انتشارات بین المللی
گاج

IQ

تألیف جدید

نسل جدید کتاب‌های **آی‌کیو**

ریاضی یازدهم تجربی

۲۴۰۰ تست چالشی و محتوایی

مهندس آرش **عمید**

مجموعه کتاب‌های **پایه یازدهم فرمول بیست**

ویـژه ارتقا و ترمیم معـدل نهایی

دکتر آی کیو
DRIQ.com
کلاس آنلاین

گاج مارکت
gajmarket.com
فروشگاه آنلاین

گاجینو
gajino.com
آموزش آنلاین

9 786220 308713

مقدمه

تقدیم به همسر عزیزم

به جای آنکه چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

آرش عمید هستم. قبل از هر سخنی به جدول زیر که تعداد سؤالات ریاضی (۲) را در کنکورهای ۹۸ تا ۱۴۰۳ نشان می‌دهد، دقت کنید.

کنکور		۹۸	۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳
داخل	نوبت اول	—	—	—	—	۱۴	۱۴
	نوبت دوم	۱۳	۱۵	۱۷	۱۴	۱۵	۱۴
خارج		۱۲	۱۴	۱۳	۱۳	۱۲	۱۶

تقریباً نصف سؤالات کنکور از درس ریاضی (۲) مطرح می‌شود. علاوه‌بر این بسیاری از فصل‌های ریاضی (۳) ادامهٔ مطالبی است که در ریاضی (۲) می‌خوانید. بنابراین مهم‌ترین کتاب ریاضی برای دانش‌آموزان تجربی بی‌تردید ریاضی (۲) است.

در این کتاب تمامی زوایای کتاب ریاضی (۲) را مورد بررسی قرار دادم و مطمئنم با حل تست‌های این کتاب، تفاوت شگرفی در سطح ریاضی شما ایجاد می‌شود.

تست‌های این کتاب از سطح صفر شروع می‌شود و تمامی سؤالات جدید کنکور را پوشش می‌دهد و چه بسا در سال‌های آینده تست‌های مشابهی از این کتاب در کنکور بیاید.

برای ارتباط با بنده می‌توانید در کانال تلگرامی ArashAmid@ عضو شده و از مطالب تکمیلی استفاده نمایید.

موفق باشید.

آرش عمید

@ArashAmid

ar.Amid

فهرست

۱ هندسهٔ تحلیلی و جبر

۱	درس اول: هندسهٔ تحلیلی	۶
۲	درس دوم: معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ ۲	۴۴
۳	درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی	۷۲
	پاسخ‌های تشریحی	۳۷۲

۲ هندسه

۴	درس اول: ترسیم‌های هندسی	۸۴
۵	درس دوم: استدلال و قضیهٔ تالس	۹۳
۶	درس سوم: تشابه مثلث‌ها	۱۲۷
	پاسخ‌های تشریحی	۴۳۹

۳ تابع

۷	درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع	۱۵۸
۸	درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک به یک	۱۸۹
۹	درس سوم: اعمال جبری روی توابع	۲۰۶
	پاسخ‌های تشریحی	۴۹۳

۴ مثلثات

۱۰	درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه	۲۱۸
۱۱	درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی	۲۳۰
۱۲	درس سوم: توابع مثلثاتی	۲۴۴
	پاسخ‌های تشریحی	۵۳۶

۵ توابع نمایی و لگاریتمی

۱۳	درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن	۲۵۲
۱۴	درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن	۲۶۱
۱۵	درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی	۲۸۳
	پاسخ‌های تشریحی	۵۵۷

۶ حد و پیوستگی

۱۶	درس اول: فرایندهای حدی	۲۹۰
۱۷	درس دوم: محاسبهٔ حد توابع	۲۹۹
۱۸	درس سوم: پیوستگی	۳۲۳
	پاسخ‌های تشریحی	۵۹۴

۷ آمار و احتمال

۱۹	درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل	۳۳۶
۲۰	درس دوم: آمار توصیفی	۳۵۲
	پاسخ‌های تشریحی	۶۲۴

کنکورهای ۱۴۰۳ ۶۵۴

.فصل اول

ریاضی تجربی یازدهم

هندسه تحلیلی و جبر

Chapter One

Analytic Geometry and Algebra

John Napier

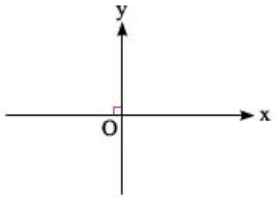
فصل اوّل

۱ درس اول: هندسهٔ تحلیلی (قسمت اول)

CHAPTER 1

دستگاه مختصات و نقطه

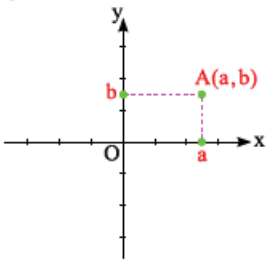
اول بریم با دستگاه مختصات و نقطه آشنا بشیم.



دستگاه مختصات: از دو محور افقی و قائم تشکیل شده است *(وقتی دو محور، افقی و قائم هستن تابلوئه که بر هم عمودن.)* که در نقطهٔ O متقاطع‌اند. به محور افقی، محور xها، به محور قائم، محور yها و به نقطهٔ O *(محل برخورد محور x ها و محور y ها)*، مبدأ مختصات می‌گویند.

نواحی مختصات: محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که به آن‌ها ناحیهٔ اول، ناحیهٔ دوم، ناحیهٔ سوم و ناحیهٔ چهارم می‌گویند که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها به‌صورت مقابل است. *(بعضیا به ناحیهٔ اول، ناحیهٔ دوم و ... میگن ربع اول، ربع دوم و ...)*

نکته محورهای مختصات، یعنی محور xها و محور yها، جزو هیچ‌کدام از نواحی چهارگانه نیستند. *(طب خودشون اسم دارن دیگه. محور x ها، محور y ها و نیازی نیست برن تو ناحیه‌ها و جزو ناحیه‌ها بشن.)*

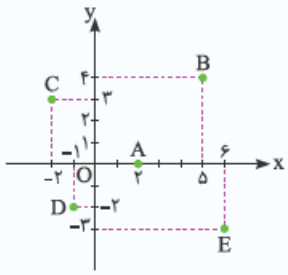


نقطه در دستگاه مختصات: هر نقطه در دستگاه مختصات با یک زوج مرتب مانند (a,b) نمایش داده می‌شود که به a، طول نقطه و به b، عرض نقطه می‌گویند. نقطه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی (A، B، C و ...) نام‌گذاری می‌کنند. مثلاً اگر اسم نقطه با مختصات (a,b) را A بنامیم A را کنار (a,b) می‌نویسیم و به‌صورت $A(a,b)$ نمایش می‌دهیم و این یعنی، نقطهٔ A که طول آن برابر a و عرض آن برابر b است. *(بعضیا میگن مختصات نقطهٔ A برابر (a,b) هستش.)*

$A(a\ ,\ b)$
عرض نقطهٔ A ← ، → طول نقطهٔ A

توجه گاهی اوقات به محور xها، محور طول‌ها و به محور yها، محور عرض‌ها هم می‌گویند. *(دلیلشو فهمیدی دیگه؟ چون طول نقاط رو روی محور x ها و عرض نقاط رو روی محور y ها نشون می‌دیم.)*

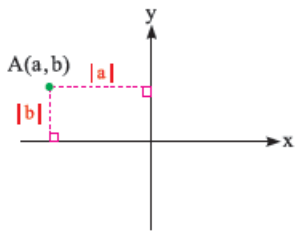
؟ نقاط $A(۲,۰)$ ، $B(۵,۴)$ ، $C(-۲,۳)$ ، $D(-۱,-۲)$ و $E(۶,-۳)$ را در یک دستگاه مختصات مشخص کنید.



✓ کافی است طول هر نقطه را روی محور x ها و عرض آن را روی محور y ها مشخص کرده و از نقاط مشخص شده خطوطی به موازات محورها رسم کنیم. نقطهٔ تلاقی دو خط، جایگاه نقطه را در دستگاه مختصات مشخص می‌کند.

فاصلهٔ نقطه از محورهای مختصات: به شکل زیر نگاه کنید. فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ از محور xها برابر $|b|$ و از محور yها برابر $|a|$ است.

(می‌دونیم فاصله یه عدد نامنفیه. به‌خاطر همین قدرمطلق میزاریم تا از نامنفی بودن فاصله‌ها مطمئن بشیم.)



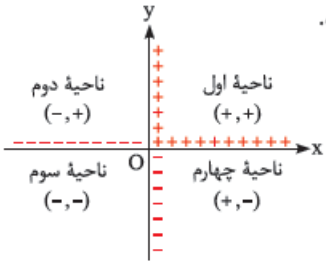
؟ مجموع فواصل نقطهٔ $A(m-1,-2)$ از محورهای مختصات برابر ۷ است. مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -1 ۴) -4

گزینهٔ ۱ فاصلهٔ نقطهٔ A از محور xها برابر $|-2| = 2$ و از محور yها برابر $|m-1|$ است؛ پس:

$$2+|m-1|=7 \Rightarrow |m-1|=5 \Rightarrow \begin{cases} m-1=5 \Rightarrow m=6 \\ m-1=-5 \Rightarrow m=-4 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } m = 6+(-4)=2$$

علامت طول و عرض نقطه در ناحیه‌ها: علامت طول و عرض نقطه، در نواحی چهارگانه به‌صورت مقابل است.



؟ نقطهٔ $M(a,b)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است. کدام نقطه در ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات قرار دارد؟

۱) $A(b,a)$ ۲) $B(b-a,a^2)$

۳) $C(\frac{a}{b},b-a)$ ۴) $D(ab,a-b)$

گزینهٔ ۴ چون نقطهٔ $M(a,b)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات قرار دارد، پس $a<0$ و $b>0$ می‌باشند. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

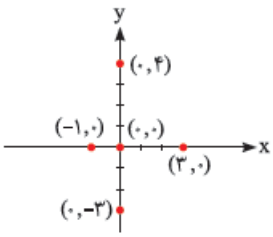
۱) $A(b,a) \Rightarrow (+,-) \Rightarrow$ نقطهٔ A در ناحیهٔ چهارم است ✗

۲) $B(b-a,a^2) \Rightarrow \begin{cases} a<0,b>0 \Rightarrow b-a>0 \\ a^2>0 \end{cases} \Rightarrow (+,+) \Rightarrow$ نقطهٔ B در ناحیهٔ اول است ✗

۳) $C(\frac{a}{b},b-a) \Rightarrow \begin{cases} a<0,b>0 \Rightarrow \frac{a}{b}<0 \\ a<0,b>0 \Rightarrow b-a>0 \end{cases} \Rightarrow (-,+) \Rightarrow$ نقطهٔ C در ناحیهٔ دوم است ✗

۴) $D(ab,a-b) \Rightarrow \begin{cases} a<0,b>0 \Rightarrow ab<0 \\ a<0,b>0 \Rightarrow a-b<0 \end{cases} \Rightarrow (-,-) \Rightarrow$ نقطهٔ D در ناحیهٔ سوم است ✓

نقطه روی محورهای مختصات: اگر نقطه‌ای روی محور xها باشد، مقدار عرض آن صفر و مختصات آن به‌صورت $(a,0)$ و اگر نقطه‌ای روی محور yها باشد، مقدار طول آن صفر و مختصات آن به‌صورت $(0,b)$ است. در ضمن مقدار طول و عرض مبدأ مختصات هر دو برابر صفر است یعنی مختصات مبدأ مختصات $(0,0)$ می‌باشد. *(اوکیه؟)* به شکل مقابل دقت کنید.



نقطهٔ $A(m+۲,۲m-۶)$ روی محور xها و نقطهٔ $B(۲n+۱,n+۳)$ روی محور yها می‌باشند. نقطهٔ $C(m+n,۲-m)$ درکدام ناحیهٔ دستگاه مختصات قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

گزینهٔ ۴ چون نقطهٔ $A(m+۲,۲m-۶)$ روی محور xها قرار دارد، پس عرض آن صفر است:

$$۲m-۶=۰ \Rightarrow ۲m=۶ \Rightarrow m=۳$$

هم‌چنین چون نقطهٔ $B(۲n+۱,n+۳)$ روی محور yها قرار دارد، پس طول آن صفر می‌باشد:

$$۲n+۱=۰ \Rightarrow ۲n=-۱ \Rightarrow n=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مختصات نقطهٔ C به‌صورت مقابل است:

$$\begin{cases} m+n=۳+(-\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۲} \\ ۲-m=۲-۳=-۱ \end{cases} \Rightarrow C(\frac{۵}{۲},-۱) \Rightarrow$$ نقطهٔ C در ناحیهٔ چهارم است

فاصلهٔ دو نقطه: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ یا همان طول پاره‌خط AB از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}=\sqrt{(\text{تفاضل x ها})^۲+(\text{تفاضل y ها})^۲}$$

فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B همون طول پاره‌خط AB هستش.

نقاط $A(۴,۳)$ ، $B(-۸,-۲)$ ، $C(-۲,۳)$ و $D(۲,۰)$ مفروض‌اند. طول پاره‌خط AB چند واحد از طول پاره‌خط CD بیش‌تر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۵

گزینهٔ ۳ طول پاره‌خط‌های AB و CD را به‌دست می‌آوریم و داریم: *کم‌کم این مرحله رو تو ذهنتون انجام بدین*

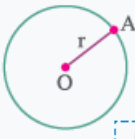
$$AB=\sqrt{(-۸-۴)^۲+(-۲-۳)^۲}=\sqrt{۱۴۴+۲۵}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$
$$CD=\sqrt{(۲-(-۲))^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$
$$\Rightarrow AB-CD=۱۳-۵=۸$$

میشه فاصلهٔ دو نقطه رو با مفاهیم هندسه هم ترکیب کرد. چند تا تمرین ببینین.

دایره‌ای به مرکز $O(-۱,۳)$ از نقطهٔ $A(۳,۰)$ می‌گذرد. مساحت دایره کدام است؟

۱) ۱۷π ۲) ۲۱π ۳) ۲۵π ۴) ۳۶π

گزینهٔ ۳ با توجه به شکل مقابل OA برابر طول شعاع دایره است، پس: *قرارمون یادت نره*



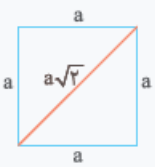
$$r=OA=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

می‌دانیم مساحت دایره با شعاع r برابر $S=\pi r^۲$ است؛ پس $S=\pi(۵)^۲=۲۵\pi$ می‌باشد.

نقاط $A(۲,-۱)$ و $B(-۲,۳)$ دو سر قطر یک مربع هستند. محیط مربع کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $۱۲\sqrt{۲}$ ۳) $۱۶\sqrt{۲}$ ۴) ۱۶

گزینهٔ ۴ می‌دانیم طول قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع آن است. *(یه فیثاغورس بزن تو یکی از مثلث‌ها)* بنابراین AB یعنی طول قطر مربع را به‌دست می‌آوریم:



$$AB=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(۳-(-۱))^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=\sqrt{۱۶\times۲}=۴\sqrt{۲} \Rightarrow a\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲} \Rightarrow a=۴$$

پس محیط مربع برابر $۴a=۴\times۴=۱۶$ می‌باشد.

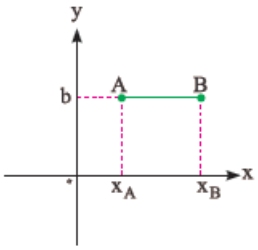
توجه در حالت‌های خاص، فرمول فاصلهٔ دو نقطه به‌صورت‌های زیر ساده می‌شود:

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}=\sqrt{(A\text{طول})^۲+(A\text{عرض})^۲}$$

طب مختصات مبدأ مختصات، $O(۰,۰)$ هستش. تفاضل x ها می‌شه $x_A-۰=x_A$ و تفاضل y ها هم می‌شه $y_A-۰=y_A$.

ب) اگر عرض نقاط A و B یکسان باشد *(دو نقطهٔ A و B هم‌عرض باشن.)*، یعنی مختصات آن‌ها $A(x_A,b)$ و $B(x_B,b)$ باشند، آن‌گاه فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر است با:

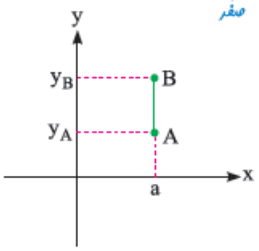


$$AB=|x_B-x_A|$$

اگه هواست نباشه و از فرمول اصلی بری $y_B - y_A$ برابر صفر می‌شه و همین نتیجه به‌دست میاد:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \underbrace{(y_B - y_A)^2}_{\text{صفر}}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|$$

این رو هم که یادت هست $\sqrt{x^2} = |x|$ میشه.



ب) به طور مشابه اگر طول نقاط A و B یکسان باشد *(دو نقطهٔ A و B هم‌طول باشن.)*، یعنی مختصات آن‌ها $A(a\ ,\ y_A)$ و $B(a\ ,\ y_B)$ باشند، آن‌گاه فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$AB = |y_B - y_A|$$

(قبوله دیگه؟)

؟ دو نقطهٔ M و M′ به طول ۵- به فاصلهٔ ۵ از نقطهٔ $A(-۲,۱۰)$ قرار دارند. فاصلهٔ دو نقطهٔ M و M′ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۴

گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $M(-۵,b)$ باشد، پس:

$$MA = ۵ \Rightarrow \sqrt{(-۲-(-۵))^2 + (۱۰-b)^2} = ۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۹ + (۱۰-b)^2 = ۲۵ \Rightarrow (۱۰-b)^2 = ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۰-b = ۴ \Rightarrow b = ۶ \\ ۱۰-b = -۴ \Rightarrow b = ۱۴ \end{cases}$$

بنابراین $M(-۵,۶)$ و $M'(-۵,۱۴)$ است و فاصلهٔ M و M′ برابر $۱۴-۶ = ۸$ است. *(M و M′ هم‌طول هستن.)*

یه کم بریم تو فاز مثلث. ببینیم تا اینجای کار اگه مختصات سه رأس مثلث رو داشته باشیم چه کارهایی میشه باهاشون انجام داد.

مثلث با داشتن مختصات سه رأس آن

۱ تشخیص نوع مثلث: اگر مختصات رئوس مثلث ABC را داشته باشیم با محاسبهٔ طول اضلاع AB، AC و BC، می‌توانیم نوع مثلث (قائم‌الزاویه بودن، متساوی‌الاضلاع بودن و ...) را تشخیص دهیم که معمولاً با یکی از حالات زیر مواجه می‌شویم:

الف) اگر طول هر سه ضلع با هم برابر باشند، نوع مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

ب) اگر طول فقط دو ضلع برابر باشد، نوع مثلث، متساوی‌الساقین است.

پ) اگر طول سه ضلع در رابطهٔ فیثاغورس صدق کند *(مربع ضلع بزرگ‌تر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگه باشه.)* نوع مثلث، قائم‌الزاویه است.

نکته ممکن است یک مثلث علاوه بر متساوی‌الساقین بودن، قائم‌الزاویه نیز باشد، بنابراین اگر در گزینه‌ها، نوع «قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین» وجود داشت، بعد از این که فهمیدیم مثلث، متساوی‌الساقین است باید رابطهٔ فیثاغورس را نیز چک کنیم.

؟ نقاط $A(۲,۰)$ ، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ سه رأس مثلث ABC هستند. نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین ۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

گزینهٔ ۴ طول اضلاع مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$BC = \sqrt{۴۹+۱} = \sqrt{۵۰} \qquad AC = \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} = ۵ \qquad AB = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

متساوی‌الساقین بودن مثلث که قطعی است، امّا چون $(\sqrt{۵۰})^2 = ۵^2 + ۵^2$ می‌باشد، پس قائم‌الزاویه نیز می‌باشد.

۲ به‌دست آوردن محیط مثلث: اگر مختصات رئوس مثلث ABC را داشته باشیم، برای به‌دست آوردن محیط مثلث کافی است طول اضلاع AB، AC و BC را به‌دست آوریم محیط مثلث ABC برابر است با:

$$\text{محیط} = AB + AC + BC$$

؟ نقاط $A(۰,۴)$ ، $B(-۳,۰)$ و $C(-۶,۴)$ مفروض‌اند. محیط مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

گزینهٔ ۳ طول اضلاع AB ، AC و BC را به‌دست می‌آوریم:

$$BC = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵ \qquad AC = |-۶-۰| = ۶ \qquad AB = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

هواست بود که نقاط A و C هم عرض بودن.

بنابراین محیط مثلث ABC برابر $۵+۶+۵ = ۱۶$ می‌باشد.

۳ به دست آوردن مساحت مثلث: اگر مختصات رئوس A، B و C از مثلث ABC را داشته باشیم، مساحت مثلث ABC از الگوی زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{array}{l} x_Ay_B \\ +x_By_C \\ +x_Cy_A \\ \hline M \end{array} \left| \begin{array}{cc} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{array} \right| \begin{array}{l} y_Ax_B \\ +y_Bx_C \\ +y_Cx_A \\ \hline N \end{array} \Rightarrow S=\frac{1}{2}|M-N|$$

؟ نقاط $A(3,-2)$ ، $B(1,5)$ و $C(-2,-6)$ مفروض‌اند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۱/۵ ۳) ۲۲ ۴) ۲۲/۵

گزینهٔ ۲ مطابق الگوی گفته شده داریم:

$$\begin{array}{l} 3\times5 \\ +1\times(-6) \\ +(-2)\times(-2) \\ \hline 13 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 1 & 5 \\ -2 & -6 \\ 3 & -2 \end{array} \right| \begin{array}{l} +(-2)\times1 \\ +5\times(-2) \\ +(-6)\times3 \\ \hline -30 \end{array} \Rightarrow S=\frac{1}{2}|13-(-30)|=\frac{1}{2}\times43=21/5$$

نکته اگر مختصات رئوس چهارضلعی ABCD را بدهند و مساحت آن را بخواهند، می‌توانیم یکی از دو کار زیر را انجام بدهیم:

الف با رسم یکی از قطرهای چهارضلعی، آن را به دو مثلث تبدیل کنیم و مساحت هریک از مثلث‌ها را به‌دست آورده و سپس با هم جمع کنیم.

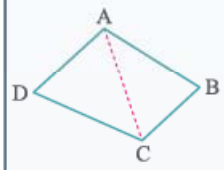
ب از الگویی شبیه الگوی مساحت مثلث استفاده کنیم و مساحت چهارضلعی را به‌طور مستقیم به‌دست آوریم:

$$\begin{array}{l} x_Ay_B \\ +x_By_C \\ +x_Cy_D \\ +x_Dy_A \\ \hline M \end{array} \left| \begin{array}{cc} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_D & y_D \\ x_A & y_A \end{array} \right| \begin{array}{l} y_Ax_B \\ +y_Bx_C \\ +y_Cx_D \\ +y_Dx_A \\ \hline N \end{array} \Rightarrow S=\frac{1}{2}|M-N|$$

؟ نقاط $A(5,0)$ ، $B(8,2)$ ، $C(6,4)$ و $D(0,7)$ مفروضند. مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۶/۵ ۳) ۱۸ ۴) ۱۸/۵

گزینهٔ ۴ **روش اول** با توجه به شکل مقابل، با رسم قطر AC ، مساحت مثلث‌های ADC و ABC را به‌دست آورده و سپس آن‌ها را جمع می‌کنیم.



$$\begin{array}{l} 35 \\ +0 \\ +0 \\ \hline 35 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ 6 & 4 \\ 5 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ +42 \\ +20 \\ \hline 62 \end{array} \Rightarrow S_{ADC}=\frac{1}{2}|35-62|=\frac{27}{2}=13/5$$

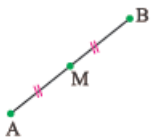
$$\begin{array}{l} 10 \\ +32 \\ +0 \\ \hline 42 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 8 & 2 \\ 6 & 4 \\ 5 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ +12 \\ +20 \\ \hline 32 \end{array} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}|42-32|=\frac{10}{2}=5$$

بنابراین مساحت چهارضلعی ABCD برابر $18/5=5+13/5$ می‌باشد.

روش دوم به کمک الگوی مساحت چهارضلعی داریم:

$$\begin{array}{l} 10 \\ +32 \\ +42 \\ +0 \\ \hline 84 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 8 & 2 \\ 6 & 4 \\ 0 & 7 \\ 5 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ +12 \\ +0 \\ +35 \\ \hline 47 \end{array} \Rightarrow S=\frac{1}{2}|84-47|=\frac{37}{2}=18/5$$

مختصات وسط پاره‌خط: مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$M=\frac{A+B}{2} \Rightarrow M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

؟ نقطهٔ $C(-1,b)$ وسط پاره‌خط AB است که در آن $A(-9,8)$ و $B(a,14)$ می‌باشند. مقدار $a+b$ کدام است؟

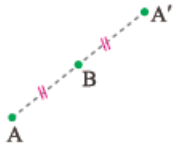
۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

گزینهٔ ۲ می‌دانیم $x_C=\frac{x_A+x_B}{2}$ و $y_C=\frac{y_A+y_B}{2}$ است، پس:

$$(-1,b)=\left(\frac{-9+a}{2},\frac{8+14}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-9+a}{2}=-1 \Rightarrow -9+a=-2 \Rightarrow a=7 \\ b=\frac{8+14}{2} \Rightarrow b=11 \end{cases} \Rightarrow a+b=7+11=18$$

کاربردهای نقطهٔ وسط پاره‌خط

۱ قرینهٔ نقطه نسبت به نقطه: برای به‌دست آوردن قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B کافی است از A به B وصل کرده و به اندازهٔ AB از طرف دیگر امتداد دهیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید. بنابراین نقطهٔ B وسط پاره‌خط AA' است و داریم:



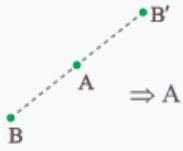
$$\Rightarrow B=\frac{A+A'}{2}\Rightarrow 2B=A+A'\Rightarrow \boxed{A'=2B-A}$$

حفظ کردن تساوی آخر خیلی خطرناکه. ممکنه در یه سؤال از تون بخوان B رو نسبت به A قرینه کنین اونوقت قطعاً قاطی می‌کنین. بهتره حتماً شکل بکشین و از اول شروع کنین و به رابطهٔ آخر برسین.

؟ فاصلهٔ قرینهٔ نقطهٔ $B(4,-5)$ نسبت به نقطهٔ $A(-2,4)$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{233}$ ۲) $\sqrt{245}$ ۳) $\sqrt{238}$ ۴) $\sqrt{253}$

گزینهٔ ۱ قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم: *(از رسم شکل شروع کن.)*

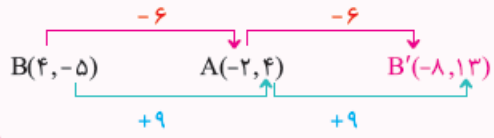


$$\Rightarrow A=\frac{B+B'}{2}\Rightarrow B'=2A-B\Rightarrow B'=2(-2,4)-(4,-5)=(-4,8)-(4,-5)=(-8,13)$$

بنابراین فاصلهٔ $B'(-8,13)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OB'=\sqrt{64+169}=\sqrt{233}$$

نکته قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B را می‌توان به کمک فلش‌زنی نیز به‌دست آورد: *(فیلی باحاله و ببین که چقدر راحت‌تره.)*

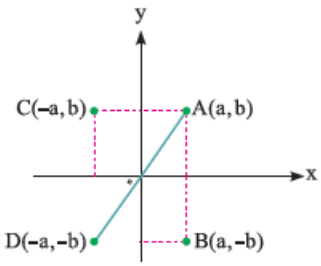


قرینهٔ نقطه نسبت به محورها و مبدأ مختصات

الف) قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ نسبت به محور xها نقطهٔ $B(a,-b)$ است. *(کافیه عرض نقطه رو قرینه کنی.)*

ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ نسبت به محور yها نقطهٔ $C(-a,b)$ است. *(کافیه طول نقطه رو قرینه کنی.)*

پ) قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ نسبت به مبدأ مختصات نقطهٔ $D(-a,-b)$ است. *(کافیه طول و عرض نقطه رو قرینه کنی. انگار می‌خوای هم نسبت به محور xها و هم نسبت به محور yها قرینه کنی.)*



؟ نقطهٔ $A(2,-3)$ را نسبت به محور xها قرینه کرده و آن را B می‌نامیم. اگر قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به مبدأ مختصات نقطهٔ C باشد، فاصلهٔ وسط پاره‌خط BC از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{13}$ ۴) ۵

گزینهٔ ۲ با توجه به‌صورت سؤال داریم:

$$A(2,-3)\xrightarrow[y\to -y]{\text{قرینه نسبت به محور xها}}B(2,3)\qquad A(2,-3)\xrightarrow[x\to -x\ ,\ y\to -y]{\text{قرینه نسبت به مبدأ}}C(-2,3)$$

بنابراین مختصات وسط پاره‌خط BC برابر است با:

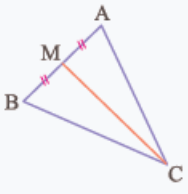
$$M=\frac{B+C}{2}=\frac{(2,3)+(-2,3)}{2}=(0,3)\Rightarrow$$ فاصلهٔ $M(0,3)$ از مبدأ مختصات برابر ۳ است.

۲ به‌دست آوردن طول میانهٔ مثلث: می‌دانیم هر میانه در مثلث *(مثلث سه تا میانه داره.)* از رأس بر وسط ضلع مقابل وارد می‌شود. بنابراین برای به‌دست آوردن طول هر میانه باید فاصله رأس مثلث تا وسط ضلع مقابل را به‌دست آوریم.

؟ در مثلث ABC با رئوس $A(2,7)$ ، $B(-2,1)$ و $C(1,7)$، طول میانه وارد بر ضلع AB کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $2\sqrt{3}$

گزینهٔ ۳ به شکل زیر توجه کنید. باید مختصات وسط پاره‌خط AB را به‌دست آوریم:

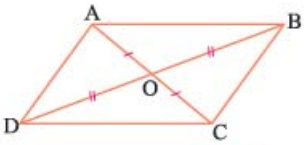


$$M=\frac{A+B}{2}\Rightarrow M=\frac{(2,7)+(-2,1)}{2}=(0,4)$$

حال طول میانهٔ CM را به‌دست می‌آوریم:

$$CM=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

۳ شرط متوازی‌الاضلاع بودن یک چهارضلعی: می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند، پس اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد آن‌گاه وسط قطر AC بر وسط قطر BD منطبق است. بنابراین داریم:



$$\begin{cases} O = \frac{A+C}{2} \\ O = \frac{B+D}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \Rightarrow \boxed{A+C=B+D}$$

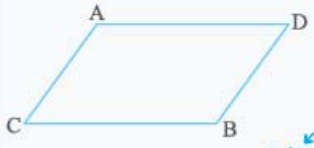
نام‌گذاری رأس‌ها ساعتگرد یا پادساعتگرده. اگه می‌خوای زرنگ‌بازی دربیاری رأس‌ها رو یکی در میون با هم جمع کن. مثلاً اگر چهارضلعی ACBD متوازی‌الاضلاع باشه، باید $A+B$ با $C+D$ برابر باشه.

نتیجه داستان مستطیل بودن، مربع بودن و لوزی بودن چهارضلعی ABCD هم مانند متوازی‌الاضلاع است چون در این چهارضلعی‌ها هم قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

؟ نقاط $A(2,-1)$ ، $B(7,-2)$ و $C(1,4)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ADBC هستند. مجموع طول و عرض رأس D کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

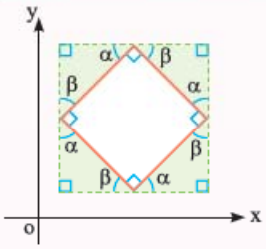
گزینهٔ ۳ در متوازی‌الاضلاع ADBC قطرها AB و CD هستند، پس:



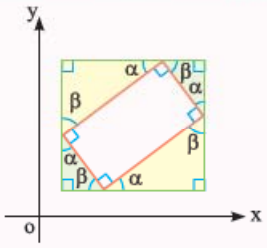
$$A+B=C+D \Rightarrow (2,-1)+(7,-2)=(1,4)+D$$
$$\Rightarrow (9,-3)=(1,4)+D \Rightarrow D=(9,-3)-(1,4)=(8,-7)$$

بنابراین مجموع طول و عرض رأس D برابر $1=(-7)+8$ است. *(اینجوری هم می‌شد فهمید که AB و CD قطرن ADBC.)*

نکته گاهی مختصات دو رأس یک مربع یا یک رأس و طول ضلع آن را می‌دهند *(طول ضلع ممکنه غیرمستقیم داده بشه در قالب محیط مربع یا مساحت اون.)* و مختصات رأس دیگر آن را می‌خواهند، در این مسائل، بهترین کار، استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌هایی است که می‌توان کنار اضلاع مربع تشکیل داد می‌باشد. اگر چهارضلعی مستطیل باشد، تشابه و همنهشتی مثلث‌های کنار اضلاع کارساز است.

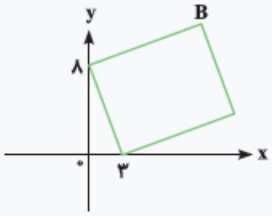


مثلث‌های رنگی همنهشت‌اند.



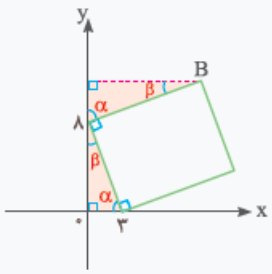
مثلث‌های هم‌رنگ، همنهشت و مثلث‌های ناهم‌رنگ، متشابه هستند.

؟ در شکل مقابل، چهارضلعی مربع است. مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ B کدام است؟



۱) ۱۹
۲) ۱۸
۳) ۱۷
۴) ۱۶

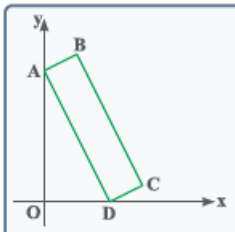
گزینهٔ ۱ از رأس B بر محور yها عمود می‌کنیم. دو مثلث رنگی با حالت تساوی دو زاویه و برابری ضلع بین آن‌ها همنهشت هستند پس اضلاع نظیر دو مثلث برابرند و داریم:



$$\begin{cases} x_B = 8 \\ y_B = 8+3 = 11 \end{cases} \Rightarrow B(8,11)$$

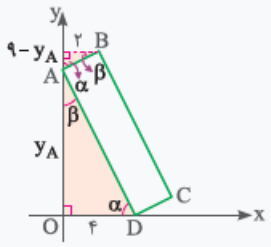
بنابراین مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ B برابر $19=11+8$ می‌باشد.

؟ در مستطیل شکل مقابل $B(2,9)$ و $D(4,0)$ است. اگر $AB < BC$ باشد، مساحت مستطیل کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) $18\sqrt{2}$
۴) $15\sqrt{3}$

گزینهٔ ۱ از B بر محور yها عمود می‌کنیم. دو مثلث رنگی با دو زاویهٔ برابر متشابه‌اند، پس:



$$\frac{۲}{y_A}=\frac{۹-y_A}{۴}\Rightarrow ۸=۹y_A-y_A^۲$$

$$\Rightarrow y_A^۲-۹y_A+۸=۰\Rightarrow \begin{cases} y_A=۱ \\ y_A=۸ \end{cases}$$

واضح است که $y_A=۸$ بوده و داریم:

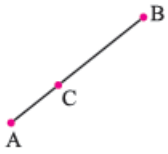
$$AB=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

$$AD=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر $S=۴\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}=۲۰$ می‌باشد.

یه کوپولو بریم خارج از کتاب درسی و یه چیز مفید یاد بگیریم که بعدها ممکنه به دردتون بخوره.

تقسیم پاره‌خط به نسبت معین: اگر نقطهٔ C روی پاره‌خط واصل نقاط A و B، آن را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم



کند، آن‌گاه مختصات نقطهٔ C به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}\Rightarrow \boxed{C=\frac{n\times A+m\times B}{n+m}}$$

می‌خوای حفظش کنی برای صورت کسر مثل طرفین وسطین کردن فکر کن و مخرج هم میشه $n+m$.

$$\frac{AC}{BC}=\frac{\textcircled{m}}{\textcircled{n}}\Rightarrow C=\frac{m\times B+n\times A}{m+n}$$

خواست باشه رابطهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط هم نتیجهٔ همین رابطه هست.

$$\frac{AM}{BM}=\frac{۱}{۱}\Rightarrow M=\frac{۱\times A+۱\times B}{۱+۱}=\frac{A+B}{۲}$$

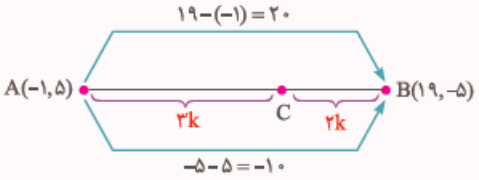
؟ نقطهٔ C روی پاره‌خط AB که در آن $A(-۱,۵)$ و $B(۱۹,-۵)$ به‌گونه‌ای قرار دارد که $۲AC=۳BC$ می‌باشد. مجموع طول و عرض نقطهٔ C کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

گزینهٔ ۳ چون $۲AC=۳BC$ می‌باشد پس $\frac{AC}{BC}=\frac{۳}{۲}$ است و داریم:

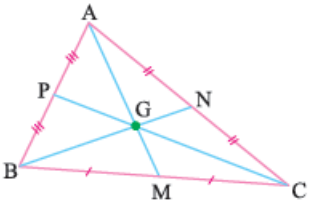
$$C\left(\frac{۲\times(-۱)+۳\times ۱۹}{۲+۳},\frac{۲\times ۵+۳\times(-۵)}{۲+۳}\right)=C(۱۱,-۱)\Rightarrow \text{مجموع طول و عرض}=۱۱+(-۱)=۱۰$$

نکته مختصات نقطهٔ C را به کمک فلش‌زنی هم می‌توان به‌دست آورد. نگاه کنید.



$$\Rightarrow \begin{cases} ۵k_۱=۲۰\Rightarrow k_۱=۴\Rightarrow ۳k_۱=۱۲\Rightarrow x_C=-۱+۱۲=۱۱ \\ ۵k_۲=-۱۰\Rightarrow k_۲=-۲\Rightarrow ۳k_۲=-۶\Rightarrow y_C=۵+(-۶)=-۱ \end{cases}$$

نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث: میانه‌های مثلث در نقطه‌ای داخل مثلث همرس‌اند و همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند. پس اگر A، B و C سه رأس مثلث ABC باشند، داریم:



$$\frac{AG}{MG}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow G=\frac{۱\times A+۲\times M}{۱+۲}\xrightarrow{M=\frac{B+C}{۲}}G=\frac{A+۲(\frac{B+C}{۲})}{۳}\Rightarrow \boxed{G=\frac{A+B+C}{۳}}$$

؟ نقاط $A(x,۴)$ ، $B(-۱,y)$ و $C(۸,۳)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث $(۴,۳)$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

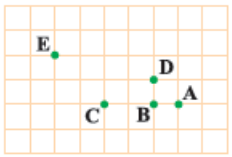
گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، داریم:

$$G=\frac{A+B+C}{۳}\Rightarrow (۴,۳)=\left(\frac{x+(-۱)+۸}{۳},\frac{۴+y+۳}{۳}\right)\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+۷}{۳}=۴\Rightarrow x+۷=۱۲\Rightarrow x=۵ \\ \frac{y+۷}{۳}=۳\Rightarrow y+۷=۹\Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

بنابراین $x+y$ برابر $۵+۲=۷$ می‌باشد.

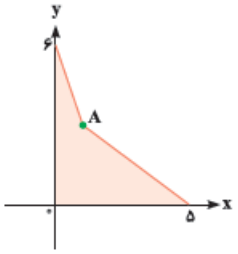
درس ۱ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. در صفحهٔ شطرنجی شکل مقابل، $E(-۴,۲)$ است. کدام نقطه، مبدأ مختصات می‌باشد؟



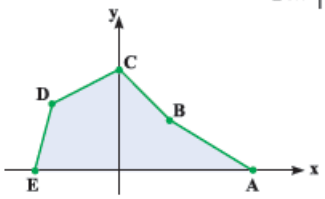
۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

۲. در شکل مقابل $A(۱,۳)$ می‌باشد. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) ۹
۲) ۹/۵
۳) ۱۰
۴) ۱۰/۵

۳. در شکل مقابل $A(۸,۰)$ ، $B(۳,۳)$ ، $C(۰,۶)$ ، $D(-۴,۴)$ و $E(-۵,۰)$ هستند. مساحت پنج‌ضلعی رنگی کدام است؟



۱) ۳۹
۲) ۴۱
۳) ۴۳
۴) ۴۵

۴. مجموع فواصل نقطهٔ $A(۵,m-۲)$ از محورهای مختصات برابر ۸ است. کدام نقطهٔ زیر می‌تواند روی محور yها قرار گیرد؟

۱) $(m-۳,m-۵)$
۲) $(m^۲+۳m+۲,m^۲+m-۲)$
۳) $(m^۲+m-۲,m^۲-۳m+۲)$
۴) $(m^۲-۵m+۶,۲m)$

۵. طول نقطهٔ A از دو برابر عرض آن، ۶ واحد بیشتر است. اگر A رأس مستطیلی با محیط ۲۴ باشد که اضلاع آن بر محورهای مختصات منطبق است، کم‌ترین مساحت مستطیل مفروض کدام است؟

۱) ۳۶
۲) ۲۴
۳) ۲۰
۴) ۱۸

۶. نقطهٔ $A(۲m-۵,m^۲-۱۶)$ در ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات قرار دارد. مجموع مقادیر صحیح m کدام است؟

۱) ۲
۲) -۳
۳) -۲
۴) ۳

۷. نقطهٔ $A(a,b)$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات قرار دارد. کدام نقطه حتماً در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات است؟

۱) $(b-a,-b)$
۲) $(\frac{a}{b},-b)$
۳) $(a+b,-b)$
۴) $(a-b,b^۲)$

۸. نقطهٔ $A(ab,b-c)$ در ناحیهٔ دوم و نقطهٔ $B(c+d,d^۲-a)$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات قرار دارند اگر a ، b ، c و d اعداد صحیح باشند، نقطهٔ $C(|a|-|d|,|c|-|b|)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۹. نقطهٔ $A(a-۱,b+۱)$ روی محور xها و نقطهٔ $B(a+۳,b-۵)$ روی محور yها قرار دارد. نقطهٔ $C(a+b,-b)$ کجای دستگاه مختصات قرار دارد؟

۱) ناحیهٔ اول
۲) ناحیهٔ دوم
۳) ناحیهٔ سوم
۴) ناحیهٔ چهارم

۱۰. نقاط $A(۱۱,۲)$ ، $B(-۱,-۳)$ ، $C(۷,۵)$ و $D(۳,-۶)$ مفروض‌اند. محیط مثلث ABC چه‌قدر از طول پاره‌خط AD بیش‌تر است؟

۱) ۱۳
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) $۱۸+۵\sqrt{۲}$

۱۱. طول پاره‌خط واصل نقاط $A(۱,-۲)$ و $B(a,۶)$ برابر ۱۰ است. مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) -۱
۴) -۲

۱۲. نقاط $A(۵,۱)$ ، $B(۲,-۳)$ و $C(-۱,b)$ مفروض‌اند. اگر $AB=BC$ باشد، بیشترین طول پاره‌خط AC کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۱۳. نقطهٔ $A(a,۲)$ از دو نقطهٔ $B(-۲,۰)$ و $C(۳,-a)$ به یک فاصله است. طول بزرگ‌ترین پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$
۲) $\sqrt{۲۹}$
۳) $\sqrt{۴۳}$
۴) $\sqrt{۵۳}$

۱۴. نقاط $A(۱,۳)$ ، $B(-۲,-۱)$ و $C(-۷,-۳)$ سه رأس مثلث ABC هستند. میانهٔ وارد بر ضلع BC آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند. اختلاف محیط‌های دو مثلث کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) $۴+\sqrt{۲}$
۴) $۴+۲\sqrt{۲}$

۱۵. اگر طول پاره‌خط واصل بین نقاط $A(m,3m+4)$ و $B(1-m,m+3)$ برابر $3\sqrt{2}$ باشد، میانگین مقادیر m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۰/۵

۱۶. نقطهٔ A روی محور xها به‌گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن از نقاط $B(1,2)$ و $C(2,-3)$ برابر L است. مقدار L کدام است؟

۱) $\sqrt{13}$ ۲) $\sqrt{11}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{7}$

۱۷. نقطهٔ $(a,2a)$ مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ $(2,1)$ و $(-1,4)$ است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۱۸. فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ از نقاط $B(3,-2)$ و $C(5,1)$ برابر است. مقدار $4a+6b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۳ ۳) -۱۱ ۴) -۷

۱۹. نقطهٔ $A(m^2+m-6,m^2-9)$ با بیش‌ترین فاصله از مبدأ مختصات روی یکی از محورهای مختصات قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ $B(m-6,5-2m)$ از نقطهٔ A کدام است؟

۱) $2\sqrt{19}$ ۲) $\sqrt{82}$ ۳) $2\sqrt{21}$ ۴) $\sqrt{86}$

۲۰. نقاط $A(2,8)$ و $B(8,0)$ دو رأس مربع $ABCD$ هستند. مساحت مثلث ACD کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۲۱. رأس‌های دو مربع بر نقاط $A(3,2)$ و $B(1,4)$ منطبق‌اند. بیش‌ترین مساحت ناحیهٔ مشترک دو مربع کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۲۲. نقاط $A(3,7)$، $B(7,-1)$ و $C(1,6)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) مختلف‌الاضلاع ۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۲۳. نقاط $A(4,2)$، $B(2,4)$ و $C(2,-2)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۴. مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2,5)$، $B(3,0)$ و $C(0,2)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۲۵. نقاط $A(-1,3)$، $B(2,-2)$ و $C(a,4)$ رئوس مثلث ABC با مساحت ۳ هستند. میانگین مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) -۲/۴ ۲) ۱/۲ ۳) ۲/۸ ۴) -۱/۶

۲۶. نقاط $A(0,5)$، $B(8,2)$، $C(4,-4)$ و $D(-6,-1)$ رئوس چهارضلعی $ABCD$ هستند. مساحت چهارضلعی کدام است؟

۱) ۶۹ ۲) ۶۸ ۳) ۶۴ ۴) ۶۲

۲۷. نقاط $A(-3,0)$، $B(-5,4)$ و $C(0,8)$ و مبدأ مختصات رئوس چهارضلعی $ABCO$ هستند. مساحت چهارضلعی کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۲۸. نقاط $C(6,0)$ و $D(0,4)$ رئوس مستطیل $ABCD$ هستند. اگر نقطهٔ $M(4,6)$ روی ضلع AB باشد، مساحت مستطیل $ABCD$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

۲۹. نقاط $A(-3,-2)$، $B(1,2)$ و $C(2,6)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۳۰. نقاط $A(11,2)$، $B(11,10)$ و $C(17,10)$ سه رأس مثلث ABC هستند. نوع و محیط آن کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع – ۲۶ ۲) متساوی‌الساقین – ۲۶ ۳) قائم‌الزاویه – ۲۴ ۴) نامشخص – ۲۴

۳۱. نقاط $A(a,2)$، $B(a,8)$، $C(0,12)$ و $O(0,0)$ رئوس چهارضلعی با مساحت ۶۳ واحد مربع هستند. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۷ ۲) -۱۰ ۳) -۱۲ ۴) -۱۴

۳۲. فاصلهٔ وسط پاره‌خط واصل نقاط $A(-6,2)$ و $B(-2,4)$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) ۵ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{7}$

۳۳. در مثلث ABC با رئوس $A(8,11)$، $B(2,3)$ و $C(6,5)$، فاصلهٔ وسط اضلاع AB و BC از هم کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۳۴. فاصلهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل نقاط $A(n+3,4)$ و $B(9,3n-2)$ از محورهای مختصات برابر است. مجموع مقادیر n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۳۵. قرینهٔ نقطهٔ $B(2,-3)$ نسبت به نقطهٔ $A(1,2)$ نقطهٔ B' است. فاصلهٔ B' از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۶. نقاط $A(2a-3,b+1)$ و $B(7,b-3)$ نسبت به نقطهٔ $C(5,-4)$ قرینهٔ یکدیگرند. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) -۱ ۴) ۳

۳۷. نقاط $A(2a+3b,1)$ و $B(4,a+2b)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه‌اند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $2\sqrt{11}$ ۲) $3\sqrt{7}$ ۳) $2\sqrt{17}$ ۴) $3\sqrt{13}$

۳۸. قرینهٔ نقطهٔ $A(2,4)$ نسبت به نقطهٔ $B(3-2a,a+1)$ در ناحیهٔ سوم واقع است. حدود a کدام است؟

۱) $1<a<2$ ۲) $a>1$ ۳) $-1<a<3$ ۴) نشدنی

۳۹. قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ $B(-3,5)$ نقطهٔ $C(-1,b)$ است که وسط پاره‌خط واصل نقاط $D(4,6)$ و $E(-6,4)$ قرار دارد. طول پاره‌خط AC کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۰. قرینهٔ نقطهٔ $A(-1,4)$ نسبت به محور yها را نسبت به نقطهٔ $(4,6)$ قرینه می‌کنیم. فاصلهٔ نقطهٔ حاصل از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{97}$ ۲) $\sqrt{103}$ ۳) $\sqrt{113}$ ۴) $\sqrt{121}$

۴۱. قرینهٔ نقطهٔ $A(-4,2)$ نسبت به نقطهٔ $B(k-3,4)$ روی محور yها است. قرینهٔ نقطهٔ $(k+1,2k)$ نسبت به نقطهٔ A کدام است؟

۱) $(-8,4)$ ۲) $(-10,2)$ ۳) $(-6,10)$ ۴) $(4,-10)$

۴۲. نقاط $A(a,b)$، $B(-a,b+1)$ و $C(3,2-a)$ مفروض‌اند. اگر $AB=\sqrt{17}$ و $BC=5\sqrt{2}$ و نقطهٔ A در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات باشد، فاصلهٔ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B از نقطهٔ C کدام است؟

۱) $\sqrt{101}$ ۲) $\sqrt{97}$ ۳) $\sqrt{90}$ ۴) $\sqrt{107}$

۴۳. قرینهٔ نقطهٔ $A(a^2-1,3b-7)$ نسبت به محور xها نقطهٔ B و قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ $E(-1,2)$ نقطهٔ $C(-5,6)$ است. بیشترین مقدار $a+b$ چقدر از کم‌ترین مقدار آن بیشتر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۴. نقاط $A(4,1)$، $B(-2,2)$ و $C(-4,-2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانهٔ وارد بر ضلع BC کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{3}$ ۴) $5\sqrt{2}$

۴۵. نقاط $A(-1,4)$، $B(5,3)$ و $C(-3,7)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. طول ضلع BC چند برابر طول میانهٔ وارد بر آن است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۶. نقاط $A(a-1,b+2)$، $B(5,4)$، $C(a+5,a+2)$ و $D(-7,2)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. طول قطر AC کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۴۷. نقاط $A(1,-2)$، $B(7,-2)$، $C(a,2)$ و $D(4,b)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۴۸. نقاط $A(-1,3)$، $C(5,-2)$ و $D(2,-3)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. طول بزرگ‌ترین قطر متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{59}$ ۴) $\sqrt{61}$

۴۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD، $B(5,3)$ و $D(-2,3)$ است. اگر $M(4,1)$ وسط ضلع AB باشد، فاصلهٔ رأس C از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{3}$

۵۰. نقاط $A(2,5)$، $D(8,3)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. اگر $O(3,3)$ نقطهٔ تلاقی قطرهای آن باشد، مجموع طول و عرض رئوس B و C کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۵۱. نقاط $A(3,-2)$، $B(2,5)$ و $C(-3,1)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس D کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $(8,2)$ ۲) $(-2,-6)$ ۳) $(6,3)$ ۴) $(-4,8)$

۵۲. نقاط $A(0,4)$، $D(3,0)$ رئوس مربع ABCD هستند. اگر رأس C در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات باشد، فاصلهٔ رأس C از مبدأ مختصات کدام است؟

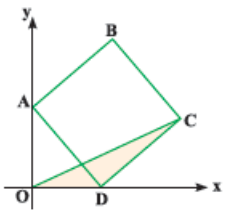
۱) $2\sqrt{13}$ ۲) $\sqrt{58}$ ۳) $2\sqrt{15}$ ۴) ۸

۵۳. نقاط $C(4,-1)$ و $D(-2,3)$ رئوس مربع ABCD هستند. اگر رأس B در ناحیهٔ اول مختصات باشد، فاصلهٔ B تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{59}$ ۲) $\sqrt{69}$ ۳) $\sqrt{79}$ ۴) $\sqrt{89}$

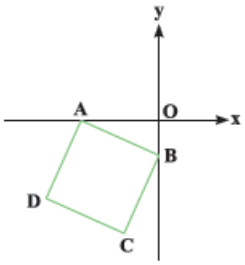
۵۴. نقاط $A(0,1)$ و $B(4,-2)$ دو رأس مجاور مربع ABCD هستند. طول مختصات نقطهٔ D در ربع سوم کدام است؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4



۵۵. در شکل مقابل ABCD مربع است. اگر $D(2,0)$ باشد، مساحت مثلث رنگی کدام است؟

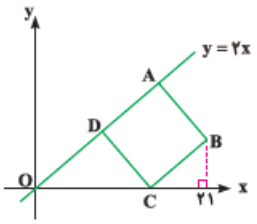
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴



۵۶. در شکل مقابل چهارضلعی ABCD مربع است. اگر $B(0,-2)$ و مساحت مربع ۴۰ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ C کدام است؟

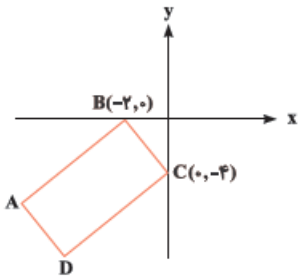
۱) -8
۲) -9
۳) -10
۴) -12

۵۷. در شکل مقابل مساحت مربع ABCD کدام است؟



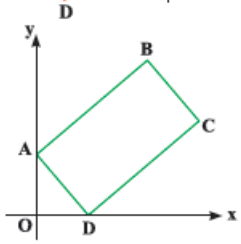
۱) ۱۵۰
۲) ۱۶۹
۳) ۱۸۰
۴) ۱۹۶

۵۸. در شکل مقابل مساحت مستطیل ABCD برابر ۴۰ واحد مربع است. عرض رأس D کدام است؟



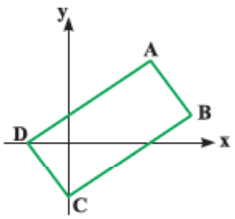
۱) -۶
۲) -۷
۳) -۸
۴) -۱۰

۵۹. در شکل مقابل محیط مستطیل ۳۰ است. اگر A(۰,۴) و D(۳,۰) باشند، عرض رأس C کدام است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۶۰. در شکل مقابل ABCD مستطیل است. اگر A(۵,۶) و C(۰,-۴) باشند، طول رأس B کدام است؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۶۱. نقطهٔ B روی پاره‌خط واصل بین نقاط A(۶,-۳) و C(۰,۶) به‌گونه‌ای قرار دارد که $AB = ۲BC$ می‌باشد. مجموع طول و عرض نقطهٔ B کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) -۲ ۴) -۱

۶۲. نقاط A(-۲,۴)، B(۰,۶) و C(۵,۱) مفروض‌اند. اگر پاره‌خط‌های AD و BC در نقطهٔ E متقاطع و $۳EB = ۲EC$ و $۳AE = ED$ باشند، تفاضل طول و عرض نقطهٔ D کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۶۳. قرینهٔ نقطهٔ C(۵,۳) نسبت به نقطهٔ E(۳,۵) نقطهٔ D روی پاره‌خط AB است. اگر B(-۴,۳) و $AD = ۲DB$ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۶۴. نقاط A(-۱,۶)، B(۱,۷)، C(۵,-۱) و D(-۴,-۳) رئوس چهارضلعی ABCD هستند. اگر نقاط E و F به ترتیب روی اضلاع AD و BC به گونه‌ای باشند که $DE = ۲AE$ و $BF = ۳CF$، طول پاره‌خط EF کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

۶۵. نقاط A(-۱,۲) و B(۳,-۴) مفروض‌اند. نقطهٔ C روی خط گذرنده از نقاط A و B به گونه‌ای قرار دارد که $\frac{AB}{BC} = \frac{۲}{۵}$ می‌باشد. کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ C از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۵۰}$ ۲) $۴\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۷۰}$ ۴) $۶\sqrt{۵}$

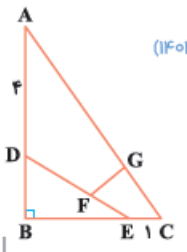
۶۶. نقاط A(-۳,۷) و C(۵,-۳) رئوس مثلث ABC هستند. اگر G(-۱,-۲) نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث باشد، طول میانهٔ BN کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۵}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۵}$

۶۷. قرینهٔ نقطهٔ A(۱,۱) نسبت به نقاط B(-۱,۲) و (۳,۲) را به ترتیب B و C می‌نامیم. نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC کدام است؟

۱) $(-۱,\frac{۷}{۳})$ ۲) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۷}{۳})$ ۳) $(۱,\frac{۷}{۳})$ ۴) $(\frac{۱}{۳},\frac{۷}{۳})$

۶۸. در شکل مقابل اگر $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = ۴$ باشد، اندازهٔ FG کدام است؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)



۱) ۱
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۵
۴) ۱/۷۵

.فصل آخـر

ریاضی تجربی یازدهم

پاسخ‌های تشریحی

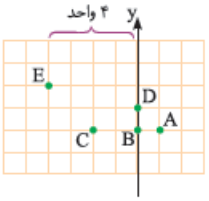
Descriptive Answers

Paul Dirac

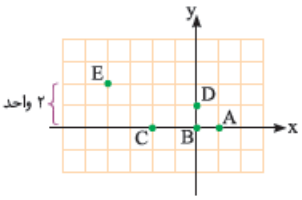
فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

۱ ۲

چون طول نقطهٔ E برابر ۴- می‌باشد، پس محور yها چهار واحد سمت راست نقطهٔ E است.

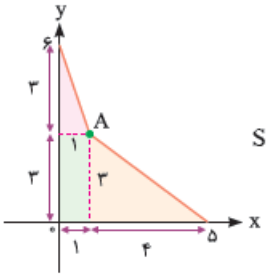


از طرفی چون عرض نقطهٔ E برابر ۲ می‌باشد، پس محور xها دو واحد پایین‌تر از نقطهٔ E می‌باشد. با توجه به شکل مقابل نقطهٔ B مبدأ مختصات است.



۲ ۴

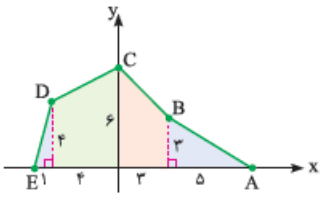
با توجه به این‌که طول نقطهٔ A برابر ۱ و عرض آن برابر ۳ است داریم:



$$S=\frac{۱}{۲}\times۴\times۳+۱\times۳+\frac{۱}{۲}\times۱\times۳=۱۰/۵$$

۳ ۳

با رسم پاره‌خط‌های زیر، شکل به دو مثلث و دو ذوزنقه تبدیل می‌شود. با توجه به طول و عرض نقاط، طول قاعدهٔ اشکال و ارتفاع آن‌ها معلوم می‌شود، پس:



$$S=\frac{۱}{۲}\times۱\times۴+\frac{۱}{۲}(۴+۶)\times۴+\frac{۱}{۲}(۳+۶)\times۳+\frac{۱}{۲}\times۵\times۳$$
$$=۲+۲۰+۱۳/۵+۷/۵=۴۳$$

۲ ۴

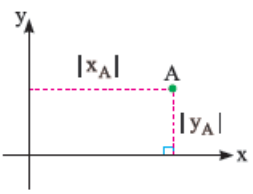
فاصلهٔ نقطهٔ A از محور yها برابر ۵ و از محور xها برابر $|m-۲|$ است. پس:

$$|m-۲|+۵=۸\Rightarrow|m-۲|=۳\Rightarrow\begin{cases}m-۲=۳\Rightarrow m=۵\\m-۲=-۳\Rightarrow m=-۱\end{cases}$$

نقطه‌ای روی محور yها قرار دارد که طول آن صفر باشد، در گزینهٔ (۲) طول نقطه، یعنی $m^۲+۳m+۲$ به ازای $m=-۱$ برابر صفر می‌شود، پس این نقطه روی محور yها قرار دارد.

۳ ۵

با توجه به توضیحات سؤال $A(۲a+۶,a)$ می‌باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



$$۲(|۲a+۶|+|a|)=۲۴\Rightarrow|۲a+۶|+|a|=۱۲$$

حال داریم:

$$a\le-۳\Rightarrow-۲a-۶-a=۱۲\Rightarrow-۳a=۱۸\Rightarrow a=-۶$$
$$-۳<a<۰\Rightarrow ۲a+۶-a=۱۲\Rightarrow a=۶\ \text{غ ق ق}$$
$$a\ge۰\Rightarrow ۲a+۶+a=۱۲\Rightarrow ۳a=۶\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $A(-۶,-۶)$ یا $A(۱۰,۲)$ است که کم‌ترین مقدار مساحت مستطیل به ازای $A(۱۰,۲)$ به‌دست می‌آید که برابر $S=۱۰\times۲=۲۰$ می‌باشد.

۲ ۶

چون نقطهٔ A در ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات است، باید طول نقطه منفی و عرض آن نیز منفی باشد:

$$\begin{cases}۲m-۵<۰\Rightarrow ۲m<۵\Rightarrow m<\frac{۵}{۲}\\m^۲-۱۶<۰\Rightarrow m^۲<۱۶\Rightarrow -۴<m<۴\end{cases}$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده برای m داریم:

$$-۴<m<\frac{۵}{۲}\Rightarrow m=-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲$$

بنابراین مجموع مقادیر صحیح m برابر ۳- است.

۴ ۷

چون نقطهٔ $A(a,b)$ در ناحیهٔ چهارم است، پس $a>۰$ و $b<۰$ می‌باشد. حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $(b-a,-b)\Rightarrow\begin{cases}a>۰,b<۰\Rightarrow b-a<۰\\b<۰\Rightarrow -b>۰\end{cases}\Rightarrow(-,+)\Rightarrow$ ناحیهٔ دوم

البته بعد از این‌که دیدیم طول نقطه منفیه می‌فهمیم که تو ناحیهٔ اول نیست و نیاز به بررسی عرض نقطه نیست.

۲) $(\frac{a}{b},-b)\Rightarrow\begin{cases}a>۰,b<۰\Rightarrow\frac{a}{b}<۰\\\cdots\end{cases}$

$\Rightarrow(-,\cdots)\Rightarrow$ در ناحیهٔ اول نیست.

۳) $\begin{cases}a>۰,b<۰\\\cdots\end{cases}$

$\Rightarrow$ لزوماً در ناحیهٔ اول نیست. $\Rightarrow$ علامت $a+b$ معلوم نیست.

۴) $\begin{cases}a>۰,b<۰\Rightarrow a-b>۰\\b<۰\Rightarrow b^۲>۰\end{cases}\Rightarrow(+,+)\Rightarrow$ در ناحیهٔ اول است.

۱ ۸

چون $A(ab,b-c)$ در ناحیهٔ دوم است، پس:

$$\begin{cases}ab<۰\\b-c>۰\Rightarrow b>c\end{cases}$$

از طرفی چون $B(c+d,d^۲-a)$ در ناحیهٔ چهارم می‌باشد، پس:

$$\begin{cases}c+d>۰\\d^۲-a<۰\Rightarrow a>d^۲\end{cases}\Rightarrow a\ \text{مثبت است.}$$

چون a عددی مثبت و $ab<۰$ است، پس b منفی می‌باشد. با توجه به نامساوی $b>c$ داریم: $|c|-|b|>۰$

فرض کن $b=-۲$ و $c=-۵$ هستن، پس $|b|=۲$ و $|c|=۵$ بوده و $|c|-|b|>۰$ میشه.

از نامساوی $a>d^۲$ هم نتیجه می‌شود که $a>d$ است و چون $c+d>۰$ و $c<۰$ است، پس حتماً $d>۰$ می‌باشد و این یعنی $|a|>|d|$ بزرگ‌تر بوده و $|a|-|d|>۰$ خواهد بود. پس طول نقطهٔ C مثبت و عرض آن نیز مثبت می‌باشد و این یعنی C در ناحیهٔ اول است.

۹ **۲**

چون نقطهٔ $A(a-1, b+1)$ روی محور xها است، پس:

$b+1=0 \Rightarrow b=-1$

هم‌چنین چون نقطهٔ $B(a+3, b-5)$ روی محور yها می‌باشد داریم:

$a+3=0 \Rightarrow a=-3$

بنابراین مختصات نقطهٔ C به‌صورت زیر است که در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

$C(a+b, -b) \xrightarrow[a=-3]{b=-1} C(-4, 1)$

۱۰ **۳**

طول اضلاع AB، AC و BC و هم‌چنین طول پاره‌خط AD را به‌دست می‌آوریم:

$AB=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$

$AC=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$BC=\sqrt{64+64}=\sqrt{64\times 2}=8\sqrt{2}$

$AD=\sqrt{64+64}=\sqrt{64\times 2}=8\sqrt{2}$

بنابراین محیط مثلث ABC برابر $8\sqrt{2}+5+13$ است که $13+5=18$ واحد از طول پاره‌خط AD بیش‌تر است.

۱۱ **۱**

فاصلهٔ نقاط $A(1,-2)$ و $B(a,6)$ را برابر ۱۰ قرار می‌دهیم و داریم:

$\sqrt{(a-1)^2+64}=10 \Rightarrow (a-1)^2+64=100 \Rightarrow$

$(a-1)^2=36 \Rightarrow \begin{cases} a-1=6 \Rightarrow a=7 \\ a-1=-6 \Rightarrow a=-5 \end{cases} \Rightarrow$ مجموع مقادیر $a = 2$

۱۲ **۴**

چون $AB=BC$ است داریم:

$\sqrt{9+16}=\sqrt{9+(-3-b)^2} \Rightarrow (-3-b)^2=16$

$\Rightarrow \begin{cases} -3-b=4 \Rightarrow b=-7 \\ -3-b=-4 \Rightarrow b=1 \end{cases}$

حال با توجه به مقادیر به‌دست آمده برای b طول پاره‌خط AC را به‌دست می‌آوریم:

$b=-7 \Rightarrow C(-1,-7) \Rightarrow AC=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

$b=1 \Rightarrow C(-1,1) \Rightarrow AC=|5-(-1)|=|6|=6$

بنابراین بیشترین طول پاره‌خط AC برابر ۱۰ است.

۱۳ **۴**

باید $AB=AC$ باشد، پس:

$\sqrt{(a+2)^2+4}=\sqrt{(a-3)^2+(2+a)^2}$

$\Rightarrow a^2+4a+4+4=a^2-6a+9+4+4a+a^2$

$\Rightarrow a^2-6a+5=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} a=1, a=5$

به ازای aهای به‌دست آمده طول AB را به‌دست می‌آوریم:

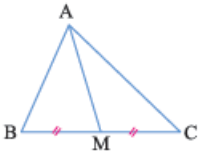
$a=1 \Rightarrow AB=\sqrt{(1+2)^2+4}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$a=5 \Rightarrow AB=\sqrt{(5+2)^2+4}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$

بنابراین بیشترین طول پاره‌خط AB برابر $\sqrt{53}$ است.

۱۴ **۲**

به شکل زیر دقت کنید. واضح است که اختلاف محیط‌های دو مثلث برابر اختلاف طول اضلاع AB و AC است. پس:



$\begin{cases} AB=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \\ AC=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10 \end{cases} \Rightarrow$ اختلاف محیط‌ها $=10-5=5$

۱۵ **۴**

طول پاره‌خط AB را برابر $3\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم تا مقادیر m به‌دست آید:

$\sqrt{(1-2m)^2+(-2m+1)^2}=3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2\times(-2m+1)^2}=3\sqrt{2}$

$\Rightarrow |-2m+1|\sqrt{2}=3\sqrt{2} \Rightarrow |-2m+1|=3$

$\Rightarrow \begin{cases} -2m+1=3 \Rightarrow -2m=2 \Rightarrow m=-1 \\ -2m+1=-3 \Rightarrow -2m=-4 \Rightarrow m=2 \end{cases}$

بنابراین میانگین مقادیر به‌دست آمده برای m برابر $\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}=0/5$ می‌باشد.

۱۶ **۱**

چون نقطهٔ A روی محور xها است، فرض می‌کنیم مختصات آن $A(a,0)$ باشد، پس:

$\sqrt{(a-1)^2+4}=\sqrt{(a-2)^2+9}$

$\Rightarrow a^2-2a+1+4=a^2-4a+4+9 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4$

بنابراین به ازای $a=4$ داریم: $L=\sqrt{(4-1)^2+4}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

۱۷ **۱**

فاصلهٔ مرکز دایره تا هر یک از نقاط برابر شعاع دایره است، پس:

$\sqrt{(a-2)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(2a-4)^2}$

$\Rightarrow a^2-4a+4+4a^2-4a+1=a^2+2a+1+4a^2-16a+16$

$\Rightarrow -8a+5=-14a+17 \Rightarrow 6a=12 \Rightarrow a=2$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$r=\sqrt{(2-2)^2+(2(2)-1)^2}=\sqrt{0+9}=3$

۱۸ **۲**

باید $AB=AC$ باشد، پس: $\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}=\sqrt{(a-5)^2+(b-1)^2}$

$\Rightarrow a^2-6a+9+b^2+4b+4=a^2-10a+25+b^2-2b+1$

$\Rightarrow -6a+4b+13=-10a-2b+26 \Rightarrow 4a+6b=13$

۱۹ **۲**

برای آن‌که نقطهٔ A روی یکی از محورهای مختصات باشد، باید طول یا عرض نقطهٔ A صفر باشد، پس:

$m^2+m-6=0 \Rightarrow (m+3)(m-2)=0 \begin{cases} m=-3 \Rightarrow A(0,0) \\ m=2 \Rightarrow A(0,-5) \end{cases}$

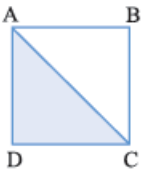
$m^2-9=0 \Rightarrow m^2=9 \begin{cases} m=3 \Rightarrow A(6,0) \\ m=-3 \Rightarrow A(0,0) \end{cases}$

واضح است $A(6,0)$ بیش‌ترین فاصله را تا مبدأ مختصات دارد. پس $m=3$ قابل قبول است. حال داریم:

$\begin{cases} A(6,0) \\ m=3 \Rightarrow B(-3,-1) \end{cases} \Rightarrow AB=\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$

۲۰ ۲

با توجه به شکل زیر، مساحت مثلث ACD نصف مساحت مربع است، پس:

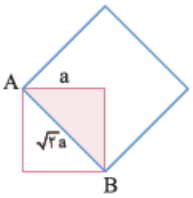


$$AB=\sqrt{۳۶+۶۴}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

$$S_{ACD}=\frac{۱}{۲}\times ۱۰^{۲}=۵۰$$

۲۱ ۲

بیش‌ترین مساحت ناحیهٔ مشترک زمانی اتفاق می‌افتد که نقاط $A(۳,۲)$ و $B(۱,۴)$ به‌صورت زیر رأس‌های دو مربع باشند. بنابراین داریم:



$$AB=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}a=۲\sqrt{۲}\Rightarrow a=۲$$

پس مساحت ناحیهٔ رنگی برابر $S=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲=۲$ می‌باشد.

۲۲ ۳

طول اضلاع AB، AC و BC را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} AB=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰} \\ AC=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵} \\ BC=\sqrt{۳۶+۴۹}=\sqrt{۸۵} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{BC^{۲}+AB^{۲}+AC^{۲}} ۸۵=۸۰+۵ \Rightarrow \text{مثلث قائم‌الزاویه}$$

۲۳ ۲

مساحت مثلث را مطابق الگوی گفته شده به‌دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}|۱۶-۴|$$

$$=\frac{۱}{۲}|۱۲|=۶$$

۲۴ ۲

با توجه به رابطهٔ گفته شده داریم:

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}|۶-۱۹|=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

۲۵ ۴

با توجه به الگوی گفته شده داریم:

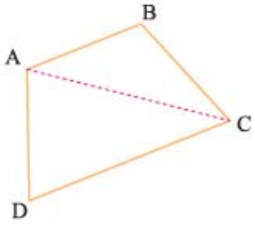
$$\Rightarrow ۳=\frac{۱}{۲}|(۱۰+۳a)-(۲-۲a)|$$

$$\Rightarrow ۶=|۸+۵a|\Rightarrow \begin{cases} ۵a+۸=۶\Rightarrow a=-\frac{۲}{۵} \\ ۵a+۸=-۶\Rightarrow a=-\frac{۱۴}{۵} \end{cases}$$

بنابراین میانگین مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{(-\frac{۲}{۵})+(-\frac{۱۴}{۵})}{۲}=\frac{-۱۶}{۱۰}=-۱/۶$ می‌باشد.

۲۶ ۱

روش اول به شکل مقابل دقت کنید. کافی است مساحت مثلث‌های ABC و ADC را محاسبه کرده و با هم جمع کنیم:



$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}|-۱۲-۴۸|$$

$$=\frac{۱}{۲}|-۶۰|=۳۰$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ADC}=\frac{۱}{۲}|۴۴-(-۳۴)|$$

$$=\frac{۱}{۲}|۷۸|=۳۹$$

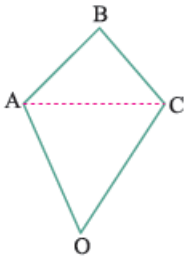
بنابراین مساحت چهارضلعی ABCD برابر $۶۹=۳۰+۳۹$ است.

روش دوم می‌توان از روشی که برای محاسبهٔ مساحت مثلث استفاده کردیم، مساحت چهارضلعی را نیز به دست آوریم:

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}|-۶۶-۷۲|=\frac{۱۳۸}{۲}=۶۹$$

۲۷ ۳

روش اول با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث‌های ABC و AOC را به‌دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}|-۵۲-(-۲۴)|$$

$$=\frac{۱}{۲}|-۲۸|=۱۴$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AOC}=\frac{۱}{۲}|-۲۴-۰|$$

$$=\frac{۱}{۲}|-۲۴|=۱۲$$

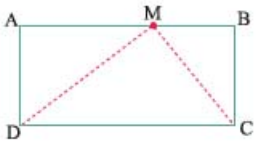
بنابراین مساحت چهارضلعی برابر $۲۶=۱۲+۱۴$ می‌باشد.

روش دوم مساحت چهارضلعی ABCO برابر است با:

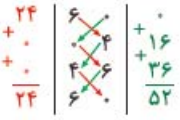
$$S=\frac{۱}{۲}|-۵۲-۰|=\frac{۵۲}{۲}=۲۶$$

۲۸ ۳

به شکل زیر توجه کنید. واضح است که مساحت مثلث DMC نصف مساحت مستطیل ABCD می‌باشد. پس:



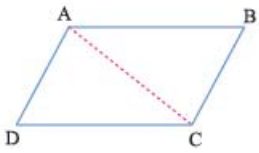
$$\Rightarrow S_{\underset{DMC}{\Delta}} = \frac{1}{2}|24-52| = \frac{1}{2}\times 28 = 14$$



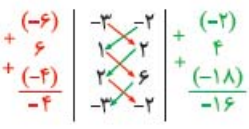
بنابراین مساحت مستطیل ABCD برابر $28 = 14\times 2$ است.

۲۹ ۳

به شکل زیر دقت کنید. می‌دانیم هر قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند. پس مساحت مثلث ABC را به‌دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow S_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{1}{2}|-4-(-16)|$$



$$= \frac{1}{2}\times 12 = 6$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD برابر $12 = 6\times 2$ است.

۳۰ ۳

طول اضلاع مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$AB = 8$ (A و B هم‌طول هستند.)

$BC = 6$ (B و C هم‌عرض هستند.)

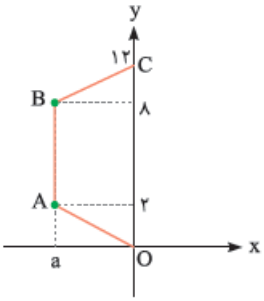
$AC = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

چون $10^2 = 8^2 + 6^2$ بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه است و محیط آن برابر $24 = 8+6+10$ است.

۳۱ ۱

به شکل مقابل دقت کنید. واضح است که $AB = 6$ و $OC = 12$ می‌باشد.

چهارضلعی ABCO ذوزنقه با ارتفاع $|a|$ است، پس:



$$63 = \frac{1}{2}(6+12)\times|a| \Rightarrow$$

$$63 = 9|a| \Rightarrow |a| = 7 \Rightarrow a = -7$$

۳۲ ۲

ابتدا مختصات وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M = \frac{(2,-6)+(4,-2)}{2} = (3,-4)$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ $M(3,-4)$ را از مبدأ مختصات به‌دست می‌آوریم:

$$OM = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

۳۳ ۳

مختصات وسط ضلع AB را به‌دست می‌آوریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M\left(\frac{11+3}{2}, \frac{8+2}{2}\right) \Rightarrow M(7,5)$$

حال مختصات وسط ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:

$$N = \frac{B+C}{2} \Rightarrow N\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \Rightarrow N(4,4)$$

بنابراین فاصلهٔ M و N برابر است با: $MN = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

بعد از این‌که در فصل دوم قضیهٔ تالس رو فوندیم، می‌تونی بگی طول MN نصف طول AC هستش و بری طول AC رو حساب کنی و نصفش کنی.

$$AC = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow MN = \sqrt{10}$$

۳۴ ۲

ابتدا مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M = \frac{(n+3,4)+(9,3n-2)}{2} = \left(\frac{n}{2}+6, \frac{3n}{2}+1\right)$$

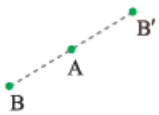
چون فاصلهٔ $M\left(\frac{n}{2}+6, \frac{3n}{2}+1\right)$ از محورهای مختصات برابر است داریم:

$$\left|\frac{n}{2}+6\right| = \left|\frac{3n}{2}+1\right| \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2}+6 = \frac{3n}{2}+1 \Rightarrow n = 5 \\ \frac{n}{2}+6 = -\frac{3n}{2}-1 \Rightarrow 2n = -7 \Rightarrow n = -3/5 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر n برابر $5 + (-3/5) = 1/5$ است.

۳۵ ۳

روش اول وقتی نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ A قرینه می‌شود تا نقطهٔ B' حاصل شود، A وسط پاره‌خط BB' است. پس:

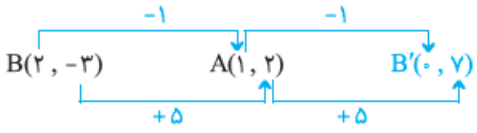


$$A = \frac{B+B'}{2} \Rightarrow B' = 2A - B \Rightarrow B' = 2(1,2) - (2,-3)$$

$$= (2,4) - (2,-3) \Rightarrow B'(0,7)$$

واضح است که فاصلهٔ B' از مبدأ مختصات برابر ۷ می‌باشد.

روش دوم به کمک فلش‌زنی داریم:



بنابراین فاصلهٔ B' از مبدأ مختصات برابر ۷ می‌باشد.

۳۶ ۲

وقتی نقاط A و B نسبت به نقطهٔ C قرینه‌اند یعنی نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB است. پس:

$$C = \frac{A+B}{2} \Rightarrow (5,-4) = \frac{(2a-3,b+1)+(7,b-3)}{2}$$

$$\Rightarrow (5,-4) = (a+2,b-1) \Rightarrow \begin{cases} a+2 = 5 \Rightarrow a = 3 \\ b-1 = -4 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - b = 3 - (-3) = 6$$

۳۷ ۳

چون نقاط A و B نسبت به مبدأ مختصات قرینه‌اند، پس مبدأ مختصات وسط پاره‌خط AB است. بنابراین داریم:

$$(0,0)=\left(\frac{4+2a+3b}{2},\frac{a+2b+1}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}2+a+\frac{3}{2}b=0\\ \frac{a}{2}+b+\frac{1}{2}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{3}{2}b=-2\\ \frac{a}{2}+b=-\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow{(-2)\times}\begin{cases}a+\frac{3}{2}b=-2\\ -a-2b=1\end{cases}\xrightarrow{+}-\frac{1}{2}b=-1$$

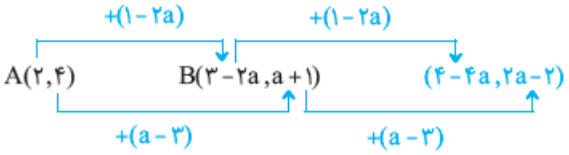
$$\Rightarrow b=2\Rightarrow a=-5$$

بنابراین $A(-4,1)$ و $B(4,-1)$ می‌باشند و داریم:

$$AB=\sqrt{64+4}=2\sqrt{16+1}=2\sqrt{17}$$

۳۸ ۴

قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B را به‌دست می‌آوریم:



چون $(4-4a,2a-2)$ در ناحیهٔ سوم است، پس:

$$\begin{cases}4-4a<0\Rightarrow 4a>4\Rightarrow a>1\\ 2a-2<0\Rightarrow 2a<2\Rightarrow a<1\end{cases}\Rightarrow\varnothing$$

بنابراین قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B نمی‌تواند در ناحیهٔ سوم باشد.

۳۹ ۲

طبق گفتهٔ سؤال نقطهٔ C وسط پاره‌خط DE است، پس:

$$C=\frac{D+E}{2}\Rightarrow(-1,b)=\frac{(4,6)+(-6,4)}{2}$$

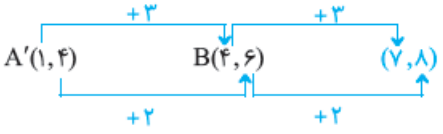
$$\Rightarrow(-1,b)=(-1,5)\Rightarrow b=5$$

واضح است طول پاره‌خط AC دو برابر طول پاره‌خط BC است. پس:

$$BC=-1-(-3)=2\Rightarrow AC=4$$

۴۰ ۳

قرینهٔ نقطهٔ $A(-1,4)$ نسبت به محور yها نقطهٔ $A'(1,4)$ است. حال داریم:

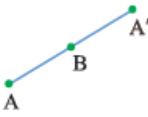


بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $(7,8)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{49+64}=\sqrt{113}$$

۴۱ ۲

قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به نقطهٔ B به‌دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow B=\frac{A+A'}{2}\Rightarrow A'=2B-A$$

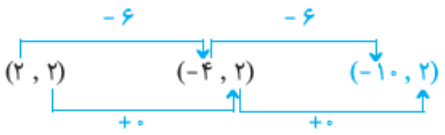
$$\Rightarrow A'=2(k-3,4)-(-4,2)$$

$$=(2k-6,8)-(-4,2)\Rightarrow A'(2k-2,6)$$

چون نقطهٔ A' روی محور yها است، پس طول آن صفر می‌باشد:

$$2k-2=0\Rightarrow k=1$$

حال باید قرینهٔ نقطهٔ $(2,2)=(k+1,2k)$ را نسبت به نقطهٔ $(-4,2)$ به‌دست آوریم:



قرینه‌یابی رو یه‌بار از فلش‌زنی و یه بار از راه اصلی رفتم که هر دو روش را ببینین.

۴۲ ۲

چون $AB=\sqrt{17}$ است، پس:

$$\sqrt{17}=\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}=\sqrt{4a^2+1}\Rightarrow 4a^2+1=17$$

$$\Rightarrow 4a^2=16\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

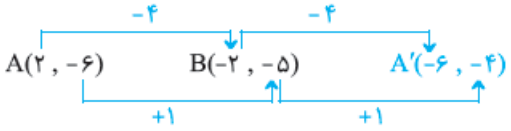
چون نقطهٔ A در ناحیهٔ چهارم است، پس $a=2$ می‌باشد. از طرفی $BC=5\sqrt{2}$ است، پس:

$$\begin{cases}B(-2,b+1)\\ C(3,0)\end{cases}\Rightarrow 5\sqrt{2}=\sqrt{25+(b+1)^2}\Rightarrow(b+1)^2=25$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b+1=5\Rightarrow b=4\\ b+1=-5\Rightarrow b=-6\end{cases}$$

با توجه به این‌که نقطهٔ A در ناحیهٔ چهارم است، پس $b=-6$ می‌باشد.

حال قرینهٔ نقطهٔ $A(2,-6)$ را نسبت به نقطهٔ $B(-2,-5)$ به‌دست می‌آوریم:

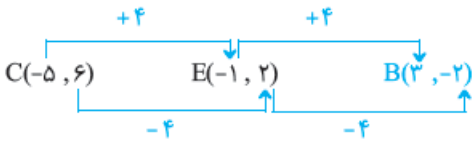


بنابراین فاصلهٔ $A'(-6,-4)$ از نقطهٔ $C(3,0)$ برابر است با:

$$A'C=\sqrt{81+16}=\sqrt{97}$$

۴۳ ۳

چون قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ $E(-1,2)$ نقطهٔ $C(-5,6)$ است، پس قرینهٔ نقطهٔ $C(-5,6)$ نسبت به نقطهٔ $E(-1,2)$ نیز نقطهٔ B می‌باشد. بنابراین داریم:



حال به طریق مشابه چون قرینهٔ A نسبت به محور xها نقطهٔ B است، پس قرینهٔ نقطهٔ $B(3,-2)$ نسبت به محور xها نقطهٔ A می‌باشد. پس $A(3,2)$ بوده و داریم:

$$\begin{cases}a^2-1=3\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2\\ 3b-7=2\Rightarrow 3b=9\Rightarrow b=3\end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار $a+b$ برابر ۵ و کم‌ترین مقدار آن برابر ۱ بوده و اختلاف آن‌ها برابر ۴ است.

۴۴ ۴

ابتدا نقطهٔ M وسط ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:

$$M=\frac{B+C}{2}\Rightarrow M=\left(\frac{-2+(-4)}{2},\frac{-2+2}{2}\right)\Rightarrow M(-3,0)$$

حال طول میانهٔ AM را به‌دست می‌آوریم:

$$AM=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

۴۵ ۲

ابتدا طول ضلع BC را به‌دست می‌آوریم: $BC = \sqrt{۶۴+۱۶} = \sqrt{۸۰}$

حال طول میانهٔ وارد بر BC را به‌دست می‌آوریم:

$$M = \frac{B+C}{۲} \Rightarrow M = \frac{(۵,۳)+(-۳,۷)}{۲} = (۱,۵)$$

$$AM = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

بنابراین طول ضلع BC چهار برابر طول میانهٔ AM است. نگاه کنید:

$$\frac{BC}{AM} = \frac{\sqrt{۸۰}}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۴۶ ۱

چون ABCD متوازی‌الاضلاع است داریم:

$$A+C=B+D \Rightarrow (a-۱,b+۲)+(a+۵,a+۲)=(۵,۴)+(-۷,۲)$$

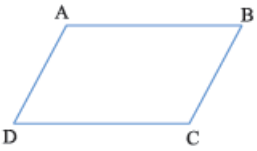
$$\Rightarrow (۲a+۴,a+b+۴)=(-۲,۶) \Rightarrow \begin{cases} ۲a+۴=-۲ \Rightarrow a=-۳ \\ a+b+۴=۶ \Rightarrow b=۵ \end{cases}$$

بنابراین $A(-۴,۷)$ و $C(۲,-۱)$ هستند و داریم:

$$AC = \sqrt{۳۶+۶۴} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

۴۷ ۴

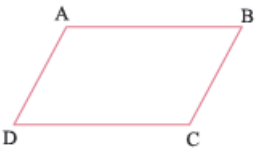
چون در متوازی‌الاضلاع ABCD رئوس A و B هم‌عرض هستند پس حتماً نقاط C و D هم‌عرض می‌باشند، پس $b = ۲$ می‌باشد. حال داریم:



$$\begin{cases} AB = ۷-۱ = ۶ \\ AD = \sqrt{۹+۱۶} = ۵ \end{cases} \Rightarrow \text{محیط} = ۲(۵+۶) = ۲۲$$

۴۸ ۴

ابتدا مختصات رأس D را به‌دست می‌آوریم:



$$A+C=B+D$$
$$\Rightarrow (-۱,۳)+(۵,-۲)=B+(۲,-۳)$$
$$\Rightarrow (۴,۱)=B+(۲,-۳) \Rightarrow B(۲,۴)$$

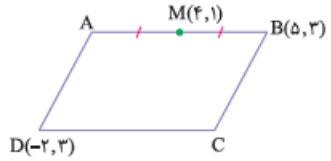
حال طول قطرهای متوازی‌الاضلاع را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} AC = \sqrt{۳۶+۲۵} = \sqrt{۶۱} \\ BD = ۴-(-۳) = ۷ \end{cases} \Rightarrow AC > BD$$

بنابراین طول بزرگ‌ترین قطر متوازی‌الاضلاع برابر $\sqrt{۶۱}$ است.

۴۹ ۲

به شکل مقابل نگاه کنید.



قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ M، نقطهٔ A می‌باشد. پس:

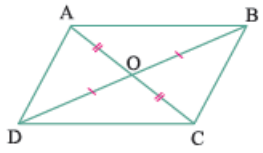
حال چون چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است داریم:

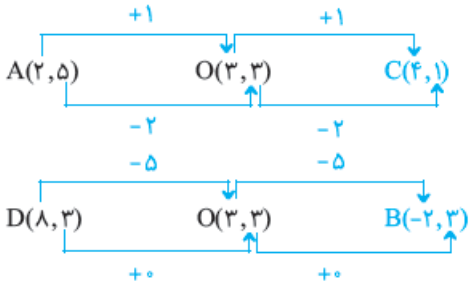
$$A+C=B+D \Rightarrow (۳,-۱)+C=(۵,۳)+(-۲,۳)$$
$$\Rightarrow (۳,-۱)+C=(۳,۶) \Rightarrow C(۰,۷)$$

بنابراین فاصلهٔ رأس C از مبدأ مختصات برابر ۷ می‌باشد.

۵۰ ۲

می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند. با توجه به شکل زیر اگر رئوس A و D را نسبت به نقطهٔ O قرینه کنیم به‌ترتیب مختصات رأس‌های C و B به‌دست می‌آید:





بنابراین مجموع طول و عرض رئوس B و C برابر $۴+۱+(-۲)+۳=۶$ می‌باشد.

۵۱ ۳

با توجه به نام‌گذاری رئوس متوازی‌الاضلاع یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

$$\Rightarrow A+C=B+D$$
$$\Rightarrow (۳,-۲)+(-۳,۱)=(۲,۵)+D$$
$$\Rightarrow (۰,-۱)=(۲,۵)+D \Rightarrow D(-۲,-۶)$$

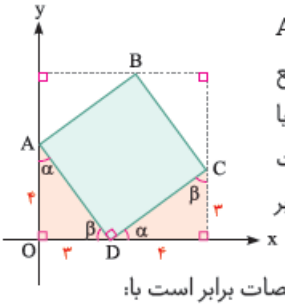
$$\Rightarrow A+B=C+D$$
$$\Rightarrow (۳,-۲)+(۲,۵)=(-۳,۱)+D$$
$$\Rightarrow (۵,۳)=(-۳,۱)+D \Rightarrow D(۸,۲)$$

$$\Rightarrow A+D=B+C$$
$$\Rightarrow (۳,-۲)+D=(۲,۵)+(-۳,۱)$$
$$\Rightarrow (۳,-۲)+D=(-۱,۶) \Rightarrow D(-۴,۸)$$

بنابراین مختصات رأس D نمی‌تواند $(۶,۳)$ باشد.

۵۲ ۲

با توجه به این‌که رأس C در مربع ABCD در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات است، مربع را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به شکل مثلث‌های رنگی همنهشت هستند بنابراین مختصات رأس C برابر $(۳+۴,۰+۳)$ می‌باشد.

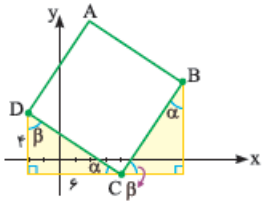


حال فاصلهٔ رأس $C(۷,۳)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OC = \sqrt{۴۹+۹} = \sqrt{۵۸}$$

۵۳ ۴

با توجه به مختصات رئوس C و D و این‌که رأس B در ناحیهٔ اول است، شکل مسأله به‌صورت زیر است.



مثلث‌های رنگی همنهشت هستند، پس با توجه به مختصات نقطهٔ C می‌توان مختصات نقطهٔ B را به‌دست آورد:

$$B(۴+۴,-۱+۶)=(۸,۵)$$

بنابراین فاصلهٔ B تا مبدأ مختصات برابر است با: $OB=\sqrt{۶۴+۲۵}=\sqrt{۸۹}$