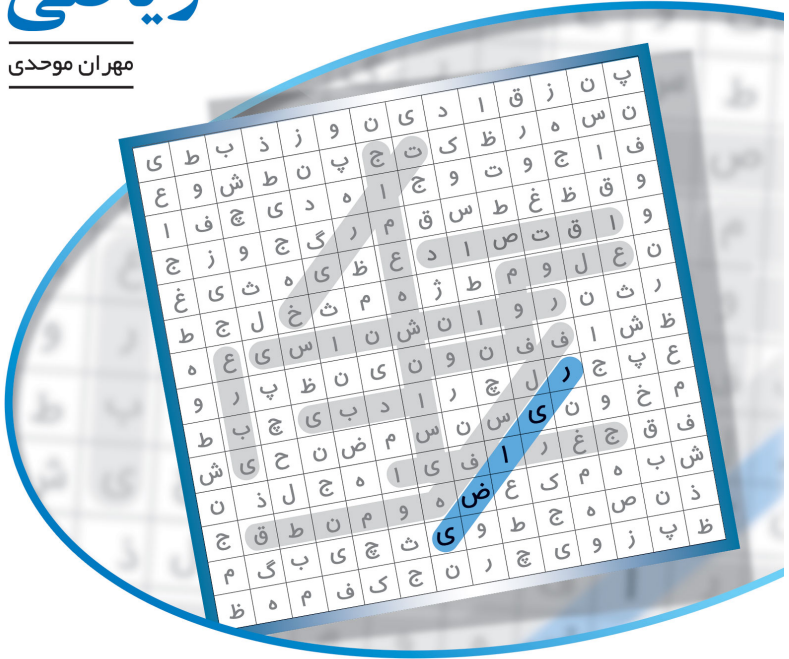


درسنامه + آزمونهای مبحثی و جامع + پاسخهای تشریحی

# موج آزمون اختصاصی انسانی ریاضی

مهران موحدی



انتگرالگو

در طول دوران تدریسم، معمولاً یکی از سؤالات رایجی که اکثر دانش‌آموزان، چه آن‌هایی که کمتر مطالعه کرده بودند و چه آن‌هایی که مانند شما در این درس قوی هستند، در بازهٔ زمانی فروردین‌ماه تا کنکور از من می‌پرسیدند، این بود که یک منبع سؤال به آن‌ها معرفی کنم تا در آن چند هفتهٔ باقی‌مانده تا کنکور، بتوانند مباحث پایه و دوازدهم را جمع‌بندی نمایند.

در جهت پاسخگویی به این نیاز، در این کتاب که ثمرهٔ چندین سال تدریس و طراحی سؤال در مدارس و مؤسسات آموزشی است، با توکل بر خالق بی‌همتا، سعی شده است با ارائهٔ ۲۰ آزمون مبحثی و جامع برای دانش‌آموزان با هر سطح، به صورت

- ارائهٔ درس‌نامه‌ها برای مرور مباحث،
- سؤالات استاندارد مشابه کنکور و آزمون‌های مؤسسات آموزشی،
- گفتار روان نکات و راهبردهای حل مسئله در قالب نیم‌نگاه و خط فکری،
- پاسخ‌نامهٔ کاملاً تشریحی

یک منبع مروری و جامع برای جمع‌بندی در اختیاران قرار گیرد. پیشنهاد می‌شود پس از حل هر آزمون و تلاش ذهنی روی سؤالات، به تعامل با پاسخ‌های تشریحی پرداخته و با تفکر و حتی بازنویسی پاسخ‌ها، توانمندی خود را ارتقا دهید.

از همکارانم آقایان شاکری، افضل‌زاده و سعیدی که مرا در این کتاب همراهی نمودند، تشکر می‌نمایم. وظیفهٔ خود می‌دانم که از همکاران عزیزم در واحد حروف‌چینی و ویراستاری نشر الگو، خانم‌ها فاطمه احدی و پریا میانجی و آقایان سجاد مرادی و آریس آقانیانس تشکر نمایم.

مهران موحدی

تقدیم به فرزندان عزیزم، ماریا و بنیامین

# فهرست

## فصل اول: معادلات

- درس نامه ..... ۲
- آزمون ۱: معادلات درجه اول، درجه دوم و گویا (۱) ..... ۵
- آزمون ۲: معادلات درجه اول، درجه دوم و گویا (۲) ..... ۸

## فصل دوم: تابع

- درس نامه ..... ۱۱
- آزمون ۳: تعریف تابع، تابع خطی و تابع درجه دوم ..... ۲۰
- آزمون ۴: انواع تابع ..... ۲۳
- آزمون ۵: اعمال جبری با توابع ..... ۲۶
- آزمون ۶: جامع تابع (۱) ..... ۳۰
- آزمون ۷: جامع تابع (۲) ..... ۳۴

## فصل سوم: آمار و احتمال

- درس نامه بخش اول: آمار ..... ۳۷
- آزمون ۸: کار با داده‌های آماری و نمایش داده‌ها ..... ۴۷
- آزمون ۹: شاخص‌های آماری، سری زمانی، چرخه آمار ..... ۵۰
- درس نامه بخش دوم: شمارش ..... ۵۴
- آزمون ۱۰: شمارش ..... ۵۷
- درس نامه بخش سوم: احتمال ..... ۵۹
- آزمون ۱۱: احتمال ..... ۶۲
- آزمون ۱۲: جامع آمار و احتمال ..... ۶۵

## فهرست

### فصل چهارم: منطق و استدلال ریاضی

- درس‌نامه ..... ۶۸
- آزمون ۱۳: منطق و استدلال ریاضی ..... ۷۲

### فصل پنجم: الگو و دنباله

- درس‌نامه ..... ۷۶
- آزمون ۱۴: الگو، دنباله، دنباله حسابی و دنباله هندسی (۱) ..... ۸۰
- آزمون ۱۵: الگو، دنباله، دنباله حسابی و دنباله هندسی (۲) ..... ۸۳

### فصل ششم: توان و ریشه

- درس‌نامه ..... ۸۶
- آزمون ۱۶: ریشه  $n$ ام، توان گویا، تابع نمایی ..... ۸۹

### فصل هفتم: آزمون‌های جامع

- آزمون ۱۷: جامع (۱) ..... ۹۲
- آزمون ۱۸: جامع (۲) ..... ۹۵
- آزمون ۱۹: جامع (۳) ..... ۹۸
- آزمون ۲۰: جامع (۴) ..... ۱۰۱

### پاسخ‌های تشریحی

- پاسخ‌های تشریحی ..... ۱۰۶
- پاسخ‌های کلیدی ..... ۲۷۲



پاسخ تست‌های شبیه‌ساز

## فصل دوم: تابع

## مفهوم و تعریف تابع

شرط تساوی دو زوج مرتب:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ \text{و} \\ b = d \end{cases}$$

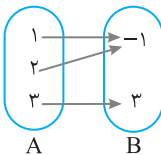
## تعریف تابع

یک رابطه از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$  را یک تابع گوییم هرگاه به هر عضو از مجموعه  $A$  دقیقاً یک عضو از مجموعه  $B$  را نسبت دهد. به بیان دیگر، به ازای هر مقدار برای متغیر  $x$  فقط یک مقدار برای متغیر  $y$  به دست آید.

اگر مجموعه  $A$ ،  $m$  عضو و مجموعه  $B$ ،  $n$  عضو داشته باشد، آن گاه تعداد توابعی که می توان از  $A$  به  $B$  تعریف کرد برابر است با  $n^m$ .

## نمایش تابع

۱ نمایش به صورت زوج مرتب و جدول: نمایش رابطه در این حالت زمانی تابع است که در زوج مرتبها مؤلفه اول تکراری (یکسان) نداشته باشیم یا اگر در دو یا چند زوج مرتب مؤلفه های اول یکسان باشند، مؤلفه های دوم آنها نیز برابر باشند. مجموعه مؤلفه های اول را دامنه و مجموعه مؤلفه های دوم را برد تابع گویند.



۲ نمایش به صورت نمودار پیکانی:  $A$  را مجموعه آغاز و  $B$  را مجموعه پایان می نامند. نمودار پیکانی زمانی بیانگر تابع است که از هر عضو مجموعه آغاز ( $A$ ) فقط یک فلش (پیکان) خارج شده باشد. به مجموعه  $A$  دامنه تابع گویند و به مجموعه اعضای  $B$  از آنها فلش وارد شده باشد، برد تابع گویند.

۳ نمایش توصیفی: رابطه بین مؤلفه های دوم و اول به شکل یک جمله توصیفی بیان می شود و برای بررسی تابع بودن باید دقت کنیم که یک مؤلفه اول به چند مؤلفه دوم نسبت داده نشود.

۴ نمایش به صورت نمودار در صفحه مختصات: زمانی یک نمودار بیانگر تابع است که هر خط عمودی (خط موازی محور عرضها) نمودار داده شده را حداکثر در یک نقطه قطع کند. سایه یا تصویر نمودار روی محور افقی ( $x$ ها) دامنه و سایه نمودار روی محور عمودی ( $y$ ها) برد تابع را مشخص می کند.

۵ نمایش به صورت ضابطه: برای نمایش تابع  $f$  از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$ ، می‌نویسیم

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دامنه} \\ f: A \rightarrow B \\ \underbrace{y = f(x)} \\ \text{ضابطه تابع} \end{array} \right.$$

- اگر مجموعه  $A$  مشخص نشده باشد، دامنه مقادیری از  $x$  است که ضابطه  $f$  در آن‌ها تعریف شده باشد.
- اگر  $f$  تابعی کسری باشد، آن‌گاه  $\{ \text{ریشه‌های مخرج کسر} \} \cap D_f = \emptyset$ .
- اگر  $f$  به صورت  $\sqrt[n]{P}$  زوج باشد، آن‌گاه  $D_f = \{x \mid P \geq 0\}$ .

### مقدار تابع در یک نقطه

مقدار تابع در نقطه  $a = f(a)$  = خروجی  $\rightarrow$   $\boxed{f}$   $\xrightarrow{x=a}$  ورودی

- ۱ در حالت زوج مرتب: اگر زوج مرتب  $(a, b)$  عضو تابع  $f$  باشد، آن‌گاه  $f(a) = b$  و برعکس.
- ۲ در حالت نمودار مختصاتی: اگر نقطه  $M(a, b)$  روی تابع قرار داشته باشد، آن‌گاه  $f(a) = b$  و برعکس.
- ۳ در حالت ضابطه تابع: برای محاسبه  $f(a)$  کافی است در ضابطه تابع هر کجا  $x$  دیدیم، مقدار  $(a)$  را جایگذاری نماییم.


### انواع تابع و مفاهیم مرتبط


#### تابع خطی

- هر تابع به صورت  $y = f(x) = mx + h$  را یک تابع خطی گویند.
- برای رسم نمودار تابع خطی باید دو نقطه دلخواه از آن را یافته (جایگذاری) و در صفحه مختصات مشخص کنیم. با وصل کردن آن‌ها به هم و امتداد پاره‌خط به دست آمده، نمودار تابع خطی رسم می‌شود.
- معادله خط (ضابطه تابع خطی) که از نقطه  $A(x_A, y_A)$  با شیب  $m$  عبور می‌کند به صورت  $y = f(x) = m(x - x_A) + y_A$  است.
- معادله خط (ضابطه تابع خطی) که از دو نقطه  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  عبور می‌کند به  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ،  $y = f(x) = m(x - x_A) + y_A$  : روش روبه‌رو به دست می‌آید:
- اگر دامنه تابع خطی  $f(x) = mx + h$  به صورت  $a \leq x \leq b$  باشد، آن‌گاه با جایگذاری  $a$  و  $b$  در ضابطه  $f$ ، محدوده  $y$  (برد تابع) محاسبه می‌شود که به صورت  $f(a) \leq y \leq f(b)$  یا  $f(b) \leq y \leq f(a)$  خواهد بود.

## تابع درجه دوم

هر تابع با ضابطه  $f(x) = ax^2 + bx + c$  که در آن  $a \neq 0$  باشد یک تابع درجه دوم است.

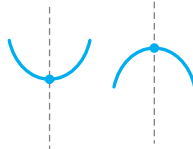
اگر  $a > 0$  باشد، نمودار آن به صورت  است، یعنی تابع دارای نقطه  $\min$  باشد.

اگر  $a < 0$  باشد، نمودار آن به صورت  است، یعنی تابع دارای نقطه  $\max$  باشد.

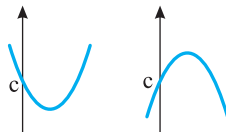
هر سهمی دارای یک رأس است که همان نقطه  $\min$  یا  $\max$  سهمی می‌باشد و بیشترین یا کمترین مقدار تابع درجه دوم همان عرض رأس سهمی است و داریم

نمایش تابع درجه دوم	مختصات رأس سهمی	بیشترین یا کمترین مقدار تابع
$y = ax^2 + bx + c$	طول: $x_s = -\frac{b}{2a}$ عرض: $y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$	$-\frac{\Delta}{4a}$ یا $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$
$y = a(x-h)^2 + k$	طول: $x_s = h$ (ریشه عبارت زیر توان ۲) عرض: $y_s = k$	$k$

هر سهمی دارای یک خط محور تقارن است که از رأس سهمی عبور می‌کند و معادله آن به صورت  $x = -\frac{b}{2a}$  است.



هر سهمی به فرم  $y = ax^2 + bx + c$  محور عرض‌ها را در نقطه  $(0, c)$  قطع می‌کند.



محل برخورد نمودار تابع درجه دوم  $f$  با محور  $x$ ها، ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$  است و داریم

علامت $\Delta$	توصیف نمودار سهمی	محل برخورد با محور افقی	نمودار سهمی
$\Delta > 0$	سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه $\alpha, \beta$ قطع می‌کند.	$\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	
$\Delta = 0$	سهمی بر محور طول‌ها در نقطه $x = \alpha$ مماس است.	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	
$\Delta < 0$	سهمی محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.	ندارد	

برای یافتن محل تلاقی نمودارهای دو تابع  $f$  و  $g$  باید معادله  $f(x) = g(x)$  را حل کنیم.

### کاربرد اقتصادی

تابع درآمد که با نماد  $R(x)$  نمایش داده می‌شود، از حاصل ضرب تعداد کالا در قیمت فروش به دست می‌آید.

$$R(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{تعداد}}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{قیمت}}}{P}$$

تابع هزینه که با نماد  $C(x)$  نمایش داده می‌شود، شامل هزینه ثابت و هزینه‌های متغیر (وابسته به میزان تولید) می‌باشد.

تابع سود که با نماد  $P(x)$  نمایش داده می‌شود، برابر است با تفاضل هزینه از درآمد.

$$\text{تابع سود} = P(x) = R(x) - C(x)$$

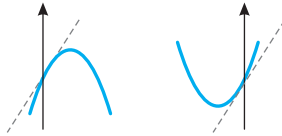
نقطه سربه‌سر: نقطه‌ای است که در آن تابع درآمد و هزینه برابر باشند، یعنی ریشه‌های معادله  $P(x) = 0$  نقاط سربه‌سر می‌باشند.

یافتن بیشترین مقدار تابع سود: اگر تابع سود، تابعی درجه دوم باشد، برای یافتن بیشترین مقدار سود، عرض رأس سهمی را به دست می‌آوریم و برای یافتن تعداد کالایی که در آن، مقدار سود، ماکزیمم است، طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم.

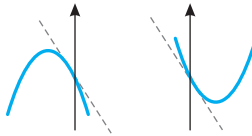


### شناسایی معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از روی نمودار

- ۱ اگر شاخه‌های سهمی رو به بالا باز شوند (U)، آن گاه  $a > 0$  و برعکس.
- ۲ اگر شاخه‌های سهمی رو به پایین باز شوند (∩)، آن گاه  $a < 0$  و برعکس.
- ۳ اگر سهمی در نقطه تلاقی با محور عرض‌ها، دارای شیب مماس مثبت باشد، آن گاه  $b > 0$  و برعکس.



- ۴ اگر سهمی در نقطه تلاقی با محور عرض‌ها، دارای شیب مماس منفی باشد، آن گاه  $b < 0$  و برعکس.



- ۵ علامت محل تلاقی سهمی با محور عرض‌ها، همان علامت  $c$  است.
- ۶ اگر سهمی محور  $x$ ها را در دو نقطه قطع کند، آن گاه  $\Delta > 0$ .
- ۷ اگر سهمی محور  $x$ ها را در یک نقطه قطع کند (مماس باشد)، آن گاه  $\Delta = 0$ .
- ۸ اگر سهمی محور  $x$ ها را قطع نکند، آن گاه  $\Delta < 0$ .

### تابع ثابت

به تابع  $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = c \end{cases}$  که در آن برد تابع فقط شامل یک عضو بوده و به صورت  $R_f = \{c\}$  باشد،

تابع ثابت گویند.

اگر دامنه تابع ثابت مجموعه کل اعداد حقیقی باشد، آن گاه نمودار آن به شکل یک خط افقی است.

تمام نقاط تابع ثابت روی یک خط افقی قرار دارند.

در این تابع مقدار خروجی یا برد تابع، ثابت بوده و به مقدار ورودی ربطی ندارد (مستقل از ورودی است).

اگر تابع ثابت به صورت زوج مرتب داده شود، باید تمام مؤلفه‌های دوم، یکسان باشند.

تابع خطی  $f(x) = ax + b$  زمانی یک تابع ثابت است که  $a = 0$ .

تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  زمانی یک تابع ثابت است که  $a = 0$  و  $b = 0$ .

تابع به صورت  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  زمانی یک تابع ثابت است که  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ .

تابع همانی

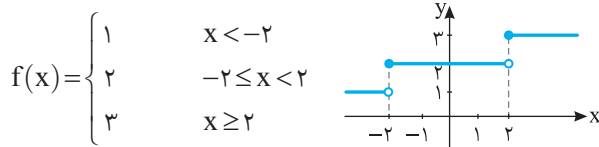
- تابع تعریف شده به صورت  $f: A \rightarrow B$  را تابع همانی گویند. در تابع همانی مقدار ورودی و خروجی تابع با هم برابر هستند و هر عددی که وارد تابع می‌شود، همان عدد از تابع خارج می‌گردد.
- در تابع همانی دامنه و برد همواره با هم برابر هستند ولی برعکس آن صحیح نیست.
- هر نقطه از نمودار تابع همانی روی نیمساز ناحیه اول و سوم ( $y = x$ ) قرار دارد.
- اگر تابع همانی به صورت زوج مرتب باشد، باید در هر زوج مرتب، مؤلفه‌های اول و دوم برابر باشند.

تابع چندضابطه‌ای

- تابعی که در محدوده‌های مختلف دامنه‌اش، ضابطه‌های مختلف دارد:
- $$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in D_1 \\ h(x) & x \in D_2 \end{cases}$$
- شرط تابع بودن یک تابع دو ضابطه‌ای آن است که محدوده‌های  $D_1$  و  $D_2$  اشتراک نداشته باشند، یا اگر در نقطه  $x = a$  مشترک باشند، مقادیر خروجی توابع  $g$  و  $h$  در  $x = a$  یکسان باشند، یعنی  $g(a) = h(a)$ .
- برای رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای باید هر ضابطه را در محدوده دامنه خودش رسم کنیم.

تابع پلکانی

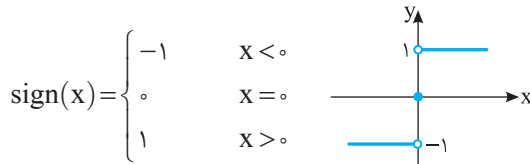
- تابعی چندضابطه‌ای را که در هر ضابطه، تابعی ثابت باشد، تابع پلکانی گویند. مثلاً



- نمودار تابع پلکانی فقط شامل خط‌های افقی است.
- از سطح زیر منحنی تابع پلکانی در قبض برق و مالیات برای محاسبه هزینه برق مصرفی و مقدار مالیات بر درآمد استفاده می‌شود.

تابع علامت  $y = \text{sign}(x)$

- تابع علامت تابعی پلکانی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:



- یعنی اگر ورودی مثبت باشد، خروجی تابع ۱ است، اگر ورودی منفی باشد، خروجی تابع -۱ است و اگر ورودی صفر باشد، خروجی نیز صفر است.

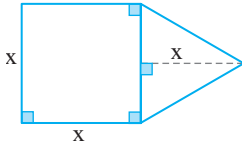
۱ در معادله  $\frac{2x-3}{3} + \frac{3x+1}{2} = 2 + \frac{x}{2}$  مجموع جواب معادله با معکوسش کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{6}$  (۲)  $\frac{13}{6}$  (۳)  $\frac{11}{6}$  (۴)  $\frac{17}{6}$

۲ اگر  $x = -3$  ریشه معادله درجه اول  $ax + b = 0$  باشد، جواب معادله  $3bx - 2a = 0$  کدام است؟ ( $a, b \neq 0$ )

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{2}{9}$  (۳) ۲ (۴) -۲

۳ مساحت شکل مقابل برابر ۱۲ است. قطر مربع کدام است؟



(۱)  $2\sqrt{2}$

(۲)  $4\sqrt{2}$

(۳) ۲

(۴) ۴

۴ در یک کارگاه تولیدی در یک هفته، از روز شنبه تا انتهای روز پنجشنبه، مقرر شد هر روز دو برابر روز قبل کالا تولید شود. اگر مجموع کالاهای تولیدی از روز شنبه تا انتهای روز چهارشنبه برابر ۷۷۵۰۰ واحد باشد، این کارگاه در روز پنجشنبه چند واحد کالا تولید خواهد کرد؟

- (۱) ۷۹۰۰۰ (۲) ۸۰۰۰۰ (۳) ۸۲۵۰۰ (۴) ۷۸۵۰۰

۵ در یک شرکت عمرانی، حقوق مهندس ۳ برابر حقوق کارگر و نصف حقوق مدیر پروژه است. در یک بخش از این شرکت ۱ مدیر پروژه، ۵ مهندس و ۷ کارگر مشغول به کار هستند. اگر مجموع حقوق دریافتی آنها در یک ماه ۴۲ میلیون تومان باشد، حقوق یک مهندس در این شرکت چند میلیون تومان است؟

- (۱) ۱/۵ (۲) ۲/۵ (۳) ۴/۵ (۴) ۷/۵

۶ در حل معادله درجه دوم  $3x^2 + 2x - 4 = 0$  به روش مربع کامل، به معادله  $(x+h)^2 = k$

رسیده‌ایم. حاصل  $3k - h$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\frac{13}{3}$  (۳) ۳ (۴) ۴

۷ اگر مجموع ریشه‌های معادله  $kx^2 + (k+3)x + 6 = 0$  برابر  $\frac{1}{2}$  باشد، ریشه کوچک‌تر معادله

کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) -۲ (۴)  $-\frac{3}{2}$

۸ اگر یکی از جواب‌های معادله  $mx^2 - (2m-1)x + 15 = 0$  برابر ۳ باشد، جواب دیگر

معادله کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{6}$  (۲)  $-\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴)  $-\frac{5}{6}$

۹ معادله درجه دوم  $3x(x-2) = a$  به‌ازای یک مقدار  $a$  دارای ریشه مضاعف  $x_0$  است.

حاصل  $a+x_0$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰ اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $3x^2 + 2x - 2 = 0$  باشند، حاصل  $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$

کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{9}$  (۲)  $\frac{2}{9}$  (۳)  $\frac{10}{9}$  (۴)  $-\frac{2}{9}$

۱۱ معادله  $(x-2)^2 = k+3$  دارای ریشه مضاعف  $a$  است.  $a+k$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

۱۲ در معادله  $2 = 8(x^2 - 3x) - (x^2 - 3x)^2$  کوچک‌ترین جواب معادله کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) -۵

۱۳ به‌ازای کدام محدوده  $m$ ، معادله درجه دوم  $mx^2 + (2m+1)x = 3-m$  دو ریشه

حقیقی متمایز دارد؟ ( $m \neq 0$ )

- (۱)  $m > -\frac{1}{16}$  (۲)  $m > -\frac{1}{8}$  (۳)  $m < \frac{1}{16}$  (۴)  $m < \frac{1}{8}$

۱۴ ریشه‌های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x - 4 = 0$

هستند.  $b-a$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۷ (۴) -۷

کدام گزینه در مورد معادله  $\frac{12}{x-3} + 4 = \frac{2}{x+3}$  درست است؟

۱۵

(۱) دو ریشه منفی دارد. (۲) فقط یک ریشه منفی دارد.

(۳) دو ریشه قرینه دارد. (۴) دو ریشه مساوی دارد.

اگر  $x=2$  جواب معادله  $\frac{5}{x+3a} + \frac{x+a}{x-a} = 4$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

۱۶

(۱)  $1$  یا  $\frac{2}{15}$  (۲)  $1$  یا  $\frac{2}{15}$  (۳)  $-1$  یا  $\frac{2}{15}$  (۴)  $-1$  یا  $\frac{2}{15}$

تساوی  $\frac{2x-1}{9x^2-1} + \frac{x+1}{3x-1} = \frac{P(x)}{9x^2-1} + \frac{x-1}{3x+1}$  به ازای هر مقدار  $x \neq \pm \frac{1}{3}$  برقرار است.

۱۷

$P(x)$  کدام می‌تواند باشد؟

(۱)  $9x$  (۲)  $10x-1$  (۳)  $5x-1$  (۴)  $2x-1$

عبارت گویای  $\frac{x^2-4}{x^2-ax+b}$  فقط به ازای  $x=-3$  تعریف نشده است. حاصل  $a+b$

۱۸

کدام است؟

(۱)  $3$  (۲)  $-3$  (۳)  $-15$  (۴)  $15$

معادله  $\frac{a(x+2)}{x+3} - \frac{2x-1}{x+3} = 3$  به ازای چه مقادیری از  $a$  جواب ندارد؟

۱۹

(۱)  $-5$  یا  $-7$  (۲)  $-5$  یا  $7$  (۳)  $-7$  یا  $5$  (۴)  $7$  یا  $5$

دو کارگر A و B اتاقی را با هم در ۲ روز رنگ می‌کنند. اگر کارگر A به تنهایی اتاق را رنگ کند، کار را ۳ روز زودتر از کارگر B می‌تواند تمام کند. کارگر B به تنهایی در چند روز اتاق را رنگ می‌کند؟

۲۰

(۱)  $3$  (۲)  $4$  (۳)  $6$  (۴)  $8$

صفحات پاسخ: ۲۵۱ تا ۲۵۵

زمان پیشنهادی: ۲۵'

## جامع (۱)

## آزمون ۱۷

۱ اگر  $1 + \frac{P(x)}{x^2 - 1} = \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1}$  به‌ازای هر مقدار  $x \neq \pm 1$  برقرار باشد، آن‌گاه کدام گزینه

یک تابع ثابت را مشخص می‌کند؟

(۱)  $P(x) + 2x$     (۲)  $P(x) - 2x$     (۳)  $P(x) - 4x$     (۴)  $P(x) + 4x$

۲ اگر  $a \neq 0$  باشد، آن‌گاه معادله  $\frac{2x+a}{x-a} = \frac{ax+2}{5-x} + 1$  به‌ازای یک مقدار  $a$  دارای جواب

 $x = 3$  است. جواب دیگر معادله کدام است؟

(۱)  $-2$     (۲)  $2$     (۳)  $-1$     (۴)  $1$

۳ فرض کنید تابع درآمد شرکتی به‌ازای تولید  $x$  محصول از یک کالا به‌صورت

$$R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$$

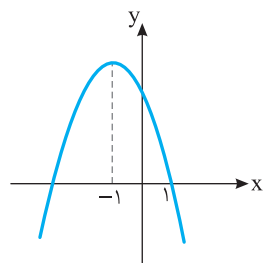
و تابع هزینه به‌صورت  $C(x) = ax + 18$  باشد. اگر بیشترین

سود این شرکت به‌ازای تولید ۹ واحد کالا باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(۱)  $21$     (۲)  $18$     (۳)  $-21$     (۴)  $-39$

۴ شکل روبه‌رو نمودار تابع  $y = -x^2 + ax + b$  است.

ب کدام است؟



(۱)  $2$

(۲)  $3$

(۳)  $4$

(۴)  $5$

۵ داده‌های آماری ۱۳، ۱۸، ۲۰، ۱۸/۵، ۱۴/۵، ۱۲، ۱۵، ۱۵/۵ و ۱۷، با نمودار جعبه‌ای،

نشان داده شده است. انحراف معیار داده‌های داخل جعبه، کدام است؟

(۱)  $1/5$     (۲)  $1/3$     (۳)  $1/2$     (۴)  $1/1$

۶ در یک جامعه با میانگین ۴۰ تقریباً ۶۸ درصد داده‌ها بین ۳۵ و ۴۵ قرار می‌گیرند. واریانس

داده‌ها، کدام است؟

(۱)  $5$     (۲)  $15$     (۳)  $25$     (۴)  $40$

۷ جدول ارزشی کدام‌یک از گزاره‌های زیر با جدول ارزشی گزاره  $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee r)$ ،

یکسان نیست؟

(۱)  $p \Rightarrow (q \vee r)$     (۲)  $(p \wedge q) \vee r$     (۳)  $\sim p \vee q \vee r$     (۴)  $(p \Rightarrow q) \vee r$

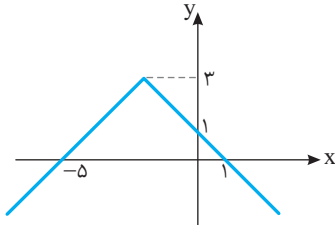
انسانی ۱۴۰۰

فرض کنید  $f(x) = |x-1|$ ،  $g(x) = [2x]$  و  $h(x) = \text{sign}(-x)$  باشد. ضابطه تابع

۸

انسانی خارج ۱۴۰۰ ؟ کدام است  $y = 2f(x) - h(x)g(x)$  در بازه  $-1 < x < -\frac{3}{2}$ ،

(۱)  $3x - 2$       (۲)  $5 - 2x$       (۳)  $-2x + 2$       (۴)  $-8x - 4$



ضابطه تابع روبه‌رو کدام است؟

۹

(۱)  $y = -|x+1| + 3$

(۲)  $y = x + 1 - |x+1|$

(۳)  $y = -|x+2| + 3$

(۴)  $y = x + 2 + |x+2|$

اگر  $f = \{(1, 2), (5, 1), (3, -2), (4, 1)\}$  و  $f + g = \{(3, -2), (1, 5), (4, 3)\}$

۱۰

باشند، مجموع اعضای برد تابع  $\frac{g-f}{f \times g}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴)  $\frac{1}{6}$

اگر ۴ صفر از پول ملی حذف شود، شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی چه تغییری می‌کند؟

۱۱

(۱) ۱۰۰۰۰ برابر می‌شود.

(۲) ۱۰۰۰ برابر می‌شود.

(۳) بر ۱۰۰۰۰ تقسیم می‌شود.

(۴) تغییر نمی‌کند.

در یک مرکز خرید، تعداد مشتریان از ساعت ۹ تا ۲۱ به صورت جدول زیر ثبت شده است.

۱۲\*

اگر تخمین درون‌یابی برای ساعت ۲۰، ۳۵۰ نفر باشد، تخمین درون‌یابی برای ساعت ۱۶

چند نفر است؟

ساعت	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
تعداد مشتریان	۱۰۰	۳۰۰	۱۶۰	a	۴۰۰

(۱) ۱۷۰      (۲) ۱۹۰      (۳) ۲۱۰      (۴) ۱۵۰

دور یک میز گرد، ۶ نفر به چند طریق می‌توانند قرار گیرند، به طوری که ۲ فرد مورد نظر از

۱۳

انسانی خارج ۹۹

آنان، همواره کنار یکدیگر باشند؟

(۱) ۳۶      (۲) ۴۸      (۳) ۹۶      (۴) ۱۲۰

۱۴ دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای پیشامدهای آن،

انسانی خارج ۹۷

کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۱۵ در ظرفی ۹ مهره با شماره‌های ۱ تا ۹ وجود دارد. ۴ مهره به تصادف از ظرف خارج می‌کنیم.

احتمال آنکه بزرگ‌ترین شماره مهره خارج شده ۷ باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{7}$  (۲)  $\frac{1}{63}$  (۳)  $\frac{1}{63}$  (۴)  $\frac{2}{63}$

۱۶ جمله دهم دنباله بازگشتی  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$  و  $a_1 = 1$ ، کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۰

(۱)  $\frac{55}{34}$  (۲)  $\frac{144}{89}$  (۳)  $\frac{610}{377}$  (۴)  $\frac{89}{55}$

۱۷ جمله پنجم یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک ناصفر، واسطه هندسی بین جملات سوم و

نهم آن دنباله است. اگر جمله پنجم دنباله ۷ باشد، جمله صد و یکم دنباله، کدام است؟

انسانی خارج ۱۴۰۰

(۱) ۲۰۰ (۲) ۱۷۵ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۲۵

۱۸ بین دو عدد ۴ و ۹۷۲، چهار عدد صحیح طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله هندسی از ۴

انسانی ۹۸

شروع و به ۹۷۲ ختم شوند. مجموع این ۶ عدد کدام است؟

(۱) ۱۴۵۶ (۲) ۱۴۶۸ (۳) ۱۵۴۶ (۴) ۱۶۵۴

۱۹ حاصل  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5/5} \left(\sqrt[3]{16}\right)^2$ ، کدام است؟

انسانی خارج ۹۸

(۱) ۱ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳) ۲ (۴) ۴

۲۰ در تابع  $f(x) = ab^x$ ، اگر  $f(2) = 3$  و  $f(-2) = 48$  باشند،  $f(1)$  کدام است؟

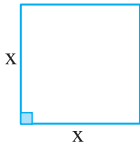
(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۱۲ (۳) ۶ (۴) ۹



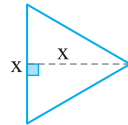


**خط فکری** در سؤالات شکلی، ابتدا باید به کمک اضلاع داده شده مساحت یا محیط (بستگی به صورت سؤال دارد) را محاسبه کنیم (اگر اندازه ضلعی را نداریم، شاید بتوان به کمک بقیه اجزا، اندازه آن را محاسبه کرد). سپس با توجه به صورت سؤال معادله مربوطه را بنویسیم.

**راه حل:** در اینجا با یک مربع و یک مثلث مواجه هستیم.



$$\text{مساحت} = x \times x = x^2$$



$$\text{مساحت} = \frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

اگر صورت مسئله را به بیان ریاضی تبدیل کنیم، داریم

$$x^2 + \frac{x^2}{2} = 12 \Rightarrow \frac{3x^2}{2} = 12 \Rightarrow 3x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 8$$

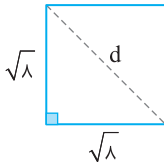
### نیم نگاه

در معادله  $x^2 = a$ ، اگر  $a$  عددی مثبت باشد، جواب معادله به صورت  $x = \pm\sqrt{a}$  است.

$$x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

با توجه به این مطلب داریم

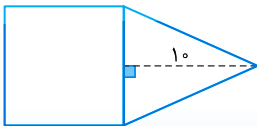
که  $x = -\sqrt{8}$  قابل قبول نیست، زیرا طول ضلع است. اکنون به سراغ قطر مربع می رویم.



طبق قضیه  
پیتاگورث

$$d^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2 = 16 \Rightarrow d = \pm 4 \Rightarrow d = 4$$

( $d$  قطر است و نمی تواند منفی باشد)



**شبیه ساز** در شکل مقابل، مساحت مثلث متساوی الساقین، از  $\frac{2}{3}$  مساحت مربع به اندازه  $\frac{1}{3}$  واحد مربع، کمتر است. مساحت مثلث، کدام است؟

انسانی ۹۹

۴۵ (۴)

۴۰ (۳)

۳۵ (۲)

۳۰ (۱)

گزینه ۳

**خط فکری** در برخورد با سؤالات توصیفی یا مسأله ای، پس از درک مفهوم سؤال ابتدا متغیری برای مجهول مسئله در نظر می گیریم و به کمک روند سؤال و متغیر در نظر گرفته شده، معادله ای بر اساس متغیر مجهول می نویسیم.

**راه‌حل:** با توجه به مطلب فوق، اگر تولید روز شنبه را  $x$  در نظر بگیریم، با دقت به روند سؤال، تولیدات در روزهای دیگر به صورت جدول زیر است:

شنبه	یک‌شنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه
$x$	$2x$	$4x$	$8x$	$16x$	$32x$

با توجه به اینکه مجموع تولیدات از روز شنبه تا انتهای روز چهارشنبه ۷۷۵۰۰ واحد است، پس

$$x + 2x + 4x + 8x + 16x = 77500 \Rightarrow 31x = 77500 \Rightarrow x = 2500$$

بنابراین میزان تولید در روز پنج‌شنبه برابر است با واحد  $32 \times 2500 = 80000$

**۳-۵ راه‌حل:** با توجه به خط فکری عنوان شده در سؤال قبل، حقوق کارگر را  $x$  در نظر می‌گیریم.

بنابراین حقوق مهندس  $3x$  و حقوق مدیر پروژه  $6x$  خواهد بود. اکنون با دقت در روند سؤال داریم

$$6x + 5 \times 3x + 7 \times x = 42 \Rightarrow 6x + 15x + 7x = 42 \Rightarrow 28x = 42 \Rightarrow x = 1/5$$

بنابراین حقوق کارگر  $1/5$  میلیون تومان است. پس حقوق مهندس برابر است با  $3 \times 1/5 = 4/5$  میلیون تومان

۴-۶

### نیم‌نگاه

برای حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  به روش مربع کامل مراحل زیر را طی می‌کنیم:

**مرحله ۱:** ابتدا عدد ثابت را به سمت دیگر تساوی منتقل می‌کنیم

$$ax^2 + bx = -c$$

**مرحله ۲:** دو طرف تساوی را بر ضریب  $x^2$  تقسیم می‌کنیم تا ضریب  $x^2$  برابر ۱ شود

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

**مرحله ۳:** ضریب  $x$  را نصف کرده و مربع عدد حاصل را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

**مرحله ۴:** سمت چپ را به صورت مربع کامل نوشته و با جذگیری از دو طرف تساوی  $(x + \frac{b}{2a})^2 = k$

جواب‌ها را مشخص می‌کنیم.

**راه‌حل:** با توجه به مراحل فوق داریم

$$3x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{4}{3} + \frac{1}{9} \Rightarrow (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{13}{9}$$

با مقایسه  $(x+h)^2 = k$  با عبارتی که به دست آورده‌ایم، معلوم می‌شود  $k = \frac{13}{9}$  و  $h = \frac{1}{3}$ . بنابراین

$$3k - h = 3 \times \frac{13}{9} - \frac{1}{3} = \frac{13}{3} - \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

● اگر معادله درجه دوم  $ax^2+bx+c=0$  دارای دو ریشه  $x_1$  و  $x_2$  باشد، آن‌گاه مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } x^2}, \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\text{عدد ثابت}}{\text{ضریب } x^2}$$

● در معادله درجه دوم  $ax^2+bx+c=0$  اگر  $\Delta = b^2 - 4ac$  عددی مثبت باشد ( $\Delta > 0$ )، آن‌گاه معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است که از رابطه‌های روبه‌رو محاسبه می‌شوند:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

**راه‌حل:** با توجه به مطالب فوق، ابتدا معادله داده شده را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم و سپس فرمول مجموع ریشه‌ها را برای آن می‌نویسیم. داریم

$$(k+3)x^2 + kx - 6 = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = S = -\frac{k}{k+3} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{k}{k+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2k = k+3 \Rightarrow k = -1 \\ S = \frac{1}{2} \text{ از طرفی} \end{array} \right.$$

بنابراین معادله به فرم  $2x^2 - x - 6 = 0$  تبدیل می‌شود که در آن

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 \Rightarrow x_1 = \frac{+1 + 7}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{+1 - 7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

بنابراین ریشه کوچک‌تر معادله برابر  $-\frac{3}{2}$  است.

**شبیه‌ساز** در معادله درجه دوم  $2x^2 + (m+1)x - 12 = 0$ ، مجموع دو ریشه  $\frac{5}{2}$  می‌باشد، ریشه

مثبت کدام است؟

۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۶ (۴)

انسانی ۹۷

گزینه ۳

**شبیه‌ساز** در معادله درجه دوم  $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ ، اگر مجموع دو ریشه حقیقی برابر  $\frac{1}{6}$

باشد، ریشه مثبت آن، کدام است؟

$\frac{1}{2}$  (۱)       $\frac{2}{3}$  (۲)      ۱ (۳)       $\frac{4}{3}$  (۴)

انسانی ۹۴

گزینه ۲

**۸ ۴** **راه‌حل:**  $x = 3$  جواب معادله است، پس طبق مطالبی که یاد گرفتیم، در معادله صدق می‌کند، یعنی

$$m \times 3^2 - (2m-1) \times 3 + 15 = 0 \Rightarrow 9m - 6m + 3 + 15 = 0 \Rightarrow 3m = -18 \Rightarrow m = -6$$

پس معادله به صورت  $-6x^2 + 13x + 15 = 0$  تبدیل می‌شود. در این معادله می‌دانیم (!) ضرب ریشه‌ها برابر

$$3 \times x_2 = -\frac{15}{6} \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{6}$$

و یکی از ریشه‌ها ۳ است، پس

راه قشنگی بود! البته می‌توانستیم به کمک دلتا نیز ریشه‌ها را محاسبه کنیم یا از فرمول مجموع ریشه‌ها استفاده کنیم.

۹ ۴

نیم‌نگاه

اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  داشته باشیم  $\Delta = 0$ ، آن‌گاه معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف (دو ریشهٔ یکسان) است که مقدار آن برابر  $-\frac{b}{2a}$  است.

**راه‌حل:** ابتدا معادله را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم، داریم  $3x^2 - 6x - a = 0$   
همین‌جا می‌توانیم بگوییم، اگر این معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد، مقدار ریشهٔ مضاعف برابر  $x_0 = -\frac{-6}{2 \times 3} = 1$  است (چرا؟). ولی برای محاسبهٔ  $a$  می‌توانیم از  $\Delta = 0$  استفاده کنیم یا  $x_0 = 1$  را در معادله قرار دهیم و  $a$  را حساب کنیم. فکر می‌کنید کدام راحت‌تر است؟ ما هر دو روش را می‌نویسیم.

۱ روش  $\Delta = 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-a) = 0 \Rightarrow 36 + 12a = 0 \Rightarrow a = -3$

۲ روش  $x_0 = 1 \Rightarrow 3 - 6 - a = 0 \Rightarrow a = -3$

بنابراین  $a + x_0 = -3 + 1 = -2$ .

۱۰ **راه‌حل:** با توجه به مطالبی که یاد گرفتیم، الان بلدیم جمع و ضرب ریشه‌ها را محاسبه کنیم.

نیم‌نگاه

گاهی برای محاسبهٔ عبارتی که بر حسب ریشه‌ها داده شده است لازم است از اتحادها، توان ۲ رساندن یا مخرج مشترک گرفتن استفاده کنیم. در ادامه چند فرمول معروف را می‌آوریم.

اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادلهٔ  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آن‌گاه

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = P = \frac{c}{a}, \quad x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P, \quad x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}$$

با توجه به مطلب فوق داریم  $3x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow S = x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}, \quad P = x_1 x_2 = -\frac{2}{3}$

بنابراین  $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = \frac{16}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{9}$

۱۱ ۲

نیم‌نگاه

معادلهٔ  $(x-h)^2 = 0$  دارای ریشهٔ مضاعف  $x = h$  است.

**راه‌حل:** با توجه به مطلب فوق و مقایسهٔ آن با  $(x-2)^2 = k+3$  نتیجه می‌گیریم که  $k+3=0 \Rightarrow k=-3$

بنابراین ریشهٔ مضاعف  $x=2 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$

$a=2, k=-3 \Rightarrow a+k=-1$

با توجه به نام‌گذاری متغیرها در صورت سؤال داریم

**خط فکری** گاهی به کمک تغییر متغیر می‌توانیم معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل کنیم و پس از حل معادله جدید، تغییر متغیر را بازگردانیم.

**راه حل:** با حل این سؤال این روش نیز بیشتر مشخص می‌شود.

$$\left. \begin{array}{l} (x^2 - 3x)^2 - 8(x^2 - 3x) - 20 = 0 \\ \text{تغییر متغیر } x^2 - 3x = A \end{array} \right\} \Rightarrow A^2 - 8A - 20 = 0$$

اکنون این معادله را به روش دلخواه حل می‌کنیم (من اینجا از تجزیه استفاده می‌کنم. به دنبال دو عدد می‌گردیم که مجموعشان  $-8$  و حاصل ضربشان  $-20$  باشد. آفرین!  $-10$  و  $2$ ). بنابراین

$$(A-10)(A+2) = 0 \Rightarrow A = 10, \quad A = -2$$

$$A = 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 5, \quad x = -2$$

$$A = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x = 2$$

بنابراین کوچک‌ترین جواب  $x = -2$  است. یک مطلب مهم اینجا بگیم:

**نیم‌نگاه**

در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ :

• اگر مجموع ضرایب صفر باشد، یک ریشه برابر ۱ است.  
 $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$

• اگر مجموع عدد ثابت و ضریب  $x^2$  برابر ضریب  $x$  باشد، یک ریشه برابر  $-1$  است.

$$a + c = b \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{c}{a}$$

**نیم‌نگاه**

در معادله درجه دوم استاندارد  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $b^2 - 4ac > 0$  ( $\Delta > 0$ ) باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

**راه حل:** ابتدا معادله را به فرم استاندارد می‌نویسیم و سپس دلتا را برای آن محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که در محاسبه دلتا با ضرایب سروکار داریم.

$$\frac{m}{a}x^2 + \underbrace{\left(\frac{2m+1}{b}\right)}_b x + \underbrace{\left(\frac{m-3}{c}\right)}_c = 0 \Rightarrow \Delta = (2m+1)^2 - 4m(m-3) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 + 12m = 16m + 1$$

چون معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است، داریم

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16m + 1 > 0 \Rightarrow 16m > -1 \Rightarrow m > -\frac{1}{16}$$

نیم‌نگاه

در حل نامعادله درجه اول مانند معادله درجه اول عمل می‌کنیم، یعنی ابتدا عدد ثابت را به سمت دیگر نامساوی منتقل کرده و دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم. فقط باید دقت کنیم که اگر ضریب مجهول عددی منفی باشد، پس از تقسیم طرفین بر ضریب مجهول، جهت نامساوی عوض می‌شود.

۱۴. **راه‌حل اول:** می‌دانیم اگر در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ ، مجموع ضرایب صفر باشد،

آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر  $x = 1$  و ریشه دوم برابر  $x = \frac{c}{a}$  است. در معادله  $x^2 + 3x - 4 = 0$ ، مجموع ضرایب

صفر است، پس  $x = 1$  و  $x = -4$  ریشه‌های این معادله هستند. بنابراین ریشه‌های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  بر اساس صورت سؤال  $x_1 = 3$  و  $x_2 = -2$  هستند. پس  $x_1 + x_2 = 1 = S$ ،  $x_1 x_2 = -6 = P$

نیم‌نگاه

اگر  $x_1 + x_2 = S$  و  $x_1 x_2 = P$  باشد، آن‌گاه معادله درجه دومی که ریشه‌های آن  $x_1$  و  $x_2$  باشد، به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  است.

با توجه به مطلب فوق معادله درجه دوم به صورت  $x^2 - x - 6 = 0$  است و داریم  $a = -1$ ،  $b = -6 \Rightarrow b - a = -6 - (-1) = -6 + 1 = -5$

**راه‌حل دوم:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 3x - 4 = 0$  باشند، داریم  $\alpha\beta = -4$ ،  $\alpha + \beta = -3$

با توجه به صورت سؤال، ریشه‌های معادله  $x^2 + ax + b = 0$  به صورت  $\alpha + 2$  و  $\beta + 2$  هستند. پس  $S = \alpha + \beta + 4 = 1$

$P = \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 = -4 - 6 + 4 = -6$

بنابراین معادله دوم به صورت  $x^2 - x - 6 = 0$  است و  $b - a = -6 - (-1) = -6 + 1 = -5$ .

۱۵

خط‌فکری

در حل معادلات گویا، ابتدا به کمک مخرج مشترک‌گیری (استفاده از ک.م.م. مخرج‌ها) و طرفین وسطین معادله را به یک معادله درجه اول یا درجه دوم تبدیل می‌کنیم و جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم. فقط جواب یا جواب‌هایی قابل قبول هستند که مخرج هیچ کسری را صفر نمی‌کنند.

**راه‌حل:** با توجه به مطلب فوق داریم

$$\frac{12}{x-3} - \frac{2}{x+3} = -4 \Rightarrow \frac{12(x+3) - 2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = -4 \Rightarrow \frac{12x + 36 - 2x + 6}{x^2 - 9} = -4$$

$$\frac{10x + 42}{x^2 - 9} = -4 \Rightarrow 10x + 42 = -4x^2 + 36 \Rightarrow 4x^2 + 10x + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 = 0$$

این معادله را از روش دلتا می‌توانیم حل کنیم ولی اگر دقت کنید، مجموع عدد ثابت و ضریب  $x^2$  برابر ضریب  $x$  است. بنابراین یک جواب معادله برابر  $x = -1$  و جواب دیگر آن برابر  $x = -\frac{3}{2}$  است. هر دو جواب قابل

قبول هستند و معادله گویا دو ریشه منفی دارد.

انسانی ۹۹

**شبیه‌ساز** مجموعه ریشه‌های معادله  $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{2}{3}$ ، کدام است؟

گزینه ۴

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

-۴ (۱)

انسانی خارج ۹۶

**شبیه‌ساز** ریشه‌های معادله  $\frac{x^2+1}{x+4} - \frac{11x-1}{x+4} + x = 0$  چگونه‌اند؟

گزینه ۴

(۲) دو جواب مساوی  
(۴) دو جواب وارون هم

(۱) یک جواب مورد قبول  
(۳) دو جواب قرینه

۱۶. **راه‌حل:** همان‌طور که گفتیم، به دلیل اینکه  $x=2$  جواب معادله است، پس در تساوی صدق می‌کند.

بنابراین  $\frac{5}{2+3a} + \frac{2+a}{2-a} = 4$ . اکنون به کمک خط فکری در حل معادلات گویا، معادله به دست آمده را حل می‌کنیم. داریم

$$\frac{5(2-a) + (2+a)(2+3a)}{(2+3a)(2-a)} = 4 \Rightarrow \frac{10 - 5a + 4 + 6a + 2a + 3a^2}{4 - 2a + 6a - 3a^2} = 4$$

$$3a^2 + 3a + 14 = 4(-3a^2 + 4a + 4) \Rightarrow 3a^2 + 3a + 14 = -12a^2 + 16a + 16 \Rightarrow 15a^2 - 13a - 2 = 0$$

این معادله را با دلتا می‌توان حل کرد ولی دقت کنید که جمع ضرایب برابر صفر است. پس یکی از ریشه‌ها  $a=1$  و ریشه

دیگر  $a = -\frac{2}{15}$  است. می‌توانستیم با جای گذاری اعداد هر گزینه در معادله به دست آمده نیز تساوی را بررسی کنیم.

انسانی ۹۸

**شبیه‌ساز** به‌ازای کدام مقدار  $a$ ، معادله  $\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} - 1$ ، دارای جواب  $x=3$  است؟

گزینه ۲

$\frac{2}{3}$ ، ۱ (۴)

$-\frac{2}{3}$ ، ۱ (۳)

$-\frac{1}{3}$ ، ۲ (۲)

$\frac{1}{3}$ ، -۲ (۱)

۱۷. **راه‌حل اول:** در این‌گونه سؤالات یکی از روش‌های خوب عددگذاری است، بدین صورت که یک

یا دو عدد دلخواه را به جای  $x$  قرار می‌دهیم (سعی کنید اعداد انتخابی ۰، ۱ و ۲ نباشند). مثلاً در این سؤال،

$$\frac{5}{80} + \frac{4}{8} = \frac{P(3)}{80} + \frac{2}{10}$$

به‌جای  $x$  عدد ۳ را قرار می‌دهیم. داریم

$$5 + 40 = P(3) + 16 \Rightarrow P(3) = 29$$

اکنون  $x=3$  را در گزینه‌ها قرار می‌دهیم، می‌بینید که فقط مقدار گزینه (۲)  $(10x-1)$  برابر ۲۹ می‌شود.

**راه‌حل دوم:** مخرج مشترک گیری و ... دقت کنید که

$$9x^2 - 1 = (3x-1)(3x+1) \Rightarrow \frac{2x-1+(x+1)(3x+1)}{9x^2-1} = \frac{P(x)+(x-1)(3x-1)}{9x^2-1}$$

$$2x-1+3x^2+4x+1 = P(x)+3x^2-4x+1 \Rightarrow P(x) = 10x-1$$

**شبیه‌ساز** حاصل عبارت  $\frac{2x^2-x}{4x^2-1} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}$ ، به‌صورت  $\frac{P(x)}{4x^2-1}$  است.

انسانی ۹۸

کدام است؟

گزینه ۱

$2x-3$  (۴)

$-4x+1$  (۳)

$-4x$  (۲)

$-8x$  (۱)



## ۱۸

## نیم‌نگاه

عبارت گویای  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  در ریشه‌های  $Q(x)=0$  تعریف نشده است و دامنه عبارت گویا به صورت  $\{ \text{ریشه‌های } Q(x)=0 \} - \mathbb{R}$  است.

**راه‌حل:** با توجه به صورت سؤال معلوم می‌شود که  $x=-3$  تنها ریشه مخرج است و چون مخرج عبارت درجه دوم است، پس  $x=-3$  باید ریشه مضاعف آن باشد.

## نیم‌نگاه

اگر  $x=k$  ریشه مضاعف  $ax^2+bx+c=0$  باشد، آن‌گاه معادله درجه دوم را می‌توان به صورت مقابل در نظر گرفت:

$$ax^2+bx+c=a(x-k)^2$$

در اینجا این به نتیجه رسیدیم که  $x=-3$  باید ریشه مضاعف مخرج باشد، پس طبق نکته فوق مخرج باید به صورت روبه‌رو باشد:

$$x^2-ax+b=1 \times (x-(-3))^2$$

بنابراین

$$x^2-ax+b=(x+3)^2=x^2+6x+9$$

$$a=-6, b=9 \Rightarrow a+b=3$$

با مقایسه ضرایب معلوم می‌شود که

## ۱۹

## نیم‌نگاه

اگر بخواهیم معادلات گویا فاقد جواب باشند، دو حالت دارد:

۱- پس از ساده‌سازی معادله درجه اول یا درجه دوم ریشه نداشته باشد.

۲- جواب‌هایی که از معادله درجه اول یا درجه دوم به دست می‌آیند همان ریشه‌های مخرج کسر باشند.

**راه‌حل:** ابتدا معادله را ساده می‌کنیم.

$$\frac{a(x+2)-(2x-1)}{x+3}=3 \Rightarrow \frac{ax+2a-2x+1}{x+3}=3$$

$$ax-2x+2a+1=3x+9 \Rightarrow ax-5x+2a-8=0 \Rightarrow (a-5)x+2a-8=0$$

**حالت ۱:** معادله درجه اول زمانی جواب ندارد که ضریب  $x$  برابر صفر باشد و عدد ثابت صفر نشود. پس  $a-5=0 \Rightarrow a=5$

دقت کنید که  $2a-8$  به ازای  $a=5$  صفر نمی‌شود.

**حالت ۲:**  $x=-3$  که ریشه مخرج کسر در معادله اصلی است ریشه معادله درجه اول باشد. پس  $(a-5)(-3)+2a-8=0 \Rightarrow -3a+15+2a-8=0 \Rightarrow a=7$