

ریاضیات تجربی

واقعاً جامع کنکور

جلد ۲: بانک تست + پاسخ نامه تشریحی

دوازدهم ۱۲ پانزدهم ۱۱ دهم ۱۰ دکتر محمدرضا میرجلیلی، دکتر مهدی امیریان



مهروماه



پرمخاطب‌ترین کتاب ریاضیات کنکور

جواب ۲۲۰
با بیش از یک میلیون نسخه فروش

حدود ۴۰۰۰ تست به روز در ۸۸ ایستگاه
چیدمان هدفمند تست‌ها از ساده به دشوار
تست‌های پرومکس برای چالش بیشتر و درصد بالاتر
۵۳ آزمون جامع فصلی، مبحثی و شبیه‌ساز کنکور
پاسخ‌نامه‌ی واقعا تشریحی برای همه‌ی تست‌ها



فهرست

فصل ۷: توابع نمایی و لگاریتمی

۵۵	ایستگاه ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
۵۶	ایستگاه ۲: معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی
۵۸	ایستگاه ۳: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن
۵۹	ایستگاه ۴: قوانین و ویژگی‌های لگاریتم
۶۱	ایستگاه ۵: معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی
۶۴	
۶۷	• آزمون (۱) فصل
۶۸	• آزمون (۲) فصل
۳۸۸	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۲

فصل ۸: تابع دهم و یازدهم

۷۱	ایستگاه ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
۷۲	ایستگاه ۲: آشنایی با برخی از انواع توابع
۷۴	ایستگاه ۳: دامنه و برد توابع - تساوی دو تابع
۷۶	ایستگاه ۴: تابع یک‌به‌یک
۷۸	ایستگاه ۵: اعمال جبری روی توابع
۷۹	
۸۲	• آزمون (۱) فصل
۸۳	• آزمون (۲) فصل
۴۱۱	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۹: تابع دوازدهم

۸۵	ایستگاه ۱: انتقال نمودارها
۸۶	ایستگاه ۲: توابع چندجمله‌ای
۹۰	ایستگاه ۳: توابع صعودی و نزولی
۹۱	ایستگاه ۴: ترکیب توابع
۹۴	ایستگاه ۵: تابع وارون
۹۸	
۱۰۴	• آزمون (۱) فصل
۱۰۶	• آزمون (۲) فصل
۱۰۷	• آزمون (۳) فصل
۴۳۵	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۲
ریاضی ۳

فصل ۱۰: مثلثات دهم و یازدهم

۱۰۹	ایستگاه ۱: مثلثات در لباس هندسه
۱۱۰	ایستگاه ۲: دایره‌ی مثلثاتی
۱۱۳	ایستگاه ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
۱۱۴	ایستگاه ۴: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
۱۱۶	ایستگاه ۵: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
۱۱۷	
۱۲۰	• آزمون (۱) فصل
۱۲۱	• آزمون (۲) فصل
۴۷۶	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۱۱: مثلثات دوازدهم

۱۲۳	ایستگاه ۱: نسبت‌های مثلثاتی 2α
۱۲۴	ایستگاه ۲: تابع‌های متناوب
۱۲۷	ایستگاه ۳: توابع مثلثاتی
۱۲۹	ایستگاه ۴: معادله‌های مثلثاتی
۱۳۴	
۱۳۹	• آزمون (۱) فصل
۱۴۰	• آزمون (۲) فصل
۱۴۰	• آزمون (۳) فصل
۴۹۴	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۲
ریاضی ۳

فصل ۱: تعیین علامت و نامعادله

۷	ایستگاه ۱: تعیین علامت عبارت‌های جبری
۸	ایستگاه ۲: روش‌های حل نامعادله‌ها
۹	
۱۱	• آزمون (۱) فصل
۱۲	• آزمون (۲) فصل
۳۱۲	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۱

فصل ۲: معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱۳	ایستگاه ۱: روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم
۱۴	ایستگاه ۲: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم
۱۴	ایستگاه ۳: تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم
۱۶	ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم
۱۶	ایستگاه ۵: مسائلی که به معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌رسند
۱۷	
۱۹	• آزمون (۱) فصل
۲۰	• آزمون (۲) فصل
۳۲۳	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۳: تابع درجه‌ی دوم (سه‌می)

۲۱	ایستگاه ۱: سه‌می و ویژگی‌های آن
۲۲	ایستگاه ۲: نوشتن معادله‌ی سه‌می و نمودار آن
۲۳	ایستگاه ۳: کاربرد سه‌می در مسائل ماکزیمم و مینیمم
۲۵	
۲۷	• آزمون (۱) فصل
۲۸	• آزمون (۲) فصل
۳۳۸	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۴: معادله‌های گویا و رادیکالی

۲۹	ایستگاه ۱: معادله‌های گویا
۳۰	ایستگاه ۲: معادله‌های رادیکالی
۳۲	
۳۴	• آزمون (۱) فصل
۳۵	• آزمون (۲) فصل
۳۵۱	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۲

فصل ۵: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۳۷	ایستگاه ۱: ریشه، توان و توان‌های گویا
۳۸	ایستگاه ۲: عبارت‌های جبری
۴۰	
۴۴	• آزمون (۱) فصل
۴۵	• آزمون (۲) فصل
۳۶۱	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۱

فصل ۶: قدرمطلق و جزء صحیح

۴۷	ایستگاه ۱: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۴۸	ایستگاه ۲: جزء صحیح و ویژگی‌های آن
۴۹	
۵۲	• آزمون (۱) فصل
۵۳	• آزمون (۲) فصل
۳۷۴	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی



ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۱۷: هندسه دوازدهم	
۲۳۷	
۲۳۸	ایستگاه ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی
۲۳۹	ایستگاه ۲: بیضی و ویژگی‌های آن
۲۴۲	ایستگاه ۳: دایره و ویژگی‌های آن
۲۴۷	• آزمون (۱) فصل
۲۴۸	• آزمون (۲) فصل
۶۶۴	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۳

فصل ۱۸: مجموعه	
۲۴۹	
۲۵۰	ایستگاه ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۲۵۱	ایستگاه ۲: متمم یک مجموعه
۲۵۲	ایستگاه ۳: تعداد اعضای یک مجموعه
۲۵۴	• آزمون فصل
۶۸۶	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۱

فصل ۱۹: الگو و دنباله	
۲۵۵	
۲۵۶	ایستگاه ۱: الگو و مفهوم دنباله
۲۵۸	ایستگاه ۲: دنباله‌ی حسابی و ویژگی‌های آن
۲۵۹	ایستگاه ۳: دنباله‌ی هندسی و ویژگی‌های آن
۲۶۳	• آزمون (۱) فصل
۲۶۳	• آزمون (۲) فصل
۶۹۵	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۱

فصل ۲۰: شمارش، بدون شمردن	
۲۶۵	
۲۶۶	ایستگاه ۱: اصل ضرب و اصل جمع
۲۶۷	ایستگاه ۲: جایگشت
۲۶۹	ایستگاه ۳: ترکیب
۲۷۳	• آزمون (۱) فصل
۲۷۳	• آزمون (۲) فصل
۷۱۰	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۱

فصل ۲۱: احتمال	
۲۷۵	
۲۷۶	ایستگاه ۱: مفاهیم اولیه‌ی احتمال
۲۷۷	ایستگاه ۲: احتمال با اندازه‌گیری شانس
۲۷۹	ایستگاه ۳: قوانین احتمال
۲۸۱	ایستگاه ۴: احتمال شرطی
۲۸۳	ایستگاه ۵: پیشامدهای مستقل
۲۸۵	ایستگاه ۶: قانون احتمال کل
۲۹۰	• آزمون (۱) فصل
۲۹۱	• آزمون (۲) فصل
۲۹۲	• آزمون (۳) فصل
۷۲۲	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۱ ریاضی ۲ ریاضی ۳

فصل ۲۲: آمار	
۲۹۳	
۲۹۴	ایستگاه ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار
۲۹۵	ایستگاه ۲: آمار توصیفی
۳۰۰	• آزمون (۱) فصل
۳۰۱	• آزمون (۲) فصل
۷۴۴	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۱ ریاضی ۲

فصل ۲۳: آزمون‌های جامع	
۳۰۳	
۳۰۴	آزمون جامع ۱
۳۰۶	آزمون جامع ۲
۳۰۸	آزمون جامع ۳
۷۵۶	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۱ ریاضی ۲ ریاضی ۳

فصل ۱۲: حد و پیوستگی	
۱۴۳	
۱۴۴	ایستگاه ۱: بخش پذیری
۱۴۵	ایستگاه ۲: فرایندهای حدی
۱۴۶	ایستگاه ۳: محاسبه‌ی حد توابع
۱۴۸	ایستگاه ۴: رفع ابهام صفرصفرم
۱۵۱	ایستگاه ۵: پیوستگی
۱۵۵	ایستگاه ۶: حد بی‌نهایت
۱۵۷	ایستگاه ۷: حد در بی‌نهایت
۱۶۲	• آزمون (۱) فصل
۱۶۴	• آزمون (۲) فصل
۱۶۵	• آزمون (۳) فصل
۵۲۲	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۲ ریاضی ۳

فصل ۱۳: مشتق	
۱۶۷	
۱۶۸	ایستگاه ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
۱۷۰	ایستگاه ۲: تابع مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری
۱۷۳	ایستگاه ۳: مشتق تابع مرکب
۱۷۵	ایستگاه ۴: قاعده‌ی هویتال
۱۷۶	ایستگاه ۵: معادله‌ی مماس
۱۷۸	ایستگاه ۶: مشتق‌پذیری و ارتباط آن با پیوستگی
۱۸۰	ایستگاه ۷: مشتق توابع بدرفتار! ۵ شگفت‌انگیز ...
۱۸۳	ایستگاه ۸: مشتق‌پذیری روی بازه و $\mathbb{R}$
۱۸۴	ایستگاه ۹: رابطه‌ی بین نمودارهای f و f'
۱۸۶	ایستگاه ۱۰: آهنگ تغییر
۱۹۱	• آزمون (۱) فصل
۱۹۲	• آزمون (۲) فصل
۱۹۳	• آزمون (۳) فصل
۵۶۰	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۳

فصل ۱۴: کاربردهای مشتق	
۱۹۵	
۱۹۶	ایستگاه ۱: توابع یک‌توا و اکیداً یک‌توا
۱۹۷	ایستگاه ۲: نقطه‌ی بحرانی
۱۹۹	ایستگاه ۳: اکسترمم‌های نسبی
۲۰۲	ایستگاه ۴: اکسترمم‌های مطلق
۲۰۴	ایستگاه ۵: بهینه‌سازی
۲۰۸	• آزمون (۱) فصل
۲۰۸	• آزمون (۲) فصل
۲۰۹	• آزمون (۳) فصل
۶۰۱	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۳

فصل ۱۵: هندسه یازدهم	
۲۱۱	
۲۱۲	ایستگاه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال
۲۱۵	ایستگاه ۲: نسبت، تناسب و قضیه‌ی تالس
۲۱۸	ایستگاه ۳: تشابه
۲۲۳	• آزمون (۱) فصل
۲۲۴	• آزمون (۲) فصل
۲۲۵	• آزمون (۳) فصل
۶۲۹	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۲

فصل ۱۶: هندسه تحلیلی	
۲۲۷	
۲۲۸	ایستگاه ۱: دستگاه مختصات و ویژگی‌های آن
۲۲۹	ایستگاه ۲: معادله‌ی خط و وضعیت دو خط با هم
۲۳۲	ایستگاه ۳: فاصله‌ی نقطه از خط
۲۳۵	• آزمون (۱) فصل
۲۳۵	• آزمون (۲) فصل
۶۴۸	پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
	ریاضی ۲

تابع درجه‌ی دوم (سهمی)

یک فصل آروم و کاربردی، کوتاهه و بهتون خوش می‌گذره 😊
حالا از ما می‌شنوید تست‌های این فصل را خوب کار کنید.



پیش‌نیازهای اصلی	علاقه‌ی طراح	سهم در کنگور	ایستگاه‌های مهم
- پیش‌نیاز خیلی زیادی نمی‌خواد؛ - ریاضی مقدماتی - اتحادها و تعیین علامت - کار با عددها	- وضعیت سهمی با محورها - معادله‌ی سهمی‌نویسی - رسم سهمی تا دلت بخواد...	۱ تست	- سهمی و ویژگی‌های آن - نوشتن معادله‌ی سهمی و نمودار آن

مراقب باشید توی اشتباهات خودتان نمانید؛ چیزی که باعث غرق‌شدن می‌شود افتادنمان توی آب نیست، زیر آب ماندن و بالا نیامدن است...

ایستگاه ۱ سهمی و ویژگی‌های آن

۱۹۱. نقطه‌ی $S(-1, -4)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = 3x^2 + ax + b$ است. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟
 (۱) -3 (۲) 2 (۳) -1 (۴) -2

(کنکور دی ۱۴۰۱)

۱۹۲. رأس سهمی $y = kx^2 - 4x - 6$ روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟
 (۱) 2 (۲) 6 (۳) -4 (۴) -8

۱۹۳. اگر رأس نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x - c$ نقطه‌ی $(-1, 3)$ باشد، مختصات رأس نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ کدام است؟
 (۱) $(4, -5)$ (۲) $(4, 5)$ (۳) $(0, 5)$ (۴) $(0, 3)$

۱۹۴. اگر خط به معادله‌ی $x = \frac{2}{3}$ سهمی به معادله‌ی $y = (m - 2)x^2 - 3x + m^2 + 1$ را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟
 (۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{33}{16}$ (۳) $\frac{289}{16}$ (۴) $\frac{305}{16}$

(کتاب درسی)

۱۹۵. خط به معادله‌ی $y = \frac{3}{5}$ محور تقارن تابع $f(x) = x^2 - 4x + c$ را روی نمودار تابع قطع می‌کند. مقدار c کدام است؟
 (۱) $4/4$ (۲) $9/2$ (۳) $4/6$ (۴) $4/5$

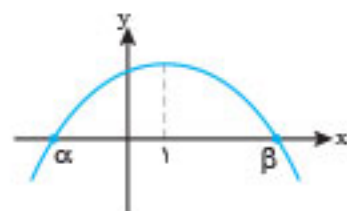
۱۹۶. محور تقارن سهمی‌های $y = x^2 + ax - 2$ و $y = -x^2 - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y = 1$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟
 (۱) -8 (۲) -4 (۳) 8 (۴) 4

(کنکور دی ۱۴۰۱)

۱۹۷. نقاط $(3, -4)$ و $(-1/5, -4)$ روی یک تابع درجه‌ی دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱۹۸. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx - 8a$ است. مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟
 (۱) -12 (۲) 19 (۳) 20 (۴) 12



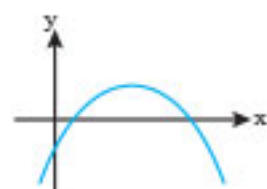
۱۹۹. اگر α و β صفرهای سهمی $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه‌ی مختصات قرار دارد؟
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳)

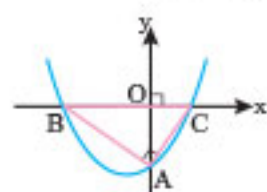
۲۰۰. نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟
 (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

(کنکور ۱۴۰۲)

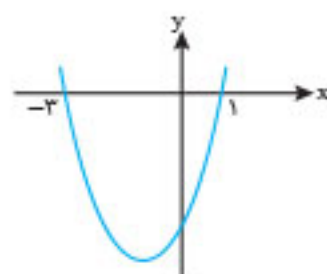
۲۰۱. شکل مقابل، نمودار کدام تابع است؟
 (۱) $y = x^2 - 4x - 3$ (۲) $y = -x^2 + 4x - 3$ (۳) $y = -x^2 - 4x - 3$ (۴) $y = -x^2 + 4x - 4$



۲۰۲. در شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - kx + k - 2$ رسم شده است. اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، اندازه‌ی مساحت آن کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{5}{16}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{5}{8}$



۲۰۳. نمودار تابع $f(x) = (a - 1)x^2 + ax + b + 3$ به صورت مقابل است. کمترین مقدار این تابع کدام است؟
 (۱) -4 (۲) -5 (۳) -6 (۴) -8



۲۰۴. اگر مینیمم مقدار سه‌می $f(x) = ax^2 + 6x + 5$ برابر ۲ باشد، ماکزیمم مقدار تابع $g(x) = (1-a)x^2 + x - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{4}$ (۲) -3 (۳) $-\frac{23}{8}$ (۴) $\frac{25}{8}$

۲۰۵. در یک دامنه‌ی محدود، برای چند مقدار مختلف a ، بیشترین مقدار سه‌می $y = ax^2 + x + 2a$ برابر $-\frac{1}{4}$ است؟

- (۱) ۳ (۲) هیچ مقدار a (۳) ۲ (۴) ۱

۲۰۶. به ازای چند مقدار صحیح m ، نقطه‌ی مینیمم تابع $y = x^2 - mx + 2 - m$ در ناحیه‌ی اول محورهای مختصات قرار دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۰۷. به ازای کدام مقدار a ، برد تابع $f(x) = ax^2 - 2x + a + 8$ برابر $(-\infty, \frac{16}{3}]$ است؟

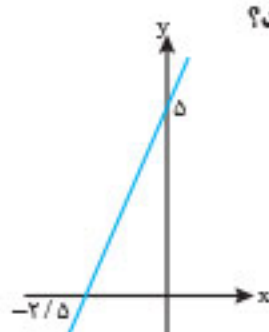
- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) -3 (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۰۸. اگر سه‌می به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ در نقطه‌ی رأس خود دارای بیشترین مقدار باشد، نمودار خط $y = ax + a - 3$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۲۰۹. نقطه‌ی ماکزیمم تابع $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + 1 - m$ روی خط مقابل قرار دارد. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- (۱) -36 (۲) ۳۶ (۳) ۱۲ (۴) -12



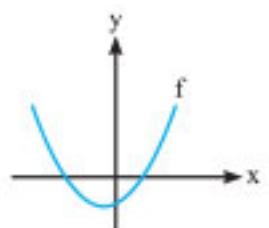
۲۱۰. صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطه‌ی تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سه‌می $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟

(کنکور ۱۴۰۲)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

دهم فصل ۴
بازدهم فصل ۱

ایستگاه ۲ نوشتن معادله‌ی سه‌می و نمودار آن



۲۱۱. اگر α و β ریشه‌های حقیقی تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با نمودار مقابل باشند، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $abc > 0$ (۲) $\alpha^2 + \beta^2 < 0$ (۳) $b^2 + b < 6ac$ (۴) $f(\frac{\alpha + \beta}{2}) = \frac{\Delta}{4a}$

۲۱۲. در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ دو شرط $\frac{b^2}{4} < ac$ و $b + \frac{c}{4} < -3a$ برقرار است. کدام گزینه قطعاً درست است؟

- (۱) $a > 0$ (۲) $c > 0$ (۳) $ac > 0$ (۴) $ab < 0$

۲۱۳. فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بر سه‌می $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سه‌می از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$

۲۱۴. نقاط $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ دو نقطه‌ی متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سه‌می هستند. اگر نقطه‌ی $S(b, b-2)$ رأس این سه‌می باشد،

(کنکور تیر ۱۴۰۴)

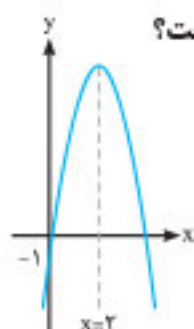
فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد سه‌می با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{13}{8}$

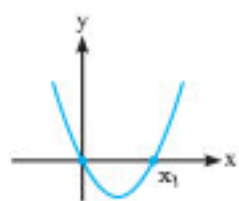
۲۱۵. فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سه‌می $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه‌ی $(3, 1)$ باشد. این سه‌می از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(5, -7)$ (۲) $(5, -9)$ (۳) $(2, 5)$ (۴) $(1, 5)$

۲۱۶. سه‌می به معادله‌ی $y = -2(x+3m-5)^2 + m+2n$ مطابق شکل مقابل است. رأس سه‌می به معادله‌ی $y = mx^2 + nx + 1$ کدام نقطه است؟



- (۱) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ (۲) $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$ (۳) $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ (۴) $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$



۲۱۷. نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + (2a - 5)x + a^2 - 2$ مطابق شکل مقابل است. حاصل ax_1 کدام است؟

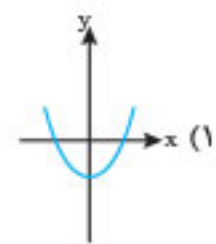
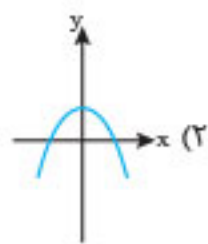
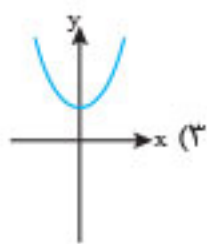
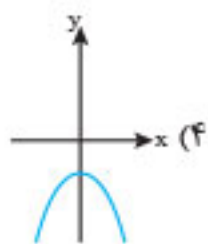
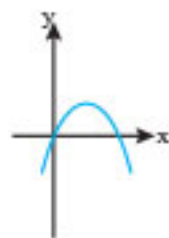
(۴) $\frac{5\sqrt{2}}{2} - 2$

(۳) $5 - \sqrt{2}$

(۲) $5 - 2\sqrt{2}$

(۱) $\frac{5 - 2\sqrt{2}}{2}$

۲۱۸. نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x) = bx^2 - cx + a$ چگونه است؟



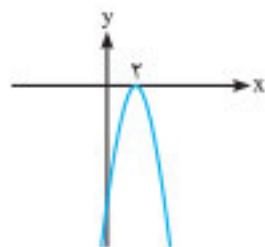
۲۱۹. اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + 8x + c$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار c کدام است؟

(۱) -2

(۲) -8

(۳) -4

(۴) -6



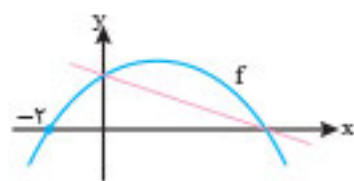
۲۲۰. خط $2y + x = 6$ و سهمی f در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. بیشترین مقدار این سهمی کدام است؟

(۲) $\frac{8}{3}$

(۴) $\frac{4}{3}$

(۱) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{4}{3}$



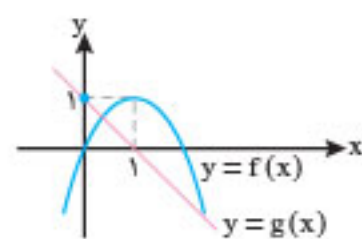
۲۲۱. نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه‌ی مختصات، مطابق شکل مقابل داده شده است. مجموع جواب‌های معادله‌ی $f(x) = g^2(x)$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{2}$

(۱) -2

(۳) $\frac{1}{2}$



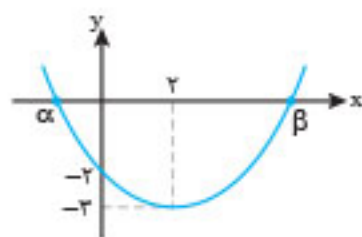
۲۲۲. شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. ریشه‌های کدام معادله $\frac{\alpha}{\beta - 1}$ و $\frac{\beta}{\alpha - 1}$ است؟

(۲) $11x^2 + 28x + 8 = 0$

(۴) $11x^2 + 28x - 8 = 0$

(۱) $11x^2 - 28x + 8 = 0$

(۳) $11x^2 - 28x - 8 = 0$



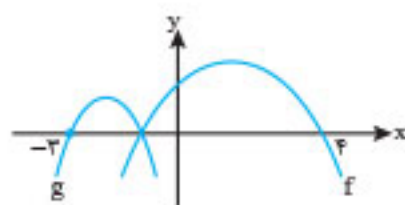
۲۲۳. نمودار دو تابع $f(x) = -2x^2 + ax + 12$ و $g(x) = -x^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. مقدار $(f \cdot g)(1)$ کدام است؟

(۱) -75

(۲) -150

(۳) -50

(۴) -60



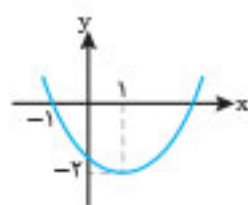
۲۲۴. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. خط $y = x - 3$ این نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند. مختصات وسط این دو نقطه کدام است؟

(۲) $(2, -1)$

(۴) $(0, 2)$

(۱) $(1, -2)$

(۳) $(-1, -1)$



۲۲۵. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x هاست؟

(۴) $-2 < a < 1$

(۳) $a > 3$

(۲) $a < -2$

(۱) $a < 1$

۲۲۶. نمودار سهمی $y = (2m + 3)x^2 + 6x + m$ همواره بالای محور x هاست. حدود m کدام است؟

(۴) $m > -\frac{3}{2}$

(۳) $0 < m < \frac{3}{2}$

(۲) $m > \frac{3}{2}$

(۱) $-\frac{3}{2} < m < 0$

۲۲۷. سهمی به معادله‌ی $y = x^2 - (2m^2 + 1)x + m^2 + m^2 + \frac{1}{4}$ به ازای هر مقدار دلخواه m همواره:

(۲) بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد.

(۱) محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

(۴) در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

(۳) در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

۲۲۸. به ازای چه مقادیری از a ، سه‌می به معادله‌ی $f(x) = (a-2)x^2 + 2x + 1 - a$ فقط از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟
 (۱) $a > 2$ (۲) $a > 1$ (۳) $a < 2$ (۴) $1 \leq a < 2$

(کنکور تیر ۱۴۰۱)

۲۲۹. به ازای چند مقدار a ، سه‌می $y = ax^2 + (3+2a)x$ از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) هیچ مقدار a (۲) تمام مقادیر a (۳) ۱ (۴) ۲

۲۳۰. اگر نمودار تابع $y = mx^2 + (m+4)x + (2-m)$ دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، در این صورت چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار

۲۳۱. به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟
 (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳)

۲۳۲. سه‌می $y = -mx^2 + mx + 1$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟
 (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۳۳. نمودار سه‌می $f(x) = ax^2 + 5x + 7 + a$ همواره زیر خط $y = -3x + 1$ قرار دارد. حدود a کدام است؟
 (۱) $a < -2$ (۲) $a < -8$ (۳) $-8 < a < 0$ (۴) $-2 < a < 0$

(کنکور تیر ۱۴۰۳)

۲۳۴. سه‌می $y = 2ax^2 - 5x + 18a$ در نقطه‌ی A بر نیمساز ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات مماس است. مقدار a ، کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۲۳۵. سه‌می $y = -x^2 + 2x + 1$ خط راست گذرا از نقطه‌ی $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ -1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد،

(خارج ۱۴۰۰)

فاصله‌ی رأس سه‌می از نقطه‌ی M ، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟

(۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

ایستگاه ۳ کاربرد سه‌می در مسائل ماکزیمم و مینیمم

بازدهم فصل ۱

۲۳۶. یک ماهی‌گیر می‌خواهد مطابق شکل در کنار رودخانه، محوطه‌ای مستطیل‌شکل را فنس کشی کند. اگر او فقط هزینه‌ی ۱۰۰ متر فنس کشی را داشته باشد، بیشترین سطحی که با این ۱۰۰ متر می‌تواند ایجاد کند، چند مترمربع است؟

(کتاب درسی)



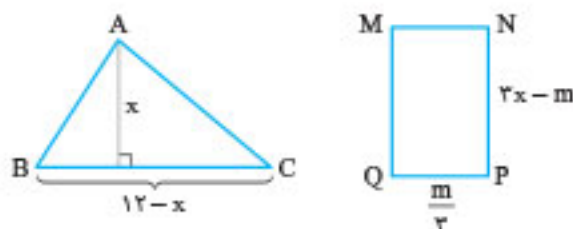
(۱) ۵۲۵ (۲) ۱۲۵۰ (۳) ۱۸۷۵ (۴) ۳۷۵۰

۲۳۷. در متوازی‌الاضلاع داده‌شده در شکل مقابل، مجموع طول دو ضلع مجاور برابر با ۱۱ واحد طول است. حداکثر مقدار مساحت ممکن برای این متوازی‌الاضلاع کدام است؟



(۱) $\frac{3}{8} \times 121$ (۲) $\frac{7}{8} \times 121$ (۳) $\frac{1}{8} \times 121$ (۴) $\frac{3}{4} \times 121$

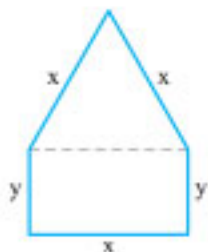
۲۳۸. اگر مساحت مثلث ABC و مستطیل $MNPQ$ هر دو ماکزیمم شود، مقدار m کدام است؟



(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

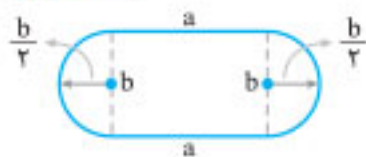
۲۳۹. یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. حداکثر مساحت ممکن (جهت نوردهی بیشتر) در بین پنجره‌هایی که محیطی برابر $4m$ دارند، کدام است؟

(کتاب درسی)



(۱) $\frac{4}{33}(6 - \sqrt{3})$ (۲) $\frac{4}{11}(6 + \sqrt{3})$ (۳) $\frac{4}{33}(6 + \sqrt{3})$ (۴) $\frac{4}{11}(6 - \sqrt{3})$

۲۴۰. زمین تنیسی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط زمین ۶۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را چه مقدار بگیریم تا مساحت قسمت مستطیلی شکل زمین حداکثر مقدار ممکن شود؟ ($\pi \approx 3$)



(۱) $\frac{400}{3} m \times 100 m$ (۲) $\frac{800}{3} m \times 60 m$ (۳) $150 m \times 100 m$ (۴) $150 m \times 60 m$

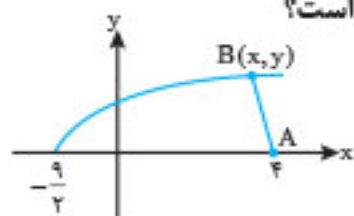
۲۴۱. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای با مجموع ارتفاع و قطر قاعده‌ی ۱۵، کدام است؟

- (۱) $\frac{225}{2}\pi$ (۲) $\frac{225}{4}\pi$ (۳) $\frac{675}{4}\pi$ (۴) $\frac{675}{2}\pi$

۲۴۲. فاصله‌ی بین نقطه‌ای با طول a روی سهمی به معادله‌ی $y = x^2 - 3x + 3$ از نقطه‌ای با همین طول روی خط به معادله‌ی $2y + x + 1 = 0$ را d می‌نامیم. مینیمم مقدار d چقدر است؟

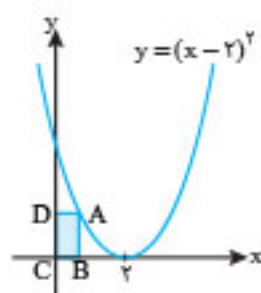
- (۱) $\frac{77}{16}$ (۲) $\frac{31}{16}$ (۳) $\frac{81}{16}$ (۴) $\frac{131}{16}$

۲۴۳. نقطه‌ی A به طول ۴ روی محور x ها قرار دارد. کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقاط منحنی تابع $y = \sqrt{2x+9}$ چقدر است؟



- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۴/۵

۲۴۴. با توجه به شکل، کمترین مقدار محیط مستطیل ABCD کدام است؟



- (۱) ۳ (۲) ۳/۵ (۳) ۴ (۴) ۴/۵

۲۴۵. بیشترین محیط مستطیل محاط در سهمی $f(x) = 2x^2 - 6$ و زیر محور x ها کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۲۶ (۴) ۲۴

تست‌های پرومکس



۲۴۶. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{5}{\sqrt{mx^2 - 8x + 39}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m ، بیشترین مقدار تابع f برابر ۱ باشد، مقدار $|m|$ کدام است؟

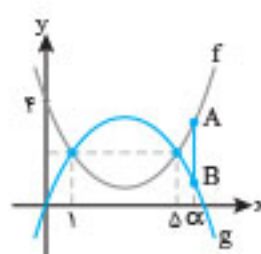
(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۴)

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۴۷. اگر مینیمم سهمی به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ بر ماکزیمم سهمی به معادله‌ی $g(x) = -x^2 + 6x - 18$ منطبق بوده و فاصله‌ی بین نقاط تقاطع منحنی f با محور x ها، ۸ واحد باشد، در این صورت نمودار تابع f ، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

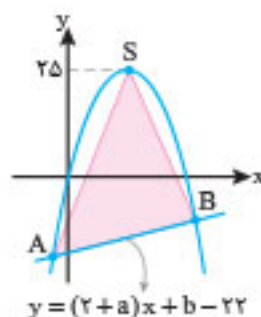
- (۱) $-\frac{63}{16}$ (۲) $-\frac{45}{4}$ (۳) $-\frac{63}{8}$ (۴) $-\frac{45}{8}$

۲۴۸. شکل مقابل نمودار دو سهمی f و g را نشان می‌دهد. به ازای کدام مقدار α ، طول پاره‌خط AB برابر $1/8$ است؟



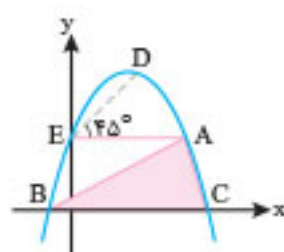
- (۱) ۵/۴ (۲) ۵/۵ (۳) ۵/۸ (۴) ۶

۲۴۹. اگر نمودار سهمی با معادله‌ی $f(x) = ax^2 - 10ax + b$ به صورت مقابل باشد، مساحت ناحیه‌ی رنگی چقدر است؟



- (۱) ۲۷۰ (۲) ۲۶۹ (۳) ۲۶۰ (۴) ۲۷۳

۲۵۰. در سهمی $f(x) = -x^2 + bx + 4$ ، مساحت مثلث ABC کدام است؟ (D رأس سهمی و پاره‌خط EA موازی محور x هاست.)



- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $4\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۲۵۱. اگر رأس سهمی‌های $f(x) = 3x^2 - mx + 3$ و $g(x) = 4x^2 - mx + 4$ در یک ناحیه از محورهای مختصات باشند، مجموعه مقادیر m شامل چند عدد صحیح نیست؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۵۲. اگر α و β صفرهای سهمی $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + 3\beta$ و $f(3 - \sqrt{5}) = f(3 + \sqrt{5})$ باشد، آن‌گاه کمترین مقدار تابع $g(x) = (\alpha - 1)x^2 - 8x + \beta$ کدام است؟ ($\beta \neq 0$)

- (۱) -۵ (۲) -۱۰ (۳) ۵ (۴) ۱۰

۲۵۳. دو خط به موازات محور x ها و به فاصله‌ی ۶ واحد از هم، مفروض‌اند. از تقاطع این دو خط با منحنی $f(x) = ax^2 - 4x + 7$ پاره‌خط‌هایی به طول ۴ و ۱۰ روی آن پدید آمده است. مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{21}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۵۴. سهمی گذرا از نقاط $(1, a)$ و $(-2, a)$ بر خط $y + 3 = 0$ مماس بوده و از هر چهار ناحیه‌ی دستگاه مختصات می‌گذرد. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات ۲ واحد باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) -۲۰ (۳) -۶ (۴) ۶

۲۵۵. سهمی‌های f و g با ضرایب صحیح در رابطه‌ی $(f \cdot g)(x) = x^4 - 14x^2 + 25$ صدق می‌کنند. رئوس این دو سهمی و نقاط برخورد آن‌ها با محور عرض‌ها تشکیل یک چندضلعی می‌دهند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{2}{5}$

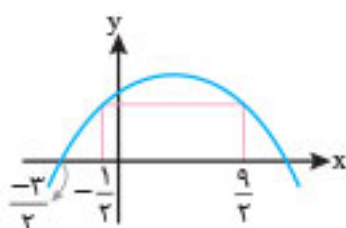
۲۵۶. نمودار سهمی $f(x) = (a - \frac{3}{4})x^2 - 2(a - 3)x + 2$ فقط از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند. به ازای مقادیر مختلف a ، معادله‌ی محورهای تقارن تابع f در کدام بازه قرار می‌گیرند؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-\infty, -2)$ (۳) $(2, +\infty)$ (۴) $(-2, +\infty)$

۲۵۷. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ و مستطیلی با مساحت $\frac{2}{5}$ واحد مربع را نشان می‌دهد.

سهمی به معادله‌ی $y = x^2 + 2x - 1$ نمودار تابع f را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار



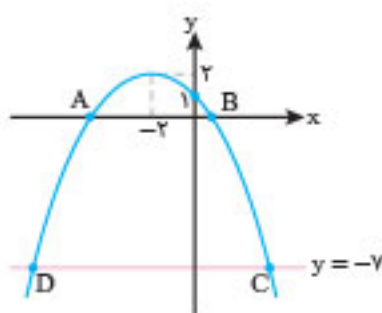
۲۵۸. در شکل مقابل، نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. مساحت دوزنقه‌ی $ABCD$ چقدر است؟

- (۱) $7(3 + \sqrt{2})$

- (۲) $14(3 + \sqrt{2})$

- (۳) $7(3 - \sqrt{2})$

- (۴) $14(3 - \sqrt{2})$



۲۵۹. بیشترین مساحت مستطیلی که به خطوط $y = 7 - 2x$ و $y = x + 10$ و محور x ها محدود شده باشد، چند واحد مربع است؟

- (۱) $\frac{243}{8}$ (۲) $\frac{241}{8}$ (۳) $\frac{239}{8}$ (۴) $\frac{237}{8}$

۲۶۰. خط $y = b - 6x$ بر نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+a}{x-a}$ در نقطه‌ای به طول ۲ مماس است. مقدار $f(b)$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $-\frac{80}{37}$ (۲) $\frac{40}{37}$ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) $\frac{25}{8}$

نعداد سؤالات ۱۰ تست
زمان پیشنهادی ۲۰ دقیقه

آزمون ۱ فصل



۲۶۱. رأس سهمی با صفرهای $1 - \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{2}$ در ناحیه‌ی اول و روی منحنی $x + 2y^2 = 5$ قرار دارد. این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۲۶۲. اگر کمترین مقدار تابع $f(x) = x^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 + m$ برابر با ۷ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

۲۶۳. صفرهای سهمی $f(x) = x^2 - fax + 4a - 3$ اعداد $\frac{m}{m+1}$ و $\frac{m}{m-1}$ هستند. مقدار $f(m^2)$ کدام است؟

- (۱) $3/25$ (۲) $-3/25$ (۳) $-3/75$ (۴) $3/75$

۲۶۴. نقاط $A(k-3, 5)$ و $B(2k+1, 5)$ دو نقطه از سهمی با خط تقارن $x = k$ هستند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۶۵. با توجه به ضابطه‌ی سهمی $y = 2x^2 - mx + m - 2$ ، به ازای کدام مقدار مثبت m ، مساحت مثلثی که دو رأس آن صفرهای این سهمی و رأس سوم آن منطبق بر رأس سهمی است، برابر ۲ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

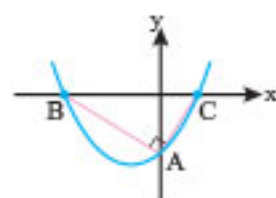
۲۶۶. فاصله‌ی بین دو ریشه‌ی یک سهمی برابر ۴ واحد است. اگر رأس سهمی نقطه‌ی $(1, 1)$ باشد، معادله‌ی سهمی کدام است؟

- (۱) $y = -x^2 + 2x + 3$ (۲) $y = (x-1)(x+3) + 1$ (۳) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ (۴) $y = -\frac{1}{4}(x-1)(x+3)$

۲۶۷. رابطه‌ی $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 56$ بین صفرهای تابع $f(x) = x^2 - bx - 3b^2$ برقرار است. نمودار تابع نسبت به کدام خط نمی‌تواند قرینه باشد؟

- (۱) $x = \frac{1}{2}$ (۲) $x = 1$ (۳) $x = -1$ (۴) $x = -1$ و $x = 1$

۲۶۸. نمودار سهمی $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + (3a-1)x - 3a$ به صورت مقابل است. اگر مثلث ABC در رأس A قائمه‌باشد، مجموع معکوس صفرهای این تابع کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۲۶۹. بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{28}{(x-1)^2 + 4x + 7}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۱۴ (۴) ۱۲

۲۷۰. نمودار سهمی $f(x) = (ax+9)(-2x+6)$ بر محور x مماس است. مقدار عددی a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) -۶

تعداد سؤالات: ۱۰ تست
زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه

آزمون ۲ فصل



۲۷۱. خط $x = -1$ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + 3x + c$ است. اگر رأس سهمی روی خط $y = 1$ قرار داشته باشد، مقدار ac کدام است؟

- (۱) $5/75$ (۲) $3/75$ (۳) $-3/25$ (۴) $-5/25$

۲۷۲. به ازای چند مقدار m ، تابع $y = (1-18m)x^2 - (m^2+1)x + 11$ در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{4}$ دارای ماکزیمم است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ مقدار m (۴) تمام مقادیر m

۲۷۳. صفرهای تابع $y = mx^2 - 4x - (m+4)$ و نقطه‌ی تقاطع آن با محور y ، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر ۳ باشد، اختلاف طول رأس سهمی‌های رسم‌شده توسط مقادیر مختلف m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۲۷۴. اگر $A(2b+1, 2b-b^2)$ و $B(2b-1, 2b-b^2)$ دو نقطه‌ی متمایز با مؤلفه‌های صحیح مثبت از سهمی $y = m(x-\alpha+1)^2 + \alpha+1$ باشند، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۲۷۵. در یک دامنه‌ی محدود، برای چند مقدار مختلف a ، کمترین مقدار سهمی $y = ax^2 + 3x + a$ برابر $\frac{7}{8}$ است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار a

۲۷۶. رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ روی سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b-a$ چقدر است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) -۱۸ (۴) ۱۸

۲۷۷. نقاط $(1, \beta)$ و $(-5, \beta)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{1}{4}$ است. اگر سهمی، محور y را در نقطه‌ای به عرض $\frac{3}{4}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۲۷۸. نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه‌ی دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{18}$ (۲) $-\frac{5}{18}$ (۳) $-\frac{7}{6}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۷۹. اگر نمودار سهمی $f(x) = (3-m)x^2 + 4x + 2m-1$ دقیقاً از ۳ ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور کند، مجموعه‌ی مقادیر m شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

۲۸۰. کوتاه‌ترین فاصله‌ی سهمی $y^2 = 4x$ از نقطه‌ی $M(3, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

همچنین اگر دو طرف رابطه‌ی ۲ را به توان ۲ برسانیم، داریم:

$$\beta^2 = (2\beta + 3)^2 \Rightarrow \beta^2 = 4\beta^2 + 12\beta + 9$$

$$\Rightarrow \beta^2 = 4\beta^2 + 12\beta + 9$$

$$\Rightarrow \beta^2 = 4\beta^2 + 12\beta + 9 \Rightarrow \beta^2 - 36 = 4\beta^2 - 15 \Rightarrow \frac{\beta^2 - 36}{15} = 2\beta \quad \text{۴}$$

حالا اگر معادله‌ی خواسته‌شده را به صورت $x^2 - 9x + 27 = 0$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{\alpha^2 - 9}{4} + \frac{\beta^2 - 36}{15} \xrightarrow{\text{۴ و ۲}} S = 2\alpha + 2\beta \\ \Rightarrow S = 2(\alpha + \beta) = 2(3) = 6 \\ P = x_1 x_2 = (\alpha^2)(\beta^2) = 9\alpha\beta = 9 \times (-3) = -27 \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی خواسته‌شده به صورت $x^2 - 9x - 27 = 0$ خواهد بود.



۱۹۰. گزینه ۲ شکل یاغچه، مستطیلی به ابعاد x و

$2x$ است. اما چون بازدیدکنندگان نباید به فاصله‌ی ۱ متری یاغچه برسند، پس در چهار گوشه‌ی یاغچه ربع دایره‌هایی به شعاع ۱ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم:

$$S_1 = 2x \times x = 2x^2 \quad \text{مساحت یاغچه}$$

مساحت مستطیل‌های کناری + مساحت مستطیل‌های بالایی و پایینی = مساحت زمین محصورشده

مساحت ۴ ربع دایره

$$\Rightarrow S_T = (2x \times 1) \times 2 + (x \times 1) \times 2 + \pi(1)^2 = \pi + 6x$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} S_T = (1 + \frac{\pi}{18})S_1 \Rightarrow \pi + 6x = (1 + \frac{\pi}{18}) \times 2x^2$$

$$\Rightarrow (2 + \frac{\pi}{9})x^2 - 6x - \pi = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (2 + \frac{\pi}{9}) \times (-\pi) = 36 + 8\pi + \frac{4\pi^2}{9} = (\frac{2\pi}{3} + 6)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{2\pi}{3} + 6$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = \frac{6 + \frac{2\pi}{3} + 6}{2(2 + \frac{\pi}{9})} = \frac{12 + \frac{2\pi}{3}}{2(2 + \frac{\pi}{9})} = \frac{6(2 + \frac{\pi}{9})}{2(2 + \frac{\pi}{9})} = 3 \Rightarrow 2x = 6 \quad \text{طول یاغچه}$$

فصل ۳ تابع درجه‌ی دوم (سه‌می)

۱۹۱. گزینه ۳ محل تلاقی سهمی با محور y همان b است:

$$S(-1, -4) \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)} = -1 \Rightarrow a = 6 \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a} = -4 \Rightarrow \frac{\Delta}{4(3)} = 4 \Rightarrow \Delta = 48 \\ \Rightarrow (6)^2 - 12b = 48 \Rightarrow 36 - 12b = 48 \\ \Rightarrow -12b = 12 \Rightarrow b = -1 \quad \text{(عرض از مبدأ)} \end{cases}$$

رنگی:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)} = -1 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow y = 3x^2 + 6x + b$$

رأس سهمی یکی از نقاط خود سهمی بوده و مختصاتش در معادله‌ی آن صدق می‌کند:

$$-4 = 3(-1)^2 + 6(-1) + b \Rightarrow -4 = -3 + b \Rightarrow b = -1$$

$$y = kx^2 - 4x - 6$$

۱۹۲. گزینه ۴

$$\xrightarrow{\text{طول رأس سهمی}} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k}$$

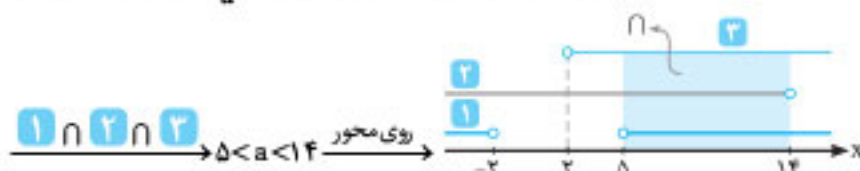
$$\xrightarrow{\text{عرض رأس سهمی}} y_S = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4k(-6)}{4k}$$

$$= -\frac{16 + 24k}{4k} = -\frac{4 + 6k}{k} \quad *$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات رأس}} S(\frac{2}{k}, -\frac{4 + 6k}{k})$$

$$۲ \quad P = \frac{c}{a} = \frac{14 - a}{1} > 0 \Rightarrow 14 - a > 0 \Rightarrow a < 14$$

$$۳ \quad S > 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = 2(a - 2) > 0 \Rightarrow a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2$$



رنگی:

$$a = 3 \xrightarrow{\text{در معادله}} x^2 - 2x + 11 = 0 \quad \Delta = (4 - 44) < 0 \quad \text{ریشه ندارد} \quad \text{حذف گزینه‌های «۲» و «۳»}$$

$$a = 0 \xrightarrow{\text{در معادله}} x^2 + 4x + 14 = 0 \quad \Delta = (16 - 56) < 0 \quad \text{ریشه ندارد} \quad \text{حذف گزینه‌ی «۱»}$$

۱۸۷. گزینه ۴

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -5 \end{cases} \quad ۱$$

اگر S' و P' به ترتیب جمع و ضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید باشند، آن‌گاه:

$$S' = (\frac{\alpha}{\beta} - 1) + (\frac{\beta}{\alpha} - 1)$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{S^2 - 2P}{P} - 2 \xrightarrow{۱} \frac{(-1)^2 - 2(-5)}{-5} - 2 = -\frac{11}{5} - 2 = -\frac{21}{5}$$

$$P' = (\frac{\alpha}{\beta} - 1)(\frac{\beta}{\alpha} - 1) = 1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \xrightarrow{۲} \frac{21}{5}$$

در نهایت معادله‌ی جدید را می‌نویسیم:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - (-\frac{21}{5})x + \frac{21}{5} = 0 \Rightarrow 5x^2 + 21x + 21 = 0$$

۱۸۸. گزینه ۴

$$3x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{7}{3} \\ P = \alpha\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

اگر معادله‌ی خواسته‌شده را به صورت $X^2 - SX + P = 0$ در نظر بگیریم و ریشه‌هایش را با X' و X'' نمایش دهیم، طبق اطلاعات داده‌شده در تست داریم:

$$X' = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^2 + (\frac{1}{\alpha})^2 \xrightarrow{\frac{1}{\alpha} = \beta} X' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \frac{49}{9} - 2 \Rightarrow X' = \frac{31}{9}$$

$$X'' = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{\alpha} \xrightarrow{\frac{1}{\alpha} = \beta} X'' = \alpha + \beta = \frac{7}{3}$$

و همچنین:

$$\Rightarrow \begin{cases} S = X' + X'' = \frac{31}{9} + \frac{7}{3} = \frac{31 + 21}{9} = \frac{52}{9} \\ P = X' \cdot X'' = \frac{31}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{217}{27} \end{cases}$$

با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$X^2 - \frac{52}{9}X + \frac{217}{27} = 0 \xrightarrow{\times 27} 27X^2 - 156X + 217 = 0$$

$$\Rightarrow 27X^2 = 156X - 217$$

۱۸۹. گزینه ۳ α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x + 3 \xrightarrow{\frac{x}{x} = \frac{\alpha}{\beta}} \begin{cases} \alpha^2 = 3\alpha + 3 \quad ۱ \\ \beta^2 = 3\beta + 3 \quad ۲ \end{cases}$$

با ضرب رابطه‌ی ۱ در α داریم:

$$\alpha^2 = 3\alpha + 3 \xrightarrow{۱} \alpha^2 = 3(3\alpha + 3) + 3 = 12\alpha + 9 \Rightarrow \alpha^2 - 9 = 12\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 - 9}{4} = 3\alpha \quad ۲$$

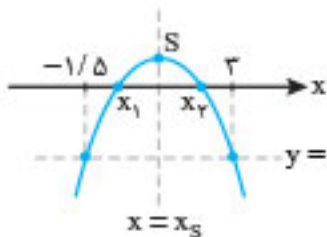
🌟 **زنگی:** یکی از سهمی‌ها رو به بالا و دیگری رو به پایین است:



$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{2} = \frac{-(-2)}{2(-1)} \Rightarrow a=2$$

$y=1$ در هر دو سهمی صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} a=2 \Rightarrow \begin{cases} y=x^2+2x-2=1 \\ y=-x^2-2x+b=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع کن}} b-2=2 \Rightarrow b=4 \\ \Rightarrow a \times b = 8 \end{aligned}$$



۱۹۷. **گزینه ۱** شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود و با توجه به یکسان بودن عرض دو نقطه‌ی داده‌شده، معادله‌ی محور تقارن سهمی به صورت زیر و از میانگین طول دو نقطه به دست می‌آید:

$$x_S = \frac{-1/\Delta + 3}{2} = \frac{1/\Delta}{2} = \frac{2}{4}$$

همچنین داریم:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2 \times x_S = 2 \times \frac{2}{4} = \frac{2}{2}$$

۱۹۸. **گزینه ۳** با توجه به شکل، α و β صفرهای سهمی و طول رأس سهمی برابر یک است؛ پس:

$$\begin{cases} x_S = \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \Rightarrow S=2 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-8a}{a} = -8 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 2^2 - 2(-8) = 4 + 16 = 20$$

۱۹۹. **گزینه ۱**

$$y = 2\Delta\alpha x^2 + 4x + \beta \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = \frac{-4}{2\Delta\alpha} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-4}{2\Delta\alpha} \quad (1) \\ P = \frac{c}{a} = \frac{\beta}{2\Delta\alpha} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\beta}{2\Delta\alpha} \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2)} \alpha = \frac{1}{2\Delta\alpha} \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^2 = \frac{1}{2\Delta} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\Delta}$$

با جای‌گذاری در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow \frac{1}{\Delta} + \beta = \frac{-4}{2\Delta \times \frac{1}{\Delta}} \Rightarrow \frac{1}{\Delta} + \beta = \frac{-4}{2\Delta} \Rightarrow \beta = -1$$

چون طبق فرض $\beta > \alpha$ است، این حالت قابل قبول نیست. برای $\alpha = -\frac{1}{\Delta}$ داریم:

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta} \Rightarrow -\frac{1}{\Delta} + \beta = \frac{-4}{2\Delta(-\frac{1}{\Delta})} \Rightarrow \beta = 1$$

با جای‌گذاری در سهمی، داریم: $y = 2\Delta(-\frac{1}{\Delta})x^2 + 4x + 1 \Rightarrow y = -2x^2 + 4x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = \frac{2}{2} = 1 \\ y_S = f(\frac{2}{2}) = -2 \times \frac{4}{4} + 4 \times \frac{2}{2} + 1 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

پس رأس سهمی در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات قرار دارد.

۲۰۰. **گزینه ۳** اگر دو نقطه‌ی $A(x_1, k)$ و $B(x_2, k)$ روی سهمی قرار داشته باشند،

مقدار طول نقطه‌ی رأس سهمی از رابطه‌ی $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$ به دست می‌آید.

بر این اساس، طول رأس سهمی، $x_S = \frac{-\Delta + 3}{2} = -1$ است. با توجه به توضیح متن تست، مختصات نقطه‌ی رأس سهمی $(-1, 1)$ و ضابطه‌ی آن $y = a(x - (-1))^2 + 1$ ($a \neq 0$) است.

$$y = a(x+1)^2 + 1 = a(x^2 + 2x + 1) + 1 = ax^2 + 2ax + (a+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-2a}{a} = -2 \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{a+1}{a} \end{cases}$$

طبق فرض تست نقطه‌ی S روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد، بنابراین:

$$-\frac{4+6k}{k} = -4 \times \frac{2}{k} - 4 \xrightarrow{\times (-k)} 4+6k = 8+4k \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k=2$$

$$\xrightarrow{*} y_S = -\frac{4+6 \times 2}{2} = -8$$

۱۹۳. **گزینه ۴**

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 + 2x - c \xrightarrow{f(-1)=3} 3 = (-1)^2 + 2(-1) - c \\ \Rightarrow 3 = -1 - c \Rightarrow c = -4 \end{aligned}$$

حالا باید با توجه به ضابطه‌ی تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4$ ، ضابطه‌ی تابع $y = f(2x-1)$ را (یا جایگزین کردن $(2x-1)$ به جای x ها) به دست آورده و بعد مختصات رأس نمودار آن را به دست آوریم:

$$y = f(2x-1) = (2x-1)^2 + 2(2x-1) + 4$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 + 4 \Rightarrow y = 4x^2 + 3$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(4)} = 0, \quad y_S = y(0) = 4(0)^2 + 3 = 3 \Rightarrow S(0, 3)$$

🌟 **زنگی:**

$$S(-1, 3) \xrightarrow{x \rightarrow (x-1)} S_1(0, 3) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} S_2(0, 3)$$

پس مختصات رأس سهمی تابع $f(2x-1)$ به صورت $(0, 3)$ خواهد بود.

۱۹۴. **گزینه ۴** وقتی خطی یک سهمی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی محور تقارن آن است:

$$y = (m-2)x^2 - 3x + m^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x = x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2(m-2)} = \frac{2}{3}$$

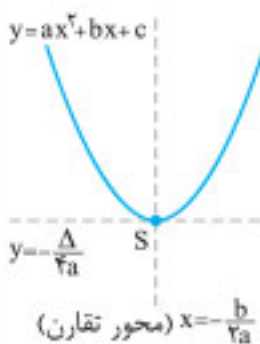
$$4(m-2) = 9 \xrightarrow{+8} m-2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{+2} m = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$$

در معادله‌ی $y = (m-2)x^2 - 3x + m^2 + 1$ محل تلاقی سهمی با محور y ها، $c = m^2 + 1$ است:

$$c = m^2 + 1 = \left(\frac{17}{4}\right)^2 + 1 = \frac{289}{16} + 1 = \frac{305}{16}$$

۱۹۵. **گزینه ۳** اگر نمودار تابع را که یک سهمی است با محور تقارنش در ذهن‌تان تجسم کنید، متوجه می‌شوید خط افقی که با محور تقارن سهمی روی نمودار تابع تلاقی می‌کند، همان خط $y = y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

نگاه کن:



$$\begin{aligned} y = x^2 - 4x + c \\ \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4c = 16 - 4c \\ \frac{-\Delta}{4a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4c-16}{4} = \frac{3}{4} \\ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4c-16 = 3 \\ \Rightarrow 4c = 19 \Rightarrow c = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4} \end{aligned}$$

۱۹۶. **گزینه ۳**

$$\begin{cases} y = x^2 + ax - 2 \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = \frac{-a}{2 \times 1} = -\frac{a}{2} \\ y = -x^2 - 2x + b \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1 \end{cases}$$

طبق فرض تست، معادله‌ی این دو خط یکسان است، بنابراین داریم:

$$-\frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a=2 \quad *$$

از طرفی از فرض دوم سؤال متوجه می‌شویم که این دو سهمی در دو نقطه، مشترک هستند که عرض این دو نقطه برابر و برابر ۱ است، پس برای سهمی اول داریم:

$$\xrightarrow{*} y = x^2 + 2x - 2 \xrightarrow{y=1} x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقاط تلاقی}} \begin{cases} A(1, 1) \\ B(-3, 1) \end{cases}$$

این دو نقطه باید در معادله‌ی سهمی دوم هم صدق کنند، بنابراین داریم:

$$y = -x^2 - 2x + b \xrightarrow{A(1, 1)} 1 = -1 - 2 + b \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow a \times b = (2)(4) = 8$$



۲.۶. گزینه ۲ نقطه‌ی مینیمم سهمی $y = x^2 - mx + 2 - m$ در رأس سهمی رخ می‌دهد؛

پس:

$$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{m}{2} \\ y_S = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - m\left(\frac{m}{2}\right) + 2 - m = -\frac{1}{4}m^2 - m + 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات رأس}} S\left(\frac{m}{2}, -\frac{m^2}{4} - m + 2\right)$$

در ناحیه‌ی اول طول و عرض نقاط مثبت است، پس:

$$\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0 \quad 1 \\ -\frac{1}{4}m^2 - m + 2 > 0 \xrightarrow{\Delta = 1 - 4(-\frac{1}{4})(2) = 3} \\ m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2(-\frac{1}{4})} = -2(1 \pm \sqrt{3}) \xrightarrow{\text{جواب نامعادله}} \\ -2(\sqrt{3} + 1) < m < 2(\sqrt{3} - 1) \quad 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1 \cap 2} 0 < m < 2(\sqrt{3} - 1) \simeq 1/4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 1$$

۲.۷. گزینه ۲

$$R_f = (-\infty, \frac{16}{3}] \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \quad 1 \\ y_S = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{f - 4a(a + 1)}{4a} = \frac{16}{3} \Rightarrow -\frac{f(a^2 + 4a - 1)}{4a} = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 4a - 1}{a} = \frac{16}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3a^2 + 12a - 3 = 16a$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 4a - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 16 + 36 = 52} a = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{2 \times 3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \text{ یا } -3 \quad 2$$

$$\xrightarrow{1 \cap 2} a = -3$$

۲.۸. گزینه ۱ چون سهمی دارای ماکزیمم است، پس $a < 0$ است، لذا داریم:

$$\begin{cases} y = ax + a - 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب خط} = a < 0 \\ \text{عرض از مبدأ خط} = a - 3 < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{رسم خط}} \\ \text{تلاقی با محور } x \text{ ها} \Rightarrow 0 = ax + a - 3 \Rightarrow x = \frac{-(a - 3)}{a} < 0 \end{cases}$$

پس خط داده‌شده، از ناحیه‌ی اول عبور نمی‌کند.

🌟 رنگی: تابعی یا اعداد فرضی در نظر بگیر:

$$y = -x^2 + x + 1 \xrightarrow{\text{در خط } a = -1} y = -x - 2 \xrightarrow{\text{رسم کن}} \text{رسم خط}$$

۲.۹. گزینه ۱ نقطه‌ی ماکزیمم تابع f همان رأس سهمی است؛ پس:

$$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m+2)}{2(-2)} = \frac{m+2}{4} \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((m+2)^2 + 4(1-m))}{4(-2)} = \frac{m^2 - 4m + 12}{8} \end{cases}$$

نقطه‌ی S روی خط داده شده است، پس معادله‌ی خط را می‌نویسیم:

$$m = \frac{\Delta - 0}{-(-2/\Delta)} = 2 \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}} y - \Delta = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + \Delta$$

$$\xrightarrow{S \in \text{خط}} \frac{m^2 - 4m + 12}{8} = 2\left(\frac{m+2}{4}\right) + \Delta \Rightarrow \frac{m^2 - 4m + 12}{8} = \frac{m+12}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} m^2 - 4m + 12 = 2m + 24 \Rightarrow m^2 - 6m - 12 = 0$$

$$P = m_1 m_2 = \frac{c}{a} = -36$$

و اما خواسته‌ی سؤال:

یا توجه به این که مجموع مقدار مربعات ریشه‌ها Δ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \Delta \Rightarrow S^2 - 2P = \Delta \Rightarrow (-2)^2 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = \Delta$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2a + 2 = -a \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{در ضابطه‌ی سهمی}} y = -\frac{2}{3}(x+1)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{عرض از مبدأ سهمی}} y = \frac{1}{3}$$

۲.۱۰. گزینه ۲ حذف گزینه‌ی «۱» $a < 0 \Rightarrow$ دهانه‌ی سهمی رو به پایین است.

هر دو صفر متمایز سهمی مثبت است، یعنی $P > 0$ ، $S > 0$ و $\Delta > 0$ ، همه‌ی این موارد

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{-1} = 3 > 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{-1} = 4 > 0$$

$$\Delta = 16 - 4(3) = 4 > 0$$

اما Δ گزینه‌ی «۴» برابر صفر و $\frac{-b}{a}$ در گزینه‌ی «۳» منفی است!

۲.۱۱. گزینه ۲ ابتدا محل تلاقی تابع با محور y ها (نقطه‌ی A) را می‌یابیم:

$$x = 0 \xrightarrow{\text{در فایندر}} f(0) = 0 - 0 + k - 2 \Rightarrow A(0, k - 2)$$

از طرفی مجموع ضرایب تابع f برابر صفر است، پس ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k-2}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \begin{cases} B(\frac{k-2}{2}, 0) \\ C(1, 0) \end{cases}$$

یا توجه به قائم بودن مثلث در رأس A ، اضلاع AB و AC بر هم عمودند:

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{0 - (k-2)}{1 - 0} = -(k-2) \\ m_{AB} = \frac{0 - (k-2)}{\frac{k-2}{2} - 0} = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط عمود بودن}} m_{AC} \times m_{AB} = -1$$

$$\Rightarrow -(k-2) \times (-2) = -1 \Rightarrow k-2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(-\frac{1}{2}, 0) \xrightarrow{C(0,0)} BC = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \\ A(0, -\frac{1}{2}) \Rightarrow OA = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |OA| \times |BC| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

🌟 رنگی: فاصله‌ی BC همان قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها، یعنی $BC = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است!

۲.۱۲. گزینه ۱ یا توجه به شکل داده‌شده، داریم:

$$x_S = \frac{-3+1}{2} = -1 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -1 \xrightarrow{b \rightarrow a} \frac{a}{2(a-1)} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2a - 2 = a \Rightarrow a = 2$$

یا توجه به شکل $f(1) = 0$ است؛ پس:

$$f(x) = x^2 + 2x + b + 3 \Rightarrow f(1) = 1 + 2 + b + 3 = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$\min(f) = y_S = f(x_S) = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$$

۲.۱۳. گزینه ۳

$$\min(f) = y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(36 - 4 \times a \times \Delta)}{4a} = \frac{2a - 36}{4a} = \frac{2a - 36}{4a}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2a - 36 = \Delta \Rightarrow 12a = 36 \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{\text{در } g} g(x) = -2x^2 + x - 3$$

$$\Rightarrow \max(g) = y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(1 - 4(-2)(-3))}{4(-2)} = -\frac{23}{8}$$

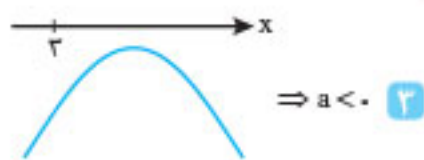
۲.۱۴. گزینه ۴ عرض نقطه‌ی رأس سهمی را برابر $-\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1 - 4a^2}{4a} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 4a^2 = a \Rightarrow 4a^2 + a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (4a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \text{ یا } \frac{1}{4}$$

تابع دارای ماکزیمم است در نتیجه $a < 0$ بوده؛ پس فقط $a = -\frac{1}{4}$ قابل قبول است.

یا توجه به ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که نمودار تابع f باید زیر محور x باشد؛ به این صورت:



بنابراین:

$$f(0) < 0 \Rightarrow c < 0$$

$$\frac{c}{a} < -3 \Rightarrow ac > 0$$

رنگی:

$$b = 0 \xrightarrow{\text{در شرط ها}} 0 < ac, \frac{c}{a} < -3a$$

در این دو فرض $c = -3$ و $a = -1$ صدق می‌کند، ببین:

$$ac = (-1)(-3) > 0, \frac{c}{a} < -3a \Rightarrow \frac{-3}{-1} < -3(-1) \Rightarrow -1 < 3 \checkmark$$

یا توجه به این اعداد فقط «گزینه ۳» یا عددهای $a = -1, b = 0, c = -3$ هماهنگه!

گزینه ۱

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} A(-2, \Delta) \in f \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = \Delta \\ B(0, \Delta) \in f \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = \Delta \Rightarrow c = \Delta \\ C(1, 1) \in f \Rightarrow a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + \Delta = \Delta \\ a + b + \Delta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بررسی گزینه ها}} f(x) = 2x^2 + 4x + \Delta \Rightarrow f(-1) = 2 - 4 + \Delta = 3$$

پس این سهمی از نقطه‌ی $(-1, 3)$ می‌گذرد.

گزینه ۳ طول رأس سهمی که مختصات دو نقطه‌ی هم‌عرض آن $A(2a + 3, a - 2)$ و $B(7 - 2a, a - 2)$ باشد، برابر یا میانگین طول‌های این دو نقطه است:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(2a + 3) + (7 - 2a)}{2} = 5 \Rightarrow b = 5$$

پس مختصات رأس سهمی (نقطه‌ی S)، $(5, 3)$ است.

یا توجه به طبیعی بودن مؤلفه‌های نقاط A و B می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 7 - 2a > 0 \Rightarrow a < \frac{7}{2} \\ 2a + 3 > 0 \Rightarrow a > -\frac{3}{2} \\ a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2 \end{cases}$$

اشتراک مجموعه‌های بالا، بازه‌ی $2 < a < \frac{7}{2}$ است. تنها عضو طبیعی در این مجموعه که باعث طبیعی شدن مؤلفه‌های این دو نقطه می‌شود $a = 3$ است. حالا مختصات یکی از دو نقطه‌ی A یا B را بر حسب مقدار $a = 3$ می‌یابیم:

$$B(7 - 2a, a - 2) = B(1, 1)$$

معادله‌ی سهمی را بر اساس مختصات نقطه‌ی رأس آن می‌یابیم:

$$y = k(x - 5)^2 + 3$$

با جای‌گذاری مختصات نقطه‌ی $B(1, 1)$ در معادله‌ی سهمی، مقدار k را می‌یابیم:

$$1 = k(1 - 5)^2 + 3 \Rightarrow 1 = 16k + 3 \Rightarrow k = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}$$

معادله‌ی سهمی $y = \frac{-1}{8}(x - 5)^2 + 3$ و عرض‌ازمیداً آن برابر است با:

$$y = -\frac{1}{8}(0 - 5)^2 + 3 = \frac{-25}{8} + 3 = \frac{-1}{8}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد نمودار سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ برابر قدرمطلق عرض‌ازمیداً یعنی $\frac{1}{8}$ است.

گزینه ۲

$$S(h, k) \xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}} y = a(x - h)^2 + k$$

$$\xrightarrow{\text{رأس}} \frac{A(-1, 9)}{y = a(x + 1)^2 + 9}$$

چون سهمی از نقطه‌ی $(3, 1)$ عبور می‌کند، پس این نقطه در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند:

$$1 = a(3 + 1)^2 + 9 \Rightarrow -8 = 16a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

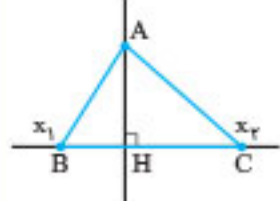
ضابطه‌ی سهمی $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 9$ و نقطه‌ی $(5, -9)$ در آن صدق می‌کند.

گزینه ۴ مجموع ضرایب معادله‌ی $2x^2 - (m + 2)x + m = 0$ برابر صفر است. پس ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{2}$$

اندازه‌ی تفاضل این دو ریشه همان اندازه‌ی قاعده‌ی مثلث موردنظر است.

$$\text{اندازه‌ی قاعده‌ی مثلث} = |x_2 - x_1| = \left|1 - \frac{m}{2}\right| = \frac{|m - 2|}{2}$$



از طرفی محل تقاطع نمودار تابع داده‌شده با محور y ها، برابر است با:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0)^2 - (m + 2)(0) + m \Rightarrow y = m$$

اندازه‌ی y همان ارتفاع مثلث موردنظر است:

طبق فرض داریم:

$$S = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{|m - 2|}{2} \times |m| = \frac{3}{4} \Rightarrow |m(m - 2)| = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 2m = 3 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m + 1)(m - 3) = 0 \\ \Rightarrow (m + 1)(m - 3) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 3 \\ m^2 - 2m = -3 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 = 0 \end{cases}$$

ریشه‌ی حقیقی ندارد.

از طرف دیگر طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ برابر است با:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-m}{2} = \frac{m}{2} \xrightarrow{\text{یا توجه به}} \begin{cases} m = -1 \Rightarrow x_S = \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \\ m = 3 \Rightarrow x_S = \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

گزینه ۲ الف: سهمی رو به بالاست، پس $a > 0$ است.

ب: سهمی محور y ها را زیر محور x ها قطع کرده است، پس $c < 0$ است.

پ: طول رأس سهمی منفی است، پس: $-\frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$

در نتیجه داریم:

$$a > 0, b > 0, c < 0 \Rightarrow abc < 0 \Rightarrow \text{حذف می‌شود.}$$

از روی نمودار تابع، کاملاً مشخص است که تابع f دارای دو صفر مختلف‌العلامت است که قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است؛ پس:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta < 0 \\ P = \alpha\beta < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS < 0$$

گزینه ۲ درست است.

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$$

$$\xrightarrow{4ac > 4ac} b^2 > 4ac \xrightarrow{b > 0} b^2 + b > 4ac$$

گزینه ۳ حذف می‌شود.

می‌دانیم که رأس سهمی، در وسط صفرهای تابع قرار دارد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} x_S = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \text{حذف می‌شود.}$$

رنگی: شکلی یا اعداد فرضی در نظر بگیر:

$\alpha = 1, \beta = -2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 4 = 5 < 0 \checkmark$

معادله‌ی سهمی $y = a(x - 1)(x + 2)$

صندوق $(0, -1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 1)(x + 2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -1$

این هم برای بررسی بقیه‌ی گزینه‌ها!!

گزینه ۳

$$\frac{b^2}{4} < ac \Rightarrow b^2 < 4ac \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$b + \frac{c}{2} < -3a \Rightarrow 2b + c < -6a \Rightarrow \frac{9a + 2b + c}{f(2)} < 0 \Rightarrow f(2) < 0$$

۲۱۶. گزینه ۴

راهنما: در سهمی‌هایی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ ، ریشه‌ی پیرانتز (یعنی $x=h$) همان محور تقارن سهمی است.

در این سؤال یا توجه به سهمی، خط $x=2$ محور تقارن آن بوده و $y(0)=-1$ است؛ بنابراین:

$$y = -2(x+2m-5)^2 + m + 2n$$

$$x+2m-5=0 \Rightarrow x=-2m+5=2 \Rightarrow m=1$$

$$\text{جای‌گذاری} \rightarrow y = -2(x-2)^2 + 1 + 2n \Rightarrow y(0) = -2(-2)^2 + 1 + 2n = -1$$

$$\Rightarrow -8 + 1 + 2n = -1 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$$

حالا یا توجه به مقادیر m و n داریم:

$$y = mx^2 + nx + 1 = x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{cases} x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(1)} = -\frac{3}{2} \\ y_s = y\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1 = -\frac{9}{4} + 1 = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow S\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

۲۱۷. گزینه ۲

شکل سؤال به ما می‌گوید که نمودار سهمی از مبدأ عبور می‌کند. پس باید مختصات $O(0,0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق کند:

$$0 = 0 + 0 + a^2 - 2 \Rightarrow a^2 = 2 \xrightarrow{\text{جذری‌گیری}} a = \pm\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب } x^2 \text{ بدهیم و دو طرفه سهمی رو به بالاست.}} a = \sqrt{2}$$

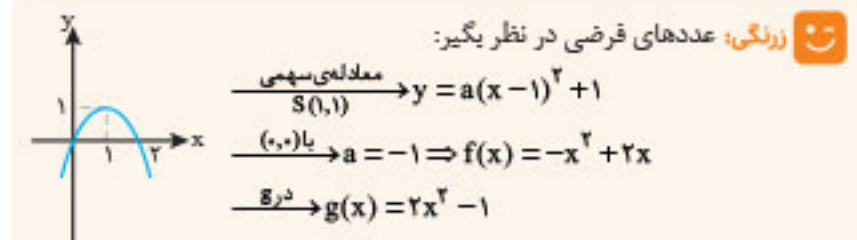
$$0 + x_1 = -\frac{2a-5}{a} \Rightarrow x_1 = -\frac{2\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}} \Rightarrow ax_1 = 5 - 2\sqrt{2}$$

۲۱۸. گزینه ۱

$$f(x) = ax^2 + bx + c \begin{cases} \text{دهانه رو به پایین است.} & a < 0 \\ \text{نمودار از مبدأ گذشته} & f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \\ x_s > 0 & -\frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = bx^2 + a = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-a}{b} \xrightarrow{\frac{a < 0}{b > 0}} x = \pm\sqrt{\frac{-a}{b}}$$

یعنی تابع g دارای دو صفر قرینه است و دهانه‌ی آن به سمت بالاست ($b > 0$)، پس پاسخ درست **گزینه ۱** است.



۲۱۹. گزینه ۲

از شکل سؤال پیداست که سهمی به معادله $y = ax^2 + \lambda x + c$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x مماس است؛ بنابراین:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-\lambda}{2a} = 2 \Rightarrow \lambda a = -4 \xrightarrow{\lambda \neq 0} a = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (\lambda)^2 - 4(-2)(c) = 0 \Rightarrow 4\lambda + 8c = 0$$

$$\Rightarrow 4c = -\lambda \xrightarrow{\lambda = -4} c = -1$$

رنگی:

$$f(x) = ax^2 + \lambda x + c = a(x-2)^2 = ax^2 - 4ax + 4a$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه}} \lambda = -4a \Rightarrow a = -2, c = 4a \Rightarrow c = -8$$

۲۲۰. گزینه ۴ نقاط تلاقی خط داده‌شده با محورهای مختصات را می‌یابیم:

$$2y + x = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ y = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

بنابراین نمودار f به صورت مقابل خواهد بود:

$$\Rightarrow f(x) = a(x+2)(x-6)$$

$$\xrightarrow{f(0)=2} 2 = a(0+2)(0-6) \Rightarrow 2 = -12a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{6} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}(x+2)(x-6)$$

$$x_s = \frac{-2+6}{2} = 2 \Rightarrow \max(f) = y_s = f(2) = -\frac{1}{6}(2+2)(2-6) = 4$$

۲۲۱. گزینه ۴

$$g(x) = mx + h \xrightarrow{m=-1, h=1} g(x) = -x + 1$$

برای سهمی f داریم:

$$S(1,1) \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + 1 \xrightarrow{O(0,0) \in f} 0 = a(0-1)^2 + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x-1)^2 + 1 = -x^2 + 2x$$

حالا برای حل معادله داریم:

$$f(x) = g^2(x) \Rightarrow -x^2 + 2x = (-x+1)^2 \Rightarrow -x^2 + 2x = x^2 - 2x + 1$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} 2x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مرتبه‌کن}} S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

۲۲۲. گزینه ۲ ابتدا ضابطه‌ی تابع f را می‌نویسیم:

$$S(2,-3) \Rightarrow f(x) = a(x-2)^2 - 3 \xrightarrow{f(0)=-2} -2 = a(0-2)^2 - 3$$

$$\Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) - 3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -8 \end{cases} *$$

حالا معادله‌ی خواسته‌شده را با ریشه‌های $x_1 = \frac{\alpha}{\beta-1}$ و $x_2 = \frac{\beta}{\alpha-1}$ ، به صورت $x^2 - S'x + P' = 0$ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین:

$$S' = x_1 + x_2 = \frac{\alpha}{\beta-1} + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{\alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}$$

$$= \frac{(S^2 - 2P) - S}{P - S + 1} = \frac{16 - 4 - 4}{-8 - 4 + 1} = \frac{8}{-11}$$

$$P' = x_1x_2 = \left(\frac{\alpha}{\beta-1}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha-1}\right) = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = \frac{P}{P - S + 1} = \frac{-8}{-11} = \frac{8}{11}$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{8}{11}\right)x + \frac{8}{11} = 0 \xrightarrow{\times 11} 11x^2 + 8x + 8 = 0$$

۲۲۳. گزینه ۲ با توجه به شکل داده‌شده، داریم:

$$f(4) = 0 \Rightarrow -2 \times 16 + 4a + 12 = 0 \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x^2 + 5x + 12 = (x-4)(-2x-3) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -\frac{3}{2}$$

پس $x = -\frac{3}{2}$ صفر تابع g هم است، یعنی $x_1 = -\frac{3}{2}$ و $x_2 = -3$ صفرهای تابع g هستند؛ بنابراین:

$$g(x) = -x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = b \Rightarrow -3 + \left(-\frac{3}{2}\right) = b \Rightarrow b = -\frac{9}{2} \\ P = x_1x_2 = -c \Rightarrow (-3)\left(-\frac{3}{2}\right) = -c \Rightarrow c = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{9}{2} \xrightarrow{x=1} g(1) = -1 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = -10$$

$$f(1) = -2 + 5 + 12 = 15$$

$$\Rightarrow (f \cdot g)(1) = f(1)g(1) = (15)(-10) = -150$$

۲۲۴. گزینه ۲ با توجه به معلوم بودن مختصات رأس سهمی، معادله‌ی تابع $f(x)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \xrightarrow{h=1, k=-2} f(x) = a(x-1)^2 - 2$$

$$\xrightarrow{(-1,0) \in f} 0 = a(-1-1)^2 - 2 \Rightarrow 0 = 4a - 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$$

حالا سهمی f را با خط $y = x - 3$ تلاقی می‌دهیم:

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = x - 3 \xrightarrow{\times 2} (x^2 - 2x + 1) - 4 = 2x - 6$$

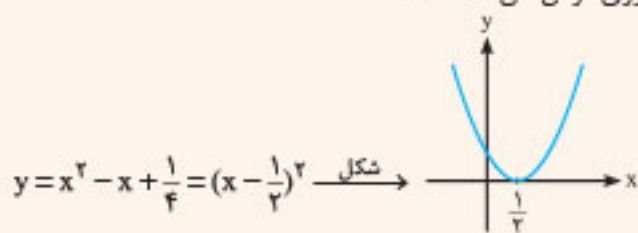
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در تابع } f \text{ یا خط}} \begin{cases} y = 1 - 3 = -2 \Rightarrow A(1, -2) \\ y = 3 - 3 = 0 \Rightarrow B(3, 0) \end{cases}$$

پس خط $y = x - 3$ سهمی f را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند که مختصات وسط

این دو نقطه برابر است با: $M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (2, -1)$

زنگی: این جوری فرض کن: $m=0$



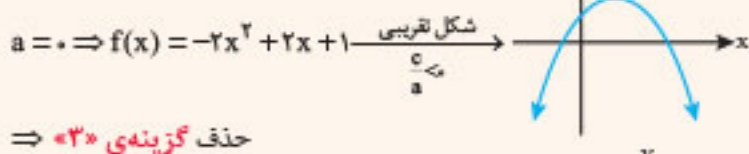
۲۲۸. گزینه ۴) با توجه به فرض سؤال باید نمودار سهمی f به یکی از دو فرم مقابل باشد و این یعنی صفرهای سهمی هر دو باید نامنفی باشند؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 1 & a-2 < 0 \Rightarrow a < 2 \\ 2 & P = \alpha\beta \geq 0 \Rightarrow \frac{1-a}{a-2} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \leq a < 2 \\ 3 & S = \alpha + \beta > 0 \Rightarrow \frac{-2}{a-2} > 0 \Rightarrow a-2 < 0 \Rightarrow a < 2 \\ 4 & \Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(a-2)(1-a) > 0 \xrightarrow{+} a^2 - 3a + 3 > 0 \xrightarrow{\Delta < 0} a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

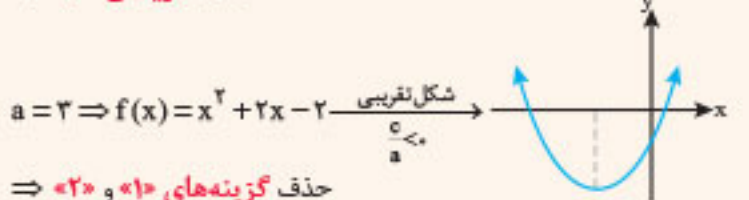
پس سه جمله‌ای $a^2 - 3a + 3$ همواره مثبت است.

$1 \cap 2 \cap 3 \cap 4 \Rightarrow 1 \leq a < 2$

زنگی:



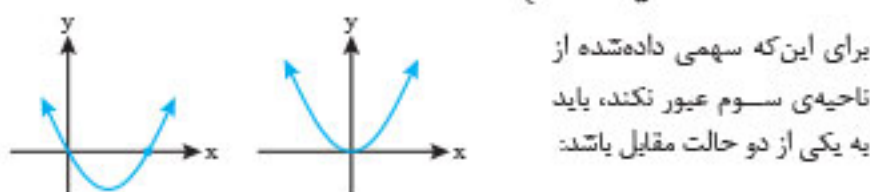
حذف گزینه‌ی «۳»



حذف گزینه‌های «۱» و «۲»

۲۲۹. گزینه ۱) سهمی داده‌شده، از مبدأ مختصات می‌گذرد، ببین:

$$y = ax^2 + (3+2a)x = x(ax+3+2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x = -\frac{3+2a}{a} \end{cases}$$



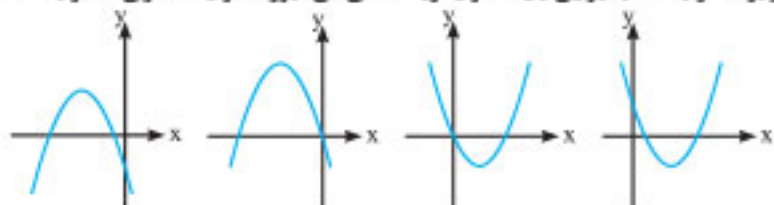
یا توجه به شکل‌های رسم‌شده، ضریب x^2 باید مثبت و ریشه‌ی دوم معادله‌ی $y=0$ باید نامنفی باشد؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 1 & a > 0 \\ 2 & -\frac{3+2a}{a} > 0 \Rightarrow 3+2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow 1 \cap 2 = \emptyset$

پس به ازای هیچ مقداری از a ، نمودار سهمی داده‌شده نمی‌تواند از ناحیه‌ی سوم عبور نکند.

۲۳۰. گزینه ۲) مطابق شکل‌های زیر برای این که نمودار تابع درجه‌ی دوم، دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، باید دو ریشه‌ی هم‌علامت داشته باشد یا یکی از ریشه‌های آن برابر صفر باشد؛ بنابراین باید ضرب ریشه‌های آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



$$\begin{aligned} \Delta & > 0 \Rightarrow (m+4)^2 - 4m(2-m) > 0 \\ & \Rightarrow m^2 + 4m + 16 - 8m + 4m^2 > 0 \\ & \Rightarrow 5m^2 - 4m + 16 > 0 \text{ همواره درست است} \\ P & \geq 0 \Rightarrow \frac{2-m}{m} \geq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2 \Rightarrow m = \{1, 2\} \end{aligned}$$

زنگی: طول یکی از ریشه‌ها $x_1 = -1$ و محور تقارن $x_g = 1$ است، پس ریشه‌ی دیگر $x_2 = 1+2=3$ است که ریشه‌ی $y = x-3$ نیز هست. از طرفی نقطه‌ی رأس سهمی $S(x_g, y_g)$ یا $S(1, -2)$ نیز در معادله‌ی $y = x-3$ صدق می‌کند، پس: $A(1, -2), B(3, 0)$

۲۲۵. گزینه ۲) همواره بالای محور x هایبودن نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به معنای همواره مثبت بودن عبارت درجه‌ی دوم بوده و شرطش این است که $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد؛ پس:

$$\begin{aligned} 1 & 1-a > 0 \xrightarrow{+a} a < 1 \\ 2 & \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 - 4(1-a)(-a) < 0 \\ & \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 24 + 4a - 4a^2 < 0 \xrightarrow{+} 6 + a - a^2 < 0 \\ & \Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-3)(a+2) > 0 \\ & \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|cccc} a & -\infty & -2 & 3 & +\infty \\ \hline a^2 - a - 6 & + & - & + & \end{array} \\ & \xrightarrow{\text{ما می‌خواهیم که}} a < -2 \text{ یا } a > 3 \xrightarrow{a < 1} a < -2 \\ & \xrightarrow{a^2 - a - 6 > 0} a < -2 \text{ یا } a > 3 \end{aligned}$$

زنگی: باید $1-a > 0$ باشد؛ پس $a < 1$ و بنابراین گزینه‌ی «۳» حذف می‌شود.

از طرفی به ازای $a=0$ ضابطه‌ی تابع برابر است با: $y = x^2 + 2\sqrt{6}x$

که نمودار تابع در دو نقطه محور x ها را قطع می‌کند؛ بنابراین گزینه‌های «۱» و «۴» حذف می‌شوند.

۲۲۶. گزینه ۲) شکل سهمی باید به صورت مقابل باشد:

$$\begin{aligned} \text{شرط رابنویس} & \begin{cases} a > 0 \Rightarrow 2m+3 > 0 \Rightarrow m > -\frac{3}{2} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4(2m+3)(m) < 0 \end{cases} \\ & \xrightarrow{-(-4)} 2m^2 + 3m - 9 > 0 \Rightarrow (2m-3)(m+3) > 0 \\ & \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -3 \text{ یا } m > \frac{3}{2} \\ & \xrightarrow{1 \cap 2} m > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

زنگی: نباید ریشه داشته باشد!

$$\begin{aligned} m=1 & \Rightarrow y = \Delta x^2 + 6x + 1 \\ & \xrightarrow{\Delta = 36 - 2 > 0} \text{حذف گزینه‌های «۳» و «۴»} \\ & \text{۲ ریشه دارد} \\ m=-1 & \Rightarrow y = x^2 + 6x - 1 \\ & \xrightarrow{\Delta = 36 + 4 > 0} \text{حذف گزینه‌ی «۱»} \\ & \text{۲ ریشه دارد} \end{aligned}$$

۲۲۷. گزینه ۳) می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ یا شرط $\Delta = 0$ و $x_g = \frac{-b}{2a} > 0$ در نقطه‌ای به طول مثبت و یا شرط $\Delta = 0$ و $x_g = \frac{-b}{2a} < 0$ در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود. همچنین این سهمی با شرط $\Delta < 0$ و $a < 0$ همواره پایین‌تر از محور طول‌ها و با شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$ همواره بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد. (تسايد ديگه نيازى به گفتن نياسته كه با شرط $\Delta > 0$ سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کرده و از اون عبور می‌کند) حال باید ببینیم سهمی داده‌شده کدام شرط را دارد:

$$\begin{aligned} \Delta & = b^2 - 4ac = (-(2m^2+1))^2 - 4(1)(m^2+m^2+\frac{1}{4}) \\ & = 4m^4 + 4m^2 + 1 - 4m^2 - 4m^2 - 1 = 0 \\ x_g & = \frac{-b}{2a} = \frac{2m^2+1}{2} > 0 \end{aligned}$$

می‌بینیم که شرط $\Delta = 0$ و $x_g > 0$ برقرار بوده و گزینه‌ی «۳» درست است.

$$\Rightarrow (a+8)(a-2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -8 \text{ یا } a > 2 \quad \text{۲}$$

$$\text{۱} \cap \text{۲} \rightarrow a < -8$$

رنگی: 

دو ریشه دارد $\xrightarrow{a < 0} -x^2 + 8x + 5 < 0 \xrightarrow{\text{در نامعادله}} a = -1$

حذف گزینه‌ی «۴» $\Rightarrow$ همواره منفی نیست!

دو ریشه دارد $\xrightarrow{a < 0} -3x^2 + 8x + 3 < 0 \xrightarrow{\text{در نامعادله}} a = -3$

حذف گزینه‌های «۱» و «۳» $\Rightarrow$ همواره منفی نیست!

۲۳۴. گزینه ۴: شرط مماس بودن یعنی ضابطه‌ی سهمی و $y = x$ را مساوی هم می‌گذاریم و معادله‌ی حاصل باید ریشه‌ی مضاعف منفی داشته باشد.

چون نمودار تابع و خط $y = x$ در ناحیه‌ی سوم بر هم مماس‌اند، معادله‌ی $2ax^2 - 5x + 18a = x$ دارای ریشه‌ی مضاعف منفی است.

$$2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 36 - 4(2a)(18a) = 0 \xrightarrow{+36} 1 - 4a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $2ax^2 - 6x + 18a = 0$ برابر $\frac{3}{2a}$ یا $x_s = -\frac{-6}{2(2a)} = -\frac{3}{2a}$ است. یا توجه به منفی بودن ریشه‌ی مضاعف این معادله، a نیز باید منفی باشد؛ در نتیجه $a = -\frac{1}{2}$ جواب تست است.

۲۳۵. گزینه ۴: خط موردنظر را به صورت $y = mx + h$ در نظر می‌گیریم:

$$h = -1 \Rightarrow y = mx - 1 \xrightarrow{(1,0) \in \text{خط}} 0 = m \times 1 - 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow y = x - 1 \xrightarrow{\text{تلاقی با سهمی}} x - 1 = -x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ و } 2 \xrightarrow{\text{در خط}} \begin{cases} A(-1, -2) \\ B(2, 1) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{AB \text{ وسط پاره خط } M} M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$y = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x_s = \frac{-2}{2(-1)} = 1 \Rightarrow y_s = -1 + 2 + 1 = 2 \Rightarrow S(1, 2)$$

$$\Rightarrow MS = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

۲۳۶. گزینه ۲: مطابق شکل، اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم، طول فنس به کاررفته برابر است با:

$$x + 2y = 100$$

از طرفی برای مساحت این مستطیل داریم:

$$S = xy \xrightarrow{\text{از } x+2y=100 \text{ قرار بده}} S = (100 - 2y)y = -2y^2 + 100y$$

حال می‌خواهیم تابع مساحت (که معادله‌ی یک سهمی است) بیشترین مقدار خود را اختیار کند. یادمان هست که بیشترین مقدار یک سهمی در رأس آن اتفاق می‌افتد:

$$S = -2y^2 + 100y \Rightarrow x_{\text{راس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = 25$$

$$\Rightarrow S_{\max} = S(25) = -2(25)^2 + 100(25) = -1250 + 2500 = 1250 \text{ م}^2$$

یعنی اگر ابعاد زمین مستطیل‌شکلی را به صورت $x \times y = 50 \times 25$ انتخاب کنیم، بیشترین مقدار ممکن برای مساحت ایجاد می‌شود. ($x = 100 - 2y = 100 - 50 = 50$)

رنگی: 

$$x + 2y = 100 \xrightarrow{\text{ماکزیمم شده } xy} \begin{cases} x = 50 \\ 2y = 50 \Rightarrow y = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = xy = 50 \times 25 = 1250$$

۲۳۷. گزینه ۳: با توجه به شکل رسم‌شده، $m + n = 11$ و مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $S = nh$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:

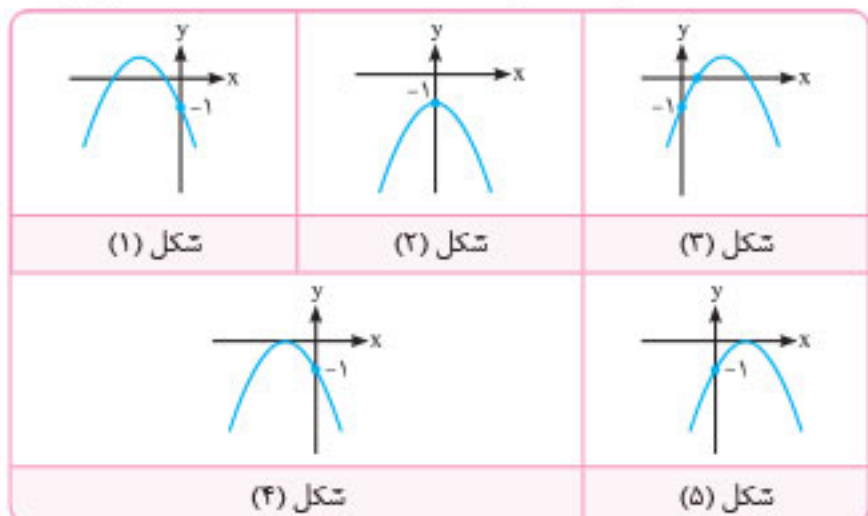
$$\sin 30^\circ = \frac{h}{m} \xrightarrow{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} h = \frac{1}{2}m$$

۲۳۱. گزینه ۱: ابتدا توجه کنید که به ازای $a = 3$ ضابطه‌ی تابع می‌شود $f(x) = 3x - 1$ و نمودار تابع f از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. فرض کنید $a \neq 3$.

می‌دانیم اگر ضریب x^2 بزرگ‌تر از صفر باشد، نمودار تابع درجه‌ی دوم حتماً از ناحیه‌ی اول می‌گذرد؛ پس حتماً باید:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad \text{۱}$$

یا شرط $a < 3$ ، یکی از شکل‌های زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم. البته توجه داشته باشید که $f(0) = -1$ است، یعنی نمودار تابع محور y را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند.



از این ۵ شکل، فقط شکل (۳) مدنظر ما نیست، پس شرایط شکل (۳) را محاسبه کرده و آن را از شرط $a < 3$ کم می‌کنیم (اصل متمم). اما مشاهده می‌کنیم که در شکل (۳) نمودار تابع در دو نقطه با طول‌های مثبت محور x را قطع کرده است، یعنی شرایط شکل (۳) به صورت مقابل است:

$$\Delta > 0, P > 0, S > 0$$

و اما حل این سه نامعادله:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a+6)(a-2) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -6 \text{ یا } a > 2 \quad \text{۲}$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a-3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad \text{۳}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < a < 3 \quad \text{۴}$$

$$\text{۲} \cap \text{۳} \cap \text{۴} \rightarrow 2 < a < 3 \quad \text{۵}$$

حالا برای پیدا کردن جواب نهایی مسئله باید ۵ را از ۱ کم کنیم، پس جواب نهایی مسئله برابر است با:

$$a \leq 2$$



رنگی:  این جوری فرض کن:

$$a = 0 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x) = -3x^2 - 1$$

می‌بینید که سهمی از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد! پس هر گزینه‌ای که $a = 0$ را قبول ندارد، حذف می‌شود؛ یعنی گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴»!

۲۳۲. گزینه ۴: معادله‌ی تلاقی دو تابع ریشه ندارد؛ بنابراین داریم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow -mx^2 + mx + 1 = -m - x$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} mx^2 - (m+1)x - (m+1) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ریشه ندارد}} \Delta < 0 \Rightarrow (m+1)^2 + 4m(m+1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از } m+1} (m+1)(m+1+4m) < 0 \Rightarrow (m+1)(5m+1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < -\frac{1}{5} \Rightarrow \text{در این بازه عدد صحیح وجود ندارد.}$$

۲۳۳. گزینه ۲: کافی است نامعادله‌ی $f(x) < -3x + 1$ را حل کنیم:

$$ax^2 + 5x + 7 + a < -3x + 1 \Rightarrow ax^2 + 8x + 6 + a < 0$$

$$a < 0 \quad \text{۱}$$

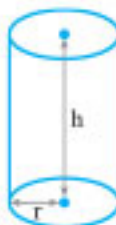
$$\Delta < 0 \Rightarrow 64 - 4a(6+a) < 0 \xrightarrow{+(-4)} a^2 + 6a - 16 > 0$$

رنگی: چون جمع دو عبارت مثبت مقداری ثابت است $(2a + 3b = 600)$ ،

ضرب آن‌ها (یعنی $2a \times 3b = 6ab$) در نتیجه ab زمانی ماکزیمم می‌شود که آن عبارت‌ها مساوی باشند؛ پس:

$$2a = 300 \Rightarrow a = 150 \text{ m}, 3b = 300 \Rightarrow b = 100 \text{ m}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 150 \text{ m} \times 100 \text{ m} = 15000 \text{ m}^2$$



۲۴۱. گزینه ۲: استوانه‌ای با شعاع قاعده‌ی r (قطر $2r$) و ارتفاع h در نظر می‌گیریم:

$$2r + h = 15 \Rightarrow h = 15 - 2r$$

$$S = 2\pi rh$$

$$\Rightarrow S = 2\pi r(15 - 2r) = 30\pi r - 4\pi r^2$$

نمودار تابع S بر حسب r یک سهمی بوده که دارای بالاترین نقطه است $(a = -4\pi < 0)$ و

زمانی حداکثر مقدار خود را اختیار می‌کند که $r = \frac{-b}{2a} = \frac{-30\pi}{2(-4\pi)} = \frac{15}{4}$ انتخاب شود:

$$S_{\max} = S\left(\frac{15}{4}\right) = -4\pi\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 30\pi\left(\frac{15}{4}\right) = -\frac{225}{4}\pi + \frac{450}{4}\pi = \frac{225}{4}\pi$$

۲۴۲. گزینه ۲: یا انتخاب نقطه‌ی $A(a, a^2 - 3a + 3)$ به طول a روی سهمی به

معادله‌ی $y = x^2 - 3x + 3$ و نقطه‌ی $B(a, \frac{-1-a}{2})$ به طول a روی خط به معادله‌ی

$$2y + x + 1 = 0 \quad (\text{که معادل } y = \frac{-1-x}{2} \text{ است}) \text{ طول } AB \text{ را محاسبه می‌کنیم:}$$

$$AB = \sqrt{(a-a)^2 + (a^2 - 3a + 3 + \frac{1+a}{2})^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2})^2} = |a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}| = a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}$$

توجه کنید که در عبارت درجه‌ی دوم $a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}$ داریم:

$$\Delta = (-\frac{5}{2})^2 - 4(1)(\frac{7}{2}) = \frac{25}{4} - 14 < 0$$

چون ضریب a^2 مثبت است، پس این عبارت همواره مثبت است. در نتیجه:

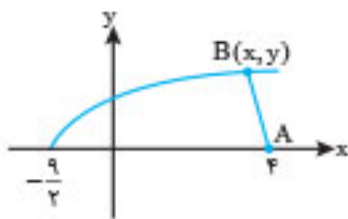
$$|a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}| = a^2 - \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}$$

نمودار تابع فاصله‌ی AB یک سهمی است و به دلیل مثبت بودن ضریب a^2 ، مینیمم دارد

$$\text{و مقدار این مینیمم به ازای } a = \frac{-(-\frac{5}{2})}{2(1)} = \frac{5}{4} \text{ به دست می‌آید؛ پس:}$$

$$AB_{\min} = (\frac{5}{4})^2 - \frac{5}{2}(\frac{5}{4}) + \frac{7}{2} = \frac{25}{16} - \frac{25}{8} + \frac{7}{2} = \frac{-25}{16} + \frac{7}{2} = \frac{31}{16}$$

۲۴۳. گزینه ۳: شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:



فاصله‌ی نقطه‌ی A تا B از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \xrightarrow{y=\sqrt{x+1}} AB = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 2x + 9}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

عبارت زیر رادیکال، یک سه‌جمله‌ای درجه‌ی دوم است که کمترین مقدار آن از رابطه‌ی

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36 - 4 \times 25}{4 \times 1} = 16 \Rightarrow \min(AB) = \sqrt{16} = 4$$

۲۴۴. گزینه ۲: اگر مختصات نقطه‌ی A را به صورت (x, y) در نظر بگیریم، با توجه به

$$\begin{cases} AB = y = (x-2)^2 \\ BC = x \end{cases} \quad \text{شکل داریم:}$$

اگر محیط مستطیل را با P نمایش دهیم، داریم:

$$P = 2(AB + BC) = 2((x-2)^2 + x) = 2x^2 - 6x + 8$$

$$\min(P) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4 \times 2 \times 8}{4 \times 2} = -\frac{28}{8} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$S = nh = n\left(\frac{1}{2}m\right) \Rightarrow S = \frac{1}{2}mn \xrightarrow[n=1-m]{m+n=11} \rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}m(1-m) = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}m^2 \xrightarrow{\text{مربک}} S = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$$

نمودار تابع مساحت متوازی‌الاضلاع، معادله‌ی یک سهمی است و زمانی بیشترین مقدار

$$\text{خود را اختیار می‌کند که } m = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$$

$$S_{\max} = S\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \times 121$$

$$S = mn \sin \theta \xrightarrow{\theta=90^\circ} S = mn \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}mn$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی}} a + b = 11 \xrightarrow{\max(ab)} a = b = \frac{11}{2}$$

$$\xrightarrow{*} \max(S) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{121}{8}$$

رنگی:

۲۳۸. گزینه ۳:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}x(12-x) = 6x - \frac{1}{2}x^2 = \max \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{1}{2})} = 6$$

$$S_{MNPQ} = \frac{m}{2}(2x-m) \xrightarrow{x=6} \frac{m}{2}(12-m) = 6m - \frac{1}{2}m^2 = \max$$

$$\Rightarrow m = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{1}{2})} = 6$$

۲۳۹. گزینه ۳: محیط یا پیرامون پنجره برابر است با:

از طرفی مساحت پنجره که از مجموع مساحت‌های مستطیل و مثلث متساوی‌الاضلاع

حاصل می‌شود، برابر است با:

$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

حالا از رابطه‌ی $2x + 2y = 4$ ، y را بر حسب x یافته و در رابطه‌ی S جایگزین می‌کنیم:

$$2x + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 4 - 2x \xrightarrow{+2} y = 2 - x$$

$$\Rightarrow S = x(2 - x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مربک}} S = 2x - x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 1\right)x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{\sqrt{3}-4}{4}\right)x^2 + 2x \xrightarrow{\text{برای ماکزیمم شدن } S} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(\frac{\sqrt{3}-4}{4})} = \frac{-4}{\sqrt{3}-4}$$

بنابراین:

$$S_{\max} = \left(\frac{\sqrt{3}-4}{4}\right)\left(\frac{16}{(\sqrt{3}-4)^2}\right) + \frac{-8}{\sqrt{3}-4}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}-4} - \frac{8}{\sqrt{3}-4} = \frac{-4}{\sqrt{3}-4} = \frac{4}{4-\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویاکن}} \frac{4}{4-\sqrt{3}} \times \frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{4(4+\sqrt{3})}{16-3} = \frac{4(4+\sqrt{3})}{13}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{4}{13}(4+\sqrt{3})$$

۲۴۰. گزینه ۳: محیط یا پیرامون زمین از دو تا طول مستطیل $(2a)$ و دو تا محیط نیم‌دایره‌ای

به شعاع $\frac{b}{2}$ تشکیل شده است:

$$2a + \pi b = 600 \xrightarrow{\pi \approx 3} 2a + 3b = 600$$

از طرفی مساحت قسمت مستطیل شکل زمین تنیس برابر است با:

حال برای این که تابع مساحت مستطیل را فقط بر حسب یک پارامتر (مثلاً b) بنویسیم،

کافی است از رابطه‌ی $2a + 3b = 600$ ، مقدار a را بر حسب b یافته و در تسوی $S = ab$

$$2a + 3b = 600 \Rightarrow 2a = 600 - 3b \xrightarrow{+2} a = 300 - \frac{3}{2}b$$

$$\Rightarrow S = ab = \left(300 - \frac{3}{2}b\right)b \Rightarrow S = -\frac{3}{2}b^2 + 300b$$

$$\xrightarrow{\text{برای حداکثر شدن } S} b = \frac{-300}{2(-\frac{3}{2})} = \frac{300}{3} = 100 \text{ m} \Rightarrow a = 300 - \frac{3}{2}(100)$$

$$\Rightarrow a = 150 \text{ m} \Rightarrow S_{\max} = 150 \text{ m} \times 100 \text{ m} = 15000 \text{ m}^2$$



$$\frac{x^2}{f} \rightarrow \frac{9}{f} = \alpha^2 - 6\alpha + 5 \Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + \frac{11}{f} = 0$$

$$\Delta = 36 - 11 = 25 \Rightarrow \alpha = \frac{6 \pm 5}{2 \times 1} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{11}{2} = 5.5$$

که با توجه به شکل $\alpha = 5.5$ قابل قبول است.

۲۴۹. (گزینه ۴) نمودار سهمی از مبدأ مختصات گذشته است، پس نقطه‌ی $(0, 0)$

در معادله‌ی آن صدق می‌کند؛ یعنی: $f(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = ax^2 - 10ax$

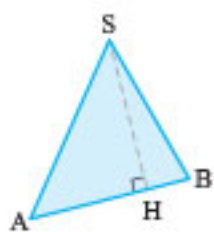
$$\Rightarrow x_S = \frac{-(-10a)}{2a} = 5 \Rightarrow S(5, 25) \Rightarrow f(5) = 25$$

$$\Rightarrow a(5)^2 - 10a \times 5 = 25 \Rightarrow -25a = 25 \Rightarrow a = -1$$

پس ضابطه‌ی تابع f و معادله‌ی خط به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} y = f(x) = -x^2 + 10x \\ y = x - 22 \end{cases}$$

با توجه به شکل، مساحت ناحیه‌ی رنگی برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} SH \times AB$$

نقاط A و B از تلاقی سهمی و خط به دست می‌آیند؛ پس:

$$-x^2 + 10x = x - 22 \Rightarrow x^2 - 9x - 22 = 0 \Rightarrow (x - 11)(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 11 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی خط}} y_B = -11 \\ x_A = -2 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی خط}} y_A = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(11, -11) \\ A(-2, -24) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(11+2)^2 + (-11+24)^2}$$

$$= \sqrt{13^2 + 13^2} = 13\sqrt{2}$$

ارتفاع مثلث (SH) همان فاصله‌ی رأس سهمی از خط $x - y - 22 = 0$ است.

$$SH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{S(5, 25)} SH = \frac{|\Delta - 25 - 22|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{42}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} SH \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{42}{\sqrt{2}} \times 13\sqrt{2} = 21 \times 13 = 273$$

۲۵۰. (گزینه ۲) با توجه به شکل سؤال داریم:

$$DE \text{ شیب پاره خط } = m = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = 1$$

D رأس سهمی است؛ پس:

$$x_D = \frac{-b}{2a} = \frac{b}{2} \Rightarrow y_D = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{b^2}{4} + b\left(\frac{b}{2}\right) + c = \frac{b^2}{4} + c$$

$$x_E = 0 \Rightarrow y_E = f(0) = c$$

همچنین:

با جای گذاری در * داریم:

$$\frac{\frac{b^2}{4} + c - c}{\frac{b}{2} - 0} = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{2} = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + c$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A تا محور x ها برابر ارتفاع مثلث ABC است:

$$\text{ارتفاع مثلث} = y_A = y_E = c \Rightarrow h = c$$

قاعدگی مثلث (BC) است که B و C صفرهای سهمی هستند؛ پس:

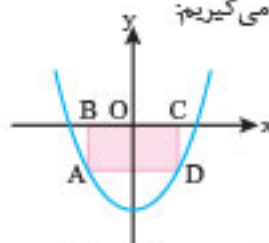
$$BC = x_C - x_B = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4 + 16}}{|-1|} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$S = \frac{1}{2} h \times BC = \frac{1}{2} \times c \times 2\sqrt{5} = c\sqrt{5}$$

۲۵۱. (گزینه ۴) ابتدا مختصات رأس سهمی هر دو تابع را می‌یابیم:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - mx + 3 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{m}{6}, y_S = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{36 - m^2}{4 \times 3} \\ g(x) = 4x^2 - mx + 4 \Rightarrow x_S = \frac{m}{8}, y_S = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{64 - m^2}{4 \times 4} \end{cases}$$

۲۴۵. (گزینه ۲) با توجه به داده‌های مسئله، شکل مقابل را در نظر می‌گیریم:



اگر $OC = x$ و $DC = h$ فرض شود، محیط مستطیل

ABCD برابر است با:

$$P = 2(BC + DC) = 2(2x + h)$$

h مقداری مثبت است (عرض مستطیل)، مختصات نقطه‌ی D به صورت $(x, -h)$ است.

از آنجایی که نقطه‌ی D روی سهمی است، مختصات نقطه‌ی D در معادله‌ی سهمی

صدق می‌کند:

$$\Rightarrow -h = 2x^2 - 6 \Rightarrow h = 6 - 2x^2$$

$$\Rightarrow P = 2(2x + 6 - 2x^2) = -4x^2 + 4x + 12$$

$$\Rightarrow \max(P) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4(-4)(12)}{4(-4)} = \frac{16(1+12)}{16} = 13$$

۲۴۶. (گزینه ۳) چون صورت کسر عدد ثابت ۵ است، موقعی بیشترین مقدار را دارد که

مخرجش کمترین مقدار را داشته باشد، چون طبق فرض سؤال بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است،

پس باید کمترین مقدار مخرج ۵ باشد و به عبارتی باید کمترین مقدار عبارت زیر رادیکال ۲۵

باشد عبارت زیر رادیکال، درجه‌ی دوم است و می‌دانیم که کمترین مقدار عبارت‌های درجه دو

از دستور $-\frac{\Delta}{4a}$ به دست می‌آیند؛ پس:

$$-\frac{\Delta}{4a} = 25 \Rightarrow \Delta + 10a = 0 \Rightarrow (-8)^2 - 4 \times m \times 39 + 10 \times m = 0$$

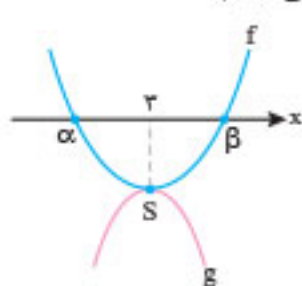
$$\xrightarrow{+8} 16 - 39m + 25m = 0 \Rightarrow 16 = 14m \Rightarrow m = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow [m] = 1$$

۲۴۷. (گزینه ۱) ابتدا مختصات رأس سهمی g را می‌یابیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = 3 \xrightarrow{\text{جای گذاری در } y} y = -3^2 + 6 \times 3 - 18 = -9 \Rightarrow S(3, -9)$$

حال شکل فرضی زیر را مطابق با داده‌های تست در نظر می‌گیریم:



می‌دانیم خطی که از رأس سهمی می‌گذرد، محور تقارن

سهمی است؛ پس:

$$3 = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 6 \quad (1)$$

$$\beta - \alpha = 8 \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 7 \end{cases}$$

با داشتن α و β ، معادله‌ی سهمی f به صورت زیر قابل بیان است:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x + 1)(x - 7)$$

مختصات نقطه‌ی $S(3, -9)$ در تابع f صدق می‌کند؛ پس:

$$f(3) = -9 \Rightarrow a(4)(-4) = -9 \Rightarrow a = \frac{9}{16} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{16}(x + 1)(x - 7)$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی با محور y ها}} \xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{9}{16}(1)(-7) = -\frac{63}{16}$$

۲۴۸. (گزینه ۲) با توجه به شکل $f(1) = g(1) = f(5) = g(5)$ است. اگر $f(1) = \beta$ فرض

شود، آن‌گاه توابع f و g هر دو از دو نقطه‌ی $(1, \beta)$ و $(5, \beta)$ گذشته‌اند، پس می‌توان

ضابطه‌ی این دو تابع را به صورت مقابل نوشت:

$$\begin{cases} f(x) = a(x - 1)(x - 5) + \beta & (1) \\ g(x) = a'(x - 1)(x - 5) + \beta & (2) \end{cases}$$

با توجه به نمودارهای داده‌شده داریم:

$$\begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow a(0 - 1)(0 - 5) + \beta = 4 \Rightarrow 5a + \beta = 4 \\ g(0) = 0 \Rightarrow a'(0 - 1)(0 - 5) + \beta = 0 \Rightarrow 5a' + \beta = 0 \end{cases}$$

یا کم کردن نظیر به نظیر طرفین رابطه‌ی بالا، داریم:

$$5a - 5a' = 4 \Rightarrow 5(a - a') = 4 \Rightarrow a - a' = \frac{4}{5} \quad (3)$$

با توجه به شکل داریم:

$$|AB| = y_A - y_B \xrightarrow{y_A = f(\alpha)} \xrightarrow{y_B = g(\alpha)} 1/8 = f(\alpha) - g(\alpha)$$

با توجه به رابطه‌های (1) و (2) داریم:

$$\begin{cases} f(\alpha) = a(\alpha - 1)(\alpha - 5) + \beta \\ g(\alpha) = a'(\alpha - 1)(\alpha - 5) + \beta \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) - g(\alpha) = (a - a')(\alpha - 1)(\alpha - 5)$$

$$\xrightarrow{(3)} f(\alpha) - g(\alpha) = \frac{4}{5}(\alpha - 1)(\alpha - 5) \xrightarrow{1/8 = \frac{1 \times 8}{1 \times 10}} \frac{1 \times 8}{1 \times 10}$$

نقطه‌ی تلاقی هر دو سهمی یا محور عرض‌ها، (-5) است؛ زیرا: $f(0) = g(0) = -5$
مختصات رأس سهمی دو تابع f و g هم برابر است یا:

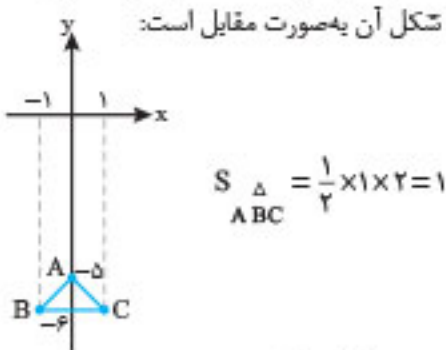
$$f(x) = x^2 - 2x - 5 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow y_S = f(1) = -6 \Rightarrow B(1, -6)$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 5 \Rightarrow x_S = \frac{-2}{2} = -1$$

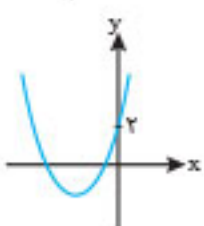
$$\Rightarrow y_S = g(-1) = -6 \Rightarrow C(-1, -6)$$

پس چندضلعی حاصل یک مثلث است که شکل آن به صورت مقابل است:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

۲۵۶. **گزینه ۲** باید نمودار سهمی f به صورت مقابل باشد:



بنابراین شرایط زیر باید برقرار باشد:

$$a - \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow a > \frac{3}{2} \quad 1$$

۲) سهمی دارای دو صفر یا طول‌های منفی است، یعنی: $\Delta > 0, S < 0, P > 0$

$$\Delta = 4(a - 2)^2 - 4 \times 2(a - \frac{3}{2}) > 0 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 - 2a + 3 > 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 8a + 12 > 0 \Rightarrow (a - 2)(a - 6) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < 2 \text{ یا } a > 6 \quad 2$$

$$S = \frac{-b}{2a} \Rightarrow S = \frac{2(a - 2)}{2(a - \frac{3}{2})} < 0 \Rightarrow a - 2 < 0 \Rightarrow a < 2 \quad 3$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{2}{a - \frac{3}{2}} > 0 \xrightarrow{1} \text{برقرار است}$$

$$1 \cap 2 \cap 3 \Rightarrow \frac{3}{2} < a < 2 \quad 4$$

معادله‌ی محور تقارن این سهمی به صورت زیر است:

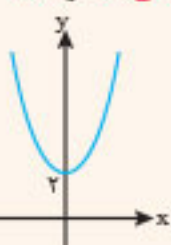
$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2(a - 2)}{2(a - \frac{3}{2})} = \frac{a - 2}{a - \frac{3}{2}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{a - \frac{3}{2}} = 1 - \frac{1}{2a - 3}$$

حالا با توجه به ۴، حدود تغییرات محور تقارن سهمی را می‌یابیم:

$$\frac{3}{2} < a < 2 \xrightarrow{\times 2} 3 < 2a < 4 \Rightarrow 0 < 2a - 3 < 1 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{2a - 3} > 1$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} \frac{-1}{2a - 3} < -1 \xrightarrow{+1} 1 - \frac{1}{2a - 3} < -2 \Rightarrow x_S \in (-\infty, -2)$$

زنگی: اگر $a = \frac{3}{2}$ شود، نمودار f اصلاً درجه ۲ نخواهد بود و سهمی نیست و محور تقارن و... نخواهد داشت! پس گزینه‌های شامل $\frac{3}{2}$ غلط هستند. حذف گزینه‌های «۱» و «۴».

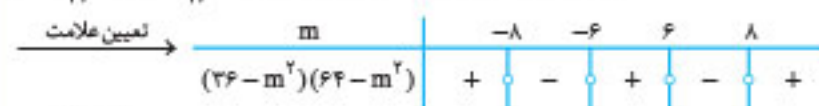


$$a = 3 \xrightarrow{\text{در معادله}} f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2 \xrightarrow{\text{شکل تقریبی}}$$

این سهمی از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند! پس **گزینه ۳** هم غلط!

برای این که رأس هر دو سهمی در یک ناحیه باشند، باید طول و عرض آن‌ها دویزه دو هم علامت باشند یا شرط $m \neq 0$ و $\frac{m}{8}$ و $\frac{m}{6}$ هم علامت هستند، پس کافی است عرض رأس هر دو سهمی هم علامت باشند؛ بنابراین:

$$(\frac{36 - m^2}{12})(\frac{64 - m^2}{16}) > 0 \Rightarrow (36 - m^2)(64 - m^2) > 0$$



$$\xrightarrow{\text{جواب نامعده}} m \in (-\infty, -8) \cup (-6, 6) \cup (8, +\infty)$$

پس مجموعه مقادیر m شامل بازه‌های $[-8, -6]$ و $[6, 8]$ نمی‌باشد که در این دو بازه ۶ عدد صحیح وجود دارد. دقت کنید اگر $m = 0$ باشد، رأس سهمی روی محور عرض‌ها قرار می‌گیرد که مطلوب سؤال نیست.

۲۵۲. **گزینه ۱** در سهمی اگر دو نقطه یا عرض یکسان وجود داشته باشد، طول رأس سهمی (خط تقارن سهمی) وسط آن دو نقطه خواهد بود؛ پس:

$$x_S = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{(3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5})}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 6 \quad *$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{2\beta}{1} \Rightarrow \alpha = 3 \quad * \Rightarrow \beta = 3$$

همچنین داریم:

$$\Rightarrow g(x) = 2x^2 - 8x + 3 \Rightarrow \min(g) = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$= -\frac{64 - 4 \times 2 \times 3}{4 \times 2} = -\frac{40}{8} = -5$$

۲۵۳. **گزینه ۳** با توجه به داده‌های مسئله، شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:



ضابطه‌ی سهمی را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

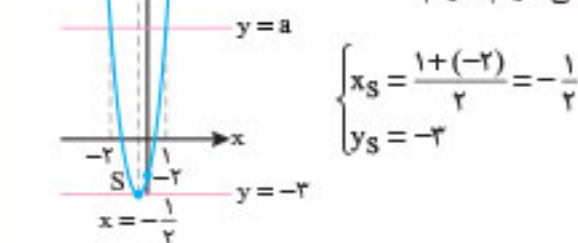
$$f(x) = a(x - \frac{2}{a})^2 + 7 - \frac{4}{a}$$

$$\begin{cases} f(\frac{7}{a} + 5) = a(\frac{7}{a} + 5 - \frac{2}{a})^2 + 7 - \frac{4}{a} = 25a + 7 - \frac{4}{a} \\ f(\frac{7}{a} + 2) = a(\frac{7}{a} + 2 - \frac{2}{a})^2 + 7 - \frac{4}{a} = 4a + 7 - \frac{4}{a} \end{cases}$$

$$f(\frac{7}{a} + 5) - f(\frac{7}{a} + 2) = 6 \Rightarrow 21a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

طبق فرض سؤال داریم:

۲۵۴. **گزینه ۴** با توجه به اطلاعات داده‌شده در تست، شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم؛ داریم:



$$\begin{cases} x_S = \frac{1 + (-2)}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_S = -3 \end{cases}$$

حالا با داشتن مختصات رأس سهمی، معادله‌ی آن را می‌نویسیم:

$$f(x) = k(x + \frac{1}{2})^2 - 3 \xrightarrow{\text{از نمودار}} f(0) = -2$$

$$\Rightarrow k(0 + \frac{1}{2})^2 - 3 = -2$$

$$\Rightarrow \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow f(x) = 4(x + \frac{1}{2})^2 - 3$$

$$\xrightarrow{\text{از نمودار}} f(1) = a \Rightarrow 4(1 + \frac{1}{2})^2 - 3 = a \Rightarrow a = 6$$

۲۵۵. **گزینه ۱** ابتدا عبارت $x^4 - 14x^2 + 25$ را به دو عبارت درجه‌ی دوم، تجزیه می‌کنیم:

$$(f \cdot g)(x) = x^4 - 14x^2 + 25 = (x^2 - 10x^2 + 25) - 4x^2$$

$$= (x^2 - 5)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 5 - 2x)(x^2 - 5 + 2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 5 \\ g(x) = x^2 + 2x - 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+2=\pm 6 \Rightarrow \begin{cases} x_C=4 \\ x_D=-8 \end{cases} \Rightarrow DC=x_C-x_D=12$$

$$S_{ABCD} = \frac{AB+DC}{2} \times h = \frac{4\sqrt{2}+12}{2} \times 7 = 7(2\sqrt{2}+6) = 14(\sqrt{2}+3)$$

۲۵۹. گزینه ۱) طبق قرض شکل رسم می کنیم و طول نقطه‌ی A را برابر α و طول نقطه‌ی B را برابر β می گیریم:

$$\begin{cases} A(\alpha, \alpha+1) \\ B(\beta, 7-2\beta) \end{cases}$$

عرض نقاط A و B یا هم برابر است، بنابراین داریم:

$$\alpha+1=7-2\beta \Rightarrow \alpha=-2\beta-2$$

مساحت مستطیل ABCD برابر است با:

$$S = |AB| \times |BC|$$

$$|AB| = x_B - x_A = \beta - \alpha = \beta - (-2\beta - 2) = 3\beta + 2$$

$$|BC| = y_B = 7 - 2\beta$$

$$\Rightarrow S = (3\beta + 2)(7 - 2\beta) = -6\beta^2 + 15\beta + 14$$

$$\max(S) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(15)^2 - 4 \times (-6) \times 14}{4 \times (-6)}$$

$$= \frac{15 \times 15 + 24 \times 14}{24} = \frac{225 + 336}{24} = \frac{561}{24} = \frac{187}{8}$$

۲۶۰. گزینه ۴) باید معادله‌ی تلاقی دو تابع دارای ریشه‌ی مضاعف ۲ باشد، پس ابتدا دو تابع را تلاقی می دهیم:

$$\frac{2x+a}{x-a} = b-9x \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x+a = bx-ab-9x^2+9ax$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب شود}} 9x^2 + (2-b-9a)x + a+ab = 0 \quad (\text{معادله‌ی تلاقی})$$

$$\xrightarrow{\text{حل این معادله}} x_1 = x_2 = 2$$

از رابطه‌ی بین ریشه‌ها داریم:

$$S = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{-(2-b-9a)}{9} = 2+2 \Rightarrow -2+b+9a = 36$$

$$\Rightarrow b = 38-9a \quad 1$$

$$P = x_1 x_2 \Rightarrow \frac{a+ab}{9} = 2 \times 2 \Rightarrow a+ab = 36 \quad 2$$

$$\xrightarrow{1, 2} a+a(38-9a) = 36 \Rightarrow 39a-9a^2 = 36$$

$$\Rightarrow 9a^2 - 39a + 36 = 0 \Rightarrow (3a)^2 - 13(3a) + 36 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{انحاد جمله مشترک}} (3a-9)(3a-4) = 0 \Rightarrow a = 3, \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} a=3 \xrightarrow{1} b=38-27=11 \\ f(x) = \frac{2x+3}{x-3} \Rightarrow f(b) = f(11) = \frac{22+3}{11-3} = \frac{25}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\frac{4}{3} \xrightarrow{1} b=38-9 \times \frac{4}{3} = 26 \\ f(x) = \frac{2x+\frac{4}{3}}{x-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(26) = \frac{52+\frac{4}{3}}{26-\frac{4}{3}} = \frac{\frac{160}{3}}{\frac{74}{3}} = \frac{40}{19} \end{cases}$$

۲۶۱. گزینه ۱) اگر صفرهای سهمی، x_1 و x_2 باشد، معادله‌ی سهمی به صورت

$$y = a(x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2})) \quad \text{است: } y = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$y = a(x^2 - 2x - 1) = ax^2 - 2ax - a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-2a)}{2a} = 1 \Rightarrow S(1, -2a) \\ y_S = f(1) = a - 2a - a = -2a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی اول است}} -2a > 0 \Rightarrow a < 0$$

$$S(1, -2a) \xrightarrow{x+2y=5 \text{ صدق کند}} 1+2(-2a)=5 \Rightarrow 4a=-4 \Rightarrow a=-1$$

$$\xrightarrow{a < 0} a = -1 \xrightarrow{\text{تلاقی یا محورها در سهمی}} y = -a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۵۷. گزینه ۳) اگر ابعاد این مستطیل را با x و y نمایش دهیم، داریم:

$$x = \frac{9}{2} - (-\frac{1}{2}) = 5 \Rightarrow S = xy \Rightarrow 2/5 = 5y \Rightarrow y = \frac{2/5}{5} = \frac{1}{5}$$

پس عرض این مستطیل برابر $\frac{1}{5}$ بوده و در نتیجه $f(-\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$ است.

به علت متقارن بودن سهمی و مستطیل، در شکل مقابل، اندازه‌ی AB و CD یا هم برابر بوده پس می توانیم طول نقطه‌ی D را بیابیم:

$$\Rightarrow |AB| = -\frac{1}{5} - (-\frac{3}{5}) = 1 \Rightarrow |CD| = 1$$

$$\Rightarrow x_D = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$$

حالاً با معلوم بودن صفرهای تابع f یعنی $x = \frac{11}{2}$ و $x = -\frac{3}{2}$ ، معادله‌ی سهمی f را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$f(x) = a(x + \frac{3}{2})(x - \frac{11}{2}) \xrightarrow{f(-\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}} \frac{1}{5} = a(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2})(-\frac{1}{2} - \frac{11}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = a(1)(-6) \Rightarrow a = -\frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{30}(x + \frac{3}{2})(x - \frac{11}{2})$$

و اما خواسته‌ی تست، برای پیدا کردن نقاط تلاقی دو سهمی، کافی است با هم برابر قرار دهیم:

$$-\frac{1}{30}(x + \frac{3}{2})(x - \frac{11}{2}) = x^2 + 2x - 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{30}(x^2 - 4x - \frac{33}{2}) = x^2 + 2x - 1$$

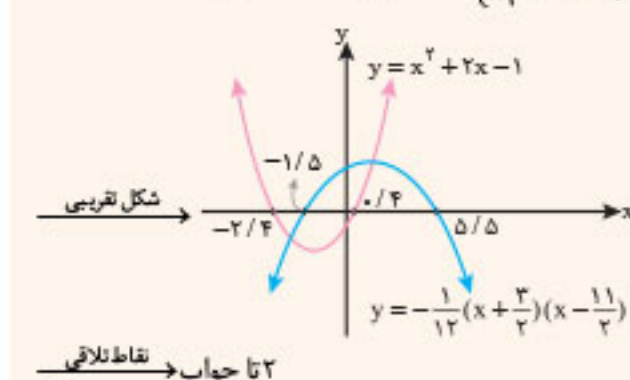
$$\Rightarrow -\frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{15}x + \frac{11}{60} = x^2 + 2x - 1$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} \frac{13}{30}x^2 + \frac{29}{15}x - \frac{27}{10} = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0$$

پس معادله‌ی تلاقی دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت بوده و در نتیجه دو سهمی در دو نقطه یکدیگر را قطع می کنند.

$$y = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(1)(-1) = 8 \quad \text{رنگی:}$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2(1)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{2} \approx +0.4 \\ x_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2.4 \end{cases}$$



۲۵۸. گزینه ۲) ابتدا معادله‌ی سهمی را می نویسیم:

$$S(-2, 2) \Rightarrow f(x) = a(x+2)^2 + 2 \xrightarrow{f(0)=1} a(2)^2 + 2 = 1 \Rightarrow 4a = -1$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 2$$

برای محاسبه‌ی طول نقاط A و B باید معادله‌ی $f(x) = 0$ و برای پیدا کردن طول نقاط C و D باید معادله‌ی $f(x) = -7$ را حل کنیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 8 \Rightarrow x+2 = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = -2 + 2\sqrt{2} \\ x_A = -2 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AB = x_B - x_A = 4\sqrt{2}$$

$$f(x) = -7 \Rightarrow -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 2 = -7 \Rightarrow -\frac{1}{4}(x+2)^2 = -9 \Rightarrow (x+2)^2 = 36$$

زنگی: در گزینه‌های «۱» و «۴» به ترتیب می‌شود «۴» و «۱» و صفر پس این گزینه‌ها حذف می‌شوند.

گزینه ۲: $y = x^2 + 2x + \text{رأس}$ $\rightarrow x = -1$

۲۶۷. (گزینه ۱) نمودار تابع داده‌شده یک سهمی است و می‌دانیم که هر سهمی نسبت به محور تقارن خود (یعنی خط $x_S = \frac{-b}{2a}$) قرینه است. بنابراین ابتدا رابطه‌ی داده‌شده بین صفرهای تابع را به یک رابطه‌ی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم؛ سپس محورهای تقارن نمودار تابع را به دست می‌آوریم:

$$(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 56$$

$$\xrightarrow{\text{اتحادهارو بازکن}} (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)$$

$$= 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) = 56 \xrightarrow{+2} \alpha^2 + \beta^2 = 28$$

$$\Rightarrow S^2 - 2P = 28 \xrightarrow[\substack{S=b \\ P=-2b^2}]{S=b} b^2 + 6b^2 = 28 \Rightarrow 7b^2 = 28$$

$$\xrightarrow{+7} b^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} b = \pm\sqrt{4} \Rightarrow b = 2 \text{ یا } b = -2$$

$$b = 2: f(x) = x^2 - 2x - 12 \xrightarrow[\substack{\text{محور} \\ \text{تقارن}}]{x_S = \frac{-(-2)}{2(1)}} x_S = 1$$

یا

$$b = -2: f(x) = x^2 + 2x - 12 \xrightarrow[\substack{\text{محور} \\ \text{تقارن}}]{x_S = \frac{-(2)}{2(1)}} x_S = -1$$

زنگی: $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = S^2 + (\sqrt{S^2 - 4P})^2 = 2S^2 - 4P = 56$
 $\xrightarrow{\text{طبق } f} 2b^2 + 12b^2 = 56 \Rightarrow b = \pm 2$

۲۶۸. (گزینه ۱) اگر صفرهای تابع f را α و β در نظر بگیریم و $\alpha > \beta$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y_A = f(0) = 0 + 0 - 2a \Rightarrow A(0, -2a) \\ B(\beta, 0), C(\alpha, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{AB} = \frac{0 + 2a}{\beta - 0} \\ m_{AC} = \frac{0 + 2a}{\alpha - 0} \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط عمود بودن}} m_{AB} \times m_{AC} = -1 \Rightarrow \left(\frac{2a}{\beta}\right) \left(\frac{2a}{\alpha}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{4a^2}{\alpha\beta} = -1 \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{c}{a}} \frac{4a^2}{-\frac{c}{a}} = -1 \Rightarrow \frac{4a^3}{-c} = -1 \Rightarrow \frac{4a^3}{-6a} = -1 \Rightarrow \frac{2a^2}{-3} = -1$$

$$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$$

و اما خواسته‌ی سؤال:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-b}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

۲۶۹. (گزینه ۱) صورت کسر عددی ثابت است، پس برای پیدا کردن بیشترین مقدار تابع f کافی است، کمترین مقدار مخرج را بیابیم. مخرج تابع f یک سهمی است؛ بنابراین:

$$y = (x-1)^2 + 4x + 7 = x^2 - 2x + 1 + 4x + 7 = x^2 + 2x + 8$$

$$\Rightarrow \min(y) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4 - 4(1))}{4 \times 1} = \frac{28}{4} = 7$$

$$\Rightarrow \max(f) = \frac{28}{4} = 7$$

۲۷۰. (گزینه ۲) برای این که نمودار سهمی $y = f(x)$ بر محور x مماس باشد، باید معادله‌ی $f(x) = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، یعنی باید معادله‌ی $f(x) = 0$ دو ریشه‌ی یکسان داشته باشد:

$$(ax+9)(-2x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} ax+9=0 \Rightarrow x_1 = -\frac{9}{a} \\ -2x+6=0 \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases} \xrightarrow{x_1=x_2} -\frac{9}{a} = 3 \Rightarrow a = -3$$

۲۷۱. (گزینه ۲)

$$y = ax^2 + 2x + c \xrightarrow{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x = \frac{-2}{2a} = -1 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{2}$$

۲۶۲. (گزینه ۱) ابتدا ضابطه‌ی تابع داده‌شده را با باز کردن اتحادها ساده می‌کنیم تا به فرمی شناخته‌شده برسیم:

$$f(x) = x^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 + m$$

$$= x^2 - (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4) + m$$

$$= x^2 - x^2 + 2x - 1 + x^2 + 4x + 4 + m \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + 3 + m$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\xrightarrow{a=1} y_{\min} = y(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 3 + m = 9 - 18 + 3 + m$$

$$= -6 + m = 7 \Rightarrow m = 13$$

۲۶۳. (گزینه ۳) صفرهای سهمی f همان ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ هستند؛ پس:

$$f(x) = x^2 - 4ax + 4a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{m}{m-1} + \frac{m}{m+1} = 4a \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{2m^2}{m^2-1} = 4a$$

$$\xrightarrow{+2} \frac{m^2}{m^2-1} = 2a \quad 1$$

همچنین:

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{m}{m-1} \times \frac{m}{m+1} = 4a - 2 \Rightarrow \frac{m^2}{m^2-1} = 4a - 2 \quad 2$$

$$\xrightarrow{1} 2a = 4a - 2 \Rightarrow a = \frac{2}{2} \xrightarrow{2} \frac{m^2}{m^2-1} = 4 \times \frac{2}{2} - 2 \Rightarrow \frac{m^2}{m^2-1} = 2$$

$$\Rightarrow m^2 = 2m^2 - 2 \Rightarrow 2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = \frac{2}{2} \quad 3$$

$$a = \frac{2}{2} \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 3 \Rightarrow f\left(\frac{2}{2}\right) = f\left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{2}{2}\right) + 3$$

$$= \frac{4}{4} - 9 + 3 = \frac{-15}{4} = -3 \frac{3}{4}$$

۲۶۴. (گزینه ۳) چون عرض نقاط A و B یا هم برابر است، پس خط تقارن سهمی از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد؛ بنابراین داریم:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow k = \frac{(2k+1) + (k-2)}{2} \Rightarrow 2k = 2k - 2 \Rightarrow k = 2$$



$$\Rightarrow \begin{cases} A(-1, 5) \\ B(5, 5) \end{cases} \Rightarrow AB = 5 - (-1) = 6$$

۲۶۵. (گزینه ۴) برای محاسبه‌ی مساحت مثلث موردنظر، ابتدا باید قاعده و سپس ارتفاع آن را به دست آوریم. قاعده همان فاصله‌ی بین دو ریشه و ارتفاع هم قدرمطلق عرض رأس سهمی است. مجموع ضرایب معادله‌ی $2x^2 - mx + m - 2 = 0$ برابر صفر است، پس ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{قاعده‌ی مثلث} = |x_2 - x_1| = \left| \frac{m-2}{2} - 1 \right|$$

$$\text{عرض رأس سهمی} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-m)^2 - 4 \times 2(m-2)}{4 \times 2}$$

$$= -\frac{m^2 - 8m + 16}{8} = \frac{(m-4)^2}{-8}$$

$$\text{ارتفاع} = \left| \frac{(m-4)^2}{-8} \right| = \frac{(m-4)^2}{8}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \frac{(m-4)^2}{8} \times \frac{|m-4|}{2} = \frac{|m-4|^3}{32} = 2 \Rightarrow |m-4|^3 = 64$$

$$\Rightarrow |m-4| = 4 \Rightarrow m-4 = \pm 4 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } 8 \xrightarrow{m>0} m = 8$$

۲۶۶. (گزینه ۳) اگر α و β را ریشه‌ها یا همان محل تلاقی سهمی با محور x ها فرض کنیم $(\alpha < \beta)$ ، بر اساس فرض تست $\beta - \alpha = 4$ است.

$$x_S = \frac{\alpha + \beta}{2} \xrightarrow{S(1,1)} \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \xrightarrow{\beta - \alpha = 4} 2\beta = 6 \Rightarrow \beta = 3$$

$$\xrightarrow{\alpha + \beta = 2} \alpha = -1$$

بنابراین با توجه به ریشه‌های $\alpha = -1$ و $\beta = 3$ ، معادله‌ی سهمی به صورت $y = a(x+1)(x-3)$ قابل بیان است. برای تعیین پارامتر a کافی است مختصات رأس $S(1,1)$ را در آن صدق دهیم:

$$1 = a(1+1)(1-3) \Rightarrow a = \frac{-1}{4} \Rightarrow y = \frac{-1}{4}(x+1)(x-3)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{4}(x^2 - 2x - 3) = \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$



طول رأس سهمی $y = m(x - \alpha + 1)^2 + \alpha + 1$ برابر میانگین $x = 1$ و $x = 3$ است، یعنی $x_s = \frac{3+1}{2} = 2$. از طرفی طول رأس سهمی $x_s = \alpha - 1$ است؛ پس $\alpha = 3$.

$y = m(x - 3 + 1)^2 + 3 + 1 \Rightarrow y = m(x - 2)^2 + 4$
مختصات یکی از دو نقطه $(1, 1)$ یا $(3, 1)$ را در معادله سهمی جای گذاری می کنیم تا مقدار m بدست آید. $1 = m(1 - 2)^2 + 4 \Rightarrow m = -3$

۲۷۵. گزینه ۱ عرض نقطه‌ی رأس سهمی $y = ax^2 + 2x + a$ را محاسبه می کنیم و برابر $\frac{y}{a}$ می گذاریم:

$$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4 - 4a^2}{4a} = \frac{4a^2 - 4}{4a} \Rightarrow \frac{4a^2 - 4}{4a} = \frac{y}{a} \Rightarrow \frac{4a^2 - 4}{4} = y$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4a^2 - 4 = 4y \Rightarrow 4a^2 - 4y - 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(4a^2 - 4y - 4) = 0 \Rightarrow a^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -2$$

با توجه به این که سهمی دارای کمترین مقدار است؛ پس ضریب x^2 مقداری مثبت و برابر ۲ است.

۲۷۶. گزینه ۲ در سهمی اول داریم:

$$y_1 = -ax^2 + ax + 2 \xrightarrow{\text{طول رأس سهمی اول}} x = \frac{-a}{2(-a)} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در تابع}}$$

$$y_1 = -a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{4}a + 2 \Rightarrow S_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}a + 2\right)$$

و برای سهمی دوم:

$$y_2 = 2bx^2 - bx - 1 \xrightarrow{\text{طول رأس سهمی دوم}} x = \frac{-(-b)}{2(2b)} = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = 2b\left(\frac{1}{4}\right)^2 - b\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{8}b - 1 \Rightarrow S_2\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}b - 1\right)$$

طبق فرض تست، مختصات رأس سهمی هر تابع، در تابع دیگر صدق می کند؛ پس:

$$S_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}a + 2\right) \xrightarrow{\text{در سهمی دوم}} \frac{1}{4}a + 2 = 2b\left(\frac{1}{4}\right)^2 - b\left(\frac{1}{4}\right) - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}a + 2 = \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}b - 1 \Rightarrow \frac{1}{4}a = -\frac{3}{4}b - 2 \Rightarrow a = -3b - 8$$

$$S_2\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}b - 1\right) \xrightarrow{\text{در سهمی اول}} -\frac{1}{8}b - 1 = -a\left(\frac{1}{4}\right)^2 + a\left(\frac{1}{4}\right) + 2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}b - 1 = \frac{a}{4} - \frac{3a}{4} + 2 \Rightarrow -\frac{1}{8}b - 1 = -\frac{a}{2} + 2 \Rightarrow -\frac{1}{8}b = \frac{5}{2} - \frac{a}{2} \Rightarrow b = -4a + 20$$

$$\Rightarrow b - a = -4a + 20 - a = -5a + 20 = 6 \Rightarrow -5a = -14 \Rightarrow a = \frac{14}{5}$$

۲۷۷. گزینه ۱ طول نقطه‌ی رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه‌ی هم‌عرض روی سهمی، یعنی $(1, \beta)$ و $(-5, \beta)$ است:

$$x_s = \frac{-5+1}{2} = -2$$

با توجه به عرض نقطه‌ی رأس سهمی که $-\frac{1}{4}$ است، مختصات نقطه‌ی رأس

$$S\left(-2, -\frac{1}{4}\right) \text{ و ضابطه‌ی آن } y = a(x+2)^2 - \frac{1}{4} \text{ است.}$$

می دانیم که نمودار سهمی از نقطه‌ی $(0, \frac{3}{4})$ عبور می کند؛ پس:

$$\frac{3}{4} = a(0+2)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

با مشخص شدن مقدار پارامتر a ضابطه‌ی نهایی سهمی $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{4}$ است و با جای گذاری $x = 1$ (یا $x = -5$) در ضابطه، مقدار β بدست می آید:

$$\beta = \frac{1}{2}(1+2)^2 - \frac{1}{4} = \frac{9}{2} - \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

۲۷۸. گزینه ۳ می دانیم شرط آن که خطی بر نمودار تابعی مماس باشد آن است که معادله‌ی تلاقی آن‌ها دارای ریشه‌ی مضاعف باشد؛ پس:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} \\ y = -x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}}$$

$$2x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} = -x \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 2x^2 + (2m+1)x + m + \frac{4}{3} = 0$$

$$2x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0 \xrightarrow{\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}} \Delta = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4 \times 2 \left(m + \frac{4}{3}\right) = 0 \xrightarrow{+4} m^2 - 2m - \frac{4}{3} = 0$$

$$\Rightarrow (m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}$$

با توجه به فرض سؤال، نتیجه می گیریم $y_s = 1$ است، بنابراین داریم:

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = 1 \Rightarrow -\Delta = 4a \Rightarrow \Delta + 4a = 0 \Rightarrow (1 - 4 \times \frac{3}{2} \times c) + 4 \times \frac{3}{2} = 0$$

$$1 - 6c + 6 = 0 \Rightarrow 6c = 15 \Rightarrow c = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow ac = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

۲۷۹. گزینه ۳ برای این که تابع درجه دو دارای ماکزیمم باشد، باید دهانه‌ی سهمی

$$a = 1 - 18m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{18}$$

$$x_{\max} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_s = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -b$$

$$\Rightarrow 1 - 18m = m^2 + 1 \Rightarrow m^2 + 18m = 0 \Rightarrow m(m+18) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } -18$$

با توجه به این که سهمی دارای کمترین مقدار است؛ پس ضریب x^2 مقداری مثبت و برابر ۲ است.

۲۸۰. گزینه ۲ در معادله‌ی $mx^2 - 4x - (m+4) = 0$ مجموع ضرایب $a+c$ برابر ضریب b است؛ بنابراین جواب‌های آن $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{m+4}{m}$ است.

اکنون نمودار فرضی را با توجه به جواب‌ها و علامت فرضی $m > 0$ رسم می کنیم:



بنابراین اندازه‌ی قاعده‌ی مثلث ایجادشده برابر است با:

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{m+4}{m} - (-1) \right| = \left| \frac{2m+4}{m} \right|$$

عرض از مبدأ سهمی $c = -(m+4)$ است؛ بنابراین اندازه‌ی ارتفاع مثلث را می توان $|m+4|$ در نظر گرفت. با توجه به فرض، مساحت مثلث برابر ۳ است.

$$S = \frac{1}{2} |m+4| \times \left| \frac{2m+4}{m} \right| = 3 \Rightarrow |m+4| \left| \frac{2m+4}{m} \right| = 6$$

$$\Rightarrow |(m+4)\left(\frac{2m+4}{m}\right)| = 6$$

$$\textcircled{1} (m+4)\left(\frac{2m+4}{m}\right) = 6 \Rightarrow (m+4)(m+2) = 3m$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 8 = 3m \Rightarrow m^2 + 3m + 8 = 0$$

معادله جواب حقیقی ندارد. $\Delta < 0$

$$\textcircled{2} (m+4)\left(\frac{2m+4}{m}\right) = -6 \Rightarrow (m+4)(m+2) = -3m$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 8 = -3m \Rightarrow m^2 + 9m + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(m+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -8 \end{cases}$$

به ازای $m = -1$ و $m = -8$ ، ضابطه‌ی سهمی را بازنویسی می کنیم:

$$y = mx^2 - 4x - (m+4) \xrightarrow{m=-1} y = -x^2 - 4x - 3$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(-1)} = -2$$

$$y = mx^2 - 4x - (m+4) \xrightarrow{m=-8} y = -8x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(-8)} = -\frac{1}{4}$$

اختلاف طول رأس سهمی‌ها $|-1 - (-2)| = 1 = \frac{y}{4}$ است.

۲۸۱. گزینه ۳ مؤلفه‌های نقاط A و B صحیح و مثبت هستند؛ پس:

$$2b+1 > 0 \Rightarrow b > -\frac{1}{2}$$

$$2b-1 > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}$$

$$2b-b^2 > 0 \Rightarrow b(2-b) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} b & -\infty & & 2 & & +\infty \\ b(2-b) & - & 0 & + & 0 & - \end{matrix} \Rightarrow 0 < b < 2$$

استراک مجموعه جواب‌های بالا، به صورت $\frac{1}{2} < b < 2$ و تنها عدد صحیح قابل قبول در این بازه $b = 1$ است. مختصات نقاط A و B را تعیین می کنیم:

$$A(2b+1, 2b-b^2) \xrightarrow{b=1} A(3, 1)$$

$$B(2b-1, 2b-b^2) \xrightarrow{b=1} B(1, 1)$$

۲۸۳. گزینه ۲

$$\frac{x}{x^2+2} = \frac{2}{3x-2} \xrightarrow{\text{کافی شرط } x \neq \frac{2}{3} \text{ رو در نظر بگیریم}} x(3x-2) = 2(x^2+2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x = 2x^2 + 4 \xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}} x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Delta = 4 + 16 = 20 > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 2 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -4 \end{array} \right. \quad (\text{بدون حل})$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 4 + 8 = 12$$

(کاملاً مشخص است که $\alpha, \beta \neq \frac{2}{3}$ است.)

۲۸۴. گزینه ۱

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-2x} - 1 = \frac{x}{x-2} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x^2-2x+3-x^2+2x}{x^2-2x} = \frac{x}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x(x-2)} = \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{3}{x} = x \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

۲۸۵. گزینه ۳ ابتدا طرفین معادله را در $(x-3)(x+4)$ یا شرط $x \neq 3, -4$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-3)(x+4)\left(\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4}\right) = (x-3)(x+4)\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب‌کن}} 2x(x+4) + (x+1)(x-3) = (x-1)(x+4)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 2x^2 + 8x + x^2 - 2x - 3 = x^2 + 3x - 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\frac{a+c=b}{(2+1=3)}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{-c}{a} = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = (2)^2 \left(\frac{\Delta}{4}\right)^2 = (2 \times \frac{\Delta}{4})^2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 = \frac{\Delta^2}{4}$$

$$= \frac{24+1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = 6 + 0.25 = 6.25$$

حتماً توجه کرده‌اید که در عبارت مقارنی مثل این تست فرقی نمی‌کند که α و β را جای‌جا قرار دهیم!

۲۸۶. گزینه ۳

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک در دو طرف معادله}} \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{x+1-(x-2)}{(x-2)(x+1)} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} \frac{-1}{x^2-x} = \frac{3}{x^2-x-2}$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌و ساده‌کن}} 3x^2 - 3x = -x^2 + x + 2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{+4} x^2 - x - \frac{1}{2} = 0 \xrightarrow{\text{به کمک } \Delta} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-\frac{1}{2})}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{چک در مخرج}} x \neq 0, \pm 1, 2$$

پس معادله، یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد.

۲۸۷. گزینه ۴

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^2+8} = \frac{6x}{x^2-2x+4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{6x}{x^2-2x+4} = \frac{x^2-9x-2}{x^2+8}$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x^2-2x+4-6x(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{x^2-9x-2}{x^2+8}$$

انحاد چاق و لاغر

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+4-6x^2-12x}{x^2+8} = \frac{x^2-9x-2}{x^2+8}$$

$$\Rightarrow -5x^2 - 14x + 4 = x^2 - 9x - 2 \xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 6x^2 + 5x - 6 = 0$$

در معادله‌ی فوق $\frac{c}{a} < 0$ بوده و در نتیجه دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت است؛ پس معادله، یک ریشه‌ی مثبت دارد.

تنها ریشه‌ی مخرج موجود در کسرها، $x = -2$ است که به‌طور واضحی ریشه‌ی این معادله‌ی آخر نیست!

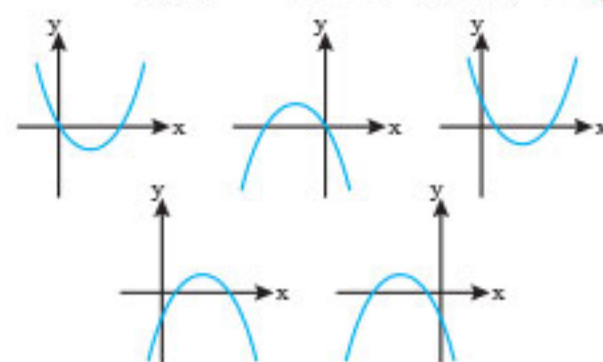
چون در ناحیه‌ی دوم هستیم، ریشه باید منفی باشد؛ پس $x = \frac{-b}{2a} < 0$ است؛ در نتیجه:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{6} \xrightarrow{m>0} m = 4$$

$$y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} \xrightarrow{m=4} y = 3x^2 + 7x + 16$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2 \times 3} = \frac{-7}{6}$$

۲۷۹. گزینه ۱ باید نمودار تابع f به یکی از حالت‌های زیر باشد:



یعنی باید یکی از صفرهای سهمی صفر باشد یا هر دو صفر سهمی، هم‌علامت باشند؛ پس: $\Delta > 0, P \geq 0$.

$$\Delta = 16 - 4(3-m)(2m-1) > 0$$

$$\xrightarrow{+4} 4 - (3-m)(2m-1) > 0 \Rightarrow 4 - 6m + 3 + 2m^2 - m > 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 7m + 7 > 0 \xrightarrow{\Delta = 49 - 56 < 0, a=2>0} m \in \mathbb{R}$$

$$P = \frac{2m-1}{3-m} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{1}{3} \leq m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 1, 2$$

۲۸۰. گزینه ۳ نقطه‌ی دلخواه A را روی سهمی $y^2 = 4x$ در نظر می‌گیریم. اگر طول این نقطه را a فرض کنیم، آن‌گاه:

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(3, 0)$ از A برابر است با:

$$MA = \sqrt{(3-a)^2 + (0 \pm 2\sqrt{a})^2} = \sqrt{9 - 6a + a^2 + 4a} = \sqrt{a^2 - 2a + 9}$$

با مشتق‌گیری از این عبارت، اکستریم آن را می‌یابیم:

$$(MA)' = \frac{2a-2}{2\sqrt{a^2-2a+9}} = 0 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین به ازای $a = 1$ ، فاصله‌ی A از M کمترین مقدار خود را دارد که آن را می‌یابیم:

$$\sqrt{(1)^2 - 2(1) + 9} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

فصل ۴ معادله‌های گویا و رادیکالی

۲۸۱. گزینه ۱

$$\frac{x-2}{x+3} + \frac{x-2}{x+5} = 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{(x-2)(x+5) + (x-2)(x+3)}{(x+5)(x+3)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{صورت را مساوی صفر بذار}} (x-2)(x+5) + (x-2)(x+3) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از } x-2} (x-2)(x+5+x+3) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} (x-2)(2x+8) = 0 \xrightarrow{\text{حل‌کن}} \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 2(x+4)=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

چک کردن در مخرج

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = 2 + (-4) = -2$$

رنگی

$$\frac{x-2}{x+3} = -\frac{x-2}{x+5}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده صورت}} x = 2, x+5 = -x-3 \xrightarrow{x=-4}$$

۲۸۲. گزینه ۲ ابتدا مقدار a را می‌یابیم:

$$\frac{6-a}{3} = \frac{3}{a} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین } a \neq 0} 6a - a^2 = 9 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله‌ی دوم}} \frac{3}{x} = \frac{x+1}{x+3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین } x \neq 0, -3} 3x+9 = x^2+x \Rightarrow x^2-2x-9=0$$

$$\Delta = 4+36=40 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{10}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.