



برفروش ترین
کتاب های
مقدماتی

فرمول
بیست

هندسه ۳

پایه دوازدهم
رشته ریاضی و فیزیک

مؤلف

آرش عمید

فرمول
بیست

سلام

در این کتاب به شما یاد داده‌ام که چه مطالبی را برای شرکت در امتحانات تشریحی باید بدانیم تا مفاهیم و نکات خاصی که برای شرکت در کنکور سراسری بلدید را با خود سر جلسه نبرید و از آن‌ها در پاسخ‌گویی استفاده نکنید. این کار را با ارائه بسته‌های آموزشی مفید، مختصر و مهندسی‌شده انجام داده‌ام.

در انتهای هر بسته آموزشی، تعداد زیادی سؤال که از نظر تعداد و درجه سختی متناسب با مطالب آن بسته و امتحانات تشریحی است آورده‌ام. با حل این سؤالات آمادگی لازم برای کسب نمره ۲۰ در هر آزمون تشریحی را کسب می‌کنید. زیرا تمام تمرینات، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌های کتاب درسی و تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم را پوشش داده‌ام. هم‌چنین تمام تمرینات کتاب درسی در یک ضمیمه رایگان در اختیار شما قرار گرفته است. پاسخ تشریحی سؤالات هم به گونه‌ای است که قابل فهم، خودآموز و راهگشا باشد.

پاسخ	درسنامه و سؤالات	فصل اول: ماتریس و کاربردها
۱۴۶	۵۴ تا ۱۰	فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی
۱۷۸	۱۱۱ تا ۵۵	فصل سوم: بردارها
۲۱۹	۱۴۳ تا ۱۱۲	

امتحان نهایی



۲۴۰	آزمون ۱: خرداد ماه ۱۴۰۲
۲۴۱	آزمون ۲: شهریور ماه ۱۴۰۲
۲۴۲	آزمون ۳: دی ماه ۱۴۰۲
۲۴۳	آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۳
۲۴۵	آزمون ۵: مرداد ماه ۱۴۰۳
۲۴۶	آزمون ۶: دی ماه ۱۴۰۳
۲۴۸	آزمون ۷: خرداد ماه ۱۴۰۴
۲۴۹	آزمون ۸: شهریور ماه ۱۴۰۴
۲۵۱	پاسخ نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۸

بارم بندی درس هندسه ۳

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۱۰	۵
دوم	۱۰	۴
	-	۴
سوم	-	۷
جمع	۲۰	۲۰



مدرسہ
اینٹرنی
گاج

گاج لایو

فصل



جلسه

۲

درس ۱

سؤالات
۷۰ تا ۲۵



جلسه

۱

درس ۱

سؤالات
۲۴ تا ۱



جلسه

۱۴

درس ۱

سؤالات
۱۳۱ تا ۹۰



جلسه

۳

درس ۱

سؤالات
۸۹ تا ۷۱



جلسه

۶

درس ۱

سؤالات
۱۶۲ تا ۱۹۹



جلسه

۵

درس ۱

سؤالات
۱۶۱ تا ۱۳۲



جلسه

۸

درس ۲

سؤالات
۲۷۰ تا ۲۳۷



جلسه

۷

درس ۲

سؤالات
۲۳۶ تا ۲۰۰



جلسه

۱۵

درس ۲

سؤالات
۳۰۱ تا ۳۲۳



جلسه

۹

درس ۲

سؤالات
۲۷۱ تا ۳۰۰



جلسه

۱۲

درس ۲

سؤالات
۳۵۶ تا ۳۷۳



جلسه

۱۱

درس ۲

سؤالات
۳۳۴ تا ۳۵۵



جلسه

۱۳

درس ۲

سؤالات
۳۷۴ تا ۳۹۵



جلسه

۲

درس ۲

سؤالات
۴۳۸ تا ۴۶۹



جلسه

۱

درس ۱

سؤالات
۴۳۷ تا ۴۹۶



جلسه

۲

درس ۲

سؤالات
۵۰۱ تا ۵۱۹



جلسه

۳

درس ۲

سؤالات
۴۷۰ تا ۵۰۰



جلسه

۳

درس ۲

سؤالات
۵۵۰ تا ۵۷۵



جلسه

۲

درس ۲

سؤالات
۵۲۰ تا ۵۴۹



جلسه

۳

درس ۳

سؤالات
۵۹۹ تا ۶۲۹



جلسه

۲

درس ۲

سؤالات
۵۷۶ تا ۵۹۸



جلسه

۳

درس ۳

سؤالات
۶۵۶ تا ۶۸۰



جلسه

۳

درس ۳

سؤالات
۶۳۰ تا ۶۵۵



جلسه

۳

درس ۳

سؤالات
۷۰۰ تا ۷۳۱



جلسه

۳

درس ۳

سؤالات
۶۸۱ تا ۶۹۹



جلسه

۳

درس ۳

سؤالات
۷۳۲ تا ۷۶۷

فصل



جلسه
۲
درس ۱
سؤالات
۸۰۱ تا ۸۲۹



جلسه
۱
درس ۱
سؤالات
۷۶۸ تا ۸۰۰



جلسه
۴
درس ۱
سؤالات
۸۴۸ تا ۸۸۲



جلسه
۳
درس ۱
سؤالات
۸۳۰ تا ۸۴۷



جلسه
۶
درس ۲
سؤالات
۹۰۹ تا ۹۲۹



جلسه
۵
درس ۲
سؤالات
۸۸۳ تا ۹۰۸



جلسه
۸
درس ۲
سؤالات
۹۴۸ تا ۹۷۹



جلسه
۷
درس ۲
سؤالات
۹۳۰ تا ۹۴۷



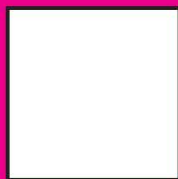
جلسه
۱۰
درس ۲
سؤالات
۱۰۱۰ تا ۱۰۳۹



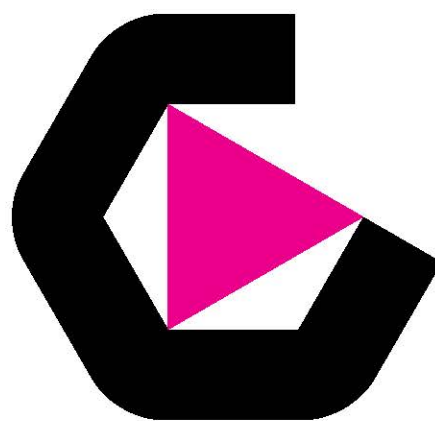
جلسه
۹
درس ۲
سؤالات
۹۸۰ تا ۱۰۰۹

هندسه ۳

حل تصویری تک تک سوالات
کتاب فرمول ۲۰ در گاج لایو



برای مشاهده ویدیوها در سایت gajlive.ir
برچسب را خراش داده و از کد زیر استفاده کنید



پشتیبانی
۰۲۱-۶۴۲۰

www.gajlive.ir

۱

بخش



درستنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (قسمت اول)

هندسه دوازدهم

آشنایی با ماتریس



ماتریس: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C و... نامگذاری می‌کنند. به ماتریس A توجه کنید. این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

← ستون اول
← ستون دوم
← ستون سوم

مواست باشد که سطرها را از بالا به پایین و ستون‌ها را از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم.

مرتبه ماتریس: اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m \times n}$ و به صورت A ماتریسی از مرتبه m در n (یا از مرتبه $m \times n$) است، می‌خوانیم. (یادت باشد که برای بیان مرتبه ماتریس، عدد سمت چپ به تعداد سطرهاست و عدد سمت راست به تعداد ستون‌ها). مثلاً در مثال بالا ماتریس A یک ماتریس از مرتبه ۲ در ۳ است. باورت همیشه که از تعاریف هم سؤال می‌ار تو نهایی. تمرین پایینو نگاه کن.

(دی ۱۴۰۰)

؟ جای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید.

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، نامیده می‌شود.

ماتریس

درایه ماتریس: هر عدد حقیقی واقع در ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ به ۱، ۲، ۳، ۴ درایه‌های ماتریس A می‌گوییم. درایه‌های هر ماتریس را با حرف کوچک اسم ماتریس نشان می‌دهیم و به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ شماره سطر و اندیس سمت راست شماره ستون آن درایه را مشخص می‌کند (اندریس همون عردهای کوپولویی هستن که زیر هروف قرار می‌دیم). یعنی a_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس A.

مثال $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

تعداد درایه‌های ماتریس: یک ماتریس از مرتبه m در n، دارای $m \times n$ درایه است. مثلاً یک ماتریس ۳ در ۴ دارای $3 \times 4 = 12$ درایه است.

ماتریس با درایه عمومی: گاهی اوقات درایه‌های ماتریس A را می‌توان با ضابطه یا ضابطه‌هایی مشخص کرد که به آن درایه عمومی ماتریس A می‌گویند. در این صورت ماتریس A را به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نمایش می‌دهیم. مثلاً در ماتریس $A_{3 \times 3} = [a_{ij}]$ اگر $j + i = a_{ij}$ باشد، برای به دست آوردن درایه‌های آن کافی است به جای درایه سطر i ام و ستون j ام مجموع شماره سطر و ستون آن درایه را قرار دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

توجه اگر تمام درایه‌های یک ماتریس از یک قانون تبعیت کنند می‌توان قانون درایه را در کروش نیز قرار داد مثلاً در مثال بالا می‌توانیم بنویسیم $A = [i+j]_{3 \times 3}$.

(دی ۹۸)

؟ جای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید.

در ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \frac{2i}{j-1}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است.

✓ درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس A ، یعنی a_{32} ، پس باید در ضابطه a_{ij} به جای i عدد ۳ و به جای j عدد ۲ را قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$a_{32} = \frac{2(3)}{2-1} = \frac{6}{1} = 6$$

توجه گاهی ضابطه درایه‌ها با هم فرق می‌کنند. در این صورت باید حواسمان باشد که برای هر درایه، ضابطه مربوط به آن را انتخاب کنیم.

؟ در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} 2i-j & ; i > j \\ 2 & ; i = j \\ j-i & ; i < j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

✓ درایه‌های ستون دوم a_{12} ، a_{22} و a_{32} هستند. در a_{12} ، $i < j$ ، در a_{22} ، $i = j$ و در a_{32} ، $i > j$ است. پس:

$$A = \begin{bmatrix} \text{○} & a_{12} & \text{○} \\ \text{○} & a_{22} & \text{○} \\ \text{○} & a_{32} & \text{○} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i < j \Rightarrow a_{ij} = j - i \Rightarrow a_{12} = 2 - 1 = 1 \\ i = j \Rightarrow a_{ij} = 2 \Rightarrow a_{22} = 2 \\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 2i - j \Rightarrow a_{32} = 2(3) - 2 = 6 - 2 = 4 \end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم برابر $1 + 2 + 4 = 7$ است.

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

پرسش‌های تشریحی

درس
۱

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پُر کنید.

۱. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را آن ماتریس می‌نامیم.
۲. ماتریس A که دارای ۵ سطر و ۳ ستون است دارای درایه است.
۳. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ که در آن $a_{ij} = i^2 j - 3$ باشد، درایه واقع در سطر دوم و ستون چهارم برابر است.
۴. در ماتریس $B = [\frac{i+j}{2}]_{3 \times 4}$ ، درایه سطر دوم و ستون سوم برابر است.
۵. در ماتریس $C = [c_{ij}]_{3 \times 4}$ که در آن $c_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i \geq j \\ j^2 - 1 & ; i < j \end{cases}$ باشد، درایه سطر اول و ستون دوم برابر است.
۶. مجموع درایه‌های ماتریس $A = [(-1)^{i+j} ij]_{2 \times 2}$ برابر است.

● درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۷. ماتریسی که دارای سه سطر و پنج ستون باشد از مرتبه 5×3 است.
۸. ماتریسی که ۱۲ درایه دارد می‌تواند ۵ سطر داشته باشد.
۹. در ماتریس $A = [i^2 + j^2]_{2 \times 2}$ مجموع درایه‌ها برابر ۲۰ است.
۱۰. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $a_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & ; i = j \\ 2i + j & ; i > j \\ i - j & ; i < j \end{cases}$ ، مجموع درایه‌های سطر دوم و ستون سوم برابر ۱۶ است.
۱۱. اگر $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a_{12} \times (a_{23} + a_{21})$ را به دست آورید.

۱۲. ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با $a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{2} & ; i = j \\ \frac{1}{j} & ; i < j \\ -1 & ; i > j \end{cases}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

(کتاب راهنمای معلم)

۱۳. درماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i-2j & ; i > j \\ i+j & ; i \leq j \end{cases}$ می‌باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به دست آورید. (دی خارج ۱۴۰۰)

۱۴. درماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $a_{ij} = \begin{cases} i-\frac{j}{2} & ; i < j \\ i^2-j^i & ; i \geq j \end{cases}$ می‌باشد. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به دست آورید.

۱۵. اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس 3×3 با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i-j & ; i < j \\ 2 & ; i = j \\ i+j & ; i > j \end{cases}$ باشد، درایه‌های a_{12} ، a_{21} و a_{33} را به دست آورید. (دی ۹۹)

۱۶. ماتریس $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} 2 & ; i > j \\ -3 & ; i = j \\ i^j & ; i < j \end{cases}$ می‌باشد، مفروض است. ماتریس A را با درایه‌های مشخص کنید.

۱۷. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i = j \\ j & ; i > j \\ 0 & ; i < j \end{cases}$ باشد، ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۸. ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} 2 & ; |i-j| \text{ زوج است.} \\ -3 & ; |i-j| \text{ فرد است.} \end{cases}$ را با درایه‌های معلوم کنید.

۱۹. ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ با $a_{ij} = \begin{cases} 2 & ; i+j=3k \\ 2-j & ; i+j=3k-1 \\ i+j & ; i+j=3k+1 \end{cases}$ را با درایه‌های بنویسید.

۲۰. اگر ماتریس A به صورت $A = [3i-2j]_{3 \times 3}$ باشد، ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

۲۱. اگر $b_{ij} = \begin{cases} i+1 & ; i = j \\ j-2 & ; i < j \\ 1 & ; i > j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ ، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. (دی ۱۴۰۱)

۲۲. ماتریس $A = [i^2-2ij]_{3 \times 4}$ را با درایه‌های مشخص کنید. (کتاب راهنمای معلم)

۲۳. ماتریس‌های $A = [i-j]_{1 \times 3}$ و $B = [i^j-j]_{2 \times 3}$ مفروض‌اند. ماتریس $C = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ را با درایه‌های مشخص کنید.

۲۴. ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ که $a_{ij} = \begin{cases} 2 & ; i = j \\ j^2-i & ; i \neq j \end{cases}$ و $B = [i^2+j]_{2 \times 2}$ مفروض‌اند. ماتریس $C = [AB]$ را با درایه‌های مشخص کنید.

یادداشت:

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (قسمت دوم)

هندسه دوازدهم

الف. معرفی چند ماتریس خاص



۱ ماتریس مربعی: اگر در ماتریس A ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی $n \times n$ می‌نامیم. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند، زیرا تعداد سطرها و ستون‌های آن‌ها برابر است.

$$A = [5]_{1 \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

نکته ۱ به ماتریس مربعی $n \times n$ ، به طور خلاصه ماتریس مرتبه n نیز می‌گویند. مثلاً وقتی در سؤالی می‌گویند ماتریس A از مرتبه ۴ است یعنی A یک ماتریس مربعی است که دارای ۴ سطر و ۴ ستون می‌باشد.

۲ ماتریس مربعی مرتبه ۱ یعنی $[k]_{1 \times 1}$ را مساوی عدد حقیقی k نیز تعریف می‌کنند. یعنی به جای این‌که بنویسند $A = [5]$ ، آن را به صورت $A = 5$ هم نمایش می‌دهند.

قطرهای اصلی و فرعی: در ماتریس مربعی A قطر اصلی و قطر فرعی را ببینید. درایه‌های روی قطر اصلی دارای شماره سطر و ستون برابر هستند اما اگر a_{ij} درایه روی قطر فرعی باشد، $i + j = n + 1$ می‌باشد. (مواست باشد n همون مرتبه ماتریسه)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قطر اصلی قطر فرعی

$$\begin{bmatrix} i < j \\ i = j \\ i > j \end{bmatrix}$$

توجه در ماتریس‌های مربعی در درایه‌های بالای قطر اصلی $i < j$ و در درایه‌های پایین قطر اصلی $i > j$ می‌باشد.
(در درایه‌های روی قطر اصلی هم که $i = j$ بود.)

؟ در ماتریس $A = [2i - j]_{3 \times 3}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی را به دست آورید.

✓ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مربعی A ، درایه‌های a_{11} ، a_{22} و a_{33} هستند پس:

$$\begin{cases} a_{11} = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \\ a_{22} = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + 3 = 6 \\ a_{33} = 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3 \end{cases}$$

۲ ماتریس سطری: اگر ماتریس A فقط دارای یک سطر باشد آن را یک ماتریس سطری می‌نامیم. مرتبه ماتریس‌های سطری به صورت $1 \times n$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند.

$$A = [1 \quad 2 \quad 5]_{1 \times 3} \quad B = [2 \quad 3]_{1 \times 2} \quad C = [5]_{1 \times 1} = 5$$

مواست باشد در ماتریس سطری موم اینه که فقط یک سطر داشته باشیم و تعداد ستون‌ها موم نیست، حتی می‌تونه یک ستون هم داشته باشه!

؟ ماتریس سطری $A = [a_{ij}]$ دارای ۵ درایه است. اگر $a_{ij} = i + j$ باشد، ماتریس A را با درایه‌های مشخص کنید.

✓ ماتریس سطری دارای یک سطر است. چون ماتریس A دارای ۵ درایه است پس مرتبه آن 1×5 می‌باشد. حال داریم:

$$A = [1+1 \quad 1+2 \quad 1+3 \quad 1+4 \quad 1+5] \Rightarrow A = [2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$$

۳ ماتریس ستونی: اگر ماتریس A فقط دارای یک ستون باشد، آن را یک ماتریس ستونی می‌نامیم. مرتبه ماتریس‌های ستونی $m \times 1$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ \pi \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad C = [12]_{1 \times 1} = 12$$

ماتریس ستونی هم مثل ماتریس سطریه، فقط باید یک ستون داشته باشد. تعداد سطرها هم مهم نیست.

۴ ماتریس قطری: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیرواقع برقطر اصلی آن صفر باشند. دقت کنید درایه‌های واقع برقطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

؟ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(شهریور ۱۴۰۰)

۱ ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیرواقع برقطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس گویند.

(شهریور ۹۹)

۲ در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ مقدار m برابر است.

۱ قطری

$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$

۲ در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع برقطر اصلی صفر هستند، پس:

؟ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ n+2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. مقدار m+n را به دست آورید.

چون A یک ماتریس قطری است پس درایه‌های غیرواقع برقطر اصلی آن باید صفر باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m-3=0 \Rightarrow m=3 \\ n+2=0 \Rightarrow n=-2 \end{cases} \Rightarrow m+n=3+(-2)=1$$

۵ ماتریس اسکالر: اگر در یک ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. مثلاً ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = [2]$$

(دی ۹۸)

؟ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

«هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.»

درست

۶ ماتریس واحد یا همانی: اگر در ماتریس اسکالر، تمام درایه‌های روی قطر اصلی ۱ باشد، ماتریس را ماتریس واحد یا همانی می‌نامیم. ماتریس همانی از مرتبه n را با I_n نمایش می‌دهیم.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه ماتریس اسکالر KI_n را با KI_n نشان می‌دهیم. مثلاً ماتریس $4I_3$ به صورت $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

۷ ماتریس صفر: ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. (ماتریس صفر، تماماً مربعی نیست و می‌تونه از هر مرتبه‌ای باشه).

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■ **تساوی دو ماتریس:** دو ماتریس هنگامی مساوی اند که اولاً هم مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌های نظیر آن‌ها مساوی باشند. (درایه‌های نظیر، درایه‌هایی هستند که

شماره سطر و ستون آن‌ها در دو ماتریس برابر باشد.) در دو ماتریس زیر درایه‌های نظیر با رنگ‌های یکسان مشخص شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} \text{green} & \text{orange} & \text{light blue} \\ \text{pink} & \text{yellow} & \text{brown} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \text{green} & \text{orange} & \text{light blue} \\ \text{pink} & \text{yellow} & \text{brown} \end{bmatrix}$$

(شهریور ۹۹)

❓ اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ را بیابید.

$$\begin{cases} y+1 = x-1 \\ x-2 = 8 \Rightarrow x = 10 \\ 3 = 3 \\ 4 = z+1 \Rightarrow z = 3 \end{cases} \xrightarrow{x=10} y+1 = 9 \Rightarrow y = 8$$

$$\Rightarrow x+y+z = 10+8+3 = 21$$

✔ باید درایه‌های نظیر ماتریس‌های A و B برابر باشند:

ب. اعمال روی ماتریس‌ها

■ **جمع و تفریق ماتریس‌ها:** دو ماتریس هم مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد. برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم مرتبه A و B، کافی است

درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم. حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی مانند C است که از همان مرتبه A و B می‌باشد.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

(شهریور ۱۴۰۰)

❓ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟

✔ خیر. چون دو ماتریس A و B هم مرتبه نیستند. ماتریس A از مرتبه 3×2 و ماتریس B از مرتبه 2×3 است.

❓ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ n+2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 3 & -1 & n-1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A+B$ را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} m-3=0 \\ n+2=0 \end{cases} \Rightarrow m=3, n=-2$$

✔ چون A ماتریس قطری است، پس درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن همگی صفرند:

بنابراین ماتریس‌های A و B به صورت زیر هستند و حاصل $A+B$ برابر است با:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 0+(-1) & 0+1 \\ 0+3 & 1+0 & 0+2 \\ 0+3 & 0+(-1) & 4+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

■ **ضرب عدد در ماتریس:** برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. به بیان دیگر اگر A یک ماتریس $m \times n$

و r یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $3A$ برابر $\begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 21 \end{bmatrix}$ است.

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $2A - 3B$ را به دست آورید.

$$2A - 3B = 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 3 \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-(-3) & 2-0 \\ 6-6 & 8-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

✔

■ **قرینه یک ماتریس:** قرینه ماتریس A را با $-A$ نمایش داده و از ضرب عدد (-1) در ماتریس A به دست می‌آید. واضح است که مجموع هر ماتریس با

قرینه‌اش برابر ماتریس صفر است.

$$A + (-A) = \bar{O}$$

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، ماتریس B را به گونه ای معلوم کنید که $A + B = \bar{O}$ باشد.

$$B = -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

✔ چون $A + B = \bar{O}$ است، پس B قرینه ماتریس A می باشد. بنابراین داریم:

■ **خواص جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس:** اگر A, B, C سه ماتریس هم مرتبه باشند، داریم:

$$A + B = B + A$$

۱ جمع ماتریس ها خاصیت جابه جایی دارد.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

۲ جمع ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$$

۳ ماتریس صفر، عضو خنثی عمل جمع است.

$$r(A \pm B) = rA \pm rB$$

۴ اگر r یک عدد حقیقی باشد، داریم:

اثبات

با توجه به تعریف جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس داریم:

از آن جایی که ضرب نسبت به جمع در مجموعه اعداد حقیقی توزیع پذیر است داریم:

$$[r(a_{ij} \pm b_{ij})] = [ra_{ij} \pm rb_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] = r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] = rA \pm rB$$

$$(r \pm s)A = rA \pm sA$$

۵ اگر r و s اعداد حقیقی باشند، داریم:

اثبات

با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس داریم:

$$(r \pm s)A = (r \pm s)[a_{ij}] = [(r \pm s)a_{ij}] = [ra_{ij} \pm sa_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}] = r[a_{ij}] \pm s[a_{ij}] = rA \pm sA$$

$$A = B \Rightarrow rA = rB$$

۶ طرفین یک تساوی ماتریسی را می توان در یک عدد دلخواه ضرب کرد.

$$rA = rB, r \neq 0 \Rightarrow A = B$$

۷ طرفین یک تساوی ماتریسی را می توان بر یک عدد دلخواه مخالف صفر تقسیم کرد.

(خرداد ۱۴۰۰)

❓ **درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.**

« اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA = rB$ آن گاه داریم $A = B$ »

✔ با توجه به ویژگی های گفته شده عبارت فوق درست است.

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و همچنین $r = 3$ و $s = 2$ باشند، درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$(r+s)A = rA + sA \quad (A+C)+B = A+(C+B)$$

✔ ۱ یک بار $(A+C)+B$ و بار دیگر $A+(C+B)$ را محاسبه می کنیم:

$$(A+C)+B = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+C)+B = A+(C+B)$$

$$A+(C+B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(r+s)A = (3+2)A = 5A = 5 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

۲ یک بار $(r+s)A$ و بار دیگر $rA + sA$ را محاسبه می کنیم:

$$rA + sA = 3A + 2A = 3 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow (r+s)A = rA + sA$$

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۲۵. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر است.

۲۶. اگر ماتریسی فقط دارای یک سطر باشد، به آن ماتریس می‌گوییم.

(دی خارج ۱۴۰۱)

۲۷. اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس می‌نامیم.

۲۸. در ماتریس اسکالر درایه‌های واقع بر قطر اصلی هستند.

(دی ۹۷)

۲۹. ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس می‌نامیم.

(دی ۱۴۰۲)

۳۰. در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2k-1 & 2 \end{bmatrix}$ مقدار k برابر است.

(شهریور ۱۴۰۱)

۳۱. اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه مقدار x برابر با است.

۳۲. دو ماتریس را می‌توان با هم جمع کرد.

۳۳. جمع دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی

۳۴. در ماتریس اسکالر $A = \begin{bmatrix} n+2 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ مقدار $m+n$ برابر است.

۳۵. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{y-x}{x-2} & x^3-x \\ x^2+x & \frac{2}{x+1} \end{bmatrix}$ ، اسکالر باشد، مقدار $x+y$ برابر است.

۳۶. در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی هستند.

۳۷. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4^{x-y} & 0 \\ x+y+z & 5^{x-4} \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، مقدار z برابر است.

۳۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های $A+2B$ برابر است.

۳۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & m \\ 0 & n \end{bmatrix}$ و $2A+B$ ماتریس همانی باشد، بزرگ‌ترین درایه ماتریس $A-2B$ برابر است.

۴۰. اگر $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x+5 & 0 \\ 1 & y-1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار xy برابر است.

● درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۴۱. تعداد درایه‌های ماتریس مربعی A می‌تواند برابر ۳۲ باشد.

۴۲. ماتریس صفریک ماتریس مربعی است.

۴۳. هر ماتریس صفر، ماتریس اسکالر نیز است.

۴۴. در ماتریس مربعی A درایه‌های واقع بر قطر فرعی دارای شماره سطر و ستون برابر هستند.

۴۵. در ماتریس مربعی A از مرتبه ۴ درایه a_{32} روی قطر فرعی قرار دارد.

۴۶. درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس قطری، غیرصفر هستند.

۴۷. ماتریس سطری نمی‌تواند مربعی باشد.

۴۸. ماتریس مربعی وجود دارد که ماتریس ستونی هم باشد.

۴۹. ماتریس مربعی که فقط درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس قطری است.

۵۰. هر ماتریس اسکالر، مربعی است.
۵۱. هر ماتریس قطری، اسکالر است.
۵۲. تعداد درایه‌های ماتریس صفر می‌تواند ۶ باشد.
۵۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & a+2b & 0 \\ 0 & a-3b & a+c \\ c-2 & 0 & a-b \end{bmatrix}$ به ازای هیچ مقدار حقیقی a ، b و c ماتریس قطری نمی‌شود.
۵۴. جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.
۵۵. جمع ماتریس‌های هم‌مرتبه خاصیت شرکت‌پذیری دارد.
۵۶. طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان بریک عدد دلخواه تقسیم کرد.
۵۷. ماتریس اسکالر عضو خنثی عمل جمع است.
۵۸. ماتریس مربعی A از مرتبه $(5-n) \times (3n-7)$ است. ماتریس $B = [ni - 3j]_{2 \times 2}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.
۵۹. ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]$ دارای ۹ درایه است. اگر $a_{ij} = \begin{cases} i-j & ; i=j \\ 2i+j & ; i>j \\ j-i & ; i<j \end{cases}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.
۶۰. در ماتریس $A = [i^2 - mj]_{3 \times 3}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۸ است. مقدار m را به دست آورید.
۶۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & m-4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & n-3 & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری و $B = \begin{bmatrix} m-k & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $m+n+k$ را به دست آورید.
۶۲. اگر $A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید.
۶۳. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3a & c-1 \\ a+b & -6 \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار $a(b+c)$ را به دست آورید.
۶۴. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-2 & c-b \\ d+a & b+2 \end{bmatrix}$ ماتریس واحد باشد، مقدار $a+b+c+d$ را به دست آورید.
۶۵. اگر ماتریس $\begin{bmatrix} x+1 & x^2-x-2 \\ x^2+x & 2x+1 \end{bmatrix}$ قطری باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A را به دست آورید.
۶۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت $x+2y+3z$ را به دست آورید.
۶۷. اگر $A = \begin{bmatrix} x^2-y^2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & x+y \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، در این صورت حاصل x^2+y^2 را بیابید.
۶۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشند، حاصل x^2-2y+z را به دست آورید.
۶۹. اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x+2y & 3 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ t & 3x-y \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $y+t$ را به دست آورید.
۷۰. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ab & 4 \\ 3 & a+b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ با هم برابرند. مقدار a^2+b^2 را به دست آورید.
۷۱. اگر ماتریس‌های $A = [3i - j^2]$ و $B = \begin{bmatrix} b-2 & a+1 \\ c+1 & 2 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $a+b+c$ را به دست آورید.
۷۲. ماتریس $\begin{bmatrix} x+5 & y+2 \\ 2x-8 & 3z \end{bmatrix}$ با ماتریس حاصل از ضرب عدد حقیقی m در ماتریس همانی برابر است. حاصل $\frac{m+x}{z+y}$ را به دست آورید.

(دی خارج ۱۴۰۰)

(دی ۱۴۰۱)

(دی ۱۴۰۰ - شهریور ۹۸)

(دی خارج ۱۴۰۱)

(دی ۱۴۰۲)

(کتاب راهنمای معلم)

۷۳. اگر $A = [(-1)^{ij} i^2 j]_{2 \times 2}$ باشد، قرینه ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۷۴. مرتبه ماتریس‌های A ، B و $A - B$ به ترتیب $3 \times (a+1)$ ، $4 \times (b-1)$ و $c \times d$ است. مقدار $a + b + c + d$ را به دست آورید.

۷۵. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ باشد. آنگاه مقادیر x و y را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

۷۶. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} ij & ; i > j \\ i^2 & ; i = j \\ 2i - j & ; i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A - 3I$ را به دست آورید. (دی ۹۷)

۷۷. اگر A یک ماتریس مربعی، $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}$ و $A^2 = 6A - 11I$ باشد، ماتریس A را به دست آورید. (دی خارج ۱۴۰۱)

۷۸. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -1 & m \\ -2 & m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ چنان هستند که $C = 3A + 2B$ ماتریس قطری است. مقدار m و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید. (خرداد ۱۴۰۳)

۷۹. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $2C + A = 3I + B$ و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C برابر -4 باشد، ماتریس $A + 2B - C$ را با درایه‌هایش بنویسید.

۸۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ، ماتریس $A + I$ را بیابید (I ماتریس همانی مرتبه دو است). (شهریور ۱۴۰۱)

۸۱. ماتریس اسکالر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با $a_{33} + a_{32} = -2$ مفروض است. اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A - 3B$ را به دست آورید.

۸۲. ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با $a_{ij} = \begin{cases} 2i - 3 & ; i \geq j \\ i + j & ; i < j \end{cases}$ و ماتریس B یک ماتریس اسکالر که مجموع درایه‌های آن برابر ۱۲ است مفروض‌اند. اگر جمع دو ماتریس قابل تعریف باشد، ماتریس $2A - B$ را به دست آورید.

۸۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $2A - 3B$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۸۴. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $A + C = \bar{O}$ باشد، ماتریس $2B + 3C$ را به دست آورید.

۸۵. اگر $A = [a_{ij}]$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & ; i \geq j \\ 2i - j & ; i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، ماتریس $2A - 3B + 2I$ را به دست آورید.

۸۶. مجموع ماتریس‌های $A = [i - xj]_{y \times x}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ -1 & 3 \\ x^2 - y^2 & 2-x \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود. ماتریس $2A - 3B$ را با درایه‌هایش بنویسید.

۸۷. اگر $A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ و $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A را به دست آورید.

۸۸. اگر A و B دو ماتریس و r یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید $r(A \pm B) = rA \pm rB$.

۸۹. اگر A یک ماتریس و r و s اعداد حقیقی باشند ثابت کنید $(r \pm s)A = rA \pm sA$.

فصل اول

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس ها (قسمت سوم)

هندسه دوازدهم

ضرب ماتریس ها



شرط انجام پذیری ضرب دو ماتریس: همان طور که هر دو ماتریس دلخواهی را نمی توان با هم جمع و تفریق کرد و باید دو ماتریس، هم مرتبه باشند، هر دو ماتریس دلخواهی را هم نمی توان در هم ضرب کرد. برای آن که $A \times B$ انجام پذیر باشد باید تعداد ستون های ماتریس سمت چپ یعنی A با تعداد سطرهاى ماتریس سمت راست یعنی B برابر باشد.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

برابر
مرتبه $A \times B$

مثلاً اگر $A_{2 \times 5}$ و $B_{5 \times 3}$ باشد $A \times B$ انجام پذیر است و مرتبه آن 2×3 می باشد. اما $B \times A$ تعریف نمی شود. زیرا تعداد ستون های B برابر ۳ و تعداد سطرهاى A برابر ۲ است و $3 \neq 2$ می باشد.

کلاً برای این که بشه دو تا ماتریس رو در هم ضرب کرد باید وقتی اونارو کنار هم می نویسی دو تا عدد نزدیکاً برابر باشن تا بشه در هم ضربشون کرد. مرتبه ماتریس حاصل ضرب، همون دو تا عدد دور هاست.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

نزدیکاً برابر
دورها

؟ اگر A ماتریسی 3×5 باشد، در هر حالت مشخص کنید که $A \times B$ و $B \times A$ قابل تعریف است یا خیر. در صورت تعریف مرتبه ماتریس حاصل را بنویسید.

۱ $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$

۲ $B = [b_{ij}]_{3 \times 5}$

۳ $B = [b_{ij}]_{5 \times 3}$

۴ $B = [b_{ij}]_{5 \times 4}$

۱ $A_{3 \times 5} \times B_{3 \times 2} \Rightarrow$ انجام پذیر نیست.



$B_{3 \times 2} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$ انجام پذیر نیست.



۲ $A_{3 \times 5} \times B_{3 \times 5} \Rightarrow$ انجام پذیر نیست.



$B_{3 \times 5} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$ انجام پذیر نیست.



۳ $A_{3 \times 5} \times B_{5 \times 3} = (AB)_{3 \times 3}$



$B_{5 \times 3} \times A_{3 \times 5} = (BA)_{5 \times 5}$



۴ $A_{3 \times 5} \times B_{5 \times 4} = (AB)_{3 \times 4}$



$B_{5 \times 4} \times A_{3 \times 5} \Rightarrow$ انجام پذیر نیست.



به دست آوردن درایه های حاصل ضرب دو ماتریس: اگر $A \times B$ انجام پذیر باشد، (دو تا نزدیکاً برابر باشن) برای به دست آوردن درایه سطر i ام و ستون j ام

ماتریس $C = A \times B$ یعنی c_{ij} ، سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B به صورت زیر ضرب و جمع می کنیم. (یعنی سطر رو از ماتریس سمت چپ و ستون رو از ماتریس سمت راست انتخاب می کنیم).

$$c_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{in} \times b_{nj}$$

اگر این کار را برای تک تک درایه ها انجام دهیم، ماتریس $A \times B$ به دست می آید.

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس AB را به دست آورید.

✔ چون $A_{1 \times 5}$ و $B_{5 \times 1}$ است، پس ماتریس AB از مرتبه 1×1 می باشد و داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = [(-1) \times (-2) + 2 \times 3 + 0 \times 7 + 3 \times (-1) + (-5) \times (-2)] = [2 + 6 + 0 + (-3) + 10] = [15]$$

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ باشند.

❶ ماتریس $A \times B$ را محاسبه کنید.

✔❶ اگر فرض کنیم $A \times B = C$ است، از آن جایی که $A_{3 \times 3} \times B_{3 \times 2}$ ، پس ماتریس C از مرتبه 3×2 بوده و داریم:



کم کم باید ذهنی حساب کنید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2-4 & 3+4-5 \\ 6-2+4 & 9+4+5 \\ -2+2+16 & -3-4+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 18 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

❷ خیر، زیرا تعداد ستون های ماتریس B برابر ۲ و تعداد سطرها ی ماتریس A برابر ۳ است و چون با هم برابر نیستند، $B \times A$ امکان پذیر نیست:

انجام پذیر نیست. $B_{3 \times 2} \times A_{3 \times 3} \Rightarrow$



(دی ۹۹)

❓ مقادیر x و y را از معادله زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix}$$

✔ ابتدا حاصل $\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 4x - 2 = y - 2 \end{cases}$$

حال ماتریس $\begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix}$ باید با ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$ برابر باشد، پس:

$$\begin{cases} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 4x - 2 = y - 2 \xrightarrow{x=2} 6 = y - 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

همان ماتریس های خاص رو یادت هست. ببین پطوری از اونا تو سؤال استفاده می کنن. سؤال بعدی رو ببین.

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد. (دی ۹۹ - شهریور ۱۴۰۰)

✔ ابتدا ماتریس $A \times B$ را به دست می آوریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

برای آن که $A \times B$ یک ماتریس قطری باشد باید درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، پس:

$$\begin{cases} -8+2a = 0 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \\ b-3 = 0 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

البته می توانیم فقط درایه های غیر واقع بر قطر اصلی رو به دست بیاریم و برابر صفر قرار بدیم.

اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & ; i = j \\ i - j & ; i > j \\ j - i & ; i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ماتریس $A \times B$ را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

ابتدا ماتریس A را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 - 1 & 2 - 1 & 3 - 1 \\ 2 - 1 & 2^2 - 1 & 3 - 2 \\ 3 - 1 & 3 - 2 & 3^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

حال $A \times B$ را به دست می آوریم:

قرارمون این بود که ذهنی حساب کنید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 1 + 4 & 0 + 3 + 0 & 0 + 2 + 10 \\ 2 - 3 + 2 & 1 + 9 + 0 & 0 + 6 + 5 \\ 4 - 1 + 16 & 2 + 3 + 0 & 0 + 2 + 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 1 & 10 & 11 \\ 19 & 5 & 42 \end{bmatrix}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ باشد،

۱) ماتریس $A \times B$ را به دست آورید.

۲) قسمت (۱) را با این حکم در اعداد حقیقی که «اگر $a \times b = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$ » مقایسه کنید.

۱) چون $A_{2 \times 3}$ و $B_{3 \times 3}$ است پس $(AB)_{2 \times 3}$ می باشد و داریم:

تو ذهننت ریگه!

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 1 + 0 & 2 - 2 + 0 & -2 + 2 + 0 \\ -2 + 1 + 1 & 4 - 2 - 2 & -4 + 2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲) در ماتریس ها اگر $A \times B = \bar{O}$ باشد، نمی توان نتیجه گرفت که $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$ است.

به دست آوردن سطر یا ستون خاص در ضرب ماتریس ها:

۱) برای پیدا کردن درایه های سطر i ام ماتریس $C = A \times B$ ، کافی است سطر i ام ماتریس A را در ماتریس B ضرب کنیم.

$$C = [A \times B] \text{ سطر } i \text{ ام ماتریس } A \times B$$

۲) برای پیدا کردن ستون j ام ماتریس $C = A \times B$ ، کافی است ماتریس A را در ستون j ام B ضرب کنیم.

$$C = A \times \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ j \text{ ام} \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های سطر سوم A^3 را به دست آورید.

ابتدا سطر سوم ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \text{سطر 3 ام} \\ \text{ماتریس } A \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حال سطر سوم ماتریس A^3 برابر است با:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

❓ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به دست آورید.

ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس سمت چپ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 13 & 9 & 9 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 13 & 9 & 9 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix}$$

حال ستون دوم ماتریس A را به دست می‌آوریم:

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A برابر $26 = 8 + 22 - 4$ است.

خواص ضرب ماتریس‌ها:

$$A \times B \neq B \times A$$

1 در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

(دی ۹۷ - دی ۹۹)

❓ جای خالی را با کلمه مناسب پر کنید.

حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی

ندارد

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، نشان دهید $A \times B$ و $B \times A$ برابر نیستند.

ماتریس‌های $A \times B$ و $B \times A$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & -1+2 \\ 6+3 & -3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \\ B \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & 4-1 \\ 3+3 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

$$A \times I = I \times A = A$$

2 ماتریس واحد یا همانی، عضو خنثی عمل ضرب است.

❓ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $B \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) A$ را با درایه‌های مشخص کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ابتدا ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم:

چون ماتریس I عضو خنثی عمل ضرب است، پس ماتریس $B \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) A$ با ماتریس AB برابر است. بنابراین داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. اما در خاصیت ۲ دیدیم که $A \times I$ یا $I \times A$ برابر A است. به این ماتریس‌ها ماتریس‌های تعویض‌پذیر می‌گویند.

ماتریس‌های تعویض‌پذیر: اگر A و B دو ماتریس باشند، به طوری که $A \times B = B \times A$ باشد، آن‌گاه به ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر می‌گویند.

❓ نشان دهید ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند.

برای آن‌که نشان دهیم A و B تعویض‌پذیرند، باید نشان دهیم $A \times B = B \times A$ است.

$$\begin{cases} A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+30 & 30+10 \\ 18+6 & 30+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 40 \\ 24 & 32 \end{bmatrix} \\ B \times A = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+30 & 30+10 \\ 18+6 & 30+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 40 \\ 24 & 32 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A \times B = B \times A \Rightarrow A \text{ و } B \text{ تعویض‌پذیرند.}$$

نکته ضرب ماتریس‌های همانی و اسکالر در هر ماتریس هم مرتبه با خودشان تعویض پذیر است.

$$A \times I = I \times A = A$$

$$kI \times A = A \times kI = kA$$

ماتریس اسکالر (که ماتریس همانی هم به‌جورایی اسکالر) وقتی در ماتریس A ضرب میشه مانند عدد رفتار می‌کنه.

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس BA را به دست آورید.

چون ماتریس B اسکالر است، وقتی در ماتریس A ضرب می‌شود مانند این است که عدد ۳ را در ماتریس A ضرب کنیم. پس:

$$BA = 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & 6 \\ 3 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

نکته ضرب ماتریس قطری در هر ماتریس هم مرتبه با خودش به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 a & r_1 b & r_1 c \\ r_2 d & r_2 e & r_2 f \\ r_3 g & r_3 h & r_3 i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 a & r_1 b & r_1 c \\ r_2 d & r_2 e & r_2 f \\ r_3 g & r_3 h & r_3 i \end{bmatrix}$$

اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & ; i > j \\ 2i + j & ; i \leq j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس AB و BA را با درایه‌های مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش معلوم می‌کنیم:

حال برای محاسبه AB ، چون ماتریس B قطری است، کافی است ستون اول A را دو برابر، ستون دوم آن را (-1) برابر و ستون سوم آن را ۳ برابر کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 15 \\ 6 & -6 & 21 \\ 16 & -7 & 27 \end{bmatrix}$$

اما برای به دست آوردن ماتریس BA کافی است سطر اول A را ۲ برابر، سطر دوم آن را (-1) برابر و سطر سوم A را ۳ برابر کنیم:

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ -3 & -6 & -7 \\ 24 & 21 & 27 \end{bmatrix}$$

۳ ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع و تفریق ماتریس‌ها توزیع پذیر است.

$$A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$$

$$(B \pm C) \times A = B \times A \pm C \times A$$

یه بار هم این خاصیت رو از راست به چپ ببین. یعنی میشه از $A \times$ از سمت چپ فاکتور گرفت. هواسه باشه چون ضرب ماتریس‌ها فاصله جابه‌جایی نداره باید یه‌تی که A ضرب می‌شه یکسان باشه. مثلاً $B \times A + C \times A$ رو میشه به صورت $(B + C) \times A$ نوشت اما با $B \times A + A \times C$ هیچ کاری نمیشه کرد.

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B + C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A \times B + A \times C$ را به دست آورید.

می‌دانیم $A \times B + A \times C$ برابر $A \times (B + C)$ است. پس:

ذهنی انجام داری دیگه؟!

$$A \times B + A \times C = A \times (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0-1 & 1+2+1 & -1+4-3 \\ 6+0+2 & 3+0-2 & -3+0+6 \\ 2+0+4 & 1-1-4 & -1-2+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

۴ ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، یعنی جای پرانتزها در ضرب اهمیتی ندارد.

(خرداد ۹۸)

؟ در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix}$ مقدار x را بیابید.

ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس سمت چپ را به دست آورده، سپس حاصل را در ماتریس $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 6 & -6x + 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 6 & -6x + 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x + 6 - 6x + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9x + 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -9x + 18 = 0 \Rightarrow 9x = 18 \Rightarrow x = 2$$

۵ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد. فقط سمت ضرب کردن در طرفین تساوی باید یکسان باشد یا از راست یا از چپ، زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارند.

$$B = C \Rightarrow A \times B = A \times C \text{ یا } B \times A = C \times A$$

۶ قانون حذف در حالت کلی در تساوی‌های ماتریسی برقرار نیست. (تست شرایطی قانون حذف برقراره که چلو تر می‌شونیم.)

$$A \times B = A \times C \not\Rightarrow B = C$$

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}, A \times C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه کردید $A \times B = A \times C$ است، در حالی که $B \neq C$ می‌باشد.

(دی ۹۹)

؟ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس‌های متمایز A ، B و C داشته باشیم $AB = AC$ ، آن‌گاه لزوماً $B = C$ است.

نادرست؛ قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست.

■ به توان رساندن ماتریس‌ها: اگر A ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه توان‌های صحیح و نامنفی A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = A \times A, A^3 = A^2 \times A = A \times A^2, \dots, A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A = A^2 \times A^{n-2} = \dots$$

ویژگی‌ها

۱ ضرب توان‌های مختلف یک ماتریس دارای خاصیت جابه‌جایی است.

$$A^n \times A^m = A^m \times A^n = A^{m+n}$$

مثلاً $A^2 \times A^5$ یا $A^5 \times A^2$ برابر است و مساوی $A^{5+2} = A^7$ می‌باشد.

$$(kA)^n = k^n A^n$$

۲ اگر k یک عدد حقیقی باشد، داریم:

$$\text{مثلاً } (2A)^3 \text{ برابر } 8A^3 = 2^3 \times A^3 \text{ است.}$$

۳ اگر یک ماتریس توان دار را دوباره به توان برسانیم، کافی است توان‌های جدید و قدیم را در هم ضرب کنیم.

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

مثلاً ماتریس $(A^2)^3$ با ماتریس A^6 برابر است.

$$I^n = I$$

۴ توان روی ماتریس همانی بی‌تأثیر است.

مثلاً I^{152} برابر I است.

■ محاسبه توان‌های کوچک ماتریس: اگر A یک ماتریس مربعی باشد به توان‌های دوم، سوم و چهارم A ، توان‌های کوچک ماتریس A می‌گوییم. واضح

است برای محاسبه A^2 کافی است A را در A ، برای محاسبه A^3 ، بعد از به دست آوردن A^2 ، آن را در A و برای محاسبه A^4 کافی است A^2 را در A^2 ضرب کنیم. اگر دقت کنید در همه موارد فوق حداکثر با دو بار ضرب کردن حاصل را به دست می‌آوریم.

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & m+7 \\ n-3 & 27 \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر m و n را چنان بیابید که $A^3 - B = \bar{O}$ باشد.

✔ وقتی $A^3 - B = \bar{O}$ است یعنی $A^3 = B$ می باشد. پس باید ماتریس A^3 را به دست آوریم، برای این منظور ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 14 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 14 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & m+7 \\ n-3 & 27 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m+7=14 \Rightarrow m=7 \\ n-3=0 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^4 را با درایه هایش معلوم کنید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

✔ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس A^2 را در خودش ضرب می کنیم تا ماتریس A^4 به دست آید:

■ محاسبه توان های بزرگ ماتریس: برای محاسبه توان های بزرگ یک ماتریس مربعی (توان ۵ به بالا)، ابتدا توان دوم آن را به دست می آوریم. اگر A^2

یکی از حالات زیر شد داریم:

$$A^2 = \bar{O} \Rightarrow A^n = \bar{O}$$

❶ اگر $A^2 = \bar{O}$ شود، آن گاه هر توانی از ماتریس A نیز برابر ماتریس صفر می شود.

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{17} را با درایه هایش معلوم کنید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✔ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

چون $A^2 = \bar{O}$ شد، پس $A^{17} = \bar{O}$ می باشد و این یعنی $A^{17} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ است.

$$A^2 = A \Rightarrow A^n = A$$

❷ اگر $A^2 = A$ شود، هر توانی از ماتریس A نیز برابر A می شود.

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{12} را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

✔ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

چون $A^2 = A$ شد، پس A^{12} نیز برابر A می شود یعنی $A^{12} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ است.

❸ اگر A^2 برابر I یا KI یا KA شود، ماتریس A^n را به صورت ضرب ماتریس های A^2 و نوشته و با جای گذاری ماتریس به دست آمده برای A^2 ، ماتریس

A^n را به دست می آوریم.

(دی ۹۸)

❓ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7 را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I$$

✔ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^7 = (A^2)^3 \times A = (-2I)^3 \times A = -8 \times I^3 \times A = -8 \times I \times A = -8A = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

حال با توجه به ویژگی های توان داریم:

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{-1} را با درایه‌هایش معلوم کنید.

$$A^{\text{r}} = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

✔ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

حال ماتریس A^{11} برابر است با:

$$A^{11} = A^T \times A^T \times A^T \times A^T \times A^T \times A = (A^T)^\Delta \times A = (\mathfrak{r}A)^\Delta \times A = \mathfrak{r}\mathfrak{r}A^\Delta \times A = \mathfrak{r}\mathfrak{r} \times A^T \times A^T \times A \times A$$

$$= 32 \times (2A) \times (2A) \times (2A) = 256A^3 = 256 \times A^T \times A = 256 \times 2A \times A = 512A^T = 512 \times 2A = 1024A = \begin{bmatrix} 1024 & 1024 \\ 1024 & 1024 \end{bmatrix}$$

نکته اگر توان دوم A برابر $\bar{O}$ یا I یا KI یا KA نشد، باید توان سوم A را به دست آوریم و از روی A ، A^2 و A^3 ، ماتریس A^n را حدس بزنیم.

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^2 را به دست آورید.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✔ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

چون A^2 برابر $\bar{O}$ یا A یا I یا kI یا kA نشد، ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همان طور که ملاحظه می کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است، پس $A^r = \begin{bmatrix} 1 & r \times 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ می باشد.

ضرب ماتریس‌های خاص و به توان رساندن آن‌ها:

۱ حاصل ضرب دو ماتریس هم‌مرتبه که درایه‌های یک طرف قطراصلی آن‌ها صفر است، یک ماتریس به همان فرم و از همان مرتبه است که درایه‌های قطراصلی آن، حاصل ضرب درایه‌های متناظر روی قطرهای اصلی، دو ماتریس، است.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ \circ & \mathbf{b} & \mathbf{f} \\ \circ & \circ & \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}' & \mathbf{d}' & \mathbf{e}' \\ \circ & \mathbf{b}' & \mathbf{f}' \\ \circ & \circ & \mathbf{c}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{aa}' & \bullet & \bullet \\ \circ & \mathbf{bb}' & \bullet \\ \circ & \circ & \mathbf{cc}' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \circ & \circ \\ \mathbf{d} & \mathbf{b} & \circ \\ \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}' & \circ & \circ \\ \mathbf{d}' & \mathbf{b}' & \circ \\ \mathbf{e}' & \mathbf{f}' & \mathbf{c}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{aa}' & \circ & \circ \\ \bullet & \mathbf{bb}' & \circ \\ \bullet & \bullet & \mathbf{cc}' \end{bmatrix}$$

توجه درایه‌هایی که با • معلوم شده‌اند، ارزش حفظ کردن ندارند و در صورت لزوم باید محاسبه شوند.

نکته مطالب فوق در مورد به توان رساندن هم صدق می کند.

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ \circ & b & f \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & \bullet & \bullet \\ \circ & b^n & \bullet \\ \circ & \circ & c^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ d & b & \circ \\ e & f & \circ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & \circ & \circ \\ \bullet & b^n & \circ \\ \bullet & \bullet & c^n \end{bmatrix}$$

؟ جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های ستون سوم AB برابر است.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ستون سوم} = 0 + 0 + 2 = 2$$

۲ حاصل ضرب دو ماتریس قطری هم مرتبه، یک ماتریس قطری از همان مرتبه است که درایه های قطری آن حاصل ضرب درایه های متناظر روی قطرهای اصلی دو ماتریس است. (انگار درایه های دو ماتریس، نظیر به نظیر در هم ضرب می شن).

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb' & 0 \\ 0 & 0 & cc' \end{bmatrix}$$

توجه مطلب فوق در مورد به توان رساندن ماتریس قطری هم صدق می کند.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

۱؟ اگر $A = \begin{bmatrix} m+2 & 0 & m^2-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ m-1 & 0 & m-2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، ماتریس A^3 را با درایه هایش مشخص کنید.

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس A قطری است، پس درایه های غیرواقعه بر قطر اصلی آن صفر است:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس A^3 برابر است با:

■ اتحادهای جبری در ماتریس ها: به ضرب های زیر دقت کنید:

$$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A-B)^2 = (A-B) \times (A-B) = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$(A+B) \times (A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

$$(AB)^2 = AB \times AB \times AB$$

حال اگر ضرب ماتریس های A و B تعویض پذیر باشند یعنی $AB = BA$ باشد، داریم:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$(AB)^3 = A^3 B^3$$

اگر ضرب ماتریس های A و B تعویض پذیر باشند، تمام اتحادهای جبری در ماتریس ها برقراره و بالعکس، یعنی اگر اتحادهای جبری در ماتریس ها برقرار باشد، متماً ضرب ماتریس ها تعویض پذیره.

۱؟ اگر A و B ماتریس های 3×3 و تعویض پذیر باشند، ثابت کنید:

۱ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

۲ $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

$$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) = (A+B) \times A + (A+B) \times B$$

۱ می دانیم $(A+B)^2$ برابر $(A+B) \times (A+B)$ است، پس:

A و B تعویض پذیرند.

$$A \times A + \underbrace{B \times A}_{A \times B} + A \times B + B \times B = A^2 + 2A \times B + B^2$$

۲ با توجه به ویژگی های ضرب ماتریس ها داریم:

$$(A-B) \times (A+B) = (A-B) \times A + (A-B) \times B$$

A و B تعویض پذیرند.

$$A \times A - \underbrace{B \times A}_{A \times B} + A \times B - B \times B = A^2 - B^2$$

❓ اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix}$ در تساوی $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ صدق کنند، مقدار $a + b$ را به دست آورید.

🔗 چون اتحاد $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ برقرار است، پس $AB = BA$ می‌باشد:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -a + 3b \\ -1 & a - b \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + a & 3 - a \\ -2 + b & 6 - b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + a = 5 \Rightarrow a = 6 \\ -2 + b = -1 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 7$$

📌 نکته: چون ضرب ماتریس‌های همانی و اسکالر با هر ماتریس هم مرتبه با خودشان تعویض پذیر هستند، پس می‌توان اتحادهای جبری را در مورد آن‌ها به کار برد.

❓ اگر $A^2 = A$ و $(A + 2I)^2 = mA + nI$ باشند، مقادیر m و n را به دست آورید.

🔗 چون ضرب A و $2I$ تعویض پذیر هستند، پس داریم:

$$(A + 2I)^2 = A^2 + 2A(2I) + (2I)^2 = A^2 + 4A + 4I$$

$$A^2 + 4A + 4I = A + 4A + 4I \Rightarrow (A + 2I)^2 = 5A + 4I$$

$A^2 = A$ است. داریم:

از مقایسه $5A + 4I$ با $mA + nI$ ، $m = 5$ و $n = 4$ است.

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

پرسش‌های تشریحی

درس
۱

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۹۰. اگر $A_{2 \times 3}$ و $B_{5 \times 2}$ باشند، آن‌گاه $A \times B$ انجام پذیر است.

۹۱. اگر $A_{3 \times 4}$ ، $B_{5 \times n}$ و $A \times B$ انجام پذیر باشد، مقدار n برابر است.

۹۲. اگر $A_{2 \times 5}$ و $B_{5 \times 3}$ باشند، ماتریس $A \times B$ از مرتبه است.

۹۳. اگر $A_{3 \times 4}$ و $B_{4 \times 3}$ باشند، ماتریس $B \times A$ دارای درایه است.

۹۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، بزرگ‌ترین درایه ماتریس $A \times B$ برابر است.

۹۵. درایه سطر اول و ستون اول ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ برابر است.

۹۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر است. (کتاب راهنمای معلم)

۹۷. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ برابر است.

۹۸. ماتریس عضو خنثی عمل ضرب است.

۹۹. ضرب ماتریس اسکالر با ماتریس هم مرتبه با خودش خاصیت جابه جایی است.

۱۰۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایه ماتریس A^2 برابر است.

● درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱۰۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A^{1403} = I$.

۱۰۲. اگر $A_{3 \times 6}$ و $B_{6 \times 2}$ باشند، ماتریس AB دارای ۳۶ درایه است.

(خرداد ۱۴۰۳)

۱۰۳. اگر $A \times B$ انجام پذیر باشد، حتماً $B \times A$ نیز انجام پذیر است.

۱۰۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $A \times B$ یک ماتریس قطری است.

۱۰۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $B \times A$ یک ماتریس اسکالر است.

۱۰۶. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم A^3 برابر است. (دی ۹۷)

۱۰۷. اگر $A \times B = \bar{O}$ باشد، حداقل یکی از ماتریس‌های A و B ماتریس صفر است.

۱۰۸. اگر $B = C$ باشد آن‌گاه $A \times B = A \times C$ است.

۱۰۹. در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد. (دی خارج ۱۴۰۱ - خرداد ۹۹)

۱۱۰. اگر A ماتریس اسکالر و B ماتریس هم‌مرتبه A باشد، آن‌گاه حاصل ضرب آن‌ها تعویض پذیر است. (خرداد ۱۴۰۳)

۱۱۱. قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار است. (دی خارج ۱۴۰۱)

۱۱۲. اگر برای ماتریس‌های متمایز A ، B و C داشته باشیم $AB = AC$ آن‌گاه لزوماً $B = C$ است. (خرداد ۹۸)

۱۱۳. اگر $A \times C = A \times D$ باشد، آن‌گاه ماتریس $C - D$ ماتریس صفر است.

۱۱۴. فقط می‌توان ماتریس‌های مربعی را به توان رساند.

۱۱۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، بزرگ‌ترین درایه ماتریس A^2 برابر ۱۸ است.

۱۱۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $B^2 A = A$ است.

۱۱۷. برای هر دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B ، در حالت کلی رابطه $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ برقرار است. (مرداد ۱۴۰۳)

۱۱۸. اگر A و B دو ماتریس 3×3 دلخواه باشند، آن‌گاه عبارت $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ همواره برقرار است. (شهریور ۱۴۰۰)

۱۱۹. اگر $A^2 = A$ باشد، در این صورت داریم: $(A + I)^2 = I + 3A$ (دی ۹۷)

۱۲۰. اگر $A - A^2 = \bar{O}$ باشد، آن‌گاه $A^{11} - A = \bar{O}$ است.

۱۲۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $A \times B$ و $B \times A$ را با درایه‌هایشان به دست آورید.

۱۲۲. با مثال نقض نادرستی حکم «اگر حاصل ضرب دو ماتریس A و B صفر باشد، حداقل یکی از ماتریس‌ها، ماتریس صفر است.» را نشان دهید.

۱۲۳. ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۱۲۴. مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۱۲۵. دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروضند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

۱۲۶. اگر $A = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر و $y \in \mathbb{Z}$ ، مقدار xy را به دست آورید.



۱۳۷. اگر $A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ و $2A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس AB را به دست آورید.

۱۳۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ باشند، $A \times B$ و $B \times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

۱۳۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس BA^2 را محاسبه کنید.

۱۳۰. اگر ماتریس ناصفر $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a \\ 4b \end{bmatrix}$ ، آن گاه مقدار m را به دست آورید.

۱۳۱. ماتریس های $A = [a \ b]$ و $B = \begin{bmatrix} x & b \\ a & 1-a \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر $AB = A$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

۱۳۲. اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 6 \end{bmatrix}$ و $a + c = 12$ باشد، مقدار $b + d$ را به دست آورید.

۱۳۳. اگر $A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $A \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ را با درایه هایش مشخص کنید.

(کتاب راهنمای معلم)

۱۳۴. چند ماتریس 2×2 مانند A وجود دارد که $A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ باشد؟

۱۳۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ ، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

(خرداد ۱۴۰۱ - شهریور ۱۴۰۰ - دی ۱۴۰۱)

(کتاب راهنمای معلم)

۱۳۶. با مثال نقص نشان دهید ضرب ماتریس های مربعی 2×2 خاصیت جابه جایی ندارد.

۱۳۷. ماتریس های $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر ماتریس $A \times B$ قطری باشد، ماتریس A^3 را با درایه هایش محاسبه کنید.

۱۳۸. اگر $A = \begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر x و y را به گونه ای تعیین کنید که $A \times B$ یک ماتریس قطری باشد.

(شهریور ۹۸)

۱۳۹. اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & ; i = j \\ i - j & ; i > j \\ j - i & ; i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ماتریس $A \times B$ را به دست آورید.

(کتاب راهنمای معلم)

۱۴۰. اگر $A = [i^2 - j]_{2 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 3} = \begin{cases} -1 & ; i = j \\ 0 & ; i < j \\ 2 & ; i > j \end{cases}$ باشد، حاصل $A \times B$ را به دست آورید.

۱۴۱. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه هایشان نوشته و سپس $A \times B$ و $B \times A$ را به دست آورید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & ; i = j \\ i - j & ; i > j \\ j - i & ; i < j \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & ; i = j \\ i + j & ; i > j \\ i - j + 2 & ; i < j \end{cases}$$

۱۴۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A را با درایه هایش مشخص کنید.

۱۴۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس A را با درایه هایش مشخص کنید.

۱۴۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $D = ABC$ باشد، به ازای کدام مقدار x مجموع درایه‌های قطر اصلی

و فرعی ماتریس D برابر هستند؟

۱۴۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۱۴۶. در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مقدار x را بیابید. (خرداد ۹۹ - شهریور ۱۴۰۲)

۱۴۷. معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ را حل کنید. (شهریور ۹۹)

۱۴۸. اگر $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار x را به دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۴۹. از معادله $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ مقدار $x+y$ را به دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۵۰. جواب‌های معادله $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۵۱. اگر $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر x را به دست آورید.

۱۵۲. اگر $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & -1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر x را به دست آورید.

۱۵۳. مجموع ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۱۵۴. اگر ضرب ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید. (دی ۹۷)

۱۵۵. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ در رابطه $(AB)^3 = A^3 B^3$ صدق می‌کنند. ماتریس $AB + 3BA$ را با درایه‌هایش بنویسید.

۱۵۶. در تساوی $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ مقدار m را به دست آورید.

۱۵۷. در تساوی $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 25 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقدار m را به دست آورید.

۱۵۸. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} ij & ; i \geq j \\ i-j & ; i < j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ که $b_{ij} = \begin{cases} 2 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$ باشند، ماتریس AB را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۱۵۹. اگر $A = [i+j]_{2 \times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ ، در این صورت $A \times B - B$ را به دست آورید. (دی خارج ۱۴۰۰)

۱۶۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B+C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $2B \times A + 2C \times A$ را به دست آورید.

۱۶۱. اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $B - \frac{3}{2}A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۱۶۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = [i^2 - 2j]$ باشد، ماتریس $A^2 + 3AB + A + 3B$ را با درایه‌هایش بنویسید.

۱۶۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^2 - A$ را به دست آورید.

۱۶۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A + 2B)^2$ را به دست آورید.

۱۶۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $(A - 2I)^2$ را به دست آورید.

۱۶۶. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -1 & ; i=j > 1 \\ 0 & ; i=j=1 \\ 1 & ; i=j < 1 \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^2 - 2I$ را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۳)

۱۶۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ و درایهٔ سطر دوم و ستون اول ماتریس A^2 برابر ۶- باشد، مقدار m را به دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۶۸. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^3 + 2A + 3I$ را به دست آورید.

۱۶۹. دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس‌های $A \times B$ ، $(A+B) \times (A-B)$ و $2A^2 \times 3I$ را به دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۷۰. اگر $A = \begin{bmatrix} \sin x & \frac{1}{\lambda} \\ 4 & \cos x \end{bmatrix}$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $A^2 - I = \overline{O}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ را به دست آورید.

۱۷۱. ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i=j \\ 2 & ; i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. ماتریس $A^2 - 4A$ را به دست آورید.

۱۷۲. اگر $j \geq 2$ و $i < j$ یا $i > j$ ، $b_{ij} = \begin{cases} i+1 & ; i=j \\ j-2 & ; i < j \\ 1 & ; i > j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ ، ماتریس $B^2 + 2I$ را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه سه است). (دی ۱۴۰۱)

۱۷۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^2 را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

۱۷۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^3 را به دست آورید.

۱۷۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^3 را به دست آورید.

۱۷۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^4 را به دست آورید.

۱۷۷. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم $A^2 - B = \overline{O}$. (دی ۹۸)

($\overline{O}$ ماتریس صفر است.)

۱۷۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = [ij]$ باشند، ماتریس $(A+B)^2 - B$ را به دست آورید.

۱۷۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^4 را به دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۸۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A + A^2 + A^3 + A^4$ را به دست آورید.

۱۸۱. با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^5 را محاسبه کنید. (مرداد ۱۴۰۳)

۱۸۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^5 - A^4$ را به دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۸۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{20} را با درایه هایش مشخص کنید.

۱۸۴. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7 را به دست آورید.

۱۸۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{25} را با درایه هایش مشخص کنید.

۱۸۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{21} را با درایه هایش مشخص کنید.

۱۸۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{13} - A^6$ را به دست آورید.

۱۸۸. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{17} + A^{18}$ را با درایه هایش بنویسید.

۱۸۹. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{21} - A^{21!}$ را با درایه هایش مشخص کنید.

۱۹۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{100} را با درایه هایش مشخص کنید.

۱۹۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{20} - A^{19}$ را به دست آورید.

۱۹۲. ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $B \times A^n = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار n را به دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۹۳. اگر A و B ماتریس‌های مربعی و تعویض پذیر باشند، ثابت کنید $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ است. (کتاب راهنمای معلم - شهریور ۱۴۰۱)

۱۹۴. ماتریس مربعی A و ماتریس‌های I هم مرتبه هستند ثابت کنید $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$ می‌باشد. (کتاب راهنمای معلم)

۱۹۵. با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطه $(A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$ را ثابت کنید. (دی ۱۴۰۱)

۱۹۶. اگر $A^2 = 2A$ و $(A - 3I)^2 = mA + nI$ باشند، مقادیر m و n را به دست آورید.

۱۹۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد. مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه $A^2 = mA + nI$ برقرار باشد. (I_2 ماتریس همانی است). (شهریور ۹۹)

۱۹۸. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ باشد، مقدار α و β را به دست آورید. (کتاب راهنمای معلم)

۱۹۹. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^3 = \alpha A + \beta I$ باشد، مقدار α و β را به دست آورید.

۲ بخش



پاسخنامه

فصل ۱

ماتریس و کاربردها

۱

درایه

۲

$$5 \times 3 = 15$$

۳

در درایه سطر دوم و ستون چهارم، $i=2$ و $j=4$ است پس:

$$a_{ij} = i^2 j - 3 \Rightarrow a_{24} = 2^2 \times 4 - 3 = 13$$

۴

در درایه سطر دوم و ستون سوم، $i=2$ و $j=3$ است پس:

$$a_{ij} = \frac{i+j}{2j} \Rightarrow a_{23} = \frac{2+3}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

۵

در درایه سطر اول و ستون دوم، $i=1$ و $j=2$ است. چون $i < j$ می باشد،

$$\text{از قانون } 1-j \text{ استفاده می کنیم: } a_{12} = 2^2 - 1 = 3$$

۶

$$A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \times 1 \times 1 & (-1)^{1+2} \times 1 \times 2 \\ (-1)^{2+1} \times 2 \times 1 & (-1)^{2+2} \times 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = 1$$

۷

نادرست.

در معرفی مرتبه ماتریس در سمت چپ تعداد سطرها و در سمت راست تعداد ستون ها را اعلام می کنیم، بنابراین مرتبه ماتریس 3×5 است.

۸

نادرست.

اگر تعداد ستون ها را m فرض کنیم، باید $5 \times m$ برابر ۱۲ شود. در این صورت مقدار طبیعی برای m به دست نمی آید. (هواست هست که تعداد ستون ها باید یه عدد طبیعی باشه.)

۹

درست

ماتریس A را با درایه هایش مشخص می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 + 1^2 & 1^2 + 2^2 \\ 2^2 + 1^2 & 2^2 + 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه ها برابر $2 + 5 + 5 + 8 = 20$ است.

۱۰

درست

درایه های سطر دوم و ستون سوم را معلوم می کنیم:

$$\begin{cases} a_{21} = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5 \\ a_{22} = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow \text{مجموع} = 5 + 5 + (-1) = 9 \\ a_{23} = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{13} = 1 - 3 = -2 \\ a_{23} = 2 - 3 = -1 \Rightarrow \text{مجموع} = (-2) + (-1) + 10 = 7 \\ a_{33} = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10 \end{cases}$$

بنابراین مجموع درایه های سطر دوم و ستون سوم برابر $9 + 7 = 16$ است.

۱۱

a_{12} درایه سطر ۱ و ستون ۲ است که برابر ۳- می باشد. a_{23} درایه سطر ۲ و ستون ۳ می باشد که برابر ۴ و a_{21} درایه سطر ۲ و ستون ۱ می باشد که برابر ۲ است، پس:

$$a_{12} \times (a_{23} + a_{21}) = -3 \times (4 + 2) = -3 \times 6 = -18$$

۱۲

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

۱۳

مجموع درایه های a_{12} ، a_{22} و a_{32} را می خواهیم:

$$\begin{cases} a_{12} = 1 + 2 = 3 \\ a_{22} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_{12} + a_{22} + a_{32} = 3 + 4 + (-1) = 6 \\ a_{32} = 3 - 4 = -1 \end{cases}$$

۱۴

درایه های ستون دوم A همان a_{12} ، a_{22} و a_{32} هستند، پس:

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = i - \frac{j}{2} \Rightarrow a_{12} = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0$$

$$i = j \Rightarrow a_{ij} = i^2 - j^i \Rightarrow a_{22} = 2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$$

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = i^2 - j^i \Rightarrow a_{32} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$$

بنابراین مجموع درایه های ستون دوم برابر $0 + 0 + 1 = 1$ است.

۱۵

با توجه به ضابطه a_{ij} داریم:

$$i = j \Rightarrow a_{ij} = 2 \Rightarrow a_{33} = 2$$

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = i + j \Rightarrow a_{31} = 3 + 1 = 4$$

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = i - j \Rightarrow a_{12} = 1 - 2 = -1$$

۱۶

با توجه به ضابطه a_{ij} داریم:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 2 & -3 & 2^2 & 2^4 \\ 2 & 2 & -3 & 3^4 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 16 \\ 2 & 2 & -3 & 81 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

۱۷

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 0 & 0 \\ 1 & 2+2 & 0 \\ 1 & 2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

۱۸

برای نوشتن ماتریس A با درایه هایش باید توجه داشته باشیم که صفر عددی زوج است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۹

$$A = \begin{bmatrix} 2-1 & 2 & 1+3 & 2-4 \\ 2 & 2+2 & 2-3 & 2 \\ 3+1 & 2-2 & 2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

۳۰

$$\frac{1}{2}$$

در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

۳۱

۳

$$2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

۳۲

هم‌مرتبه

۳۳

دارد.

۳۴

۳

در ماتریس اسکالر درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\begin{cases} n + 2 = 4 \Rightarrow n = 2 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases} \Rightarrow m + n = 1 + 2 = 3$$

۳۵

-۴

در ماتریس اسکالر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

بنابراین x می‌تواند صفر یا -1 باشد. از آن جایی که درایه $\frac{2}{x+1}$ به ازای

$x = -1$ تعریف نمی‌شود، پس فقط $x = 0$ قابل قبول است. بنابراین داریم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{y}{-2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{اسکالر است.}} \frac{y}{-2} = 2 \Rightarrow y = -4$$

پس $x + y$ برابر -4 می‌باشد.

۳۶

صفر

۳۷

-۸

ماتریس همانی، ماتریس $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد، پس:

$$\begin{cases} 4^{x-y} = 1 \Rightarrow 4^{x-y} = 4^0 \Rightarrow x - y = 0 \\ 5^{x-4} = 1 \Rightarrow 5^{x-4} = 5^0 \Rightarrow x - 4 = 0 \\ x + y + z = 0 \Rightarrow 4 + 4 + z = 0 \Rightarrow z = -8 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 4$$

۳۸

۱۴

ماتریس $A + 2B$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A + 2B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 5 + 4 + (-5) + 10 = 14 \end{aligned}$$

۲۰

$$A = \begin{bmatrix} 3-2 & 3-4 & 3-6 \\ 6-2 & 6-4 & 6-6 \\ 9-2 & 9-4 & 9-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

۲۱

$$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2-2 & 3-2 \\ 1 & 2+1 & 3-2 \\ 1 & 1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۲۲

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 - 2 \times 1 \times 1 & 1^2 - 2 \times 1 \times 2 & 1^2 - 2 \times 1 \times 3 & 1^2 - 2 \times 1 \times 4 \\ 2^2 - 2 \times 2 \times 1 & 2^2 - 2 \times 2 \times 2 & 2^2 - 2 \times 2 \times 3 & 2^2 - 2 \times 2 \times 4 \\ 3^2 - 2 \times 3 \times 1 & 3^2 - 2 \times 3 \times 2 & 3^2 - 2 \times 3 \times 3 & 3^2 - 2 \times 3 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 3 & -3 & -9 & -15 \end{bmatrix}$$

۲۳

ابتدا ماتریس‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = [1-1 \quad 1-2 \quad 1-3] = [0 \quad -1 \quad -2]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1^1-1 & 1^2-2 & 1^3-3 \\ 2^1-1 & 2^2-2 & 2^3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس C به صورت زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

۲۴

ابتدا ماتریس‌های A و B را با درایه‌هایش می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2^2-1 \\ 1^2-2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1^2+1 & 1^2+2 \\ 2^2+1 & 2^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس C به صورت زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

۲۵

۹

درایه‌های قطر اصلی ۱ و ۸ هستند، پس $1 + 8 = 9$ می‌باشد.

۲۶

سطری

۲۷

ستونی

۲۸

برابر

۲۹

اسکالر

۳۹

۲۱

ابتدا m و n را معلوم می‌کنیم:

$$3A + B = I \Rightarrow 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & m \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & m \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & m+9 \\ 0 & n+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m+9=0 \Rightarrow m=-9 \\ n+6=1 \Rightarrow n=-5 \end{cases}$$

حال ماتریس $A - 2B$ را به دست می‌آوریم:

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -18 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{بزرگ‌ترین درایه} = 21$$

۴۰

-۱۶

$$4 \begin{bmatrix} x+5 & 0 \\ 1 & y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4(x+5) & 0 \\ 4(1) & 4(y-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4(x+5) = 4 \Rightarrow x+5=1 \Rightarrow x=-4 \\ 4(y-1) = 12 \Rightarrow y-1=3 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy = (-4) \times 4 = -16$$

۴۱

نادرست. تعداد درایه‌های مربعی A از مرتبه n برابر n^2 است که عددی مربع کامل می‌باشد، در حالی که 32 مربع کامل نیست.

۴۲

نادرست

در ماتریس صفر تمام درایه‌ها صفر است اما مرتبه ماتریس می‌تواند هر چیزی باشد.

۴۳

نادرست. ماتریس‌های اسکالر، مربعی هستند ولی ماتریس صفر ممکن است مربعی نباشد.

۴۴

نادرست

درایه‌های واقع بر قطر اصلی این‌گونه‌اند.

۴۵

درست. اگر در ماتریس مربعی مرتبه n ، $i + j = n + 1$ باشد a_{ij} روی قطر فرعی قرار دارد.

۴۶

نادرست

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس قطری نیز می‌توانند صفر باشند، مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است.

۴۷

نادرست. ماتریس مربعی مرتبه ۱ ماتریس سطری نیز هست.

۴۸

درست. ماتریس مربعی از مرتبه ۱، ماتریس ستونی هم هست زیرا فقط یک ستون دارد.

۴۹

نادرست. در ماتریس قطری علاوه بر درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی، درایه‌های واقع بر قطر اصلی نیز می‌توانند صفر باشند.

۵۰

درست

ماتریس‌های اسکالر نوعی از ماتریس‌های مربعی هستند.

۵۱

نادرست

هر ماتریس قطری لزوماً اسکالر نیست، مثلاً ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ قطری است اما اسکالر نیست.

۵۲

درست. مثلاً ماتریس صفر از مرتبه 3×2 باشد تعداد درایه‌های آن برابر ۶ است.

۵۳

نادرست

در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + c = 0 \\ c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2 \end{cases}$$

حال داریم:

$$a + c = 0 \xrightarrow{c=2} a = -2$$

$$a + 2b = 0 \xrightarrow{a=-2} -2 + 2b = 0 \Rightarrow b = 1$$

توجه کنید در ماتریس قطری مهم نیست که درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشند یا نباشند.

۵۴

درست

۵۵

درست

۵۶

نادرست

طرفین تساوی ماتریسی را می‌توان بر یک عدد غیرصفر تقسیم کرد.

۵۷

نادرست

ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع است.

۵۸

چون ماتریس A مربعی است، پس:

$$3n - 7 = 5 - n \Rightarrow 4n = 12 \Rightarrow n = 3$$

حال ماتریس $B = [3i - 3j]_{2 \times 2}$ را با درایه‌هایش معلوم می‌کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} 3(1) - 3(1) & 3(1) - 3(2) \\ 3(2) - 3(1) & 3(2) - 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$