فیزیک ۳. دوازدهم

رشته تجربی–دورهٔ دوم متوسطه

مؤلف: غلامعلی محمودزاده

فهرست

به نام خدا

مقدمه

منت خدای را عزّوجل که توفیق یافتم به دنبال تألیف کتاب‌های فیزیک «۱- دهم» و «۲- یازدهم»، کتاب فیزیک «۳- دوازدهم» رشتهٔ تجربی را تألیف کنم.
با سلام خدمت دانش‌آموزان، داوطلبان کنکورهای سراسری و دبیران محترم آموزش و پرورش.
با توجه به کتاب درسی فیزیک «۳- دوازدهم» رشتهٔ تجربی، این کتاب شامل چهار فصل با عنوان‌های زیر تألیف شده است:
۱) فصل ۱، حرکت‌شناسی
۲) فصل ۲، دینامیک
۳) فصل ۳، حرکت هماهنگ ساده ـ موج
۴) فصل ۴، آشنایی با فیزیک اتمی و هسته‌ای
- هر یک از این فصل‌ها شامل مطلب‌های زیر است:
الف) بیان درس به طور کامل و مفهومی و مکمل کتاب درسی به طوری که مخاطب را برای موفقیّت در آزمون‌های تشریحی دبیرستان و کنکورهای سراسری آماده کند.
ب) بیان درس با مثال‌های حل شدهٔ گوناگون همراه است.
پ) هر فصل با پرسش‌های چهارگزینه‌ای تألیفی و نیز پرسش‌های کنکورهای گذشتهٔ مربوط به عنوان‌های کتاب و حل تشریحی آن‌ها، کامل شده است.
ت) در هر جا که لازم است تا خواننده مطلبی فراتر از کتاب درسی بیاموزد، با عنوان «بیش‌تر بدانید» مطلب‌هایی آورده شده است. هرچند که از مطلب‌های بیش‌تر بدانید، پرسشی در آزمون‌های مختلف طرح نمی‌شود، دانستن آن‌ها شما را در پاسخ سریع به تست‌ها توانمند می‌کند. توجه کنید که در آزمون‌های تستی، مشخص کردن گزینهٔ درست لازم است و از شما راه‌حل خواسته نمی‌شود.

پیشنهاد

۱) ابتدا کتاب درسی را مطالعه کنید و به تمرین‌های آن، پاسخ کتبی دهید.
۲) بعد از هر فصل از کتاب درسی، همان فصل از این کتاب را مطالعه کنید.
۳) مثال‌های حل شدهٔ درون متن و پرسش‌های آخر فصل را تا آن‌جا که ممکن است، خودتان حل کنید و با پاسخ کتاب مقایسه کنید.
۴) به پیروی از ضرب‌المثل «کار نیکو کردن از پُر کردن است» پیشنهادهای بالا را بعد از یک هفته و سپس یک ماه بعد و درنهایت قبل از هر آزمونی، تکرار کنید.

سخن آخر

بر خود واجب می‌دانم تا از کسانی که مرا در آماده‌سازی کتاب یاری دادند، تشکر کنم:
- از یار دیرین، جناب آقای دهقانی مدیر عامل شرکت آموزشی و فرهنگی مبتکران به خاطر همراهی مداومشان
- از آقای مبین مدیر واحد حروف‌چینی و گرافیک به خاطر سرپرستی در تایپ و صفحه‌آرایی کتاب
- از خانم ملیحه محمدی آندرس به خاطر پشتکار و همراهی صبورانه در تایپ و صفحه‌آرایی کتاب
- از خانم نرگس سربندی و مینا غلام احمدی به خاطر رسم شکل‌ها و خانم سمانه ایمان‌فرد به خاطر طراحی جلد کتاب
- از خانم کبری مرادی مدیر واحد تولید و همکاران ایشان به خاطر فراهم کردن زمینهٔ چاپ کتاب
- از آقای میرحمید خاتمی مدیر واحد پخش و همکاران ایشان به خاطر معرفی و پخش کتاب

با سپاس بیکران از رحمت‌های بی‌پایان خداوندی
غلامعلی محمودزاده ۱۳۹۸

فصل ۱

حرکت شناسی

کارل لوییس دونده افسانه‌ای آمریکایی دارندهٔ ۹ مدال طلای المپیک و ۱۰ مدال طـلای مسـابقه‌هـای جهـانی یکـی از پرافتخـارترین ورزشکاران دو و میدانی است ....

او از جملهٔ اولین دوندگانی است که ۱۰۰ متر را زیر ۱۰ ثانیه دویده است ...

در یک مسابقه ۱۰۰ متر؛ او ابتدا با شتاب ثابت تا رسیدن به حداکثر تندی ۱۲ متر بر ثانیه می‌دود ... سپس این تندی را تا خـط پایـان حفـظ می‌کند ... اگر تندی متوسط او در کل مسیر ۱۰/۲ متر بر ثانیه باشد؛ مدت زمان شتاب گرفتن او چند ثانیه بوده است؟

این یک مسأله حرکت‌شناسی است ...

فصل اول. حرکت شناسی

حرکت

در این فصل، ابتدا حرکت جسمی را بررسی می‌کنیم که روی خط راست و در یک جهت حرکت می‌کند. با مفهوم‌های حرکت «مانند مسافت پیموده شده، جابه‌جایی ـ تندی متوسط ـ سرعت متوسط، سرعت لحظه‌ای، شتاب متوسط و لحظه‌ای. پیش‌تر و در دورهٔ اول متوسطه آشنا شده‌اید. در این‌جا ابتدا آن‌ها را یادآوری کرده و تا آن‌جا که ممکن است، با شرح کامل‌تر و ریاضی بیش‌تر بررسی می‌کنیم. تمام جسم‌ها، کوچک یا بزرگ، نزدیک یا دور، همه در حال حرکت‌اند. حتی جسم‌هایی که ساکن به نظر می‌رسند مانند ساختمان‌های اطراف یا اتومبیل متوقف در کنار خیابان، ستاره‌هایی که به علت دوری از ما به صورت نقطهٔ روشنی در گوشهٔ آسمان دیده می‌شوند، یا حتی آن‌ها که به علت دوری زیاد از ما با چشم غیرمسلح دیده نمی‌شوند و باید با تلسکوپ آن‌ها را دید، یا اتم‌های سازندهٔ این صفحهٔ کاغذ یا ذره‌های سازندهٔ این اتم‌ها که به علت کوچکی دیده نمی‌شوند ...، شک نکنید که همه و همه در حرکتند. جملهٔ زیر که منسوب به اینشتین است، بیانگر همین واقعیت است:

«هیچ اتفاقی رخ نمی‌دهد، مگر آن‌که قبل از آن حرکت یا حرکت‌هایی رخ دهد.»

پرسش ۱

آیا می‌توانید جسم‌های ساکنی را نام ببرید؟ یک مثال کافی است.

حرکت بعضی جسم‌ها ساده و برخی پیچیده‌اند. حرکت قطعه یخ کوچکی که روی سطح افقی صاف و بدون اصطکاکی سُر می‌خورد و بدون آن که به دور خود بپیچد یا تغییر شکلی بدهد، روی خط راست پیش می‌رود، حرکت ساده‌ای است. برگ خشک شده‌ای که از درخت جدا می‌شود و در باد می‌پیچد، شکلش تغییر می‌کند، بالا و پایین رفته و به چپ و راست می‌رود، حرکت پیچیده‌ای را انجام می‌دهد تا به زمین برسد.

پرسش ۲

آیا حرکت برگ خشک دیگری که از همین درخت جدا می‌شود، مانند حرکت برگ قبلی است؟

پرسش ۳

با فرض آن‌که بتوان حرکت این برگ را از لحظهٔ جدا شدن از درخت تا رسیدن به زمین بررسی کرد، چه نتیجه‌ای عاید ما می‌شود.

پرسش ۴

موجود هوشمندی را فرض کنید که در کهکشانی بسیار دور از کهکشان ما (یعنی کهکشان راه شیری) به زمین نگاه می‌کند. او برای زمین چه حرکت‌هایی را مشاهده می‌کند؟ تحقیق کنید و نام این حرکت‌ها را بنویسید.

در این فصل:

الف حرکت جسم‌هایی را بررسی می‌کنیم که شکل ثابتی دارند و حرکت، شکل آن‌ها را تغییر نمی‌دهد. به این جسم‌ها «جسم سخت» (جسم صُلب) می‌گوییم. حرکت ذره‌های جسم سخت، یکسان است. به همین دلیل، جسم را ذره‌ای در نظر می‌گیریم که جرم آن برابر جرم کل جسم

باشد. به این روش، «الگوی ذره‌ای» می‌گوییم.

پرسش ۵

آیا در حرکت زمین به دور خورشید (حرکت انتقالی زمین) می‌توان از الگوی ذره‌ای استفاده کرد؟ در حرکت به دور محورش (حرکت وضعی زمین)، چه طور؟

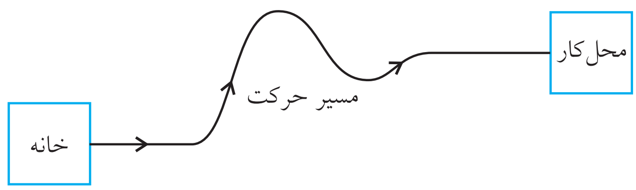
ب حرکت‌های ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که در آن‌ها، جسم روی خط راست حرکت می‌کند.

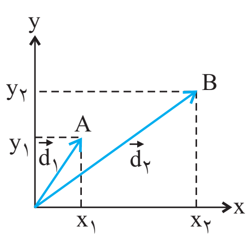
پ مطلب‌های اضافی در رابطه با هر موضوع که لازم باشد، تحت عنوان «بیش‌تر بدانید» آورده شده‌اند.

یادآوری و کمی هم بیش‌تر

در کتاب فیزیک ۳، حرکت‌هایی را بررسی می‌کنیم که مسیر حرکت جسم، خط راستی افقی یا قائم باشد. برای شروع، مفهوم‌هایی که در دورهٔ اول متوسطه با آن آشنا شده‌اید را یادآوری می‌کنیم.

مسیر حرکت: هر متحرکی در ضمن حرکت خود از نقطه‌هایی می‌گذرد. بنا به تعریف: «به مجموعهٔ این نقطه‌ها، یعنی مکان هندسی آن‌ها، مسیر حرکت گفته می‌شود.» مسیر حرکت مانند جاده‌ای است که یک اتومبیل روی آن رفت‌وآمد می‌کند که ممکن است در قسمت‌هایی به صورت خط راست یا منحنی باشد. زیرا مسیر حرکت از نقطهٔ شروع تا نقطهٔ پایانی از کوچه‌ها، خیابان‌ها، ساختمان‌ها و مانع‌های مختلفی می‌گذرد و شکل آن تابعی از همهٔ آن‌هاست.





مکان: هر نقطه در صفحهٔ مختصات را با فاصلهٔ آن از دو محور مشخص می‌کنیم که به آن‌ها «مختصه‌های نقطه» گفته می‌شود. مثلاً در شکل روبه‌رو نقطهٔ A با دو مختصهٔ x_1 و y_1 و B با مختصه‌های x_2 و y_2 مشخص شده‌اند. در فیزیک، جا یا مکان هر ذره را با برداری مشخص می‌کنیم که به آن «بردار مکان» یا به طور خلاصه «مکان» می‌گوییم.

بردار مکان با نماد $\vec{d}$ نشان داده می‌شود. در شکل بالا، $\vec{d}_1$ مکان ذرهٔ A و $\vec{d}_2$ مکان ذرهٔ B است. بردار مکان را به کمک بردارهای یکه به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

روشن است که وقتی جسم (ذره) در حرکت باشد، مختصه‌های مکان آن یعنی x و y تغییر می‌کنند و هر کدام تابعی از زمان می‌شوند. مثلاً ممکن است $x = 8t + 13$ و $y = -3t^2 + 5t$ باشد.

مکان اولیه: مکان متحرک در مبدأ زمان $(t = 0)$ را مکان اولیه نامیده و با نماد «$\vec{d}_0$» نشان می‌دهیم. مختصه‌های مکان اولیه با نمادهای «x_0» و «y_0» نشان داده می‌شوند و $\vec{d}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ خواهد بود.

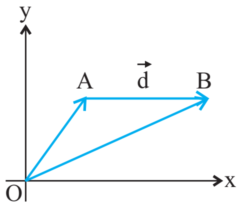
توجه کنید

مختصه‌های مکان (y, x) و مکان $(\vec{d})$ از جنس طول و یکای آن‌ها در SI، متر (m) است.

معادلهٔ حرکت: به رابطهٔ مختصه‌های مکان متحرک با زمان، یعنی $x = f(t)$ و $y = f(t)$ معادله‌های حرکت گفته می‌شود.

مسافت پیموده شده: به مجموعهٔ طول‌هایی که متحرک در مدت حرکتش می‌پیماید، مسافت پیموده شده می‌گوییم. روشن است که در SI یکای

مسافت، متر (m) است. مسافت پیموده شده کمیتی نرده‌ای است که با نماد L نشان می‌دهیم.



جابه‌جایی: وقتی که جسم حرکت می‌کند، مثلاً در شکل روبه‌رو و از هر مسیری که از نقطهٔ A به B برود، جابه‌جایی آن، با بردار $\overrightarrow{AB}$ مشخص می‌شود.

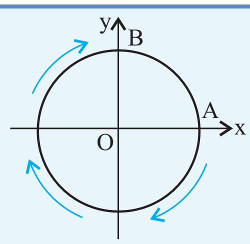
بنا به تعریف: جابه‌جایی برداری است که نقطهٔ شروع حرکت را به نقطهٔ پایانی وصل می‌کند. برای سادگی، جابه‌جایی را به جای $\Delta\vec{d}$ با همان $\vec{d}$ نشان می‌دهیم. با توجه به شکل بالا داریم:

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \quad , \quad OB = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

$$\vec{d} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \vec{d} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} \Rightarrow \vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j}$$

که d_x و d_y به ترتیب تصویر $\vec{d}$ روی محور x و y اند.

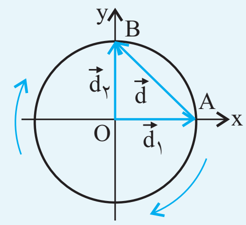
مثال یک جسم روی دایره‌ای به شعاع ۲۴ متر مطابق شکل روبه‌رو در جهت نشان داده شده از نقطهٔ A تا B جابه‌جا می‌شود.



الف بردار مکان جسم در شروع و پایان و بردار جابه‌جایی آن را روی شکل نشان دهید.

ب جابه‌جایی جسم را برحسب بردارهای یکّهٔ دو محور نوشته و اندازهٔ آن را محاسبه کنید.

حل



الف در شکل روبه‌رو ، بردارهای مکان جسم در شروع و پایان حرکت به ترتیب با $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ و جابه‌جایی جسم با بردار $\vec{d}$ نشان داده شده‌اند.

ب با توجه به شکل داریم:

$$\vec{d}_1 = R\vec{i} \quad , \quad \vec{d}_2 = R\vec{j} \quad , \quad R = ۲۴m$$

$$\vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 \Rightarrow \vec{d} = R\vec{j} - R\vec{i} \Rightarrow \vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} = R(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$d^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow d^2 = (-۲۴)^2 + (۲۴)^2 \Rightarrow d = ۲۴\sqrt{۲}\,m$$

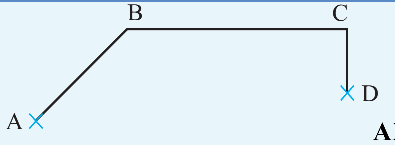
تندی متوسط

«تندی متوسط برابر مسافت پیموده شده در واحد زمان است.»

تندی متوسط را با نماد « s_{av} » نشان می‌دهیم که کمیتی نرده‌ای و یکای آن در SI، «متر بر ثانیه» $\frac{m}{s}$ است. اگر متحرک مسافت L را در مدت Δt پیموده باشد، با توجه به تعریف بالا، تندی متوسط از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{m}{s} \leftarrow s_{av} = \frac{L \rightarrow m}{\Delta t \rightarrow s}$$

مثال در شکل روبه‌رو، متحرکی مسیر $ABCD$ را در مدت ده ساعت پیموده است. با توجه به داده‌های زیر، تندی متوسط او را در این حرکت، محاسبه کنید.



$$AB = ۳۰۰km \quad , \quad BC = ۵۰۰km \quad , \quad CD = ۱۰۰km$$

حل

مسافت پیموده شده توسط متحرک (l) برابر است با:

$$L = AB + BC + CD = ۹۰۰km \Rightarrow l = ۹ \times ۱۰^۵ m$$

$$\Delta t = ۱۰h = ۳۶۰۰۰s = ۳/۶ \times ۱۰^۴ s$$

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow S_{av} = \frac{۹ \times ۱۰^۵}{۳/۶ \times ۱۰^۴} = ۲۵\frac{m}{s}$$

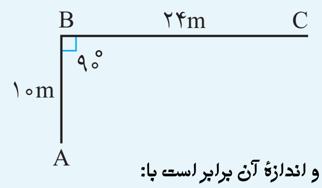
سرعت متوسط: سرعت **متوسط برابر جابه‌جایی متحرک در واحد زمان است.**

سرعت متوسط کمیتی برداری و نماد آن « $\vec{v}_{av}$ » و یکای آن در SI، متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ است.

$$\frac{m}{s} \leftarrow \vec{v}_{av} = \frac{\vec{d} \rightarrow m}{\Delta t \rightarrow s}$$

مثال

جسمی مسیر ABC را مطابق شکل روبه‌رو در مدت ۶/۲۵ ثانیه می‌پیماید. سرعت متوسط جسم را در این حرکت محاسبه کنید.



حل

جابه‌جایی جسم در این حرکت $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$ است. در شکل داده شده، AC وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است و اندازهٔ آن برابر است با:

$$(AC)^۲ = (AB)^۲ + (BC)^۲ \Rightarrow (AC)^۲ = (۱۰)^۲ + (۲۴)^۲ = ۶۷۶ \Rightarrow AC = ۲۶m$$

اندازهٔ جابه‌جایی جسم $d = AC = ۲۶m$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{۲۶}{۶/۲۵} \Rightarrow v_{av} = ۴/۱۶\frac{m}{s}$$

توجه کنید

یکی از یکاهای سرعت «کیلومتر بر ساعت، $\frac{km}{h}$» است. داریم:

$$۱\times\frac{m}{s} = ۱\frac{m}{s}\times۱\times۱ = ۱\frac{m}{s}\times\frac{km}{۱۰۰۰m}\times\frac{۳۶۰۰s}{h} \Rightarrow ۱\frac{m}{s} = ۳/۶\frac{km}{h}$$

به طور وارون داریم:

$$۱\frac{km}{h} = \frac{۱}{۳/۶}\frac{m}{s}$$

حرکت روی خط راست

بررسی حرکت را از ساده‌ترین حالت شروع می‌کنیم که جسم مسیر مستقیمی را می‌پیماید. یعنی مسیر حرکت، خط راست است. به چنین حرکتی، «حرکت روی خط راست» می‌گوییم. در این بررسی، مسیر حرکت را به عنوان محور مکان انتخاب می‌کنیم. اگر مسیر افقی باشد، آن را محور x و چنانچه مسیر قائم باشد، آن را محور y می‌نامیم. معمولاً جهت محور x را جهت حرکت جسم می‌گیریم. در این صورت، جسم در جهت محور x (محور مکان) حرکت می‌کند. روشن است که برای محور x، مبدأ در نظر می‌گیریم و در مبدأ « $x = ۰$ » است، اگر حرکت در جهت محور مکان باشد، جابه‌جایی، تندی و سرعت، مثبت و اگر در خلاف جهت محور باشد، جابه‌جایی، تندی و سرعت، منفی خواهند بود. بنابراین، در حرکت روی خط راست، علامت مثبت یا منفی نشان می‌دهند که کمیت‌هایی نظیر «مکان، جابه‌جایی، تندی، سرعت، شتاب، نیرو و ...» به ترتیب در جهت محور انتخابی یا در خلاف جهت آن هستند.

نمودار مکان ــ زمان

همان‌گونه که پیش‌تر و تحت عنوان «حرکت روی خط راست» بیان شد، در این فصل فقط حرکت‌هایی را بررسی می‌کنیم که مسیر حرکت خط راست باشد. در این صورت اگر محور مکان را x بنامیم، جابه‌جایی متحرک و سرعت متوسط آن را به ترتیب با کمیت‌های جبری « Δx » و « $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ » منظور کرده و جهت آن‌ها را با علامت مثبت به معنای «در جهت محور x» و منفی به معنای «در خلاف جهت محور x» مشخص می‌کنیم.

در درس ریاضی با رسم منحنی تابع آشنا شده‌اید. در درس فیزیک و در حرکت روی خط راست با تابع x برحسب زمان، به صورت $x = f(t)$ (یا $y = f(t)$) سر و کار داریم و به منحنی x برحسب t، نمودار «مکان ـ زمان» می‌گوییم.

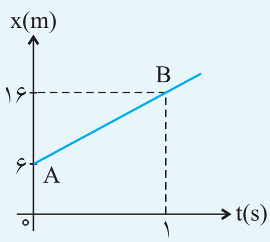
مثال جسمی روی خط راست حرکت می‌کند و مکان آن (x) برحسب زمان (t) و در SI به صورت « $x = ۱۰t + ۶$ » است. مطلوب است:

الف رسم نمودار مکان ـ زمان جسم

ب سرعت متوسط جسم بین دو لحظهٔ $t_۱ = ۲/۴s$ و $t_۲ = ۳s$ و نیز در دو لحظهٔ $t' = ۳/۵s$ و $t'' = ۵s$ به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

حل

الف معادلهٔ حرکت داده شده، تابعی درجهٔ اول است. درنتیجه نمودار مکان ـ زمان آن، خط راستی می‌شود. با تعیین دو نقطهٔ این تابع، نمودار خواسته شده را رسم می‌کنیم.



$$t_۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۶m \Rightarrow A\Big|_{۶m}^{۰}$$
$$t_۲ = ۱s \Rightarrow x_۲ = ۱۶m \Rightarrow B\Big|_{۱۶m}^{۱s}$$

نمودار مکان ـ زمان به صورت شکل روبه‌رو است.

ب

$$x = ۱۰t + ۶$$

$$\left|\begin{array}{l} t_۱ = ۲/۴s \Rightarrow x_۱ = ۳۰m \\ t_۲ = ۳s \Rightarrow x_۲ = ۳۶m \end{array}\right. \Rightarrow \Delta t = t_۲ - t_۱ = ۰/۶s \quad \text{و} \quad \Delta x = x_۲ - x_۱ = ۶m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{۶}{۰/۶} = ۱۰\frac{m}{s}$$

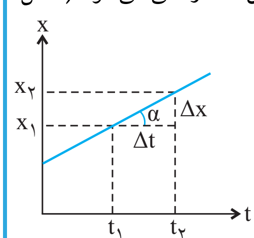
$v_{av} > ۰$ و در جهت محور x است.

$$\left|\begin{array}{l} t' = ۳/۵s \Rightarrow x' = ۴۱m \\ t'' = ۵s \Rightarrow x'' = ۵۶m \end{array}\right. \Rightarrow \Delta t' = t'' - t' = ۱/۵s \quad \text{و} \quad \Delta x' = x'' - x' = ۱۵m$$

$$v'_{av} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \Rightarrow v'_{av} = \frac{۱۵}{۱/۵} = ۱۰\frac{m}{s} \Rightarrow v'_{av} = v_{av}$$

$v'_{av} > ۰$ و در جهت محور x است. بنابراین $\vec{v}_{av} = \vec{v}'_{av}$ خواهد بود.

توجه کنید در حرکت روی خط راست، وقتی معادلهٔ حرکت تابع درجهٔ اولی از زمان است، نمودار مکان ـ زمان خط راستی می‌شود (شکل روبه‌رو را ببینید) که شیب نمودار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\text{شیب نمودار} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

از طرف دیگر در این حرکت، سرعت متوسط در بازهٔ زمانی Δt برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{شیب نمودار}$$

نتیجه اگر نمودار «مکان ـ زمان» خط راست باشد، سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه، ثابت و برابر شیب نمودار مکان ـ زمان است.

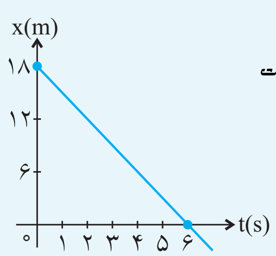
مثال معادلهٔ حرکت جسمی که روی محور x جابه‌جا می‌شود، در SI به صورت « $x = -۳t + ۱۸$ » است. مطلوب است:

الف رسم نمودار مکان ـ زمان جسم

ب تندی متوسط و سرعت متوسط جسم در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۵s$

حل

الف معادلهٔ حرکت برحسب زمان، تابع درجهٔ اولی از زمان است. درنتیجه، نمودار مکان ـ زمان آن، خط راست می‌شود و برای رسم آن، کافی است که دو نقطهٔ نمودار را به دست آوریم.



$$t = ۰ \Rightarrow x = ۱۸m$$
$$x = ۰ \Rightarrow t = ۶s$$

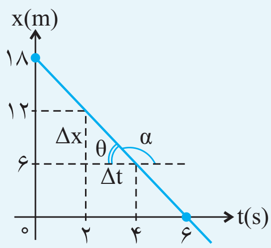
نمودار خواسته شده در شکل روبه‌رو رسم شده است.

ب) حرکت جسم روی خط راست و در یک جهت انجام می‌شود، درنتیجه مسافت پیموده شده در یک بازهٔ زمانی و اندازهٔ جابه‌جایی جسم در همان بازه، هم‌اندازه‌اند. نتیجه آن که تندی متوسط و سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی، هم‌اندازه‌اند.

$$\left| \begin{array}{l} t_۱=۲s \Rightarrow x_۱=۱۲m \\ t_۲=۵s \Rightarrow x_۲=۳m \end{array} \right. \Rightarrow \Delta t = t_۲ - t_۱ = ۳s \;\text{و}\; \Delta x = x_۲ - x_۱ = -۹m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{-۹}{۳} = -۳\frac{m}{s} < ۰ \Rightarrow$$ حرکت در خلاف جهت محور x است.

$$S_{av} = |v_{av}| = ۳\frac{m}{s}$$



در این مثال هم که نمودار مکان ـ زمان خط راست است، سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه، ثابت و برابر شیب نمودار مکان ـ زمان است. شکل روبه‌رو را ببینید.

$$\text{شیب نمودار} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t}$$

مثال معادلهٔ حرکت جسمی به صورت $y = -۱۰t^۲ + ۲۵t$ (در SI) است. مطلوب است:

الف) رسم نمودار مکان ـ زمان جسم

ب) سرعت متوسط جسم بین دو لحظهٔ $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲s$

حل

الف) معادلهٔ حرکت، تابع درجهٔ دوم است. درنتیجه، نمودار مکان (y) برحسب زمان (t)، منحنی (سهمی) می‌شود. چون ضریب درجهٔ دوم (یعنی ضریب $t^۲$) منفی است، سهمی دارای ماکزیمم است. ابتدا مختصات نقطهٔ ماکزیمم سهمی (t_{max} و y_{max}) و سپس محل برخورد نمودار با محور زمان (یعنی $y = ۰$) را تعیین کرده و نمودار را با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم.

$$y = -۱۰t^۲ + ۲۵t = at^۲ + bt$$

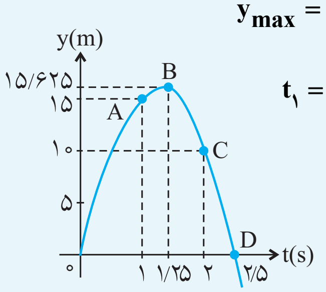
$$t_{max} = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow t_{max} = -\frac{۲۵}{-۲۰} = ۱/۲۵s$$

$$y_{max} = -۱۰(۱/۲۵)^۲ + ۲۵ \times ۱/۲۵ = ۱/۲۵(-۱۲/۵ + ۲۵) \Rightarrow y_{max} = ۱۵/۶۲۵m$$

$$y = ۰ \Rightarrow -۵t(۲t - ۵) = ۰ \Rightarrow t = ۰ \;\text{و}\; t = ۲/۵s$$

$$t_۱ = ۱s \Rightarrow y_۱ = -۱۰ + ۲۵ = ۱۵m \;\text{و}\; t_۲ = ۲s \Rightarrow y_۲ = -۴۰ + ۵۰ = ۱۰m$$

بنابراین، سهمی از نقطه‌های: $O|_{۰}^{۰}$ ، $A|_{۱۵m}^{۱s}$ ، $C|_{۱۰m}^{۲s}$ و $D|_{۰}^{۲/۵s}$ می‌گذرد و به صورت شکل روبه‌رو است:



ب)

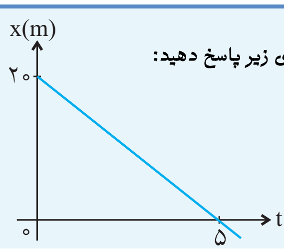
$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{y_۲ - y_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow v_{av} = \frac{۱۰ - ۱۵}{۲ - ۱} \Rightarrow v_{av} = -۵\frac{m}{s}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که سرعت متوسط بین دو لحظهٔ خواستهٔ شدهٔ $t_۱$ و $t_۲$، در خلاف جهت محور y است.

پرسش

با توجه به حل مثال قبل و نمودار رسم شده در آن، توضیح دهید که سرعت متوسط محاسبه شده در قسمت «ب» با پاره‌خطی که دو نقطهٔ A و C (مربوط به دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$) را به هم وصل می‌کند، چه ارتباطی دارد؟

مثال شکل روبه‌رو نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که در امتداد محور x حرکت می‌کند. به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:



الف) معادلهٔ حرکت این جسم بر حسب یکاهای SI به چه صورتی است، آن را به دست آورید.

ب) سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ شروع حرکت و $t = ۲s$ چه قدر و در چه جهتی است؟

پ) سرعت متوسط بین لحظه‌های $۱s$ و $۴s$ چه اندازه و در چه جهتی است؟

ت) از مقایسهٔ پاسخ دو قسمت «ب و پ» چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل

الف) نمودار داده شده، خط راست و درنتیجه معادلهٔ $x = f(t)$، یعنی معادلهٔ حرکت جسم، تابع درجهٔ اولی از زمان است. به کمک داده‌های روی شکل این معادله را مشخص می‌کنیم.

در شکل دو نقطهٔ $A\Big|_{x=۲۰m}^{t=۰}$ و $B\Big|_{x=۰}^{t=۵s}$ مشخص شده‌اند. با قرار دادن این مقدارها در معادلهٔ حرکت، نتیجه می‌شود:

$$x = mt + n \Rightarrow ۲۰ = ۰ \times m + n \Rightarrow n = ۲۰$$
$$۰ = ۵m + ۲۰ \Rightarrow m = -۴$$

درنتیجه، معادلهٔ حرکت به صورت $x = -۴t + ۲۰$ است.

ب)

$$\begin{cases} t_۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۲۰m \\ t_۲ = ۲s \Rightarrow x_۲ = ۱۲m \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۲-۲۰}{۲-۰} = -۴\frac{m}{s}$$

پ)

$$\begin{cases} t_۱ = ۱s \Rightarrow x_۱ = ۱۶m \\ t_۲ = ۴s \Rightarrow x_۲ = ۴m \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴-۱۶}{۴-۱} = \frac{-۱۲}{۳} = -۴\frac{m}{s}$$

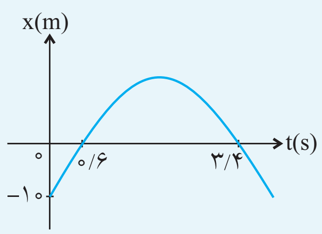
ت) از مقایسهٔ دو قسمت ب و پ نتیجه می‌شود که سرعت متوسط بین لحظه‌های داده شده در این دو قسمت، هم‌اندازه و هم جهت‌اند. چون x در معادلهٔ حرکت تابع درجهٔ اولی از زمان است، نتیجه می‌شود:

$$x = -۴t + ۲۰$$
$$\begin{cases} t = t' \Rightarrow x_۱ = -۴t'_۱ + ۲۰ \\ t = t'' \Rightarrow x_۲ = -۴t''_۲ + ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = -۴(t'' - t') = -۴\Delta t$$
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow -۴\frac{m}{s}$$

یعنی وقتی معادلهٔ حرکت تابع درجهٔ اولی از زمان باشد، سرعت متوسط جسم در هر بازهٔ زمانی دلخواهی، مقداری ثابت و در یک جهت‌اند، به بیان دیگر، سرعت متوسط ثابت و برابر سرعت لحظه‌ای است.

مثال

سهمی شکل روبه‌رو، نمودار مکان ـ زمان جسمی را نشان می‌دهد که روی محور x جابه‌جا می‌شود. با توجه به نمودار، قسمت‌های زیر را پاسخ دهید:



الف) معادلهٔ حرکت این جسم را بنویسید. $(\sqrt{۲} \simeq ۱/۴)$

ب) دورترین فاصلهٔ جسم از نقطهٔ ابتدای حرکت چه‌قدر است؟

پ) جسم چه مدت در جهت محور x در حرکت بوده است؟

ت) سرعت متوسط جسم بین دو لحظهٔ $t_۱ = ۱s$ و $t = ۵s$ چه مقدار بوده است و در این مدت در چه جهتی حرکت می‌کند؟

حل

الف) معادلهٔ سهمی به صورت «$x = bt^۲ + ct + d$» است. با توجه به داده‌های روی شکل، خواهیم داشت:

$$t = ۰ \Rightarrow x = -۱۰m \Rightarrow -۱۰ = ۰ + ۰ + d \Rightarrow d = -۱۰$$
$$t = ۰/۶s \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow \quad ۰ = ۰/۳۶b + ۰/۶c - ۱۰ \quad (۱)$$
$$t = ۳/۴s \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow \quad ۰ = (۳/۴)^۲ b + ۳/۴c - ۱۰ \quad (۲)$$

از حل دو معادلهٔ بالا، b و c به دست می‌آیند:

$$\begin{array}{r|l} ۳/۴ & ۰/۳۶b + ۰/۶c - ۱۰ = ۰ \\ -۰/۶ & (۳/۴)^۲ b + ۳/۴c - ۱۰ = ۰ \end{array} \Rightarrow b(۳/۴ \times ۰/۳۶ - ۰/۶ \times (۳/۴)^۲) - ۲۸ = ۰$$

$$b = \frac{۲۸}{۰/۶ \times ۳/۴(۰/۶ - ۳/۴)} \Rightarrow b = -\frac{۵}{۱/۰۲} \simeq -۵$$

با قرار دادن مقدار b در معادلهٔ ۱ نتیجه می‌شود:

$$-۵ \times ۰/۳۶ + ۰/۶c - ۱۰ \Rightarrow c = ۱۹/۶۶ \simeq ۲۰$$

بنابراین، معادلهٔ حرکت جسم در SI به صورت زیر می‌شود:

$$x = -۵t^{۲} + ۲۰t - ۱۰$$

پ نمودار نشان می‌دهد که جسم ابتدا در جهت محور x حرکت می‌کند و در نقطهٔ ماکزیمم نمودار، در دورترین فاصله از نقطهٔ ابتدایی حرکت است. سهمی دارای محور تقارن است. زمان رسیدن جسم به دورترین فاصله از نقطهٔ شروع حرکت (یعنی زمان رسیدن به نقطهٔ ماکزیمم نمودار) به کمک تقارن سهمی قابل محاسبه است. برای دو نقطه با x یکسان، داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow t_{max} = \frac{t_A + t_B}{۲}$$

$$t_{max} = \frac{۰/۶ + ۳/۴}{۲} = ۲s$$

به کمک معادلهٔ حرکت، فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم تا مبدأ محور را محاسبه می‌کنیم:

$$x_{max} = -۵(۲)^{۲} + ۲۰ \times ۲ - ۱۰ \Rightarrow x_{max} = ۱۰m$$

دورترین فاصلهٔ جسم از نقطهٔ ابتدایی حرکت برابر است با:

$$\Delta x = x_{max} - x_{۰} \Rightarrow \Delta x = ۱۰ - (-۱۰) = ۲۰m$$

پ در مدتی که جسم در جهت محور x در حرکت بوده، مکان جسم یعنی x در حال افزایش است. با توجه به نمودار داده شده، زمان خواسته شده برابر زمان رسیدن جسم به نقطهٔ ماکزیمم نمودار است:

$$\Delta t = t_{max} - t_{۰} \quad و \quad t_{۰} = ۰ \Rightarrow \Delta t = t_{max} = ۲s$$

ت

$$t_{۱} = ۱s \Rightarrow x_{۱} = -۵ \times (۱^{۲}) + ۲۰ \times ۱ - ۱۰ \Rightarrow x_{۱} = +۵m$$

$$t_{۲} = ۵s \Rightarrow x_{۲} = -۵ \times ۲۵ + ۲۰ \times ۵ - ۱۰ \Rightarrow x_{۲} = -۳۵m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{-۳۵ - ۵}{۵ - ۱} \Rightarrow v_{av} = ۱۰\frac{m}{s}$$

چون $t_{۱} < t_{max}$ و $t_{۲} > t_{max}$ است، ابتدا در جهت محور x در حرکت بوده (توجه کنید که x در حال افزایش است) و سپس در خلاف جهت محور حرکت کرده است.

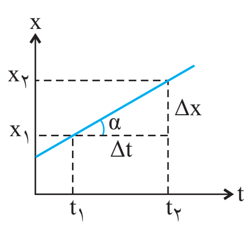
سرعت و تندی لحظه‌ای

یادآوری و کمی هم بیش‌تر

سرعت متوسط بین دو لحظهٔ $t_{۱}$ و $t_{۲}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

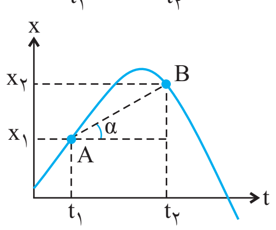
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{۲} - x_{۱}}{t_{۲} - t_{۱}}$$

پیش‌تر دیدیم که



الف اگر معادلهٔ حرکت جسمی که روی خط راست جابه‌جا می‌شود، تابع درجهٔ اولی از زمان باشد، سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه ثابت و برابر شیب نمودار مکان ـ زمان جسم خواهد بود.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan\alpha = \text{شیب نمودار مکان ـ زمان}$$



ب اگر معادلهٔ حرکت تابع درجهٔ دوم (یا تابع دیگری) از زمان باشد، نمودار مکان ـ زمان منحنی می‌شود. (شکل روبه‌رو برای تابع درجهٔ دوم رسم شده است). در این حالت، سرعت متوسط بین دو لحظه، برابر شیب وتری است که دو نقطهٔ نمودار را به هم وصل می‌کند:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{«شیب وتر AB»}$$

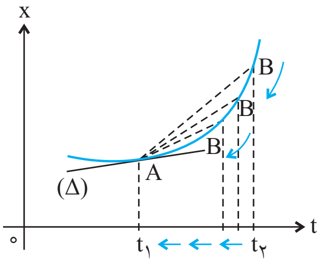
سرعت لحظه‌ای:

سرعت متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر حرکت، سرعت لحظه‌ای نامیده می‌شود.

در رابطهٔ سرعت متوسط، هر چه Δt را کوچک‌تر انتخاب کنیم، یعنی $t_{۲}$ را به $t_{۱}$ نزدیک‌تر بگیریم، سرعت متوسط به سرعت در لحظهٔ $t_{۱}$

نزدیک‌تر می‌شود. درنهایت که Δt به صفر میل کند، سرعت متوسط برابر سرعت در لحظهٔ t_1 (یا هر لحظهٔ دلخواه دیگر) می‌شود. محاسبهٔ سرعت لحظه‌ای به روش خاص ریاضی انجام می‌دهیم که «مشتق تابع برحسب متغیر» نامیده می‌شود. بعد از فراگیری مبحث مشتق در ریاضی، به سادگی می‌توان از معادلهٔ حرکت، معادلهٔ «سرعت زمان» متحرک را به دست آورد. به بحث بعدی که درواقع، تعبیر هندسی مشتق است توجه کنید.

سرعت لحظه‌ای و نمودار مکان ـ زمان



به شکل روبه‌رو که قسمتی از نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی محور x حرکت می‌کند، نگاه کنید. همان‌گونه که پیش‌تر گفته شد، سرعت متوسط بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر شیب وتری است که دو نقطهٔ A و B از نمودار (مربوط به دو لحظهٔ t_1 و t_2) را به هم وصل می‌کند. اگر t_2 را کوچک و کوچک‌تر بگیریم، نقطهٔ B روی نمودار به A نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. درنتیجه، وتر AB حول نقطهٔ A دوران می‌کند. روشن است که در حدّ وقتی « $\Delta t = t_2 - t_1$ » به صفر میل کند، نقطهٔ B بر A منطبق می‌شود و وتر AB به خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در نقطهٔ A تبدیل شده و شیب آن برابر سرعت در لحظهٔ t_1 می‌شود. بنابراین:

سرعت لحظه‌ای، یعنی سرعت در هر لحظه، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در همان لحظه است.

سرعت لحظه‌ای را با نماد « v » نشان داده و به آن سرعت متحرک می‌گوییم.

$$v = \text{شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظه}$$

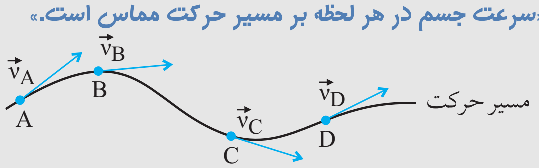
مثلاً در شکل بالا، سرعت در لحظهٔ t_1 در نقطهٔ A روی نمودار مکان ـ زمان برابر شیب مماس « Δ » است.

$$v_{t_1} = v_A = \text{شیب مماس } \Delta$$

بیش‌تر بدانید

سرعت متوسط را با رابطهٔ $\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$ تعریف کرده‌ایم. این رابطه نشان می‌دهد که چون $\Delta t > 0$ است، سرعت متوسط همواره با جابه‌جایی جسم هم‌جهت است. سرعت لحظه‌ای که برابر حدّ سرعت متوسط است وقتی که Δt به صفر میل می‌کند نیز در جهت جابه‌جایی است. می‌دانیم که حدّ وتر، مماس است. درنتیجه وقتی Δt به صفر میل کند، بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ به بردار کوچکی مماس بر مسیر حرکت میل می‌کند. سرعت متوسط نیز که همواره با جابه‌جایی هم‌جهت است، برداری است مماس بر مسیر حرکت که جهت آن، جهت حرکت جسم را در هر لحظه نشان می‌دهد. نتیجه آن که:

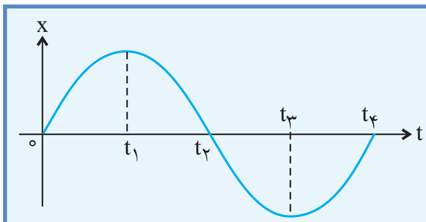
«سرعت جسم در هر لحظه بر مسیر حرکت مماس است.»



تندی لحظه‌ای

تندی لحظه‌ای نیز مانند سرعت لحظه‌ای تعریف می‌شود. یعنی تندی لحظه‌ای، تندی جسم در هر لحظه یا در هر نقطه از مسیر حرکت است. هر چند که ممکن است تندی متوسط و سرعت متوسط جسم در یک بازهٔ زمانی، هم‌اندازه باشند یا نباشند، اما تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای جسم، در هر لحظه هم‌اندازه‌اند. توجه کنید که با تندی، جهت حرکت بیان نمی‌شود، اما با سرعت، جهت حرکت را مشخص می‌کنیم.

مثال



شکل روبه‌رو نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که در امتداد محور x جابه‌جا می‌شود. موردها ی زیر را پاسخ دهید:

الف) اندازهٔ سرعت جسم در چه لحظه‌هایی بیشینه است؟

ب) سرعت جسم در چه لحظه‌هایی کمینه است؟

پ) جسم در چه بازه‌های زمانی در جهت محور x در حرکت بوده است؟

ت) در چه لحظه‌هایی جهت حرکت جسم تغییر کرده است؟

حل

سرعت جسم برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان است. بنابراین:

الف) در لحظه‌های $t=0$ ، t_2 و t_4 سرعت جسم بیشینه شده است.

ب) در لحظه‌های t_1 و t_3 که مماس بر نمودار مکان ـ زمان موازی محور زمان می‌شود، سرعت جسم کمینه و برابر صفر است.

پ) در بازه‌هایی که سرعت جسم مثبت است، جسم در جهت محور مکان در حرکت بوده است. نمودار نشان می‌دهد که در بازهٔ زمانی « $\Delta t_1 = t_1 - 0$ » و « $\Delta t_2 = t_4 - t_3$ » سرعت جسم مثبت و درنتیجه، جسم در جهت محور x در حرکت بوده است.

ت) در لحظه‌هایی که سرعت جسم صفر می‌شود، جهت حرکت که همان جهت سرعت جسم است تغییر می‌کند و از مثبت به منفی یا از منفی به مثبت تغییر می‌کند. در نمودار در لحظه‌های t_1 و t_3 جهت حرکت تغییر کرده است.

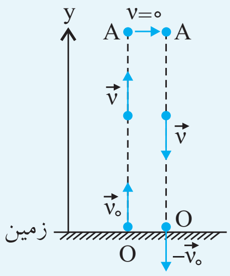
مثال

جسم کوچکی که مقاومت هوا در مقابل حرکت آن ناچیز است را از سطح زمین با سرعت v_0 قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر محور مکان، y، را قائم و رو به بالا انتخاب کنیم:

الف) سرعت جسم در چه زمان‌هایی مثبت یا منفی است و در چه نقطه‌ای تغییر جهت می‌دهد؟

ب) سرعت جسم در چه لحظه‌هایی بیشینه یا کمینه است؟

حل



الف) به شکل روبه‌رو نگاه کنید، در مدت بالا رفتن، سرعت جسم در جهت محور مکان انتخاب شده (محور y) و درنتیجه، مثبت است. در مدت پایین آمدن، سرعت در خلاف جهت محور y و منفی است. در بالاترین نقطه‌ای که جسم به آن‌جا می‌رسد و در شکل با نقطهٔ A نشان داده شده، سرعت جسم صفر می‌شود و سرعت تغییر جهت می‌دهد و جسم فرو می‌افتد. نقطهٔ A، «نقطهٔ اوج» نامیده می‌شود. بنابراین، در نقطهٔ اوج که سرعت صفر می‌شود، سرعت جسم تغییر جهت می‌دهد.

ب) سرعت جسم در لحظهٔ پرتاب و نیز در لحظهٔ رسیدن به زمین (نقطهٔ O در شکل) بیشینه و هم‌اندازهٔ v_0 است. (توجه کنید که مقاومت هوا در مقابل حرکت جسم ناچیز است.) در نقطهٔ اوج سرعت جسم کمینه و برابر صفر است. اندازهٔ سرعت جسم در موقع بالا رفتن کاهش می‌یابد و حرکتش کُند شونده است. در مدت پایین آمدن، سرعت جسم مرتباً افزایش یافته و حرکت جسم تند شونده خواهد بود.

شتاب

وقتی اندازه، جهت یا اندازه و جهت سرعت تغییر کند، می‌گوییم حرکت جسم شتابدار است. شتاب کمیتی است که به کمک تغییرات سرعت تعریف می‌شود.

شتاب متوسط:

بنا به تعریف، «**تغییرات سرعت در واحد زمان را شتاب متوسط می‌نامیم.**» شتاب را با نماد « a » و شتاب متوسط را با « a_{av} » نشان می‌دهیم.

چون سرعت کمیتی برداری و زمان نرده‌ای است، شتاب کمیتی برداری می‌شود.از تعریف بالا خواهیم داشت:

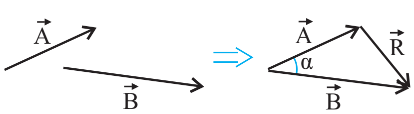
$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \text{و} \quad \Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

توجه کنید

الف) چون بازهٔ زمانی همواره مثبت است (چرا؟) درنتیجه شتاب و تغییرات سرعت، همواره هم‌جهت‌اند. این بیان به معنای آن نیست که شتاب و سرعت هم‌جهت‌اند. شتاب ممکن است با سرعت هم‌جهت باشد یا نباشد و نیز ممکن است با سرعت هم‌راستا نباشد. در حرکت روی خط راست، شتاب با سرعت جسم هم‌راستاست، اما ممکن است با سرعت هم‌جهت نباشد. شتاب با تغییرات سرعت هم‌جهت است.

ب) برای محاسبهٔ تفاضل دو بردار، باید دو بردار را از یک نقطه رسم کرد، برداری که انتهای بردار دوم را به انتهای بردار اول وصل می‌کند، بردار تفاضل دو بردار است.

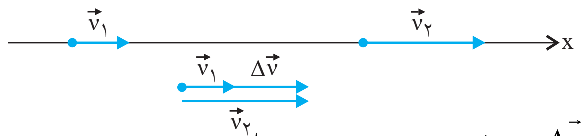
شکل روبه‌رو را ببینید.



$$\vec{R} = \vec{B} - \vec{A} \Rightarrow R^2 = A^2 + B^2 - 2A.B\cos\alpha$$

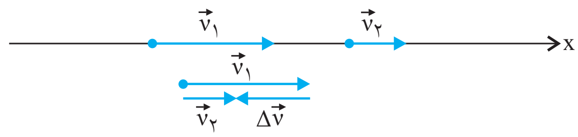
به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال a)



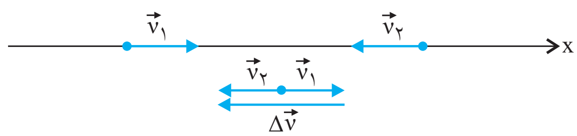
در مثال a، شتاب متوسط در جهت $\Delta\vec{v}$ و در نتیجه در جهت محور x است.

مثال b)



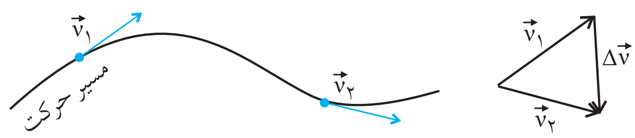
در شکل نشان داده شده در مثال b، شتاب متوسط که در جهت $\Delta\vec{v}$ است، در خلاف جهت سرعت‌های $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ است.

مثال c)



در مثال c، شتاب متوسط در جهت $\Delta\vec{v}$ است و در نتیجه در جهت $\vec{v}_2$ و در خلاف جهت $\vec{v}_1$ است.

مثال d)



در مثال d، تغییرات سرعت $(\Delta\vec{v})$ و درنتیجه، شتاب متوسط در راستای سرعت‌های $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ نیست، اما در مثال‌های بالا و در هر حرکت دیگر، شتاب متوسط، همواره در جهت $\Delta\vec{v}$ است. نتیجه آن که:

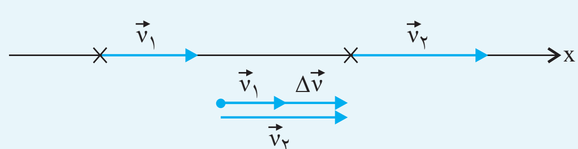
الف) حرکت ممکن است در جهت شتاب باشد یا نباشد، اما همواره حرکت در جهت سرعت جسم است.

ب) از رابطهٔ شتاب متوسط معلوم می‌شود که یکای شتاب در SI، «متر بر مجذور ثانیه» $\frac{m}{s^2}$ است.

$$\frac{m}{s^2} \leftarrow \vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v} \rightarrow \frac{m}{s}}{\Delta t \rightarrow s}$$

مثال جسمی روی محور x در حرکت است. در لحظهٔ $t_1 = 6s$ سرعت جسم $20\frac{m}{s}$ در جهت محور x و در لحظهٔ $t_2 = 11s$ سرعتش در همان جهت به $28\frac{m}{s}$ می‌رسد. شتاب متوسط جسم در بازهٔ زمانی «$t_2 - t_1$» چه‌قدر و در چه جهتی است؟

حل شکل زیر سرعت جسم را در دو لحظهٔ t_1 و t_2 و $\Delta\vec{v}$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل داریم:

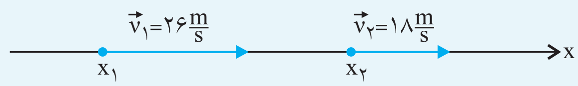


$$\Delta v = v_2 - v_1 \Rightarrow \Delta v = 28 - 20 \Rightarrow \Delta v = 8\frac{m}{s}$$

همان‌گونه که شکل نشان می‌دهد، $\Delta\vec{v}$ در جهت بردار $\vec{v}_1$ (و نیز $\vec{v}_2$) و درنتیجه در جهت محور x است. شتاب متوسط که در جهت $\Delta\vec{v}$ است نیز در جهت محور x خواهد بود.

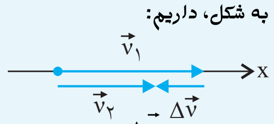
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{8}{11-6} = \frac{8}{5} \Rightarrow a_{av} = 1/6\frac{m}{s^2}$$

مثال شکل زیر، سرعت متحرک را در دو لحظهٔ $t_۱ = ۲s$ و $t_۲ = ۱۰s$ نشان می‌دهد که به ترتیب از مکان‌های $x_۱$ و $x_۲$ روی محور x می‌گذرد. شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ چه اندازه و در چه جهتی است؟



حل

در شکل زیر، سرعت‌های متحرک را در دو لحظه، از یک نقطه رسم کرده و تغییرات سرعت نیز نشان داده‌ایم. با توجه به شکل، داریم:



$$\Delta v = v_۲ - v_۱ \Rightarrow \Delta v = ۱۸ - ۲۶ = -۸\frac{m}{s}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که $\Delta\vec{v}$ در خلاف جهت محور x است. بنابراین، شتاب متوسط در بازهٔ زمانی Δt نیز که در جهت $\Delta\vec{v}$ است، در خلاف جهت محور x خواهد بود.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{-۸}{۱۰ - ۲} \Rightarrow a_{av} = -\frac{۸}{۸} = -۱\frac{m}{s^۲}$$

شتاب متوسط منفی شده است. این نیز نشان دهندهٔ آن است که این شتاب در خلاف جهت محور x است.

نمودار سرعت ـ زمان

وقتی سرعت حرکت جسمی ثابت نباشد، سرعت جسم در لحظه‌های مختلف، متفاوت است. بنابراین، سرعت جسم تابع زمان حرکت بوده و بین این دو کمیت رابطه‌ای مانند $v = f(t)$ برقرار است که به آن «معادلهٔ سرعت ـ زمان» می‌گوییم. مانند آن‌چه که دربارهٔ مکان ـ زمان گفته شد، می‌توان نمودار تغییرات سرعت جسم برحسب زمان حرکت نیز رسم کرد و با بررسی آن، ویژگی‌های چنین نموداری را معلوم کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

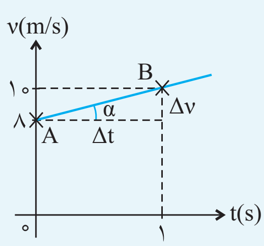
مثال معادلهٔ سرعت ـ زمان جسمی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت « $v = ۲t + ۸$ » است.

الف نمودار تغییرات سرعت جسم را برحسب زمان حرکتش رسم کنید.

ب شیب این نمودار بین دو لحظهٔ $t = ۱/۵s$ و $t' = ۴s$ به دست آورید. این شیب، معرف چه کمیتی است؟

حل

الف معادلهٔ سرعت ـ زمان داده شده، تابع درجهٔ اولی از زمان است. بنابراین، نمودار خواسته شده، خط راستی می‌شود. برای رسم آن، کافی است که دو نقطهٔ نمودار را مشخص کنیم.



$$v = ۲t + ۸ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۰ \Rightarrow v_۱ = ۸\frac{m}{s} \\ t_۲ = ۱s \Rightarrow v_۲ = ۱۰\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۸\frac{m}{s} \end{matrix} \right. \quad و \quad B \left| \begin{matrix} ۱s \\ ۱۰\frac{m}{s} \end{matrix} \right.$$

نمودار خواسته شده در شکل روبه‌رو رسم شده است.

ب چون این نمودار خط راست است، شیب آن در هر بازهٔ زمانی ثابت است.

بنابراین، با توجه به محاسبهٔ قسمت الف، شیب نمودار را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{شیب نمودار} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow \text{شیب نمودار} = \frac{(۱۰ - ۸)\frac{m}{s}}{(۱ - ۰)s} \Rightarrow \text{شیب نمودار} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

می‌دانیم که $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ برابر شتاب متوسط است. بنابراین شیب به دست آمده معرف شتاب متوسط است و همان‌گونه که گفته شد، چون نمودار خط راست شده است، در هر بازهٔ زمانی دیگر نیز شتاب متوسط این متحرک برابر « $۲\frac{m}{s^۲}$ » خواهد بود.

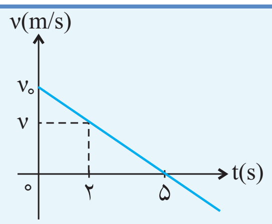
توجه کنید

متوسط یک کمیت متغییر برابر میانگین مقدارهای آن کمیت است. مثلاً سرعت متوسط یک متحرک در یک بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت‌های لحظه‌ای آن در همان بازه است. به همین ترتیب، اگر شتاب حرکت جسمی ثابت نباشد، شتاب متوسط آن برابر میانگین شتاب‌های لحظه‌ای جسم در هر بازهٔ زمانی است. یعنی اگر در یک بازهٔ زمانی، شتاب حرکت جسمی برابر $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n$ باشد، شتاب متوسط جسم در این بازه برابر می‌شود با:

$$a_{av} = \frac{a_۱ + a_۲ + a_۳ + \ldots + a_n}{n}$$

واضح است که اگر $a_۱ = a_۲ = a_۳ = \cdots = a_n = a$ باشد، در این صورت و در هر بازهٔ زمانی $a_{av} = a$ خواهد بود.

مثال نمودار شکل روبه‌رو تغییرات سرعت جسمی را نشان می‌دهد که بر خط راست در حرکت است.



اگر $v_۰ = ۱۵\frac{m}{s}$ و $v = ۹\frac{m}{s}$ باشد، شتاب متوسط حرکت جسم در بازهٔ زمانی ۱s تا ۷s چند متر بر مجذور ثانیه است؟

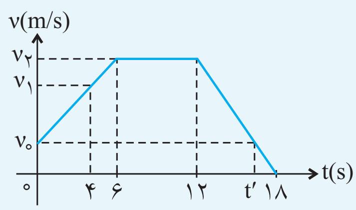
حل شتاب حرکت در هر بازهٔ زمانی برابر شیب نمودار سرعت ـ زمان در همان بازه است. نمودار داده شده، خط راست و درنتیجه شیب آن در تمام بازه‌های زمانی یکسان است. بنابراین، شتاب متوسط این حرکت در تمام بازه‌های زمانی ثابت و برابر شتاب حرکت جسم است.

$$a_{av} = a = \text{ثابت} \quad \text{و} \quad \text{شیب نمودار} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \Rightarrow a = \frac{v - v_۰}{t - ۰} \Rightarrow a = \frac{۹ - ۱۵}{۲} \Rightarrow a = -۳\frac{m}{s^۲}$$

شتاب متوسط در بازهٔ خواسته شده نیز برابر همین مقدار است.

$$a_{۱,۷} = a = -۳\frac{m}{s^۲}$$

مثال در نمودار سرعت ـ زمان شکل زیر، $v_۰ = ۶\frac{m}{s}$، $v_۲ = ۱۸\frac{m}{s}$ است. اندازهٔ شتاب حرکت جسم را در بازه‌های زیر محاسبه کرده و جهت هر کدام را مشخص کنید. جسم روی محور x جابه‌جا می‌شود:



الف در چهار ثانیهٔ اول حرکت و نیز در بازهٔ زمانی ۴s تا ۶s

ب از ثانیهٔ ششم تا ثانیهٔ دوازدهم

پ از لحظهٔ t' تا ثانیهٔ هجدهم

حل نمودار سرعت ـ زمان داده شده در هر سه قسمت خط راست است. درنتیجه شتاب در هر یک از سه قسمت، مقدار ثابتی است. بنابراین شتاب متوسط در هر قسمت نمودار و در هر بازهٔ زمانی آن برابر شتاب حرکت در همان قسمت است.

الف شتاب در ۶ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$a_{av} = a \Rightarrow a_۱ = \frac{v_۲ - v_۰}{t_۲ - ۰} \Rightarrow a_۱ = \frac{۱۸ - ۶}{۶ - ۰} = ۲\frac{m}{s}$$

$a_۱$ مثبت و درنتیجه در جهت محور x است. شتاب در چهار ثانیهٔ اول و نیز از ثانیهٔ ۴ تا ۶ نیز همین مقدار است.

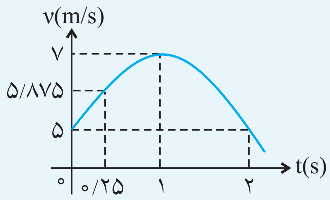
ب در بازهٔ زمانی $t = ۶s$ تا $t = ۱۲s$ سرعت ثابت و شتاب حرکت صفر است. $(a_۲ = ۰)$.

پ شتاب از $t = ۱۲s$ تا $t = ۱۸s$ که سرعت جسم صفر شده، برابر است با:

$$a_۳ = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰ - v_۲}{۱۸ - ۱۲} \Rightarrow a_۳ = \frac{۰ - ۱۸}{۶} \Rightarrow a_۳ = -۳\frac{m}{s^۲}$$

$a_۳$ منفی و در خلاف جهت محور x است. چون شتاب در این قسمت نمودار نیز ثابت است، شتاب متحرک در بازهٔ زمانی t' تا ثانیهٔ هجدهم برابر $a_۳$ خواهد بود.

مثال نمودار سرعت ـ زمان جسمی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط جسم را در بازه‌های زمانی زیر محاسبه کرده و جهت هر کدام را مشخص کنید:



۱) صفر تا $۰/۲۵s$ ۲) صفر تا $۱s$

۳) $۱s$ تا $۲s$ ۴) $۰/۲۵s$ تا $۲s$

حل

۱)

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_۱=\frac{۵/۸۷۵-۵}{۰/۲۵-۰}=\frac{۰/۸۷۵}{۰/۲۵}=+۳/۵\ \frac{m}{s^۲}$$

$a_۱$ در جهت محور x است.

۲)

$$a_۲=\frac{۷-۵}{۱-۰}=+۲\frac{m}{s^۲}$$

$a_۲$ در جهت محور x است.

۳)

$$a_۳=\frac{۵-۷}{۲-۱}=-۲\frac{m}{s^۲}$$

$a_۳$ در خلاف جهت محور x است.

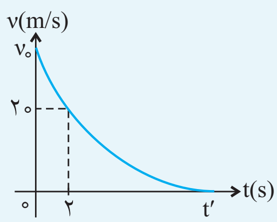
۴)

$$a_۴=\frac{۵-۵/۸۷۵}{۲-۰/۲۵}=\frac{-۰/۸۷۵}{۱/۷۵}\Rightarrow a_۴=-۰/۵\frac{m}{s^۲}$$

$a_۴$ در خلاف جهت محور x است.

مشاهده می‌کنید که در این مثال نمودار سرعت ـ زمان منحنی است و درنتیجه، شتاب حرکت جسم در بازه‌های زمانی مختلف، یکسان نیست.

مثال شکل روبه‌رو، نمودار سرعت ـ زمان جسمی را نشان می‌دهد که در امتداد محور x حرکت کرده است.



الف اگر شتاب متوسط جسم در بازهٔ زمانی صفر تا $۲s$ در خلاف جهت محور x و اندازهٔ آن $۵\frac{m}{s^۲}$ باشد، $v_۰$ چه اندازه است؟

ب اندازهٔ شتاب متوسط جسم در کل زمان حرکتش $۴\frac{m}{s^۲}$ و در خلاف جهت محور مکان است. زمان کل حرکت جسم را محاسبه کنید.

حل

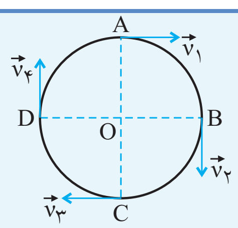
الف شتاب متوسط در ۲ ثانیهٔ اول حرکت در خلاف جهت محور x و درنتیجه منفی است. خواهیم داشت:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow -۵=\frac{۲۰-v_۰}{۲-۰}\Rightarrow ۲۰-v_۰=-۱۰\Rightarrow v_۰=۳۰\frac{m}{s}$$

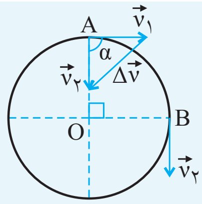
ب نمودار نشان می‌دهد که سرعت جسم در لحظهٔ t'، صفر شده و جسم ایستاده است. بنابراین، زمان کل حرکت برابر t' است. چون شتاب در زمان کل حرکت در خلاف جهت محور مکان (محور x) است، منفی خواهد بود. خواهیم داشت:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-v_۰}{t'-۰}\Rightarrow -۴=\frac{-۳۰}{t'}\Rightarrow t'=۷/۵s$$

مثال جسمی روی یک دایره به شعاع R و با بزرگی سرعت حدود $۶\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند.



به این حرکت، «دایره‌ای یکنواخت» می‌گوییم. شتاب متوسط حرکت جسم، وقتی $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره پیمود، چه‌قدر و تقریباً در چه جهتی است؟ جسم، یک دور را در مدت حدود $۲۰s$ می‌پیماید؟



حل زاویهٔ روبه‌رو به کمان دایره که برابر $\frac{1}{4}$ محیط دایره است، برابر $\theta = 90^\circ$ می‌شود. شکل روبه‌رو را ببینید، سرعت جسم در ابتدا و انتهای کمان AB و نیز تغییرات سرعت در این مدت $(\Delta\vec{v})$ رسم شده است.

از آن‌جا که بزرگی سرعت جسم ثابت است، مدت این حرکت نیز $\frac{1}{4}$ مدت یک دور پیمودن دایره خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta t = \frac{1}{4} \times 20 = 5s$$

چون سرعت مماس بر مسیر حرکت است، $OA \perp \vec{v}_1$ و $OB \perp \vec{v}_2$ و درنتیجه، $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$ و در شکل بالا $\alpha = 90^\circ$ است. حرکت یکنواخت و $v_1 = v_2$ است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ بردارهای سرعت داریم:

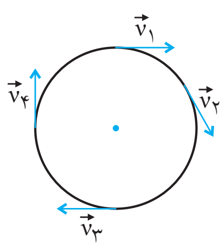
$$\Delta v = v_1\sqrt{2} \Rightarrow v_1 = 6\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

شتاب متوسط در جهت $\Delta\vec{v}$ و درنتیجه به طرف داخل دایره و اندازهٔ آن برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{6\sqrt{2}}{5} \Rightarrow a_{av} = 1/2\sqrt{2}\,\frac{m}{s^2}$$

توجه کنید اکنون که با کمیت‌های مربوط به حرکت (مکان، جابه‌جایی، سرعت، شتاب) و نیز نمودارهای مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان و ویژگی این نمودارها آشنا شده‌ایم، به بررسی چند حرکت ساده روی خط راست می‌پردازیم. پیشنهاد می‌شود که مطلب‌های قبلی را یک بار دیگر مرور کرده و نکته‌های مهم مربوط به آن‌ها را یادداشت کنید، تا هرجا که لازم شد، به آن‌ها رجوع کنید..

حرکت یکنواخت روی خط راست



در ابتدا به این نکتهٔ مهم توجه کنید که منظور از حرکت یکنواخت آن است که «اندازهٔ (بزرگی) سرعت جسم ثابت است. اما ممکن است راستا و جهت سرعت جسم ثابت نباشد.» مثلاً اگر جسمی بر مسیر دایره‌ای (یا هر مسیر منحنی دیگر) حرکت کند و بزرگی سرعت آن ثابت باشد، آن حرکت نیز یکنواخت است. در شکل روبه‌رو اگر $\dots = v_4 = v_3 = v_2 = v_1$ باشد، این حرکت «دایره ای یکنواخت» نامیده می‌شود. توجه کنید که در این مثال، $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \neq \vec{v}_3 \ \dots$ است. به همین دلیل، وقتی حرکت یکنواخت است، باید نوع مسیر آن را مشخص کنید. حرکت یکنواخت روی خط راست را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

«حرکتی است که در آن، بردار سرعت جسم ثابت باشد.»

توجه کنید که وقتی بردار سرعت جسم ثابت است. (یعنی «ثابت $= \vec{v}$») در این صورت، اندازهٔ سرعت و جهت آن نیز تغییر نمی‌کند و چون جسم همواره در جهت سرعت حرکت می‌کند و جابه‌جا می‌شود، مسیر حرکت جسم، خط راست خواهد بود. علاوه بر آن، سرعت متوسط جسم در این حرکت و در هر بازهٔ زمانی دلخواه، همواره یکسان و برابر سرعت جسم است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{v} = \text{ثابت} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \vec{v} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{ثابت}$$

اگر مکان جسم در لحظهٔ $t_1 = 0$ را با x_0 و در لحظهٔ $t_2 = t$ با x نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$v = \frac{x - x_0}{t - 0} \Rightarrow x = vt + x_0$$

رابطهٔ بالا، «معادلهٔ حرکت یکنواخت روی خط راست و تابعی درجهٔ اولی از زمان است.» در این رابطه، x_0، «مکان اولیه» یعنی مکان جسم در مبدأ زمان $(t = 0)$ است. علاوه بر آن، هر یک از کمیت‌های x، v و x_0 ممکن است مثبت یا منفی باشند، اما t در این رابطه بازهٔ زمانی است. (t_0 را برابر صفر گرفته‌ایم) و درنتیجه همواره مثبت است.