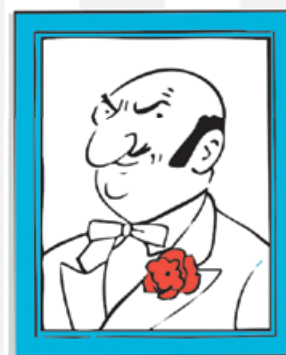
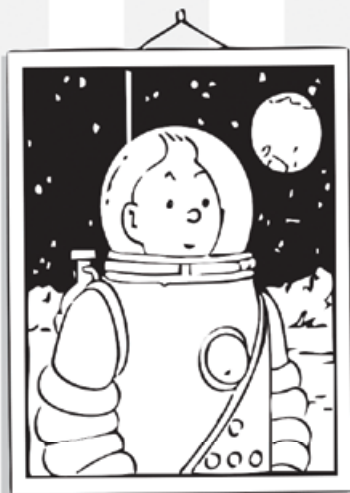


تقديم به

چه آنلاين چه آفلاين!

تو و بغل دستی های خوبت!



مقدمه مؤلف

سلام

حتماً خودتان از اهمیت درس ریاضی در نمره کنکور و معدل امتحان نهایی باخبرید! پس وقتتان را با این حرف‌های تکراری نمی‌گیرم، یک‌راست میرم سراصل مطلب، یعنی ویژگی‌های کتابی که در دست دارید:

۱ این کتاب با توجه کامل و دقیق به کتاب درسی ریاضی ۳ نوشته شده و شامل تمام نکات، مفاهیم، نمونه تمرین و مثال‌های کتاب درسی است. (اگر تونستید یک مورد خلاف این پیدا کنید، جایزه دارید.)

۲ در همه فصل‌ها سعی شده است تعداد تمرین‌ها، حجم توضیح‌ها و حجم کلی فصل مناسب‌ترین مقدار ممکن باشد. می‌دانیم شما در سال دوازدهم خیلی وقت ندارید که کار اضافی بکنید. (اما باور کنید که در هر کاری بلاخره یک حداقل میزان قابل قبول تلاش لازم است.)

۳ در تمرین‌های هر درس و آزمون‌های جمع‌بندی (ضمیمه آزمون) نگاهمان به امتحان نهایی بوده است اما در عین حال فرض را بر آن گرفته‌ایم که ممکن است امتحان نهایی دشوارتر و مفهومی‌تر شود. پس هدفمان این است که برای امتحان با هر درجه سختی آماده شوید.

۴ سوالات با علامت **18+** سخت‌ترین سؤال‌های هر درس هستند. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شوید، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگر به سراغ آن‌ها بروید.

۵ حواستان باشد ریاضی را وقتی درست یاد می‌گیرید که خودتان سؤال‌ها را حل کنید، خود خودتان!

۶ توضیحات و درس‌نامه‌ها و سؤال امتحانی هر درس، تکمیل‌کننده یکدیگرند. از هر کدام که غفلت کنید قسمتی از درس را از دست می‌دهید.

۷ پیشنهاد می‌کنم حتماً در بار اول استفاده از کتاب، نکته‌های مهم، سؤال‌هایی به نظرتان سخت است، سؤال‌هایی را که نتوانستید حل کنید و ... را مشخص کنید تا در زمان مرور و جمع‌بندی مطالب از مواردی که مشخص کرده‌اید استفاده کنید.

۸ امسال امتحان تشریحی دارید، پس نحوه نوشتن پاسخ کتبی برایتان بسیار مهم است (یا باید باشد) پاسخ‌نامه این کتاب با توجه به این موضوع به شیوه‌ای نوشته شده که راهنمای پاسخ به امتحانات کتبی باشد. یادتان باشد از روش‌های میانبر و تستی نمی‌توانید استفاده کنید. در ضمن توجه کنید کجاها قرار است فرمول‌ها و روابط را بنویسید.

با همه دقت و نیرویی که برای نوشتن این کتاب گذاشته‌ام و تلاش کرده‌ام که کتاب خوبی شود، مطمئنم که شما می‌توانید پیشنهادهای خیلی خوبی برای بهتر شدن کتاب بدهید. منتظر شنیدن نظراتان هستم.

در مورد درس‌نامه‌ها، سؤال‌ها و پاسخ‌ها، هر چه را که فکر می‌کنید کم یا زیاد است یا اگر تغییر کند بهتر می‌شود برایم بنویسید. اگر نتوانستید نظر معلم‌هایتان را هم در مورد کتاب بپرسید و برایم بنویسید. بهتر از دیروز، موفق‌تر از گذشته و سر حال‌تر از همیشه باشید.

و در آخر، از تمامی عزیزانی که در بهبود کتاب به ما کمک کرده‌اند به ویژه سرکار خانم جالینوسی بسیار سپاس‌گزارم.



فهرست مطالب

فصل ۲ | مثلثات

- بخش ۱: تناوب ----- ۴۴
 سؤال‌های امتحانی بخش ۱ ----- ۴۸
 بخش ۲: تابع تناوب ----- ۵۱
 سؤال‌های امتحانی بخش ۲ ----- ۵۳
 بخش ۳: نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان ----- ۵۴
 سؤال‌های امتحانی بخش ۳ ----- ۵۶
 بخش ۴: معادلات مثلثاتی ----- ۵۷
 سؤال‌های امتحانی بخش ۴ ----- ۶۱

فصل ۴ | مشتق

- بخش ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ----- ۸۲
 سؤال‌های امتحانی بخش ۱ ----- ۸۵
 بخش ۲: مشتق پذیری و پیوستگی ----- ۸۸
 سؤال‌های امتحانی بخش ۲ ----- ۹۱
 بخش ۳: تابع مشتق ----- ۹۳
 سؤال‌های امتحانی بخش ۳ ----- ۹۶
 بخش ۴: مشتق تابع مرکب - قاعده زنجیری ----- ۹۹
 سؤال‌های امتحانی بخش ۴ ----- ۱۰۱
 بخش ۵: آهنگ تغییر متوسط و ... ----- ۱۰۲
 سؤال‌های امتحانی بخش ۵ ----- ۱۰۶

فصل ۱۱ | تابع

- بخش ۱: توابع چندضلعی ----- ۱۰
 سؤال‌های امتحانی بخش ۱ ----- ۱۴
 بخش ۲: توابع صعودی و نزولی ----- ۱۵
 سؤال‌های امتحانی بخش ۲ ----- ۲۰
 بخش ۳: ترکیب توابع ----- ۲۱
 سؤال‌های امتحانی بخش ۳ ----- ۲۶
 بخش ۴: تبدیل توابع ----- ۲۹
 سؤال‌های امتحانی بخش ۴ ----- ۳۴
 بخش ۵: تابع وارون ----- ۳۷
 سؤال‌های امتحانی بخش ۵ ----- ۴۱

فصل ۳ | حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

- بخش ۱: رفع ابهام ----- ۶۴
 سؤال‌های امتحانی بخش ۱ ----- ۶۹
 بخش ۲: حد بی‌نهایت (حد نامتناهی) ----- ۷۰
 سؤال‌های امتحانی بخش ۲ ----- ۷۳
 بخش ۳: حد در بی‌نهایت ----- ۷۵
 سؤال‌های امتحانی بخش ۳ ----- ۷۹

فصل ۵ | کاربرد مشتق

- بخش ۱: تعیین یکنوایی تابع با استفاده از مشتق ----- ۱۰۸
 سؤال‌های امتحانی بخش ۱ ----- ۱۱۳
 بخش ۲: ماکزیمم و مینیمم نسبی ----- ۱۱۴
 سؤال‌های امتحانی بخش ۲ ----- ۱۱۸
 بخش ۳: مینیمم و ماکزیمم مطلق ----- ۱۱۹
 سؤال‌های امتحانی بخش ۳ ----- ۱۲۲
 بخش ۴: بهینه‌سازی ----- ۱۲۳
 سؤال‌های امتحانی بخش ۴ ----- ۱۲۴

فصل ۶ | هندسه

- بخش ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ----- ۱۲۶
 سؤالات امتحانی بخش ۱ ----- ۱۳۲
 بخش ۲: بیضی ----- ۱۳۳
 سؤالات امتحانی بخش ۲ ----- ۱۳۶
 بخش ۳: دایره ----- ۱۳۷
 سؤالات امتحانی بخش ۳ ----- ۱۴۱

پاسخ‌نامه تشریحی

- پاسخ‌نامه تشریحی فصل اول ----- ۱۵۴
 پاسخ‌نامه تشریحی فصل دوم ----- ۱۷۳
 پاسخ‌نامه تشریحی فصل سوم ----- ۱۸۴
 پاسخ‌نامه تشریحی فصل چهارم ----- ۱۹۱
 پاسخ‌نامه تشریحی فصل پنجم ----- ۲۰۶
 پاسخ‌نامه تشریحی فصل ششم ----- ۲۱۷
 پاسخ‌نامه تشریحی فصل هفتم ----- ۲۲۴

فصل ۷ | احتمال

- بخش ۱: یادآوری ----- ۱۴۴
 سؤال‌های امتحانی بخش ۱ ----- ۱۴۷
 بخش ۲: قانون احتمال کل ----- ۱۴۸
 سؤال‌های امتحانی بخش ۲ ----- ۱۵۱

آشنایی با ماجرای بیست ریاضی تجربی دوازدهم خیلی سبز

یک اسکن، همه چیز در دسترس

اول از همه باید فعال سازی پنل کتاب رو انجام بدی تا به همه محتواها و امکانات دسترسی داشته باشی.

گام سوم



کد اسکرچ رو بعد از خراشیدن، ثبت و فعال سازی کنی. (فقط برای بار اول)

گام دوم



با شماره موبایل
وارد بشی.

گام اول



فقط کافی QR Code
کتاب رو اسکن کنی!

حالا بریم ببینیم با فعال شدن پنل
کتاب چیا گیرمون میاد!

۲

نسخه دیجیتال کتاب، کتابخوان خیلی سبز

با خرید نسخه چاپی این کتاب، نسخه دیجیتال اون هم در اختیار شما قرار می‌گیره تا بتونید در هر زمان و مکانی به محتوای کتاب دسترسی داشته باشید. کتابخوان دیجیتال خیلی سبز به شما این امکان رو می‌ده که متناسب با سبک مطالعه خودتون، از امکانات متنوعش استفاده کنید.



امکان مطالعه در
هر دستگاهی



یادداشت کردن



هایلایت کردن و
علامت گذاری



PDF
Reader

۳

همایش ویژه شب امتحان

همه دانش آموزها در هر سطحی که هستن، قبل از امتحان‌های نهایی (یا نوبت اول) نیاز دارن که یه معلم حرفه‌ای کار رو براشون جمع کنه! جواب این نیاز چیزی نیست جز همایش‌های شب امتحان خیلی سبز که ویژگی‌های زیر رو دارن:

- مرور کاربردی ویژه امتحان نهایی
- تدریس شده با بهترین دبیران
- بررسی تمام نکات مهم و پرکاربرد
- تحلیل امتحان‌های نهایی سال‌های اخیر
- نکات مشاوره‌ای و پیش‌بینی سؤالات امتحان نهایی
- آموزش تشریحی نویسی





فایل ها و Pdf های تکمیلی



امتحان های نهایی، امتحان های درس به درس، خلاصه درس
شب امتحانی و ... تنها بخشی از محتواهای افزوده این کتابه که
کم کم براتون روی پنل کتاب آپلود می شه!



نمونه سؤال های آزمون تشریحی خیلی سبز



آزمون های تشریحی خیلی سبز، پرمخاطب ترین آزمون های آزمایشی تشریحی در کشور
هستند! این آزمون ها با کیفیت ترین و شبیه ترین سؤال ها به امتحان های نهایی رو دارن و ما
آرشیو این آزمون ها رو براتون در پنل کتاب قرار دادیم.

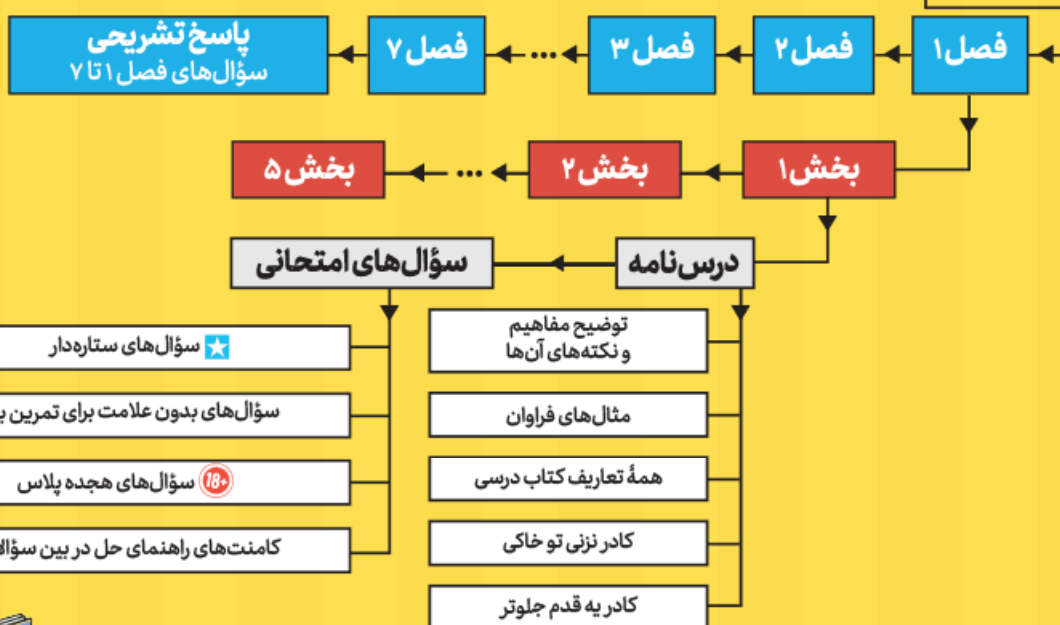


حالا بریم ببینیم داخل کتاب
چه خبره!



ساختار کتاب اصلی در یک نگاه

کل کتاب اصلی





معرفی آیکون‌ها و کادرهای درس‌نامه



اشتباهات رایجی که دانش‌آموزان در حل سؤالات ریاضی تجربی دارند در این آیکون بررسی می‌شود.

نکته‌های خاصی که مهم هستند و می‌خوایم بیشتر به اون‌ها دقت کنید.

مثال‌هایی از درس‌نامه که به کم از حالت نرمال سخت‌ترین و شما رو برای سؤالات 18+ و امتحان نهایی سخت‌تر آماده می‌کنن.

در درس‌نامه به آیکون‌هایی مثل نکته، تذکر و ... برخورد می‌کنید. همان‌طور که از اسمشان مشخص است، باید دقتتان هنگام خواندن این‌ها چند برابر شود.

در درس‌نامه به طور کامل تعاریف کتاب درسی را برایتان آورده‌ایم تا در سؤالات جای خالی، درست و نادرست و ... از این بابت به مشکلی برخوردید.

نزنه تو خاکی

حواستون باشه

یک قدم جلوتر

نکته

تذکر

توجه

تعریف



معرفی آیکون‌های بخش سؤالات امتحانی

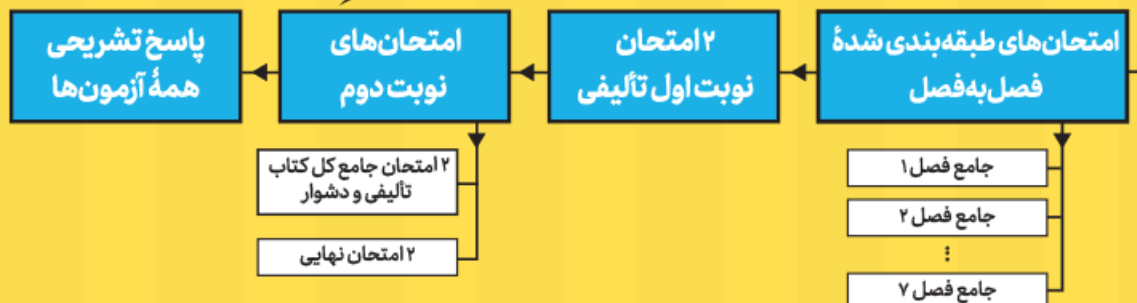
فرض کنید دوتا دانش‌آموز به نام‌های دوپونت و دوپونط می‌خواهند برای امتحان نهایی از این کتاب استفاده کنند. دوپونت یک دانش‌آموز با سطح درسی قوی است که از اول سال شروع به خواندن این کتاب کرده است. دوپونط یک دانش‌آموز با سطح درسی ضعیف است که خواندن این کتاب رو گذاشته برای بعد از عید و می‌خواهد نزدیک امتحان نهایی از این کتاب استفاده کنه. به نظرتون دوپونط می‌رسه همه سؤالاتی رو که دوپونت در مدت ۹ ماه خونده و حل کرده به ماه و نیمه بخونه و حل کنه؟ حتمن نه!! پس دوپونت که هدفش ۲۰ گرفتنه، توی حل کردن سؤالاتی که به دوپونط داره. به همین خاطر ما سؤالات امتحانی رو با علامت‌های 18+ و ★ دسته‌بندی کردیم، که هر دانش‌آموز با توجه به سطح و وقتش بتونه از این کتاب استفاده کنه!

آیکون	معرفی	توصیه
★ (۵۷۶ سؤالات ستاره‌دار)	حداقل چیزی که به دانش‌آموز باید برای امتحان نهایی بلد باشه!	اگر حال داری یا نداری، ضعیف هستی یا قوی، در هر صورت سؤالاتی که ★ رو حتماً یاد بگیر.
— (سؤالات بدون علامت)	این سؤالات برای تثبیت یک ایده آموزشی طراحی شدن.	بعد از سؤالاتی که ستاره‌دار برای تمرین بیشتر سؤالاتی بدون علامت را حل کنید.
18+ (بیش از ۱۵۰ سؤالات هجده پلاس)	این سؤالات سختن. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شی، پرو سراغ سؤالات 18+ ها!	اگر به اندازه کافی تسلط پیدا کرده باشی، می‌تونی بری سراغ 18+ ها!



ساختار کتاب ضمیمه در یک نگاه

کل کتاب ضمیمه آزمون





دَرِسْتَامَه وَ سَوَّالَاتِ إِمْتِحَانِ



تابع

۱

بخش

۱

توابع چند جمله‌ای

در دو سال گذشته با تابع آشنا شدیم. دیدیم تابع را می‌توانیم به شکل مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، نمودار پیکانی، نمودار مختصاتی یا یک ضابطه جبری نمایش دهیم. دیدیم دامنه تابع یعنی مجموعه مقادیری از x که تابع به ازای آن‌ها تعریف می‌شود و برد تابع یعنی مجموعه مقادیر تابع یا y . یکی از انواع توابعی که در سال‌های دهم و یازدهم شناختیم توابع چند جمله‌ای بود.

تابع چند جمله‌ای



هر تابع با ضابطه $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ و توان‌های x یک عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد یک تابع چند جمله‌ای است. مثلاً $f(x) = 5$ و $g(x) = 3x$ و $h(x) = -2x + 3$ و $k(x) = x^2 + 2x - 1$ همه یک تابع چند جمله‌ای اند ولی مثلاً $t(x) = \frac{2}{x}$ و $p(x) = \sqrt{x} + 2$ و $q(x) = \sin x + 3$ توابع چند جمله‌ای نیستند. به بزرگ‌ترین توان x در تابع می‌گوییم درجه چند جمله‌ای. در مثال‌های بالا f از درجه صفر، g و h از درجه ۱ و k از درجه ۲ است.

نکته! تابع ثابت $f(x) = a$ با شرط $a \neq 0$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر است. اما تابع ثابت $f(x) = 0$ یک تابع چند جمله‌ای نیست و درجه تابع $f(x) = 0$ تعریف نشده است. به طور خلاصه:

ضابطه تابع	تابع چند جمله‌ای	درجه تابع چند جمله‌ای
$f(x) = 0$	نیست	تعریف نشده
$f(x) = a, a \neq 0$	هست	صفر
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ با شرط $a_n \neq 0$	هست	n

مثال؟ کدام یک از توابع‌های زیر چند جمله‌ای‌اند؟

پ $f(x) = x^2 + x - \sin x$

ب $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} - 3x$

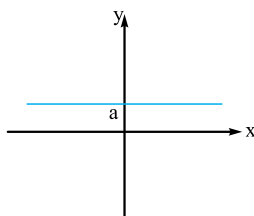
الف $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

پاسخ! با توجه به تعریف بالا، **الف** چند جمله‌ای است ولی **ب** چند جمله‌ای نیست، چون x در مخرج (x^{-1}) دارد و **پ** هم چند جمله‌ای نیست، چون شامل $\sin x$ است.

نکته! دامنه همه توابع چند جمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است و اگر n فرد باشد، برد تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ است.

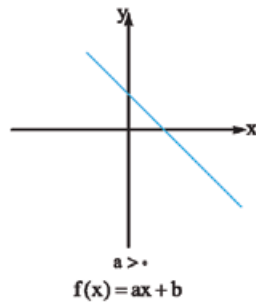
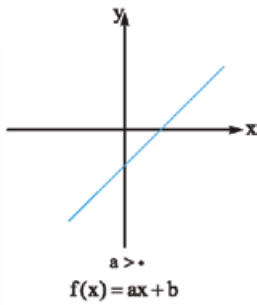
چند جمله‌ای‌های معروف

۱ تابع $f(x) = a$ با شرط $a \neq 0$ (یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر) یک تابع ثابت است. حتماً یادمان هست که بردش برابر است با $R_f = \{a\}$.

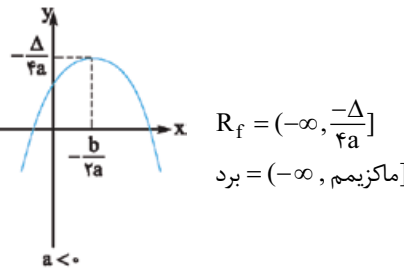
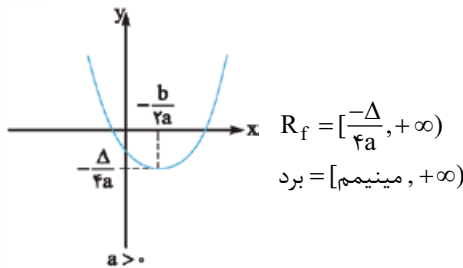


۲ تابع $f(x) = ax + b$ با شرط $a \neq 0$ (از درجه ۱) یک تابع خطی

است که بردش برابر است با $R_f = \mathbb{R}$.



۳ تابع درجه ۲، $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) یک سهمی است که بردش برابر است با:



این تابع‌هایی بودند که در سال دهم و یازدهم با آن‌ها آشنا شدیم. امسال با تابع $f(x) = x^3$ آشنا می‌شویم. **یادآوری** انتقال نمودار تابع را در سال قبل یاد گرفتیم. در رسم نمودار تابع درجه سوم به این روش‌ها نیاز داریم:

نام تبدیل	صورت ریاضی	توضیح	مثال
انتقال افقی	$y = f(x)$ $\downarrow$ $y = f(x + a)$	نمودار را به اندازه $(-a)$ واحد در راستای محور x ‌ها انتقال می‌دهیم. (در مثال بالا انتقال به اندازه ۱ واحد و در مثال پایین انتقال به اندازه (-2) واحد)	 $y = f(x) \Rightarrow y = f(x-1)$ $y = f(x) \Rightarrow y = f(x+2)$
انتقال قائم	$y = f(x)$ $\downarrow$ $y = f(x) + b$	نمودار به اندازه b واحد در راستای محور y ‌ها انتقال می‌دهیم. (در مثال بالا ۲ واحد و در مثال پایین (-1) واحد)	 $y = f(x) \Rightarrow y = f(x) + 2$ $y = f(x) \Rightarrow y = f(x) - 1$
تقارن نسبت به محور x ‌ها	$f(x)$ $\downarrow$ $-f(x)$	نمودار تابع را نسبت به محور x ‌ها قرینه می‌کنیم.	 $y = f(x) \Rightarrow y = -f(x)$



نام تبدیل	صورت ریاضی	توضیح	مثال
تقارن نسبت به محور y	$f(x) \rightarrow f(-x)$	نمودار تابع را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	
تقارن نسبت به مبدأ مختصات	$f(x) \rightarrow -f(-x)$	نمودار تابع را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.	

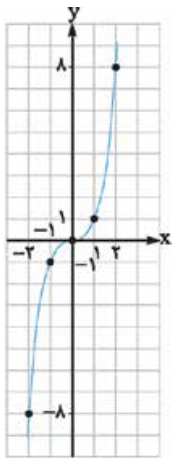
تابع درجه سوم



تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (با شرط $a \neq 0$) یک تابع درجه سوم است. دامنه و برد تابع درجه سوم برابر $\mathbb{R}$ است.

رسم نمودار تابع $f(x) = x^3$

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8



نمودار تابع $f(x) = x^3$ را با نقطه یابی رسم می‌کنیم:

نمودار تابع به صورت روبه‌رو است:

همان‌طور که در شکل می‌بینیم دامنه و برد تابع برابر است با $\mathbb{R}$.

حالا می‌خواهیم نمودار تابع‌های به شکل $y = m(kx + a)^3 + b$ را با استفاده از روش‌های تبدیل نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنیم.

مثال نمودار تابع‌های زیر را با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$ رسم کنید.

الف $g(x) = -x^3$

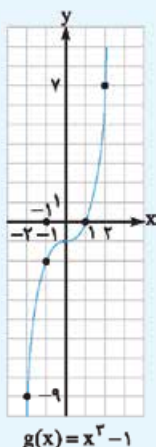
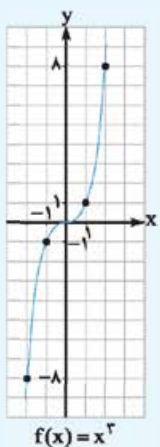
ب $g(x) = x^3 - 1$

پ $g(x) = (x-1)^3$

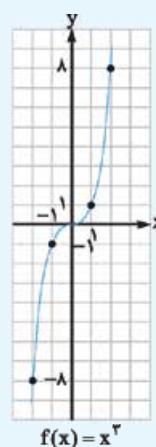
ت $g(x) = (x+2)^3$

ث $g(x) = -(x+1)^3 + 2$

پاسخ اول نمودار تابع $f(x) = x^3$ را می‌کشیم و بعد هر کدام از نمودارها را با انتقال مناسب از روی نمودار $f(x) = x^3$ رسم می‌کنیم.

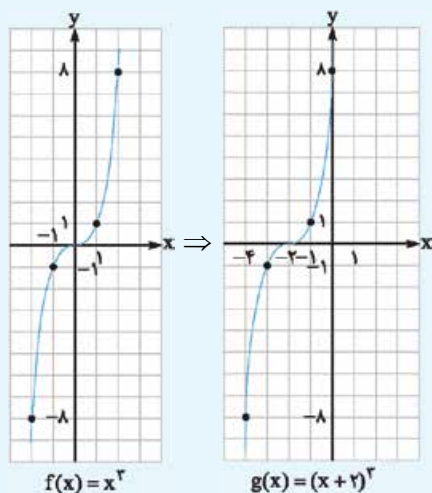


ب تابع $g(x) = x^3 - 1$ برابر است با $y = f(x) - 1$ می‌دانیم برای رسم نمودار $f(x) - 1$ ، باید نمودار تابع f را یک واحد در راستای محور y ها به پایین انتقال دهیم:

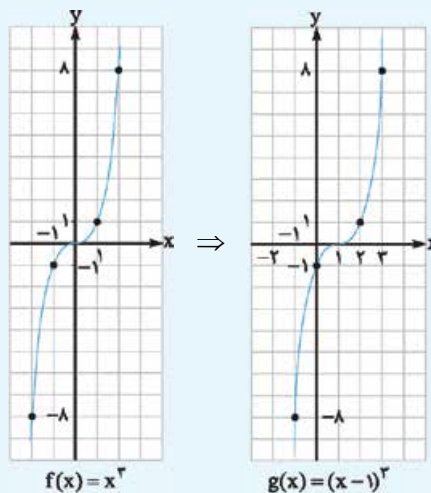


الف تابع $g(x) = -x^3$ برابر است با $y = -f(x)$ برای رسم نمودار تابع باید نمودار $f(x) = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم:

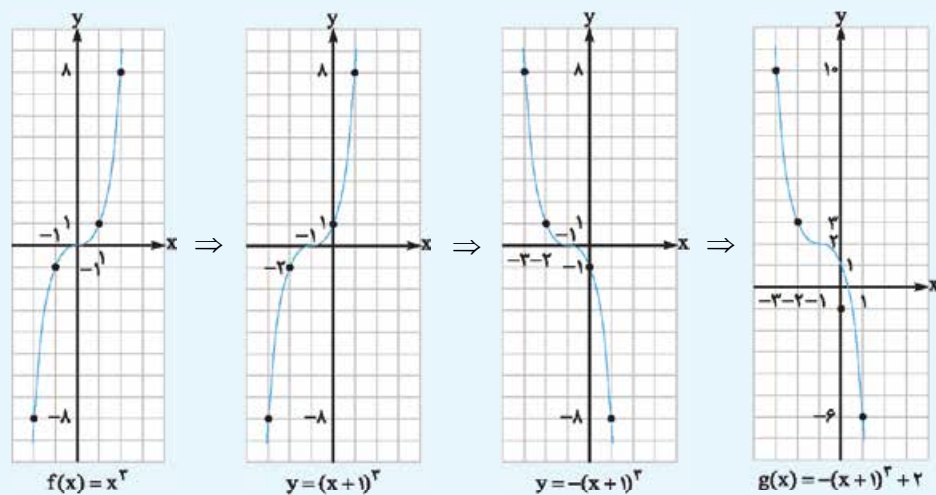




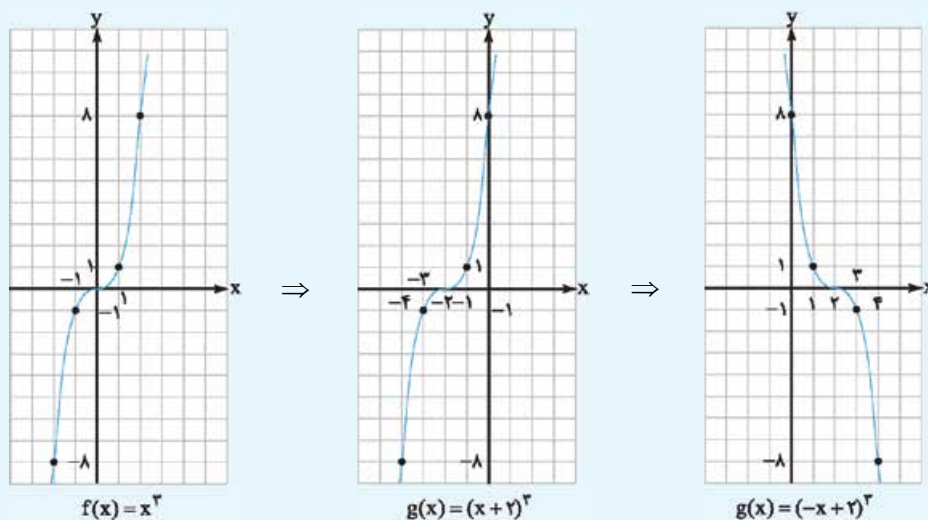
ت تابع
 $g(x) = (x+2)^3$
 برابر است با
 $y = f(x+2)$
 می‌دانیم برای رسم
 نمودار تابع $f(x+2)$
 باید نمودار تابع $f(x)$
 را در راستای محور x ها
 ۲ واحد به سمت چپ
 انتقال دهیم:



پ تابع
 $g(x) = (x-1)^3$
 برابر است با
 $y = f(x-1)$
 و می‌دانیم برای
 رسم نمودار تابع
 $f(x-1)$ باید
 نمودار f را ۱ واحد
 در راستای محور x
 ها به سمت راست
 انتقال دهیم:



ث تابع $g(x) = -(x+1)^3 + 2$
 برابر است با $y = -f(x+1) + 2$.
 پس باید نمودار $f(x)$ را اول ۱ واحد
 در راستای محور x ها به سمت چپ
 انتقال دهیم (یعنی $f(x+1)$)
 و بعد آن را نسبت به محور x ها
 قرینه کنیم (یعنی $-(x+1)^3$) و
 بعد در راستای محور y ها، ۲ واحد
 به سمت بالا انتقال دهیم (یعنی
 $-(x+1)^3 + 2$):



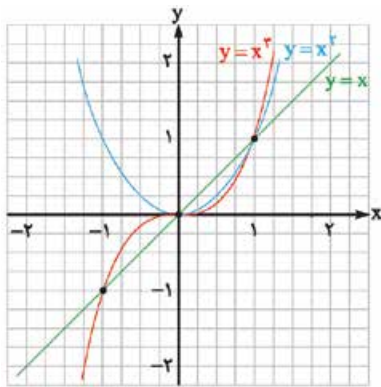
ج تابع $g(x) = (-x+2)^3$ برابر
 است با $y = f(-x+2)$. پس باید
 اول نمودار تابع $f(x+2)$ را از روی
 نمودار $f(x)$ رسم کنیم، یعنی نمودار
 f را در راستای محور x ها ۲ واحد به
 سمت چپ انتقال دهیم و بعد نمودار
 $f(-x+2)$ را رسم کنیم، یعنی
 قرینه نمودار $f(x+2)$ را نسبت به
 محور y ها رسم کنیم:

حواستون باشه بررسی وضعیت نمودار دو تابع $y = x^3$ و $y = x^2$ از مواردی است که در امتحان نهایی مورد توجه طراح است. حواستان باشد علاوه بر x^2 و x^3 وضعیت $-x^2$ و $-x^3$ را هم می‌توانیم به همین شکل تعیین کنیم.

بررسی نمودار تابع‌های $y=x^3$ و $y=x^2$

- ۱ می‌دانیم برای $x > 1$ هر چه مقدار n بیشتر شود، حاصل x^n بزرگ‌تر می‌شود، پس برای x های بزرگ‌تر از ۱ داریم: $x^3 > x^2 > x$.
- ۲ در $x = 1$ مقدار x ، x^2 و x^3 مساوی ۱ است، پس هر سه نمودار از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرند.
- ۳ برای $0 < x < 1$ هر چه مقدار n بیشتر شود حاصل x^n کوچک‌تر می‌شود، پس برای x های بین صفر و ۱ داریم: $x^3 < x^2 < x$.





۴ در $x=0$ مقدار x , x^2 و x^3 مساوی صفر است، پس هر سه نمودار از نقطه $(0,0)$ می‌گذرند.

۵ در $x=-1$ مقدار x و x^3 مساوی -1 است ولی مقدار x^2 مساوی 1 است.

حالا اگر با توجه به نکات بالا نمودار هر سه تابع را رسم کنیم، می‌توانیم این ویژگی‌ها را روی نمودار هم ببینیم. پس در مورد x^2 و x^3 به طور خلاصه می‌توانیم بنویسیم:

بیایید وضعیت نمودار دو تابع x^2 و x^3 را یک جور دیگر هم ببینیم:

نمودار x^2 بالاتر از نمودار x^3 است. بازه $(1, +\infty)$

نمودار x^3 پایین‌تر از نمودار x^2 است. بازه $(0, 1)$ و $(-\infty, 0)$

$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x^3 < x^2$	$x^3 = x^2$	$x^3 < x^2$	$x^3 = x^2$	$x^3 > x^2$

؟ مثال در جاهای خالی زیر عبارت مناسب قرار دهید.

(نهایی دی ۹۹)

الف در بازه $(0, 1)$ نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

ب نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = x^3$ نقطه مشترک دارند.

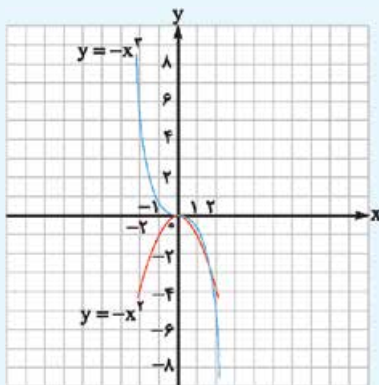
پ در بازه $(1, +\infty)$ نمودار تابع $y = -x^3$ نمودار تابع $y = -x^2$ قرار دارد.

پاسخ الف پایین

ب دو

پ پایین

نمودارهای دو تابع را ببینید:



سؤال‌های امتحانی



سؤال‌های با علامت ★ مهم‌ترین سؤال‌های هر بخش که حتما باید حلشون کنی.

سؤال‌های با علامت ۱۵۰ سخت‌ترین سؤال‌های هر بخش. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمیشی، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگر، برو سراغ اون‌ها.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱- دامنه و برد توابع چندجمله‌ای درجه فرد، با هم مساوی‌اند.

۲- دامنه توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.

۳- برد توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.

۴- تابع $f(x) = \sqrt{2}x - x^2$ یک تابع درجه دوم است.

۵- تابع $f(x) = 0$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه صفر است.

۶- تابع $f(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}$ یک تابع چندجمله‌ای است.

۷- تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه سوم است.

۸- تابع $f(x) = 8(x-1)^3 - (2x+1)^3$ یک تابع چندجمله‌ای درجه سوم است.

۹- نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^3$ است.

۱۰- تابع $y = \sqrt{3}x^3 - \pi x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای است.

۱۱- تابع $f(x) = x \sin^2 x + x(2 + \cos^2 x)$ یک تابع چندجمله‌ای است.

(نهایی شهریور ۱۴۰۰)

(نهایی خرداد ۱۴۰۱)

(نهایی دی ۱۴۰۱)

(نهایی دی ۱۴۰۱)

(نهایی شهریور ۱۴۰۲)

نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

$$y = (-\frac{x}{4} + 1)^3 - 15 \quad \star 15$$

$$y = (-x + 2)^3 + 1 \quad \star 14$$

$$y = (x - 1)^3 - 13 \quad \star 13$$

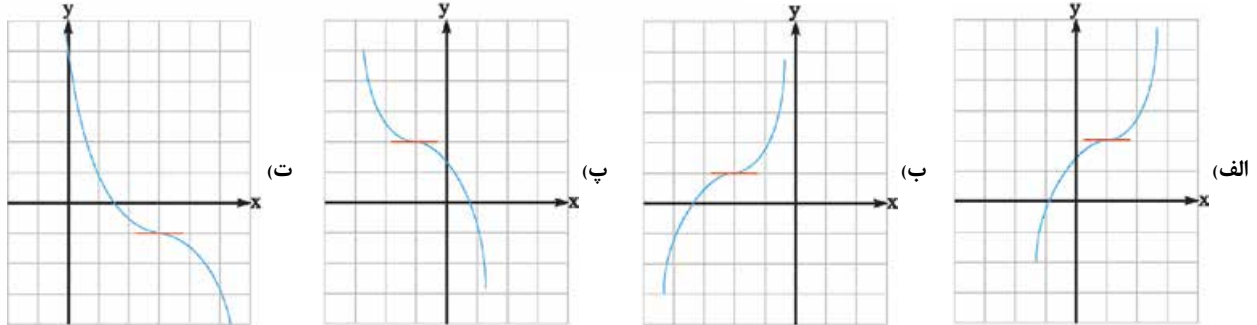
$$y = (x + 1)^3 - 1 \quad \star 12$$

به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.

۱۶- به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را رسم کنید.

۱۷- با استفاده از نمودار $f(x) = x^3$ نمودار تابع $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 11$ را رسم کنید.

۱۸- نمودارهای زیر انتقال یافته نمودار تابع $y = x^3$ یا $y = -x^3$ هستند، ضابطه هر کدام را پیدا کنید.



۱۹- نمودار تابع $y = -x^3$ و $y = -x^3$ را رسم کنید و بگویید در چه بازه‌هایی نمودار $y = -x^3$ بالای نمودار تابع $y = -x^3$ است.

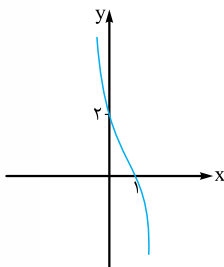
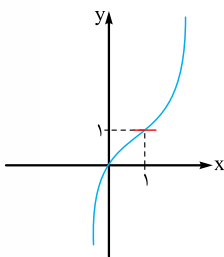
۲۰- تابع $f(x) = x^3$ را ابتدا ۲ واحد به سمت چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا تابع $g(x)$ به دست آید. مختصات نقطه تقاطع نمودارهای f و g را پیدا کنید.

۲۱- نمودار تابع $f(x) = x^3$ را ۲ واحد به سمت چپ و k واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. دو نمودار یکدیگر را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کنند. k را بیابید.

180

۲۲- اگر نمودار روبه‌رو متعلق به تابع $f(x) = a(x + b)^3 + c$ باشد، نمودار تابع $g(x) = a(x - b)^3 + c$ محور x ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

180



۲۳- اگر شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ باشد، مقدار $f(-1)$ را پیدا کنید.

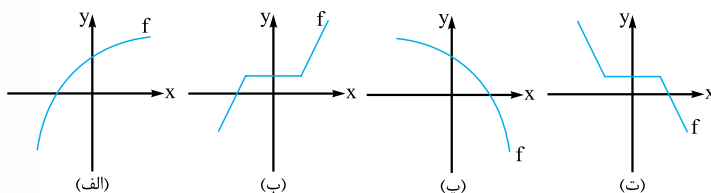
180

توابع صعودی و نزولی

۲

بخش

به نمودارهای زیر نگاه کنید.



در نمودار (الف) با زیاد شدن x ، مقدار y هم زیاد می‌شود. اگر تابعی این چنین باشد، می‌گوییم اکیداً صعودی است (اکیداً یعنی همواره و همیشه).
در تابع اکیداً صعودی داریم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

در نمودار (ب) با زیاد شدن x ، مقدار y زیاد می‌شود و یا ثابت می‌ماند. این تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست (به علت این که بعضی وقت‌ها با زیاد شدن x ، مقدار y ثابت می‌ماند). در تابع صعودی داریم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

در نمودار (پ) با زیاد شدن x ، مقدار y کم می‌شود. به این تابع می‌گوییم اکیداً نزولی. در تابع اکیداً نزولی داریم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

در نمودار (ت) با زیاد شدن x ، مقدار y کم می‌شود و یا ثابت می‌ماند. این تابع نزولی است اما اکیداً نزولی نیست. در تابع نزولی داریم: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



■ در تابع صعودی و اکیداً صعودی جهت تغییرات x و $f(x)$ یکسان است.

■ در تابع نزولی و اکیداً نزولی جهت تغییرات x و $f(x)$ مخالف یکدیگر است.

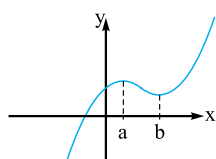
🔴 **حواستون باشه** در تعریف تابع اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) مساوی نداریم، اما در تعریف تابع صعودی (یا نزولی) مساوی داریم.

حالا بیایید به نمودار تابع روبه رو نگاه کنیم:

تابع در بازه $[-\infty, a]$ اکیداً صعودی، در بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی و در بازه $[b, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در کل تابع نه

صعودی است و نه نزولی.

خلاصه مطالب صفحه قبل را در جدول زیر ببینیم:



اکیداً صعودی	اکیداً نزولی	صعودی	نزولی
با افزایش x ، مقدار y همواره زیاد می شود.	با افزایش x ، مقدار y همواره کم می شود.	با افزایش x ، مقدار y زیاد می شود یا ثابت می ماند.	با افزایش x ، مقدار y کم می شود یا ثابت می ماند.

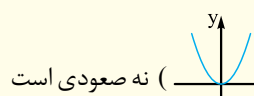
بیایید این طور جمع بندی کنیم:

۱. **تابع یکنوا:** اگر تابعی صعودی باشد (یا نزولی باشد) می گوییم یکنوا است. (یکنوا یعنی جهت تغییرات y همواره یکسان است).

۲. **تابع اکیداً یکنوا:** اگر تابعی اکیداً صعودی باشد (یا اکیداً نزولی باشد) می گوییم اکیداً یکنوا است.

۳. **تابع غیر یکنوا:** اگر تابعی نه صعودی باشد و نه نزولی (یعنی در بعضی بازه ها صعودی و در بعضی بازه ها نزولی باشد) می گوییم غیر یکنوا یا نایکنوا است.

۴. **تابع هم صعودی هم نزولی:** اگر تابعی هم صعودی باشد و هم نزولی، یعنی تابع ثابت است.



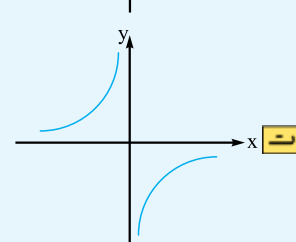
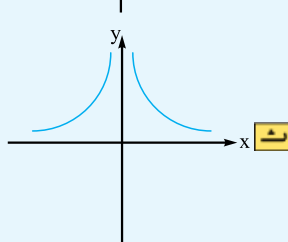
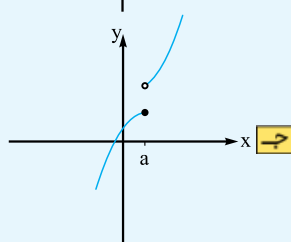
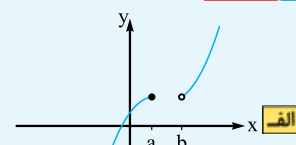
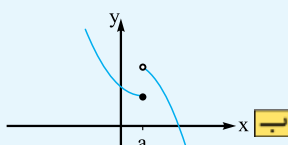
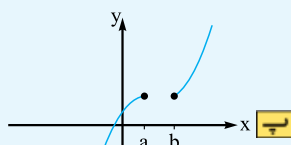
نکته ۱ نه صعودی و نه نزولی یعنی غیر یکنوا (نایکنوا) و هم صعودی و هم نزولی یعنی تابع ثابت، مثلاً $y = x^2$ (نه صعودی است)

و نه نزولی و $y = 2$ (نه صعودی است و هم نزولی).

۲. سؤال های درست - نادرست یا جای خالی در مورد یکنوایی تابع از سؤال های بسیار متداول نهایی اند. حواستان باشد معمولاً یکی از بهترین روش ها در

این مورد رسم نمودار تابع است.

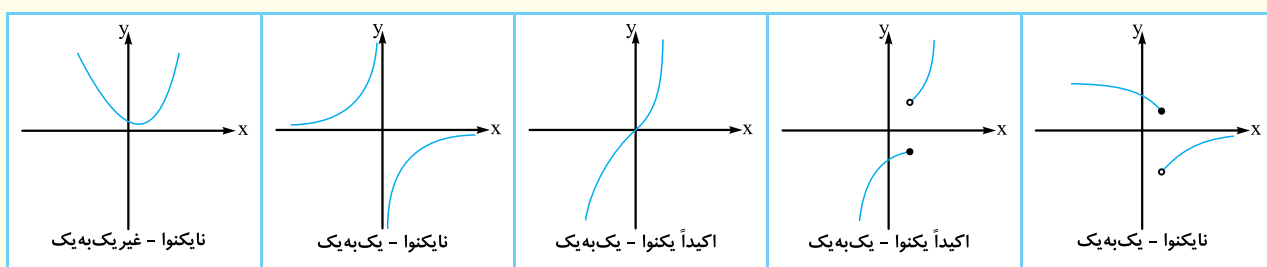
🔴 **مثال** تعیین کنید هر یک از تابع های زیر اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، صعودی، نزولی یا غیر یکنوا است.



پاسخ در الف با زیاد شدن x مقدار y زیاد می شود پس تابع اکیداً صعودی است. اگر پ را با الف مقایسه کنیم، پ هم مثل الف است فقط با این تفاوت که عرض دو نقطه به طول های a و b یکسان اند، پس پ صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست (فقط به خاطر همین دو نقطه که عرض برابر دارند). در ب هر کدام از شاخه ها اکیداً نزولی است اما تابع در کل غیریکنوا است. چون اگر دو نقطه نزدیک به a ، یکی در سمت چپ و یکی در سمت راست آن انتخاب کنیم، با افزایش x مقدار y هم زیاد می شود و هم کم، پس تابع نه صعودی است و نه نزولی. هم مثل ب است. اگرچه هر کدام از شاخه های منحنی صعودی اند، اما اگر دو نقطه یکی با طول منفی و دیگری با طول مثبت انتخاب کنیم عرض نقطه کم می شود. در ث چون یکی از شاخه ها صعودی و دیگری نزولی است پس تابع غیریکنوا است. ج یک تابع اکیداً صعودی است، چون مقدار y همواره در حرکت از چپ به راست زیاد می شود.

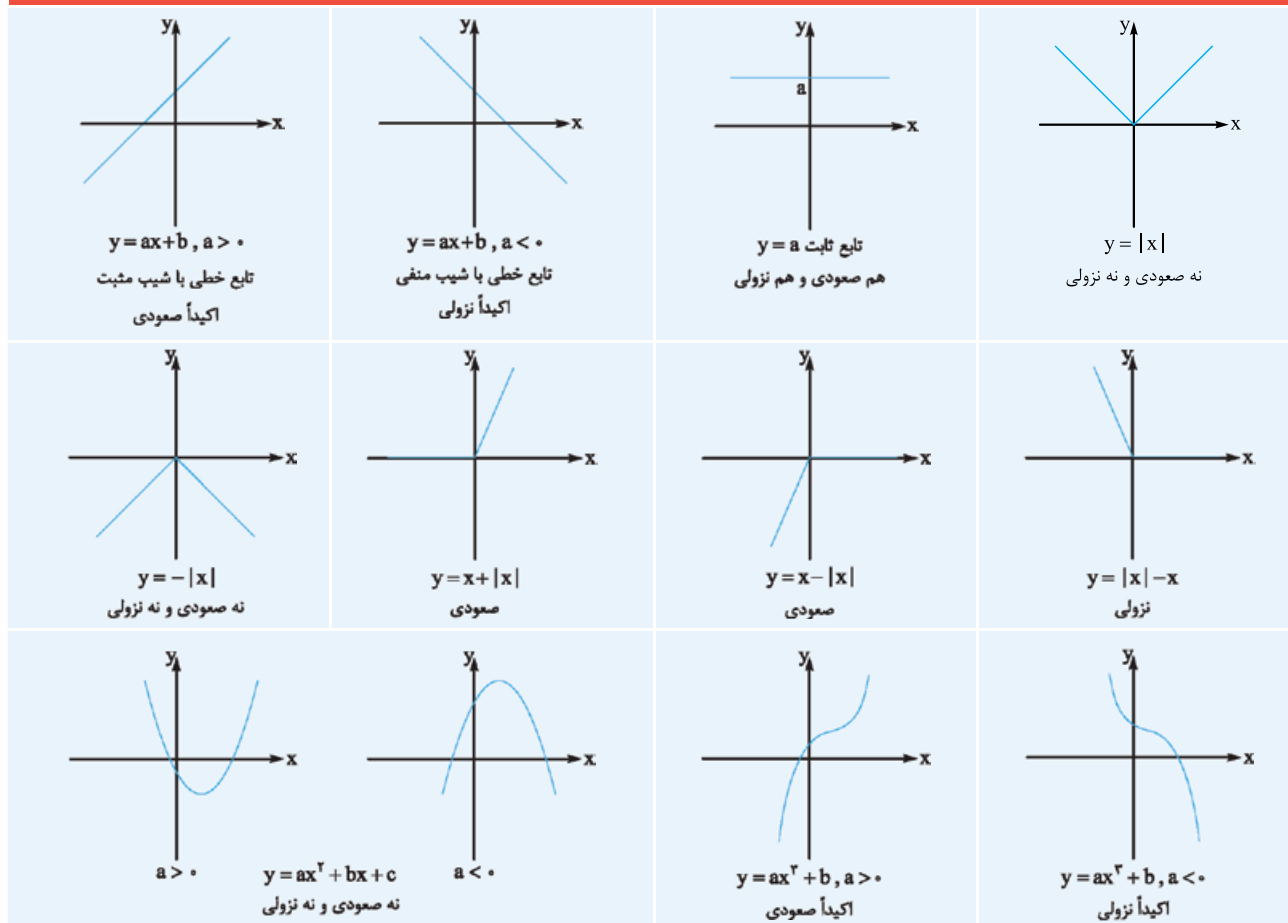
نکته چند نکته در مورد یکنوایی تابع:

- ۱ هر تابع اکیداً یکنوا حتماً یکنوا هم هست، اما عکس این موضوع درست نیست.
 - ۲ اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد حتماً یک به یک نیز هست اما باز هم عکس این موضوع درست نیست، یعنی ممکن است تابعی یک به یک باشد ولی یکنوا نباشد.
 - ۳ تعریف تابع یک به یک را پارسال دیدیم.
- تابع یک به یک: اگر در یک تابع به ازای هر مقدار y حداکثر یک مقدار x داشته باشیم تابع یک به یک است. اگر تابعی یک به یک باشد، هر خط موازی محور x ها (خط افقی) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

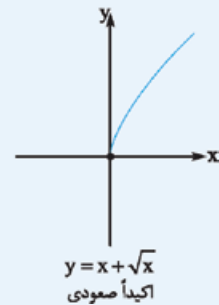
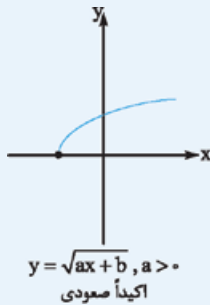
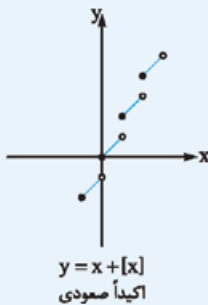
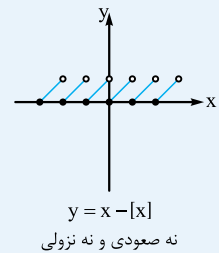
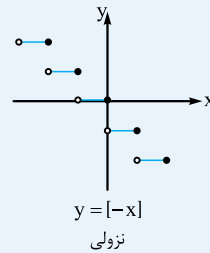
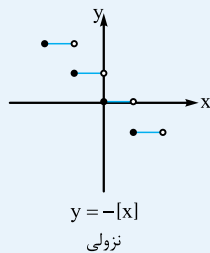
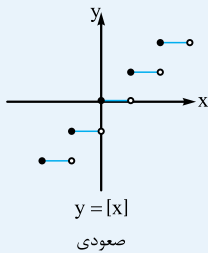


۴ اگر تابعی یک به یک نباشد حتماً اکیداً یکنوا نیست.

نمودار و یکنوایی توابع معروف و متداول



نمودار ویکنوایی توابع معروف و متداول



مثال درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید و در جاهای خالی کلمه‌ای بنویسید که عبارت درست باشد.

(نهایی دی ۹۷ و خرداد ۹۹)

الف تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

(نهایی خرداد ۹۸)

ب تابع $y = (x+1)^3$ در دامنه تعریف خود (صعودی - نزولی) است.

(نهایی شهریور ۹۸)

پ تابع $y = -x^2 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است.

(نهایی شهریور ۹۹)

ت توابع اکیداً یکنوا همواره هستند.

(نهایی شهریور ۱۴۰۰)

ث تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

پاسخ الف درست

ب (صعودی) نمودار تابع $y = (x+1)^3$ انتقال یافته نمودار تابع $y = x^3$ به اندازه ۱ واحد در راستای محور x ها به سمت چپ است؛ پس چون $y = x^3$ تابعی است صعودی، تابع $y = (x+1)^3$ هم صعودی است.

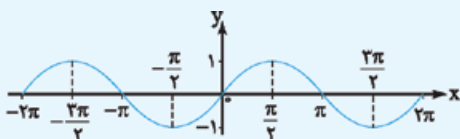
پ نادرست، تابع $y = -x^2 + 2$ انتقال یافته نمودار تابع $y = -x^2$ به اندازه ۲ واحد در راستای محور y ها است، پس چون تابع $y = -x^2$ نزولی است پس تابع $y = -x^2 + 2$ هم نزولی است.

ت یک به یک

ث نادرست، نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت است. پس این تابع در دامنه تعریفش اکیداً صعودی است.

مثال نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید و تعیین کنید تابع در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی است.

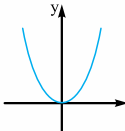
پاسخ رسم نمودار تابع $y = \sin x$ را از سال قبل یاد گرفتیم. (یادتان هست؟)، پس:



حالا جهت تغییرات تابع را در هر کدام از بازه‌های به طول $\frac{\pi}{4}$ (یعنی ربع دایره مثلثاتی) در یک جدول مشخص می‌کنیم:

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y = sin x	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	

محدود کردن دامنه تابع برای یکنواشدن تابع

در تابع‌هایی که یکنوا نیستند، می‌توانیم بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یکنوا است مشخص کنیم. مثلاً تابع $y = x^2$ با نمودار  یکنوا نیست، چون تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است؛ پس اگر تابع را به شکل $y = x^2, x \geq 0$ یا $y = x^2, x \leq 0$ تعریف کنیم، تابع‌هایی یکنوا خواهیم داشت.

؟ مثال تابع $f(x) = |x-1| + |x-3|$ را در بزرگ‌ترین دامنه‌هایی تعریف کنید که:

- الف** اکیداً نزولی باشد. **ب** اکیداً صعودی باشد. **پ** نزولی باشد. **ت** صعودی باشد. **ث** ثابت باشد.

✓ پاسخ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(با روش نقطه‌یابی)

حالا با توجه به نمودار، دامنه تابع را برای هر کدام از شرط‌ها می‌نویسیم:

توجه کنید که در بازه $[1, 3]$ تابع ثابت است، پس باید این بازه را برای حالت‌های نزولی و صعودی در نظر بگیریم.

الف $(-\infty, 1]$: اکیداً نزولی

ب $[3, +\infty)$: اکیداً صعودی

پ $(-\infty, 3]$: نزولی

ت $[1, +\infty)$: صعودی

ث $[1, 3]$: ثابت

روش نقطه‌یابی برای رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق

در تابع‌های شامل قدرمطلق که شامل x با توان ۱ هستند (چه در داخل و چه در خارج قدرمطلق) برای رسم نمودار تابع مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱ ریشه عبارت‌های داخل قدرمطلق را پیدا می‌کنیم.

۲ ریشه‌ها را به ترتیب می‌نویسیم.

۳ یک عدد کوچک‌تر از کوچک‌ترین ریشه و یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه در نظر می‌گیریم.

۴ مختصات تمام این نقاط (ریشه‌ها و دو عدد کوچک‌تر و بزرگ‌تر) را پیدا می‌کنیم.

۵ نقاط را روی دستگاه مختصات مشخص و به ترتیب از چپ به راست به هم وصل می‌کنیم.

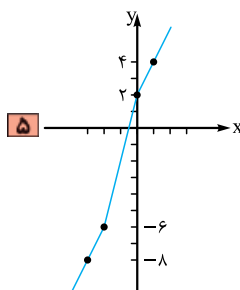
به عنوان مثال بیایید این ۵ مرحله را در مورد نمودار تابع $y = 2x - |x| + |x+2|$ انجام دهیم:

۱ $x = 0, x = -2 \Rightarrow$ ریشه‌ها

۲ $-2, 0$

۳ $-3, -2, 0, 1$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ -8 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$



؟ مثال اگر تابع $f(x) = x + |x-1| + |x-2|$ در بازه $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، حداقل مقدار a را پیدا کنید.

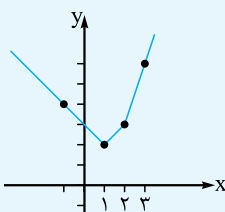
✓ پاسخ برای بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع، نمودار آن را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

$$y = x + |x-1| + |x-2|$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 1, x = 2$ ریشه‌ها

حالا با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی باشد بازه $[1, +\infty)$ است؛ پس حداقل مقدار a برابر ۱ است.





درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید و در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید تا گزاره درست باشد.

۲۴- اگر برای هر x_1 و x_2 متعلق به دامنه f ، $x_1 < x_2$ و در نتیجه $f(x_1) < f(x_2)$ باشد؛ تابع f صعودی است.

۲۵- تابعی وجود ندارد که هم صعودی باشد و هم نزولی.

۲۶- اگر $f(x)$ یک تابع یک به یک باشد؛ آن گاه f حتماً یکنوا است.

۲۷- اگر تابعی یک به یک باشد؛ آن گاه اکیداً یکنوا است.

۲۸- تابع $f(x) = x^2$ ، تابع اکیداً صعودی است.

۲۹- تابع $y = 7$ در دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است.

۳۰- بی شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.

۳۱- تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست.

۳۲- تابع هم صعودی و هم نزولی است.

۳۳- تابع اکیداً یکنوا حتماً است.

۳۴- تابع $f(x) = 2^{2x+1} - 1$ در دامنه تعریف خود است.

۳۵- تابع $f(x) = \log_2(x^3 + 1) + 2$ در دامنه تعریف خود است. ۳۶- تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ در دامنه تعریفش است.

به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.

از رسم غافل نشوید! در سؤال‌های زیر از رسم نمودار برای جواب دادن به سؤال استفاده می‌کنیم.

■ نمودار هر کدام از تابع‌های زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید تابع در کدام بازه‌ها صعودی یا نزولی است و آیا تابع در کل یکنوا (یا اکیداً یکنوا) هست یا نه؟

دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ x+2 & 1 < x \end{cases} \quad -38 \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases} \quad -37$$

$$k(x) = \sqrt{x-2} + 1 \quad -40 \quad h(x) = x^2 - 2x + 2 \quad -39$$

$$p(x) = 2 \sin x - 1 \quad [0, 2\pi] \quad -42 \quad (180^\circ) \quad t(x) = \frac{x+2}{x} \quad -41 \quad (180^\circ)$$

■ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید و بگویید چگونه‌اند؟ صعودی، نزولی، اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا غیریکنوا؟

$$g(x) = x - |x| \quad -44 \quad f(x) = x + |x| \quad -43$$

$$k(x) = x + [x] \quad -46 \quad (180^\circ) \quad h(x) = x - [x] \quad -45 \quad (180^\circ)$$

۴۷- نمودار تابع $y = -x^3 + 2$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید. (نهایی شهریور ۱۴۰۳)

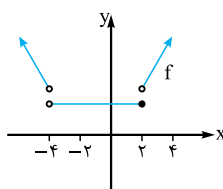
۴۸- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کرده و سپس تعیین کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی و یا ثابت است.

۴۹- تابع $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & x < -3 \\ 4 & -3 \leq x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$ را رسم کرده و بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن نزولی است را مشخص کنید.

۵۰- با توجه به نمودار تابع f ، در جدول زیر برای هر یک از قسمت‌های ستون «A» قسمت صحیح از ستون «B» را انتخاب کنید. (یکی از قسمت‌های ستون «B» اضافه است.)

(نهایی خرداد ۱۴۰۴)

B	A
(۱) $(-\infty, -4)$	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است
(۲) $(2, +\infty)$	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.
(۳) $(-1, +\infty)$	پ) تابع در این بازه ثابت است.
(۴) $(-4, 2]$	



۵۱- نمودار تابعی را رسم کنید که در بازه $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد اما در $\mathbb{R}$ نایکنا باشد.





کدام یک، یک افزاز از مجموعه داده شده است؟

- ۹۱۷- مجموعه اعداد مرکب، مجموعه اعداد اول → افزاز به مجموعه اعداد طبیعی
- ۹۱۸- مجموعه اعداد گویا، مجموعه اعداد صحیح → افزاز به مجموعه اعداد حقیقی
- ۹۱۹- مجموعه اعداد صحیح منفی، مجموعه اعداد حسابی → افزاز به مجموعه اعداد صحیح
- ۹۲۰- مجموعه کارکنان خدمات، مجموعه کارکنان اداری و دفتری، مجموعه معلم‌ها → افزاز به مجموعه کارکنان مدرسه
- ۹۲۱- مجموعه شاعران شعر نو، مجموعه شاعران شعر کلاسیک → افزاز به مجموعه شاعران ایرانی

گزاره زیر را کامل کنید.

۹۲۲- اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \dots\dots\dots$ باشند، آن‌گاه A, B, C یک افزاز روی مجموعه اعداد طبیعی است. (نهایی خرداد ۱۴۰۲)

به سؤال‌های زیر پاسخ کامل دهید.

۹۲۳- اگر $A = \{a, b, c\}$ باشد تمام افزازهای مجموعه A را بنویسید.

۹۲۴- کدام جمله درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

الف) اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه‌ای S باشند و $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$ ، این مجموعه‌ها یک افزاز روی S درست کرده‌اند.

ب) هر دو پیشامد یک افزاز روی مجموعه S ، با هم ناسازگارند.

پ) اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ یک افزاز روی S باشند ممکن است هیچ کدام از این پیشامدها رخ ندهند.

ت) قانون احتمال کل: اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ یک افزاز روی S باشند و B پیشامد دلخواهی از S باشد داریم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

از نمودار درختی غافل نشوید!

۹۲۵- جمعیت یک شهر از ۳۰ درصد کودک و نوجوان، ۴۰ درصد بزرگسال و ۳۰ درصد سالمند تشکیل شده است. اگر این سه دسته به ترتیب با احتمال ۵ درصد، ۴ درصد و ۲ درصد دارای یک زن خوب باشند و یک نفر به تصادف از این شهر انتخاب کنیم با کدام احتمال زن خوب دارد؟

۹۲۶- در ظرف A ، ۵ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در ظرف B ، ۴ مهره آبی و ۸ مهره قرمز داریم. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره به تصادف از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال سبز است؟

۹۲۷- در یک جعبه ۳ میکروسکوپ از نوع A و ۲ تا از نوع B وجود دارد. احتمال این که عمر آن‌ها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A ، $\frac{1}{4}$ و برای نوع B ، $\frac{1}{6}$ است. به تصادف یک میکروسکوپ از جعبه بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این میکروسکوپ بیش از ۱۰ سال است؟ (نهایی دی ۱۴۰۴)

۹۲۸- فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این دو گروه به ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟ (نهایی دی ۹۸)

۹۲۹- فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۵ درصد مرد و ۵۵ درصد زن باشد و شیوع یک بیماری و ویروسی به ترتیب در این دو دسته ۴ درصد و ۶ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟ (نهایی دی ۱۴۰۲)

۹۳۰- احتمال انتخاب رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی برای یک دانش آموز سال دهم به ترتیب $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ است. احتمال قبولی در آزمون ورودی دانشگاه برای این سه رشته به ترتیب $\frac{9}{10}$ ، $\frac{2}{5}$ و $\frac{5}{9}$ است. احتمال قبول شدن در آزمون ورودی دانشگاه برای یک دانش آموز سال دهم که به تصادف یکی از این سه رشته را انتخاب می‌کند چه قدر است؟

۹۳۱- مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش آموز دارد. ۳۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند، اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم:

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟

ب) با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟

۹۳۲- سه درصد از افراد بالای ۴۰ سال از یک جامعه و یک درصد از سایر افراد آن جامعه به نوعی بیماری خاص مبتلا هستند. اگر ۳۰ درصد افراد این جامعه بالای ۴۰ سال داشته باشند، چند درصد افراد این جامعه به بیماری مذکور مبتلا هستند؟ (کتاب راهنمای معلم)

۹۳۳- در یک مدرسه دوره دوم متوسطه نصف دانش آموزان پایه دهم، یک سوم آن‌ها پایه یازدهم و یک ششم آن‌ها پایه دوازدهم هستند. اگر رشته ورزشی ۳۰ درصد از دانش آموزان پایه دهم، ۲۵ درصد از دانش آموزان پایه یازدهم و ۲۰ درصد از دانش آموزان پایه دوازدهم فوتبال باشد و یک نفر به تصادف از دانش آموزان این مدرسه انتخاب شود، با چه احتمالی رشته ورزشی فرد مورد نظر فوتبال است؟ (کتاب راهنمای معلم)

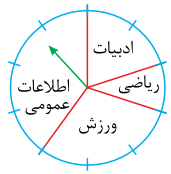


★ ۹۳۴- دو جعبه داریم که در اولی ۴ مهره سفید و ۸ مهره مشکی و در دومی ۶ مهره سفید و ۲ مهره مشکی قرار دارد. اگر تمام مهره‌های هر دو جعبه را در یک جعبه سوم بریزیم و یک مهره به تصادف از جعبه سوم خارج کنیم:

(کتاب راهنمای معلم)

الف) با چه احتمالی مهره خارج شده قبلاً در جعبه اول بوده و با چه احتمالی قبلاً در جعبه دوم بوده است؟

ب) با توجه به قسمت (الف) و قانون احتمال کل، با چه احتمالی مهره مورد نظر سفید است؟



★ ۹۳۵- بابک در یک مسابقه که سؤال هایش ممکن است در حوزه ریاضی، ادبیات، اطلاعات عمومی یا ورزش باشد شرکت کرده است. قرار است ابتدا عقربه چرخان شکل روبه‌رو به تصادف در یکی از ناحیه‌های مشخص شده قرار گیرد تا نوع سؤال‌ها مشخص شود. اگر احتمال

برنده شدن بابک در سؤال‌های ریاضی ۵۰ درصد، در سؤال‌های ادبیات ۶۰ درصد، در سؤال‌های اطلاعات عمومی ۴۰ درصد و در سؤال‌های ورزشی ۸۰ درصد باشد، با کدام احتمال بابک در این مسابقه برنده می‌شود؟

★ ۹۳۶- دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

★ ۹۳۷- دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۶ مهره زرد و ظرف دوم شامل ۴ مهره قرمز و ۷ مهره زرد است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب می‌کنیم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره زرد است؟

★ ۹۳۸- سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره آبی و ظرف سوم شامل ۶ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که مهره آبی باشد، چه قدر است؟

★ ۹۳۹- سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۵ مهره قرار دارد که ۳ تا از آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم ۱۲ مهره داریم که ۶ تا از آن‌ها قرمز است. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

★ ۹۴۰- سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و ۳ مهره آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟

★ ۹۴۱- چهار ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۶ تا از آن‌ها قرمز است. در ظرفی دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تا از آن‌ها قرمز هستند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که مهره انتخابی قرمز باشد، چه قدر است؟

★ ۹۴۲- دو جعبه داریم، در یکی ۸ گوشی موبایل داریم که ۲ تا از آن‌ها معیوب‌اند و در دیگری ۸۸ گوشی موبایل داریم که ۴ تا از آن‌ها معیوب‌اند. اگر یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کنیم و یک گوشی از آن خارج کنیم، احتمال این‌که این گوشی سالم باشد چه قدر است؟

★ ۹۴۳- دو جعبه یکسان داریم. درون یکی از آن‌ها ۱۰ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آن‌ها معیوب است و درون جعبه دیگر ۲۰ لامپ قرار دارد که ۵ تا از آن‌ها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن به تصادف بیرون می‌آوریم. چه قدر احتمال دارد لامپ انتخابی سالم باشد؟

★ ۹۴۴- دو جعبه داریم. درون یکی از آن‌ها ۹ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب قرار دارد و درون جعبه دیگر ۱۵ لامپ قرار دارد که ۵ تا از آن‌ها معیوب است. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چه قدر احتمال دارد لامپ مورد نظر سالم باشد؟

★ ۹۴۵- یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر «پشت» بیاید، ۳ سکه دیگر را هم پرتاب می‌کنیم و اگر «رو» بیاید، ۲ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً دو سکه «رو» ظاهر شود چه قدر است؟

★ ۹۴۶- یک سکه را پرتاب می‌کنیم؛ اگر رو بیاید آزمایش را تمام می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چه قدر است؟

(نهایی دی ۹۷)



پائس خہاے تشریحی



پاسخ‌نامه تشریحی فصل اول



۱ درست است، دامنه و برد توابع چندجمله‌ای درجه فرد برابر $\mathbb{R}$ است.

۲ درست

۳ نادرست، مثلاً برد تابع $y = x^2$ برابر $[0, +\infty)$ است.

۴ درست

۵ نادرست، تابع ثابت $f(x) = 0$ چندجمله‌ای نیست.

۶ نادرست، تابع $f(x) = k$ با شرط $k \neq 0$ یک تابع چندجمله‌ای است.

۷ درست

۸ نادرست، چون اگر ضابطه تابع را ساده کنیم به یک تابع درجه دوم

$$f(x) = 8(x-1)^3 - (2x+1)^3 = -36x^2 + 18x - 9$$

می‌رسیم:

۹ نادرست آره

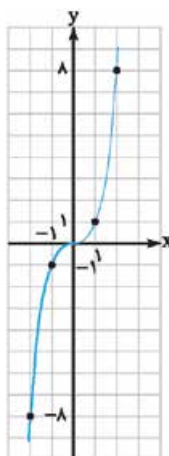
۱۰ درست

۱۱ درست، چون با ساده کردن ضابطه داریم:

$$f(x) = x \sin^2 x + 2x + x \cos^2 x$$

$$= x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2x = 3x$$

اول نمودار تابع $y = x^3$ را رسم می‌کنیم و بعد کارهایی را که باید روی نمودار x^3 انجام دهیم تا به نمودار تابع‌های داده شده برسیم مشخص می‌کنیم:



$$y = x^3$$



۱



۲

$$y = (x+1)^3 - 1$$

۱ انتقال (-1) واحد در

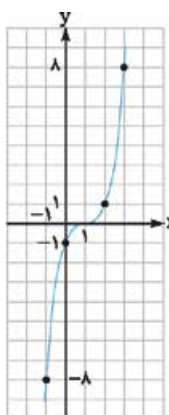
راستای محور xها

۲ و انتقال (-1) واحد در

راستای محور yها

$$y = (x-1)^3$$

انتقال (+1) واحد در راستای محور xها

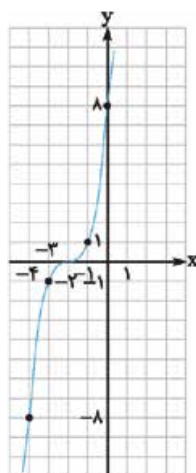


$$y = (-x+2)^3 + 1 \quad 14$$

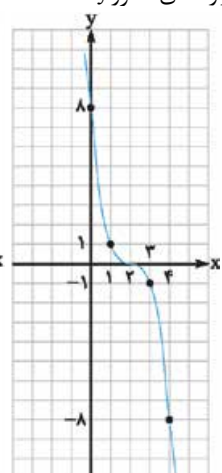
۱ انتقال (-2) واحد در راستای محور xها

۲ تقارن نسبت به محور yها

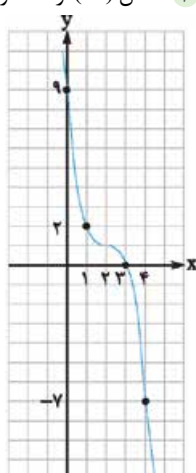
۳ انتقال (+1) واحد در راستای محور yها



۱



۲



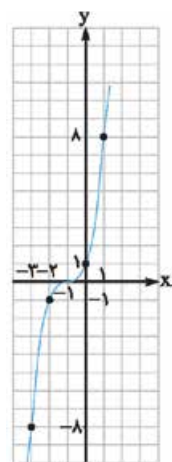
۳

$$y = \left(-\frac{x}{2} + 1\right)^3 \quad 15$$

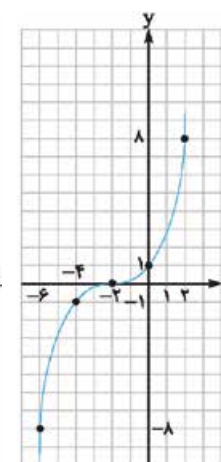
۱ انتقال (-1) واحد در راستای محور xها

۲ انبساط با نسبت 2 در راستای محور xها

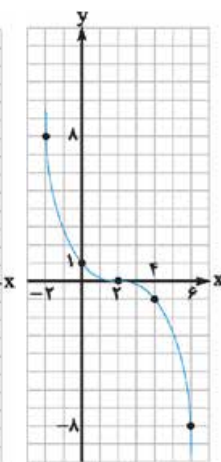
۳ تقارن نسبت به محور yها



۱



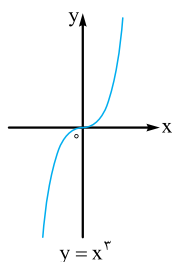
۲



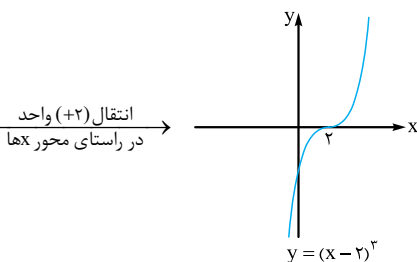
۳

۱۶ با توجه به ضابطه تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ ، تغییرات را روی نمودار

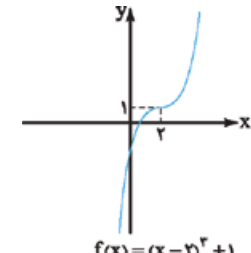
تابع $y = x^3$ انجام می‌دهیم:



$$y = x^3$$

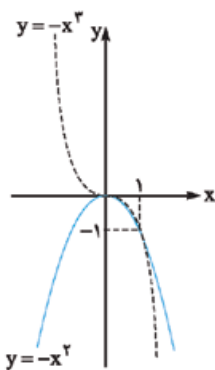


$$y = (x-2)^3$$



$$f(x) = (x-2)^3 + 1$$

انتقال (+1) واحد در راستای محور yها



۱۹ اگر نمودار هر دو تابع را رسم کنیم می‌بینیم که:
در بازه $x < 0$ نمودار $y = -x^3$ بالای نمودار $y = -x^2$ است.
در بازه $0 < x < 1$ و $x < 0$ نمودار $y = -x^3$ بالای نمودار $y = -x^2$ است.
در بازه $x > 1$ نمودار $y = -x^3$ پایین نمودار $y = -x^2$ است.
نمودار دو تابع در $x = 0$ و $x = 1$ مشترک‌اند (عرض‌های مساوی دارند).

۲۰ انتقال‌های گفته‌شده را انجام می‌دهیم:

$$f(x) = x^3 \xrightarrow[\text{واحد به سمت چپ}]{x \rightarrow x+2} y_1 = (x+2)^3$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به سمت پایین}]{y \rightarrow y-2} y_2 = (x+2)^3 - 2$$

حالا محل برخورد $f(x) = x^3$ و $y_2 = (x+2)^3 - 2$ را پیدا می‌کنیم:

$$(x+2)^3 - 2 = x^3 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 2 = x^3$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 12x + 6 = 0 \xrightarrow{\div 6} x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

پس مختصات نقطه برخورد $(-1, -1)$ است.

۲۱ اول انتقال‌های داده‌شده را انجام می‌دهیم:

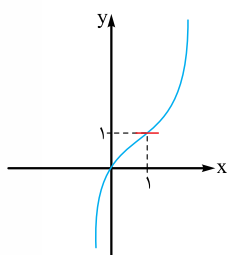
$$f(x) = x^3 \xrightarrow[\text{سمت چپ}]{\text{واحد به } k} y_1 = (x+2)^3 \xrightarrow[\text{سمت پایین}]{\text{واحد به } k} y_2 = (x+2)^3 - k$$

حالا دو نمودار باید در نقطه‌ای به عرض -1 مشترک باشند:

$$f(x) = x^3 \xrightarrow{y=-1} -1 = x^3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, -1)$$

پس نقطه $(-1, -1)$ باید روی نمودار $y = (x+2)^3 - k$ باشد:

$$-1 = (-1+2)^3 - k \Rightarrow -1 = 1 - k \Rightarrow k = 2$$



۲۲ با توجه به نمودار مشخص است که تابع $f(x) = a(x+b)^3 + c$ انتقال یافته تابع $y = ax^3$ به اندازه ۱ واحد در راستای محور xها و ۱ واحد در راستای محور yها است؛ پس باید به شکل $f(x) = a(x-1)^3 + 1$ باشد، یعنی $b = -1$ و $c = 1$. از طرف دیگر نمودار از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس:

$$(0,0) \Rightarrow 0 = a(0-1)^3 + 1 \Rightarrow 0 = -a + 1 \Rightarrow a = 1$$

حالا ضابطه تابع $g(x) = a(x-b)^3 + c$ را می‌نویسیم و با محور xها قطع می‌دهیم:

$$g(x) = (x+1)^3 + 1 \xrightarrow{y=0} (x+1)^3 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^3 = -1 \Rightarrow x+1 = -1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \text{نقطه برخورد } (-2, 0)$$

۲۳ نمودار داده‌شده مربوط به تابع

$y = a(x-x_1)^3$ است. چون نمودار شبیه نمودار تابع $y = x^3$ است که با تبدیل تقارن نسبت به محور xها و انتقال به نمودار داده‌شده تبدیل شده است، پس با توجه به نقطه $(1, 0)$ باید ضابطه‌اش به شکل $y = a(x-1)^3$ باشد. حالا چون نقطه $(0, 2)$ روی نمودار قرار دارد، پس:

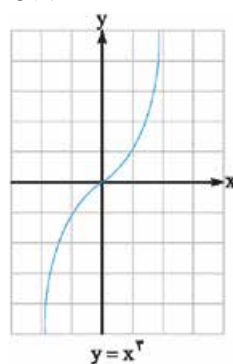
$$(0,2) \Rightarrow 2 = a(0-1)^3 \Rightarrow a = -2$$

پس:

پس داریم $f(x) = -2(x-1)^3$ ، حالا $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم:

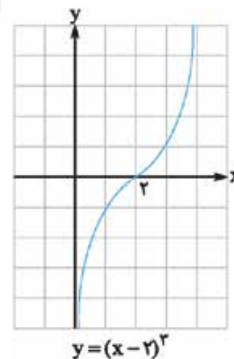
$$f(-1) = -2(-1-1)^3 = (-2)(-8) = 16$$

۱۷ برای رسم نمودار تابع $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 11$ ، ابتدا ضابطه تابع $g(x)$ را با استفاده از اتحاد $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ساده می‌کنیم:

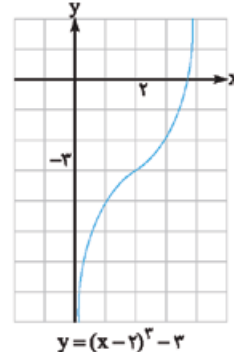


حالا نمودار تابع $g(x) = (x-2)^3 - 3$ را با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$ رسم می‌کنیم:

انتقال به اندازه $(+2)$ واحد در راستای محور xها



انتقال به اندازه (-3) واحد در راستای محور yها



۱۸ در شکل (الف) مبدأ مختصات به نقطه $(1, 2)$ منتقل شده است؛ پس باید تابع را ۱ واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم:

$$y = x^3 \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{1} y = (x-1)^3 \xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{2} y = (x-1)^3 + 2$$

در شکل (ب) مبدأ مختصات به نقطه $(-2, 1)$ منتقل شده است؛ پس باید تابع $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:

$$y = x^3 \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{2} y = (x+2)^3 \xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{1} y = (x+2)^3 + 1$$

در شکل (پ) اولاً نمودار شبیه نمودار $y = -x^3$ است و ثانیاً مبدأ مختصات به نقطه $(-1, 2)$ منتقل شده است؛ پس باید تابع $y = -x^3$ را ۱ واحد به سمت چپ و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم:

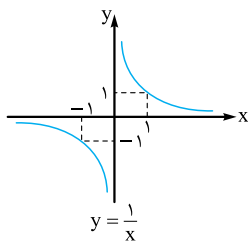
$$y = -x^3 \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{1} y = -(x+1)^3$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{2} y = -(x+1)^3 + 2$$

در شکل (ت) اولاً نمودار شبیه نمودار تابع $y = -x^3$ است و ثانیاً مبدأ مختصات به نقطه $(3, -1)$ منتقل شده است؛ پس باید تابع $y = -x^3$ را ۳ واحد به سمت راست و ۱ واحد به پایین انتقال دهیم:

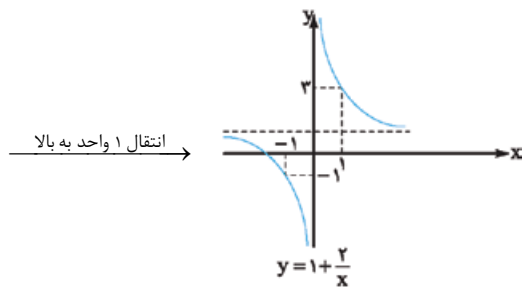
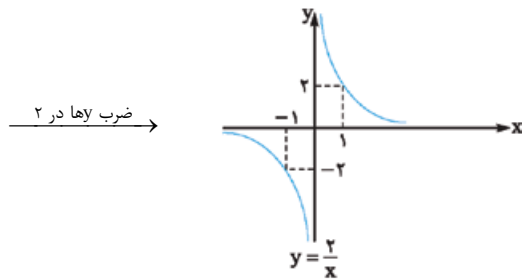
$$y = -x^3 \xrightarrow[\text{واحد به سمت راست}]{3} y = -(x-3)^3$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به پایین}]{1} y = -(x-3)^3 - 1$$

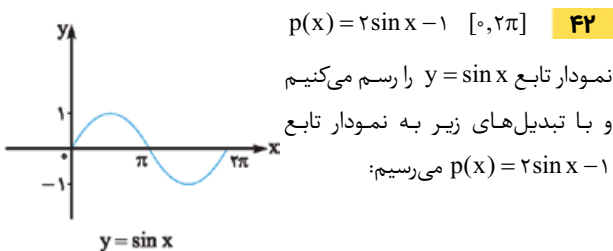


$$t(x) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x} \quad \text{۴۱}$$

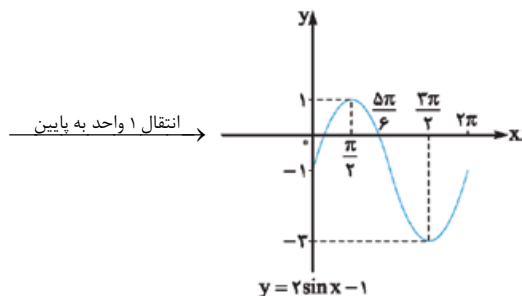
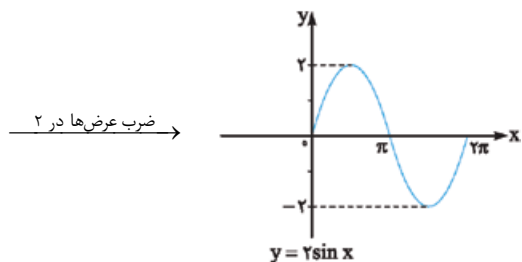
نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را بلدیم. با انجام تبدیل‌های زیر، نمودار تابع $t(x) = 1 + \frac{2}{x}$ را رسم می‌کنیم.



حالا با توجه به نمودار، تابع در کل غیریکنوا است و در بازه $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است. دامنه برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ و برد برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است.



نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم و با تبدیل‌های زیر به نمودار تابع $p(x) = 2 \sin x - 1$ می‌رسیم:



با توجه به نمودار، تابع غیریکنوا است و در بازه‌های $[0, \frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ اکیداً صعودی و در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است. دامنه تابع با توجه به بازه داده شده برابر $[0, 2\pi]$ و برد تابع برابر بازه $[-3, 1]$ است.

۲۴ درست، گزاره داده شده تعریف تابع اکیداً صعودی است، پس تابع صعودی نیز هست.

۲۵ نادرست، تابع ثابت هم صعودی است و هم نزولی.

۲۶ نادرست، مثلاً $y = \frac{1}{x}$ یک به یک است اما نه صعودی است و نه نزولی.

۲۷ نادرست، مثلاً تابع x یک به یک است، اما یکنوا نیست.

۲۸ درست، چون ثابت است.

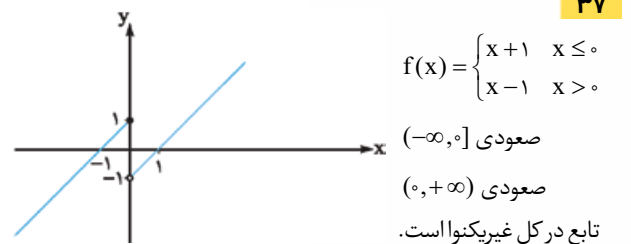
۳۰ درست،

۳۲ ثابت

۳۴ اکیداً صعودی

۳۶ اکیداً نزولی

۳۷



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$$

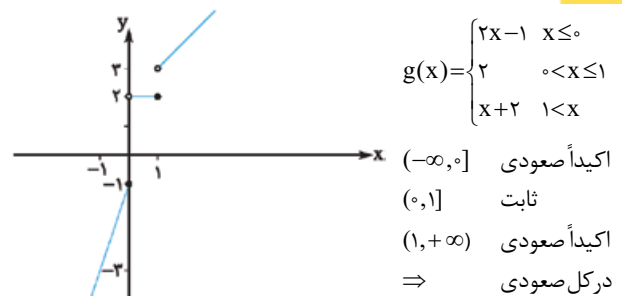
صعودی $(-\infty, 0]$

صعودی $(0, +\infty)$

تابع در کل غیریکنوا است.

$\mathbb{R} = \text{برد}$ ، $\mathbb{R} = \text{دامنه}$

۳۸



$$g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ x+2 & 1 < x \end{cases}$$

اکیداً صعودی $(-\infty, 0]$

ثابت $(0, 1]$

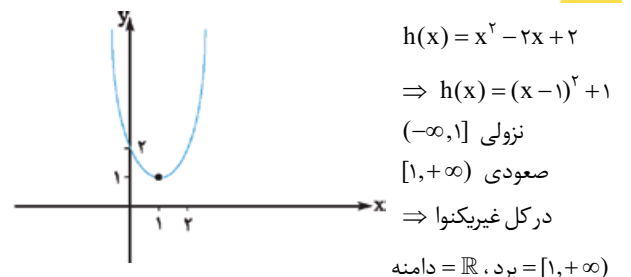
اکیداً صعودی $(1, +\infty)$

$\Rightarrow$ در کل صعودی

دامنه $= \mathbb{R}$

برد $= (-\infty, -1] \cup \{2\} \cup (3, +\infty)$

۳۹



$$h(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$\Rightarrow h(x) = (x-1)^2 + 1$$

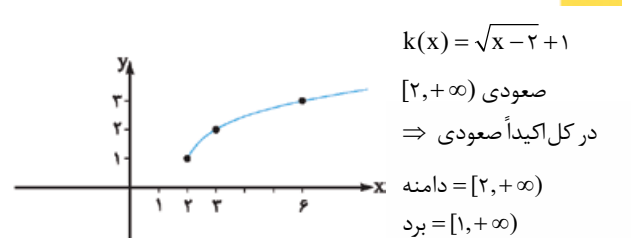
نزولی $(-\infty, 1]$

صعودی $[1, +\infty)$

در کل غیریکنوا $\Rightarrow$

دامنه $= \mathbb{R}$ ، برد $= [1, +\infty)$

۴۰



$$k(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

صعودی $[2, +\infty)$

$\Rightarrow$ در کل اکیداً صعودی

دامنه $= [2, +\infty)$

برد $= [1, +\infty)$