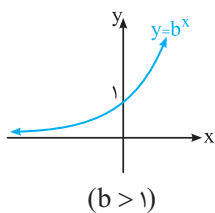
نمودار تابع به صورت مقابل است: تابع در بازه  $(-\infty, 0]$ ، اکیداً نزولی و روی بازه  $[0, +\infty)$ ، اکیداً صعودی است.



۴۲ | نمودار تابع  $f(x) = \cos x$  در بازه  $[-\pi, 2\pi]$  به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های  $[-\pi, 0]$  و  $[\pi, 2\pi]$  اکیداً صعودی و در بازه  $[0, \pi]$ ، اکیداً نزولی است. تابع روی بازه  $[-\pi, 2\pi]$  غیریکنوا است.

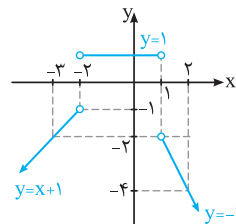
۴۳ | نمودار تابع نمایی  $y = b^x$  به صورت زیر است:



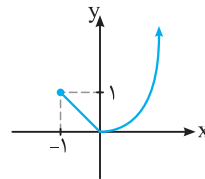
۳۳ | اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، آن‌گاه  $f$  روی بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی است ولی در  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی نمی‌باشد. برای پاسخ به چنین سؤالاتی باید نمودار توابع غیرپیوسته را رسم کنیم.

۳۴ | برای رسم نمودار تابع سه ضابطه‌ای  $f$ ، باید خط  $y = x + 1$  را در محدوده  $(-\infty, -2)$ ، خط  $y = 1$  را در محدوده  $(-2, 1)$  و خط  $y = -2x$  را در محدوده  $(1, +\infty)$  رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

$x$	$-3$	$-2$	$x$	$-2$	$1$	$x$	$1$	$2$
$y = x + 1$	$-2$	$-1$	$y = 1$	$1$	$1$	$y = -2x$	$-2$	$-4$



با توجه به نمودار، تابع در بازه  $(-\infty, -2)$ ، تابعی اکیداً صعودی، در بازه  $(-2, 1)$ ، تابعی ثابت و در بازه  $(1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.



۳۵ | نمودار تابعی را رسم می‌کنیم که ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی باشد و سپس ضابطه آن را می‌نویسیم:

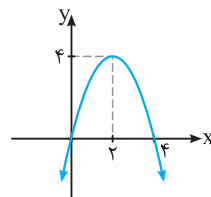
$$\text{ضابطه تابع به صورت } f(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases} \text{ است.}$$

۳۶ | برای رسم نمودار  $y = -x^2 + 4x$ ، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2 \Rightarrow y_S = -(2)^2 + 4(2) = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$



با توجه به نمودار، تابع در بازه  $(-\infty, 2]$  اکیداً صعودی و تابع در بازه  $[2, +\infty)$  اکیداً نزولی است.

۳۷ | با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x + |x| = \begin{cases} x + x & x \geq 0 \\ x + (-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

از طرفی نمودار از نقطه  $(0, 3)$  عبور کرده است، پس مختصات این نقطه در ضابطه  $y = a(x-1)^3 + 4$  صدق می‌کند. بنابراین:

$$3 = a(0-1)^3 + 4 \Rightarrow 3 = -a + 4 \Rightarrow a = 1$$

۴۷ | اگر نمودار  $y = ax^3$  را به اندازه یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازه یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آن‌گاه ضابطه تابع به صورت  $y = a(x+1)^3 + 1$  درمی‌آید:

$$y = a(x+1)^3 + 1 = a(x+b)^3 + c \Rightarrow b=1, c=1$$

$$\Rightarrow y = a(x+1)^3 + 1$$

طبق نمودار، نقطه  $(0, -1)$  روی نمودار تابع قرار دارد، بنابراین مختصات آن در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$-1 = a(0+1)^3 + 1 \Rightarrow a = -2$$

با مقادیر به دست آمده برای  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ، ضابطه تابع  $g$  را می‌نویسیم و سپس مقدار  $g(2)$  را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow g(x) = b(x-a)^3 + c \Rightarrow g(x) = (x+2)^3 + 1$$

$$\Rightarrow g(2) = (2+2)^3 + 1 = 65$$

۴۸ | اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، ضابطه آن به صورت  $y = (x-1)^3$  درمی‌آید. با انتقال نمودار تابع  $y = (x-1)^3$  به اندازه ۷ واحد به سمت بالا، ضابطه تابع  $g$  به صورت  $g(x) = (x-1)^3 + 7$  درمی‌آید. با حل معادله  $f(x) = g(x)$ ، طول نقاط تلاقی نمودار توابع  $f$  و  $g$  مشخص می‌شود:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 = (x-1)^3 + 7$$

$$\Rightarrow x^3 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 7 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

۴۹ | درست، زیرا:  $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$

۵۰ | نادرست است، زیرا:

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(\sqrt{1^2 + 3}) = f(2) = 4 - 3 = 1$$

$$f(1) = 2 - 3 = -1 \Rightarrow (f \circ g)(1) \neq f(1)$$

۵۱ | نادرست

ضابطه تابع  $g \circ f$  به صورت  $(g \circ f)(x) = (x-2)^2 - 1$  می‌باشد و دامنه آن برابر  $\mathbb{R}$  است.

۵۲ | نادرست  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x})$

۵۳ | درست است، زیرا برای آن‌که مقدار  $f(g(x))$  تعریف شده باشد، باید  $g(x)$  در دامنه تابع  $f$  قرار داشته باشد، پس باید داشته باشیم:

$$D_f \cap R_g \neq \emptyset$$

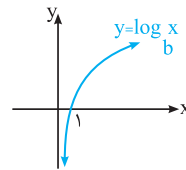
۵۴ | نادرست است، زیرا برای دو تابع نامساوی  $f(x) = 3x - 2$  و  $g(x) = 4x - 3$  داریم:

$$f(g(x)) = f(4x - 3) = 3(4x - 3) - 2 = 12x - 11$$

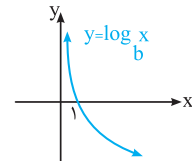
$$g(f(x)) = g(3x - 2) = 4(3x - 2) - 3 = 12x - 11$$

در حالت  $b > 1$ ، تابع  $y = b^x$  اکیداً صعودی و در حالت  $0 < b < 1$ ، تابع  $y = b^x$  اکیداً نزولی است.

نمودار تابع لگاریتمی  $y = \log_b x$  به صورت زیر است:

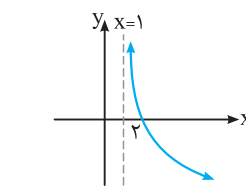
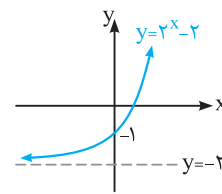


$(b > 1)$



$(0 < b < 1)$

در حالت  $b > 1$ ، تابع  $y = \log_b x$  روی  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی و در حالت  $0 < b < 1$ ، تابع  $y = \log_b x$  تابعی اکیداً نزولی است.



اگر نمودار تابع  $y = 2^x$  را به اندازه دو واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع  $y = 2^x - 2$  به دست می‌آید:

تابع روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی است.

اگر نمودار  $y = \log_{1/2} x$  را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار

$y = \log_{1/2}(x-1)$  به دست می‌آید:

تابع در بازه  $(1, +\infty)$  اکیداً نزولی است.

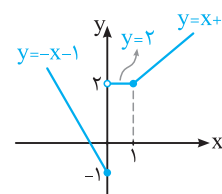
۴۴ | نمودار تابع سه ضابطه‌ای  $f$  را

رسم می‌کنیم. برای رسم، خط  $y = x + 1$

را برای  $x > 1$ ، تابع ثابت  $y = 2$  را برای

$0 < x \leq 1$  و خط  $y = -x - 1$  را برای

$x \leq 0$  رسم می‌کنیم.



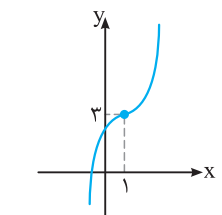
با توجه به نمودار، تابع روی بازه  $(-\infty, 0]$  نزولی است و در نتیجه  $a = 0$  است.

۴۵ | برای رسم نمودار تابع، باید عامل  $(x-a)^3$  را بسازیم. با توجه

به اتحاد مکعب دوجمله‌ای، عبارت  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  برابر  $(x-1)^3$

است. بنابراین:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 3 = (x-1)^3 + 3$$



برای رسم نمودار  $y = (x-1)^3 + 3$ ، باید

نمودار  $y = x^3$  را یک واحد به سمت راست

و سپس ۳ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

نمودار تابع به صورت مقابل درمی‌آید:

۴۶ | اگر نمودار  $y = ax^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست

و سپس به اندازه ۴ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آن‌گاه نمودار

$y = a(x-1)^3 + 4$  به دست می‌آید. بنابراین در ضابطه

$y = a(x-b)^3 + c$ ، مقدار  $b$  برابر یک و مقدار  $c$  برابر ۴ است.



**۵۵ |**  $\frac{1}{3}$ 

 ابتدا مقدار  $f(1)$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

 مقدار  $(f \circ f)(1)$  برابر  $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)$  است. بنابراین داریم:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

**۵۶ |**  $g \circ f$ 

 دامنه تابع  $g \circ f$  بنابر تعریف برابر است با:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

**۵۷ |**  $x^2$ 

 اگر  $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$  و  $g(x) = x^2$  باشد، آن‌گاه:

$$h(x) = g(f(x)) = g(2x^2 - 5x + 1) = (2x^2 - 5x + 1)^2$$

**۵۸ |** ۷

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(3) = 7$$

**۵۹ |** ۳

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(9) = \sqrt{9} = 3$$

**۶۰ |** در تابع  $f \circ g$ ،  $x$  را باید از دامنه تابع  $g$  اختیار کنیم، ابتدا مقدار

 $g(x)$  و سپس مقدار  $f(g(x))$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{تعریف نشده } (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-2) \\ (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(5) = -1 \Rightarrow (-1, -1) \in f \circ g \\ (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 4 \Rightarrow (2, 4) \in f \circ g \\ (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(0) = 2 \Rightarrow (3, 2) \in f \circ g \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(-1, -1), (2, 4), (3, 2)\}$$

 در تابع  $g \circ f$ ،  $x$  را باید از دامنه تابع  $f$  اختیار کنیم. ابتدا مقدار  $f(x)$  و سپس مقدار  $g(f(x))$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 0 \\ (g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(-1) = 5 \\ (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g \circ f = \{(1, -2), (2, 0), (5, 5), (0, 1)\}$$

 در تابع  $g \circ g$ ،  $x$  را باید از دامنه تابع  $g$  اختیار کنیم:

$$\begin{cases} \text{تعریف نشده } (g \circ g)(4) = g(g(4)) = g(-2) \\ \text{تعریف نشده } (g \circ g)(-1) = g(g(-1)) = g(5) \\ \text{تعریف نشده } (g \circ g)(2) = g(g(2)) = g(1) \\ \text{تعریف نشده } (g \circ g)(3) = g(g(3)) = g(0) \end{cases}$$

 بنابراین تابع  $g \circ g$  تشکیل نمی‌شود.

**۶۱ |** مقدار  $f \circ g$  را برای هر یک از مقادیر ۰، ۵، ۳ و -۲ به دست می‌آوریم

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 4 \quad (\text{در صورت وجود})$$

$$(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(9) = 0$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 7$$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(4) = \text{وجود ندارد}$$

$$\Rightarrow g \circ f = \{(0, 4), (5, 0), (3, 7)\}$$

**۶۲ |** طبق تعریف، مقدار  $(g \circ f)(1)$  برابر  $g(f(1))$  است. طبق جدول

 مقدار  $f(1)$  برابر ۲ می‌باشد و در نتیجه:  $g(f(1)) = g(2)$ ، هم‌چنین با

 توجه به جدول، مقدار  $g(2)$  برابر -۲ است و در نتیجه داریم:

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = -2$$

**۶۳ |** طبق تعریف داریم:  $(f \circ (f+g))(0) = f((f+g)(0))$ 

 ابتدا مقدار  $(f+g)(0)$  را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = -1 + 3 = 2$$

$$\Rightarrow f((f+g)(0)) = f(2) = -5$$

**۶۴ |** با توجه به نمودار، مقدار  $g(-1)$  برابر -۳ است.  $g(-1) = -3$ 

 مقدار  $(f \circ g)(-1)$  برابر  $f(g(-1))$  است.  $f(g(-1)) = f(-3) = 1$ 
**۶۵ |** طبق نمودار، مقدار تابع  $g$  در  $x = -4$  برابر صفر است. پس

$$g(-4) = 0$$

$$g(3t-1) = 0 = g(-4) \Rightarrow 3t-1 = -4 \Rightarrow 3t = -4+1$$

$$\Rightarrow 3t = -3 \Rightarrow t = -1$$

**۶۶ |** ضابطه توابع  $f$  و  $g$  را می‌نویسیم.

 ضابطه تابع  $f$ :

 در محدوده  $[-\infty, 0]$ ،  $f$  تابع خطی گذرنده از دو نقطه  $(-3, 0)$  و  $(0, 3)$  است:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = a(0) + b = 3 \Rightarrow b = 3 \\ f(-3) = -3a + b = 0 \xrightarrow{b=3} -3a + 3 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 3$$

 در محدوده  $(0, +\infty)$ ،  $f$  تابع خطی گذرنده از دو نقطه  $(0, 4)$  و  $(4, 0)$ 

 است. ضابطه  $f$  به صورت  $f(x) = -x + 4$  است. بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \leq 0 \\ -x + 4 & x > 0 \end{cases}$$

 ضابطه تابع  $g$ :  $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow g(x) = -x - 1$ 

$$x \in (-1, 1) \Rightarrow g(x) = 1$$

$$x \in [1, +\infty) \Rightarrow g(x) = 2x \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ -x - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

**آ)** مقدار  $(f \circ g)(2)$  با مقدار  $f(g(2))$  برابر است:

$$g(x) = 2x \Rightarrow g(2) = 4 \Rightarrow f(g(2)) = f(4) \xrightarrow{f(x) = -x + 4} 0$$

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(3) \xrightarrow{g(x) = 2x} 6 \quad (\text{ب})$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(0) \xrightarrow{g(x) = 1} 1 \quad (\text{پ})$$

باید شرط  $f(x) \in D_g$  را حل کنیم:

$$f(x) \in D_g \Rightarrow \sin x \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$$

می‌دانیم  $\sin x$  همواره عددی از  $-1$  تا  $1$  است، بنابراین نامساوی  $-1 \leq \sin x \leq 1$  به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  برقرار است. پس داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) \quad | \quad 72$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

$| \quad 73$  طبق تعریف، داریم:

دامنه توابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$

$$f(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{1-x} \in [1, +\infty) \Rightarrow \sqrt{1-x} \geq 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} 1-x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in (-\infty, 1] \mid x \in (-\infty, 0]\} = (-\infty, 0]$$

$| \quad 74$  مقدار  $(g \circ f)(-3)$  با مقدار  $g(f(-3))$  برابر است، داریم:

$$f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow f(-3) = \sqrt{1-(-3)} = 2$$

$$\Rightarrow g(f(-3)) = g(2) = \frac{g(x) = \sqrt{x-1}}{\sqrt{2-1}} = 1$$

$| \quad 75$  یک تابع کسری گویاست و داریم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

دامنه تابع رادیکالی  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \sqrt{1-x}, 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_g = (-\infty, 1]$$

$| \quad 76$  دامنه تابع  $g \circ f$  برابر است با:  $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$$f(x) \in D_g \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3-(x+1)}{x+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} \leq 0$$

برای حل نامعادله، باید  $P = \frac{x-4}{x+1}$  را تعیین علامت کنیم:

$$x-4=0 \Rightarrow x=4, x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

x	-1	4
$\frac{x-4}{x+1}$	-	+
x+1	-	+
$\frac{x-4}{x+1}$	ت ن	+

$$\frac{x-4}{x+1} \leq 0 \Rightarrow x \in (-1, 4]$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} - \{-1\} \mid x \in (-1, 4]\} = (-1, 4]$$

توجه کنید که برای حل نامعادله  $\frac{2x-3}{x+1} \leq 1$ ، نباید طرفین وسطین کنیم.

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = 3 \quad (ت)$$

$$(f \circ f)(-4) = f(f(-4)) = \frac{f(x) = x+2}{f(-1) = -1+2=1} = -1+3=2 \quad (ث)$$

$$(g \circ g)(5) = g(g(5)) = g(10) = 20 \quad (ج)$$

$| \quad 67$  تابع  $f \circ g$  را تشکیل می‌دهیم و آن را با  $-23$  برابر قرار می‌دهیم

و سپس معادله را حل می‌کنیم:  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x+2)$

$$\left. \begin{aligned} f(5x+2) &= 4(5x+2) - 1 = 20x + 7 \\ (f \circ g)(x) &= -23 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 20x = -30 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$| \quad 68$  با استفاده از ضابطه توابع  $f$  و  $g$ ، ضابطه تابع  $(g \circ f)(x)$  را

می‌نویسیم و آن را برابر  $-1$  قرار می‌دهیم و با حل معادله، جواب‌های آن را

به دست می‌آوریم:  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 - 4x - 7)$

$$= 2(3x^2 - 4x - 7) + 5 = 6x^2 - 8x - 9$$

$$(g \circ f)(x) = -1 \Rightarrow 6x^2 - 8x - 9 = -1 \Rightarrow 6x^2 - 8x - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} 3x^2 - 4x - 4 = 0, \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(3)(-4) = 64$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$| \quad 69$  ضابطه توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را به دست می‌آوریم و آن‌ها را مساوی

هم قرار می‌دهیم:  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x) = 2x+k}{f(2x+k)}$

$$\frac{f(x) = 2x+1}{2(2x+k)+1} = 2(2x+k)+1 = 4x+2k+1 \quad (1)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = 2(2x+1)+k = 4x+3+k \quad (2)$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \xrightarrow{(1),(2)} 4x+2k+1 = 4x+3+k$$

$$\Rightarrow 2k - k = 3 - 1 \Rightarrow k = 2$$

$| \quad 70$  دامنه تابع  $f \circ g$  با استفاده از تعریف به صورت

$\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$  است. در مرحله اول باید دامنه توابع  $f$  و  $g$  را به

دست بیاوریم.  $f$  یک تابع کسری گویاست:

$$f(x) = \frac{x+3}{2x}, 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$g$  یک تابع دوجمله‌ای از درجه یک است و در نتیجه:  $(1) D_g = \mathbb{R}$

در مرحله دوم، شرط  $g(x) \in D_f$  را که معمولاً یک نامعادله است، بررسی می‌کنیم:

$$g(x) \in D_f \Rightarrow 3x-1 \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow 3x-1 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3} \quad (2)$$

از اشتراک (1) و (2)، دامنه  $f \circ g$  به دست می‌آید:

$$(1) \cap (2) \Rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$$

$| \quad 71$  طبق تعریف، داریم:

دامنه تابع  $f(x) = \sin x$  برابر  $\mathbb{R}$  است و داریم:

$$g(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه دوم می‌گیریم}} \sqrt{x^2} \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_g = [-1, 1]$$





# فهرمبول

در این کتابچه، سؤالات امتحان نهایی چند سال اخیر، به دقت تیپ بندی شده و درسنامه‌های عالی برای آن ارائه شده است. هم‌چنین توجه ویژه‌ای به مفاهیم و تمرینات کتاب درسی شده و پاسخ‌های کاملا تشریحی منطبق با پاسخ نامه امتحانات نهایی برای سؤالات نوشته ایم. با مطالعه این کتابچه، با آمادگی کامل سر جلسه امتحان حاضر شوید!

تهران، میدان انقلاب  
نیش بازار چه کتاب

[www.gajmarket.com](http://www.gajmarket.com)

# فهرست

فصل اول ۳ تابع

فصل دوم ۲۲ مثلثات

فصل سوم ۳۵ حد در بی نهایت و حد بی نهایت

فصل چهارم ۴۵ مشتق

فصل پنجم ۶۸ کاربرد مشتق

فصل ششم ۸۲ هندسه

فصل هفتم ۱۰۰ احتمال



# فصل تابع

## بسته ۱ توابع چندجمله‌ای

**تیب ۱** جای خالی یا صحیح و غلط از تعریف توابع چندجمله‌ای (تابع درجه سوم) و مفاهیم آن می‌دهند. پس به مفاهیم زیر توجه کنید:

**تابع چندجمله‌ای درجه n:** هر تابع به صورت  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  که در آن  $a_0, a_1, \dots, a_n$  اعداد حقیقی و  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $a_n \neq 0$  است، یک تابع چندجمله‌ای از درجه  $n$  می‌نامیم. دامنه این توابع، مجموعه اعداد حقیقی است. (شهریور ۱۴۰۰)

**مثال** تابع  $y = \sqrt{3}x^3 - \pi x + 1$  یک تابع چندجمله‌ای است. (شهریور ۱۴۰۰)

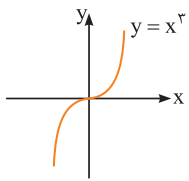
**مثال** تابع  $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$  یک تابع چندجمله‌ای از درجه سوم است. زیرا اگر ضابطه تابع را ساده کنیم به صورت  $y = -6x^3 + 2x + 1$  درمی‌آید. (دی ۱۴۰۱)

### ایستگاه مثال

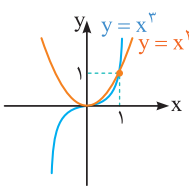
جمله «تابع  $f(x) = x(x^2 - 1)$  یک تابع چندجمله‌ای از درجه دو است» درست است یا نادرست؟  
 پاسخ: نادرست. زیرا:  
 $f(x) = x(x^2 - 1) = x^3 - x \Rightarrow$  تابع چندجمله‌ای از درجه ۳ است.

**نکته** تابع ثابت و تابع خطی مثال‌هایی از توابع چندجمله‌ای و به ترتیب با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

### تابع درجه سوم



تابع چندجمله‌ای  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ) یک تابع درجه ۳ است که دامنه و برد آن  $\mathbb{R}$  است و نمودار مهم‌ترین آن‌ها یعنی  $y = x^3$  به صورت مقابل است:



**نکته** مقایسه رفتار تابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$ :  
 با توجه به نمودار مقابل، در بازه‌های  $x < 0$  و  $0 < x < 1$  نمودار  $y = x^2$  بالاتر از  $y = x^3$  و در بازه  $x > 1$  نمودار  $y = x^3$  بالاتر از  $y = x^2$  قرار دارد.

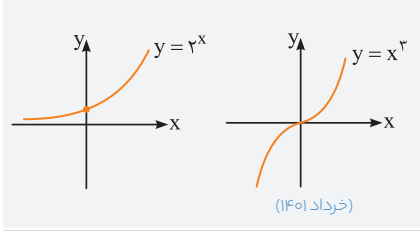
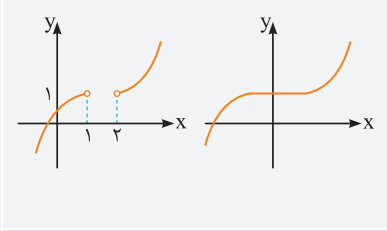
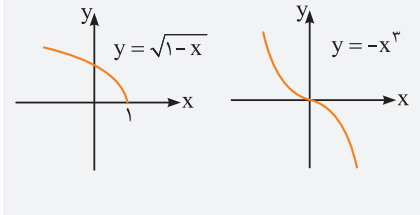
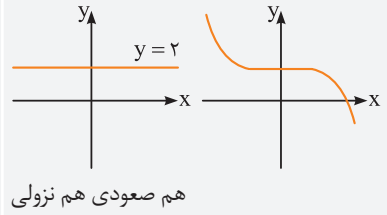
### ایستگاه مثال

آیا نمودار تابع  $y = x^2$  در بازه  $(0, 1)$  پایین‌تر از نمودار تابع  $y = x^3$  است؟  
 پاسخ: با توجه به نکته فوق جواب «خیر» است. (دی ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۱)

توجه ۱ جای خالی یا صحیح و غلط از مفاهیم صعودی و نزولی می‌دهند. پس نکات زیر را خوب به خاطر بسپارید.

تعریف

اگر  $x_2 > x_1$  داشته باشیم:

$f(x_2) > f(x_1)$ ، آن‌گاه $f$ اکیداً صعودی است.	$f(x_2) \geq f(x_1)$ ، آن‌گاه $f$ صعودی است.
مثلاً:  (خرداد ۱۴۰۱)	مثلاً: 
$f(x_2) < f(x_1)$ ، آن‌گاه $f$ اکیداً نزولی است.	$f(x_2) \leq f(x_1)$ ، آن‌گاه $f$ نزولی است.
مثلاً: 	مثلاً:  هم صعودی هم نزولی

۱ به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

۲ به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

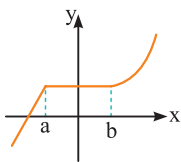
(دی ۹۹ خارج)

۳ توابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوا هستند.

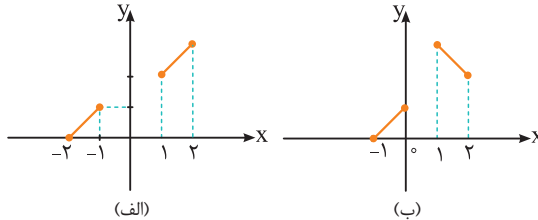
۴ توابع یکنوا، همواره اکیداً یکنوا نمی‌باشند! مثلاً نمودار روبه‌رو صعودی بوده لذا یکنوا است. اما چون در بازه  $[a, b]$ ، مقدار تابع ثابت است، پس این تابع اکیداً یکنوا نمی‌باشد. پس توابع یکنوا ممکن است اکیداً یکنوا باشند، شاید هم نباشند.

۵ توابع ثابت،  $f(x) = a$  در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی هستند. چون  $a$  هر عدد حقیقی می‌تواند باشد، لذا بی‌شمار تابع ثابت و در نتیجه بی‌شمار تابع هم صعودی و هم نزولی داریم.

(خرداد ۹۹ و ۱۴۰۲)



- ۶ هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک است. (شهریور ۹۹) ولی توابع یکنوا ممکن است یک به یک باشند، شاید هم یک به یک نباشند! پس جمله «هر تابع یکنوا، یک به یک است» غلط است. (دی ۱۴۰۱)
- ۷ توابع یک به یک، ممکن است اکیداً یکنوا باشند، شاید هم اکیداً یکنوا نباشند. مثلاً در شکل (الف) تابع یک به یک بوده و اکیداً یکنوا است ولی در شکل (ب) تابع یک به یک بوده ولی اکیداً یکنوا نمی باشد:



### ایستگاه مثال

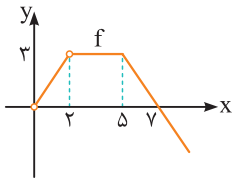
جمله «هر تابع یک به یک، اکیداً یکنواست.» درست است یا نادرست؟ (خرداد خارج ۱۴۰۳)

پاسخ با توجه به نکته (۷) نادرست است.

تمرین ۲ نمودار  $f$  را می دهند و از ما می خواهند صعودی یا نزولی بودن  $f$  را با توجه به نمودار آن بررسی کنیم.

روش حل با توجه به نمودار، بزرگ ترین بازه مورد نظر را از جهت صعودی یا نزولی بودن می نویسیم.

مثال در نمودار مقابل  $f$  در بازه  $(0, 2)$  اکیداً صعودی و در بازه  $[5, +\infty)$  اکیداً نزولی و در بازه  $(2, 5)$  ثابت (هم صعودی و هم نزولی) است. (خرداد ۹۱)



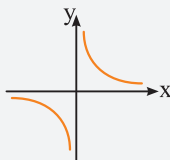
تمرین ۳ ضابطه  $f$  را می دهند و از ما می خواهند صعودی یا نزولی بودن  $f$  را بررسی کنیم.

روش حل با توجه به ضابطه  $f$ ، نمودار را رسم کرده و با توجه به نمودار، صعودی یا نزولی بودن  $f$  در بازه های مختلف را بررسی می کنیم.

### ایستگاه مثال

(شهریور ۱۴۰۲)

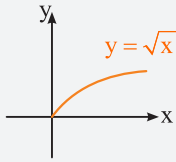
۱. آیا  $y = \frac{1}{x}$  در دامنه اش یکنوا است؟



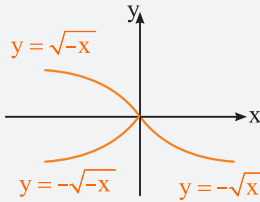
پاسخ خیر، نمودار  $y = \frac{1}{x}$  به صورت مقابل است. با این که تابع در بازه های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  نزولی و لذا در این بازه ها یکنوا است ولی در کل دامنه اش نه صعودی و نه نزولی بوده و یکنوا نمی باشد!

(شهریور ۱۴۰۰)

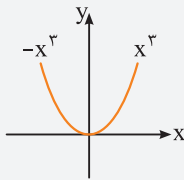
۲. آیا  $y = \sqrt{x}$  در دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟



**پاسخ** خیر، با توجه به نمودار زیر، این تابع اکیداً صعودی است. نمودارهای مهم زیر را به خاطر داشته باشید.



(کتاب درسی)



۳. تابع  $y = x^2 |x|$  در بازه  $(-\infty, a]$  نزولی است. حداکثر  $a$  را بیابید.

**پاسخ** با توجه به حضور قدرمطلق، تابع دوضابطه‌ای به صورت

$$y = \begin{cases} x^2(x) = x^3 & ; x \geq 0 \\ x^2(-x) = -x^3 & ; x < 0 \end{cases}$$

می‌شود. آن را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل مشخص است که تابع در بازه  $(-\infty, a]$  که حداکثر  $a$  برابر است، نزولی می‌باشد.

۴. تابع  $g(x) = x^2 - 4x + 5$  در بازه  $(-\infty, a]$  اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار  $a$  برابر

(خرداد ۱۴۰۳)

..... است.

**پاسخ** طول رأس سهمی  $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$  است و چون  $a = 1 > 0$  است.

دهانه سهمی رو به بالا است. پس نمودار آن به صورت است. با توجه به شکل، سهمی در هر

بازه‌ای به صورت  $(-\infty, a]$  با شرط  $a \leq 2$  نزولی است. پس حداکثر  $a$ ، همان طول رأس سهمی یعنی  $a = 2$  است. دقت کنید به محض اینکه  $a > 2$  شود، تابع غیر یکنوا می‌شود!

**بسته ۳**  
**ترکیب توابع**

**تمرین ۱** محاسبه  $fof$  که  $f$  و  $g$  به صورت زوج مرتبی هستند.

**روش حل** ابتدا تابع داخلی  $(g)$  را به صورت فلشی می‌نویسیم و سپس تابع خارجی  $(f)$  را به صورت فلشی می‌نویسیم. سپس نگاه می‌کنیم اعداد یکسان که انتهای فلش  $g$  و ابتدای فلش  $f$  هستند را به هم وصل می‌کنیم. حال اولین عدد و آخرین عدد در هر سطر را به‌عنوان زوج مرتب می‌نویسیم.

ایستگاه مثال

۱. اگر  $f(v) = 5$  و  $g(f) = 7$ ، آن‌گاه  $fog(f)$  چقدر می‌شود؟ (دی ۱۴۰۰)

پاسخ ابتدا تابع داخلی (g) و سپس تابع خارجی (f) را به صورت فلشی می‌نویسیم:

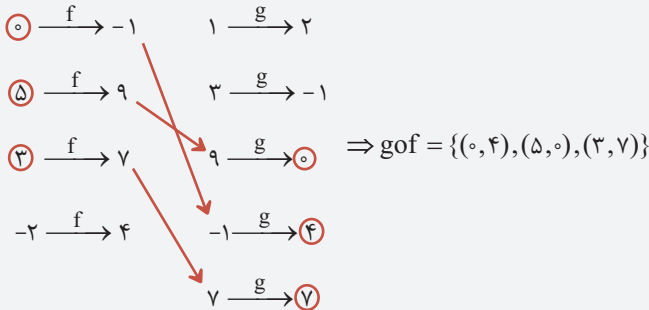
$$4 \xrightarrow{g} (7 \rightarrow 7) \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow f(g(4)) = f(7) = 5$$

جواب

۲. اگر  $f = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$  و  $g = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$

تابع  $gof$  را در صورت وجود بنویسید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ ابتدا تابع داخلی (f) و سپس تابع خارجی (g) را به صورت فلشی می‌نویسیم:



توجه ۲ محاسبه  $fog(a)$  که f و g به صورت ضابطه‌ای داده شده است.

روش حل ابتدا a را وارد تابع g می‌کنیم و جواب آن (یعنی  $g(a)$ ) را وارد تابع f می‌کنیم. به

همین راحتی!

ایستگاه مثال

۱. اگر  $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$  باشد، مقدار  $f(f(1))$  برابر ..... است. (دی ۱۴۰۳)

پاسخ ابتدا  $x = 1$  را وارد تابع f کرده و جوابش را مجدداً وارد تابع f می‌کنیم.

$$x = 1 \xrightarrow[\text{می شود}]{f \text{ وارد}} f(1) = \frac{|1|}{1+|1|} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{می شود}]{\text{مجدداً } f \text{ وارد}} \frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{1+\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

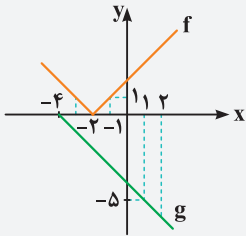
۲. اگر  $f(x) = \sqrt{x-4}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$  باشد، مقدار  $(gof)(13)$  را بیابید. (خرداد ۹۸)

پاسخ

$$x = 13 \xrightarrow[\text{می شود}]{f \text{ وارد}} \sqrt{13-4} = \sqrt{9} = 3 \xrightarrow[\text{می شود}]{g \text{ وارد}} \frac{1}{3^2-1} = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8}$$



ایستگاه مثال



(دی ۱۴۰۰)

حاصل  $g \circ f(-1)$  را با توجه به نمودار بیابید.

پاسخ

$$g(f(-1)) \stackrel{\text{نمودار } (-1,1) \in f}{=} g(1) \stackrel{\text{نمودار } (1,-5) \in g}{=} -5$$

تیم ۴ محاسبه ضابطه توابع fog و gof و دامنه آن‌ها از روی ضابطه f و g

روش حل الف. محاسبه دامنه: توابع f و g را به ما می‌دهند. ابتدا دامنه f و g را حساب کرده

و سپس طبق تعاریف زیر، دامنه تابع خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$D_{fog} = \underbrace{\{x \in D_g, g(x) \in D_f\}}_{\text{قسمت اول}} \quad D_{gof} = \underbrace{\{x \in D_f, f(x) \in D_g\}}_{\text{قسمت دوم}}$$

تذکر در قسمت دوم دامنه fog یا gof، باید با توجه به ضابطه f و g، یک معادله یا

نامعادله یا ... حل کنید و جوابش را با قسمت اول دامنه، اشتراک بگیرید.

ب. محاسبه ضابطه: برای پیدا کردن ضابطه fog، کافی است در تابع f به جای xها، g(x) قرار دهیم.

به طور مشابه برای پیدا کردن ضابطه gof، کافی است در تابع g به جای xها، f(x) را قرار دهیم.

ایستگاه مثال

(خرداد ۱۴۰۲)

اگر  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = x-1$ ، آن‌گاه:

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.

پاسخ الف)

زیر رادیکال

$$D_f : x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

مرحله (۱): دامنه f و g برابر است با:

$$D_g = \mathbb{R}$$

مرحله (۲): جای‌گذاری در فرمول

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}, \underbrace{x-1}_{g(x)} \geq -1 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} x \geq 0\} \Rightarrow D_{fog} = [0, +\infty)$$

اشتراک

ب) در تابع f، به جای xها، g(x) قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{g(x)+1} \stackrel{g(x)=x-1}{=} \sqrt{(x-1)+1} = \sqrt{x}$$