مقدمه ناشر

برداشت یک

ای ریاضی! ای آمار! ای میانگین! ای درد مشترک ما بچه‌های انسانی! کی بی‌خیال ما می‌شی؟ اومدیم انسانی که تو نباشی. بازم می‌گن توی کنکور سرنوشتتون رو، درصد تو (یعنی ریاضی) رقم می‌زنه. چرا گیر می‌دی؟ خُب ما اگر ریاضی‌خون بودیم می‌رفتیم رشتهٔ ریاضی یا تجربی. ما اهل دلیم! شعر، ادب، فلسفه، تاریخ و جغرافی ... اگر راست می‌گی «*بیا و مسئله‌ها را ز راه دل حل کن.*» ...

برداشت دو

ما (یعنی خیلی‌سبز) این‌جا نمی‌خوایم کلیشه‌بازی در بیاریم و اندر فواید علم ریاضی و تأثیر آن در زندگی بشر و مضرات نخواندن ریاضی خطابه بگیم. ما می‌گیم ریاضی سخته؟ قبول! با ریاضی حال نمی‌کنی؟ اینم قبول! ولی حالا که باید بخونیش چرا نخونیش؟! چرا اینقد فاز منفی؟ با یک کتاب خوب، یه نگاه مثبت و یه کم وقت گذاشتن احتمالن می‌شه با ریاضی هم کنار اومد. کتاب خوبش با ما، نگاه مثبت و وقت گذاشتنش با شما.

برداشت سه

علی شهرابی از باحال‌ترین و اهل دل‌ترین مؤلفان ریاضی خیلی‌سبزه و بچه‌های رشتهٔ انسانی رو خوب خوب درک می‌کنه. مطمئنیم با درس‌نامه‌ها و پاسخ‌های این کتاب می‌شه ریاضی رو فهمید و یاد گرفت و حتی حال کرد!

علی جان دمت گرم و بابت انتشار این کتاب خوب بهت تبریک می‌گم. هم‌چنین از محمد مازنی عزیز و خانم الهه آرانی که یار و یاور ما در شکل‌گیری این کتاب بودند خیلی ممنونم.

اگر بخوام از همهٔ عوامل و دست‌اندرکاران تولید این کتاب تشکر کنم، حالا حالاها باید بنویسم. خلاصه می‌گم دست همه درد نکنه، به ویژه بر و بچه‌های همیشه سرافراز تولید و ویراستاری علمی دقیق و موشکافمون.

سربلند باشید و برقرار

مقدمه مؤلف

سلام به همهٔ دانش‌آموزان و دبیران

می‌گن اگه خودتون رو با تغییرات وفق ندید، یه جایی متوجه می‌شید که از همه‌چیز عقب افتادین! کنکور در سال‌های اخیر چند بار همه‌مون رو سورپرایز کرد. یک بار سخت شد، دوباره برگشت به روال سابق، دوباره سخت شد و باز هم برگشت به روال سابق و ... .

ما تصمیم گرفتیم کتابی بنویسیم که شما را برای هر شرایطی آماده کند. این کتاب با تمام کتاب‌های ریاضی انسانی دنیا فرق دارد! هدفش این بود که کل **طیف دانش‌آموزان انسانی** را پوشش دهد.

ساختار کتاب:

۱ این کتاب مثل کتاب درسی دوازدهم ۳ فصل دارد و ترتیب مطالبش هم مثل کتاب درسی است.

۲ هر فصل از چند درس تشکیل شده است. در هر درس، ابتدا درس‌نامه و بعد تست‌هایش آمده است. در آخر فصل، یک آزمون جمع‌بندی برای آن فصل آورده‌ایم که در انتخاب تست‌هایش خیلی سعی کردیم مطالب مهم فصل پوشش داده شوند. در انتهای کتاب هم پاسخ تشریحی تست‌ها را آورده‌ایم.

درس‌نامه، تست، آزمون فصل و پاسخ‌نامه:

۱. درس‌نامه:

- پیشنهاد می‌کنم حتماً قبل از این‌که سراغ تست‌ها بروید، درس‌نامه را یک بار بخوانید و تمام مثال‌های آموزشی و تست‌های آن را حل کنید.
- هر موضوعی را به طور کامل توضیح دادیم و هر جا که می‌شد، روش حل را «مرحله‌به‌مرحله» و اغلب در قالب یک مثال بیان کرده‌ایم.
- بعد از هر توضیحی در درس‌نامه، معمولاً یک **مثال آموزشی** آورده‌ایم که پیچیدگی خاصی ندارد و هدفش کمک به یادگیری بیشتر شما است. بعد از مثال آموزشی، یک (یا چند) **تست** آورده‌ایم که هدفش آشنایی شما با مدل سؤالات تستی آن قسمت است. معمولاً سؤالات تستی، از مثال آموزشی جدی‌تر هستند.
- از آن‌جایی که هدفمان این بوده که با خواندن درس‌نامه بتوانید از پس تست‌های کنکورهای اخیر برآیید، بعضی تست‌های کنکورهای اخیر را در درس‌نامه، شبیه‌سازی کردیم که با آدرس «**مثل کنکور**» آن‌ها را می‌بینید.
- بعضی جاها که لازم بوده، در آخر کار، کل داستان را برایتان «**جمع‌بندی**» کرده‌ایم.
- بعضی جاها مطالبی را برای دانش‌آموزان علاقه‌مند تحت عنوان «**برای حرفه‌ای‌ها**» آورده‌ایم. اگر وقت می‌کنید حتماً این قسمت‌ها را بخوانید. در تست‌های بخش «آموزش و تمرین» از این تیترها سؤال نیاورده‌ایم.

۲. تست‌ها:

- برای اولین بار، تست‌های هر درس را به ۳ بخش تقسیم کردیم:

۱) **تست‌های آموزش و تمرین**: هدفش مطالب کلی است که هر دانش‌آموزی باید آن‌ها را بلد باشد. در واقع پلهٔ اول تست‌زنی شما باید همین بخش باشد و تا به تست‌های آن مسلط نشدید، سراغ بخش‌های دیگر نروید. تست‌های این بخش مثل درس‌نامه و با همان ترتیب «تیتر» دارند تا دبیران راحت‌تر بتوانند به دانش‌آموزان تمرین بدهند.

۲) **تست‌های تثبیت و تسلط**: اگر تست‌های آموزش و تمرین را حل کردید و نیاز به حل سؤالات جدی‌تر داشتید، سراغ تست‌های این بخش بروید. به نظر ما، تست‌های این بخش، مخصوص دانش‌آموزانی است که دنبال درصدهای بالاتر در آزمون‌های آزمایشی و کنکور هستند. در واقع حل تست‌های این بخش، شما را برای آزمون‌ها آماده می‌کند.

۳) **تست‌های فراتر از انتظار**: همان‌طور که در کنار این تست‌ها، داخل کادر گفته‌ایم، تست‌های این بخش را حتماً با مشورت معلم یا مشاور خود حل کنید. این بخش مخصوص دانش‌آموزان سخت‌کوش و علاقه‌مند به ریاضی است. توصیهٔ جدی ما این است که روی تست‌های دو بخش قبلی تمرکز کنید. ضمناً برای آن‌که تعداد صفحات کتاب زیاد نشود، پاسخ تست‌های این بخش را در قالب یک فایل در اختیارتان گذاشته‌ایم که با اسکن QR کد مربوط به آن، آن‌ها را مشاهده می‌کنید.

- پس جمع‌بندی این شد:

آموزش و تمرین (برای همه) ← تثبیت و تسلط (اگه می‌خوای تو آزمون‌ها بهتر نتیجه بگیری) ← فراتر از انتظار (اگه سرت برای ریاضی درد می‌کنه!)

- روی چیدمان تست‌ها واقعن وقت گذاشتیم. برای چینش تست‌ها شاید ۱۰۰ ساعت جلسه گذاشتیم که احتمالن باورتان نمی‌شود!
- تست‌های این کتاب، مجموعه‌ای است از:

۱ تست‌های کنکورهای سراسری داخل و خارج از کشور از سال ۹۰ به بعد
۲ شبیه‌ساز سؤالات کنکور با آدرس «**مثل کنکور**»
۳ تست‌های برگرفته از تمرینات مهم کتاب درسی با آدرس «**کتاب درسی**»
۴ تست‌های منتخب آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز
۵ تعداد زیادی تست تألیفی که در بین آن‌ها تست‌های ایده‌دار و ترکیبی زیادی می‌بینید.

- در کنار تست‌ها ممکن است آیکون‌های زیر را ببینید:

⏱ سؤالاتی که نسبت به سایر سؤالات، به زمان بیشتری نیاز دارند. (اصطلاحاً سؤالات **وقت‌گیر**)
MIX سؤالاتی که ترکیب دو یا چند موضوع هستند. در کنکورهای جدید، تعدادی از این سؤالات را می‌بینیم. (اصطلاحاً سؤالات **ترکیبی**)
⛔ سؤالاتی که حلشان را به هیچ وجه توصیه نمی‌کنیم! (سؤالات **ورود ممنوع**)

۳. پاسخ‌ها

- در تمام پاسخ‌ها، فارسی‌نویسی به طور کامل انجام شده است تا بفهمید چی‌کار کردیم.
- یک سری آیکون‌ها در پاسخ‌ها می‌بینید که در زیر توضیح داده‌ایم:

نکته: فرمول یا یک رابطهٔ مهم یا گزاره‌ای که لازم است آن را بلد باشید.
تذکر: هر جا لازم بوده چیزی را گوشزد کنیم.
یادآوری: روابطی که قبلاً دیدید ولی شاید یادتان رفته باشند.
استراتژی: مسیر حل مسئله را بیان می‌کند. در واقع از نقطهٔ شروع تا پایان حل را بیان می‌کند.
مشاوره: بعضی وقت‌ها لازم است یک چیزهایی را به عنوان نصیحت به شما بگوییم.
از قیافش نترس: در یک سری سؤالات که ظاهر ترسناکی دارند، با یک حرکت، سؤالمان به سؤالی ساده‌تر تبدیل می‌شود.
منظورش اینه: بعضی جملات بیان ساده‌تری هم دارند که ممکن است با دانستن آن‌ها، خودتان از پس حل سؤال بربیاین.
روش ۱ و **روش ۲** برای سؤالاتی که دو روش حل دارند، استفاده کردیم.
پارت ۱ و **پارت ۲** بعضی سؤالات چند سؤال در دل یک سؤال هستند. حل این تیپ سؤالات را به ۲ پارت تقسیم کرده‌ایم.
تیزبازی: روش حل سریع و خلاقانه‌ای است که در کنار روش اصلی استفاده شده.
تله: بعضی اشتباهات خیلی رایج هستند. در یک سری از سؤالات، جوابی که از این راه حل‌های اشتباه به دست میان را در گزینه‌ها به عنوان تله گذاشتیم.

۴. آزمون‌های فصلی

در آخر هر فصل، یک آزمون از آن فصل آورده‌ایم که تیپ تست‌های مهم فصل را پوشش بدهد. در دوران جمع‌بندی، حل این آزمون‌ها مفید است. ضمناً پاسخ سؤالات آزمون‌ها نیز در قالب QR کد آمده‌اند.

◀ **تیمی که پشت کتاب بوده:** تشکر از دوستانی که در طول مدت تألیف و تولید این کتاب کنارمان بودند:

- دکتر کمیل نصری و مهندس سبزمیدانی عزیز؛ مرسی که انقدر همراهین. - مهندس بقایی که زیاد اذیتش کردیم ولی می‌دونم از ما ناراحت نیستن! - تشکر ویژه از مسعود شفیعی که کل درس‌نامه‌ها را یک بار خواند و با کامنت‌دادن‌هاش، کلی کتاب را بهتر کرد. چینش تست‌ها را با دقت بررسی کرد و در جلسات کلی در موردش بحث کردیم (برای من، تجربهٔ بسیار خوبی بود). ضمناً ایده‌های جدیدی هم که به ذهنش می‌رسید را می‌داد. مسعود جان خیلی دمت گرم؛ اگه این کتاب خوب شده، به خاطر کمک‌های شما بوده. - کیوان صارمی و کوثر صادقی که اوایل کار خیلی وقتشونو گرفتم. ایشالا جبران کنم. - محمد مازنی که لحظه‌به‌لحظه از وضعیت کارهای کتاب خبر داشت و به من استرس می‌داد! - خانم الهه آرانی که به شکل باورنکردنی پیگیر کارهای کتاب بودند؛ هر لحظه و هر جا! سپاس فراوان از شما. - آقای فرامرز سلطان‌کریمی که زحمت کلیدزنی کتاب را داشتند و با دقت و حوصلهٔ بسیار این کار را انجام دادند؛ خیلی ممنونم از شما. - خانم‌ها راهبریان، جالینوس، نظری، صابری و آقایان راش، راسخ و قنبری که زحمت ویراستاری این کتاب را کشیدند. - آقای سمایی، خانم معصومی و سایر دوستانمان در واحد تولید که خیلی اذیتشون کردم؛ دوستتون دارم. - از دوستانم در خیلی‌سبز که همراهم بودند: ایمان سلیمان‌زاده، امین امینی، محمدرضا محمدی، مرضیه قاسمی و باز هم محمد مازنی. - تشکر از سعید احمدپور که نقش مهمی در مدل نوشته‌شدن این کتاب داشت. - در آخر تشکر از یک دوست بسیار خوب و همچنین مادر عزیزم.

◀ **حرف آخر:** به نظر هر آن‌چه از ریاضی انسانی سال دوازدهم برای کنکورتان نیاز داشتید را در این کتاب آورده‌ایم ولی اگر جایی نقصی می‌بینید آن را از طریق سایت خیلی‌سبز یا آیدی alishmath@ با ما در میان بگذارید. ممنون از شما.

شهرابی ـ ۱۸ تیر ۱۴۰۳

فهرست

فصل اول

آمار و احتمال

به فصل آمار و احتمال خوش آمدید.

در سؤالاتی که ترکیب اصل جمع و ضرب‌اند، حتماً یک بار مفهوم سؤال را درک کنید و دقت کنید که کجا از «یا» و کجا از «و» استفاده می‌کنید. در سؤالات احتمال، اگر کلمهٔ حداقل دیدید، سراغ احتمال متمم بروید. هم‌چنین با توجه به کنکورهای اخیر، از شما انتظار می‌رود که قوانین مجموعه‌ها را خوب بلد باشید. در سال‌های اخیر، بعضی از سؤالات این قسمت از قالب سؤالات سکه، تاس و مهره درآمده و به سمت سؤالاتی رفته که پیرامون زندگی‌مان رخ می‌دهند (مثل هتل، پارکینگ یا ...). روش حل تغییری نمی‌کند ولی تحلیل اولیه‌اش دشوارتر است. در این فصل، تعداد زیادی تست با این فرمت برایتان آورده‌ایم.

مباحث مهم و پرسؤال اصل جمع و ضرب، جایگشت و تبدیل، انتخاب (یا ترکیب)، احتمال (ساده و متمم)، اعمال روی پیشامدها، گام‌های چرخهٔ آمار، نمودار میانگین و انحراف معیار

مباحث پیش‌نیاز قوانین مجموعه‌ها و رسم نمودار وِن که کامل برایتان توضیح داده‌ایم! و محاسبهٔ میانگین، میانه، چارک‌ها، انحراف معیار، واریانس، دامنهٔ چارکی و دامنهٔ تغییرات

بلد نباشی در کدام فصل‌ها ممکنه گیر کنی —

تعداد تست در کنکور ۲ یا ۳ تست

درس ۱: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

سالاد	سالاد سزار
	سالاد سبز
نوشیدنی گرم	چای
	قهوه
	هات‌چاکلت

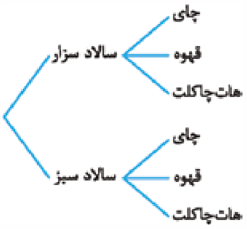
فرض کنید علی به یک کافه رفته که منوی سالاد و نوشیدنی گرم آن به صورت مقابل است:

دو جملهٔ زیر را با دقت بخوانید و حواستان به حروف ربط «یا» و «و» در آن‌ها باشد.

۱ علی می‌خواهد «یک سالاد» یا «یک نوشیدنی گرم» بخورد.
در این حالت، علی ۵ انتخاب دارد.

۱. سالاد سزار
۲. سالاد سبز
۳. چای
۴. قهوه
۵. هات‌چاکلت

دو انتخاب اول مربوط به سالادها و ۳ انتخاب بعدی مربوط به نوشیدنی‌ها بود. یعنی او به $۵ = ۳ + ۲$ حالت می‌تواند انتخاب کند.



۲ علی می‌خواهد «یک سالاد» و «یک نوشیدنی گرم» بخورد.

در این حالت علی باید هم از منوی سالاد انتخاب کند و هم از منوی نوشیدنی گرم. او می‌تواند «سالاد سزار» را با هر یک از نوشیدنی‌های «چای، قهوه و هات‌چاکلت» انتخاب کند. همین‌طور می‌تواند «سالاد سبز» را با هر یک از نوشیدنی‌های «چای، قهوه و هات‌چاکلت» انتخاب کند؛ پس برای هر سالاد، ۳ انتخاب متمایز از نوشیدنی‌ها دارد؛ یعنی به $۶ = ۳ \times ۲$ حالت می‌تواند یک سالاد و یک نوشیدنی انتخاب کند:

به عبارت دیگر می‌تواند یکی از ۶ خانهٔ جدول مقابل را انتخاب کند:

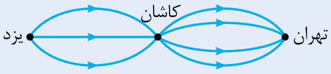
سبز	سزار	
		چای
		قهوه
		هات‌چاکلت

در این درس می‌خواهیم بشماریم *ولی نه با دست و دونه‌دونه!* می‌خواهیم از راه میان‌بر تعداد حالت‌های انجام یک کار را بشماریم. با توجه به مثال بالا، دو اصل زیر را تعریف می‌کنیم:

۱. اصل جمع: اگر بتوان کاری را به m روش (انتخاب یک سالاد به دو روش یا دو حالت) و کار دیگری را به n روش (انتخاب یک نوشیدنی به ۳ روش یا ۳ حالت) انجام داد و این دو کار را نتوان با هم انجام داد (علی می‌خواهد یک سالاد یا یک نوشیدنی بخورد)، در این صورت به $m + n$ روش می‌توان کار اول **یا** کار دوم را انجام داد.

۲. اصل ضرب: اگر کاری طی دو مرحله انجام شود، به طوری که مرحلهٔ اول به m روش و مرحلهٔ دوم به n روش انجام‌پذیر باشد (مثل انتخاب سالاد به ۲ روش و انتخاب نوشیدنی به ۳ روش)، کل آن کار به $m \times n$ روش قابل انجام است.

نکته: **۱** هر دو اصل بالا، قابل تعمیم به تعداد بیشتر از ۲ هستند، مثلاً اگر کاری در ۳ مرحله انجام شود به طوری که مرحلهٔ اول به m روش و مرحلهٔ دوم به n روش و مرحلهٔ سوم به k روش انجام‌پذیر باشد، در کل، آن کار به $m \times n \times k$ روش قابل انجام است.
۲ اگر بین جملات از «یا» استفاده کردید، سراغ اصل جمع و اگر از «و» استفاده کردید، سراغ اصل ضرب بروید.



مثال آموزشی: **الف)** از شهر یزد به شهر کاشان ۳ مسیر و از شهر کاشان به تهران ۴ مسیر وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از یزد به تهران برویم؟

ب) یک معلم برای تدریس کلاس‌های آنلاینش می‌خواهد از بین ۴ مدل لپ‌تاپ، ۲ مدل surface و ۵ مدل تبلت، یک وسیله را بخرد. این معلم به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

پاسخ: **الف** کاری که قرار است انجام دهیم را می‌نویسیم: $\underbrace{\text{«از یزد به کاشان برویم}}_{\text{مرحلهٔ اول}}\ \underset{\text{ضرب}}{\text{و}}\ \underbrace{\text{از کاشان به تهران برویم.»}}_{\text{مرحلهٔ دوم}}$

این یعنی با یک کار دومرحله‌ای روبه‌رو هستیم و باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

$$\text{تعداد کل حالات} = \frac{۳}{\text{یزد به کاشان}} \times \frac{۴}{\text{کاشان به تهران}} = ۱۲$$

ب کاری که این معلم می‌خواهد انجام دهد را می‌نویسیم: «او می‌خواهد یک لپ‌تاپ $\underset{\text{جمع}}{\text{یا}}$ یک surface $\underset{\text{جمع}}{\text{یا}}$ یک تبلت بخرد.»

چون این کارها را نمی‌توان با هم انجام داد، پس با اصل جمع روبه‌رو هستیم:

$$\text{تعداد کل حالات} = \overset{\text{لپ‌تاپ}}{۴} + \underset{\text{surface}}{۲} + \overset{\text{تبلت}}{۵} = ۱۱$$

تعداد و تنوع سؤالات «اصل ضرب» نسبت به «اصل جمع» خیلی بیشتر است. در ادامه روی اصل ضرب بحث می‌کنیم.

اگر تشخیص دادید سؤال با اصل ضرب باید حل شود (حرف ربط «و» به این موضوع خیلی کمک می‌کند)، مراحل زیر را جلو می‌رویم:

مراحل حل سؤالات اصل ضرب

مرحله اول: ابتدا به تعداد مراحل کار، خانهٔ خالی قرار می‌دهیم و بین آن‌ها علامت ضرب می‌گذاریم.

مرحله دوم: از خانه‌ای شروع به پرکردن می‌کنیم که **محدودیت** بیشتری دارد. *(منظورم از محدودیت رو تو مثال‌های بعدی براتون توضیح می‌دم.)*

مرحله سوم: سپس بقیهٔ خانه‌ها را پر می‌کنیم.

مرحله چهارم: اعداد قرارگرفته در جاهای خالی را ضرب می‌کنیم تا جواب مسئله به دست آید.

مثال آموزشی: در یک آزمون چهارگزینه‌ای که ۱۰ سؤال دارد، در هر کدام از موارد زیر، چند حالت ممکن برای پاسخ‌نامه داریم؟

الف) پاسخ‌دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد. **ب) پاسخ‌دادن به سؤالات الزامی نباشد.** **پ) پاسخ‌دادن به ۵ سؤال اول الزامی باشد.**

پاسخ: الف با یک کار ۱۰مرحله‌ای روبه‌رو هستیم. (هر سؤال، یک مرحله است):

$$\frac{}{\text{سؤال ۱}}\times\frac{}{\text{سؤال ۲}}\times\frac{}{\text{سؤال ۳}}\times\cdots\times\frac{}{\text{سؤال ۱۰}}$$

با هیچ محدودیتی روبه‌رو نیستیم؛ پس از همان سؤال ۱ شروع به پرکردن می‌کنیم:

هر سؤال، ۴ حالت دارد (گزینه‌های (۱) تا (۴))، پس تعداد کل حالات پاسخ‌گویی برابر است با:

$$\frac{۴}{\text{سؤال ۱}}\times\frac{۴}{\text{سؤال ۲}}\times\frac{۴}{\text{سؤال ۳}}\times\cdots\times\frac{۴}{\text{سؤال ۱۰}}=\underbrace{۴\times۴\times\cdots\times۴}_{\text{۱۰تا}}=۴^{۱۰}$$

ب مثل قسمت قبل است، فقط هر سؤال، ۵ حالت دارد، (انتخاب یکی از گزینه‌های ۱ تا ۴ یا «پاسخ‌ندادن»)؛ پس تعداد کل حالات پاسخ‌گویی برابر است با:

$$\frac{۵}{\text{سؤال ۱}}\times\frac{۵}{\text{سؤال ۲}}\times\frac{۵}{\text{سؤال ۳}}\times\cdots\times\frac{۵}{\text{سؤال ۱۰}}=۵^{۱۰}$$

پ چون پاسخ‌دادن به ۵ سؤال اول الزامی است، پس هر کدامشان ۴ حالت دارند و ۵ سؤال بعدی که می‌توانیم به آن‌ها پاسخ ندهیم، هر کدام ۵ حالت دارند؛ پس تعداد کل حالات پاسخ‌گویی برابر است با:

$$\frac{۴}{\text{سؤال ۱}}\times\cdots\times\frac{۴}{\text{سؤال ۵}}\times\frac{۵}{\text{سؤال ۶}}\times\cdots\times\frac{۵}{\text{سؤال ۱۰}}=\underbrace{۴\times\cdots\times۴}_{\text{۵تا}}\times\underbrace{۵\times\cdots\times۵}_{\text{۵تا}}=۴^{۵}\times۵^{۵}=۲۰^{۵}$$

تست: مرضیه، شقایق، هتاو، فرناز و خدیجه می‌خواهند در ۵ صندلی که در یک ردیف کنار هم قرار دارند، بنشینند. در چند حالت خدیجه در صندلی‌های ابتدایی و انتهایی نمی‌نشیند؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۷۲ ۴) ۸۰

پاسخ۳: کارمان ۵مرحله‌ای است (پرکردن ۵ صندلی خالی):

$$\frac{}{\text{صندلی ۱}}\times\frac{}{\text{صندلی ۲}}\times\frac{}{\text{صندلی ۳}}\times\frac{}{\text{صندلی ۴}}\times\frac{}{\text{صندلی ۵}}$$

با خانه‌هایی که محدودیت دارند شروع می‌کنیم. (صندلی‌های ۱ و ۵ محدودیت دارند: خدیجه نباید روی آن‌ها بنشیند.)

صندلی ۱، ۴ حالت دارد (هر کدام از این ۵ نفر به‌جز خدیجه) و صندلی ۵، ۳ حالت دارد (به‌جز خدیجه و شخصی که روی صندلی ۱ نشسته است):

$$\frac{۴}{\text{صندلی ۱}}\times\frac{}{\text{صندلی ۲}}\times\frac{}{\text{صندلی ۳}}\times\frac{}{\text{صندلی ۴}}\times\frac{۳}{\text{صندلی ۵}}$$

خانه‌های محدودیت‌دار تمام شدند. برای سه خانهٔ دیگر، خدیجه به بازی برمی‌گردد. برای صندلی ۲، ۳ حالت داریم (خدیجه و دو نفر باقی‌ماندهٔ دیگر). یکی از این ۳ نفر نشست؛ پس برای صندلی ۳، ۲ حالت داریم. فقط یک نفر مانده که آن هم باید روی صندلی ۴ بنشیند؛ پس صندلی ۴، ۱ حالت دارد. خانه‌های باقی‌مانده را پر می‌کنیم و اعدادشان را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۴}{\text{صندلی ۱}}\times\frac{۳}{\text{صندلی ۲}}\times\frac{۲}{\text{صندلی ۳}}\times\frac{۱}{\text{صندلی ۴}}\times\frac{۳}{\text{صندلی ۵}}=۷۲$$

اصل ضرب در عددنویسی یکی از سؤالات پرتکرار این قسمت، سؤالات مربوط به عددنویسی است. ارقام ۰ تا ۹ یا تعدادی از آن‌ها را به ما می‌دهند و می‌گویند با این ارقام چند عدد سه‌رقمی (یا چهاررقمی یا ...) می‌توان نوشت که فلان شرط را داشته باشند. روش حل دقیقاً مثل بالا است. در این سؤالات حواستان به چند چیز باشد:

① تکرار ارقام مجاز است یا مجاز نیست.

② اگر رقم صفر در بین ارقام داده شده بود، حواستان باشد که در جایگاه سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد.

③ عددی که زوج است، یکانش باید زوج باشد و عددی که مضرب ۵ است، باید یکانش ۰ یا ۵ باشد.

مثال آموزشی: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت به طوری که:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. **ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.** **پ) مضرب ۵ باشد و تکرار مجاز نباشد.** **ت) بزرگ‌تر از ۲۰۰ باشد.**

پاسخ: الف با یک کار ۳مرحله‌ای روبه‌رو هستیم. (نوشتن رقم یکان و دهگان و صدگان)

$$\frac{}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{}{\text{یکان}}$$

از آن‌جایی که قرار است عدد ۳رقمی بنویسیم، صدگان صفر نمی‌تواند باشد؛ پس این خانه محدودیت دارد و باید با آن شروع کنیم. صدگان، هر کدام از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌تواند باشد (۴ حالت):

$$\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{}{\text{یکان}}$$

حالا برای بقیهٔ خانه‌ها (یکان و دهگان) محدودیتی نداریم و هر کدام از ۵ رقم ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌توانند در آن‌ها قرار گیرند؛ پس:

$$\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{۵}{\text{دهگان}}\times\frac{۵}{\text{یکان}}=۱۰۰$$

ب مشابه قسمت قبل، با خانه‌ای که محدودیت دارد (یعنی صدگان) شروع می‌کنیم:

$$\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{}{\text{یکان}}$$

حالا داستان کمی فرق می‌کند. الان حق نداریم رقمی که در صدگان استفاده کردیم را دوباره استفاده کنیم. (چون تکرار مجاز نیست!)

برای همین، یکی از ارقام ۱ تا ۴ که در صدگان استفاده شده را خط می‌زنیم، مثلاً: $۰,۱,۲,۳,\cancel{۴}$؛ پس ۴ رقم برای دهگان می‌ماند:

$$\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{۴}{\text{دهگان}}\times\frac{}{\text{یکان}}$$

یکی دیگر از این ارقام هم استفاده شده و خط می‌خورد، مثلاً: $۰,۱,۲,\cancel{۳},\cancel{۴}$؛ پس ۳ رقم برای یکان می‌ماند:

$$\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{۴}{\text{دهگان}}\times\frac{۳}{\text{یکان}}=۴۸$$

تذکر ① اگر بعد از صدگان، یکان را پر می‌کردیم و بعدش دهگان، اشکالی نداشت:

$$\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{۳}{\text{دهگان}}\times\frac{۴}{\text{یکان}}=۴۸$$

② برای این‌که کم‌تر بنویسیم ولی نوشته ما برایتان قابل فهم باشد، از این به بعد در بعضی سؤالات، کل مراحل را یک‌جا می‌نویسیم. مثلاً قسمت (ب) را این‌جوری می‌نویسیم:

$$\overset{\overset{۱,۲,۳,۴}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,\cancel{۴}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۲,\cancel{۳},\cancel{۴}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{یکان}}}=۴۸$$

توجه کنید که پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانهٔ بعدی رفته‌ایم، یک رقم دلخواه از خانهٔ قبلی را خط زده‌ایم. مثلاً در خانهٔ دوم از چپ، به دلخواه عدد ۴ را که در خانهٔ اول از چپ استفاده شده خط زده‌ایم. شما به جای ۴ می‌توانید ۱ یا ۲ یا ۳ را خط بزنید، هیچ فرقی ندارد.

در آخر هم برایتان ترتیب پرکردن خانه‌ها را مشخص کردیم، مثلاً در بالا این‌جوری می‌شود: صدگان ← دهگان ← یکان

پ برای آن‌که عددمان مضرب ۵ باشد، باید یکانش ۰ یا ۵ باشد که این‌جا فقط صفر را داریم؛ پس یکان ۱ حالت دارد و رقم صفر را هم کنار می‌گذاریم:

$$\underset{\text{صدگان}}{\underline{\qquad}}\times\underset{\text{دهگان}}{\underline{\qquad}}\times\overset{\substack{۰\\ \uparrow}}{\dfrac{۱}{\text{یکان}}}$$

۴ رقم ۱، ۲، ۳ و ۴ ماندند. دو خانهٔ دیگر محدودیتی ندارند. یکی ۴ حالت و دیگری ۳ حالت دارد:

$$\overset{\substack{۱،۲،۳،۴\\ \uparrow}}{\dfrac{۴}{\text{صدگان}}}\times\overset{\substack{۱،۲،۳،\cancel{۴}\\ \uparrow}}{\dfrac{۳}{\text{دهگان}}}\times\overset{\substack{۰\\ \uparrow}}{\dfrac{۱}{\text{یکان}}}=۱۲$$

ترتیب پرکردن: یکان ← صدگان ← دهگان

ت بدون توضیح حل می‌کنیم:

$$\overset{\substack{۴،۳،۲\\ \uparrow}}{\dfrac{۳}{\text{صدگان}}}\times\overset{\substack{۴،۳،\cancel{۲}،۱،۰\\ \uparrow}}{\dfrac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\substack{۴،۳،\cancel{۱}،۰\\ \uparrow}}{\dfrac{۳}{\text{یکان}}}=۳۶$$

چون محدودیت داشت.

ترتیب پرکردن: صدگان ← دهگان ← یکان

تست: **با ارقام ۰ تا ۶، یک عدد چهاررقمی می‌نویسیم که یکان و هزارگانش زوج و دو رقم دیگرش فرد باشند. اگر تکرار ارقام مجاز باشد، n عدد با این شرط و اگر تکرار ارقام مجاز نباشد، m عدد با این شرط می‌توانیم بنویسیم. مقدار $m+n$ کدام است؟**

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۲۶

پاسخ ۱: ارقام زوج و فرد را جدا می‌کنیم: ۱,۳,۵ :فردها ۰,۲,۴,۶ :زوج‌ها

پارت ۱ **تکرار ارقام مجاز نباشد**: با هزارگان شروع می‌کنیم که محدودیت دارد (صفر نباشد). برای هزارگان ۳ حالت (۲ یا ۴ یا ۶) داریم. یکی از آن‌ها در هزارگان استفاده می‌شود (مثلاً ۶)؛ پس برای یکان که صفر هم به بازی برمی‌گردد، باز هم ۳ حالت (۰ یا ۲ یا ۴) داریم. برای دهگان و صدگان هم که باید با ارقام فرد (۱ یا ۳ یا ۵) پر شوند به ترتیب ۳ و ۲ حالت داریم:

ترتیب پرکردن: هزارگان ← یکان ← صدگان ← دهگان

$$n=\overset{\substack{۶،۴،۲\\ \uparrow}}{\dfrac{۳}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\substack{۵،۳،۱\\ \uparrow}}{\dfrac{۳}{\text{صدگان}}}\times\overset{\substack{\cancel{۵}،۳،۱\\ \uparrow}}{\dfrac{۲}{\text{دهگان}}}\times\overset{\substack{\cancel{۶}،۴،۲،۰\\ \uparrow}}{\dfrac{۳}{\text{یکان}}}=۵۴$$

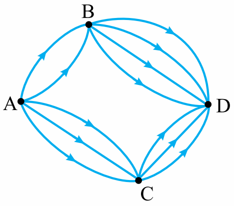
پارت ۲ **تکرار ارقام مجاز باشد**: مثل حالت قبل برای هزارگان ۳ حالت داریم (۲ یا ۴ یا ۶)، ولی برای یکان ۴ حالت داریم (۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶). هر دو خانهٔ دیگر هم ۳ حالت دارند؛ پس:

$$m=\overset{\substack{۶،۴،۲\\ \uparrow}}{\dfrac{۳}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\nearrow}{\dfrac{۳}{\text{صدگان}}}\overset{۵،۳،۱}{\times}\overset{\nwarrow}{\dfrac{۳}{\text{دهگان}}}\times\overset{\substack{۶،۴،۲،۰\\ \uparrow}}{\dfrac{۴}{\text{یکان}}}=۱۰۸$$

بنابراین: $m+n=۱۰۸+۵۴=۱۶۲$

ترکیب اصل ضرب و اصل جمع

فرض کنید می‌خواهیم از شهر A به شهر D برویم.



در این‌جا دو جور مسیر داریم
- **۱.** از جادهٔ بالایی برویم؛ یعنی مسیر ABD.
- **۲.** از جادهٔ پایینی برویم؛ یعنی مسیر ACD.

جملهٔ بالا را دقیق‌تر می‌نویسیم: «باید از A به B $\underset{\substack{\downarrow\\ \times}}{\textbf{و}}$ سپس از B به D برویم.» $\underset{\substack{\downarrow\\ +}}{\textbf{یا}}$ «باید از A به C $\underset{\substack{\downarrow\\ \times}}{\textbf{و}}$ بعدش از C به D برویم.»

پس دو حالت را جداگانه حساب می‌کنیم و حاصل را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}(ABC)\ \text{حالت‌اول}:\dfrac{۲}{\text{A به B}}\times\dfrac{۴}{\text{B به D}}=۸\\[2ex](ACD)\ \text{حالت‌دوم}:\dfrac{۳}{\text{A به C}}\times\dfrac{۳}{\text{C به D}}=۹\end{cases}\xrightarrow{\text{مجموع}}۸+۹=۱۷$$

پس اگر لازم شد، مسئله را به چند قسمت تفکیک می‌کنیم (که خودمان بین این قسمت‌ها از حرف ربط «یا» استفاده می‌کنیم). بعد تعداد حالات هر قسمت را حساب می‌کنیم و در نهایت آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. در هر کدام از قسمت‌ها، جواب را با اصل ضرب حساب می‌کنیم.

استراتژی اگر مسئله به فرم $\underbrace{\text{«کار ۱ و کار ۲ و ...»}}_{\text{قسمت ۱}}$ یا $\underbrace{\text{«کار ۱′ و کار ۲′ و ...»}}_{\text{قسمت ۲}}$ یا ... بود، برای حساب‌کردن تعداد کل حالات به صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم:

$$\underbrace{(\overset{\substack{\text{تعداد حالات انجام کار ۱}\\ \uparrow}}{n_۱}\times n_۲\times\cdots)}_{\text{قسمت ۱}}+\underbrace{(n'_۱\times n'_۲\times\cdots)}_{\text{قسمت ۲}}+\cdots$$

مثال آموزشی: **با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۷، ۸ و ۹ چند عدد دورقمی بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت که همهٔ ارقام آن فرد یا همهٔ آن‌ها زوج باشند؟**

پاسخ: جملهٔ سؤال را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: عدد دورقمی ما باید $\underbrace{\text{«یکانش زوج باشد و دهگانش زوج باشد»}}_{\text{قسمت ۱}}$ یا $\underbrace{\text{«یکانش فرد باشد و دهگانش فرد باشد.»}}_{\text{قسمت ۲}}$ تعداد حالات هر دو قسمت را حساب می‌کنیم و در آخر با هم جمع می‌کنیم.

۱ هر دو رقم زوج باشند: باید با ۴ رقم ۲، ۴، ۶ و ۸ عدد دورقمی را بسازیم. چون تکرار مجاز نیست، پس یکان ۴ حالت و دهگان ۳ حالت دارد: $\dfrac{۳}{\text{دهگان}}\times\dfrac{۴}{\text{یکان}}=۱۲$

۲ هر دو رقم فرد باشند: باید با ۳ رقم ۱، ۷ و ۹ عدد دورقمی را بسازیم. چون تکرار مجاز نیست، پس یکان ۳ حالت و دهگان ۲ حالت دارد: $\dfrac{۲}{\text{دهگان}}\times\dfrac{۳}{\text{یکان}}=۶$

مجموع حالات دو قسمت بالا برابر است با: $۱۲+۶=۱۸$

حالا اگه در مسائل عددنویسی (بدون تکرار ارقام)، شرط سؤال «زوج‌بودن» یا «مضرب ۵ بودن» عددمان بود، در دو حالت زیر، تعداد هر کدام را حساب می‌کنیم و در نهایت با هم جمع می‌کنیم: **۱** یکان صفر باشد **۲** یکان صفر نباشد.

مثال آموزشی: با ارقام ۰ تا ۵ چند عدد سه‌رقمی زوج بدون ارقام تکراری می‌توانیم بنویسیم؟

پاسخ: با توجه به چیزی که گفتیم، چون سؤال شرط «زوج‌بودن» عدد سه‌رقمی را گذاشته و تکرار ارقام هم مجاز نیست، پس کل داستان را به ۲ قسمت تقسیم می‌کنیم:

۱ یکان صفر باشد: برای یکان ۱ حالت داریم. ۵ رقم باقی می‌ماند؛ پس دو خانهٔ دیگر به ترتیب ۵ و ۴ حالت دارند:

$$\frac{۵}{\text{صدگان}} \times \frac{۴}{\text{دهگان}} \times \frac{۱}{\text{یکان}} = ۲۰$$

۲ یکان صفر نباشد: یکان باید با رقم زوج دیگری (به‌جز صفر) که در این‌جا ۲ یا ۴ است پر شود؛ پس یکان ۲ حالت دارد. فرض کنیم رقم ۴ استفاده شده، پس الان ۰، ۱، ۲، ۳ و ۵ باقی مانده‌اند. چون صدگان محدودیت دارد باید الان سراغ آن برویم. صدگان ۴ حالت دارد (۱ یا ۲ یا ۳ یا ۵). اگر فرض کنیم ۵ را در صدگان گذاشتیم، برای دهگان ۴ حالت باقی می‌ماند. (۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳)

$$\frac{۴}{\text{صدگان}} \times \frac{۴}{\text{دهگان}} \times \frac{۲}{\text{یکان}} = ۳۲$$

در آخر مجموع حالات دو قسمت بالا را جمع می‌کنیم: ۵۲ = ۳۲ + ۲۰

تست: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۵، ۶، ۷ و ۹ چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ با ارقام متمایز می‌توان نوشت که از ۳۰۰۰ بزرگ‌تر باشند؟

۱) ۱۳۲ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۴۶ ۴) ۱۵۰

پاسخ: ۲ **روش ۱** با توجه به شرط «مضرب ۵ بودن» و متمایزبودن ارقام، کل داستان را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد: پس یکان ۱ حالت دارد (باید صفر باشد). حالا باید سراغ هزارگان برویم که محدودیت دارد. چون قرار است عددمان از ۳۰۰۰ بزرگ‌تر باشد، پس هزارگان می‌تواند ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۹ باشد (۴ حالت). فرض کنیم رقم ۹ را در هزارگان استفاده کردیم، رقم‌های ۱، ۲، ۵، ۶ و ۷ باقی ماندند؛ پس برای صدگان و دهگان به ترتیب ۵ و ۴ حالت داریم:

$$\frac{\overset{\substack{۵،۶،۷،۹\\ \uparrow}}{۴}}{\text{هزارگان}} \times \frac{\overset{\substack{۱،۲،۵،۶،۷،\cancel{۹}\\ \uparrow}}{۵}}{\text{صدگان}} \times \frac{\overset{\substack{۱،۲،۵،۶،\cancel{۷}\\ \uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}} \times \frac{\overset{\substack{۰\\ \uparrow}}{۱}}{\text{یکان}} = ۸۰$$

۲) یکان ۵ باشد: پس یکان ۱ حالت دارد (باید ۵ باشد). در هزارگان ۶ یا ۷ یا ۹ را می‌توانیم استفاده کنیم (۳ حالت). فرض کنیم رقم ۹ را در هزارگان استفاده کردیم، رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۶ و ۷ باقی ماندند؛ پس برای صدگان و دهگان به ترتیب ۵ و ۴ حالت داریم:

$$\frac{\overset{\substack{۶،۷،۹\\ \uparrow}}{۳}}{\text{هزارگان}} \times \frac{\overset{\substack{۰،۱،۲،۶،۷،\cancel{۹}\\ \uparrow}}{۵}}{\text{صدگان}} \times \frac{\overset{\substack{۰،۱،۲،۶،\cancel{۷}\\ \uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}} \times \frac{\overset{\substack{۵\\ \uparrow}}{۱}}{\text{یکان}} = ۶۰$$

در آخر مجموع حالات دو قسمت بالا را جمع می‌کنیم: ۸۰ + ۶۰ = ۱۴۰

روش ۲ می‌توانیم روی رقم هزارگان حالت‌بندی کنیم (چون این رقم هم محدودیت دارد). با توجه به این‌که هزارگان باید ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۹ باشد و از طرفی یکان هم باید ۰ یا ۵ باشد؛ پس حالت‌بندی روی هزارگان را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

۱) هزارگان ۵ باشد:
$$\frac{\overset{\substack{۵\\ \uparrow}}{۱}}{\text{هزارگان}} \times \frac{\overset{\substack{۱،۲،۶،۷،۹\\ \uparrow}}{۵}}{\text{صدگان}} \times \frac{\overset{\substack{۱،۲،۶،۷،\cancel{۹}\\ \uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}} \times \frac{\overset{\substack{۰\\ \uparrow}}{۱}}{\text{یکان}} = ۲۰$$

۲) هزارگان ۶ یا ۷ یا ۹ باشد:
$$\frac{\overset{\substack{۶،۷،۹\\ \uparrow}}{۳}}{\text{هزارگان}} \times \frac{\overset{\substack{\cancel{۰}،۱،۲،۵،۶،۷،\cancel{۹}\\ \uparrow}}{۵}}{\text{صدگان}} \times \frac{\overset{\substack{۱،۲،۵،۶،\cancel{۷}\\ \uparrow}}{۴}}{\text{دهگان}} \times \frac{\overset{\substack{۰،۵\\ \uparrow}}{۲}}{\text{یکان}} = ۱۲۰$$

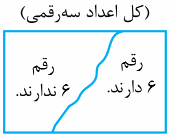
(ترتیب پرکردن: ه ⟵ ی ⟵ ص ⟵ د)

در آخر مجموع حالات دو قسمت بالا را جمع می‌کنیم: ۱۴۰ = ۱۲۰ + ۲۰

اصل متمم (کل حالات، منهای حالات نامطلوب) فرض کنید دنبال تعداد اعداد سه‌رقمی هستیم که در آن‌ها رقم ۶ به کار رفته است. از این نظر، کل اعداد سه‌رقمی را می‌توانیم به ۸ دستهٔ زیر تفکیک کنیم:

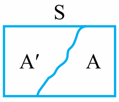
(کل اعداد سه‌رقمی)		
۱) فقط یکان ۶ باشد.	۴) یکان و دهگان ۶ باشد.	۷) هر سه رقم ۶ باشد.
۲) فقط دهگان ۶ باشد.	۵) یکان و صدگان ۶ باشد.	۸) هیچ رقمی ۶ نباشد.
۳) فقط صدگان ۶ باشد.	۶) دهگان و صدگان ۶ باشد.	

ما دنبال مجموع تعداد حالات دسته‌های ۱ تا ۷ هستیم؛ یعنی ۷ بار باید از اصل ضرب استفاده کنیم (شایدم کلک بزنید و کم‌ترش کنید ولی زیر ۳تا نمی‌شه!)



بهتر است به جای کار بالا که هم وقت‌گیر است و هم دقت زیادی می‌خواهد، تعداد کل اعداد سه‌رقمی را منهای تعداد حالات دستهٔ ۸ کنیم.

می‌توانیم ۸ دسته‌بندی بالا را به دو دستهٔ مقابل تبدیل کنیم. (که دستهٔ سمت راست، شامل کل دسته‌های ۱ تا ۷ و دستهٔ سمت چپ، همان دستهٔ ۸ است.)



جور دیگری هم می‌توانید به داستان نگاه کنید. اگر دستهٔ سمت راست A باشد، دستهٔ سمت چپ، متمم A یعنی A' است و کلشان روی هم نیز S را تشکیل می‌دهند که رابطهٔ روبه‌رو بینشان برقرار است: تعداد اعضای S = تعداد اعضای A' + تعداد اعضای A

برای مثال، تساوی بالا با کمی جابه‌جایی به شکل روبه‌رو درمی‌آید: (تعداد اعداد سه‌رقمی که رقم ۶ ندارند.) − (تعداد کل اعداد سه‌رقمی) = تعداد اعداد سه‌رقمی که رقم ۶ دارند.

حالا دو مورد سمت راست تساوی را حساب می‌کنیم:

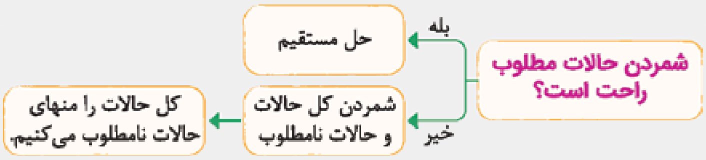
$$۶۴۸=\underset{\text{یکان}}{\overset{\overset{\text{به‌جز ۶}}{\uparrow}}{۹}}\times\underset{\text{دهگان}}{\overset{\overset{\text{به‌جز ۶}}{\uparrow}}{۹}}\times\underset{\text{صدگان}}{\overset{\overset{\text{۱ تا ۹ به‌جز ۶}}{\uparrow}}{۸}}$$:تعداد اعداد سه‌رقمی که رقم ۶ ندارند

$$۹۰۰=\underset{\text{یکان}}{\overset{\overset{\text{۰ تا ۹}}{\uparrow}}{۱۰}}\times\underset{\text{دهگان}}{\overset{\overset{\text{۰ تا ۹}}{\uparrow}}{۱۰}}\times\underset{\text{صدگان}}{\overset{\overset{\text{۱ تا ۹}}{\uparrow}}{۹}}$$:تعداد کل اعداد سه‌رقمی

پس: $۲۵۲ = ۶۴۸ - ۹۰۰ =$ تعداد اعداد سه‌رقمی که رقم ۶ دارند.

مشاوره هر وقت در سؤالات شمارش، کلمات «حداقل (یا لااقل)» یا «حداکثر» یا «افعال منفی» داشتید، به احتمال زیاد باید سؤال را با اصل متمم حل کنید. البته ممکن است با وجود این نشانه‌ها، باز هم حل مستقیم سؤال راحت‌تر باشد.

استراتژی اگر در سؤالات شمارش شک کردید که حل مستقیم بهتر است یا استفاده از اصل متمم، استراتژی مقابل را جلو می‌رویم:

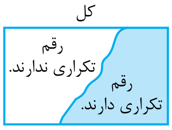


مثال آموزشی: با ارقام ۰ تا ۴، چند عدد سه‌رقمی می‌توانیم بنویسیم که حداقل دو رقم آن یکسان باشد؟

پاسخ: کلمهٔ «حداقل» به ما آلارم می‌دهد که احتمالاً باید از اصل متمم برویم.

شمردن تعداد اعداد سه‌رقمی که حداقل ۲ رقم یکسان دارد، سخت است ولی متممش راحت‌تر است.

کل اعداد سه‌رقمی که با ارقام ۰ تا ۴ می‌توانیم بنویسیم، به دو دستهٔ روبه‌رو تفکیک می‌شوند:



کلشان برابر است با: $۱۰۰=\underset{\text{یکان}}{۵}\times\underset{\text{دهگان}}{۵}\times\underset{\text{صدگان}}{\overset{\overset{\text{۱ تا ۴}}{\uparrow}}{۴}}$ (یکان و دهگان: ۰ تا ۴)

تعداد سه‌رقمی‌هایی که با ۰ تا ۴ می‌نویسیم و تکرار هم ندارند: $۴۸=\underset{\text{یکان}}{\overset{\overset{\text{۰ تا ۴ به‌جز صدگان و دهگان}}{\uparrow}}{۳}}\times\underset{\text{دهگان}}{\overset{\overset{\text{۰ تا ۴ به‌جز صدگان}}{\uparrow}}{۴}}\times\underset{\text{صدگان}}{\overset{\overset{\text{۱ تا ۴}}{\uparrow}}{۴}}$

(ترتیب پرکردن: ص ⟵ د ⟵ ی)

پس: $۵۲=\underbrace{\text{تکراری ندارند}}_{۴۸}-\underbrace{\text{کل}}_{۱۰۰}=$ تکراری دارند.

فاکتوریل

حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را با n! نشان می‌دهیم و آن را «n فاکتوریل» می‌خوانیم: $۱\times۲\times۳\times\cdots\times n=n!$

مثلاً ۴! یعنی حاصل‌ضرب اعداد از ۱ تا ۴: $۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$

مشاوره بهتر است حاصل ۱! تا ۷! را حفظ باشید:

$۷!=۵۰۴۰$	$۶!=۷۲۰$	$۵!=۱۲۰$	$۴!=۲۴$	$۳!=۶$	$۲!=۲$	$۱!=۱$

نکته: قرارداد می‌کنیم که صفر فاکتوریل برابر با یک است: $۰!=۱$

مثال آموزشی: حاصل عبارات روبه‌رو را به دست آورید. الف) $\frac{۵!+۳!-۱!}{۴!+۰!}$ ب) $\frac{۹!}{۷!}$

پاسخ: **الف** جای هر پنج عبارت فاکتوریل‌دار، مقادیرشان را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۵!+۳!-۱!}{۴!+۰!}=\frac{۱۲۰+۶-۱}{۲۴+۱}=\frac{۱۲۵}{۲۵}=۵$$

ب هر دو عبارت فاکتوریل‌دار را باز می‌کنیم و صورت و مخرج را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۹!}{۷!}=\frac{\cancel{۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷}\times۸\times۹}{\cancel{۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷}}=۸\times۹=۷۲$$

حالا اگه بخواهیم می‌توانیم جای n!، هر کدام از عبارات زیر را بنویسیم:

$$\begin{cases}n!=n\times(n-۱)! \xrightarrow{\text{مثال}} ۱۰!=۱۰\times۹!\\ n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)! \xrightarrow{\text{مثال}} ۱۰!=۱۰\times۹\times۸!\\ n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times(n-۳)! \xrightarrow{\text{مثال}} ۱۰!=۱۰\times۹\times۸\times۷!\end{cases}$$

از این کار برای ساده‌کردن کسرهایی که صورت و مخرجشان عبارت فاکتوریلی دارد، استفاده می‌کنیم.

مثال آموزشی: حاصل عبارات روبه‌رو را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید. الف) $\frac{۲۵!}{۲۴!}$ ب) $\frac{۱۱!}{۸!}$ پ) $\frac{n!}{(n-۲)!}$

پاسخ: **الف** جای ۲۵! می‌نویسیم ۲۵×۲۴! (در واقع صورت را برحسب مخرج می‌نویسیم تا راحت ساده کنیم):

$$\frac{۲۵\times\cancel{۲۴!}}{\cancel{۲۴!}}=۲۵$$

ب عدد ۱۱، سه شماره از ۸ جلوتر است؛ پس جای ۱۱! می‌نویسیم ۱۱×۱۰×۹×۸! و بعد ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱۱\times۱۰\times۹\times\cancel{۸!}}{\cancel{۸!}}=\underbrace{۱۱\times۹}_{۹۹}\times۱۰=۹۹۰$$

پ ترتیب اعداد از ۱ تا n را ببینید: $۱,۲,۳,\dots,n-۳,n-۲,n-۱,n$

n و n − ۲، دو شماره با هم فاصله دارند و !n نسبت به !(n − ۲) دو عدد n − ۱ و n را بیشتر دارد؛ پس: $\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n\times(n-۱)\times(n-۲)!}{(n-۲)!}=(n-۱)\times n=n^۲-n$

تست: با توجه به تساوی $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=۷n+۱۶$، مقدار $\frac{(۲n-۱)!}{(n+۵)!}$ کدام است؟

۱) ۱۵۶ ۲) ۱۸۲ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

پاسخ۳: **پارت ۱** اعداد از ۱ تا n + ۱ را می‌نویسیم: $۱,۲,\dots,n-۱,n,n+۱$

دو عدد n − ۱ و n + ۱، دو شماره با هم فاصله دارند؛ پس جای !(n + ۱) می‌نویسیم !(n − ۱) ضرب در ۲ عدد بعدی‌اش یعنی n و n + ۱: $(n+۱)!=(n+۱)\times n\times(n-۱)!$

حالا کسر را ساده می‌کنیم: $\frac{(n+۱)\times n\times \cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}}=۷n+۱۶\Rightarrow\overset{n^۲+n}{\overbrace{(n+۱)\times n}}=۷n+۱۶\Rightarrow n^۲-۶n-۱۶=۰\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{جمله}}(n-۸)(n+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۸ ✓\\ n=-۲ ✗\end{cases}$

چون فاکتوریل برای اعداد منفی تعریف نمی‌شود و به ازای n = −۲، عبارت !(n − ۱) به صورت !(−۳) درمی‌آید؛ پس n = −۲ قبول نیست.

پارت ۲ با جای‌گذاری n = ۸ در $\frac{(۲n-۱)!}{(n+۵)!}$ داریم: $\frac{۱۵!}{۱۳!}=\frac{۱۵\times۱۴\times\cancel{۱۳!}}{\cancel{۱۳!}}=۲۱۰$

جایگشت

هر یک از راه‌های ممکنِ قرارگرفتنِ n شیء متمایز کنار هم، یک جایگشت از آن اشیا است.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم علی، ایمان و کوشا را روی ۳ صندلی کنار هم بنشانیم. تمام حالات ممکن برای این کار را در جدول مقابل می‌بینید:

هر کدام از ۶ سطر جدول روبه‌رو، یک جایگشت از این سه نفر است.

حالا اگه می‌خواستیم بدون نوشتن تمام حالات، تعداد جایگشت‌های این ۳ نفر را به دست آوریم، باید از اصل ضرب استفاده می‌کردیم:

برای صندلی اول، ۳ حالت داریم. یکی از این ۳ نفر روی آن می‌نشیند (مثلاً علی). برای صندلی دوم ۲ حالت داریم (ایمان و کوشا) و برای صندلی سوم هم یک حالت داریم؛ پس تعداد کل جایگشت‌های این ۳ نفر برابر است با: $\underset{\text{صندلی سوم}}{\underline{۱}}\times\underset{\text{صندلی دوم}}{\underline{۲}}\times\underset{\text{صندلی اول}}{\underline{۳}}=۳!=۶$

صندلی سوم	صندلی دوم	صندلی اول
کوشا	ایمان	علی
ایمان	کوشا	علی
کوشا	علی	ایمان
علی	کوشا	ایمان
ایمان	علی	کوشا
علی	ایمان	کوشا

نکته: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر با !n است؛ یعنی n شی متمایز را به !n حالت می‌توانیم کنار هم قرار دهیم.

مشاوره تمام سؤالات جایگشت را با اصل ضرب هم می‌توانید حل کنید.

مثال آموزشی: به چند طریق، با ۴ نفر می‌توان یک صف تشکیل داد؟

پاسخ: **روش ۱** می‌خواهیم ۴ نفر را کنار هم قرار دهیم؛ یعنی تعداد جایگشت‌های ۴ نفر را می‌خواهیم که می‌شود: $۴!=۲۴$

روش ۲ با یک کار ۴مرحله‌ای روبه‌رو هستیم: $\underset{\text{نفر چهارم}}{\underline{\quad}}\times\underset{\text{نفر سوم}}{\underline{\quad}}\times\underset{\text{نفر دوم}}{\underline{\quad}}\times\underset{\text{نفر اول}}{\underline{\quad}}$

برای جایگاه نفر اول صف، ۴ انتخاب داریم (۴ نفر). برای جایگاه نفر دوم، ۳ انتخاب داریم و این روال تا جایگاه چهارم ادامه دارد که برای آن، فقط ۱ نفر می‌ماند: $\underset{\text{نفر چهارم}}{\underline{۱}}\times\underset{\text{نفر سوم}}{\underline{۲}}\times\underset{\text{نفر دوم}}{\underline{۳}}\times\underset{\text{نفر اول}}{\underline{۴}}=۲۴$

تست: تعدادی سخنران قرار است در یک همایش سخنرانی کنند. اگر یک سخنران دیگر به آن‌ها اضافه شود، تعداد حالاتی که این نفرات می‌توانند پشت سر هم سخنرانی کنند، ۶۰۰تا افزایش می‌یابد. تعداد سخنران‌ها در حالت دوم کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ۳: تعداد سخنران‌های اولیه را n می‌گیریم. چون ترتیب سخنرانی‌ها مهم است، پس تعداد کل حالات سخنرانی این n نفر برابر با !n می‌شود. یک بار با اصل ضرب هم ببینید: $\underset{\text{سخنرانی اول}}{\underline{n}}\times\underset{\text{سخنرانی دوم}}{\underline{n-۱}}\times\dots\times\underset{\text{سخنرانی nام}}{\underline{۱}}=n!$

در حالت دوم که یک سخنران اضافه می‌شود، تعداد سخنران‌ها n + ۱ و تعداد حالات سخنرانی !(n + ۱) می‌شود.

اختلافات !n و !(n + ۱) برابر با ۶۰۰ است: $(n+۱)!-n!=۶۰۰$

پس باید دنبال دوتا عدد پشت سر هم باشیم که اختلاف فاکتوریلشان ۶۰۰ باشد. این دو عدد ۱۲۰ = !۵ و ۷۲۰ = !۶ هستند؛ پس n باید ۵ باشد.

سؤال تعداد سخنران‌ها در حالت دوم را می‌خواهد که برابر با n + ۱ یعنی ۶ = ۱ + ۵ است.

تبدیل (تعداد جایگشت‌های r شی از n شی متمایز) یک گروه ۵نفره را در نظر بگیرید: «علی، رضا، محمد، حسین و نیما»

اگر بخواهیم با این ۵ نفر، یک صف ۵نفره تشکیل دهیم، تعداد کل حالات برابر است با:

$$\frac{۵}{\text{نفر اول}}\times\frac{۴}{\text{نفر دوم}}\times\frac{۳}{\text{نفر سوم}}\times\frac{۲}{\text{نفر چهارم}}\times\frac{۱}{\text{نفر پنجم}}=۵!=۱۲۰$$

در واقع تعداد جایگشت‌های ۵ نفر را نوشتیم. (جایگشت ۵ شیء از بین ۵ شیء)

حالا اگر بخواهیم با این ۵ نفر، یک صف ۳نفره تشکیل دهیم، تعداد کل حالات برابر است با:

$$\frac{۵}{\text{نفر اول}}\times\frac{۴}{\text{نفر دوم}}\times\frac{۳}{\text{نفر سوم}}=۶۰$$

در این‌جا ما جایگشت‌های ۳ شیء از بین ۵ شیء را حساب کردیم که به آن **تبدیل** می‌گوییم.

فرق جایگشت با تبدیل: اگر تمام n شیء را بخواهیم کنار هم قرار دهیم، با جایگشت طرفیم ولی اگر تعدادی از آن‌ها (مثلاً rتا) را بخواهیم کنار هم قرار دهیم، با تبدیل (جایگشت r شیء از n شیء) طرفیم.

نکته: تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز را با نماد $P(n,r)$ (یا P_r^n) نشان می‌دهیم و آن را از رابطهٔ $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ به دست می‌آوریم؛ پس در صورت کسر، تعداد کل اشیا و در مخرج، اختلاف تعداد اشیا و تعداد جایگاه‌ها را قرار می‌دهیم.

مثلاً در مثال بالا که با ۵ نفر می‌خواستیم صف ۳نفره تشکیل دهیم می‌توانستیم از فرمول گفته‌شده استفاده کنیم:

$$P(۵,۳)=\frac{\overset{\overset{\text{کل نفرات}}{\uparrow}}{۵!}}{(\underset{\underset{\text{کل نفرات}}{}}{\underset{\downarrow}{۵}}-\underset{\underset{\text{جایگاه‌ها}}{}}{\underset{\downarrow}{۳}})!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{\cancel{۱\times۲}\times۳\times۴\times۵}{\cancel{۱\times۲}}=۶۰$$

مشاوره تمام سؤال‌های مربوط به تبدیل را هم می‌توانید با اصل ضرب حل کنید و نیازی به استفاده از فرمول گفته‌شده نیست، مگر این‌که سؤال مستقیماً محاسبهٔ یک عبارت به شکل $P(n,r)$ را بخواهد.

مثال آموزشی: تعداد جایگشت‌های ۴حرفی از حروف کلمهٔ «gandomi» کدام است؟

پاسخ: **روش ۱** کلمهٔ «gandomi» از ۷ حرف ساخته شده است.

ما تعداد جایگشت‌های ۴حرفی از ۷ حرف را می‌خواهیم:

$$P(۷,۴)=\frac{۷!}{(۷-۴)!}=\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۸۴۰$$

روش ۲ در کل ۷ حرف داریم و می‌خواهیم با آن‌ها یک کلمهٔ ۴حرفی بسازیم:

$$\frac{\quad}{\text{حرف اول}}\times\frac{\quad}{\text{حرف دوم}}\times\frac{\quad}{\text{حرف سوم}}\times\frac{\quad}{\text{حرف چهارم}}$$

برای حرف اول ۷ انتخاب، برای حرف دوم ۶ انتخاب و برای حرف سوم و چهارم به ترتیب ۵ و ۴ انتخاب داریم:

$$\frac{۷}{\text{حرف اول}}\times\frac{۶}{\text{حرف دوم}}\times\frac{۵}{\text{حرف سوم}}\times\frac{۴}{\text{حرف چهارم}}=۸۴۰$$

تذکر اگر صورت سؤال به شکل «با حروف کلمهٔ «gandomi» چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان نوشت؟» بود، باز هم روند حل، همین بود.

حالا اگه سؤال از شما مقدار $P(n,r)$ را خواست، هم می‌توانید از فرمول $\frac{n!}{(n-r)!}$ آن را حساب کنید و هم می‌توانید آن را معنی کنید و سریع‌تر حاصلش را به دست آورید: « $P(n,r)$ یعنی rتا جای خالی داریم و می‌خواهیم آن را با n نفر پر کنیم». در جای خالی اول n حالت، در جای خالی دوم $n-۱$ حالت و ... تا برسیم به جای خالی آخر، بعد همهٔ آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم. مثلاً $P(۸,۲)$ یعنی ۲تا جای خالی داریم:

$$\frac{\quad}{\text{جای اول}}\times\frac{\quad}{\text{جای دوم}}$$

حالا با ۸ نفر می‌خواهیم این ۲تا جا را پر کنیم؛ پس اولی ۸ و دومی ۷ حالت دارد:

$$\frac{۸}{\text{جای اول}}\times\frac{۷}{\text{جای دوم}}=۵۶\xrightarrow{\text{یعنی}}P(۸,۲)=۵۶$$

تست: در معادلهٔ $P(n,۲)+P(n+۱,۱)=۵۰$ ، مقدار n کدام است؟

۱) ۷

۲) ۶

۳) ۵

۴) ۸

پاسخ ۱: هر دو عبارت را معنی می‌کنیم:

- $P(n,۲)$ یعنی ۲تا جا داریم و nتا شیء؛ پس حاصلش برابر است با:

$$\frac{n}{\text{جای اول}}\times\frac{n-۱}{\text{جای دوم}}=n^۲-n$$

- $P(n+۱,۱)$ یعنی ۱ جا داریم و $n+۱$ تا شیء؛ پس حاصلش همان $n+۱$ می‌شود:

$$\frac{n+۱}{\text{جای اول}}$$

معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\underbrace{P(n,۲)}_{n^۲-n}+\underbrace{P(n+۱,۱)}_{n+۱}=۵۰\Rightarrow n^۲-\cancel{n}+\cancel{n}+۱=۵۰\Rightarrow n^۲=۴۹\xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}}n=\pm\sqrt{۴۹}=\pm۷$$

n نمی‌تواند منفی باشد؛ پس $n=۷$ می‌شود.

جایگشت‌های مشروط بعضی وقت‌ها از ما تعداد جایگشت‌های چند شیء را می‌خواهند اما شروطی هم می‌گذارند. مثلاً می‌گویند فلان چیز در فلان جا باشد یا فلان چیز در فلان جا نباشد یا فلان چیزها کنار هم باشند یا ... . در ادامه، تیپ‌های معروف این سؤالات را بررسی می‌کنیم:

۱. فلان چیز در فلان جا باشد (یا نباشد)! فرض کنید می‌خواهیم با حروف A، B، C و D یک کلمهٔ ۴حرفی بنویسیم به طوری که حرف B، حرف اول باشد. خُب تکلیف حرف اول معلوم است:

$$\frac{\overset{\overset{B}{\uparrow}}{۱}}{\text{اول}}\times\frac{\quad}{\text{دوم}}\times\frac{\quad}{\text{سوم}}\times\frac{\quad}{\text{چهارم}}$$

سه حرف باقی‌مانده یعنی A، C و D را در سه خانهٔ بعدی می‌چینیم:

$$\underset{\text{اول}}{\underline{\overset{\overset{B}{\uparrow}}{۱}}} \times \underset{\text{دوم}}{\underline{\overset{\overset{A,C,D}{\uparrow}}{۳}}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{\overset{\overset{A,C,\cancel{D}}{\uparrow}}{۲}}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{\overset{\overset{A,\cancel{C},\cancel{D}}{\uparrow}}{۱}}} = ۶$$

استراتژی در این تیپ سؤالات، ترتیب پرکردن خانه‌ها به صورت مقابل است:

خانه‌هایی که باید فلان شیء یا ... در آن‌ها باشد. ← **خانه‌هایی که باید فلان شیء یا ... در آن‌ها نباشد.** ← **خانه‌های بدون شرط**

مشاوره استراتژی بالا، همان نکته‌ای است که در سؤالات اصل ضرب گفتیم. اول خانه‌های دارای محدودیت را پر می‌کنیم، بعد می‌رویم سراغ خانه‌های بدون محدودیت.

تست: با ۵ نفر می‌خواهیم یک صف تشکیل دهیم. در چند حالت علی در انتهای صف است و امیر نفر دوم نیست؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ:۳ ۵ نفر را علی، امیر، A، B و C می‌گیریم. ۵ جای خالی هم برای قرارگرفتن آن‌ها داریم:

$$\underset{\text{اول}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{دوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{پنجم}}{\underline{\quad}}$$

پله‌پله جلو می‌رویم:

۱) علی باید در انتهای صف باشد (پس انتهای صف، ۱ حالت وجود دارد):

$$\underset{\text{اول}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{دوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{پنجم}}{\underline{۱}}$$

۲) امیر نباید نفر دوم باشد (پس نفر دوم، ۳ حالت دارد: A، B و C):

$$\underset{\text{اول}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{دوم}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{\quad}} \times \underset{\text{پنجم}}{\underline{۱}}$$

(فرض کنیم C در جای دوم نشست.)

۳) با فرض این‌که C در جای دوم نشسته، برای ۳ خانهٔ باقی‌مانده، سه نفر مانده‌اند (امیر، A و B):

$$\underset{\text{اول}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{دوم}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{۱}} \times \underset{\text{پنجم}}{\underline{۱}} = ۱۸$$

۲. فلان چیزها کنار هم باشند (بسته‌بندی) در این سؤال‌ها از ما می‌خواهند بعضی از اشیا کنار هم باشند که خودش دو حالت دارد:

۱ اشیایی که قرار است کنار هم باشند، مثل هم باشند.

۲ اشیایی که قرار است کنار هم باشند، متمایز باشند.

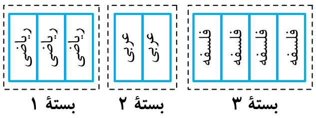
حالت‌های ۱ و ۲ را به ترتیب در قسمت‌های (الف) و (ب) مثال آموزشی زیر ببینید. در قسمت (پ) هم حالت ۲، جور دیگری پرسیده شده است.

مثال آموزشی: الف) ۳ کتاب ریاضی یکسان، ۲ کتاب عربی یکسان و ۴ کتاب فلسفهٔ یکسان را به چند طریق می‌توانیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم به طوری که کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند؟

ب) ۳ کتاب ریاضی متفاوت، ۲ کتاب عربی یکسان و ۴ کتاب فلسفهٔ متفاوت را به چند طریق می‌توانیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم به طوری که کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند؟

پ) ۳ کتاب ریاضی متفاوت، ۲ کتاب عربی متفاوت و ۴ کتاب فلسفهٔ متفاوت را به چند طریق می‌توانیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم به طوری که کتاب‌های فلسفه کنار هم باشند؟

پاسخ: **الف** چیزهایی که قرار است کنار هم باشند را در یک بسته قرار می‌دهیم (که مطمئن باشیم کنار هم می‌مانند):



اول جایگشت بسته‌ها را حساب می‌کنیم: !۳

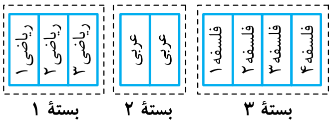
حالا به داخل هر بسته می‌رویم و جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم. از آن‌جایی که داخل هر بسته، اشیای یکسانی داریم، پس فقط یک جایگشت دارند و جابه‌جاشدنشان حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند. (۳تا کتاب ریاضی یکسان را ۳تا عدد یکسان مثلاً ۴ در نظر بگیرید. با این ۳تا ۴ فقط یک عدد ۳رقمی می‌توانیم بنویسیم که آن هم ۴۴۴ است و جابه‌جاکردن ۴ها، عدد جدیدی به ما نمی‌دهد.)

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\overset{\overset{\text{جایگشت بسته‌ها}}{\uparrow}}{۳!} \times \overset{\overset{\text{بستهٔ ۱}}{\uparrow}}{۱} \times \overset{\overset{\text{بستهٔ ۲}}{\uparrow}}{۱} \times \overset{\overset{\text{بستهٔ ۳}}{\uparrow}}{۱} = ۶$$

تذکر دقت کنید چون اشیای داخل هر بسته، یکسان بودند، داخل بسته‌ها، ۱ جایگشت داریم (یا به عبارت دیگر، کنار هم قرارگرفتنشان ۱ حالت دارد)

ب چیزهایی که قرار است کنار هم باشند را در یک بسته قرار می‌دهیم. برای آن‌که متفاوت بودن کتاب‌ها مشخص باشد، برایشان شماره می‌زنیم:



اول جایگشت بسته‌ها را حساب می‌کنیم: !۳

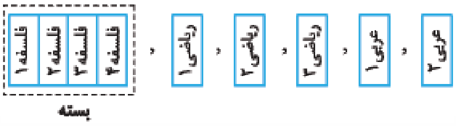
حالا به داخل هر بسته می‌رویم و جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم:

- بستهٔ ۱: جایگشت ۳ کتاب ریاضی، !۳ حالت دارد.
- بستهٔ ۲: چون کتاب‌های عربی یکسان‌اند، پس داخل این بسته جایگشت نداریم.
- بستهٔ ۳: جایگشت ۴ کتاب فلسفه، !۴ حالت دارد.

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\overset{\overset{\text{جایگشت‌بسته‌ها}}{\uparrow}}{۳!} \times \overset{\overset{\text{بستهٔ ۱}}{\uparrow}}{۳!} \times \overset{\overset{\text{بستهٔ ۲}}{\uparrow}}{۱} \times \overset{\overset{\text{بستهٔ ۳}}{\uparrow}}{۴!} = ۶ \times ۶ \times ۱ \times ۲۴ = ۸۶۴$$

پ کتاب‌های فلسفه که قرار است کنار هم باشند را در یک بسته قرار می‌دهیم:



۱ بسته و ۵ شیء دیگر داریم که روی هم ۶ شیء هستند. تعداد جایگشتشان می‌شود !۶.

حالا داخل تک‌بسته‌ای که داریم می‌رویم. جایگشت ۴ کتاب فلسفه !۴ حالت دارد.

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\overset{\text{جایگشت بسته و اشیا بیرونش}}{۶!}\times \overset{\text{جایگشت داخل بسته}}{۴!}=۷۲۰\times ۲۴=۱۷۲۸۰$$

استراتژی

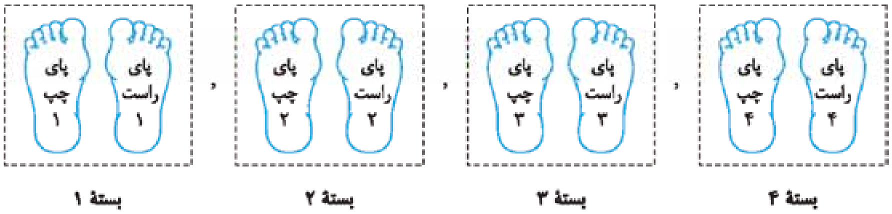
بسته‌بندی‌کردن ← جایگشت بسته‌ها ← جایگشت داخل بسته‌ها ← ضرب اعداد دو مرحلهٔ قبل

تست: ۴ جفت کفش را به چند طریق می‌توانیم کنار هم قرار دهیم به طوری که هر لنگه‌ای کنار جفتش و به شکل درست باشد؟ (لنگهٔ مربوط به پای چپ در سمت چپ لنگهٔ مربوط به پای راست است.)

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۹۲ ۴) ۳۸۴

پاسخ ۱: هر جفت را در یک بسته قرار می‌دهیم. در هر بسته هم شرط درست‌بودن (همانی که در پرانتز، بعد از سؤال آمده) را رعایت می‌کنیم:

جایگشت بسته‌ها می‌شود !۴ .



داخل هر بسته، حق جابه‌جایی نداریم و داخل هر بسته ۱ حالت دارد. پس جواب نهایی برابر است با:

$$\overset{\text{جایگشت بسته‌ها}}{۴!}\times \overset{\text{بستهٔ ۱}}{۱}\times \overset{\text{بستهٔ ۲}}{۱}\times \overset{\text{بستهٔ ۳}}{۱}\times \overset{\text{بستهٔ ۴}}{۱}=۲۴$$

تله اگر شرط داخل پرانتز را رعایت نمی‌کردید، جایگشت داخل هر بسته را !۲ می‌گرفتید و در آخر به ۳۸۴ می‌رسیدید و در تلهٔ ۴ می‌افتادید.

۳. یکی در میان قرارگرفتن اعضای دو گروه

سؤالات این قسمت در دو قالب از ما پرسیده می‌شوند:

۱ حالتی که تعداد اعضای یکی از گروه‌ها، یک عضو بیشتر از گروه دیگر است.

۲ حالتی که تعداد اعضای دو گروه برابر است.

حالت‌های ۱ و ۲ را به ترتیب در قسمت‌های (الف) و (ب) مثال آموزشی زیر ببینید.

مثال آموزشی: الف) به چند طریق می‌توان ۴ دکتر و ۳ مهندس را یکی در میان کنار هم قرار داد؟

ب) به چند طریق می‌توان ۳ دکتر و ۳ مهندس را یکی در میان کنار هم قرار داد؟

پاسخ: الف در واقع می‌خواهیم با ۴ دکتر و ۳ مهندس، یک صف ۷نفره بسازیم به طوری که دکترها و مهندس‌ها یکی در میان در صف باشند. چون تعداد دکترها یک نفر بیشتر است، پس شروع صف باید با دکتر باشد. در کل ۷تا جایگاه داریم و نحوهٔ پرشدن آن‌ها باید این‌شکلی باشد:

دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر

جایگاه دکترها ربطی به جایگاه مهندس‌ها ندارد. دکترها در جایگاه مربوط به خودشان، به !۴ حالت و مهندس‌ها در جایگاه مربوط به خودشان به !۳ حالت می‌توانند قرار گیرند:

$$\frac{۴}{\text{دکتر}}\times\frac{۳}{\text{مهندس}}\times\frac{۳}{\text{دکتر}}\times\frac{۲}{\text{مهندس}}\times\frac{۲}{\text{دکتر}}\times\frac{۱}{\text{مهندس}}\times\frac{۱}{\text{دکتر}}=\underset{\text{دکترها}}{۴!}\times\underset{\text{مهندس‌ها}}{۳!}=۲۴\times ۶=۱۴۴$$

تذکر اگر طراح می‌خواست بیان همین سؤال را کمی سخت‌تر کند، می‌توانست بپرسد: «به چند طریق می‌توان ۴ دکتر و ۳ مهندس را کنار هم قرار داد به طوری که شغل هیچ دو نفری که کنار هم هستند، یکسان نباشد؟»

ب می‌خواهیم ۳ دکتر و ۳ مهندس را یکی در میان، در یک صف کنار هم قرار دهیم. چون تعداد دکترها و مهندس‌ها برابر است، پس نفر اول صف می‌تواند هم از دکترها باشد و هم از مهندس‌ها؛ یعنی یکی از دو حالت زیر را داریم:

۲ دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر مهندس

۱ مهندس دکتر مهندس دکتر مهندس دکتر

در حالت اول ۳ جایگاه برای ۳ دکتر داریم که تعداد جایگشت آن‌ها !۳ است؛ همچنین ۳ جایگاه برای ۳ مهندس داریم که تعداد جایگشت آن‌ها هم !۳ می‌شود؛ یعنی تعداد کل حالت‌های اولی می‌شود !۳×!۳ . حالت دوم هم مشابه حالت اول است و همان !۳×!۳ می‌شود.

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\overset{\text{دو حالت یکسان}}{۲}\times\overset{\text{جایگشت مهندس‌ها}}{۳!}\times\overset{\text{جایگشت دکترها}}{۳!}=۲\times ۶\times ۶=۷۲$$

نکته: ۱ اگر بخواهیم n نفر از گروه اول و $n+1$ نفر از گروه دوم را در یک صف، یکی در میان کنار هم قرار دهیم، تعداد حالات برابر با $n!\times(n+1)!$ می‌شود. (قسمت «الف» مثال بالا)

۲ اگر بخواهیم n نفر از گروه اول و n نفر از گروه دوم را در یک صف، یکی در میان کنار هم قرار دهیم، تعداد حالات برابر با $2\times n!\times n!$ می‌شود. (قسمت «ب» مثال بالا)

جایگشت با تکرار (برای حرفه‌ای‌ها)

تا الان یاد گرفتیم که با حروف A، B، C و D چند جایگشت ۴حرفی داریم. (که می‌شد ۴!)
حالا می‌خواهیم ببینیم با حروف A، A، B و C چند جایگشت ۴حرفی داریم. اول فرض می‌کنیم که ۴تا حرف متمایزند که جایگشتشان می‌شود ۴!.
الان باید جایگشت‌های اضافه‌ای که شمردیم را حذف کنیم.

ما جابه‌جایی A و A را در ۴! حساب کرده‌ایم که کار درستی نیست، چون از جابه‌جایی دو حرف یکسان، کلمهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود. برای همین ۴! را باید به ۲! (جایگشت‌های ۲تا A) تقسیم کنیم: $\frac{۴!}{۲!}$ جواب درست همین است: $\frac{۴!}{۲!}$

حالا اگه تعداد حروف تکراری بیشتر باشد یا چندتا حرف متفاوت تکرار شوند، تعداد جایگشت‌های کل حروف (تکراری‌ها را هم به همان تعداد که هستند حساب می‌کنیم.) را تقسیم بر حاصل‌ضرب جایگشت‌های حروف‌های تکراری می‌کنیم. **مثلاً** تعداد جایگشت حروف A، A، A، B، B، C و D برابر است با:

$$\frac{\overset{\text{تعداد کل حروف}}{\text{۷}!}}{\underset{\text{تعداد Aها}}{\text{۳}!}\times\underset{\text{تعداد Bها}}{\text{۲}!}}$$

مثال آموزشی: الف) **ارقام عدد ۲۳۳۴۵۸، چند جایگشت شش‌تایی دارند؟**

ب) **با حروف کلمهٔ «google» چند کلمهٔ ۶حرفی می‌توان نوشت؟**

پاسخ: **الف** تعداد کل ارقام ۶تا است (۲، ۳، ۳، ۴، ۵ و ۸)؛ پس صورت کسر ۶! است.
از رقم ۳، دوتا داریم، پس در مخرج ۲! داریم. در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها برابر با $\frac{۶!}{۲!}$ است که می‌شود: $\frac{۷۲۰}{۲}=۳۶۰$

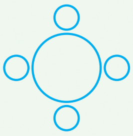
ب تعداد کل حروف ۶تا است (g، g، o، o، l و e)؛ پس صورت کسر ۶! است.
۲تا g و ۲تا o داریم؛ پس در مخرج ۲!×۲! داریم. در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با: $\frac{۶!}{۲!۲!}=\frac{۷۲۰}{۴}=۱۸۰$

تست: با جابه‌جایی ارقام عدد ۲۳۵۵۲۲، چند عدد شش‌رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟

۱) ۱۰　　۲) ۲۰　　۳) ۳۰　　۴) ۴۰

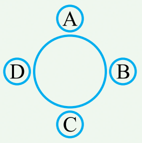
پاسخ۲: یکی از ۵ها را در یکان قرار می‌دهیم. با این کار تکلیف یکان مشخص شد و دیگری کار با آن نداریم: $-----۵$
۵ جای خالی دیگر باید با ارقام ۲، ۲، ۲، ۳ و ۵ پر شوند. در کل ۵ رقم هستند؛ پس ۵! در صورت کسر می‌رود.
از طرفی چون ۳تا ۲ داریم، ۳! در مخرج می‌رود؛ پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با: $\frac{۵!}{۳!}=\frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۲۰$

جایگشت دوری (برای حرفه‌ای‌ها)

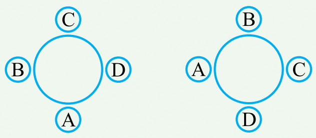


فرض کنید می‌خواهیم ۴ نفر را دور یک میز گرد بنشانیم:
اگر با آن مثل صف برخورد کنیم، می‌گوییم ۴تا جا داریم و ۴تا هم آدم؛ پس تعداد حالات قرارگرفتن این ۴ نفر دور این میز گرد ۴! می‌شود.
اگر داستان مثل قبل بود که تیتر جداگانه برایش نمی‌گذاشتیم.

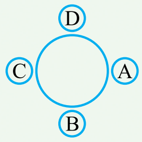
وقتی ۴ شخص A، B، C و D را دور یک میز گرد می‌نشانیم، یکی از حالت‌ها به صورت زیر است:



اگر هر کدام از این اشخاص را یک صندلی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت جابه‌جا کنیم به شکل سمت راست می‌رسیم و اگر این کار را یک مرتبه دیگر تکرار کنیم به شکل سمت چپ می‌رسیم:



اگر این کار را یک مرتبه دیگر هم انجام دهیم به چینش زیر می‌رسیم:



در جایگشت دوری، هر ۴ چینش بالا را یکسان می‌گیریم. در هر ۴ مورد بالا اگر از A در جهت حرکت عقربهٔ ساعت جلو برویم، ترتیب به صورت $D \leftarrow C \leftarrow B \leftarrow A$ می‌شود. از آن‌جایی که هر ۴ چینش بالا، ۱ حالت هستند؛ پس تعداد کل چینش‌ها که فکر می‌کردیم ۴! باشد را باید بر ۴ تقسیم کنیم که می‌شود $\frac{۴!}{۴}$. حالا جای ۴! می‌نویسیم ۴×۳! و ساده می‌کنیم: $\frac{۴\times۳!}{۴}=۳!$
پس تعداد کل جایگشت‌های ۴ نفر دور یک میز گرد، ۳! می‌شود؛ یعنی تعداد را منهای یک می‌کنیم و بعد فاکتوریل عدد به دست آمده را حساب می‌کنیم.

نکته: تعداد حالات قرارگرفتن n نفر دور یک میز گرد $(n-۱)!$ می‌شود.

مثال آموزشی: ۷ نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند؟

پاسخ: ۷ نفر به $(۷-۱)!$، یعنی $۶!=۷۲۰$ دور یک میز گرد قرار می‌گیرند.

مشاوره با این‌که جایگشت دوری در کتاب درسی نیست ولی در کنکور سال ۹۹ از آن سؤال آمد!

تست: علی و محمد و هم‌چنین آریا و آرش با هم برادرند. به چند طریق می‌توان این ۴ نفر را به همراه دو دوست دیگرشان (که با هم برادر نیستند.) دور یک میز گرد نشاند، به طوری که برادرها کنار هم باشند؟ (مثل کنکور)

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

پاسخ ۱: دو دوست دیگر را B و C می‌نامیم. برادرها را در یک بسته قرار می‌دهیم: C ، B ، $\boxed{\text{آریا و آرش}}$ ، $\boxed{\text{علی و محمد}}$

بستهٔ ۲ بستهٔ ۱

در کل ۴ شی داریم (شامل ۲ بسته و ۲ فرد بیرون بسته‌ها)؛ پس تعداد جایگشت‌های دوری‌شان $(۴-۱)!=۳!$ می‌شود.

حالا داخل هر بسته جای دو نفر می‌تواند عوض شود؛ پس داخل بسته‌ها $۲!\times۲!$ حالت دارد.

پس جواب نهایی برابر است با:

$$\underset{\text{داخل بستهٔ ۲}}{\overset{}{۲!}} \times \underset{\text{داخل بستهٔ ۱}}{۲!} \times \underset{\text{جایگشت دوری بسته‌ها و ۲ نفر بیرون}}{۳!} = ۶\times۲\times۲=۲۴$$

	فرمول اصلی	فرمول‌های پراستفاده		
تبدیل	$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$	$P(n,۱)=n$	$P(n,۲)=n\times(n-۱)$	$P(n,n)=P(n,n-۱)=n!$
ترکیب	$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}$	$C(n,۱)=C(n,n-۱)=n$	$C(n,۲)=\frac{n\times(n-۱)}{۲}$	$C(n,n)=۱$

تست: مقدار n در تساوی $C(n,۲)+P(۲n,۱)=۲۷$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ ۳: داشتیم $P(n,۱)=n$ و $C(n,۲)=\frac{n(n-۱)}{۲}$؛ پس:

$$C(n,۲)+P(۲n,۱)=۲۷ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}+۲n=۲۷$$

طرفین تساوی بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$n(n-۱)+۴n=۵۴ \Rightarrow n^۲-n+۴n-۵۴=۰ \Rightarrow n^۲+۳n-۵۴=۰$$

با اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$(n+۹)(n-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=-۹ & \times \quad (\text{n منفی نیست.}) \\ n=۶ & \checkmark \end{cases}$$

آموزش و تمرین

اصل جمع و اصل ضرب

۱- به چند طریق می‌توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین چهار خودکار با چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ‌های متفاوت و سه روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کنید؟ (کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) ۳۶ ۴) ۶۰

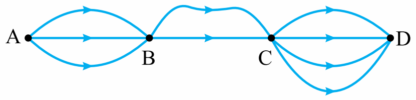
۲- علی ۳ کشور را برای مسافرت انتخاب کرده است. در این ۳ کشور، به ترتیب ۳، ۴ و ۵ شهر را به عنوان مقصد انتخاب کرده است. اگر علی بخواهد فقط در یک شهر اقامت داشته باشد، به چند طریق می‌تواند شهر مقصدش را انتخاب کند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۸۰

۳- فرض کنید یک دانشجو می‌خواهد یک درس عمومی از بین ۳ درس عمومی ارائه‌شده و یک درس اختصاصی از بین ۵ درس اختصاصی ارائه‌شده انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (کتاب درسی)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۴

۴- با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟



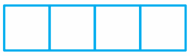
۱) ۹ ۲) ۱۲

۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۵- یک کارخانهٔ خودروسازی، خودروهایی با ۷ رنگ، با ۳ حجم موتور و چند نوع مختلف جلوداشبورد تولید می‌کند. اگر یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه ۸۴ انتخاب داشته باشد، در این کارخانه چند نوع جلوداشبورد برای این خودرو وجود دارد؟ (کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۶- می‌خواهیم شکل زیر که از ۴ مربع به هم چسبیده ساخته شده را با رنگ‌های قرمز، سبز، زرد و صورتی رنگ کنیم، به طوری که رنگ مربع‌های مجاور، مثل هم نباشند. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟



۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۱۰۸

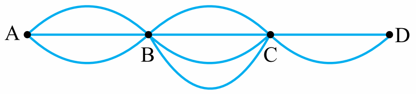
۷- یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم، به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همهٔ تیم‌ها با هم بازی کنند، در پایان دوره، چند بازی انجام شده است؟ (کتاب درسی)

۱) ۴۵ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۸۰

۸- به چند طریق می‌توان به ۱۰ سؤال سه‌گزینه‌ای پاسخ داد؟ (پاسخ به سؤالات الزامی نیست.)

۱) $۴^{۱۰}$ ۲) $۱۰^{۴}$ ۳) $۱۰^{۳}$ ۴) $۳^{۱۰}$

۹- با توجه به شکل زیر، به چند طریق می‌توانیم از A به D برویم و برگردیم، به طوری که از هر جاده حداکثر یک بار بگذریم؟



۱) ۷۲ ۲) ۹۶

۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۲

۱۰- علی به همراه ۵ دوست خود سوار مترو شده‌اند و تا پایان خط، ۵ ایستگاه داریم. اگر علی در دومین ایستگاه پیاده شود و رضا همراه او نباشد، چند حالت مختلف برای پیاده‌شدن این افراد داریم؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۵۰۰ ۲) ۵۱۲۰ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۳۱۲۵

۱۱- زهرا ۲ کیف، ۳ کفش، ۴ مانتو و ۵ شلوار دارد. او کدام کالای زیر را بخرد تا تعداد تیپ‌های متفاوتی که می‌تواند داشته باشد، بیشترین شود؟

۱) یک کیف ۲) یک کفش (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)
۳) یک مانتو ۴) یک شلوار

اصل ضرب در عددنویسی

۱۲- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۹۲ ۴) ۲۱۶

۱۳- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۶

۱۴- چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۱) ۸۰ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰

۱۵- با ارقام موجود در مجموعهٔ $\{۱,۲,۴,۶,۷,۸\}$، چند عدد پنج‌رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟ (خارج ۹۸)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۱۶- چند عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۵ و متشکل از رقم‌های فرد وجود دارد؟ (خارج ۹۱)

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۷- چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۰۴ ۳) ۶۴۸ ۴) ۷۲۰

۱۸- چند عدد زوج چهاررقمی با ارقام متمایز داریم که تمام ارقام آن‌ها از ۳ بزرگ‌تر باشد؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۴۰

۱۹- چند عدد چهاررقمی طبیعی فرد وجود دارد که رقم هزارگان آن‌ها فرد نباشد؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۵۰۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۲۵۰۰

۲۰- چند عدد سه‌رقمی بدون ارقام تکراری داریم که مضرب ۵ نباشد؟

۱) ۵۷۶ ۲) ۵۳۶ ۳) ۵۱۲ ۴) ۴۴۸

۲۱- با ارقام ۰,۱,۲,۴,۵,۷ چند عدد سه‌رقمی فرد بدون تکرار رقم‌ها که مضرب ۵ نباشد، می‌توان نوشت؟ (سراسری نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) ۴۸ ۲) ۴۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۲

۲۲- چند عدد سه‌رقمی بدون رقم تکراری داریم که در آن‌ها ارقام ۳ و ۶ به کار نرفته است؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۲۹۴ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۶

۲۳- چند عدد سه‌رقمی کوچک‌تر از ۵۰۰ داریم که رقم‌هایش تکراری نیست؟

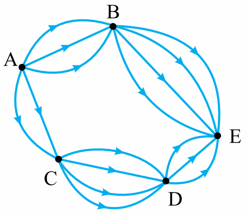
۱) ۲۸۸ ۲) ۲۹۴ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۶

۲۴- چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

ترکیب اصل ضرب و اصل جمع

۲۵- با توجه به نقشهٔ روبه‌رو، به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر E برویم؟



۱) ۳۰
۲) ۳۶
۳) ۴۲
۴) ۴۸

۲۶- علی می‌خواهد به مهمانی برود. او عادت دارد «شلوار پارچه‌ای را با کت» و «شلوار جین را با پیراهن» بپوشد. با توجه به جدول زیر، علی به چند طریق می‌تواند برای این مهمانی، لباس بپوشد؟

پیراهن	شلوار جین	کت	شلوار پارچه‌ای
۵تا	۶تا	۳تا	۴تا

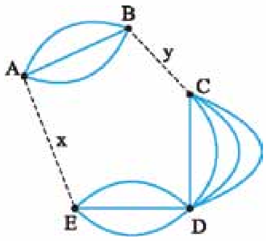
۱) ۳۶ ۲) ۴۰
۳) ۴۲ ۴) ۴۵

۲۷- نسترن می‌خواهد با ارقام ۱ تا ۶ و حروف A، B، C و D یک رمز سه‌کاراکتری به شکل ☐☐☐ برای موبایلش بگذارد. در چند حالت رمز فقط شامل ارقام یا فقط شامل حروف است؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۸۰

MIX ۲۸- چند تابع مثل f از مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ به مجموعهٔ $B = \{۵,۶,۷\}$ می‌توان نوشت به طوری که $f(۱) = ۶$ و $f(۲) \neq ۷$ باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴



۲۹- اگر تعداد راه‌ها از شهر A به E را با x و از شهر B به C را با y نمایش دهیم و فردی به ۲۴ حالت مختلف بتواند از A به D سفر کند، حاصل $x+y$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

۳۰- با ارقام ۱ تا ۷، چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که ارقام آن یکی در میان، زوج و فرد باشند؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۰ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۳۱- چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز داریم که تمام ارقام آن زوج یا تمام آن‌ها فرد باشند؟

۱) ۸۴ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۳۲- رمز سه‌رقمی یک کیف، به گونه‌ای است که ارقام تکراری ندارد و عدد زوج و فرد کنار هم قرار نمی‌گیرند. چند حالت برای رمز این کیف وجود دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۱۲۰ (سراسری مجدد ۱۴۰۱)

۳۳- با ارقام صفر تا ۵، چند عدد زوج سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۵۲

۳۴- چند عدد چهاررقمی زوج با ارقام متمایز داریم که شامل ۵ و ۹ نیستند؟

۱) ۹۱۰ ۲) ۹۲۰ ۳) ۹۳۰ ۴) ۹۴۰

۳۵- با ارقام صفر تا ۶، چند عدد سه‌رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۵ ۳) ۵۸ ۴) ۶۰

۳۶- با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵، چند عدد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۳۷- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که مضرب ۵ نباشند؟ (مثل کنکور)

۱) ۴۸ ۲) ۶۴ ۳) ۸۰ ۴) ۶۰

۳۸- چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که دقیقاً یک رقم آن زوج باشد؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۰۰

۳۹- با ارقام ۰ تا ۷ چند عدد سه‌رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که دقیقاً یک رقم آن زوج باشد؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

۴۰- با ارقام صفر تا ۶، چند عدد زوج سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ با ارقام متمایز می‌توانیم بنویسیم؟

۱) ۶۶ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۲

۴۱- با ارقام {۰,۲,۴,۵,۶,۸}، چند عدد چهاررقمی کوچک‌تر از ۵۵۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۵۶ ۲) ۱۵۴ ۳) ۱۵۲ ۴) ۱۵۰

۴۲- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۴، چند عدد پنج‌رقمی می‌توانیم بنویسیم، به طوری که ارقام یکسان کنار هم باشند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

اصل متمم

۴۳- با ارقام صفر تا ۶، یک عدد سه‌رقمی می‌نویسیم. در چند حالت در این عدد، رقم تکراری وجود دارد؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۱۴ ۴) ۱۱۶

۴۴- با حروف A، B، C، D، E و F، یک کلمهٔ چهارحرفی می‌نویسیم. در چند حالت حرف A در این کلمه وجود دارد؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۴۵- در چند عدد سه‌رقمی، رقم ۸، حداقل یک بار به کار رفته است؟

۱) ۲۲۲ ۲) ۲۳۲ ۳) ۲۴۲ ۴) ۲۵۲

فاکتوریل

۴۶- حاصل عبارت $۶! - ۵! + ۰!$ کدام است؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۶۰۱ ۳) ۴۸۰ ۴) ۴۸۱

۴۷- حاصل عبارت $\frac{۱۰!}{۸!} - \frac{۱۳!}{۱۲!}$ کدام است؟

۱) ۷۴ ۲) ۷۵ ۳) ۷۶ ۴) ۷۷

۴۸- حاصل عبارت $\frac{۲۶! + ۲۵!}{۲۶! - ۲۵!}$ کدام است؟

۱) ۱/۰۲ ۲) ۱/۰۴ ۳) ۱/۰۶ ۴) ۱/۰۸

۴۹- حاصل عبارت $\frac{n!}{(n-۱)!}+\frac{(n+۱)!}{n!}$ کدام است؟

۱) $۲n$
۲) $۲n-۱$
۳) $۲n+۱$
۴) $۲n+۲$

۵۰- اختلاف جواب‌های معادلهٔ $(x^۲+x-۲)!=۲۴$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۵۱- اگر $\frac{(n-۷)!}{(n-۹)!}=۱۱۰$ باشد، حاصل $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}+\frac{(n+۵)!}{(n+۴)!}$ کدام است؟

۱) مربع نوزده
۲) تعداد روزهای سال غیرکبیسه
۳) ۲ واحد کم‌تر از مربع ۲۰
۴) مکعب ۷

جایگشت

۵۲- تعداد جایگشت‌های ۵ شیء متمایز کدام است؟

۱) ۲۵
۲) ۳۲
۳) ۶۰
۴) ۱۲۰

۵۳- تعداد جایگشت‌های $n-۱$ شیء متمایز برابر با ۲۴ است. تعداد جایگشت $n+۱$ شیء متمایز کدام است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۲۴۰
۳) ۳۶۰
۴) ۷۲۰

۵۴- ۴ پزشک و ۲ روان‌شناس قرار است در یک مراسم سخنرانی کنند. این کار به چند طریق انجام‌پذیر است؟

۱) $۴!۲!$
۲) $۶!$
۳) $۸!$
۴) $۴!+۲!$

تبدیل

۵۵- تعداد جایگشت‌های ۳ شیء از ۵ شیء کدام است؟

۱) $۵^۳$
۲) $۳^۵$
۳) ۶۰
۴) ۳۰

۵۶- به چند طریق می‌توانیم با ۷ نفر، یک صف ۳نفره تشکیل دهیم؟

۱) $P(۷,۳)$
۲) $P(۷,۴)$
۳) $۴!\times P(۷,۳)$
۴) $۳!\times P(۷,۴)$

۵۷- ۳ مسافر به چند طریق می‌توانند در ۵ ایستگاه از اتوبوس پیاده شوند؟

۱) $P(۵,۳)$
۲) $۳^۵$
۳) $۵^۳$
۴) $\frac{۵!}{۳!}$

۵۸- از ۱۲ دانش‌آموز نمونه، به چند روش می‌توان سه نفر را جهت مشارکت در سه کار متمایز در مدرسه انتخاب کرد؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۳۲۰
۲) ۶۶۰
۳) ۳۳۰
۴) ۲۲۰

۵۹- حاصل $\frac{P(۱۰,۲)}{P(۵,۱)}$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۶۰- اگر $P(n,۲)=۵۶$ باشد، n کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۶۱- اگر $P(n+۲,۳)=۱۲n(n+۲)$ باشد، n کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

جایگشت‌های مشروط

۶۲- با حروف کلمهٔ «دخالت» چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت که با «ل» شروع و به «ت» ختم شود؟

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۸

۶۳- با حروف کلمهٔ ferdos چند کلمهٔ ۶حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که حرف اول آن r باشد و حرف آخر آن f و s نباشد؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۴۸
۲) ۷۲
۳) ۹۶
۴) ۱۰۸

۶۴- در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به طوری که ۳ نفر آن‌ها، مجاز به رانندگی باشند؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۶۰
۲) ۷۲
۳) ۷۵
۴) ۸۴

۶۵- ۳ کتاب زبان، ۲ کتاب فلسفه و ۳ کتاب منطق متفاوت را می‌خواهیم در یک قفسه کنار هم قرار دهیم. در چند حالت کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم هستند؟

۱) ۲۱۶
۲) ۳۲۴
۳) ۴۳۲
۴) ۶۴۸

۶۶- ۵ نفر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. در چند حالت، دو نفر خاص پشت سر هم سخنرانی می‌کنند؟

۱) ۲۴
۲) ۴۸
۳) ۷۲
۴) ۹۶

۶۷- در چند جایگشت از ارقام عدد ۱۲۳۴۶۵۸، مضارب ۳ کنار هم و مضارب ۴ نیز کنار هم هستند؟

۱) ۲۴۰
۲) ۳۶۰
۳) ۴۸۰
۴) ۵۶۰

۶۸- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «DAMDARAN» به شرط آن‌که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۱۸۰
۳) ۲۴۰
۴) ۳۶۰

۶۹- پدر و مادری دارای چهار فرزند هستند. اگر اعضای این خانواده بخواهند در یک ردیف ایستاده و عکس یادگاری بگیرند به طوری که پدر و مادر کنار هم و در سمت چپ عکس قرار گرفته باشند، این کار به چند طریق انجام‌پذیر است؟ *(آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)*

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

۷۰- ۳ دانش‌آموز به همراه پدرهایشان می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. در چند حالت هر پدر کنار فرزندش قرار دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۶۴

۷۱- در یک همایش ۶ نفر برای سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند روش ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد به طوری که بین دو سخنران مورد نظر از آن‌ها، دقیقاً دو نفر سخنرانی کنند؟ *(آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)*

۱) ۴۸ ۲) ۷۲ ۳) ۹۶ ۴) ۱۴۴

۷۲- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «**zeidan**»، دو حرف **a** و **z** کنار هم نیستند؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۴۴۰ ۳) ۴۶۰ ۴) ۴۸۰

۷۳- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «**zeidan**» کلمهٔ «**zad**» دیده می‌شود؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

۷۴- تعداد جایگشت‌های ۶حرفی کلمهٔ «**razieh**» که در آن‌ها حروف صدادار و بی‌صدا یکی در میان قرار بگیرند، کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۸۴

۷۵- می‌خواهیم ۵ کتاب زبان و ۴ کتاب ریاضی را در یک قفسه کنار هم قرار دهیم، به طوری که هیچ دو کتاب هم‌موضوعی، کنار هم نباشند. به چند حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

۱) $۹!$ ۲) $\frac{۹!}{۴!۵!}$ ۳) $(۴!)(۵!)$ ۴) $۲(۴!)(۵!)$

۷۶- حروف کلمهٔ «**ASSIST**» را به چند طریق می‌توان بدون توجه به مفهوم کنار هم قرار داد که حروف «**S**» یک در میان باشند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱. **۲** باید یکی از ۴ خودکار یا یکی از ۵ مداد یا یکی از ۳ روان‌نویس را انتخاب کنیم؛ پس طبق اصل جمع، تعداد کل حالات برابر است با:

$$۴\overset{\overset{\text{یا}}{\uparrow}}{+}۵\overset{\overset{\text{یا}}{\uparrow}}{+}۳=۱۲$$

۲. **۱** علی باید به یکی از ۳ شهر کشور اول یا یکی از ۴ شهر کشور دوم یا یکی از ۵ شهر کشور سوم، مسافرت کند؛ پس طبق اصل جمع، او به $۱۲ = ۵ + ۴ + ۳$ حالت می‌تواند مسافرت کند.

۳. **۳** این دانشجو می‌خواهد هم درس عمومی بردارد و هم اختصاصی (به طور هم‌زمان)؛ پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم: $\frac{۳}{\text{عمومی}}\times\frac{۵}{\text{اختصاصی}}=۱۵$

۴. **۴** کارمان ۳ مرحله دارد: «از A به B» $\underset{\text{ضرب}}{\underset{\downarrow}{\text{و}}}$ «از B به C» $\underset{\text{ضرب}}{\underset{\downarrow}{\text{و}}}$ «از C به D».

پس طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر است با: $\frac{۳}{\text{از A به B}}\times\frac{۲}{\text{از B به C}}\times\frac{۴}{\text{از C به D}}=۲۴$

۵. **۳** تعداد مدل‌های جلوداشبورد را n تا فرض می‌کنیم. برای انتخاب یک خودرو باید یکی از ۷ رنگ، یکی از ۳ حجم موتور و یکی از n مدل جلوداشبورد را انتخاب کرد؛ پس طبق اصل ضرب تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با:

$$\frac{۷}{\text{رنگ}}\times\frac{۳}{\text{حجم موتور}}\times\frac{n}{\text{جلوداشبورد}}=۲۱n$$

۲۱n باید برابر با ۸۴ باشد: $۲۱n=۸۴\Rightarrow n=\frac{۸۴}{۲۱}=۴$

۶. **۴** برای مربع‌ها، اسم می‌گذاریم:

A	B	C	D

با مربع A شروع می‌کنیم که ۴ حالت دارد (قرمز، سبز، زرد، صورتی).
بعد سراغ مربع B می‌رویم که نباید هم‌رنگ A باشد؛ یعنی ۳ حالت دارد.
مربع C هم ۳ حالت دارد، چون فقط نباید هم‌رنگ B باشد. مربع D هم مثل C.

پس طبق اصل ضرب، داریم:

A	B	C	D

$$۴\times۳\times۳\times۳=۱۰۸$$

۷. **۲** در هر بازی فوتبال، یک تیم میزبان و یک تیم مهمان است. به کمک اصل ضرب، تعداد بازی‌ها برابر است با: $\frac{۱۰}{\text{میزبان}}\times\frac{۹}{\text{مهمان}}=۹۰$

> **نکته:** پس در حالت کلی با داشتن n تیم، تعداد کل بازی‌های رفت و برگشت برابر با $n\times(n-۱)$ می‌شود.

۸. **۱** از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.
۱۰ سؤال داریم و هر سؤال، ۴ حالت پاسخگویی (۳ حالت برای گزینه‌ها و ۱ حالت برای پاسخ‌ندادن) دارد؛ پس تعداد کل حالات پاسخگویی برابر است با:

$$\frac{۴}{\text{سؤال ۱}}\times\frac{۴}{\text{سؤال ۲}}\times\cdots\times\frac{۴}{\text{سؤال ۱۰}}=\underbrace{۴\times۴\times\cdots\times۴}_{\text{۱۰تا}}=۴^{۱۰}$$

> **مشاوره** ممکن بود در گزینه‌ها به جای $۴^{۱۰}$، عدد $(۲^۲)^{۱۰}$ یعنی $۲^{۲۰}$ را می‌دادند؛ پس اگر جوابی که درآوردید در گزینه‌ها نبود، لزوماً اشتباه حل نکردید، بلکه ممکن است عبارتی معادل با همان را در گزینه‌ها آورده باشند.

۹. **۳** اول تعداد مسیرهای رفت: $\frac{۳}{\text{A به B}}\times\frac{۴}{\text{B به C}}\times\frac{۲}{\text{C به D}}=۲۴$

برای مسیرهای برگشت، از تمام حالت‌های بالا باید یکی کم کنیم تا از مسیر تکراری عبور نکنیم: $\frac{۱}{\text{D به C}}\times\frac{۳}{\text{C به B}}\times\frac{۲}{\text{B به A}}=۶$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\frac{۲۴}{\text{رفت}}\times\frac{۶}{\text{برگشت}}=۱۴۴$

۱۰. **۳** در کل ۶ نفر (علی، رضا و ۴ دوستشان) داریم.
علی در دومین ایستگاه پیاده می‌شود؛ پس ۱ حالت دارد:

$$\frac{۱}{\text{علی}}\times\frac{}{\text{رضا}}\times\frac{}{\text{دوست ۱}}\times\frac{}{\text{دوست ۲}}\times\frac{}{\text{دوست ۳}}\times\frac{}{\text{دوست ۴}}$$

رضا در ایستگاه ۲ پیاده نشده؛ پس ۴ حالت دارد (ایستگاه‌های ۱، ۳، ۴ و ۵)

$$\frac{۱}{\text{علی}}\times\frac{۴}{\text{رضا}}\times\frac{}{\text{دوست ۱}}\times\frac{}{\text{دوست ۲}}\times\frac{}{\text{دوست ۳}}\times\frac{}{\text{دوست ۴}}$$

> **تذکر** چون علی و رضا محدودیت داشتند، پس با آن‌ها شروع کردیم.

۴ نفر دیگر محدودیتی ندارند و هر کدام می‌تواند در ۵ ایستگاه مختلف پیاده شوند:

$$\frac{۱}{\text{علی}}\times\frac{۴}{\text{رضا}}\times\frac{۵}{\text{دوست ۱}}\times\frac{۵}{\text{دوست ۲}}\times\frac{۵}{\text{دوست ۳}}\times\frac{۵}{\text{دوست ۴}}=۲۵۰۰$$

۱۱. **۱** در هر حالت به یکی از کالاها، یک واحد اضافه می‌کنیم و تعداد حالت‌های مختلف تیپ‌زدن زهرا را به کمک اصل ضرب حساب می‌کنیم:

۱ ۱ واحد به تعداد کیف‌ها اضافه کنیم تا کیف‌ها ۳تا شود:

$$\frac{۳}{\text{کیف}}\times\frac{۳}{\text{کفش}}\times\frac{۴}{\text{مانتو}}\times\frac{۵}{\text{شلوار}}=۱۸۰$$

۲ ۱ واحد به تعداد کفش‌ها اضافه کنیم تا کفش‌ها ۴تا شود:

$$\frac{۲}{\text{کیف}}\times\frac{۴}{\text{کفش}}\times\frac{۴}{\text{مانتو}}\times\frac{۵}{\text{شلوار}}=۱۶۰$$

۳ ۱ واحد به تعداد مانتوها اضافه کنیم تا مانتوها ۵تا شود:

$$\frac{۲}{\text{کیف}}\times\frac{۳}{\text{کفش}}\times\frac{۵}{\text{مانتو}}\times\frac{۵}{\text{شلوار}}=۱۵۰$$

۴ ۱ واحد به تعداد شلوارها اضافه کنیم تا شلوارها ۶تا شود:

$$\frac{۲}{\text{کیف}}\times\frac{۳}{\text{کفش}}\times\frac{۴}{\text{مانتو}}\times\frac{۶}{\text{شلوار}}=۱۴۴$$

بیشترین تعداد تیپ مربوط به حالتی است که به کیف‌هایش یکی اضافه کند.

۱۲. **۴** هر ۶ رقم در هر ۳ خانه قابل استفاده‌اند: $\frac{۶}{\text{صدگان}}\times\frac{۶}{\text{دهگان}}\times\frac{۶}{\text{یکان}}=۲۱۶$

ترتیب پرکردن خانه‌ها هیچ فرقی ندارد!

۱۳. **۱** در صدگان ۶ رقم می‌تواند قرار بگیرد (۶ حالت).
در دهگان فقط رقمی که در صدگان استفاده شده نمی‌تواند بیاید (۵ حالت).
در یکان، دو رقمی که در صدگان و دهگان استفاده شده‌اند، نمی‌توانند بیایند (۴ حالت).

$$\frac{۶}{\text{صدگان}}\times\frac{۵}{\text{دهگان}}\times\frac{۴}{\text{یکان}}=۱۲۰$$

۱۴. **۳** با صدگان شروع می‌کنیم که محدودیت دارد. صدگان یکی از ارقام ۱ تا ۵ می‌تواند باشد (فقط صفر نمی‌تونه باشه): $\frac{۵}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{}{\text{یکان}}$

از بین ارقام ۱ تا ۵، یکی را در صدگان گذاشتم (مثلاً ۵). حالا ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را داریم که باید با آن‌ها دو خانهٔ دیگر را پر کنیم؛ پس برای یکی ۵ حالت و برای دیگری ۴ حالت داریم: $\frac{۵}{\text{صدگان}}\times\frac{۵}{\text{دهگان}}\times\frac{۴}{\text{یکان}}=۱۰۰$

۱۵. **۳** با خانه‌ای شروع می‌کنیم که محدودیت دارد. (یکان باید فرد باشد.)
اول یکان را پر می‌کنیم؛ چون می‌خواهیم عددمان فرد باشد، یکان باید ۱ یا ۷ باشد.

$$\frac{}{\text{ده‌هزارگان}}\times\frac{}{\text{هزارگان}}\times\frac{}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{۲}{\text{یکان}}$$

از بین ۶ رقم اولیه، یکی را در یکان استفاده کردیم (مثلاً ۷). حالا باید ۴ خانهٔ خالی را با ۵ رقم باقی‌مانده پر کنیم؛ پس به ترتیب ۵، ۴، ۳ و ۲ حالت دارند:

$$\frac{۵}{\text{ده‌هزارگان}}\times\frac{۴}{\text{هزارگان}}\times\frac{۳}{\text{صدگان}}\times\frac{۲}{\text{دهگان}}\times\frac{۲}{\text{یکان}}=۲۴۰$$

۱۶. **۴** باید با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۵ بسازیم.
فرض بر این است که تکرار ارقام مجاز است (در متن سؤال، محدودیتی ذکر نشده)؛ پس خواهیم داشت:

$$\overset{\overset{\text{۱,۳,۵,۷,۹}}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\text{۱,۳,۵,۷,۹}}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{فقط ۵}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۲۵$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۱۷. **۳** با صدگان شروع کنیم که محدودیت دارد. صدگان فقط صفر نمی‌تواند باشد؛ پس ۹ حالت دارد: $\frac{۹}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{}{\text{یکان}}$

حالا یکی از ارقام ۱ تا ۹ (مثلاً ۹) در صدگان استفاده شده؛ پس ارقام ۰ تا ۸ (که ۹تا هستند) باقی مانده‌اند. (دقت کنید صفر به بازی برگشت!) پس برای دو خانهٔ دیگر به ترتیب ۹ و ۸ حالت داریم:

$$\frac{۹}{\text{صدگان}}\times\frac{۹}{\text{دهگان}}\times\frac{۸}{\text{یکان}}=۶۴۸$$

۱۸. **۲** باید با ۶ رقم ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ عدد را بسازیم.

چون عدد زوج است، پس یکان ۳ حالت دارد (۴، ۶ و ۸). یکی از ارقام زوج (مثلاً ۴) استفاده شده؛ پس ارقام ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ باقی مانده‌اند. در نتیجه برای سه خانهٔ دیگر به ترتیب ۵، ۴ و ۳ حالت می‌ماند.

$$\frac{۵}{\text{هزارگان}}\times\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{۳}{\text{دهگان}}\times\overset{\overset{\text{۴,۶,۸}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{یکان}}}=۱۸۰$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۱۹. **۳** اولاً یکان عدد باید از بین ارقام ۱,۳,۵,۷,۹ انتخاب شود تا عدد، فرد محسوب می‌شود. ثانیاً در رقم هزارگان، باید از ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ استفاده کنیم. برای دهگان و صدگان محدودیتی ذکر نشده؛ پس می‌توانند از بین ارقام صفر تا ۹ انتخاب شوند (توجه کنید که تکرار ارقام مجاز است، چون در متن سؤال، چیزی در این مورد گفته نشده است).

$$\overset{\overset{\text{۲,۴,۶,۸}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{\text{۰ تا ۹}}{\uparrow}}{\frac{۱۰}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\text{۰ تا ۹}}{\uparrow}}{\frac{۱۰}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{۱,۳,۵,۷,۹}}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{یکان}}}=۲۰۰۰$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: فرقی ندارد!

۲۰. **۳** رقم یکان باید یکی از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸ و ۹ باشد؛ یعنی ۸ حالت دارد (همه‌چی به‌جز صفر و ۵).

بعد می‌رویم سراغ صدگان که برایش ۸ حالت داریم (به‌جز رقمی که در یکان استفاده شده و صفر).

در آخر هم دهگان که باز هم ۸ حالت دارد. باید دو رقمی که در یکان و صدگان استفاده شده‌اند، نباشند.

$$\overset{\overset{\text{به‌جز یکان و صفر}}{\uparrow}}{\frac{۸}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\text{به‌جز یکان و صدگان}}{\uparrow}}{\frac{۸}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{به‌جز ۰ و ۵}}{\uparrow}}{\frac{۸}{\text{یکان}}}=۵۱۲$$

ترتیب پر کردن خانه‌ها: یکان ← صدگان ← دهگان

۲۱. **۴** می‌خواهیم عددمان فرد باشد ولی مضرب ۵ نباشد؛ پس در یکان باید ۱ یا ۷ قرار گیرد (۲ حالت).

بعد سراغ صدگان می‌رویم. اگر فرض کنیم رقم ۷ در یکان استفاده شده، چون صفر نمی‌تواند در صدگان باشد، پس برای صدگان ۱، ۲، ۴ و ۵ می‌ماند (۴ حالت).

کلاً تا این‌جا دو رقم از شش رقم را استفاده کردیم؛ پس ۴ رقم برای دهگان می‌ماند:

$$\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{۴}{\text{دهگان}}\times\overset{\overset{\text{۱ یا ۷}}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{یکان}}}=۳۲$$

۲۲. **۲** در کل با این ۸ رقم باید عددمان را بسازیم: ۰,۱,۲,۴,۵,۷,۸,۹

با صدگان شروع می‌کنیم که صفر نمی‌تواند باشد؛ پس صدگان ۷ حالت دارد. رقمی که در صدگان استفاده کردیم، نباید در دهگان بیاید. ضمناً صفر هم به بازی برمی‌گردد؛ پس دهگان هم ۷ حالت دارد.

تا این‌جا ۲ رقم در صدگان و دهگان استفاده شده‌اند؛ پس ۶ حالت برای یکان می‌ماند.

$$\overset{\overset{\text{به‌جز صفر}}{\uparrow}}{\frac{۷}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\text{به‌جز صدگان}}{\uparrow}}{\frac{۷}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{به‌جز صدگان و دهگان}}{\uparrow}}{\frac{۶}{\text{یکان}}}=۲۹۴$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

۲۳. **۱** از صدگان شروع می‌کنیم که ۴ حالت دارد (۱، ۲، ۳ و ۴). برای دهگان ۹ حالت داریم (صفر تا ۹ به‌جز رقمی که در صدگان آمده). برای یکان هم ۸ حالت می‌ماند. (صفر تا ۹ به‌جز دو رقمی که تا این‌جا استفاده شدند.)

$$\overset{\overset{\text{۱,۲,۳,۴}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\text{صفر تا ۹ به‌جز صدگان}}{\uparrow}}{\frac{۹}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{صفر تا ۹ به‌جز صدگان و دهگان}}{\uparrow}}{\frac{۸}{\text{یکان}}}=۲۸۸$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: صدگان ← دهگان ← یکان

۲۴. **۳** در کل پنج رقم فرد داریم: ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹. با خانه‌ای که محدودیت دارد، شروع می‌کنیم. برای آن‌که عددمان از ۳۰۰۰ بزرگ‌تر باشد باید هزارگان آن ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹ باشد؛ پس هزارگان ۴ حالت دارد (فرض کنید مثلاً ۹ استفاده شد):

$$\frac{۴}{\text{هـ}}\times\frac{}{\text{ص}}\times\frac{}{\text{د}}\times\frac{}{\text{ی}}$$

الان ۴ رقم مانده است: ۱، ۳، ۵ و ۷.

با این ۴ رقم، سه خانهٔ دیگر را پر می‌کنیم که به ترتیب ۴، ۳ و ۲ حالت دارند:

$$\frac{۴}{\text{هـ}}\times\frac{۴}{\text{ص}}\times\frac{۳}{\text{د}}\times\frac{۲}{\text{ی}}=۹۶$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: هزارگان ← صدگان ← دهگان ← یکان

۲۵. **۲** دو جور مسیر داریم:

۱) مسیر ABE:

$$\frac{۳}{\text{A به B}}\times\frac{۴}{\text{B به E}}=۱۲$$

۲) مسیر ACDE:

$$\frac{۲}{\text{A به C}}\times\frac{۴}{\text{C به D}}\times\frac{۳}{\text{D به E}}=۲۴$$

تعداد کل مسیرها برابر است با:

$$۱۲+۲۴=۳۶$$

۲۶. **۳** علی دو جور می‌تواند لباس بپوشد:

۱) شلوار پارچه‌ای با کت:

$$\frac{۴}{\text{شلوار پارچه‌ای}}\times\frac{۳}{\text{کت}}=۱۲$$

۲) شلوار جین با پیراهن:

$$\frac{۶}{\text{شلوار جین}}\times\frac{۵}{\text{پیراهن}}=۳۰$$

تعداد کل حالات برابر است با:

$$۱۲+۳۰=۴۲$$

۲۷. **۴** نسترن به دو حالت می‌تواند برای موبایلش رمز بگذارد:

۱) از حروف A، B، C و D استفاده کند. برای هر کاراکتر، ۳ حالت دارد:

$$\frac{۴}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۴}{}=۶۴$$

۲) از ارقام ۱ تا ۶ استفاده کند:

$$\frac{۶}{}\times\frac{۶}{}\times\frac{۶}{}=۲۱۶$$

پس تعداد کل حالات رمزگذاری برابر است با:

$$۶۴+۲۱۶=۲۸۰$$

۲۸. **۳** دامنهٔ تابع f، مجموعهٔ A است؛ پس نمایش زوج مرتبی‌اش به صورت مقابل است:

$$f=\{(۱,\quad),(۲,\quad),(۳,\quad),(۴,\quad)\}$$

با توجه به این‌که $f(۱)=۶$ است، پس زوج مرتب $(۱,۶)$ تکلیفش معلوم است. از طرفی با توجه به $f(۲)\neq ۷$، مؤلفهٔ دوم زوج مرتب $(۲,\quad)$ نباید ۷ باشد و برای دو زوج مرتب $(۳,\quad)$ و $(۴,\quad)$ شرطی نداریم؛ پس هر کدام را با ۳ عدد ۵ یا ۶ یا ۷ می‌توانیم پر کنیم:

$$f=\{(۱,۶),(۲,\text{۵ یا ۶}),(۳,\text{۵ یا ۶ یا ۷}),(۴,\text{۵ یا ۶ یا ۷})\}$$

پس تعداد کل توابع برابر است با:

$$\overset{\overset{۶}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{مؤلفهٔ دوم ۱}}}\times\overset{\overset{\text{۵ یا ۶}}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{مؤلفهٔ دوم ۲}}}\times\overset{\nearrow}{\frac{۳}{\text{مؤلفهٔ دوم ۳}}}\overset{\text{۵ یا ۶ یا ۷}}{}\times\overset{\nwarrow}{\frac{۳}{\text{مؤلفهٔ دوم ۴}}}=۱۸$$

۲۹. **۲** به دو روش می‌توانیم از A به D برویم:

۱) مسیر ABCD:

$$\frac{۳}{\text{A به B}}\times\frac{y}{\text{B به C}}\times\frac{۴}{\text{C به D}}=۱۲y$$

۲) مسیر AED:

$$\frac{x}{\text{A به E}}\times\frac{۳}{\text{E به D}}=۳x$$

مجموع دو حالت بالا، باید برابر با ۲۴ باشد:

$$۱۲y+۳x=۲۴\xrightarrow{\div ۳}۴y+x=۸$$

با توجه به این‌که x و y اعداد طبیعی هستند، y فقط می‌تواند ۱ باشد:

$$۴y+x=۸ \xrightarrow{y=۱} ۴+x=۸ \Rightarrow x=۴$$

پس:

$$x+y=۴+۱=۵$$

۳۰. **۲** در کل ۴ رقم فرد (۱، ۳، ۵ و ۷) و ۳ رقم زوج (۲، ۴ و ۶) داریم.

برای این‌که ارقام یکی در میان زوج و فرد باشند، ۲ حالت داریم:

۱) یکان و صدگان فرد و دهگان زوج باشد:

$$\overset{\overset{۱,۳,۵,\cancel{۷}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۲,۴,۶}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۱,۳,۵,۷}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{یکان}}}=۳۶$$

۲) یکان و صدگان زوج و دهگان فرد باشد:

$$\overset{\overset{۲,۴,\cancel{۶}}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۱,۳,۵,۷}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۲,۴,۶}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{یکان}}}=۲۴$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

$$۳۶+۲۴=۶۰$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ← صدگان ← دهگان

۳۱. **۳** دو حالت داریم.

۱) **تمام ارقام فرد باشند**: برای صدگان ۵ حالت (۱، ۳، ۵، ۷، ۹) داریم. یکی از آن‌ها را در صدگان استفاده می‌کنیم؛ پس برای دهگان، ۴ حالت و به همین صورت برای یکان ۳ حالت می‌ماند:

$$\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,۹}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,\cancel{۹}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۱,۳,۵,\cancel{۷}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{یکان}}}=۶۰$$

۲) **تمام ارقام زوج باشند**: برای صدگان ۴ حالت (۲، ۴، ۶، ۸) داریم. برای دهگان، پنج حالت (۰، ۲، ۴، ۶، ۸) داریم ولی چون یکی از آن‌ها در صدگان استفاده شده، پس ۴ حالت داریم و برای یکان هم ۳ حالت می‌ماند:

$$\overset{\overset{۲,۴,۶,۸}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۴,۶,\cancel{۸}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۴,\cancel{۶}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{یکان}}}=۴۸$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۶۰+۴۸=۱۰۸$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): صدگان ← دهگان ← یکان

۳۲. **۴**

مشاوره همیشه در خواندن سؤالات دقت کنید! احتمال خیلی زیاد برداشت اولیه شما (با توجه به تست‌هایی که دیده‌اید) این بود که ارقام زوج و فرد یکی‌درمیان باشند ولی سؤال منظورش این نیست، بلکه می‌گوید عدد زوج کنار عدد فرد نباشد. راستی، فرق این سؤال با سؤال قبلی چی بود؟!

برای آن‌که عدد زوج کنار عدد فرد نباشد، دو حالت داریم:

۱) **هر سه رقم فرد باشد**: باید با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ یک عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام بنویسیم:

$$\frac{۵}{\text{ص}}\times\frac{۴}{\text{د}}\times\frac{۳}{\text{ی}}=۶۰$$

۲) **هر سه رقم زوج باشد**: باید با ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ یک عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام بنویسیم:

$$\frac{۵}{\text{ص}}\times\frac{۴}{\text{د}}\times\frac{۳}{\text{ی}}=۶۰$$

تذکر دقت کنید در رمزها، رقم سمت چپ هم می‌تواند صفر باشد.

مجموع دو حالت بالا برابر است با:

$$۶۰+۶۰=۱۲۰$$

۳۳. **۴** چون در یکان صفر می‌تواند قرار گیرد و تکرار مجاز نیست، باید دو حالت در نظر بگیریم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۵}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,\cancel{۵}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۲۰$$

۲) یکان صفر نباشد (۲ یا ۴ باشد):

$$\overset{\overset{۱,\cancel{۲},۳,۴,۵}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۳,۴,\cancel{۵}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۲,۴}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{یکان}}}=۳۲$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

$$۲۰+۳۲=۵۲$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ← صدگان ← دهگان

۳۴. **۳** با ارقام $\{۰,۱,۲,۳,۴,۶,۷,۸\}$ باید عدد ۴رقمی زوج بنویسیم. چون صفر در یکان می‌تواند باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۶,۷,۸}{\uparrow}}{\frac{۷}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۶,۷,\cancel{۸}}{\uparrow}}{\frac{۶}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۶,\cancel{۷}}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۲۱۰$$

۲) یکان صفر نباشد (۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد):

$$\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۶,۷,\cancel{۸}}{\uparrow}}{\frac{۶}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,۴,۶,\cancel{۷}}{\uparrow}}{\frac{۶}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,۴,\cancel{۶}}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۲,۴,۶,۸}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{یکان}}}=۷۲۰$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

$$۲۱۰+۷۲۰=۹۳۰$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۳۵. **۲** عددی که مضرب ۵ است، باید یکانش صفر یا ۵ باشد. در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\overset{\overset{\text{۱ تا ۶}}{\uparrow}}{\frac{۶}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\text{۱ تا ۶ به‌جز صدگان}}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۳۰$$

۲) یکان ۵ باشد:

$$\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۶}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,۴,\cancel{۶}}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۵}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۲۵$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

$$۳۰+۲۵=۵۵$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ← صدگان ← دهگان

۳۶. **۳** عددی که بر ۵ بخش‌پذیر است، باید یکانش صفر یا ۵ باشد. در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,۵}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,۳,۴,\cancel{۵}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,۳,\cancel{۴}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{صفر}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۶۰$$

۲) یکان ۵ باشد:

$$\overset{\overset{۱,۲,۳,۴}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,\cancel{۴}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۲,\cancel{۴}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۵}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۴۸$$

پس تعداد کل اعداد برابر است با:

$$۶۰+۴۸=۱۰۸$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): یکان ← هزارگان ← صدگان ← دهگان

۳۷. **۲** ارقام مربوط به یکان و صدگان محدودیت دارند. با آن‌ها شروع می‌کنیم.

یکان باید ۰ یا ۵ نباشد؛ پس ۴ رقم می‌ماند (۱، ۲، ۳ و ۴): $\frac{}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{۴}{\text{یکان}}$

برای صدگان، صفر و رقمی که در یکان قرار گرفته را نمی‌توانیم استفاده کنیم؛ پس ۴ حالت دارد:

$$\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{۴}{\text{یکان}}$$

از ۶ رقم ۲تا را استفاده کرده‌ایم؛ پس برای دهگان نیز ۴ حالت داریم:

$$\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{۴}{\text{دهگان}}\times\frac{۴}{\text{یکان}}=۶۴$$

تذکر این سؤال مربوط به تیتر «اصل ضرب» بود، ولی ما این‌جا آوردیم، چون مشابه دو سؤال قبلی‌اش است.

۳۸. **۳** در ۳ حالت بررسی می‌کنیم:

۱) فقط یکان زوج باشد (دهگان و صدگان فرد):

$$\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,۹}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,\cancel{۹}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۴,۶,۸}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{یکان}}}=۱۰۰$$

۲) فقط دهگان زوج باشد (یکان و صدگان فرد):

$$\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,۹}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۴,۶,۸}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,\cancel{۹}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{یکان}}}=۱۰۰$$

۳) فقط صدگان زوج باشد (یکان و دهگان فرد):

$$\overset{\overset{۲,۴,۶,۸}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,۹}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۱,۳,۵,۷,\cancel{۹}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{یکان}}}=۸۰$$

مجموع سه حالت بالا برابر است با: $۱۰۰+۱۰۰+۸۰=۲۸۰$

ترتیب پرکردن خانه‌ها
- **۱.** یکان ← صدگان ← دهگان
- **۲.** دهگان ← صدگان ← یکان
- **۳.** صدگان ← دهگان ← یکان

۳۹. **۳** سه حالت دارد:

۱) **یکان زوج باشد**: باید یکان صفر و دو رقم دیگر فرد باشند.

دو رقم فرد باید از بین ۱، ۳، ۵ و ۷ باشند؛ پس از دو خانهٔ دیگر، یکی ۴ و دیگری ۳ حالت دارد: $\frac{۴}{\text{ص}}\times\frac{۳}{\text{د}}\times\frac{۱}{\text{ی}}=۱۲$

۲) **دهگان زوج باشد**: باید یکان ۵، $\underbrace{\text{دهگان زوج}}_{۶،۴،۲،۰}$ و $\underbrace{\text{صدگان فرد}}_{۷،۳،۱}$ باشد:

$$\frac{۳}{\text{ص}}\times\frac{۴}{\text{د}}\times\frac{۱}{\text{ی}}=۱۲$$

۳) **صدگان زوج باشد**: باید یکان ۵، $\underbrace{\text{صدگان زوج}}_{۶،۴،۲}$ و $\underbrace{\text{دهگان فرد}}_{۷،۳،۱}$ باشد:

$$\frac{۳}{\text{ص}}\times\frac{۳}{\text{د}}\times\frac{۱}{\text{ی}}=۹$$

تعداد کل حالات برابر است با: $۱۲+۱۲+۹=۳۳$

۴۰. **۳** رقم صدگان این عدد، ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ است. چون محدودیت زوج‌بودن یکان را هم داریم، برای صدگان دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) صدگان زوج (۴ یا ۶) باشد:

$$\overset{\overset{۴,۶}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,\cancel{۴},۵}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۴,\cancel{۶}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{یکان}}}=۳۰$$

۲) صدگان فرد (۳ یا ۵) باشد:

$$\overset{\overset{۳,۵}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۱,۲,۳,۴,\cancel{۵},\cancel{۶}}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۴,۶}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{یکان}}}=۴۰$$

پس تعداد کل این اعداد برابر است با: $۳۰+۴۰=۷۰$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): صدگان ← یکان ← دهگان

۴۱. **۱** دو حالت داریم:

۱) هزارگان ۵ باشد: در این صورت صدگان باید کم‌تر از ۵ باشد.

$$\overset{\overset{۵}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۴}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,\cancel{۴},۶,۸}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۶,\cancel{۸}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{یکان}}}=۳۶$$

۲) هزارگان ۲ یا ۴ باشد:

$$\overset{\overset{۲,۴}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,\cancel{۴},۵,۶,۸}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۵,۶,\cancel{۸}}{\uparrow}}{\frac{۴}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۰,۲,۵,\cancel{۶}}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{یکان}}}=۱۲۰$$

پس تعداد کل این اعداد برابر است با: $۳۶+۱۲۰=۱۵۶$

ترتیب پرکردن خانه‌ها (در هر دو حالت): هزارگان ← صدگان ← دهگان ← یکان

۴۲. **۲** تمام حالاتی که دو رقم یکسان (یعنی ۲تا رقم ۴) کنار هم هستند را می‌نویسیم:

۱) رقم ده‌هزارگان و هزارگان، ۴ باشند:

$$\overset{\overset{۴}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{ده‌هزارگان}}}\times\overset{\overset{۴}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,۳}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,\cancel{۳}}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۱,\cancel{۲}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۶$$

ترتیب: چپ به راست

۲) رقم هزارگان و صدگان، ۴ باشند:

$$\overset{\overset{۱,۲,۳}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{ده‌هزارگان}}}\times\overset{\overset{۴}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۴}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,\cancel{۳}}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۱,\cancel{۲}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۶$$

ترتیب: هزارگان و صدگان ← ده‌هزارگان ← دهگان ← یکان

۳) رقم صدگان و دهگان، ۴ باشند:

$$\overset{\overset{۱,۲,۳}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{ده‌هزارگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,\cancel{۳}}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۴}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۴}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۱,\cancel{۲}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۶$$

ترتیب: صدگان و دهگان ← ده‌هزارگان ← هزارگان ← یکان

۴) رقم دهگان و یکان، ۴ باشند:

$$\overset{\overset{۱,۲,۳}{\uparrow}}{\frac{۳}{\text{ده‌هزارگان}}}\times\overset{\overset{۱,۲,\cancel{۳}}{\uparrow}}{\frac{۲}{\text{هزارگان}}}\times\overset{\overset{۱,\cancel{۲}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{۴}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{۴}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{یکان}}}=۶$$

ترتیب: دهگان و یکان ← ده‌هزارگان ← هزارگان ← صدگان

پس تعداد کل حالات برابر است با: $۶+۶+۶+۶=۲۴$

۴۳. **۳** تعداد کل اعداد ۳رقمی که می‌توانیم با ارقام صفر تا ۶ بنویسیم، برابر است با:

$$\overset{\overset{\text{۱ تا ۶}}{\uparrow}}{\frac{۶}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\text{۰ تا ۶}}{\uparrow}}{\frac{۷}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\text{۰ تا ۶}}{\uparrow}}{\frac{۷}{\text{یکان}}}=۲۹۴$$

تعداد کل اعداد ۳رقمی با ارقام صفر تا ۶، بدون ارقام تکراری، برابر است با:

$$\overset{\overset{\text{۱ تا ۶}}{\uparrow}}{\frac{۶}{\text{صدگان}}}\times\overset{\overset{\begin{array}{c}\text{۰ تا ۶ به‌جز}\\ \text{صدگان}\end{array}}{\uparrow}}{\frac{۶}{\text{دهگان}}}\times\overset{\overset{\begin{array}{c}\text{۰ تا ۶ به‌جز}\\ \text{صدگان و دهگان}\end{array}}{\uparrow}}{\frac{۵}{\text{یکان}}}=۱۸۰$$

پس طبق اصل متمم، داریم:

$$\text{با رقم تکراری}=\text{کل}-\text{بدون رقم تکراری}=۲۹۴-۱۸۰=۱۱۴$$

۴۴. **۳** تعداد کل کلمات ۴حرفی با ۶ حرف داده‌شده، برابر است با:

$$\frac{۶}{}\times\frac{۵}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}=۳۶۰$$

تعداد کلماتی که حرف A ندارند، برابر است با: $\frac{۵}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۲}{}=۱۲۰$

طبق اصل متمم، داریم:

$$\text{با حرف A}=(\text{کل})-(\text{بدون حرف A})=۳۶۰-۱۲۰=۲۴۰$$

۴۵. **۴** اعداد سه‌رقمی را می‌توانیم به دو دسته تقسیم کنیم:

«اعدادی که شامل رقم ۸ هستند» و «اعدادی که شامل رقم ۸ نیستند».

ابتدا تعداد کل اعداد سه‌رقمی را حساب می‌کنیم: $\frac{۹}{\text{صدگان}}\times\frac{۱۰}{\text{دهگان}}\times\frac{۱۰}{\text{یکان}}=۹۰۰$

حالا تعداد اعداد سه‌رقمی که شامل رقم ۸ نیستند را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۸}{\text{صدگان}}\times\frac{۹}{\text{دهگان}}\times\frac{۹}{\text{یکان}}=۶۴۸$$

$$\begin{array}{c}\text{تعداد اعداد سه‌رقمی}\\ \text{که رقم ۸ دارند.}\end{array}=\left(\begin{array}{c}\text{تعداد کل اعداد}\\ \text{سه‌رقمی}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{تعداد اعداد سه‌رقمی}\\ \text{که رقم ۸ ندارند.}\end{array}\right)$$

$$=۹۰۰-۶۴۸=۲۵۲$$

۴۶. **۲** مقدار عددی هر سه عبارت را می‌نویسیم:

- $۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$
- $۶!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶=۷۲۰$
- $۰!=۱$

پس: $۶!-۵!+۰!=۷۲۰-۱۲۰+۱=۶۰۱$

۴۷. **۴** هر کدام از کسرها را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱۳!}{۱۲!}=\frac{۱۳\times\cancel{۱۲!}}{\cancel{۱۲!}}=۱۳\qquad\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times۹\times\cancel{۸!}}{\cancel{۸!}}=۹۰$$

پس: $\frac{۱۰!}{۸!}-\frac{۱۳!}{۱۲!}=۹۰-۱۳=۷۷$

۴۸. **۴** جای $۲۶!$ می‌نویسیم $۲۶\times۲۵!$ و بعد در صورت و مخرج از $۲۵!$، فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{۲۶!+۲۵!}{۲۶!-۲۵!}=\frac{۲۶(۲۵!)+۲۵!}{۲۶(۲۵!)-۲۵!}=\frac{\cancel{۲۵!}(۲۶+۱)}{\cancel{۲۵!}(۲۶-۱)}=\frac{۲۷}{۲۵}=\frac{۲۷\times۴}{۲۵\times۴}=\frac{۱۰۸}{۱۰۰}=۱/۰۸$$

۴۹. **۳** دو کسر را جداگانه ساده می‌کنیم:

- جای $(n+۱)!$ می‌نویسیم $(n+۱)\times n!$: $\dfrac{(n+۱)!}{n!}=\dfrac{(n+۱)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}=n+۱$
- جای $n!$ می‌نویسیم $n\times(n-۱)!$:

$$\frac{n!}{(n-۱)!}=\frac{n\,\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}}=n$$

پس: $$\frac{(n+۱)!}{n!}+\frac{n!}{(n-۱)!}=(n+۱)+n=۲n+۱$$

تیزبازی حاصل عبارت داده‌شده را به ازای $n=۱$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{(n+۱)!}{n!}+\frac{n!}{(n-۱)!}=\frac{۲!}{۱!}+\frac{۱!}{۰!}=\frac{۲}{۱}+\frac{۱}{۱}=۲+۱=۳$$

حالا مقدار هر ۴ گزینه را به‌ازای $n=۱$ حساب می‌کنیم. هر کدام ۳ شد، جواب است.

۱ $۲n=۲(۱)=۲$ ✗

۲ $۲n-۱=۲(۱)-۱=۱$ ✗

۳ $۲n+۱=۲(۱)+۱=۳$ ✓

۴ $۲n+۲=۲(۱)+۲=۴$ ✗

۵۰. **۳**

از قیافش نترس کافیه به این توجه کنید که ۲۴ همان $۴!$ است.

پس $x^۲+x-۲$ باید ۴ باشد: $x^۲+x-۲=۴\Rightarrow x^۲+x-۶=۰$

$$\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{جمله}}(x+۳)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=-۳\\x_۲=۲\end{cases}\xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{اختلاف}}۲-(-۳)=۵$$

۵۱. **۲** جای $(n-۷)!$ می‌نویسیم $(n-۷)(n-۸)\times(n-۹)!$:

$$\frac{(n-۷)!}{(n-۹)!}=۱۱۰\Rightarrow\frac{(n-۷)(n-۸)\times\cancel{(n-۹)!}}{\cancel{(n-۹)!}}=۱۱۰$$

$$\Rightarrow(n-۷)(n-۸)=۱۱۰$$

$n-۷$ و $n-۸$ دو عدد متوالی‌اند. از طرفی ۱۱۰ را هم می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو عدد متوالی ۱۰ و ۱۱ نوشت: $(n-۷)(n-۸)=۱۱\times۱۰$

عدد بزرگ‌تر یعنی $n-۷$ باید با ۱۱ برابر باشد: $n-۷=۱۱\Rightarrow n=۱۸$

در عبارت $\dfrac{(n+۱)!}{(n-۱)!}+\dfrac{(n+۵)!}{(n+۴)!}$، جای n، ۱۸ قرار می‌دهیم:

$$\frac{(۱۸+۵)!}{(۱۸+۴)!}+\frac{(۱۸+۱)!}{(۱۸-۱)!}=\frac{۲۳!}{۲۲!}+\frac{۱۹!}{۱۷!}$$

ساده می‌کنیم: $$\frac{۲۳\times\cancel{۲۲!}}{\cancel{۲۲!}}+\frac{۱۹\times۱۸\times\cancel{۱۷!}}{\cancel{۱۷!}}=۲۳+\overbrace{(۱۹\times۱۸)}^{۳۴۲}=۳۶۵$$

۵۲. **۴** تعداد جایگشت‌های n شیء، برابر با $n!$ است.

در این‌جا ۵ شیء داریم؛ پس: $۱۲۰=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=!۵=$ تعداد جایگشت

۵۳. **۴** تعداد جایگشت‌های $n-۱$ شیء، برابر با $(n-۱)!$ است.

پس باید $(n-۱)!$ با ۲۴ برابر باشد: $(n-۱)!=۲۴$

از طرفی ۲۴ برابر با $۴!$ است: $(n-۱)!=۴!\Rightarrow n-۱=۴\Rightarrow n=۵$

ما الان جایگشت $n+۱$ شیء را می‌خواهیم که می‌شود: $(۵+۱)!=۶!=۷۲۰$

۵۴. **۲** در کل ۶ نفر داریم. تعداد حالت‌های سخنرانی n نفر، $n!$ است؛ پس تعداد حالات سخنرانی ۶ نفر، $۶!$ است.

۵۵. **۳** **روش ۱** از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

۳تا جا و ۵تا شیء داریم: $$\frac{۵}{\text{جای اول}}\times\frac{۴}{\text{جای دوم}}\times\frac{۳}{\text{جای سوم}}=۶۰$$

روش ۲ از فرمول $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ کمک بگیریم:

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times\cancel{۲!}}{\cancel{۲!}}=۵\times۴\times۳=۶۰$$

۵۶. **۱** جایگشت‌های r شیء از n شیء (تشکیل صف rتایی با n نفر)، برابر با $P(n,r)$ است؛ پس در این‌جا، تعداد صف‌های ۳نفره با ۷ نفر، برابر است با: $P(۷,۳)$

تذکر البته از اصل ضرب هم می‌توانستیم تعداد حالات را حساب کنیم:

$$\frac{۷}{\text{نفر اول}}\times\frac{۶}{\text{نفر دوم}}\times\frac{۵}{\text{نفر سوم}}=۲۱۰$$

ولی جواب با رابطهٔ P در گزینه‌ها آمده بود!

۵۷. **۳** هر کدام از مسافرها می‌توانند در ۵ ایستگاه از اتوبوس پیاده شوند؛

پس: $$\frac{۵}{\text{مسافر ۱}}\times\frac{۵}{\text{مسافر ۲}}\times\frac{۵}{\text{مسافر ۳}}=۵^۳$$

تذکر شاید تعجب کنید که چرا این تست وسط سؤالای تبدیل آمده! خواستیم یک شوک به شما وارد کنیم تا حواستان بیشتر به مفاهیم باشد!

۵۸. **۱** **روش ۱** از اصل ضرب می‌رویم: $$\frac{۱۲}{\text{کار ۱}}\times\frac{۱۱}{\text{کار ۲}}\times\frac{۱۰}{\text{کار ۳}}=۱۳۲۰$$

روش ۲ $$P(۱۲,۳)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۹!}=۱۲\times۱۱\times۱۰=۱۳۲۰$$

۵۹. **۴** با استفاده از فرمول $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$، صورت و مخرج را ساده می‌کنیم:

- صورت: $P(۱۰,۲)=\dfrac{۱۰!}{(۱۰-۲)!}=\dfrac{۱۰!}{۸!}=\dfrac{۱۰\times۹\times\cancel{۸!}}{\cancel{۸!}}=۹۰$
- مخرج: $P(۵,۱)=\dfrac{۵!}{(۵-۱)!}=\dfrac{۵!}{۴!}=۵$

پس: $$\frac{P(۱۰,۲)}{P(۵,۱)}=\frac{۹۰}{۵}=۱۸$$

تیزبازی $P(۱۰,۲)$ یعنی ۲تا جا داریم و ۱۰تا آدم: $\dfrac{۱۰}{\text{جای ۱}}\times\dfrac{۹}{\text{جای ۲}}=۹۰$

$P(۵,۱)$ یعنی ۱ جا داریم و ۵تا آدم: $\dfrac{۵}{\text{جای ۱}}$

پس: $$\frac{P(۱۰,۲)}{P(۵,۱)}=\frac{۹۰}{۵}=۱۸$$

۶۰. **۳** اول عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$P(n,۲)=\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)\,\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}=n(n-۱)$$

عبارت به‌دست‌آمده را با ۵۶ برابر قرار می‌دهیم: $n(n-۱)=۵۶$

اگر ۵۶ را به صورت ضرب دو عدد متوالی بنویسیم، نیازی به حل معادله نیست:

$$n(n-۱)=۸\times۷\xrightarrow{\text{پس}}n=۸$$

۶۱. **۳** سمت چپ تساوی یعنی $P(n+۲,۳)$ را معنی می‌کنیم:

$(n+۲)$ تا شیء و ۳تا جا داریم. تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{n+۲}{\text{جای اول}}\times\frac{n+۱}{\text{جای دوم}}\times\frac{n}{\text{جای سوم}}\xrightarrow{\text{پس}}P(n+۲,۳)=(n+۲)(n+۱)(n)$$

معادلهٔ داده‌شده، ساده‌تر می‌شود: $P(n+۲,۳)=۱۲n(n+۲)$

$$\Rightarrow\cancel{(n+۲)}(n+۱)(\cancel{n})=۱۲\cancel{n}\cancel{(n+۲)}\Rightarrow n+۱=۱۲\Rightarrow n=۱۱$$

۶۲. **۱** خانهٔ اول و آخر، فقط ۱ حالت دارند و ۳ حرف برای ۳ خانهٔ دیگر می‌ماند که به ترتیب ۳، ۲ و ۱ حالت دارند.

$$\frac{\overset{\overset{\text{ت}}{\uparrow}}{۱}}{\text{حرف آخر}}\times\frac{۱}{\quad}\times\frac{۲}{\quad}\times\frac{۳}{\quad}\times\frac{\overset{\overset{\text{ل}}{\uparrow}}{۱}}{\text{حرف اول}}=۶$$

ترتیب پرکردن خانه‌ها: حرف اول ← حرف آخر ← حرف دوم، سوم و چهارم

۶۳. **۲** حرف اول باید r باشد؛ پس یک حالت دارد:

$$\frac{۱}{\text{ح اول}}\times\frac{\quad}{\text{ح دوم}}\times\frac{\quad}{\text{ح سوم}}\times\frac{\quad}{\text{ح چهارم}}\times\frac{\quad}{\text{ح پنجم}}\times\frac{\quad}{\text{ح ششم}}$$

حرف آخر f، s و r نمی‌تواند باشد؛ پس ۳ حالت دارد (e، d و o):

$$\frac{۱}{\text{ح اول}}\times\frac{\quad}{\text{ح دوم}}\times\frac{\quad}{\text{ح سوم}}\times\frac{\quad}{\text{ح چهارم}}\times\frac{\quad}{\text{ح پنجم}}\times\frac{۳}{\text{ح ششم}}$$

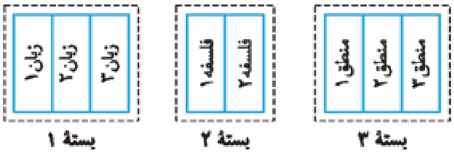
تا این‌جا ۲ حرف استفاده شده است؛ پس از ۶ حرف، ۴ حرف باقی مانده. با این ۴ حرف، ۴ خانهٔ خالی را پر می‌کنیم: $\frac{۱}{\text{ح اول}}\times\frac{۴}{\text{ح دوم}}\times\frac{۳}{\text{ح سوم}}\times\frac{۲}{\text{ح چهارم}}\times\frac{۱}{\text{ح پنجم}}\times\frac{۳}{\text{ح ششم}}=۷۲$

.۶۴ **۲** ۵ جایگاه برای نشستن داریم. در صندلی راننده، ۳ نفر می‌توانند قرار بگیرند: $\frac{۳}{\text{صندلی راننده}}\times\frac{}{\text{صندلی ۲}}\times\frac{}{\text{صندلی ۳}}\times\frac{}{\text{صندلی ۴}}\times\frac{}{\text{صندلی ۵}}$

پس الان ۴ نفر داریم. این ۴ نفر را در ۴ صندلی دیگر باید قرار دهیم.

$$\frac{۳}{\text{صندلی راننده}}\times\frac{۴}{\text{صندلی ۲}}\times\frac{۳}{\text{صندلی ۳}}\times\frac{۲}{\text{صندلی ۴}}\times\frac{۱}{\text{صندلی ۵}}=۷۲$$

.۶۵ **۳** کتاب‌های هم‌موضوع را در یک بسته قرار می‌دهیم:



تذکر چون صورت سؤال چیزی در مورد متمایز بودن یا نبودن کتاب‌ها نگفته، پس متمایز فرض می‌کنیم!

در کل ۳ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۳ می‌شود.

جایگشت کتاب‌های داخل بستهٔ ۱، !۳ حالت دارد. هم‌چنین جایگشت کتاب‌های داخل بسته‌های ۲ و ۳ به ترتیب !۲ و !۳ حالت دارند.

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\overset{\text{بسته‌ها}}{\overset{\uparrow}{۳!}}\times\overset{\text{زبان‌ها}}{\overset{\uparrow}{۳!}}\times\overset{\text{فلسفه‌ها}}{\overset{\uparrow}{۲}}\times\overset{\text{منطق‌ها}}{\overset{\uparrow}{۳!}}=۶\times۶\times۲\times۶=۴۳۲$

.۶۶ **۲** ۵ نفر را A، B، C، D و E و دو نفر خاص را A و B می‌گیریم.

چون می‌خواهیم A و B پشت هم سخنرانی کنند، آن‌ها را در یک بسته قرار می‌دهیم:

A , B ، C ، D ، E

در کل ۴ شیء (شامل ۱ بسته و ۳ سخنران) داریم که ترتیب قرارگرفتنشان !۴ حالت دارد و داخل بسته هم برای جابه‌جایی A و B، !۲ حالت داریم؛ پس تعداد کل حالات برابر است با: $۴!\times۲!=۲۴\times۲=۴۸$

.۶۷ **۳** مضارب ۳ را در یک بسته و مضارب ۴ را هم در یک بسته قرار می‌دهیم:

۵	۲	۱	۴ , ۸	۳ , ۶
بستهٔ ۵	بستهٔ ۴	بستهٔ ۳	بستهٔ ۲	بستهٔ ۱

در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۵ می‌شود.

جایگشت اعداد داخل بستهٔ ۱، !۲ حالت و جایگشت اعداد داخل بستهٔ ۲ نیز، !۲ حالت دارد.

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\overset{\text{بسته‌ها}}{\overset{\uparrow}{۵!}}\times\overset{\text{بستهٔ ۱}}{\overset{\uparrow}{۲!}}\times\overset{\text{بستهٔ ۲}}{\overset{\uparrow}{۲!}}=۱۲۰\times۲\times۲=۴۸۰$

.۶۸ **۱** حروف یکسان را در بسته‌های جداگانه قرار می‌دهیم:

N	R	M	A , A , A	D , D
بستهٔ ۵	بستهٔ ۴	بستهٔ ۳	بستهٔ ۲	بستهٔ ۱

در کل ۵ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۵ می‌شود.

چون حروف داخل بسته‌های ۱ و ۲ یکسان است، پس داخلشان جایگشتی ندارد!

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\underset{\text{بسته‌ها}}{\underset{\downarrow}{۵!}}\times\underset{\text{بستهٔ ۱}}{\underset{\downarrow}{۱}}\times\underset{\text{بستهٔ ۲}}{\underset{\downarrow}{۱}}=۱۲۰$

.۶۹ **۲** پدر و مادر را در یک بسته قرار می‌دهیم:

بچهٔ ۴ ، بچهٔ ۳ ، بچهٔ ۲ ، بچهٔ ۱ ، پدر و مادر

بستهٔ مربوط به پدر و مادر را در سمت چپ قرار می‌دهیم. ۴ بچهٔ این خانواده، به !۴ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. ضمناً داخل بسته، جایگشت پدر و مادر !۲ می‌شود؛ پس: $\text{تعداد کل حالات}=\underset{\text{جایگشت بچه‌ها}}{\underset{\downarrow}{۴!}}\times\underset{\text{جایگشت داخل بسته}}{\underset{\searrow}{۲!}}=۲۴\times۲=۴۸$

.۷۰ **۲** هر فرزند را به همراه پدرش در یک بسته قرار می‌دهیم:

فرزند ۳ و پدر ۳ ، فرزند ۲ و پدر ۲ ، فرزند ۱ و پدر ۱

این ۳ بسته را به !۳ حالت می‌توانیم کنار هم قرار دهیم.

داخل هر بسته، جای پدر و فرزند می‌تواند عوض شود؛ پس داخل هر بسته، !۲ حالت داریم.

در نتیجه تعداد کل حالات برابر است با: $\overset{\text{بسته‌ها}}{\overset{\uparrow}{۳!}}\times\overset{\text{بستهٔ ۱}}{\overset{\uparrow}{۲!}}\times\overset{\text{بستهٔ ۲}}{\overset{\uparrow}{۲!}}\times\overset{\text{بستهٔ ۳}}{\overset{\uparrow}{۲!}}=۶\times۲\times۲\times۲=۴۸$

.۷۱ **۴** ۶ سخنران را با A، B، C، D، E و F نشان می‌دهیم.

فرض می‌کنیم دو سخنران مورد نظر، A و B هستند.

قرار است بین A و B، دقیقاً دو نفر سخنرانی کنند: A , ○ , ○ , B

۲ جای خالی را باید با ۴ نفر باقی‌مانده پر کنیم: $\frac{۴}{\text{جای اول}}\times\frac{۳}{\text{جای دوم}}=۱۲$

از طرفی جای A و B هم می‌تواند عوض شود: ۲ حالت

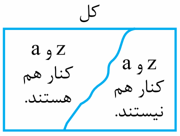
پس این بسته در کل $۲۴=۲\times۱۲$ حالت دارد.

الان ۴ نفر داخل بسته هستند و ۲ نفر بیرون آن: A , ○ , ○ , B ، ○ ، ○

در کل ۳ شیء داریم که تعداد جایگشت‌هایشان $۶=۳!$ می‌شود.

تعداد کل حالات برابر است با: $\overset{\text{داخل بسته}}{\overset{\uparrow}{۲۴}}\times\overset{\text{۳ شیء}}{\overset{\uparrow}{۶}}=۱۴۴$

.۷۲ **۴** از اصل متمم کمک می‌گیریم.



تعداد کل جایگشت‌های کلمهٔ zeidan برابر با !۶ است.

در این !۶، یا a و z کنار هم هستند یا کنار هم نیستند:

تعداد جایگشت‌هایی که a و z کنار هم هستند را حساب می‌کنیم:

a , z ، e ، i ، d ، n

$$\underset{\text{جایگشت ۵ بسته}}{۵!}\times\underset{\text{جایگشت داخل بستهٔ z و a}}{۲!}=۱۲۰\times۲=۲۴۰$$

پس: (a و z کنار هم نباشند.) = (کل حالات) − (a و z کنار هم باشند.)

$$=۶!-۲۴۰=۷۲۰-۲۴۰=۴۸۰$$

.۷۳ **۱** کلمهٔ zad را در یک بسته قرار می‌دهیم:

n	i	e	zad
بستهٔ ۴	بستهٔ ۳	بستهٔ ۲	بستهٔ ۱

در کل ۴ بسته داریم که تعداد جایگشتشان !۴ می‌شود.

داخل بستهٔ ۱، جایگشتی نداریم، چون حروف حق جابه‌جایی ندارند (باید کلمهٔ zad باشد نه مثلاً zda).

پس تعداد کل حالات برابر است با: $\overset{\text{بسته‌ها}}{\overset{\uparrow}{۴!}}\times\overset{\text{بستهٔ ۱}}{\overset{\nearrow}{۱}}=۲۴\times۱=۲۴$

.۷۴ **۳** **روش ۱** حروف صدادار $\{a,i,e\}$ و حروف بی‌صدا $\{r,z,h\}$ هستند. چون تعداد هر دو دسته یکسان است؛ پس چینش آن‌ها، ۲ حالت دارد:

۱) با صدادار شروع شود:

$$\overset{a,i,e}{\overset{\uparrow}{\frac{۳}{\text{صدادار}}}}\times\overset{r,z,h}{\overset{\uparrow}{\frac{۳}{\text{بی‌صدا}}}}\times\overset{\cancel{a},i,e}{\overset{\uparrow}{\frac{۲}{\text{صدادار}}}}\times\overset{\cancel{r},z,h}{\overset{\uparrow}{\frac{۲}{\text{بی‌صدا}}}}\times\overset{\cancel{i},e}{\overset{\uparrow}{\frac{۱}{\text{صدادار}}}}\times\overset{\cancel{z},h}{\overset{\uparrow}{\frac{۱}{\text{بی‌صدا}}}}=۳۶$$

۲) با بی‌صدا شروع شود:

$$\frac{۳}{\text{بی‌صدا}}\times\frac{۳}{\text{صدادار}}\times\frac{۲}{\text{بی‌صدا}}\times\frac{۲}{\text{صدادار}}\times\frac{۱}{\text{بی‌صدا}}\times\frac{۱}{\text{صدادار}}=۳۶$$

پس تعداد کل جایگشت‌ها، برابر است با: $۳۶+۳۶=۷۲$

ترتیب پرکردن (در هر دو حالت): خانهٔ ۱، ۳ و ۵ ← خانهٔ ۲، ۴ و ۶

روش ۲ تعداد حروف صدادار و بی‌صدا با هم برابر است و می‌خواهیم یکی در میان باشند؛ پس طبق نکتهٔ گفته‌شده در درسنامه، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$۲\times n!\times n!=۲\times۳!\times۳!=۲\times۶\times۶=۷۲$$

۷۵. **۳** **روش ۱** چون تعداد کتاب‌های زبان، یکی بیشتر از کتاب‌های ریاضی است، پس شروع صف باید با کتاب زبان باشد و بعدش یکی‌درمیان، ریاضی و زبان باشند. کتاب‌های زبان در جای خودشان به !۵ حالت و کتاب‌های ریاضی در جای خودشان به !۴ حالت می‌توانند قرار بگیرند:

$$\frac{۵}{\text{زبان}} \times \frac{۴}{\text{ریاضی}} \times \frac{۴}{\text{زبان}} \times \frac{۳}{\text{ریاضی}} \times \frac{۳}{\text{زبان}} \times \frac{۲}{\text{ریاضی}} \times \frac{۲}{\text{زبان}} \times \frac{۱}{\text{ریاضی}} \times \frac{۱}{\text{زبان}} = \underset{\text{زبان}}{\underset{\downarrow}{۵!}} \times \underset{\text{ریاضی}}{\underset{\downarrow}{۴!}}$$

روش ۲ با توجه به نکتهٔ گفته‌شده در درس‌نامه داریم: کتاب‌های زبان، یکی بیشتر از کتاب‌های ریاضی است؛ پس تعداد حالت‌ها برابر است با $۴! \times ۵!$.

۷۶. **۴** برای آن‌که ۳تا S، یکی در میان قرار گیرند، ۲ حالت داریم:

۱) Sها در جایگاه اول، سوم و پنجم باشند و ۳ حرف A، I و T در جایگاه‌های زوج:

$$\overset{\overset{S}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{اول}}} \times \overset{\overset{A,I,T}{\uparrow}}{\frac{۳}{\quad}} \times \overset{\overset{S}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{سوم}}} \times \overset{\overset{A,I,\cancel{T}}{\uparrow}}{\frac{۲}{\quad}} \times \overset{\overset{S}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{پنجم}}} \times \overset{\overset{A,\cancel{I}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\quad}} = ۶$$

۲) برعکس حالت بالا:

$$\overset{\overset{A,I,T}{\uparrow}}{\frac{۳}{\quad}} \times \overset{\overset{S}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{دوم}}} \times \overset{\overset{A,I,\cancel{T}}{\uparrow}}{\frac{۲}{\quad}} \times \overset{\overset{S}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{چهارم}}} \times \overset{\overset{A,\cancel{I}}{\uparrow}}{\frac{۱}{\quad}} \times \overset{\overset{S}{\uparrow}}{\frac{۱}{\text{ششم}}} = ۶$$

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۶ + ۶ = ۱۲$