

کتاب‌های
سه‌بعدی



آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی (دهم)



کاظم اجاللی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



انتشارات
انگه

مقدمه‌ی مؤلفان

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای ریاضیات سال دهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آن‌ها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آن‌ها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همه‌ی تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در انتهای هر فصل آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

وظیفه‌ی خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، واحد حروف‌چینی خانم زهرا میرزایی و واحد ویراستاری خانم‌ها مریم موحدی مهر و عاطفه ربیعی به سرپرستی خانم سکینه مختار که زحمات زیادی برای آماده‌سازی و تولید کتاب کشیده‌اند تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای محمدصادق جوهری برای ارسال اشکالات کتاب در چاپ اول متشکریم.

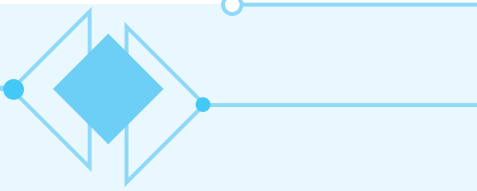
فهرست

◆ فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

۲	درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۸	تمرین
۱۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲	درس دوم: متمم یک مجموعه
۱۵	تمرین
۱۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۸	درس سوم: الگو و دنباله
۲۲	تمرین
۲۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۷	درس چهارم: دنباله‌های حسابی و دنباله‌های هندسی
۳۶	تمرین
۳۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل دوم: مثلثات

۴۴	درس اول: نسبت‌های مثلثاتی
۴۹	تمرین
۵۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۴	درس دوم: دایره مثلثاتی
۶۳	تمرین
۶۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۶۸	درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
۷۲	تمرین
۷۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



◆ فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

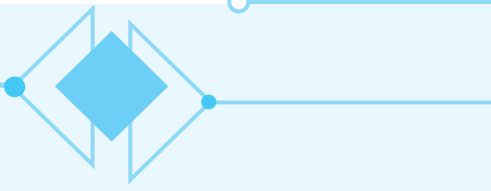
۷۸	درس‌های اول و دوم: ریشه و توان - ریشه n ام
۸۴	تمرین
۸۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۸۸	درس سوم: توان‌های گویا
۹۱	تمرین
۹۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۹۴	درس چهارم: عبارت‌های جبری
۱۰۳	تمرین
۱۰۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

۱۱۲	درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن
۱۱۶	تمرین
۱۱۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲۰	درس دوم: سهمی
۱۲۵	تمرین
۱۲۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۳۲	درس سوم: تعیین علامت
۱۴۴	تمرین
۱۴۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل پنجم: تابع

۱۵۲	درس‌های اول و دوم: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن - دامنه و برد توابع
۱۶۳	تمرین
۱۶۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۷۴	درس سوم: انواع تابع
۱۸۲	تمرین
۱۸۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



◆ فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

۱۹۲	درس اول: شمارش
۱۹۶	تمرین
۱۹۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۰۰	درس دوم: جایگشت
۲۰۳	تمرین
۲۰۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۰۵	درس سوم: ترکیب
۲۰۹	تمرین
۲۱۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل هفتم: آمار و احتمال

۲۱۴	درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۲۲۱	تمرین
۲۲۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۲۶	درس‌های دوم و سوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه - متغیر و انواع آن
۲۲۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

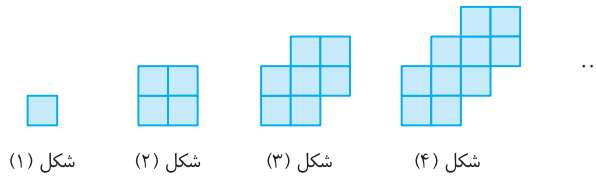
◆ فصل هشتم: راه‌حل تمرین‌ها

۲۳۰	راه‌حل تمرین‌ها
-----	-----------------

◆ فصل نهم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۸۶	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
-----	----------------------------

به شکل‌های زیر دقت کنید:



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴) ...

این شکل‌ها بر اساس یک الگو ساخته شده‌اند. در این‌جا منظورمان از این‌که این شکل‌ها الگو دارند، این است که هر شکل از شکل قبلی‌اش به‌دست آمده، به طوری که با آن، اشتراک‌ها و اختلاف‌هایی دارد. در مورد این شکل‌ها می‌توان سؤال‌های مختلفی مطرح کرد. مثلاً شکل بیستم از چند مربع تشکیل شده است؟ محیط شکل بیستم چند است؟ مساحت شکل بیستم چند است؟ و سؤال‌هایی از این قبیل. برای یافتن پاسخ این سؤال‌ها، باید با مقایسه شکل‌ها مشخص کنیم که چه ویژگی‌هایی ثابت می‌مانند و چه ویژگی‌هایی تغییر می‌کنند. این کار را **الگویابی** می‌نامند. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم تعداد مربع‌های کوچک در شکل بیستم را پیدا کنیم. الگوی این شکل‌ها این‌طور است: شکل اول ۱ مربع دارد. به شکل اول ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل دوم درست شده است. به شکل دوم ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل سوم به دست آمده است و همین‌طور این کار را ادامه داده‌ایم. هر بار ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل بعدی درست شود. تعداد مربع‌های کوچک در شکل اول را a_1 ، تعداد مربع‌های کوچک در شکل دوم را a_2 ، ... و به‌طورکلی تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام را a_n می‌گیریم. به جدول زیر توجه کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع‌های کوچک	۱	$1+3$	$1+2 \times 3$	$1+3 \times 3$...	$1+(n-1) \times 3$

از روی این جدول معلوم می‌شود که

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

بنابراین، تعداد مربع‌های کوچک در شکل بیستم برابر است با $a_{20} = 3 \times 20 - 2 = 58$.

دستور $a_n = 3n - 2$ برای تعداد مربع‌های کوچک در این مثال را **جمله عمومی الگو** می‌نامند. به کمک جمله عمومی، می‌توانیم خیلی از سؤال‌ها در مورد الگو را پاسخ دهیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم بدانیم شکل چندم از این الگو با ۶۷ مربع کوچک ساخته شده است. اگر شماره این شکل n باشد، آن‌گاه $a_n = 67$. بنابراین

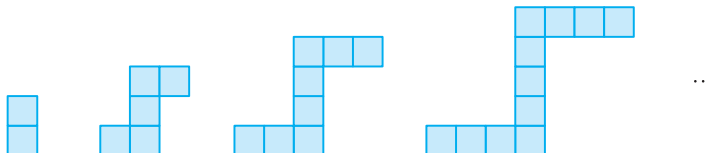
$$a_n = 3n - 2 = 67$$

در نتیجه $n = 23$ ، یعنی شکل ۲۳ ام با ۶۷ مربع کوچک درست شده است.

یک سؤال دیگر: آیا شکلی در الگوی بالا وجود دارد که با ۹۵ مربع کوچک ساخته شده باشد؟

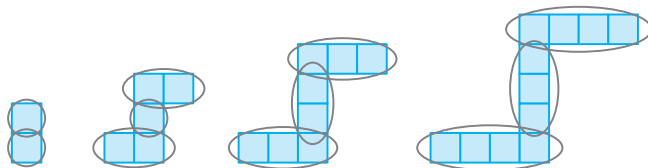
در این‌صورت $a_n = 3n - 2 = 95$ ، یعنی $n = \frac{97}{3}$. بنابراین، چون n طبیعی نمی‌شود، پس شکلی با ۹۵ مربع کوچک نداریم.

در الگوی زیر، شکل n ام از چند مربع کوچک درست شده است؟ شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است؟



راه حل

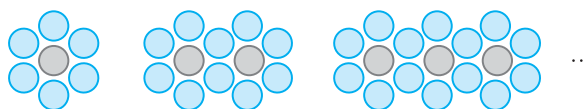
در این جا، از شکل اول چیز زیادی متوجه نمی‌شویم. به شکل دوم نگاه کنید. در هر دو قسمت افقی آن، دو مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی، یک مربع کوچک وجود دارد. شکل سوم در هر دو قسمت افقی اش سه مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی، دو مربع کوچک دارد. در شکل چهارم، در هر دو قسمت افقی، چهار مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی، سه مربع کوچک وجود دارد.



بنابراین، شکل n ام از دو گروه n تایی و یک گروه $(n-1)$ تایی مربع کوچک درست شده است. به این ترتیب، اگر جمله عمومی تعداد مربع‌ها را a_n بگیریم، معلوم می‌شود که $a_n = 2n + (n-1) = 3n - 1$. توجه کنید که تعداد مربع‌های کوچک شکل اول هم از این تساوی به دست می‌آید. برای این که بفهمیم شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است، باید معادله $a_n = 3n - 1 = 95$ را حل کنیم، که از آن به دست می‌آید $n = 32$ ، یعنی شکل ۳۲ ام از ۹۵ مربع کوچک درست شده است.

مسئله ۲

در الگوی زیر، در شکلی که ۲۰ دایره خاکستری دارد، چند دایره رنگی وجود دارد؟

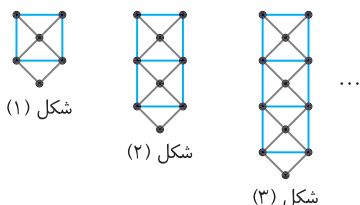


راه حل

توجه کنید که در شکل اول ۶ دایره رنگی وجود دارد. در شکل دوم ۴ دایره رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، در شکل سوم 2×4 دایره رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، ... در شکل n ام $(n-1) \times 4$ دایره رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد دایره‌های رنگی در شکل n ام را a_n بگیریم، $a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$ (توجه کنید که شکل n ام، n دایره خاکستری دارد). بنابراین $a_{20} = 4 \times 20 + 2 = 82$.

تست ۱

تعداد نقاط شکل n ام در الگوی مقابل چندتا است؟

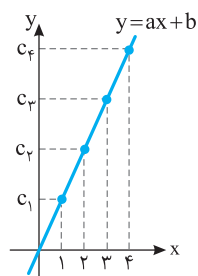


- (۱) $n + 5$
- (۲) $2n + 4$
- (۳) $3n + 3$
- (۴) $4n + 2$

راه حل

شکل اول دارای ۶ نقطه است و در شکل‌های بعدی، در هر مرحله ۳ نقطه به شکل اضافه می‌شود. پس در مرحله n ام $(n-1) \times 3$ نقطه به شکل اضافه شده است. یعنی تعداد نقاط شکل n ام برابر است با $3(n-1) + 6 = 3n + 3$.

الگوی خطی



در همه الگوهایی که تا این جا دیدیم، اختلاف هر دو جمله متوالی، مقداری ثابت بوده و جمله عمومی به شکل $c_n = an + b$ بود. این الگوها را **الگوهای خطی** می‌نامند. زیرا نقطه‌های $(1, c_1), (2, c_2), \dots, (n, c_n)$ روی خط $y = ax + b$ قرار دارند.

تعریف اگر جمله عمومی دنباله‌ای به شکل $c_n = an + b$ باشد، که در این جا a و b عددهایی حقیقی و ثابت‌اند، این الگوها را الگوهای خطی می‌نامند.

اگر دو جمله متوالی الگویی با جمله عمومی $c_n = an + b$ را از هم کم کنیم، اختلاف آن‌ها برابر با a می‌شود:

$$c_{n+1} - c_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$$

a در حقیقت شیب خط متناظر این الگو، یعنی $y = ax + b$ است.

اگر دو نقطه از خطی را بدانیم، می‌توانیم معادله آن را بنویسیم. اگر دو جمله از الگویی خطی را هم بدانیم، می‌توانیم جمله عمومی آن را پیدا کنیم.

مسئله ۳

در الگویی خطی، جمله‌های سوم و دوازدهم به ترتیب ۱۱ و ۴۷ هستند. جمله عمومی این الگو را پیدا کنید.

راه حل

فرض کنید جمله عمومی این الگو به شکل $c_n = an + b$ باشد. در این صورت $c_3 = 11$ و $c_{12} = 47$. پس

$$\begin{cases} 3a + b = 11 \\ 12a + b = 47 \end{cases}$$

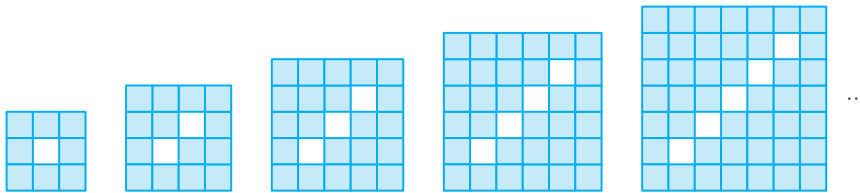
اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم، به دست می‌آید $a = 4$ و $b = -1$. بنابراین جمله عمومی الگو به صورت $a_n = 4n - 1$ است.

الگوهای غیر خطی

لزومی ندارد که جمله عمومی هر الگویی خطی باشد. چند نمونه الگوی غیرخطی را در مسائل زیر مشاهده می‌کنید.

مسئله ۴

تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟

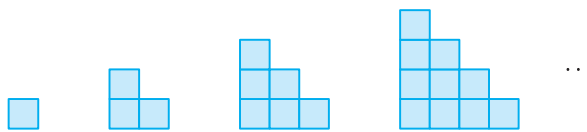


راه حل

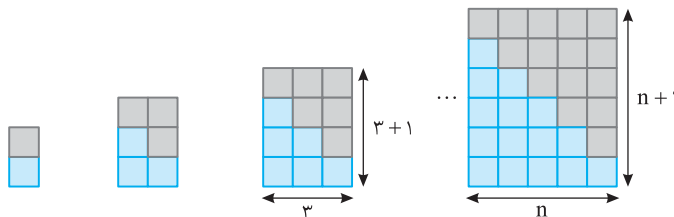
تعداد کل مربع‌های کوچک شکل n ام $(n+2)^2$ تا است، که از این تعداد n تا سفیدند. بنابراین اگر تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل n ام را a_n بگیریم، $a_n = (n+2)^2 - n = n^2 + 3n + 4$.

به کمک الگوها می‌توان برخی مجموع‌ها را حساب کرد.

مثال: می‌خواهیم مقدار مجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$ را حساب کنیم. الگوی زیر را در نظر بگیرید که در آن تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام $1 + 2 + \dots + n$ است:



اکنون توجه کنید که اگر دو شکل یک‌جور از این‌ها را مانند زیر روی هم قرار دهیم، مستطیلی به دست می‌آید که مساحتش دو برابر تعداد مربع‌های کوچک آن شکل است.



مستطیل متناظر شکل n ام، مستطیلی به طول $n+1$ و عرض n است، پس مساحتش $n(n+1)$ است و در نتیجه

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مسئله ۵

مجموع‌های زیر را حساب کنید:

(الف) $2+4+6+\dots+2n$

راه‌حل

الف) توجه کنید که

(ب) $1+3+5+\dots+(2n-1)$

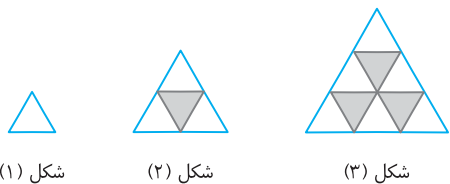
$$2+4+6+\dots+2n = 2(1+2+\dots+n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$$

ب) توجه کنید که برای جمع کردن عددهای فرد $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ می‌توانیم همه عددهای طبیعی $1, 2, 3, 4, \dots$ و $2n$ را با هم جمع کرده، سپس عددهای زوج $2, 4, 6, \dots, 2n$ را از این مجموع کم کنیم. بنابراین، با توجه به قسمت (الف)،

$$1+3+\dots+2n-1 = (1+2+3+\dots+2n) - (2+4+6+\dots+2n) = \frac{2n(2n+1)}{2} - n(n+1) = 2n^2 + n - n^2 - n = n^2$$

تست ۲

تعداد مثلث‌های رنگ نشده در الگوی زیر، در شکل بیستم چند تا است؟



- ۱۹۰ (۱)
- ۲۰۰ (۲)
- ۲۱۰ (۳)
- ۲۲۰ (۴)

راه‌حل

تعداد مثلث‌های رنگ نشده در شکل n م برابر است با $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. بنابراین در شکل بیستم $\frac{20 \times 21}{2} = 210$ مثلث رنگ نشده داریم.

مسئله ۶

مجموع n جمله اول یک الگوی خطی را که جمله عمومی آن $c_n = an + b$ است، حساب کنید.

راه‌حل

اگر این مجموع را S بنامیم، S به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$S = (a+b) + (2a+b) + (3a+b) + \dots + (na+b) = a(1+2+3+\dots+n) + \underbrace{(b+b+b+\dots+b)}_{n \text{ تا } b}$$

$$= \frac{an(n+1)}{2} + nb = \frac{n}{2}(2b + (n+1)a) = \frac{n}{2}(a+b+an+b) = \frac{n}{2}(c_1 + c_n)$$

دنباله

در نمایش مجموعه‌های عددی، عددهایی را پشت سر هم می‌نویسیم و ترتیب نوشتن عددها مهم نیست. مثلاً، مجموعه‌های $\{1, 2, 3\}$ و $\{3, 2, 1\}$ برابرند. ردیف‌هایی از عددها که در آن‌ها ترتیب مهم است، نام خاصی دارند.

تعریف دنباله، ردیفی از عددها است که ترتیب دارند. این عددها را جمله‌های دنباله می‌نامند.

مثال: عددهای طبیعی را می‌توانیم به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم: $1, 2, 3, 4, \dots$. به این ردیف از عددها، دنباله عددهای طبیعی می‌گویند. در این‌جا ترتیب مهم است: اولین عدد ۱ است، دومین عدد ۲ است، سومین عدد ۳ است و همین‌طور در مورد بقیه عددها. بنابراین، دنباله $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ دنباله عددهای طبیعی نیست.

اگر جمله اول دنباله را a_1 ، جمله دوم آن را a_2 ، ... و جمله n م آن را a_n نشان دهیم، a_n را جمله عمومی دنباله می‌نامند. اگر $a_n = an^2 + bn + c$ (که در این‌جا a, b, c و عددهای حقیقی و ثابت‌اند و $a \neq 0$) دنباله را دنباله درجه ۲ می‌نامند.

مسئله ۷

جمله عمومی مناسبی برای دنباله $2, 6, 12, 20, 30, \dots$ پیدا کنید.

راه‌حل

جمله عمومی این دنباله را a_n بنامید. توجه کنید که

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2+4, \quad a_3 = 2+4+6, \quad a_4 = 2+4+6+8, \quad a_5 = 2+4+6+8+10$$

بنابراین جمله عمومی $a_n = 2+4+6+\dots+2n = 2(1+2+\dots+n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n^2 + n$ مناسب است.

مسئله ۸

جمله چندم دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{3n-1}{5n+7}$ برابر با $\frac{7}{12}$ است؟

راه حل

اگر معادله $\frac{3n-1}{5n+7} = \frac{7}{12}$ را حل کنیم، به دست می‌آید $n=61$. بنابراین جمله ۶۱ام این دنباله برابر با $\frac{7}{12}$ است.

تست ۳

اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مربع کامل باشد. عدد اول دسته یازدهم کدام است؟

$\{2, 4\}$, $\{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $\{18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}$, ...

دسته اول دسته دوم دسته سوم

۴۰۲ (۴)

۲۲۶ (۳)

۱۷۰ (۲)

۱۰۲ (۱)

راه حل

عدد آخر دسته اول ۲، عدد آخر دسته دوم ۴، عدد آخر دسته سوم ۶ و ... عدد آخر دسته nام برابر $(2n)^2$ است. پس عدد آخر دسته دهم 20^2 است. بنابراین عدد اول دسته یازدهم ۴۰۲ است.

مثال: در دنباله‌ای $a_1 = 2$ و هر جمله به‌جز جمله اول، از دو برابر جمله قبل از آن، یک واحد بیشتر است. یعنی به ازای هر عدد

طبیعی مانند n ، $a_{n+1} = 2a_n + 1$. توجه کنید که به این ترتیب

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5, \quad a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times 5 + 1 = 11$$

و به همین ترتیب می‌توانیم مقدار هر جمله را از روی مقدار جمله قبل از آن پیدا کنیم.

تست ۴

در دنباله‌ای با جمله اول ۱، مکعب هر جمله، ۹۹ برابر مکعب جمله قبل از آن است. جمله ۱۰۰ام این دنباله کدام است؟

۹۹^{۹۹} (۴)۹۹^{۳۳} (۳)۳۳^{۹۹} (۲)۳۳^{۳۳} (۱)

راه حل

فرض کنید جمله عمومی دنباله، a_n باشد. در این صورت $a_n^3 = 99a_{n-1}^3$ ، پس $\frac{a_n^3}{a_{n-1}^3} = 99$. اگر در این تساوی n را از ۲ تا ۱۰۰

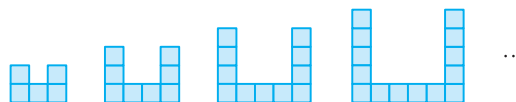
جای گذاری کنیم و تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، معلوم می‌شود که $a_{100}^3 = a_1^3 \times \frac{a_2^3}{a_1^3} \times \frac{a_3^3}{a_2^3} \times \dots \times \frac{a_{100}^3}{a_{99}^3} = a_1^3 \times 99^{99}$ (توجه کنید که $a_1 = 1$). بنابراین $a_{100} = 99^{33}$.

تمرین

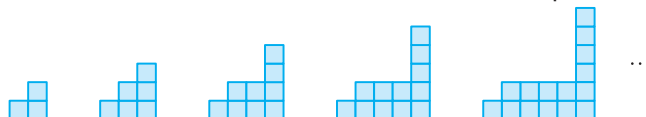
۴۵- در الگوی زیر، شکل nام از چند نقطه رنگی درست شده است؟



۴۶- در شکل nام الگوی زیر چند مربع وجود دارد؟



۴۷- تعداد مربع‌های کوچک در شکل nام الگوی زیر چند تا است؟



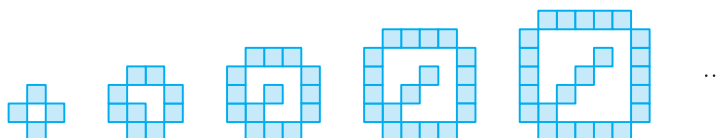
۴۸- شکل n ام الگوی زیر از چند نقطه رنگی درست شده است؟



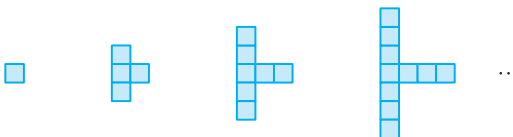
۴۹- تعداد نقطه‌ها در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟



۵۰- شکل n ام الگوی زیر از چند مربع کوچک درست شده است؟



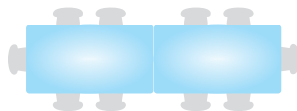
۵۱- برای ساختن شکل ۵۰ ام در الگوی زیر چند مربع کوچک لازم داریم؟




۵۲- دور یک نوع میز شش نفر می‌توانند بنشینند.

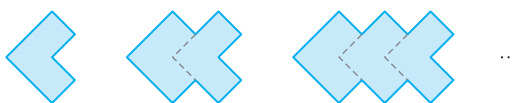


می‌توانید دو تا از این میزها را به هم بچسبانید تا چهار نفر دیگر هم بتوانند بنشینند.

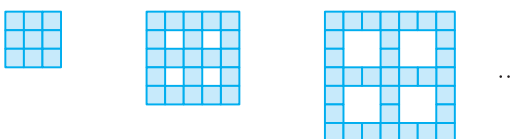


برای این که ۳۴ نفر بتوانند بنشینند، دست کم چند میز را باید به هم بچسبانید؟

۵۳- شکل‌های زیر از چسباندن تعدادی کاشی به شکل  ساخته شده‌اند، که در آن طول ضلع هر مربع کوچک ۱ سانتی‌متر است. محیط شکل n ام چقدر است؟



۵۴- تعداد مربع‌های رنگی در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟



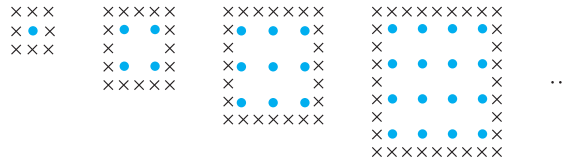
۵۵- در شکل n ام الگوی زیر چند نقطه وجود دارد؟



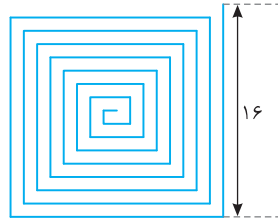
۵۶- تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟



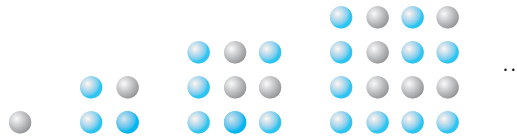
۵۷- آیا در الگوی زیر شکلی وجود دارد که در آن تعداد نقطه‌ها با تعداد ضربدرها برابر باشد؟



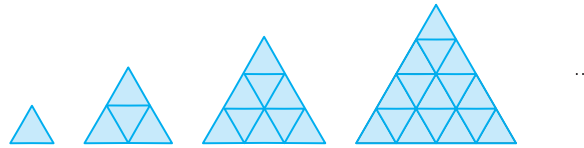
۵۸- در شکل زیر طول ریسمان رنگی چقدر است؟ (فاصله دو تکه مجاور ۱ سانتی‌متر است.)



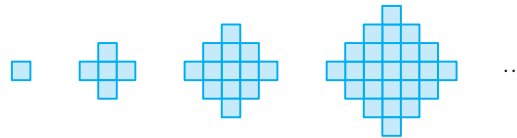
۵۹- به کمک الگوی زیر ثابت کنید $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.



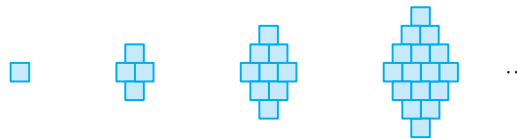
۶۰- در شکل n ام الگوی زیر چند مثلث کوچک وجود دارد؟



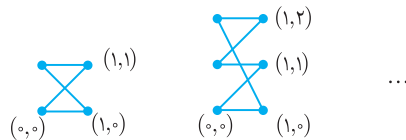
۶۱- شکل n ام الگوی زیر از چند مربع کوچک درست شده است؟



۶۲- آیا می‌توان با ۱۲۳ مربع کوچک یکی از شکل‌های الگوی زیر را ساخت؟



۶۳- مطابق شکل، الگوی زیر روی صفحه مختصات رسم شده است. طول رشته چندم برابر با $12\sqrt{2} + 8$ است؟



۶۴- در هر مورد جمله عمومی مناسبی برای دنباله‌ای که چند جمله اول آن داده شده است، پیدا کنید.

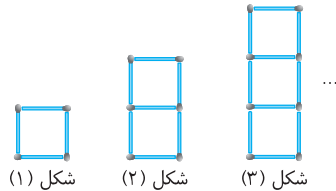
(الف) $1, 3, 5, \dots$ (ب) $-1, 3, -5, \dots$

(پ) $0, 3, 8, 15, \dots$ (ت) $2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots$

۶۵- در دنباله با جمله عمومی $a_n = 2 \cdot n - n^2$ چند جمله مثبت‌اند؟

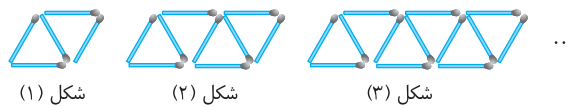
۶۶- جمله چندم دنباله با جمله عمومی $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{4n+4}$ برابر با $-\frac{1}{6}$ است؟

۳۴- در الگوی مقابل که به کمک چوب کبریت ساخته شده است، تعداد چوب کبریت‌ها در شکل بیستم کدام است؟



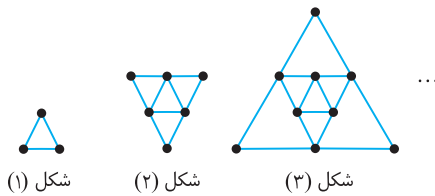
- ۵۹ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۶۱ (۳)
- ۶۲ (۴)

۳۵- تعداد چوب کبریت‌ها در شکل پانزدهم الگوی زیر چندتا است؟



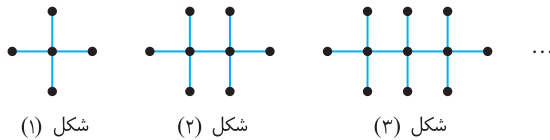
- ۵۹ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۶۱ (۳)
- ۶۲ (۴)

۳۶- در شکل n ام از الگوی مقابل چند نقطه دیده می‌شود؟



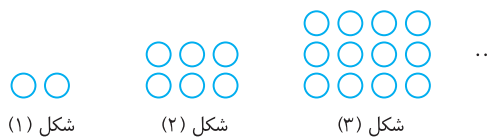
- $\frac{n(n+1)}{2}$ (۱)
- 3n (۲)
- n+2 (۳)
- n^2+2 (۴)

۳۷- تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چندتا است؟



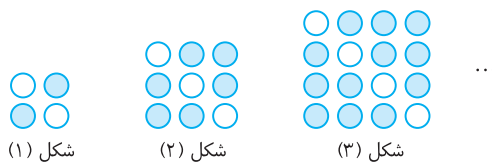
- ۶۰ (۱)
- ۶۱ (۲)
- ۶۲ (۳)
- ۶۴ (۴)

۳۸- در شکل بیستم الگوی مقابل چند دایره وجود دارد؟



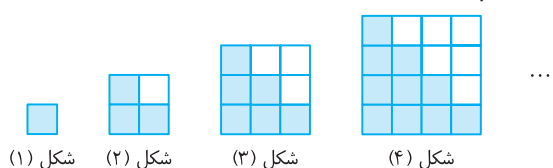
- ۴۰۰ (۱)
- ۴۱۰ (۲)
- ۴۲۰ (۳)
- ۴۴۰ (۴)

۳۹- تعداد دایره‌های رنگی در شکل n ام الگوی مقابل کدام است؟



- n^2+1 (۱)
- $2n^2$ (۲)
- $3n^2-1$ (۳)
- n^2+n (۴)

۴۰- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ شده و رنگ نشده در شکل سی‌ام چندتا است؟



- ۱۵ (۱)
- ۲۰ (۲)
- ۳۰ (۳)
- ۳۵ (۴)

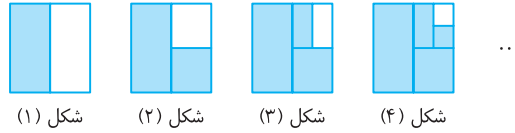
۴۱- مقدار عبارت $A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ کدام است؟

- ۵۰۵۰ (۴)
- ۵۰۰۰ (۳)
- ۴۵۵۰ (۲)
- ۴۵۰۰ (۱)

۴۲- مقدار عبارت $A = 1 \frac{1}{20} + 2 \frac{2}{20} + 3 \frac{3}{20} + \dots + 19 \frac{19}{20}$ کدام است؟

- (۱) $190/5$ (۲) $199/5$ (۳) $190/95$ (۴) $190/9$

۴۳- در الگوی زیر، مساحت مربع بزرگ یک واحد مربع است. کل مساحت رنگ شده در شکل n ام چقدر از کل مساحت رنگ شده در شکل قبلی آن بیشتر است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2^n}$ (۳) $\frac{1}{2^{n-1}}$ (۴) $\frac{1}{2^{n-2}}$

۴۴- در الگوی زیر، در شکل چندم تعداد گوی‌های رنگی برابر با ۱۱۳ است؟

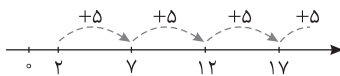


- (۱) ۱۷ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۴

۴۵- یک دنباله دارای الگوی خطی است. اگر جمله اول آن ۳ و جمله پنجم آن -۵ باشد، کدام جمله آن برابر -۳۹ است؟

- (۱) t_{22} (۲) t_{21} (۳) t_{11} (۴) t_{12}

۴۶- جمله ۱۱۰ ام الگوی زیر کدام است؟



- (۱) ۵۴۶ (۲) ۵۴۷ (۳) ۵۴۸ (۴) ۵۴۹

۴۷- کدام یک می‌تواند جمله عمومی دنباله $2, 3, 10, 15, \dots$ باشد؟

- (۱) $n+1$ (۲) $n^2 - (-1)^n$ (۳) $3n^2 - 8n + 7$ (۴) $2n^2 - 5n + 5$

۴۸- در دنباله $a_n = \frac{3n+1}{n+10}$ چند جمله کوچک‌تر از $2/99$ وجود دارد؟

- (۱) ۲۹۰۰ (۲) ۲۹۹۰ (۳) ۲۹۸۱ (۴) ۲۸۸۹

۴۹- در یک دنباله، هر جمله (به‌جز جمله اول) مربع جمله قبلی است. اگر $a_1 = 2$ ، جمله چهارم دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۵ (۳) ۶۴ (۴) ۲۵۶

۵۰- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مضرب ۵ باشد. عدد اول دسته پنجاهم کدام است؟

$\{1, 3, 5\}$, $\{7, 9, 11, 13, 15\}$, $\{17, 19, 21, 23, 25\}$, ...
دسته سوم دسته دوم دسته اول

- (۱) ۴۸۷ (۲) ۴۹۷ (۳) ۴۷۷ (۴) ۴۶۷

۵۱- کدام یک می‌تواند جمله عمومی دنباله $3, -9, 27, -81, \dots$ باشد؟

- (۱) $(-1)^{n-1} 3^{n+1}$ (۲) $(-1) 3^n$ (۳) $(-1)(-3)^n$ (۴) $(-1)^n 3^n$

۵۲- اگر جمله عمومی دنباله d_n به صورت $d_n = an^2 + 2bn$ و جملات دوم و سوم این دنباله به ترتیب برابر با ۴ و ۱۵ باشند، جمله پنجم دنباله کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۵۵ (۳) ۴۰ (۴) ۴۵

۵۳- در دنباله $a_n = 140n - 5n^2$ ، چند جمله مثبت وجود دارد؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) صفر (۴) بی‌نهایت جمله

۵۴- در یک دنباله، جمله اول برابر ۱ است و هر یک از جمله‌های بعدی دو واحد از جمله قبلی‌اش بیشتر است. مجموع n جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) $(2n+1)^2$ (۲) $(2n-1)^2$ (۳) n^2 (۴) $2n^2$

بنابراین،

$$n(A \cap B \cap C) = 6 \quad \text{الف)}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } n(B) - x - 6 - z &= \text{تعداد کسانی که فقط به فیزیک علاقه دارند} \\ &= 14 - 1 - 6 - 0 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } n(A) - x - y - 6 &= \text{تعداد کسانی که فقط به ریاضی علاقه دارند} \\ &= 15 - 1 - 2 - 6 = 6 \end{aligned}$$

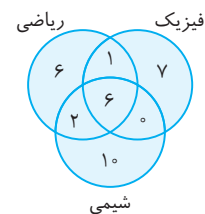
$$\begin{aligned} n(C) - y - z - 6 &= \text{تعداد کسانی که فقط به شیمی علاقه دارند} \\ &= 18 - 2 - 0 - 6 = 10 \end{aligned}$$

بنابراین تعداد کسانی که فقط به یک درس علاقه دارند، برابر است با

$$7 + 6 + 10 = 23$$

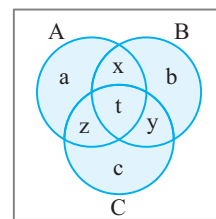
تعداد دانش‌آموزانی که حداقل به دو درس علاقه دارند برابر است با

$$x + y + z + 6 = 9$$

چون هر عضو U عضو دست کم یکی از این مجموعه‌ها است، پس

$$n(A \cup B \cup C) = n(U) = 50$$

وضعیت مجموعه‌ها را در نمودار زیر نشان داده‌ایم.

هدفمان پیدا کردن بیشترین مقدار $a+b+c$ است. توجه کنید که

$$n(A \cup B \cup C) = a + b + c + x + y + z + t = 50$$

$$\begin{cases} n(A \cap B) = x + t = 11 \\ n(B \cap C) = y + t = 10 \Rightarrow x + y + z + t = 30 - 2t \\ n(A \cap C) = z + t = 9 \end{cases}$$

در نتیجه $a+b+c = 20 + 2t$. به این ترتیب، بیشترین مقدار $a+b+c$ وقتی پیش می‌آید که t بیشترین مقدار ممکن باشد. از تساوی‌های $x+t=11$ ، $y+t=10$ و $z+t=9$ نتیجه می‌گیریم که بیشترین مقدار ممکن t برابر با ۹ است (به ازای $x=2$ ، $y=1$ و $z=0$). در نتیجه، بیشترین مقدار $a+b+c$ برابر با ۳۸ است.

۴۵ توجه کنید که در شکل n ام روی هر ضلع $n+1$ نقطه وجود دارد. شکل n ام چهار ضلع دارد، پس تعداد کل این نقطه‌ها می‌شود $4(n+1)$. اما در این نحوه شمارش، نقطه‌های مشترک بین ضلع‌ها را دو بار شمرده‌ایم. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های شکل n ام را با a_n نشان دهیم، $a_n = 4(n+1) - 4 = 4n$. راه‌های دیگری هم برای حل این مسئله وجود دارد. مثلاً در شکل n ام، به جز چهار گوشه، $n-1$ نقطه وجود دارد. پس تعداد کل این نقطه‌ها می‌شود $4(n-1)$ ، که اگر چهار نقطه رأس‌ها را هم حساب کنیم، نتیجه می‌شود

$$a_n = 4(n-1) + 4 = 4n$$

۴۶ توجه کنید که در هر شکل، تعداد مربع‌های ردیف پایین، از شماره شکل دو تا بیشتر است و در ستون‌های بالای هر ردیف به اندازه شماره شکل، مربع وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های شکل n ام a_n باشد،

$$a_n = n + 2 + 2n = 3n + 2$$

۴۷ توجه کنید که در شکل n ام مستطیلی $2 \times n$ وجود دارد، که ستونی از $n-1$ مربع به بالای آن چسبیده است و یک مربع هم در کنار آن قرار دارد. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های شکل n ام را a_n بگیریم،

$$a_n = 2n + n - 1 + 1 = 3n$$

۴۸ توجه کنید که شکل اول از ۱۰ نقطه رنگی تشکیل شده است و در شکل‌های بعدی، هر شکل با اضافه شدن ۴ نقطه به شکل قبلی به دست آمده است. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های رنگی در شکل n ام را a_n بگیریم،

$$a_n = 10 + 4(n-1) = 4n + 6$$

۴۹ توجه کنید که در بالا و پایین هر شکل دو نقطه داریم. نقطه‌های وسط (از شکل دوم به بعد) از چند ردیف سه تایی تشکیل شده‌اند: شکل اول ردیفی ندارد، شکل دوم ۱ ردیف دارد، شکل سوم ۲ ردیف دارد، ... و شکل n ام $n-1$ ردیف دارد. بنابراین اگر تعداد نقطه‌های شکل n ام را a_n بگیریم،

$$a_n = 2 + 2 + 3(n-1) = 3n + 1$$

۵۰ توجه کنید که شکل n ام در هر ضلعش n مربع کوچک دارد و در درونش $n-1$ مربع کوچک. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های کوچک شکل n ام را a_n بگیریم، $a_n = 4n + n - 1 = 5n - 1$.

۵۱ به الگوی شکل‌ها دقت کنید. شکل اول از یک مربع کوچک ساخته شده است. در شکل دوم، از سه طرف یک مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. در شکل سوم، از سه طرف دو مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. در شکل چهارم، از سه طرف سه مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. به این ترتیب، اگر تعداد مربع‌ها در شکل n ام را a_n بنامیم، $a_n = 1 + 2(n-1) = 3n - 2$. در نتیجه $a_{50} = 3 \times 50 - 2 = 148$. یعنی برای ساختن شکل ۵۰ام ۱۴۸ مربع کوچک لازم داریم.

۵۲ ابتدا جمله عمومی تعداد صندوق‌ها را وقتی که n میز را به هم چسبانده‌ایم، پیدا می‌کنیم. دور میز اول ۶ صندوقی وجود دارد. وقتی دو میز را می‌چسبانیم، به تعداد صندوق‌های اولیه ۴ تا اضافه می‌شود؛ وقتی سه میز را می‌چسبانیم، به تعداد صندوق‌های اولیه 2×4 تا اضافه می‌شود؛ ... وقتی n میز را می‌چسبانیم، به تعداد صندوق‌های اولیه $4(n-1)$ تا اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد صندوق‌های دور n میز a_n باشد، $a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$. اگر $4n + 2 = 34$ ، آن‌گاه $n = 8$ ، یعنی باید ۸ میز را به هم چسبانیم.

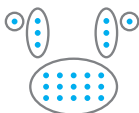
۵۳ محیط شکل اول ۸ سانتی‌متر است. با اضافه کردن هر کاشی ۴ سانتی‌متر به محیط شکل قبلی اضافه می‌شود. بنابراین، محیط شکل n ام برابر است با $8 + 4(n-1) = 4n + 4$.

۵۴ تعداد مربع‌های رنگی هر شکل برابر است با مساحت کل شکل منهای مساحت چهار مربع سفید که حذف شده‌اند. طول ضلع مربع بزرگ $2n+1$ است و طول ضلع هر یک از مربع‌های سفید $n-1$ است. بنابراین اگر تعداد مربع‌های شکل n ام را a_n بگیریم،

$$a_n = (2n+1)^2 - 4(n-1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4(n^2 - 2n + 1) = 12n - 3$$

۵۵ در کف شکل n ام مستطیلی $n(n+2)$ قرار دارد. دو ستون تایی هم به کف این مستطیل چسبیده‌اند و در کنار هر ستون هم یک نقطه وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های شکل n ام را a_n بگیریم،

$$a_n = n(n+2) + 2n + 2 = n^2 + 4n + 2$$



در نتیجه طول رشته n برابر است با

$$P_n = n + 1 + n\sqrt{2} + \sqrt{n^2 + 1}$$

اگر $n=7$ ، آن گاه $P_7 = 7 + 1 + 7\sqrt{2} + \sqrt{7^2 + 1} = 8 + 12\sqrt{2}$ پس طول رشته هفتم برابر با $8 + 12\sqrt{2}$ است.

۶۴ الف) $a_n = 2n - 1$ ب) $a_n = (-1)^n (2n - 1)$

ت) $a_n = n + (-1)^{n+1}$ ج) $a_n = n^2 - 1$

۶۵ توجه کنید که $a_n = n(2^0 - n)$ و چون n عددی مثبت است، برای اینکه a_n عددی مثبت باشد، باید $2^0 - n > 0$ نیز مثبت باشد. بنابراین $0 < n < 2^0$ ، یعنی $n < 2^0$. پس n می‌تواند عددهای ۱، ۲، ...، ۱۹ باشد، که تعداد آن‌ها ۱۹ تا است.

۶۶ ابتدا توجه کنید که اگر $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{4n+4}$ ، آن گاه n عددی فرد است، زیرا اگر n زوج باشد، $(-1)^n \frac{n-1}{4n+4}$ عددی مثبت می‌شود.

اگر n عددی فرد باشد، $(-1)^n = -1$ ، پس $\frac{n-1}{4n+4} = \frac{1}{6}$. اگر این معادله را حل کنیم، به دست می‌آید $n=5$. پس جمله پنجم دنباله، برابر با $-\frac{1}{6}$ است.

۶۷ باید تفاضل هر دو جمله متوالی برابر باشد، بنابراین باید

$$7a + 20 - (2a - 1) = (a + 42) - (7a + 20)$$

$$5a + 21 = -6a + 22 \Rightarrow 11a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{11}$$

۶۸ اگر قدرنسبت این دنباله d باشد، جمله عمومی آن به شکل $a_n = a_1 + (n-1)d$ است. بنابراین

$$a_8 = a_1 + 7d \Rightarrow 25 = 4 + 7d \Rightarrow d = 3$$

در نتیجه $a_{10} = a_1 + (10-1)d = 4 + 9 \times 3 = 31$

۶۹ فرض کنید قدرنسبت این دنباله حسابی d باشد. توجه کنید که

$$a_{17} = a_1 + 16d = 16$$

از طرف دیگر، $a_{10} = a_1 + 9d$ و $a_{14} = a_1 + 13d$. اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$a_{10} + a_{14} = (a_1 + 9d) + (a_1 + 13d) = 2a_1 + 22d = 2(a_1 + 11d) = 2(16) = 32$$

۷۰ قدرنسبت این دنباله را با d نشان می‌دهیم. در این صورت

$$a_7 + a_9 = (a_1 + 6d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 14d = -4 \quad (1)$$

$$a_3 + a_5 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 6d = 4 \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به دست می‌آید $d = -2$ و اگر این مقدار را در تساوی (۱) قرار دهیم، به دست می‌آید $a_1 = 7$.

۷۱ قدرنسبت این دنباله برابر است با $10 - 3 = 7$. اکنون توجه کنید که

$$\text{جمله آخرین جمله} = 444$$

$$444 - 7 = 437 = \text{دومین جمله از آخر}$$

$$437 - 7 = 430 = \text{سومین جمله از آخر}$$

$$430 - 7 = 423 = \text{چهارمین جمله از آخر}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$423 - 7 = 416 = \text{دوازدهمین جمله از آخر}$$

۵۶ توجه کنید که شکل n ام از مربعی به طول ضلع $n+1$ و پلکانی از $n+1$ مربع کوچک درست شده است. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های کوچک شکل n ام را a_n بگیریم، $a_n = (n+1)^2 + n+1 = n^2 + 3n + 2$.

۵۷ توجه کنید که در شکل n ام تعداد نقطه‌ها n^2 است و تعداد ضربدرها $8n$ است. اگر $n^2 = 8n$ ، آن گاه $n=8$. پس در شکل هشتم، تعداد نقطه‌ها با تعداد ضربدرها برابر است.

۵۸ این ریسمان از تکه‌هایی به طول ۱ سانتی‌متر، ۲ سانتی‌متر و ... ۱۶ سانتی‌متر تشکیل شده است، که هر تکه دو بار آمده است. بنابراین طول کل ریسمان برابر است با $2(1+2+\dots+16) = 2(\frac{16 \times 17}{2}) = 272$ سانتی‌متر.

۵۹ توجه کنید که از یک طرف تعداد کل توپ‌ها برابر است با $n \times n = n^2$. از طرف دیگر اگر تعداد توپ‌ها را از طریق ردیف‌های L شکل حساب کنیم، می‌شود $(2n-1) + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ بنابراین

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

۶۰ در کف شکل n ام، $2n-1$ مثلث کوچک وجود دارد. هر ردیف بالایی، دو مثلث از ردیف پایینی‌اش کمتر دارد، تا اینکه در آخرین ردیف، یک مثلث کوچک وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد مثلث‌های کوچک در شکل n ام را a_n بگیریم، $a_n = (2n-1) + (2n-3) + \dots + 5 + 3 + 1 = n^2$.

۶۱ راه‌حل اول در شکل n ام، ردیف وسط از $2n-1$ مربع کوچک درست شده است. هر ردیف بالایی، دو مربع از ردیف پایینی‌اش کمتر دارد؛ تا اینکه در آخرین ردیف، یک مثلث وجود دارد. در مورد ردیف‌های پایین ردیف وسط، همین وضعیت وجود دارد. بنابراین اگر یک‌بار تعداد مربع‌های ردیف وسط را اضافه و کم کنیم، تعداد مربع‌ها در شکل n ام برابر می‌شود با

$$a_n = 2((2n-1) + (2n-3) + \dots + 5 + 3 + 1) - (2n-1) = 2n^2 - 2n + 1$$

راه‌حل دوم به همان راه‌حل اول معلوم می‌شود که تعداد مربع‌ها در ردیف وسط و ردیف‌های بالای آن برابر است با $n^2 + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1)$ و تعداد مربع‌ها در ردیف‌های زیر ردیف وسط برابر است با

$$(2n-3) + (2n-5) + \dots + 5 + 3 + 1 = (n-1)^2$$

پس تعداد کل مربع‌ها برابر است با $n^2 + (n-1)^2$.

۶۲ تعداد مربع‌های کوچک در این شکل‌ها به ترتیب ۱، ۴، ۹، ۱۶ است، که همگی به شکل n^2 هستند. بنابراین به نظر می‌رسد که تعداد مربع‌های کوچک در هر یک از این شکل‌ها، عددی به شکل n^2 است و چون 123 به این شکل نیست، پس نمی‌توان با این تعداد مربع، یکی از شکل‌ها را ساخت. اکنون جمله عمومی این الگو را به دست می‌آوریم. توجه کنید که در شکل n ام، ردیف وسط از n مربع درست شده است؛ در هر طرف آن، یک ردیف $(n-1)$ تایی داریم؛ یک ردیف $(n-2)$ تایی داریم؛ ...؛ یک ردیف ۲ تایی داریم و یک ردیف از یک مربع داریم. بنابراین، اگر تعداد مربع‌ها در شکل n ام را با a_n نشان دهیم،

$$a_n = n + 2((n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1)$$

$$= n + 2(\frac{(n-1)n}{2}) = n + n^2 - n = n^2$$

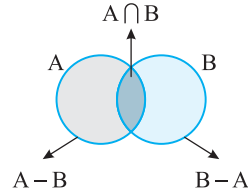
۶۳ تعداد خط‌های افقی به طول ۱ در شکل n ام برابر $n+1$ است. تعداد خط‌های مایل به طول $\sqrt{2}$ در شکل n ام برابر n است. همچنین هر شکل یک خط اریب دارد که میان ۲ نقطه $(1,0)$ و $(0,n)$ رسم می‌شود و طول آن برابر $\sqrt{n^2 + 1}$ است.

۳۲- گزینه ۱ به نمودار ون زیر توجه کنید.

می‌دانیم $A \cap B' = A - B$. حال با توجه به شکل، به دست می‌آید

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$6 = 2 + 3 + n(B - A) \Rightarrow n(B - A) = 1$$



۳۳- گزینه ۱ با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه زیر به دست می‌آید

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$110 = 60 + 60 + 20 - 14 - 14 - 2 + n(A \cap B \cap C) \Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 0$$

۳۴- گزینه ۳ شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیشتر از قبلی دارد. پس شکل n ام دارای $4 + 3(n-1)$ چوب کبریت است. یعنی $3n + 1$ چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

۳۵- گزینه ۳ شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت دیگر به شکل مرحله قبیل اضافه می‌شود. پس در شکل n ام $5 + 4(n-1)$ چوب کبریت وجود دارد. یعنی $4n + 1$ چوب کبریت در شکل n ام وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

۳۶- گزینه ۲ در شکل اول ۳ نقطه وجود دارد و هر شکل ۳ نقطه بیشتر از شکل قبلی دارد. پس در شکل n ام، $3 + 3(n-1)$ نقطه وجود دارد.

۳۷- گزینه ۳ راه حل اول تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	$1 + 3 + 1$	$2 + 4 + 2$	$3 + 5 + 3$...	$n + (n + 2) + n$

بنابراین در شکل n ام، $3n + 2$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشه شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل n ام برابر $3(n + 2) - 4$ خواهد بود. پس در شکل n ام، $3(n + 2) - 4$ نقطه داریم.

یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۳۸- گزینه ۳ در شکل n ام، تعداد سطرها n تا و تعداد ستون‌ها $(n + 1)$ تا است. پس $n(n + 1)$ دایره در شکل n ام موجود است. یعنی در شکل بیستم 20×21 دایره وجود دارد.

۳۹- گزینه ۴ در شکل n ام، $(n + 1)^2$ دایره وجود دارد که $n + 1$ تای آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی $(n + 1)^2 - (n + 1)$ می‌باشد که برابر است با $n^2 + n$.

۴۰- گزینه ۳ تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل n ام برابر است با

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

تعداد مربع‌های رنگ نشده در شکل n ام برابر است با $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)$.

بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل n ام، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ نشده است. پس در شکل سی‌ام، اختلاف مربع‌های رنگ شده و رنگ نشده برابر 30 تا است.

۴۱- گزینه ۴ به کمک اتحاد مزدوج عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \dots + (2 - 1)(2 + 1)$$

$$= 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1$$

$$\text{بنابراین } A = \frac{100(100 + 1)}{2} = 5050$$

۴۲- گزینه ۲ عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 19 + \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{19}{20}\right)$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + 19 + \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 19}{20}$$

$$\text{چون } A = 190 + \frac{190}{20} = 199/5 \text{ پس } 1 + 2 + \dots + 19 = \frac{19 \times (1 + 19)}{2} = 190$$

۴۳- گزینه ۲ مقدار کل مساحت رنگ شده در مرحله n ام برابر است با

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

و مقدار کل مساحت رنگ شده در مرحله $(n - 1)$ ام برابر است با

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

بنابراین در مرحله n ام، مقدار کل مساحت رنگ شده $\frac{1}{2^n}$ از مقدار کل مساحت رنگ شده در مرحله $(n - 1)$ ام، بیشتر است.

۴۴- گزینه ۲ با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شماره آنها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^2}{2}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شماره آنها فرد است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها $n^2 - 1$ خواهد بود که نصف آنها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس $1 + \frac{n^2 - 1}{2}$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، $\frac{n^2}{2}$ نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شماره زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل n ام وجود دارد، پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^2 - 1}{2} + 1 = 113 \Rightarrow n^2 - 1 = 224 \Rightarrow n^2 = 225 \Rightarrow n = 15$$

۴۵- گزینه ۱ جمله عمومی دنباله $t_n = an + b$ است. بنابراین

$$t_1 = a + b = 3, \quad t_5 = 5a + b = -5$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a + b = 3 \\ 5a + b = -5 \end{cases}$ به دست می‌آید $a = -2$ و $b = 5$. بنابراین

$t_n = -2n + 5$. برای به دست آوردن شماره جمله‌ای که برابر -39 است، باید معادله $t_n = -39$ را حل کنیم:

$$-2n + 5 = -39 \Rightarrow 2n = 44 \Rightarrow n = 22$$

پس t_{22} برابر -39 است.

۴۶- گزینه ۲ جمله نخست این الگو ۲ است و پس از آن، هر جمله با اضافه کردن عدد ۵ به جمله قبلی‌اش به دست می‌آید. بنابراین جمله عمومی این الگو می‌شود $a_n = 2 + 5(n - 1) = 5n - 3$. بنابراین، جمله ۱۱۰ام دنباله برابر است با $5 \times 110 - 3 = 547$.

۵۵- گزینه ۱ چون $a_1 = -4$ و $d = -1 - (-4) = 3$ پس

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -4 + 3(n-1) = 3n - 7$$

۵۶- گزینه ۲ جمله عمومی دنباله حسابی باید خطی باشد (بر حسب n

از درجه اول باشد). پس باید $2k - 1 = 0$ ، یعنی $k = \frac{1}{2}$ و در نتیجه

$$a_n = -\frac{1}{2}n + 2. \text{ بنابراین جمله دوم برابر } a_2 = -1 + 2 = 1 \text{ است.}$$

۵۷- گزینه ۱ قدرنسبت این دنباله را با d نشان می‌دهیم. در

$$\text{این صورت } d = \frac{a_1 - a_4}{1 - 4} = \frac{24}{-3} = -8$$

$$d = \frac{a_1 - a_9}{1 - 9} = -4 \text{ بنابراین}$$

$$a_1 - a_9 = -76 \times (-4) = 304$$

۵۸- گزینه ۲ تعداد الوارها در هر ردیف، دنباله‌ای حسابی با جمله نخست

۳ و قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند. بنابراین تعداد الوارها در ردیف n ام برابر است با $2n + 1$. در نتیجه اگر $2n + 1 = 21$ ، آن‌گاه $n = 10$.

۵۹- گزینه ۱ از رابطه داده شده $a_n = a_{n-1} - 3$ به دست می‌آید.

یعنی هر جمله دنباله از جمع کردن -3 با جمله قبلی آن به دست می‌آید. پس یک دنباله حسابی با قدرنسبت -3 و جمله اول -4 داریم که جمله بیستم آن برابر است با $a_{20} = a_1 + 19d = -4 + 19(-3) = -61$.

۶۰- گزینه ۲ چون $a_1 = 2$ و $d = 4$ ، پس جمله عمومی دنباله

به صورت $a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$ است. برای این که جمله‌ها کوچک‌تر از

500 باشند باید $a_n < 500$ باشد. یعنی

$$4n - 2 < 500 \Rightarrow n < \frac{502}{4} \Rightarrow n \leq 125$$

پس 125 جمله اول دنباله کمتر از 500 هستند.

۶۱- گزینه ۴ توجه کنید که $a_4 = 20$ و $a_{10} = 50$ ، در نتیجه

$$d = \frac{a_{10} - a_4}{10 - 4} = \frac{50 - 20}{6} = 5 \text{ پس}$$

$$a_4 = a_1 + 3d = 20 \Rightarrow a_1 + 3(5) = 20 \Rightarrow a_1 = 5$$

بنابراین $a_{100} = a_1 + 99d = 5 + 99 \times 5 = 500$ به شکل $a_{100} = a_1 + 99d = 500$ محاسبه می‌شود.

۶۲- گزینه ۳ چون $5a - 11$ واسطه حسابی دو جمله دیگر است، پس

$$2(5a - 11) = 2a - 3 + 3a + 1$$

و قدرنسبت آن برابر با 4 است و جمله عمومی به صورت

$$a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1 \text{ است. اگر } 4n + 1 = 2017 \text{، آن‌گاه } n = 504$$

۶۳- گزینه ۴ چون قدرنسبت دنباله برابر با 11 است، پس جمله

عمومی دنباله می‌شود $a_n = -102 + 11(n-1) = 11n - 113$ می‌دانیم

$a_{10} = -3$ و $a_{11} = 8$ ، پس نخستین جمله مثبت دنباله جمله 11 ام آن است.

۶۴- گزینه ۳ جمله عمومی دنباله به صورت

$$a_n = 196 - 4(n-1) = 200 - 4n \text{ است. بنابراین } a_{50} = 0 \text{، در نتیجه، چون}$$

قدرنسبت دنباله برابر -4 است، پس

$$a_{47} = 12, a_{48} = 8, a_{49} = 4, a_{50} = 0$$

۴۷- گزینه ۲ چند جمله اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

$$\text{گزینه (۱)} \quad 2, 3, 4, 5, \dots \quad \text{گزینه (۲)} \quad 2, 3, 10, 15, \dots$$

$$\text{گزینه (۳)} \quad 2, 3, 10, 23, \dots \quad \text{گزینه (۴)} \quad 2, 3, 8, 17, \dots$$

بنابراین فقط $(-1)^n$ می‌تواند جمله عمومی دنباله باشد.

۴۸- گزینه ۴ از شرط $a_n < 2/99$ مقادیری از n را می‌یابیم که a_n

به ازای آن‌ها کوچک‌تر از $2/99$ باشد:

$$a_n < 2/99 \Rightarrow \frac{3n+1}{n+10} < 2/99 \Rightarrow \frac{3n+1}{n+10} < \frac{299}{100}$$

$$300n + 100 < 299n + 2990 \Rightarrow n < 2890 \Rightarrow n \leq 2889$$

بنابراین 2889 جمله دنباله، کوچک‌تر از $2/99$ هستند.

۴۹- گزینه ۴ در این دنباله $a_{n+1} = a_n^2$ است، بنابراین

$$a_4 = a_1^2 = 2^2 = 4, a_5 = a_4^2 = 4^2 = 16, a_6 = a_5^2 = 16^2 = 256$$

۵۰- گزینه ۱ عدد آخر دسته اول 5 ، عدد آخر دسته دوم 3×5 ، عدد

آخر دسته سوم $5 \times 5 \dots$ و عدد آخر دسته n ام برابر $(2n-1) \times 5$ است. پس عدد آخر دسته n ام $(2n-1) \times 5 = 485$ است. پس عدد اول دسته پنجم برابر 487 خواهد بود.

۵۱- گزینه ۳ همان‌طور که مشاهده می‌کنیم جمله‌های دنباله توان‌هایی

از 3 هستند. یعنی $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ که جمله عمومی آن می‌تواند به

صورت 3^n باشد. اما در دنباله داده شده، جمله‌ها یکی در میان مثبت و منفی

هستند و اولین جمله، مثبت است. بنابراین به یک ضریب $(-1)^{n-1}$ برای 3^n

نیاز داریم تا جملات دنباله به شکل دنباله داده شده درآیند. یعنی

$$(-1)^{n-1}(3)^n = (-1)(-1)^n(3)^n = (-1)(-3)^n$$

۵۲- گزینه ۲ ابتدا باید با استفاده از جمله‌های داده شده دنباله،

ضرایب a و b را که مجهول هستند بیابیم:

$$d_4 = 4 \Rightarrow 4a + 4b = 4 \Rightarrow a + b = 1, d_9 = 15 \Rightarrow 9a + 6b = 15$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} a+b=1 \\ 9a+6b=15 \end{cases}$ به دست می‌آید $a=3$ و $b=-2$.

بنابراین جمله عمومی دنباله $d_n = 3n^2 - 4n$ به صورت $d_n = 3n^2 - 4n$ است. پس

$$d_5 = 3(5)^2 - 4(5) = 55$$

۵۳- گزینه ۱ ابتدا با حل نامعادله $a_n > 0$ ، مقادیری از n را که به

ازای آن‌ها، جمله‌های دنباله مثبت هستند، پیدا می‌کنیم.

$$a_n > 0 \Rightarrow 140n - 5n^2 > 0 \Rightarrow n(140 - 5n) > 0$$

حال از آن جایی که $n > 0$ ، برای برقراری نامعادله فوق، بایستی $140 - 5n > 0$.

یعنی $n < 28$. پس به ازای $n \leq 27$ ، جمله‌های دنباله مثبت هستند. در

نتیجه بیست و هفت جمله اول دنباله مثبت هستند.

۵۴- گزینه ۳ با توجه به جمله‌های دنباله، به دست می‌آید

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + 2 = 3, a_3 = 3 + 2 = 5,$$

$$a_4 = 5 + 2 = 7, \dots, a_n = 2n - 1$$

بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = (2-1) + (4-1) + (6-1) + \dots + (2n-1)$$

$$= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + \dots + (2n - 1)$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) - (1 + 1 + \dots + 1)$$

$$= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n = n^2 + n - n = n^2$$