

کتاب‌های
سه‌بعدی



آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی ۲

(یازدهم)
تجربی

کازم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی



انگه
انتشرالگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای ریاضی ۲ تجربی پایه یازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آن‌ها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آن‌ها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همه تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در دو فصل پایانی آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

وظیفه خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مریم موحدی‌مهر، مریم بیوک‌زاده و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، لیلا پرهیزکاری برای صفحه‌آرایی و سرکار خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

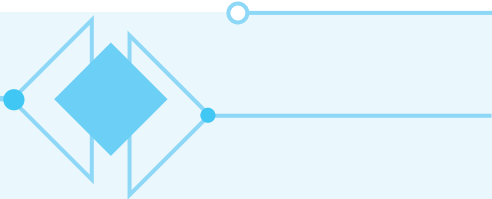
فهرست

◆ فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

۲	درس اول: هندسه تحلیلی
۱۲	تمرین
۱۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۷	درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم
۲۷	تمرین
۳۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۵	درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی
۳۹	تمرین
۴۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل دوم: هندسه

۴۴	درس‌های اول و دوم: ترسیم‌های هندسی - استدلال و قضیه تالس
۵۷	تمرین
۶۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۶۵	درس سوم: تشابه مثلث‌ها
۷۴	تمرین
۸۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



◆ فصل سوم: تابع

۸۶	درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع
۹۷	تمرین
۱۰۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۰۷	درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک
۱۱۳	تمرین
۱۱۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲۰	درس سوم: اعمال جبری روی توابع
۱۲۳	تمرین
۱۲۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل چهارم: مثلثات

۱۲۸	درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
۱۳۲	تمرین
۱۳۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۳۶	درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
۱۴۱	تمرین
۱۴۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۴۶	درس سوم: توابع مثلثاتی
۱۴۹	تمرین
۱۵۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

۱۵۶	درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
۱۶۱	تمرین
۱۶۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۶۶	درس‌های دوم و سوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن - نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی
۱۷۶	تمرین
۱۷۸	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



◆ فصل ششم: حد و پیوستگی

۱۸۶	درس اول: فرایندهای حدی
۱۹۱	تمرین
۱۹۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۹۶	درس دوم: محاسبه حد توابع
۲۰۶	تمرین
۲۰۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۱۶	درس سوم: پیوستگی
۲۲۰	تمرین
۲۲۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل هفتم: آمار و احتمال

۲۲۶	درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل
۲۳۲	تمرین
۲۳۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۳۸	درس دوم: آمار توصیفی
۲۴۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل هشتم: راه‌حل تمرین‌ها

۲۴۲	راه‌حل تمرین‌ها
-----	-----------------

◆ فصل نهم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

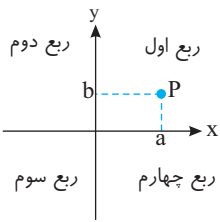
۳۰۲	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
-----	----------------------------

فصل اول

هندسة تحليلي

و جبر

یادآوری

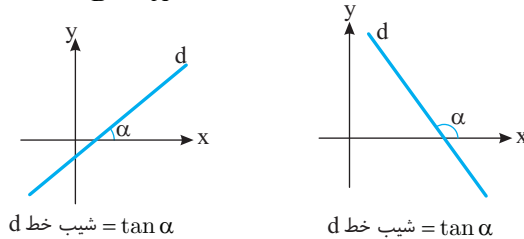


محورهای مختصات در صفحه، دو محور با مبدأ مشترک هستند که هر یک بر دیگری عمود است. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر یک از آن‌ها را یک ربع می‌نامند (شکل را ببینید). نقطه‌های روی محورهای مختصات در هیچ ربعی نیستند. هر نقطه در صفحه مانند P متناظر با زوج مرتبی از عددهای حقیقی مانند (a, b) است. a را طول نقطه P می‌نامند و معمولاً آن را با x_p نشان می‌دهند. b را عرض نقطه P می‌نامند و معمولاً آن را با y_p نشان می‌دهند. a و b را مختصات نقطه P می‌نامند و گاهی این نقطه را به شکل $P(a, b)$ می‌نویسند، که یعنی نقطه (a, b) است.

مطالب تکمیلی درباره معادله خط راست

از هر دو نقطه در صفحه مختصات فقط یک خط راست می‌گذرد. فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند

و $x_A \neq x_B$ شیب خط راستی که از نقطه‌های A و B می‌گذرد برابر است با $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



فرض کنید خط راست l از نقطه‌های $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد و $x_1 \neq x_2$. اگر $C(x, y)$ نقطه‌ای به جز این نقطه‌ها و روی این

خط باشد، چون شیب خط راستی که از A و C می‌گذرد با شیب خط راستی که از A و B می‌گذرد برابر است، پس $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. در نتیجه

در این معادله صدق می‌کند. پس مختصات هر نقطه روی خط l $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ چون مختصات نقطه‌های A و B هم در این معادله صدق می‌کنند.

نتیجه معادله خط راستی که از نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد (که در اینجا $x_1 \neq x_2$)، به صورت $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ است.

نتیجه اگر دو طرف معادله خط راست $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ را در $x_1 - x_2$ ضرب کنیم به دست می‌آید

$$(x_1 - x_2)y - (x_1 - x_2)y_1 = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$$

اگر عبارت‌های سمت چپ را به سمت راست ببریم، معلوم می‌شود که معادله خط راست به صورت $ax + by + c = 0$ است.

نتیجه معادله هر خط راست به صورت $ax + by + c = 0$ است. شیب این خط برابر با $-\frac{a}{b}$ است.

نتیجه اگر شیب خط راستی را که از نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد $(x_1 \neq x_2)$ ، یعنی $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ را با m نشان دهیم، معلوم

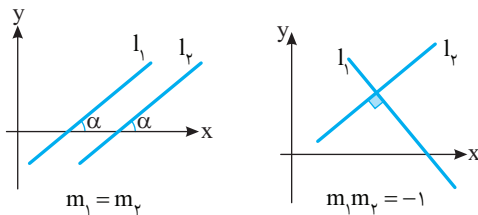
می‌شود که معادله خط راست را می‌توان به صورت $y - y_1 = m(x - x_1)$ نوشت. اگر این معادله را ساده کنیم معلوم می‌شود که می‌توان آن را به شکل $y = mx + b$ نوشت ($b = y_1 - mx_1$). توجه کنید که نقطه $(0, b)$ محل برخورد این خط با محور y است و b را عرض از مبدأ این خط می‌نامند. در ضمن، اگر نقطه $(a, 0)$ محل برخورد خط با محور x باشد، a را طول از مبدأ خط می‌نامند.

معادله خط راستی که شیب آن برابر m و عرض از مبدأ آن برابر b است به صورت $y = mx + b$ است.

نتیجه

خطهای موازی و خطهای عمود بر هم

یادآوری الف) فرض کنید l_1 و l_2 دو خط راست غیرموازی با محور y با شیبهای m_1 و m_2 باشند. در این صورت l_1 و l_2 موازی اند اگر و فقط اگر $m_1 = m_2$.
 ب) فرض کنید l_1 و l_2 دو خط راست غیرموازی با محورهای مختصات باشند. در این صورت l_1 و l_2 بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $m_1 m_2 = -1$.



مسئله ۱

معادله خط راستی را بنویسید که از نقطه $(2, 1)$ بگذرد و بر خط $2x - 4y + 7 = 0$ عمود باشد.

راه حل

شیب خط $2x - 4y + 7 = 0$ برابر است با $\frac{1}{2} = -\frac{2}{-4}$. اگر شیب خط مورد نظر m باشد، آن گاه $\frac{1}{2} m = -1$ ، پس $m = -2$. معادله خط راستی که شیب آن -2 است و از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد به صورت $y - 1 = -2(x - 2)$ ، یعنی $y + 2x - 5 = 0$ است.

تست ۱

اگر خط راستی که از نقطه‌های $(3, a)$ و $(2, 7)$ می‌گذرد بر خط راستی که از نقطه‌های $(-1, 4)$ و $(1, 8)$ می‌گذرد عمود باشد، مقدار a چقدر است؟

راه حل

شیب خط راستی که از نقطه‌های $(3, a)$ و $(2, 7)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{a-7}{3-2} = a-7$. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-1, 4)$ و $(1, 8)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{4-8}{-1-1} = 2$. اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است، پس

$$(a-7)(2) = -1 \Rightarrow a = \frac{13}{2}$$

مسئله ۲

معادله خط راستی را بنویسید که از نقطه $(-3, 5)$ می‌گذرد و بر خط راستی که از نقطه‌های $(2, 5)$ و $(-3, 6)$ می‌گذرد عمود است.

راه حل

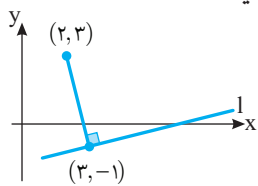
شیب خط راستی که از نقطه‌های $(2, 5)$ و $(-3, 6)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{5-6}{2+3} = -\frac{1}{5}$. اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، چون بر این خط عمود است، پس $m(-\frac{1}{5}) = -1$. در نتیجه $m = 5$. معادله خط راستی که شیب آن 5 است و از نقطه $(-3, 5)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - 5 = 5(x + 3) \Rightarrow y - 5x - 20 = 0$$

مسئله ۳

پای عمود وارد از نقطه $(2, 3)$ بر خط راست l نقطه $(3, -1)$ است. معادله این خط راست را بنویسید.

راه حل



خط مورد نظر بر خط راستی که از نقطه‌های $(2, 3)$ و $(3, -1)$ می‌گذرد عمود است (شکل را ببینید). شیب خط راستی که از نقطه‌های $(2, 3)$ و $(3, -1)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{3+1}{2-3} = -4$. اگر m شیب خط مورد نظر باشد، آن گاه $m(-4) = -1$ ، پس $m = \frac{1}{4}$. شیب خط مورد نظر $\frac{1}{4}$ است و از نقطه $(3, -1)$ می‌گذرد، بنابراین معادله آن به صورت زیر است:

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow x - 4y - 7 = 0$$

تست

۲

پای عمود وارد از نقطه (۳, ۴) بر خط $2x + y - 7 = 0$ کدام نقطه است؟

(۲) (۱, ۵)

(۱) $(\frac{9}{5}, \frac{17}{5})$

(۴) (-۵, ۱)

(۳) (۱, -۵)

راه حل

شیب خط $2x + y - 7 = 0$ برابر است با $-2 = -\frac{2}{1}$. بنابراین اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، آن گاه $m(-2) = -1$ ، یعنی

$m = \frac{1}{2}$. معادله خط راستی که شیب آن $\frac{1}{2}$ است و از نقطه (۳, ۴) می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$$

پای عمود مورد نظر محل برخورد خطهای $2x + y - 7 = 0$ و $x - 2y + 5 = 0$ است. اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

را

حل کنیم به دست می‌آید $x = \frac{9}{5}$ و $y = \frac{17}{5}$. بنابراین نقطه مورد نظر $(\frac{9}{5}, \frac{17}{5})$ است.

مسئله ۴

ثابت کنید نقطه‌های $A(3, 4)$ ، $B(-2, -1)$ و $C(4, 1)$ رأس‌های مثلثی قائم‌الزاویه هستند.

راه حل

شیب خطهای راستی که ضلع‌های مثلث ABC روی آنها قرار دارند برابر است با $m_{AB} = \frac{4+1}{3+2} = 1$ ، $m_{BC} = \frac{-1-1}{-2-4} = \frac{1}{3}$ و

$m_{AC} = \frac{4-1}{3-4} = -3$. چون $m_{BC} \times m_{AC} = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$ ، پس ضلع‌های BC و AC بر هم عمودند و مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

مسئله ۵

نقطه‌های $A(10, 4)$ ، $B(-4, 9)$ و $C(-2, -1)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. معادله خط راستی را که ارتفاع وارد از رأس A روی آن قرار دارد بنویسید.

راه حل

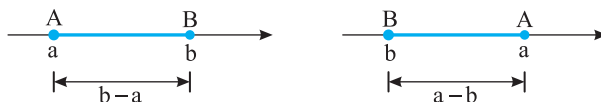
ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC عمود است. شیب خط راستی که از نقطه‌های B و C می‌گذرد برابر است با $-\frac{9+1}{-4+2} = -5$. بنابراین

اگر شیب خط راستی که ارتفاع روی آن قرار دارد برابر m باشد، آن گاه $m(-5) = -1$ ، پس $m = \frac{1}{5}$. معادله خط راستی که شیب آن $\frac{1}{5}$ است و از نقطه $A(10, 4)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - 4 = \frac{1}{5}(x - 10) \Rightarrow x - 5y + 10 = 0$$

فاصله بین دو نقطه

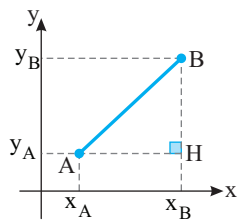
فرض کنید A و B دو نقطه روی محور باشند. در این صورت، فاصله بین A و B برابر با طول پاره‌خط AB است. اگر نقطه‌های A و B متناظر با عددهای a و b باشند، از روی شکل‌های زیر معلوم است که طول پاره‌خط AB (بر حسب اینکه $a > b$ یا $a < b$) برابر با $a - b$ یا $b - a$ است که با نمادگذاری قدرمطلق می‌شود $|a - b|$.



اگر a و b را با x_A و x_B نشان دهیم، نتیجه زیر به دست می‌آید:

اگر نقطه‌های A و B روی محور متناظر با عددهای x_A و x_B باشند، فاصله بین A و B برابر با $|x_A - x_B|$ است.

نتیجه



اکنون فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که $AH = |x_A - x_B|$ و $BH = |y_A - y_B|$. در نتیجه، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث AHB ، $AB^2 = AH^2 + BH^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. منظورمان از **فاصله** دو نقطه A و B طول پاره‌خط AB است. بنابراین نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ در صفحه مختصات برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

مثال: فاصله نقطه‌های $(1, -2)$ و $(-2, 2)$ در صفحه مختصات برابر است با $\sqrt{(1 - (-2))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

تست ۳ فاصله نقطه $A(a, 1)$ از نقطه‌های $B(-1, 1)$ و $C(3, 5)$ برابر است. مقدار a چقدر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

را حل کنید که

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (1-5)^2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 2a + 1 + 0} = \sqrt{a^2 - 6a + 9 + 16}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم به دست می‌آید

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 - 6a + 25 \Rightarrow 8a = 24 \Rightarrow a = 3$$

مسئله ۶ نقطه‌ای روی محور x پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(1, 3)$ و $(2, -5)$ برابر باشد.

فرض کنید نقطه مورد نظر $(a, 0)$ باشد. در این صورت فاصله‌اش تا نقطه $(1, 3)$ برابر است با

$$\sqrt{(a-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 9} = \sqrt{a^2 - 2a + 10}$$

و فاصله‌اش از نقطه $(2, -5)$ برابر است با $\sqrt{(a-2)^2 + (-5-(-5))^2} = \sqrt{(a-2)^2 + 25} = \sqrt{a^2 - 4a + 29}$.

در نتیجه باید $\sqrt{a^2 - 2a + 10} = \sqrt{a^2 - 4a + 29}$. اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$a^2 - 2a + 10 = a^2 - 4a + 29 \Rightarrow 2a = 19 \Rightarrow a = \frac{19}{2}$$

مسئله ۷ ثابت کنید مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $A(0, 6)$ ، $B(-5, 3)$ و $C(3, 1)$ هستند، متساوی‌الساقین است.

توجه کنید که $AC = \sqrt{(0-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ و $AB = \sqrt{(0+5)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$ و بنابراین

$AB = AC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

تست ۴ نقطه‌های $B(1, 3)$ و $C(-2, 7)$ دو سر قاعده مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند. رأس A کدام نقطه می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱, ۶) ۲ $(-\frac{1}{3}, 5)$ ۳ $(\frac{5}{6}, 6)$ ۴ $(\frac{1}{6}, 7)$

را حل کنید فرض کنید $A(a, b)$ باشد. در این صورت

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (b-7)^2} \Rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 = (a+2)^2 + (b-7)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 6b + 9 = a^2 + 4a + 4 + b^2 - 14b + 49 \Rightarrow -6a + 8b = 43$$

مختصات نقطه $(\frac{5}{6}, 6)$ در این تساوی صدق می‌کند و مختصات بقیه نقطه‌ها صدق نمی‌کنند. بنابراین A می‌تواند نقطه $(\frac{5}{6}, 6)$ باشد.

مسئله ۸

نقطه‌های $A(0, 0)$ ، $B(3, 0)$ و $C(a, b)$ رأس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند. a و b را پیدا کنید.

راه‌حل

توجه کنید که $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2} = 3$. بنابراین

$$AC = 3 \Rightarrow \sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 9 \quad (1)$$

$$BC = 3 \Rightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (0-b)^2} = 3 \Rightarrow (3-a)^2 + b^2 = 9 \Rightarrow 9 - 6a + a^2 + b^2 = 9 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $9 - 6a = 0$. پس $a = \frac{3}{2}$. در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید $b^2 = 9 - a^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$.

$$b = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{بنابراین}$$

مسئله ۹

نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(-1, 0)$ و $(2, 4)$ به ترتیب برابر با ۱ و ۴ باشد.

راه‌حل

نقطه مورد نظر را (x, y) می‌نامیم. در این صورت

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} = 1 \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 16 \end{cases}$$

اگر این تساوی‌ها را ساده کنیم به دست می‌آید

$$x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad (1), \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y = 0 \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به دست می‌آید $y = \frac{-3x+2}{4}$. اگر این مقدار y را در تساوی (۱) قرار دهیم و ساده کنیم به دست

می‌آید $25x^2 + 20x + 4 = 0$. در نتیجه $(5x+2)^2 = 0$. بنابراین $x = -\frac{2}{5}$ و در نتیجه $y = \frac{-3x+2}{4} = \frac{4}{5}$. بنابراین نقطه مورد نظر

$$\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ است.}$$

مسئله ۱۰

نقطه P را طوری پیدا کنید که از نقطه‌های $A(1, 3)$ ، $B(-3, 5)$ و $C(5, -1)$ به یک فاصله باشد.

راه‌حل

فرض کنید P نقطه (a, b) باشد. در این صورت

$$PA = PB \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(a+3)^2 + (b-5)^2} \Rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 = (a+3)^2 + (b-5)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 6b + 9 = a^2 + 6a + 9 + b^2 - 10b + 25 \Rightarrow -2a + b = 6 \quad (1)$$

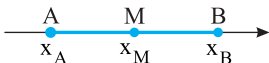
$$PA = PC \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{(a-5)^2 + (b+1)^2} \Rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 = (a-5)^2 + (b+1)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 6b + 9 = a^2 - 10a + 25 + b^2 + 2b + 1 \Rightarrow a - b = 2 \quad (2)$$

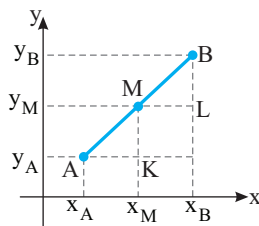
اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم به دست می‌آید $a = -8$ و $b = -10$. بنابراین P نقطه $(-8, -10)$ است.

مختصات نقطه وسط پاره‌خط

فرض کنید A و B دو نقطه روی محور باشند و نقطه M وسط پاره‌خط AB باشد (شکل روبه‌رو را ببینید). در این صورت



$$AM = BM \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$



اکنون فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند و نقطه $M(x_M, y_M)$ وسط پاره خط AB باشد (شکل روبه‌رو را ببینید). در این صورت از هم‌نهشتی مثلث‌های AMK و MBL نتیجه می‌شود

$$AK = ML \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

فرض کنید $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد. در این صورت،

نتیجه

$$مختصات نقطه M برابرند با $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.$$

مثال: مختصات نقطه M وسط پاره خط میان نقطه‌های $A(-1, 4)$ و $B(3, 6)$ برابرند با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

مثال: مختصات نقطه M وسط پاره خط میان نقطه‌های $(a-1, 3-2b)$ و $(3-a, 2b+5)$ برابرند با

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a-1+3-a}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-2b+2b+5}{2} = 4$$

مسئله ۱۱ نقطه‌های $A(1, 4)$ ، $B(-4, 9)$ و $C(-2, -1)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. طول میانه‌ای را که از رأس A می‌گذرد حساب کنید.

مسئله ۱۱

راه‌حل نقطه M وسط ضلع BC ، به صورت $(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{-4-2}{2}, \frac{9-1}{2}) = (-3, 4)$ به دست می‌آید. بنابراین

راه‌حل

$$AM = \sqrt{(1+3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

مسئله ۱۲ اگر نقطه $(1, 1)$ رأسی از یک مثلث باشد و $(-2, 3)$ و $(5, 2)$ نقطه‌های وسط ضلع‌هایی که از این رأس می‌گذرند باشند، مختصات دو رأس دیگر را پیدا کنید.

مسئله ۱۲

راه‌حل فرض کنید نقطه $(1, 1)$ رأس A ، نقطه $(-2, 3)$ وسط ضلع AB و نقطه $(5, 2)$ وسط ضلع AC باشند. توجه کنید که

راه‌حل

$$AB \text{ ضلع} = (\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) = (\frac{1+x_B}{2}, \frac{1+y_B}{2})$$

پس $3 = \frac{1+y_B}{2}$ در نتیجه $y_B = 5$ و $-2 = \frac{1+x_B}{2}$ بنابراین $x_B = -5$. بنابراین مختصات رأس B نقطه $(-5, 5)$ است. به همین

ترتیب، AC ضلع، $(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}) = (\frac{1+x_C}{2}, \frac{1+y_C}{2})$ ، پس

$$5 = \frac{1+x_C}{2} \Rightarrow x_C = 9, \quad 2 = \frac{1+y_C}{2} \Rightarrow y_C = 3$$

بنابراین مختصات رأس C نقطه $(9, 3)$ است.

تست ۵

وسط پاره‌خطی که دو سر آن نقطه‌های برخورد خط راست l با محورهای مختصات هستند، نقطه $(5, 2)$ است. معادله خط l کدام است؟

$$(1) \quad 5x + 2y = 29 \quad (2) \quad 2x + 5y = 20 \quad (3) \quad 3x - 2y = 11 \quad (4) \quad 2x + 3y = 16$$

فرض کنید خط l محورهای مختصات را در نقطه‌های $(a, 0)$ و $(0, b)$ قطع می‌کند. در این صورت وسط پاره‌خطی که دو سرش این دو

نقطه هستند، نقطه $(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2})$ یعنی $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ است. بنابراین

$$(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = (5, 2) \Rightarrow \frac{a}{2} = 5, \quad \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow a = 10, \quad b = 4$$

معادله خط راستی که از نقطه‌های $(10, 0)$ و $(0, 4)$ می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{0 - 4}{10 - 0}(x - 10) \Rightarrow y = -\frac{2}{5}(x - 10) \Rightarrow 5y + 2x = 20$$

راه‌حل

مسئله ۱۳

معادله عمودمنصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(3, 4)$ و $(-1, 2)$ را بنویسید.

وسط پاره‌خط مورد نظر نقطه $(\frac{3-1}{2}, \frac{4+2}{2})$ ، یعنی $(1, 3)$ است. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(3, 4)$ و $(-1, 2)$ می‌گذرد برابر

است با $\frac{4-2}{3+1} = \frac{1}{2}$. بنابراین اگر شیب عمودمنصف مورد نظر برابر m باشد، آن‌گاه $m \times \frac{1}{2} = -1$ ، پس $m = -2$. معادله خط راستی که

شیب آن -2 است و از نقطه $(1, 3)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

راه‌حل

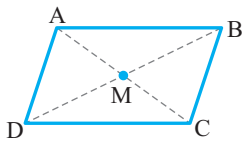
فرض کنید نقطه‌های $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ ، $C(x_C, y_C)$ و $D(x_D, y_D)$ رأس‌های

متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و نقطه $M(x_M, y_M)$ محل برخورد قطرهای این متوازی‌الاضلاع باشند. چون در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس نقطه M هم وسط پاره‌خط AC است و

$$\text{هم وسط پاره‌خط } BD. \text{ در نتیجه } x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \text{ و } x_M = \frac{x_A + x_C}{2}.$$

$$\text{بنابراین } x_A + x_C = x_B + x_D. \text{ به همین ترتیب } y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

$$\text{بنابراین } y_A + y_C = y_B + y_D.$$



نتیجه

اگر $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ ، $C(x_C, y_C)$ و $D(x_D, y_D)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، آن‌گاه

$$x_A + x_C = x_B + x_D, \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

تست ۶

اگر نقطه‌های $A(2, -2)$ ، $B(8, 4)$ ، $C(5, 7)$ و $D(a, b)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، نقطه D کدام است؟

$$(1) \quad (1, 1) \quad (2) \quad (1, -1) \quad (3) \quad (-1, 1) \quad (4) \quad (-1, -1)$$

توجه کنید که

راه‌حل

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + 5 = 8 + a \Rightarrow a = -1$$

همین‌طور

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow -2 + 7 = 4 + b \Rightarrow b = 1$$

بنابراین D نقطه $(-1, 1)$ است.



تست

۷ نقطه‌های $A(2, a)$ ، $B(1, 4)$ ، $C(b, 3)$ و $D(3, 2)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. مقدار $a - b$ چقدر است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه‌حل

توجه کنید که

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + b = 1 + 3 \Rightarrow b = 2$$

همین‌طور

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow a + 3 = 4 + 2 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین $a - b = 1$.

مسئله ۱۴

ثابت کنید نقطه‌های $(-1, -6)$ ، $(2, -5)$ ، $(7, 2)$ و $(4, 1)$ رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند.

راه‌حل

اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-1, -6)$ و نقطه $(7, 2)$ نقطه $(3, -2)$ است. وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(2, -5)$ و $(4, 1)$ نقطه $(3, -2)$ است.

$$\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) = (3, -2) \quad \text{و} \quad \left(\frac{2+4}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) = (3, -2)$$

است. چون دو نقطه به دست آمده یکی هستند، نتیجه می‌گیریم چهار نقطه داده شده رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند.

فاصله نقطه از خط راست

یادآوری

فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مثال: فاصله نقطه $(1, -4)$ از خط $3x - 4y + 6 = 0$ برابر است با $\frac{|3 \times 1 - 4(-4) + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$

مثال: برای اینکه فاصله نقطه $(2, 3)$ از خط $y = 2x - 6$ را پیدا کنیم، ابتدا خط را به صورت $2x - y - 6 = 0$ می‌نویسیم. سپس

$$\frac{|2 \times 2 - 3 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

از دستور فاصله نقطه از خط استفاده می‌کنیم. در این صورت به دست می‌آید.

مسئله ۱۵

فاصله نقطه $(1, 1)$ از خط $12(x+4) = 5(y-2)$ چقدر است؟

راه‌حل

ابتدا معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$12(x+4) = 5(y-2) \Rightarrow 12x + 48 = 5y - 10 \Rightarrow 12x - 5y + 58 = 0$$

$$\frac{|12 \times 1 - 5 \times 1 + 58|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{65}{13} = 5$$

بنابراین فاصله نقطه $(1, 1)$ از این خط برابر است با ۵.

تست

۸ طول عمود وارد از نقطه $(3, 1)$ بر خط $4x + 3y + 20 = 0$ چقدر است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه‌حل

طول عمود وارد از نقطه $(3, 1)$ بر خط $4x + 3y + 20 = 0$ در حقیقت فاصله این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|4 \times 3 + 3 \times 1 + 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{35}{5} = 7$$

مسئله ۱۶

فاصله نقطه $(4, 1)$ از خط $2x - 3y + c = 0$ برابر $\sqrt{13}$ است. مقدار c را پیدا کنید.

راه حل

فاصله نقطه $(4, 1)$ از خط $2x - 3y + c = 0$ برابر است با

$$\frac{|2 \times 4 - 3 \times 1 + c|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{|c+5|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |c+5| = 13 \Rightarrow c+5 = \pm 13 \Rightarrow c = 8, c = -18$$

مسئله ۱۷

معادله خط‌های راستی را بنویسید که شیب آن‌ها برابر -1 و فاصله مبدأ از آن‌ها برابر 5 است.

راه حل

فرض کنید خط $ax + by + c = 0$ ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد، چون شیب این خط -1 است، پس $-\frac{a}{b} = -1$ ، در نتیجه $a = b$.

از طرف دیگر، چون فاصله مبدأ از این خط برابر با 5 است، پس

$$\frac{|a \times 0 + a \times 0 + c|}{\sqrt{a^2 + a^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{2}|a|} = 5 \Rightarrow |c| = 5\sqrt{2}|a| \Rightarrow c = \pm 5\sqrt{2}a$$

بنابراین خط‌های مورد نظر $ax + ay + 5\sqrt{2}a = 0$ و $ax + ay - 5\sqrt{2}a = 0$ هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت $x + y + 5\sqrt{2} = 0$ و $x + y - 5\sqrt{2} = 0$ نوشت.

مسئله ۱۸

نقطه‌های روی خط $y = x$ را که فاصله آن‌ها از خط $4x + 3y - 1 = 0$ برابر 5 است پیدا کنید.

راه حل

هر نقطه روی خط $y = x$ به صورت (a, a) است. اگر فاصله این نقطه تا خط $4x + 3y - 1 = 0$ برابر 5 باشد، آن‌گاه

$$\frac{|4a + 3a - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|7a - 1|}{5} = 5 \Rightarrow |7a - 1| = 25 \Rightarrow 7a - 1 = \pm 25 \Rightarrow a = -\frac{24}{7}, a = \frac{26}{7}$$

بنابراین نقطه‌های مورد نظر $(-\frac{24}{7}, -\frac{24}{7})$ و $(\frac{26}{7}, \frac{26}{7})$ هستند.

مسئله ۱۹

معادله خط‌های راستی را بنویسید که از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرند و فاصله نقطه‌های $(5, -1)$ و $(3, 7)$ از آن‌ها برابر است.

راه حل

معادله خط راستی که از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرد به صورت $y - 3 = m(x + 2)$ یعنی $mx - y + 2m + 3 = 0$ است. فاصله نقطه

$(5, -1)$ از این خط برابر است با $\frac{|m \times 5 - (-1) + 2m + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|7m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}}$. فاصله نقطه $(3, 7)$ از خط مورد نظر برابر است با

$$\frac{|m \times 3 - 7 + 2m + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|5m - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

اگر این دو فاصله برابر باشند، آن‌گاه

$$|7m + 4| = |5m - 4| \Rightarrow 7m + 4 = \pm(5m - 4) \Rightarrow m = 0, m = -4$$

بنابراین خط‌های مورد نظر $y - 3 = 0$ و $y - 3 = -4(x + 2)$ یعنی $4x + y + 5 = 0$ هستند.

مسئله ۲۰

مساحت مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(2, 3)$ ، $(4, -1)$ و $(1, 2)$ هستند چقدر است؟

راه حل

معادله خط راستی که رأس‌های $(2, 3)$ و $(1, 2)$ روی آن قرار دارند به صورت زیر است:

$$y - 3 = \frac{3 - 2}{2 - 1}(x - 2) \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

فاصله رأس $(4, -1)$ تا این خط که برابر طول ارتفاع وارد از این رأس است، برابر است با $\frac{|4 - (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$. فاصله رأس‌های $(2, 3)$

و $(1, 2)$ هم برابر است با $\sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$. بنابراین مساحت مثلث برابر است با $\frac{1}{2} \times \frac{6}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 3$.

تست ۹

 قرینه نقطه $(۳, ۸)$ نسبت به خط $x + ۳y - ۷ = ۰$ کدام نقطه است؟

- (۱)
- $(-۱, -۴)$
- (۲)
- $(-۳, -۸)$
- (۳)
- $(۱, -۴)$
- (۴)
- $(۳, ۸)$

راه حل

 فرض کنید A نقطه $(۳, ۸)$ باشد و نقطه $A'(a, b)$ قرینه A نسبت به خط $x + ۳y - ۷ = ۰$ باشد. وسط پاره خط AA' نقطه

 است که چون روی خط $x + ۳y - ۷ = ۰$ قرار دارد، پس

$$\frac{۳+a}{۲} + ۳ \frac{۸+b}{۲} - ۷ = ۰ \Rightarrow a + ۳b = -۱۳ \quad (۱)$$

 از طرف دیگر، خط $x + ۳y - ۷ = ۰$ بر خط راستی که از A و A' می‌گذرد عمود است، در نتیجه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است. بنابراین

$$\frac{۸-b}{۳-a} \times \left(-\frac{۱}{۳}\right) = -۱ \Rightarrow ۸-b = ۳(۳-a) \Rightarrow ۳a - b = ۱ \quad (۲)$$

 از تساوی‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید $a = -۱$ و $b = -۴$. بنابراین A' نقطه $(-۱, -۴)$ است.

 فرض کنید l_1 و l_2 دو خط موازی با معادله‌های $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ باشند. فاصله دو خط موازی همه جا یکسان

 است، پس فاصله این دو خط برابر با فاصله نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) روی خط l_1 تا خط l_2 است. پس می‌توان نتیجه گرفت که فاصله

 l_1 و l_2 برابر است با $\frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. از طرف دیگر، چون (x_0, y_0) نقطه‌ای روی خط $ax + by + c = 0$ است، پس مختصات

 آن در این معادله صدق می‌کند. بنابراین $ax_0 + by_0 + c = 0$ ، یعنی $ax_0 + by_0 = -c$. به این ترتیب،

$$\text{فاصله } l_1 \text{ و } l_2 = \frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

 فاصله خط‌های موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

نتیجه
مسئله ۲۱

 فاصله خط‌های $۳x + ۴y = ۹$ و $۶x + ۸y = ۱۵$ چقدر است؟

راه حل

 ابتدا دو طرف معادله خط $۳x + ۴y = ۹$ را در ۲ ضرب می‌کنیم تا به صورت $۶x + ۸y = ۱۸$ دربیایم. اکنون معادله خط‌ها را به صورت

 $۶x + ۸y - ۱۸ = ۰$ و $۶x + ۸y - ۱۵ = ۰$ می‌نویسیم. در این صورت، فاصله خط‌ها برابر است با

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-۱۸ - (-۱۵)|}{\sqrt{۶^2 + ۸^2}} = \frac{|-۳|}{\sqrt{۱۰۰}} = \frac{۳}{۱۰}$$

مسئله ۲۲

 دو ضلع مربعی روی خط‌های $۵x - ۱۲y - ۶۵ = ۰$ و $۵x - ۱۲y + ۲۶ = ۰$ هستند. مساحت این مربع چقدر است؟

راه حل

 طول ضلع مربع مورد نظر فاصله خط‌های $۵x - ۱۲y - ۶۵ = ۰$ و $۵x - ۱۲y + ۲۶ = ۰$ است. فاصله این دو خط برابر است با

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-۶۵ - ۲۶|}{\sqrt{۵^2 + ۱۲^2}} = \frac{۹۱}{۱۳} = ۷$$

 بنابراین مساحت مربع برابر است با $۷^2 = ۴۹$.

مسئله ۲۳

 معادله خط راستی را بنویسید که با خط‌های $۹x + ۶y - ۷ = ۰$ و $۳x + ۲y + ۴ = ۰$ موازی است و فاصله‌اش از این خط‌ها برابر است.

راه حل

 ابتدا خط‌های داده شده را به صورت $d_1: ۹x + ۶y - ۷ = ۰$ و $d_2: ۳x + ۲y + ۴ = ۰$ می‌نویسیم. فرض کنید معادله خط مورد نظر

 به صورت $۹x + ۶y + c = ۰$ باشد. چون فاصله این خط از d_1 و d_2 برابر است، پس

$$\frac{|c - (-۷)|}{\sqrt{۹^2 + ۶^2}} = \frac{|c - ۱۲|}{\sqrt{۹^2 + ۶^2}} \Rightarrow |c + ۷| = |c - ۱۲| \Rightarrow c + ۷ = \pm(c - ۱۲) \Rightarrow c = \frac{۵}{۲}$$

 بنابراین معادله خط مورد نظر $۹x + ۶y + \frac{۵}{۲} = ۰$ یا $۱۸x + ۱۲y + ۵ = ۰$ است.

مسئله ۲۴

راه حل

معادله خط‌های راستی را بنویسید که با خط $4x - 3y - 15 = 0$ موازی هستند و فاصله آن‌ها از این خط برابر ۳ است.

چون خط مورد نظر با خط $4x - 3y - 15 = 0$ موازی است، معادله آن به صورت $4x - 3y + c = 0$ است. چون فاصله این خط‌ها برابر با ۳ است، پس

$$\frac{|c - (-15)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|c + 15|}{5} = 3 \Rightarrow |c + 15| = 15 \Rightarrow c + 15 = \pm 15 \Rightarrow c = 0, \quad c = -30$$

بنابراین خط‌های مورد نظر $4x - 3y = 0$ و $4x - 3y - 30 = 0$ هستند.

تمرین

- ۱- نقطه‌ای روی محور x پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(7, 6)$ و $(-3, 4)$ برابر باشد.
- ۲- نقطه‌ای روی محور y پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(-5, -2)$ و $(3, 2)$ برابر باشد.
- ۳- نقطه $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ پاره‌خط میان نقطه‌های $(3, -5)$ و $(-7, 9)$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟
- ۴- محیط مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(0, 0)$ ، $(4, 3)$ و $(0, 3)$ هستند، چقدر است؟
- ۵- نوع مثلثی را که رأس‌هایش نقطه‌های $(\sqrt{3}, 1)$ ، $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $(1, \sqrt{3})$ هستند، مشخص کنید.
- ۶- ثابت کنید مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(15, 5)$ ، $(5, 5)$ و $(10, 15)$ هستند، متساوی‌الساقین است.
- ۷- مقادیر a را طوری پیدا کنید که فاصله نقطه‌های $(3, 8)$ و $(a, 2)$ برابر با ۸ باشد.
- ۸- مقادیر a را طوری تعیین کنید که اگر A ، B و C به ترتیب نقطه‌های $(-1, 6)$ ، $(1, 3)$ و $(a, 8)$ باشند، طول پاره‌خط‌های AB و BC برابر باشد.
- ۹- روی خط $x - 2y - 4 = 0$ نقطه‌ای را پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌های $(5, -1)$ و $(2, -4)$ برابر باشد.
- ۱۰- ثابت کنید نقطه‌های $A(a, a)$ ، $B(-a, -a)$ و $C(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ رأس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند.
- ۱۱- نقطه‌های $A(3, 3)$ و $B(-1, 1)$ دو رأس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هستند. رأس C را معین کنید.
- ۱۲- مرکز دایره‌ای نقطه $(-2, 5)$ است. مختصات سر دیگر قطری را که از نقطه $(2, 3)$ روی این دایره می‌گذرد پیدا کنید.
- ۱۳- نقطه C وسط پاره‌خط AB است. اگر وسط پاره‌خط میان نقطه‌های C و $(4, 3)$ نقطه $(1, 1)$ باشد و A نقطه $(3, -1)$ باشد، مختصات نقطه B را پیدا کنید.
- ۱۴- در مثلث ABC که رأس‌هایش نقطه‌های $A(-1, 3)$ ، $B(1, -1)$ و $C(5, 1)$ هستند، طول میانه وارد از رأس A چقدر است؟
- ۱۵- ضلع‌های مثلث ABC روی خط‌های به معادله‌های $AB: y = x + 1$ ، $AC: y = -x + 1$ و $BC: y = 2x - 3$ قرار دارند. طول میانه CM چقدر است؟
- ۱۶- نقطه‌های $(3, 5)$ و $(-3, -3)$ وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC هستند. طول ضلع BC چقدر است؟
- ۱۷- نقطه‌های $A(1, 3)$ ، $B(2, 0)$ و $C(5, 1)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس D را پیدا کنید.
- ۱۸- اگر نقطه‌های $(3, 2)$ و $(-1, 0)$ دو رأس متوازی‌الاضلاعی باشند که قطرهایش در نقطه $(2, -5)$ متقاطع‌اند، رأس‌های دیگر این متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.
- ۱۹- شیب خط راستی که از مبدأ و وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(0, -4)$ و $(8, 0)$ می‌گذرد چقدر است؟
- ۲۰- اگر $(a+1, 2)$ ، $(1, a+2)$ و $(\frac{1}{a+1}, \frac{2}{a+1})$ سه نقطه متمایز باشند که روی یک خط راست قرار دارند، مقدار a چقدر است؟

- ۲۱- وسط پاره‌خطی که نقطه‌های برخورد خط راست l با محورهای مختصات را به هم وصل می‌کند، نقطه $(3, 2)$ است. معادله خط l را بنویسید.
- ۲۲- معادله خط راستی را بنویسید که پاره‌خط میان نقطه‌های $(5, 4)$ و $(-7, 0)$ و نیز پاره‌خط میان نقطه‌های $(6, -5)$ و $(0, -3)$ را نصف می‌کند.
- ۲۳- محور x پاره‌خط میان نقطه‌های $(-3, -4)$ و $(1, -2)$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟
- ۲۴- نقطه‌های $A(2, 1)$ ، $B(-2, 3)$ و $C(4, 5)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. معادله خط راستی که میانه نظیر رأس C روی آن قرار دارد و طول این میانه را پیدا کنید.
- ۲۵- معادله خط راستی را که از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد و بر خط $3x + 4y + 5 = 0$ عمود است بنویسید.
- ۲۶- معادله خط راستی را بنویسید که بر خط $4x - y + 8 = 0$ عمود باشد و از وسط پاره‌خط میان دو نقطه $(1, 5)$ و $(3, 11)$ بگذرد.
- ۲۷- معادله خط راستی را بنویسید که از وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(2, -19)$ و $(6, 1)$ می‌گذرد و بر خط راستی که از نقطه‌های $(-1, 3)$ و $(5, -1)$ می‌گذرد عمود است.
- ۲۸- معادله خط راستی را بنویسید که بر خط $x - 7y + 5 = 0$ عمود است و طول از مبدأ آن ۳ است.
- ۲۹- نقطه $(-4, 5)$ یکی از رأس‌های مربعی است که یکی از قطرهایش روی خط راست $7x - y + 8 = 0$ قرار دارد. معادله خط راستی را که قطر دیگر روی آن است بنویسید.
- ۳۰- نقطه‌های $A(-1, 5)$ ، $B(0, 0)$ و $C(2, 2)$ رأس‌های مثلث ABC هستند و D وسط ضلع BC است. معادله خط راستی را بنویسید که از B می‌گذرد و بر AD عمود است.
- ۳۱- معادله عمودمنصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(1, 1)$ و $(5, 7)$ را بنویسید.
- ۳۲- پای عمود وارد از مبدأ بر خط راست l نقطه $(-2, 9)$ است. معادله خط l را بنویسید.
- ۳۳- کدامیک از خط‌های $x - y + 3 = 0$ و $x - 4y - 7 = 0$ از مبدأ دورتر است؟
- ۳۴- فاصله نقطه $(4, 2)$ از خط راستی که از نقطه‌های $(4, 1)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد چقدر است؟
- ۳۵- معادله خط راستی را بنویسید که از نقطه $(0, 1)$ می‌گذرد و فاصله نقطه $(2, 2)$ از آن برابر با ۱ است.
- ۳۶- معادله خط‌های راستی را بنویسید که بر خط $2x + y = 0$ عمودند و فاصله مبدأ از آن‌ها برابر $\sqrt{5}$ است.
- ۳۷- در مثلث ABC با رأس‌های $A(3, 1)$ ، $B(-1, 4)$ و $C(2, -3)$ ، طول ارتفاع وارد بر BC چقدر است؟
- ۳۸- دو ضلع از مستطیلی روی خط‌های $3x - 2y - 5 = 0$ و $2x + 3y + 6 = 0$ هستند و نقطه $(-2, 1)$ یک رأس از این مستطیل است. مساحت این مستطیل چقدر است؟
- ۳۹- نقطه‌های روی خط $x + y + 3 = 0$ را که فاصله آن‌ها از خط $x + 2y + 2 = 0$ برابر $\sqrt{5}$ است پیدا کنید.
- ۴۰- مساحت مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(2, 7)$ ، $(3, -1)$ و $(-5, 6)$ هستند چقدر است؟
- ۴۱- اگر نقطه $(-2, 6)$ قرینه نقطه $(4, 2)$ نسبت به خط راست l باشد، معادله خط l را بنویسید.
- ۴۲- قرینه نقطه $(4, -13)$ را نسبت به خط $5x + y + 6 = 0$ پیدا کنید.
- ۴۳- فاصله خط‌های $3x - 4y = 8$ و $6x - 8y + 5 = 0$ چقدر است؟
- ۴۴- ثابت کنید فاصله خط $5x - 2y - 1 = 0$ تا خط‌های $5x - 2y - 9 = 0$ و $5x - 2y + 7 = 0$ برابر است.
- ۴۵- معادله خط‌های راستی را بنویسید که با خط $5x - 12y + 26 = 0$ موازی هستند و فاصله آن‌ها از این خط برابر ۴ است.

- ۱- اگر A و B و C نقاطی روی محور طول‌ها باشند و $x_A = m-1$ ، $x_B = 2m$ ، $x_C = 3m+1$ و $2AB - BC = 3$ ، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟
- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳
- ۲- نقطه وسط پاره خط میان نقطه‌های (۲، ۳) و (-۴، ۵) کدام است؟
- (۱) (۳، -۴) (۲) (-۳، ۴) (۳) (-۱، ۴) (۴) (-۱، ۱)
- ۳- نقطه $M(4, -3)$ وسط پاره خط میان نقطه‌های $A(m+1, 2)$ و $B(3, m+n)$ است. مقدار mn کدام است؟
- (۱) -۳۲ (۲) -۳۶ (۳) -۴۸ (۴) -۵۲
- ۴- نقاط $A(2, 3)$ ، $B(3, 4)$ و $C(4, 2)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. مختصات رأس D کدام است؟
- (۱) (۳، ۱) (۲) (-۱، ۲) (۳) (-۲، ۳) (۴) (-۳، -۱)
- ۵- نقطه‌های $(2, a)$ ، $(1, 4)$ ، $(b, 3)$ و $(3, 2)$ رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع هستند. مقدار $a-b$ چقدر است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶- نقطه‌های $A(-1, 2)$ ، $B(2, 1)$ و $C(0, 4)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. معادله میانه‌ای که از رأس B می‌گذرد کدام است؟
- (۱) $5y + 4x = 13$ (۲) $5y - 4x = 13$ (۳) $5y + 4x = -13$ (۴) $5y - 4x = -13$
- ۷- اگر A و B نقطه‌های $(2, 1)$ و $(4, -3)$ باشند. فاصله وسط پاره خط AB از مبدأ مختصات کدام است؟
- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $\sqrt{15}$ (۴) $\sqrt{20}$
- ۸- طول میانه‌ای که از رأس A در مثلث ABC با رأس‌های $A(4, 7)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(3, 4)$ می‌گذرد چقدر است؟
- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۹- اگر فاصله نقطه $(a, a\sqrt{3})$ از مبدأ مختصات برابر ۶ باشد، مقدار a کدام است؟
- (۱) ± 2 (۲) ± 3 (۳) ± 1 (۴) ± 5
- ۱۰- فاصله دو نقطه $A(-2m, m)$ و $B(3m, -m)$ برابر $\sqrt{58}$ است. m کدام است؟
- (۱) ± 2 (۲) $\pm \sqrt{2}$ (۳) $\pm \sqrt{8}$ (۴) ± 4
- ۱۱- نقطه‌های $A(\frac{1}{2}, -3)$ و $B(a, 2a)$ مفروض‌اند. اگر طول پاره خط AB برابر با $\frac{\sqrt{13}}{2}$ باشد. مجموع مقادیر ممکن a چقدر است؟
- (۱) $-\frac{11}{5}$ (۲) $\frac{9}{5}$ (۳) $\frac{11}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}$
- ۱۲- نقاط $A(1, 4)$ ، $B(k, 5)$ و $C(4, 1)$ در صفحه مختصات مفروض هستند. اگر $AB = BC$ ، مقدار k کدام است؟
- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۴ (۴) -۴
- ۱۳- اگر A و B نقطه‌های $(a, 2)$ و $(1, a)$ باشند و فاصله نقطه M، وسط پاره خط AB، از مبدأ مختصات برابر ۲ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟
- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۴- نقاط $A(-3, 6)$ ، $B(-7, -3)$ و $C(2, 1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. نوع مثلث کدام است؟
- (۱) قائم‌الزاویه (۲) متساوی‌الساقین (۳) متساوی‌الاضلاع (۴) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

- ۱۵- عرض نقطه‌ای روی محور y که از نقطه‌های $(-۴, ۰)$ و $(۹, ۵)$ به یک فاصله است، چقدر است؟
- (۱) $\frac{۲۴}{۱۳}$ (۲) $-\frac{۴۵}{۱۳}$ (۳) ۹ (۴) -۱۲
- ۱۶- فاصله کدام نقطه روی خط $y=x$ از دو نقطه $A(۱, ۲)$ و $B(۲, ۵)$ برابر است؟
- (۱) $(\frac{۷}{۲}, \frac{۷}{۲})$ (۲) $(۳, ۳)$ (۳) $(۴, ۴)$ (۴) $(\frac{۹}{۲}, \frac{۹}{۲})$
- ۱۷- طول نقطه‌ای که روی خط $y=-2x+5$ است و فاصله‌اش تا نقطه‌های $(-۱, ۲)$ و $(۱, ۴)$ برابر است چقدر است؟
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲
- ۱۸- خطوط $2x-ay=1$ و $a^2x-4y=3$ برهم عمودند. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲
- ۱۹- اگر خط‌های $3x-ky+6=0$ و $(k-5)x+2y-4=0$ بر هم عمود باشند، مقدار k چقدر است؟
- (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) -۱۵ (۴) ۱۵
- ۲۰- اگر در مثلث ABC با رأس‌های $A(۳, -۵)$ ، $B(۲, ۱)$ و $C(m, ۲)$ زاویه B قائمه باشد، مقدار m چقدر است؟
- (۱) -۱۰ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) -۸
- ۲۱- معادله خط راستی که از نقطه $(-۱, -۲)$ می‌گذرد و بر خط $3x+8y=12$ عمود است کدام است؟
- (۱) $8x-3y+2=0$ (۲) $8x-3y-2=0$ (۳) $3x-8y+2=0$ (۴) $3x-8y-2=0$
- ۲۲- معادله خط راستی که از نقطه $(۰, -۵)$ می‌گذرد و بر خط راستی که از نقطه‌های $(-۱, ۶)$ و $(-۲, -۳)$ می‌گذرد عمود است کدام است؟
- (۱) $x+9y+45=0$ (۲) $x+9y-45=0$ (۳) $-x+9y+45=0$ (۴) $x-9y+45=0$
- ۲۳- خط‌های $ax+2y-4=0$ و $2x+by+6=0$ بر هم عمودند و یکدیگر را روی محور y قطع می‌کنند. مقدار ab چقدر است؟
- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) -۹ (۴) -۸
- ۲۴- اگر خط‌های $3x+y=4$ ، $x-ay=7$ و $bx+2y=-5$ سه ضلع متوالی یک مستطیل باشند، مقدار $a+b$ چقدر است؟
- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷
- ۲۵- معادله ارتفاع وارد از رأس A در مثلث ABC با رأس‌های $A(-۲, ۴)$ ، $B(۲, ۱)$ و $C(-۱, -۳)$ کدام است؟
- (۱) $3x+4y-10=0$ (۲) $3x+4y+10=0$ (۳) $4x+3y-10=0$ (۴) $4x+3y+10=0$
- ۲۶- نقطه $(m, m-4)$ روی عمود منصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۳, ۱۰)$ و $(-۹, -۲)$ است. مقدار m چقدر است؟
- (۱) $\frac{۱۰}{۳}$ (۲) -۲ (۳) $-\frac{۱۰}{۳}$ (۴) ۲
- ۲۷- معادله عمود منصف پاره‌خط میان نقطه‌های $(-۵, ۲)$ و $(-۷, -۴)$ کدام است؟
- (۱) $x+3y-9=0$ (۲) $3x+y-9=0$ (۳) $x+3y+9=0$ (۴) $3x+y+9=0$
- ۲۸- نقطه‌های $(۴, ۴)$ و $(۲, -۲)$ نسبت به خط $x+ky-6=0$ قرینه یکدیگرند. مقدار k چقدر است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۹- فاصله مبدأ مختصات از خط $\frac{x}{9}+\frac{y}{12}=1$ چقدر است؟
- (۱) $\frac{۲۴}{۵}$ (۲) $\frac{۳۶}{۵}$ (۳) $\frac{۱۲}{۵}$ (۴) $\frac{۴۸}{۵}$
- ۳۰- اگر $A(۱, ۲)$ ، $B(-۲, ۱)$ و $C(۰, ۲)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، اندازه ارتفاع AH کدام است؟
- (۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (۲) $\frac{1}{۲}$ (۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ (۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$
- ۳۱- فاصله نقطه $A(k, ۲)$ از خط $x+2y-1=0$ برابر $2\sqrt{5}$ است. مقدارهای k کدام هستند؟
- (۱) -۷ یا ۱۳ (۲) -۱۴ یا ۴ (۳) -۱۳ یا ۷ (۴) -۱۴ یا ۶

۳۲- فاصله نقطه $(\frac{1}{p}, k)$ از خط $12x + 9y = 1$ برابر ۲ است. مجموع مقادیرهای مختلف k چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $-\frac{5}{9}$ (۴) $-\frac{1}{9}$

۳۳- فاصله مبدأ مختصات از خط راستی که بر خط به معادله $2y + x = 1$ عمود است و از نقطه $(-1, 2)$ می‌گذرد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{17}}$ (۴) $\frac{4}{\sqrt{17}}$

۳۴- شیب خط راستی که از نقطه $A(-2, 1)$ می‌گذرد و فاصله‌اش از نقطه $B(3, 1)$ برابر ۴ است کدام است؟

- (۱) $\pm \frac{4}{3}$ (۲) $\pm \frac{2}{3}$ (۳) $\pm \frac{4}{5}$ (۴) $\pm \frac{3}{5}$

۳۵- فاصله نقطه $A(k, -1)$ از خط $y = 2x + k$ دو برابر فاصله A از خط $y = x - 1$ است. مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ یا 1 (۲) $-\frac{3}{5}$ یا -1 (۳) $-\frac{3}{5}$ یا 1 (۴) $\frac{3}{5}$ یا -1

۳۶- خط $6x + 8y + 1 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1, -1)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{20}$ (۲) $\frac{\pi}{40}$ (۳) $\frac{\pi}{50}$ (۴) $\frac{\pi}{100}$

۳۷- ضلع BC از مربع $ABCD$ روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ است و A نقطه $(2, -3)$ است. مساحت این مربع چقدر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۴۹

۳۸- معادله یک قطر مربعی $x + y - 4 = 0$ و مختصات یک رأس آن $(3, 2)$ است. محیط مربع کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $4\sqrt{2}$

۳۹- فاصله خط‌های $x - 2y + 5 = 0$ و $3x - 6y + 9 = 0$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۴۰- مساحت مربعی که دو ضلع آن روی خطوط $y = \frac{1}{3}x + 1$ و $x - 2y + 4 = 0$ قرار دارند، کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{5}$ (۲) $\frac{9}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۵

۴۱- فاصله دو خط موازی $x - 4y + c = 0$ و $3x - 12y + 9 = 0$ برابر $\sqrt{17}$ است. کوچک‌ترین مقدار c کدام است؟

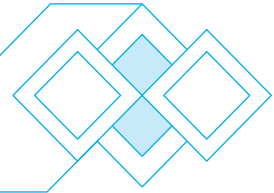
- (۱) ۶ (۲) -۴ (۳) -۱۴ (۴) -۲۰

۴۲- فاصله خط‌های موازی $3x + 4y = 6$ و $4x - ky + 4 = 0$ برابر m است. مقدار $k + m$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{9}{15}$ (۲) $-\frac{27}{5}$ (۳) $-\frac{53}{15}$ (۴) $\frac{44}{15}$

۴۳- فاصله کدام خط از خط $3x + 4y + 10 = 0$ برابر ۴ است؟

- (۱) $3x + 4y = 10$ (۲) $3x + 4y = 30$ (۳) $3x + 4y = 20$ (۴) $3x + 4y = 15$



۱ اگر این نقطه را $(a, 0)$ فرض کنیم، آن‌گاه

$$\sqrt{(a-7)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(a+3)^2 + (0-4)^2}$$

$$(a-7)^2 + 36 = (a+3)^2 + 16$$

$$a^2 - 14a + 49 + 36 = a^2 + 6a + 9 + 16 \Rightarrow 20a = 60 \Rightarrow a = 3$$

پس نقطه مورد نظر $(3, 0)$ است.

۲ اگر این نقطه را $(0, a)$ فرض کنیم، آن‌گاه

$$\sqrt{(0+5)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (a-2)^2}$$

$$25 + a^2 + 4a + 4 = 9 + a^2 - 4a + 4 \Rightarrow 8a = -16 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین $(0, -2)$ نقطه مورد نظر است.

۳ ابتدا فاصله نقطه $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ از نقطه‌های $B(3, -5)$ و $C(-7, 9)$ را حساب می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{\left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-5 + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{74}}{2}$$

$$AC = \sqrt{\left(-7 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(9 + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{4} + \frac{441}{4}} = \frac{\sqrt{666}}{2}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{666}}{\sqrt{74}} = \sqrt{9} = 3$$

پس پاره‌خط BC توسط نقطه A به نسبت ۱ به ۳ تقسیم شده است.

۴ فاصله نقطه‌های $O(0, 0)$ ، $A(4, 3)$ و $B(0, 3)$ را حساب می‌کنیم.

$$OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad OB = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3, \quad AB = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

بنابراین محیط مثلث برابر است با $5 + 3 + 4 = 12$.

۵ فاصله نقطه‌های $A(\sqrt{3}, 1)$ ، $B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $C(1, \sqrt{3})$ را حساب می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2}$$

$$AC = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (1 - \sqrt{3})^2}$$

$$BC = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2}$$

بنابراین $AB = BC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۶ اگر $A(15, 5)$ ، $B(5, 5)$ و $C(10, 15)$ رأس‌های مثلث ABC

باشند، اندازه ضلع‌های مثلث را حساب می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(15-5)^2 + (5-5)^2} = 10$$

$$AC = \sqrt{(15-10)^2 + (5-15)^2} = \sqrt{125}$$

$$BC = \sqrt{(5-10)^2 + (5-15)^2} = \sqrt{125}$$

بنابراین $BC = AC$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۷ فاصله دو نقطه برابر است با $\sqrt{(a-3)^2 + (2-8)^2}$. بنابراین

$$\sqrt{(a-3)^2 + (-6)^2} = 8 \Rightarrow (a-3)^2 + 36 = 64$$

$$(a-3)^2 = 28 \Rightarrow a-3 = \pm\sqrt{28} \Rightarrow a = 3 \pm\sqrt{28}$$

۸ ابتدا طول پاره‌خط‌های AB و BC را حساب می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(1-6)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{41}$$

$$BC = \sqrt{(a-1)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 25}$$

بنابراین

$$AB = BC \Rightarrow (a-1)^2 + 25 = 41 \Rightarrow (a-1)^2 = 16$$

$$\begin{cases} a-1=4 \\ a-1=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ a=-3 \end{cases}$$

۹ اگر این نقطه $A(a, b)$ باشد، فاصله‌اش را از نقطه‌های $B(5, -1)$

و $C(2, -4)$ حساب می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(a-5)^2 + (b+1)^2}, \quad AC = \sqrt{(a-2)^2 + (b+4)^2}$$

بنابراین

$$AB = AC \Rightarrow (a-5)^2 + (b+1)^2 = (a-2)^2 + (b+4)^2$$

$$a^2 - 10a + 25 + b^2 + 2b + 1 = a^2 - 4a + 4 + b^2 + 8b + 16$$

$$6a + 6b = 6 \Rightarrow a = 1 - b$$

اکنون توجه کنید که $A(a, b)$ روی خط $x - 2y - 4 = 0$ است، پس

$$a - 2b - 4 = 0 \Rightarrow 1 - b - 2b - 4 = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین $A(2, -1)$ نقطه مورد نظر است.

۱۰ طول ضلع‌های مثلث ABC را حساب می‌کنیم.

$$AB = \sqrt{(-a-a)^2 + (-a-a)^2} = \sqrt{2}a^2$$

$$AC = \sqrt{(-a\sqrt{3}-a)^2 + (a\sqrt{3}-a)^2} = \sqrt{2}a^2$$

$$BC = \sqrt{(-a\sqrt{3}+a)^2 + (a\sqrt{3}+a)^2} = \sqrt{2}a^2$$

بنابراین $AB = AC = BC$ و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۱ فرض می‌کنیم $C(a, b)$ رأس سوم مثلث باشد، در این صورت

می‌توان نوشت

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}, \quad AC = \sqrt{(a-3)^2 + (b-3)^2}$$

$$BC = \sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2}$$

پس

$$AC = BC \Rightarrow (a-3)^2 + (b-3)^2 = (a+1)^2 + (b-1)^2$$

$$a^2 - 6a + 9 + b^2 - 6b + 9 = a^2 + 2a + 1 + b^2 - 2b + 1$$

$$2a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - 2a$$

از طرف دیگر،

$$AC=AB \Rightarrow (a-3)^2 + (b-3)^2 = 20$$

$$(a-3)^2 + (4-2a-3)^2 = 20$$

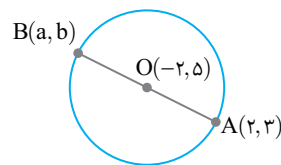
$$a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 4a + 1 = 20 \Rightarrow 5a^2 - 10a - 10 = 0$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1+\sqrt{3} \Rightarrow b=2-2\sqrt{3} \\ a=1-\sqrt{3} \Rightarrow b=2+2\sqrt{3} \end{cases}$$

چون O وسط AB است، پس **۱۲**

$$-2 = \frac{2+a}{2} \Rightarrow a = -6, \quad 5 = \frac{3+b}{2} \Rightarrow b = 7$$

پس B(-6, 7) سر دیگر قطر است.



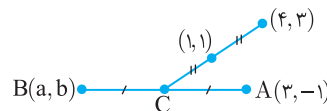
با توجه به شکل زیر **۱۳**

$$1 = \frac{x_C + 4}{2} \Rightarrow x_C = -2, \quad 1 = \frac{y_C + 3}{2} \Rightarrow y_C = -1$$

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{3+a}{2} \Rightarrow a = -7$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-1+b}{2} \Rightarrow b = -1$$

پس B(-7, -1) نقطه مطلوب است.



ابتدا نقطه M وسط ضلع BC را معین می کنیم. **۱۴**

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

اکنون طول میانه AM را حساب می کنیم.

$$AM = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = 5$$

ابتدا مختصات سه رأس مثلث را حساب می کنیم. کافی است توجه کنیم که خطهای داده شده در چه نقطههایی یکدیگر را قطع می کنند. **۱۵**

$$\begin{cases} AB: y = x + 1 \\ AC: y = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = -x + 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$$

یعنی مختصات رأس A به صورت (0, 1) است. به همین ترتیب

$$\begin{cases} AB: y = x + 1 \\ BC: y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = 2x - 3 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow B(4, 5)$$

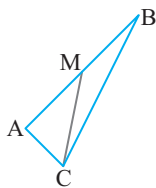
$$\begin{cases} AC: y = -x + 1 \\ BC: y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow -x + 1 = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

اکنون مختصات M وسط AB را حساب می کنیم:

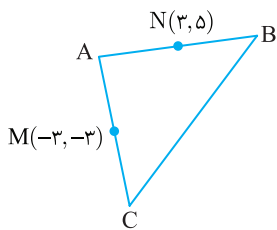
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$

فاصله نقطه‌های C و M برابر طول میانه CM است.



$$CM = \sqrt{\left(2-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(3+\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{3}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 4}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{26}$$

طول ضلع BC دو برابر طول پاره‌خط MN است. پس **۱۶**



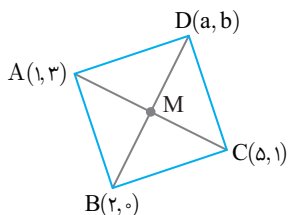
$$BC = 2MN = 2\sqrt{(3+3)^2 + (5+3)^2} = 20$$

چون M وسط قطرها AC و BD است، پس **۱۷**

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 1+5 = 2+x_D \Rightarrow x_D = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 3+1 = 0+y_D \Rightarrow y_D = 4$$

پس D(4, 4) رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است.



ابتدا توجه کنید که چون (2, -5) وسط پاره‌خطی که نقطه‌های **۱۸**

(3, 2) و (-1, 0) را به هم وصل می کند، نیست پس این نقطه‌ها دو رأس مقابل متوازی‌الاضلاع نیستند و دو رأس مجاور هستند. مطابق شکل،

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-1+x_C}{2} \Rightarrow x_C = 5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow -5 = \frac{0+y_C}{2} \Rightarrow y_C = -10$$

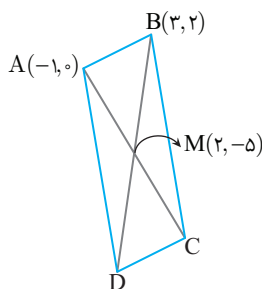
$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 2 = \frac{3+x_D}{2} \Rightarrow x_D = 1$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow -5 = \frac{2+y_D}{2} \Rightarrow y_D = -12$$

پس نقطه‌های C(5, -10) و

D(1, -12) رأس‌های دیگر

متوازی‌الاضلاع هستند.



$$\frac{\sqrt{8^0}}{\sqrt{2^0}} = 2$$

نسبت این فاصله‌ها برابر است با ۲ تقسیم می‌کند.

یعنی محور x پاره‌خط مدنظر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند.

۲۴ میانه نظیر رأس C از وسط ضلع AB می‌گذرد. وسط ضلع AB ،

وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(2, 1)$ و $(-2, 3)$ است که می‌شود نقطه

$$\left(\frac{2-2}{2}, \frac{1+3}{2}\right), \text{ یعنی نقطه } (0, 2).$$

معادله خطی که از نقطه‌های $(0, 2)$ و $(4, 5)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-2 = \frac{2-5}{4-0}(x-0) \Rightarrow 3x-4y+8=0$$

طول میانه نظیر رأس C برابر با فاصله نقطه $C(4, 5)$ از نقطه $(0, 2)$ است.

$$\sqrt{(4-0)^2 + (5-2)^2} = 5$$

که برابر است با ۵

۲۵ شیب خط $3x+4y+5=0$ برابر با $-\frac{3}{4}$ است. در نتیجه، اگر شیب

خط مورد نظر برابر m باشد، باید $-\frac{3}{4} \times m = -1$ ، در نتیجه $m = \frac{4}{3}$ معادله

خطی که شیب آن $\frac{4}{3}$ است و از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-2 = \frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow 4x-3y+2=0$$

۲۶ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(1, 5)$ و $(3, 11)$ نقطه

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{11+5}{2}\right) \text{ یعنی } (2, 8) \text{ است. شیب خط } 4x-y+8=0 \text{ برابر با } 4$$

است. اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، باید $4m = -1$ ، در نتیجه

$m = -\frac{1}{4}$ معادله خطی که شیب آن $-\frac{1}{4}$ است و از نقطه $(2, 8)$ می‌گذرد

به صورت زیر است:

$$y-8 = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow x+4y-34=0$$

۲۷ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(2, -19)$ و $(6, 1)$ نقطه

$$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-19+1}{2}\right), \text{ یعنی } (4, -9) \text{ است. شیب خطی که از نقطه‌های}$$

$(-1, 3)$ و $(5, -1)$ می‌گذرد برابر است با $-\frac{2}{3}$. اگر شیب خط

مورد نظر برابر m باشد، باید $-\frac{2}{3}m = -1$ ، در نتیجه $m = \frac{3}{2}$ معادله

خطی که شیب آن $\frac{3}{2}$ است و از نقطه $(4, -9)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-(-9) = \frac{3}{2}(x-4) \Rightarrow 3x-2y-30=0$$

۲۸ شیب خط $x-7y+5=0$ برابر با $\frac{1}{7}$ است. اگر شیب خط مورد نظر

برابر m باشد، باید $\frac{1}{7} \times m = -1$ ، در نتیجه $m = -7$. چون طول از مبدأ خط

مورد نظر ۳ است، پس این خط از نقطه $(3, 0)$ می‌گذرد.

معادله خطی که شیب آن برابر -7 است و از نقطه $(3, 0)$ می‌گذرد به صورت

زیر است:

$$y-0 = -7(x-3) \Rightarrow 7x+y-21=0$$

۱۹ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(0, -4)$ و $(8, 0)$ نقطه

$\left(\frac{0+8}{2}, \frac{-4+0}{2}\right)$ یعنی $(4, -2)$ است. شیب خطی که از مبدأ، یعنی نقطه

$$(0, 0) \text{ و نقطه } (4, -2) \text{ می‌گذرد برابر است با } -\frac{1}{2}.$$

۲۰ اگر نقطه‌های A, B و C روی یک خط راست باشند، شیب خطی که از A و

B می‌گذرد، با شیب خطی که از B و C می‌گذرد برابر است. شیب خطی که از

نقطه‌های $(1, a+2)$ و $(a+1, 2)$ می‌گذرد برابر است با $-\frac{a+2-2}{1-(a+1)} = \frac{a}{-a} = -1$

(توجه کنید که چون نقطه‌ها متمایزند، پس $a \neq 0$ ، زیرا اگر $a = 0$ ، آن وقت

نقطه‌های $(1, a+2)$ و $(a+1, 2)$ یکسان می‌شوند.) شیب خطی که از

نقطه‌های $(1, a+2)$ و $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{2}{a+1}\right)$ می‌گذرد برابر است با

$$\frac{\frac{2}{a+1} - (a+2)}{\frac{1}{a+1} - 1} = \frac{2 - (a+1)(a+2)}{1 - (a+1)} = \frac{2 - (a^2 + 3a + 2)}{-a} = a + 3$$

در نتیجه باید $a + 3 = -1$ ، بنابراین $a = -4$.

۲۱ فرض کنید نقطه‌های برخورد خط l با محورهای مختصات نقطه‌های

$(a, 0)$ و $(0, b)$ باشند. در این صورت وسط پاره‌خط میان این نقطه‌ها، نقطه

$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ است. به این ترتیب

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = (3, 2) \Rightarrow a = 6, \quad b = 4$$

معادله خطی که از نقطه‌های $(6, 0)$ و $(0, 4)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-0 = \frac{0-4}{6-0}(x-6) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}(x-6) \Rightarrow 2x+3y-12=0$$

۲۲ خط مورد نظر از وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(5, 4)$ و $(-7, 0)$ و

نیز وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(6, -5)$ و $(0, -3)$ می‌گذرد. وسط پاره‌خط

میان نقطه‌های $(5, 4)$ و $(-7, 0)$ نقطه $(-1, 2)$ است. وسط پاره‌خط میان

نقطه‌های $(6, -5)$ و $(0, -3)$ نقطه $(3, -4)$ است. معادله خطی که از

نقطه‌های $(-1, 2)$ و $(3, -4)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y-2 = \frac{2-(-4)}{-1-3}(x-(-1)) \Rightarrow y-2 = -\frac{3}{4}(x+1) \Rightarrow 3x+2y-1=0$$

۲۳ معادله خطی که از نقطه‌های $(-2, -4)$ و $(1, -2)$ می‌گذرد به

صورت زیر است:

$$y-(-4) = \frac{-4-(-2)}{-2-1}(x-(-2)) \Rightarrow x-2y-5=0$$

محل برخورد این خط با محور x نقطه $(5, 0)$ است. فاصله این نقطه را تا دو

سر پاره‌خط حساب می‌کنیم:

$$(-3, -4) \text{ فاصله تا } \sqrt{(5+3)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{80}$$

$$(1, -2) \text{ فاصله تا } \sqrt{(5-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{20}$$

توجه شود که در حالت اخیر $(2, a) = (b, 3) = (2, 3)$ که تشکیل متوازی‌الاضلاع نمی‌دهد.

۶- گزینه ۱ وسط ضلع AC نقطه $(\frac{-1+0}{2}, \frac{2+4}{2})$ یعنی $(-\frac{1}{2}, 3)$

است. معادله خطی که از نقطه‌های $(2, 1)$ و $(-\frac{1}{2}, 3)$ می‌گذرد به صورت زیر

$$y-1 = \frac{1-3}{2+\frac{1}{2}}(x-2) \Rightarrow 5y+4x=13$$

۷- گزینه ۲ ابتدا مختصات وسط AB را حساب می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$$

بنابراین فاصله نقطه $M(3, -1)$ از $O(0, 0)$ را باید حساب کنیم

$$OM = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10}$$

۸- گزینه ۱ وسط ضلع BC نقطه $(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+4}{2})$ یعنی $(1, 3)$

است. طول میانه وارد از رأس A برابر فاصله نقطه A و این نقطه است که

$$\sqrt{(4-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

۹- گزینه ۲ فاصله نقطه $(a, a\sqrt{3})$ از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a| = 6$$

۱۰- گزینه ۲ فاصله A تا B برابر است با

$$AB = \sqrt{(3m+2m)^2 + (-m-m)^2} = \sqrt{29m^2} = \sqrt{29}|m|$$

بنابراین

$$\sqrt{29}|m| = \sqrt{58} \Rightarrow |m| = \sqrt{2} \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

۱۱- گزینه ۱ توجه کنید که

$$AB = \sqrt{(a-\frac{1}{2})^2 + (2a+3)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow (a-\frac{1}{2})^2 + (2a+3)^2 = \frac{13}{4}$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} + 4a^2 + 12a + 9 = \frac{13}{4} \Rightarrow 5a^2 + 11a + 6 = 0$$

بنابراین مجموع مقادیرهای ممکن برای a برابر است با مجموع جواب‌های این معادله،

$$\text{یعنی } -\frac{11}{5}$$

۱۲- گزینه ۱ توجه کنید که

$$AB = \sqrt{(k-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{1+(k-1)^2}$$

$$BC = \sqrt{(k-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+(k-4)^2}$$

طبق فرض مسئله، باید $\sqrt{1+(k-1)^2} = \sqrt{16+(k-4)^2}$ در نتیجه

$$k^2 - 8k + 32 = k^2 - 2k + 2 \Rightarrow -8k + 32 = -2k + 2$$

$$-6k = -30 \Rightarrow k = 5$$

۱- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که

$$AB = |x_B - x_A| = |2m - (m-1)| = |m+1|$$

$$BC = |x_C - x_B| = |3m+1 - 2m| = |m+1|$$

بنابراین

$$2|m+1| - |m+1| = 3 \Rightarrow |m+1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m+1=3 \Rightarrow m=2 \\ m+1=-3 \Rightarrow m=-4 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با -2.

۲- گزینه ۲ نقطه وسط پاره‌خط میان نقطه‌های (x_1, y_1) و

(x_2, y_2) نقطه $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ است. بنابراین، نقطه وسط پاره‌خط

میان نقطه‌های $(-2, 3)$ و $(-4, 5)$ نقطه $(\frac{-2-4}{2}, \frac{3+5}{2})$ یعنی نقطه $(-3, 4)$ است.

۳- گزینه ۳ ابتدا مختصات وسط AB را پیدا می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{m+1+3}{2} = \frac{m+4}{2}, \quad y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2+m+n}{2}$$

بنابراین

$$\frac{m+4}{2} = 4 \Rightarrow m+4=8 \Rightarrow m=4$$

$$\frac{2+m+n}{2} = -3 \Rightarrow 2+4+n = -6 \Rightarrow n = -12$$

در نتیجه $mn = -48$.

۴- گزینه ۱ چون قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند،

مطابق شکل، M وسط AC و BD است. یعنی

$$x_M = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{x_B+x_D}{2}$$

$$\frac{2+4}{2} = \frac{3+x_D}{2} \Rightarrow x_D = 3$$

$$y_M = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{y_B+y_D}{2}$$

$$\frac{3+2}{2} = \frac{4+y_D}{2} \Rightarrow y_D = 1$$

پس مختصات D به صورت $(3, 1)$ است.

۵- گزینه ۱ رأس‌های $(1, 4)$ و $(3, 2)$ در متوازی‌الاضلاع یا

مجاورند یا رأس‌های مقابل هستند بنابراین باید مقدار a و b را از دو رابطه زیر به دست آوریم:

$$\left(\frac{2+3}{2}, \frac{a+2}{2}\right) = \left(\frac{b+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{b+1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow b=4 \\ \frac{a+2}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow a=5 \end{cases} \Rightarrow a-b=1$$

$$\left(\frac{2+b}{2}, \frac{a+3}{2}\right) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+b}{2} = 2 \Rightarrow b=2 \\ \frac{a+3}{2} = 3 \Rightarrow a=3 \end{cases} \Rightarrow a-b=1$$

۱۹- گزینه ۴ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر ۱-

است. در نتیجه

$$\frac{3}{k} \times \frac{-(k-5)}{2} = -1 \Rightarrow 3(k-5) = 2k \Rightarrow k = 15$$

۲۰- گزینه ۲ حاصل ضرب شیب خط‌های AB و BC برابر ۱-

است. در نتیجه

$$\frac{-5-1}{3-2} \times \frac{1-2}{2-m} = -1 \Rightarrow -6 \times \frac{-1}{2-m} = -1$$

$$2-m = -6 \Rightarrow m = 8$$

۲۱- گزینه ۱ شیب خطی که بر خط $3x + 8y = 12$ عمود است.

قرینه عکس شیب این خط است. یعنی برابر $\frac{1}{3}$ است. خطی که از نقطه

$(-1, -2)$ با شیب $\frac{1}{3}$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y + 2 = \frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y + 6 = x + 1 \Rightarrow x - 3y - 5 = 0$$

۲۲- گزینه ۱ شیب خطی که از نقطه‌های $(-1, 6)$ و $(-2, -3)$

می‌گذرد برابر است با $\frac{6+3}{-1+2} = 9$. بنابراین شیب خطی که بر این خط عمود

است برابر است با $-\frac{1}{9}$. معادله خطی که شیب آن $-\frac{1}{9}$ است و از نقطه

$(0, -5)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - (-5) = -\frac{1}{9}(x - 0) \Rightarrow x + 9y + 45 = 0$$

۲۳- گزینه ۳ خط $ax + 2y - 4 = 0$ محور y را در نقطه $(0, 2)$ قطع

می‌کند. این نقطه روی خط $2x + by + 6 = 0$ نیز هست. بنابراین

$$2 \times 0 + b \times 2 + 6 = 0 \Rightarrow b = -3$$

چون دو خط برهم عمودند. حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها ۱- است:

$$\left(-\frac{a}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{b}\right) = -1 \Rightarrow a = -b = 3$$

بنابراین $ab = -9$.

۲۴- گزینه ۲ خط $3x + y = 4$ بر خط $x - ay = 7$ عمود است. پس

حاصل ضرب شیب این خط‌ها ۱- است:

$$-3 \times \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = 3$$

خط $x - 3y = 7$ بر خط $bx + 2y = -5$ عمود است. پس حاصل ضرب

شیب این خط‌ها ۱- است:

$$\frac{1}{3} \times \left(-\frac{b}{2}\right) = -1 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین $a + b = 9$.

۲۵- گزینه ۱ شیب خط BC برابر است با $\frac{1+3}{2+1} = \frac{4}{3}$. حاصل ضرب

شیب‌های دو خط عمود برهم برابر ۱- است. پس شیب ارتفاع وارد از رأس

A برابر با $-\frac{3}{4}$ است. معادله ارتفاع مورد نظر. معادله خطی است که از نقطه

$A(-2, 4)$ با شیب $-\frac{3}{4}$ می‌گذرد:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 2) \Rightarrow 3x + 4y - 10 = 0$$

۱۳- گزینه ۱ ابتدا مختصات M را حساب می‌کنیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a+1}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+a}{2}$$

بنابراین

$$OM = \sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+2}{2}\right)^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4}{4}} = 2$$

$$\frac{2a^2 + 6a + 5}{4} = 4 \Rightarrow 2a^2 + 6a - 11 = 0$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با مجموع جواب‌های معادله اخیر

یعنی $-\frac{6}{2} = -3$.

۱۴- گزینه ۲ طول اضلاع را حساب می‌کنیم

$$AB = \sqrt{(-7+3)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$$

$$AC = \sqrt{(2+3)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

$$BC = \sqrt{(2+7)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$$

بنابراین مثلث متساوی‌الساقین است. توجه کنید که طول اضلاع در رابطه

فیثاغورس صدق نمی‌کنند و مثلث قائم‌الزاویه نیست.

۱۵- گزینه ۳ نقطه مورد نظر را $(a, 0)$ بگیرید. در این صورت

$$\sqrt{(0-(-4))^2 + (a-0)^2} = \sqrt{(0-9)^2 + (a-5)^2}$$

$$\sqrt{16+a^2} = \sqrt{81+(a-5)^2} \Rightarrow 16+a^2 = 81+(a-5)^2$$

$$16+a^2 = 81+a^2 - 10a + 25 \Rightarrow 10a = 90 \Rightarrow a = 9$$

۱۶- گزینه ۲ چون نقطه مورد نظر روی خط $y = x$ است. پس

به صورت (a, a) است. چون فاصله این نقطه از نقطه‌های $(1, 2)$ و $(2, 5)$

برابر است. پس

$$\sqrt{(a-1)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (a-5)^2}$$

$$(a-1)^2 + (a-2)^2 = (a-2)^2 + (a-5)^2$$

$$(a-1)^2 = (a-5)^2 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = a^2 - 10a + 25$$

$$8a = 24 \Rightarrow a = 3$$

پس نقطه مورد نظر $(3, 3)$ است.

۱۷- گزینه ۴ فرض کنید نقطه مورد نظر نقطه (a, b) باشد. چون

این نقطه روی خط $y = -2x + 5$ است. پس $b = -2a + 5$. چون فاصله نقطه

(a, b) تا نقطه‌های $(1, 4)$ و $(-1, 2)$ برابر است. پس

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (b-4)^2}$$

$$(a+1)^2 + (b-2)^2 = (a-1)^2 + (b-4)^2$$

$$(a+1)^2 + (-2a+5-2)^2 = (a-1)^2 + (-2a+5-4)^2$$

$$(a+1)^2 + (-2a+3)^2 = (a-1)^2 + (-2a+1)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 + 4a^2 - 12a + 9 = a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 4a + 1 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

۱۸- گزینه ۴ شیب خط $2x - ay = 1$ برابر $\frac{2}{a}$ است و شیب خط

$a^2x - 4y = 3$ برابر $\frac{a^2}{4}$ است. پس برای اینکه دو خط برهم عمود باشند.

باید $-\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. در نتیجه

$$a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a+2) = 0 \Rightarrow a = -2, \quad a = 0$$

۳۱- گزینه ۳ فاصله نقطه $(k, 2)$ از خط $x+2y-1=0$ برابر است با

$$\frac{|k+4-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |k+3|=10 \Rightarrow k=7, k=-13$$

۳۲- گزینه ۴ اگر خط را به صورت $12x+9y-1=0$ بنویسیم، فاصله

نقطه $(\frac{1}{9}, k)$ از آن برابر است با

$$\frac{|12 \times \frac{1}{9} + 9 \times k - 1|}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = 2 \Rightarrow |9k + 5| = 2\sqrt{12^2 + 9^2} = 30 \Rightarrow 9k = \pm 30 - 5$$

$$k = \frac{1}{9}(\pm 30 - 5) \Rightarrow k = \frac{25}{9}, k = -\frac{35}{9}$$

بنابراین مجموع مقادیرهای مورد نظر k برابر با $-\frac{10}{9}$ است.

۳۳- گزینه ۲ شیب خط $2y+x=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است. شیب خط

عمود بر این خط ۲ است. پس معادله خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطه $(-1, 2)$ بگذرد می‌نویسیم:

$$y-2=2(x+1) \Rightarrow y=2x+4 \Rightarrow 2x-y+4=0$$

فاصله مبدأ مختصات از این خط مطلوب مسئله است که برابر است با

$$OH = \frac{|0-0+4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

۳۴- گزینه ۱ معادله خطی را که از نقطه $A(-2, 1)$ با شیب m

می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y-1=m(x+2) \Rightarrow mx-y+2m+1=0$$

فاصله $B(3, 1)$ از خط بالا برابر است با

$$\frac{|3m-1+2m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{5|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

بنابراین

$$\frac{5|m|}{\sqrt{m^2+1}} = 4 \Rightarrow 5|m| = 4\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 25m^2 = 16m^2 + 16$$

$$9m^2 = 16 \Rightarrow m^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow m = \pm \frac{4}{3}$$

۳۵- گزینه ۳ ابتدا خطها را به صورت $2x-y+k=0$ و

$x-2y-1=0$ می‌نویسیم. حالا اگر فاصله A از دو خط برابر AH' و

$$AH = \frac{|2k+1+k|}{\sqrt{4+1}} \text{ و } AH' = \frac{|k+2-1|}{\sqrt{1+4}}$$

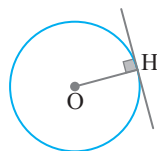
$$AH = 2AH' \Rightarrow |3k+1| = 2|k+1| \Rightarrow \begin{cases} 3k+1=2k+2 \Rightarrow k=1 \\ 3k+1=-2k-2 \Rightarrow k=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

۳۶- گزینه ۴ شعاع دایره برابر فاصله نقطه O از خط $6x+8y+1=0$

است.

$$R = \frac{|6-8+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{1}{10}$$

بنابراین مساحت دایره برابر است با $S = \pi R^2 = \frac{\pi}{100}$



۲۶- گزینه ۱ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-3, 10)$ و $(-9, -2)$

نقطه $(\frac{-3-9}{2}, \frac{10-2}{2})$ یعنی $(-6, 4)$ است. چون نقطه $(m, m-4)$ روی عمودمنصف مورد نظر است، پس حاصل ضرب شیب خطی که از نقطه‌های

$(m, m-4)$ و $(-6, 4)$ می‌گذرد و خطی که از نقطه‌های $(-3, 10)$ و

$(-9, -2)$ می‌گذرد برابر -1 است:

$$\frac{m-4-4}{m+6} \times \frac{10+2}{-3+9} = -1 \Rightarrow \frac{m-8}{m+6} \times 2 = -1 \Rightarrow m = \frac{10}{3}$$

۲۷- گزینه ۳ وسط پاره‌خط میان نقطه‌های $(-5, 2)$ و $(-7, -4)$

نقطه $(\frac{-5-7}{2}, \frac{2-4}{2})$ یعنی $(-6, -1)$ است و شیب خط میان آن‌ها برابر

است با $\frac{2+4}{-5+7} = 3$. حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود برهم برابر -1

است. بنابراین شیب عمودمنصف مورد نظر $-\frac{1}{3}$ است و چون از نقطه

$(-6, -1)$ می‌گذرد معادله آن چنین است:

$$y+1 = -\frac{1}{3}(x+6) \Rightarrow x+3y+9=0$$

۲۸- گزینه ۳ راه‌حل اول وسط پاره‌خطی که نقطه‌های $(4, 4)$ و

$(2, -2)$ را به هم وصل می‌کند نقطه $(\frac{4+2}{2}, \frac{4-2}{2})$ یعنی $(3, 1)$ است. چون

این نقطه روی خط $x+ky-6=0$ است، پس مختصات آن در معادله این خط صدق می‌کنند:

$$3+k \times 1 - 6 = 0 \Rightarrow k = 3$$

راه‌حل دوم شیب خطی که از نقطه‌های $(4, 4)$ و $(2, -2)$ می‌گذرد برابر است

با $\frac{4+2}{4-2} = 3$ و چون این خط بر خط $x+yk-6=0$ عمود است، پس

حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است:

$$(-\frac{1}{k}) \times 3 = -1 \Rightarrow k = 3$$

۲۹- گزینه ۲ معادله خط را به صورت زیر در می‌آوریم:

$$4x+3y-36=0$$

فاصله مبدأ مختصات از این خط برابر است با $\frac{|0+0-36|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{36}{5}$

۳۰- گزینه ۳ ابتدا معادله خطی را که از نقاط B و C می‌گذرد،

می‌نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{1-2}{-2-0} = \frac{1}{2}$$

$$y-y_B = m_{BC}(x-x_B) \Rightarrow y-1 = \frac{1}{2}(x+2)$$

پس معادله BC به صورت $x-2y+4=0$ است.

حالا فاصله نقطه A از BC را حساب می‌کنیم که همان طول AH است:

$$AH = \frac{|1-4+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

