انتشارات بین‌المللی گاج

مجموعه کتاب‌های آی‌کیو قرن جدید

ویژه کنکور ۱۴۰۴

جامع کنکور

گسسته و آمار و احتمال

دهم | یازدهم | دوازدهم

تألیف جدید

بیش از ۲۱۰۰ تست جدید و متنوع برای ۱۰۰ زدن کنکور

مؤلف: آرش عمید

9 786220 308003

مقدمه

آرش عمید هستم. این کتاب حاصل تجربهٔ بیش از بیست سال تدریس من در درس ریاضیات گسسته است.

سؤالات کنکور در درس گسسته استاندارد متفاوتی با آزمون‌های آزمایشی دارد. اگر می‌خواهید به تمام تست‌های کنکور در این درس پاسخ دهید باید با تست‌هایی مشابه خط فکری طراحان کنکور دست و پنجه نرم کنید.

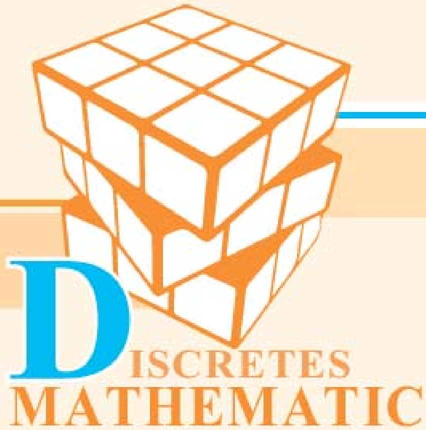
در این کتاب با سؤالات بسیار نزدیک به سؤالات کنکور مواجه می‌شوید. پاسخ‌نامهٔ این کتاب واقعاً تشریحی است و هر جا که می‌شد تیپ تست‌هایی را با روش کوتاه‌تری حل کرد در پاسخ‌نامه ارائه شده است.

توصیه می‌کنم حتماً درسنامه‌های کتاب را بخوانید، کمک زیادی به یادگیری مفاهیم، شناخت تست‌های رایج و طبقه‌بندی مفاهیم در ذهن‌تان می‌کند. راستی! کتاب هندسهٔ جامع آیکیو هم خیلی به کارتان می‌آید. امیدوارم این کتاب نقش مؤثری در موفقیت شما عزیزان در کنکور داشته باشد.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

آرش عمید

ریاضیات گسسته



آمار و احتمال

پاسخ‌نامه

. کتاب‌های **آی‌کیو** .

IQ Books

Discrete Mathematics

ریاضیات گسسته

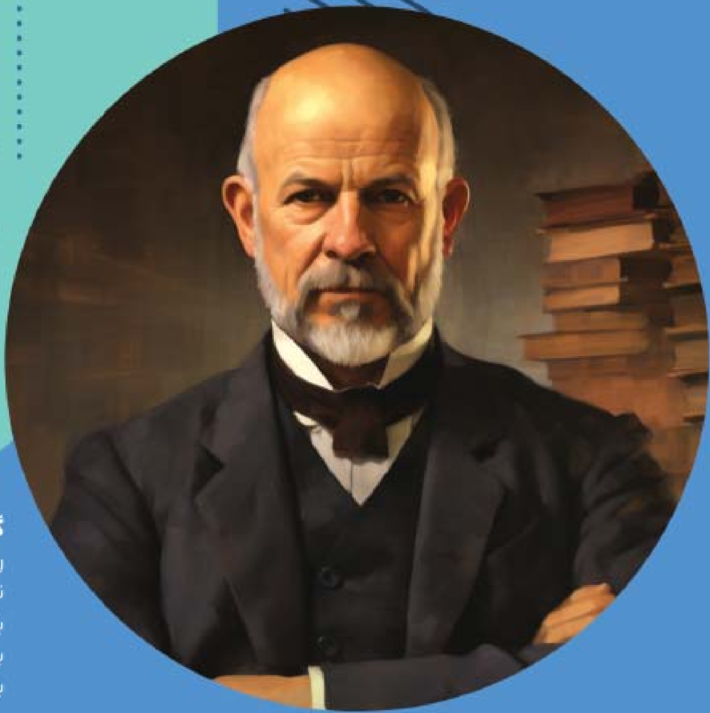
ریاضیات گسسته

. فصل اول .

آشنایی با نظریه اعداد

Chapter One

Number Theory



گئورگ کانتور

ریاضی‌دانی آلمانی بود. آوازهٔ کانتور بیشتر به‌خاطر ابداع نظریه مجموعه‌ها می‌باشد چرا که امروزه به نظریه‌ای بنیادین در ریاضیات تبدیل شده‌است. کانتور ایدهٔ تناظر یک به یک میان اعضای دو مجموعه را مطرح کرد و مفهوم بی‌نهایت و مجموعه‌های خوش‌ترتیب را تعریف نمود.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp **Cantor**

فصل اول

۱

درس اول: استدلال ریاضی

ریاضیات گسسته: فصل ۱

استدلال ریاضی

تو درس اول با استدلال ریاضی آشنا می‌شیم. بعضی از مطالب این درسو تو کتاب هندسهٔ دهم هم دیدین. در کنکور نظام جدید از مطالب درس اول در یکی از گزینه‌های کنکور ۹۸ استفاده شده بود. بنابراین خیلی مورد توجه طراحان کنکور نیست. اصلاً درسای دوم و سوم این فصل این‌قدر مطالب مهم داره که طراحا بتونن از درس اول صرف‌نظر کنن. توصیهٔ من به شما اینه که قبل از مطالعهٔ این درس از کتاب حاضر، حتماً متن کتاب درسی رو بخونین و سعی کنین به همهٔ کار در کلاس‌ها و تمریناش پاسخ بدین.

استدلال و انواع آن

استدلال: استدلال در لغت به معنی دلیل آوردن است. در این قسمت می‌خواهیم با انواع استدلال در اثبات احکام ریاضی یا رَد آن‌ها آشنا شویم که عبارت‌اند از:

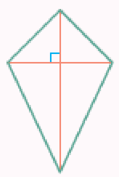
۱ مثال نقض ۲ اثبات مستقیم ۳ اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها ۴ اثبات غیرمستقیم (برهان خلف) ۵ اثبات بازگشتی

مثال نقض: به مثالی که نشان می‌دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گوییم. مثلاً حکم «هر عدد اول، عددی فرد است.» نادرست می‌باشد؛ چون عدد ۲ مثال نقض برای این حکم است. توجه کنید که ۲ عددی اول است در حالی که فرد نیست. *(در واقع مثال نقض، برای رد کردن یک حکم به کار میره)*

نکته گزاره‌های شرطی و گزاره‌های با سور عمومی می‌توانند مثال نقض داشته باشند که برای ارائه مثال نقض علاوه بر اِشراف بر تمام مفاهیم ریاضی که تا به امروز آموخته‌ایم *(اینو کتاب درسی گفته، یعنی منظورش اینه برای ارائهٔ مثال نقض باید هندسه برونی، ریاضی دهم برونی و ...)* به دو مطلب زیر نیز توجه می‌کنیم:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۱ **مثال نقض برای گزاره‌های شرطی:** برای نشان دادن نادرستی گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، با توجه به سطر دوم جدول مقابل، مثال نقض باید به گونه‌ای باشد که فرض گزارهٔ شرطی، یعنی p درست ولی حکم گزاره، یعنی q نادرست باشد. مثلاً برای حکم «اگر x و y اعداد گنگ باشند، آن‌گاه عدد $x+y$ عددی گنگ است.» باید مثال نقض به گونه‌ای باشد که x و y اعدادی گنگ باشند، اما $x+y$ عددی گنگ نباشد. اعداد $۲-\sqrt{۳}$ و $۵+\sqrt{۳}$ مناسب هستند زیرا هر دو عددی گنگ هستند ولی مجموع آن‌ها عدد ۷ می‌شود که عددی گویاست.



۲ **مثال نقض برای گزاره‌های با سور عمومی:** برای ارائهٔ مثال نقض برای گزارهٔ سوری «$\forall x; p(x)$» کافی است عضوی مانند x_0 از دامنهٔ گزاره‌نمای $p(x)$ پیدا کنیم به‌طوری که $p(x_0)$ نادرست باشد. مثلاً برای رَد گزارهٔ «هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند، لوزی است.» مثال نقض باید یک چهارضلعی باشد که قطرهایش بر هم عمود باشند ولی لوزی نباشد. واضح است که کایت این‌گونه است. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید قطرهای آن بر هم عمودند ولی لوزی نیست.

؟ کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

۱) توان دوم هر عدد مثبت، بزرگ‌تر از خود آن عدد است.

۲) برای هر سه مجموعهٔ A، B و C، اگر $B-A=C-A$ آن‌گاه $B=C$.

۳) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه عدد $p^{۲}+۳$ عددی زوج است.

۴) اگر x و y دو عدد حقیقی و مثبت باشند، $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\times\sqrt{y}$ است.

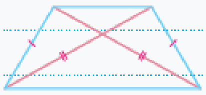
گزینهٔ ۴ در گزینهٔ «۱» اگر عدد مثبت را $\frac{۱}{۲}$ در نظر بگیریم، توان دوم آن $\frac{۱}{۴}$ می‌شود که از $\frac{۱}{۲}$ کوچک‌تر است. در گزینهٔ «۲» اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۱,۲\}$ و $C=\{۲,۳\}$ باشند، $B-A$ و $C-A$ هر دو تهی هستند، پس $B-A=C-A$ ولی مجموعهٔ B با مجموعهٔ C برابر نیست. در گزینهٔ «۳» اگر $p=۲$ باشد، $p^{۲}+۳=۷$ می‌شود که عددی فرد است. اما گزینهٔ «۴» مثال نقض ندارد و همواره درست است.

کدام‌یک از حکم‌های زیر مثال نقض ندارد؟

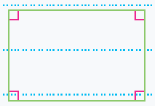
۱) هر چهارضلعی که قطرهای آن برابرند، مستطیل است. ۲) هر متوازی‌الاضلاعی که زاویه‌های مجاور آن برابر باشند، لوزی است.

۳) هر متوازی‌الاضلاعی که یک زاویهٔ قائمه داشته باشد، مربع است. ۴) هر لوزی که قطرهای آن برابرند، مربع است.

گزینهٔ ۴ برای گزینهٔ «۱»، مثال نقض، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است زیرا قطرهای آن برابرند ولی مستطیل نیست.



برای گزینه‌های «۲» و «۳»، مثال نقض، مستطیل است زیرا مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌های مجاور آن برابرند ولی لوزی نیست. هم‌چنین متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویهٔ قائمه دارد اما مربع نیست.



توجه کنید هر لوزی که قطرهای آن برابر باشند، مربع است. بنابراین حکم «هر لوزی که قطرهای آن برابرند، مربع است.» مثال نقض ندارد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

اثبات مستقیم: در این روش برای اثبات گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، از درستی p، درستی q را نتیجه می‌گیریم. به جدول ارزش گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ دقت کنید. واضح است که با سطر دوم جدول کاری نداریم. سطرهای سوم و چهارم جدول هم می‌گویند که نادرستی p به تنهایی باعث می‌شود تا گزارهٔ $p \Rightarrow q$ درست باشد و به ارزش q بستگی نداشته باشد. اما با توجه به سطر اول جدول، اگر p درست باشد و نشان دهیم که q نیز درست است، آن‌گاه گزارهٔ $p \Rightarrow q$ درست خواهد بود.

اثبات‌های مستقیم کتاب درسی: در کتاب درسی موارد زیر که درستی همهٔ آن‌ها را می‌توان به کمک اثبات مستقیم نشان داد مطرح شده‌اند:

۱) اگر n فرد باشد، مجموع هر n عدد صحیح متوالی بر n بخش‌پذیر است. مثلاً مجموع سه عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است که روش اثبات آن این‌گونه است که فرض می‌کنیم سه عدد صحیح متوالی، اعداد n، $n+1$ و $n+2$ هستند، پس:

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=\underbrace{3(n+1)}_{\text{مضرب ۳}}$$

نکته اگر n زوج باشد، مجموع n عدد صحیح متوالی بر n بخش‌پذیر نیست. مثلاً مجموع چهار عدد صحیح و متوالی ۵، ۶، ۷ و ۸ بر ۴ بخش‌پذیر نیست زیرا مجموع آن‌ها برابر ۲۶ می‌شود و ۲۶ مضرب ۴ نیست.

نتیجه اگر n عددی فرد باشد، میانگین n عدد صحیح متوالی همواره برابر عدد وسطی است. مثلاً میانگین ۵ عدد صحیح و متوالی ۲۷، ۲۶، ۲۵، ۲۴، ۲۳ برابر ۲۵ است.

۲) اگر a و b اعداد گویا باشند، $a+b$، $a-b$، ab و $\frac{a}{b}\ (b \neq 0)$ اعداد گویا هستند. مثلاً مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم اعداد گویای $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{7}$ برابر عددی گویا می‌شود.

۳) مجموع دو عدد زوج و هم‌چنین مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است. مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج، عددی فرد است. مربع هر عدد فرد و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

۴) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد، $4k+1$ مربع کامل است.

$$k=n(n+1) \Rightarrow 4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=\underbrace{(2n+1)^2}_{\text{مربع کامل}}$$

نکته در درس دوم و در مبحث افراز اعداد صحیح خواهیم دید که از هر n عدد صحیح متوالی، حداقل یک عدد مضرب n است، پس می‌توان گفت حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است. بنابراین اگر در تساوی $4n(n+1)+1=(2n+1)^2$، به جای $n(n+1)$ که حاصل‌ضرب دو عدد متوالی است، مقدار $2!q$ قرار دهیم، داریم:

$$4\underbrace{n(n+1)}_{2!q}+1=(2n+1)^2 \Rightarrow 8q+1=(2n+1)^2 \Rightarrow \boxed{\text{مربع هر عدد فرد به فرم } 8q+1 \text{ است.}}$$

کدام گزاره را نمی‌توان به روش اثبات مستقیم ثابت کرد؟

۱) مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است. ۲) مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

۳) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است. ۴) اگر a و b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، a^2+b^2 عددی فرد است.

گزینهٔ ۴ گزارهٔ موجود در گزینهٔ «۴» نادرست است، زیرا اگر $a=1$ و $b=3$ باشند، $ab=3$ می‌شود که عددی فرد است، اما $a^2+b^2=10$ می‌باشد که عددی زوج است. بنابراین نمی‌توان این گزاره را با اثبات مستقیم ثابت کرد، زیرا اثبات مستقیم برای نشان دادن درستی یک گزاره استفاده می‌شود.

؟ چند گزاره از گزاره‌های زیر، مثال نقض ندارند؟

الف) مجموع هر سه عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است. ب) برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n - ۱$ عددی اول است.

پ) مجموع هر چهار عدد صحیح متوالی بر ۴ بخش‌پذیر است. ت) میانگین پنج عدد صحیح متوالی برابر عدد وسطی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینهٔ ۲ درستی گزاره‌های (الف) و (ت) را می‌توان به کمک اثبات مستقیم نشان داد. گزارهٔ (ب) نادرست است و مثال نقض آن $n = ۴$ می‌باشد، زیرا $۱۵ = ۱ - ۲^۴$ می‌شود که ۱۵ عددی اول نیست. گزارهٔ (پ) نیز نادرست است. زیرا اگر n زوج باشد، مجموع n عدد صحیح متوالی بر n بخش‌پذیر نیست. مثلاً ۲، ۳، ۴ و ۵ چهار عدد صحیح متوالی هستند، در حالی که مجموع آن‌ها یعنی ۱۴ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

؟ در اثبات حکم «مربع هر عدد فرد به شکل $۸q + ۱$ می‌باشد.» از کدام گزارهٔ درست استفاده می‌شود؟

۱) مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است. ۲) مجموع دو عدد متوالی، فرد است.

۳) حاصل‌ضرب دو عدد متوالی، زوج است. ۴) حاصل‌ضرب دو عدد فرد متوالی، فرد است.

گزینهٔ ۳ همان‌طور که دیدیم از گزارهٔ درست «حاصل‌ضرب دو عدد متوالی، زوج است.» استفاده می‌شود.

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها:

گاهی در بعضی از اثبات‌های مستقیم، نمی‌توان از فرض استفاده کرد. یعنی فرض مسئله خیلی غنی نیست. مثلاً در اثبات حکم «برای هر عدد طبیعی n، عبارت $n^۲ - ۳n + ۵$ عددی فرد است»، طبیعی بودن n نمی‌تواند در اثبات، کمکی به ما بکند. بنابراین باید کاری کرد که طبیعی بودن n فرض‌های بیش‌تری به ما بدهد. می‌دانیم طبیعی بودن n معادل این است که n، زوج یا فرد است. حال داریم:

حالت اول n زوج است. پس:

$$n = ۲k \Rightarrow n^۲ - ۳n + ۵ = (۲k)^۲ - ۳(۲k) + ۵ = ۴k^۲ - ۶k + \underset{۴+۱}{۵} = ۲\underbrace{(۲k^۲ - ۳k + ۲)}_{q} + ۱ = ۲q + ۱$$

حالت دوم n فرد است. پس:

$$n = ۲k + ۱ \Rightarrow n^۲ - ۳n + ۵ = (۲k + ۱)^۲ - ۳(۲k + ۱) + ۵ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۶k - ۳ + ۵ = ۴k^۲ - ۲k + \underset{۲+۱}{۳} = ۲\underbrace{(۲k^۲ - k + ۱)}_{q} + ۱ = ۲q + ۱$$

نکته همان‌طور که دیدید اگر در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، فرض p دارای دو حالت $p_۱$ یا $p_۲$ باشد، باید درستی هر دو گزارهٔ شرطی $p_۱ \Rightarrow q$ و $p_۲ \Rightarrow q$ را نشان داد. دلیل این امر به زبان منطق گزاره‌ها به‌صورت زیر است:

$$(p_۱ \vee p_۲) \Rightarrow q \equiv q \vee \sim(p_۱ \vee p_۲) \equiv q \vee (\sim p_۱ \wedge \sim p_۲) \equiv (q \vee \sim p_۱) \wedge (q \vee \sim p_۲) \equiv (p_۱ \Rightarrow q) \wedge (p_۲ \Rightarrow q)$$

توجه کنید که مطلب فوق قابل تعمیم است، یعنی اگر فرض گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، دارای n حالت $p_۱$، $p_۲$، ... و p_n باشد باید تک‌تک گزاره‌های شرطی $p_۱ \Rightarrow q$، $p_۲ \Rightarrow q$، ... و $p_n \Rightarrow q$ را اثبات کرد.

$$(p_۱ \vee p_۲ \vee \cdots \vee p_n) \Rightarrow q \equiv (p_۱ \Rightarrow q) \wedge (p_۲ \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

؟ در اثبات حکم «برای هر عدد طبیعی n، عبارت $A = n^۲ - ۵n + ۳$ فرد است.» با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها برای n، وقتی $n = ۲k + ۱$ می‌باشد نتیجه می‌گیریم $A = ۲q + ۱$ است. q کدام است؟

۱) $۲k^۲ - ۲k + ۱$ ۲) $۲k^۲ - ۳k - ۱$ ۳) $۲k^۲ - ۳k + ۱$ ۴) $۲k^۲ - ۳k - ۳$

گزینهٔ ۲ **روش اول** وقتی $n = ۲k + ۱$ باشد، داریم:

$$A = n^۲ - ۵n + ۳ = (۲k + ۱)^۲ - ۵(۲k + ۱) + ۳ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۱۰k - ۵ + ۳ = ۴k^۲ - ۶k \underset{-۲+۱}{- ۱} = ۲\underbrace{(۲k^۲ - ۳k - ۱)}_{q} + ۱ = ۲q + ۱$$

بنابراین $q = ۲k^۲ - ۳k - ۱$ می‌باشد.

روش دوم به k عدد می‌دهیم. مثلاً اگر $k = ۱$ باشد، داریم:

$$n = ۲k + ۱ \xrightarrow{k=۱} n = ۳ \Rightarrow A = ۹ - ۱۵ + ۳ = -۳ \Rightarrow ۲q + ۱ = -۳ \Rightarrow q = -۲$$

حال مقدار گزینه‌ها را به ازای $k = ۱$ به‌دست می‌آوریم:

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۴-

در گزینه‌ها فقط $۲k^۲ - ۳k - ۱$ به ازای $k = ۱$ برابر ۲- می‌شود.

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های کتاب درسی: در کتاب درسی، درستی موارد زیر به کمک اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها نشان داده شده است:

۱) اگر n یک عدد صحیح باشد، $f(n)$ که یک چندجمله‌ای برحسب n است، زوج یا فرد است. مثلاً گفته شده «ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، عبارت $n^۲-۵n+۷$، عددی فرد است.»

۲) اگر $ab=۰$ باشد، آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$ که به‌صورت زیر اثبات شده است:

حالت اول اگر $a=۰$ باشد، حکم برقرار است.

حالت دوم اگر $a\neq ۰$ باشد، با ضرب طرفین تساوی $ab=۰$، در معکوس عدد a یعنی $\frac{۱}{a}$ داریم:

$$\frac{۱}{a}\times ab=\frac{۱}{a}\times ۰\Rightarrow b=۰$$

۳) یافتن زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه که اعضای آن حاصل عبارتی را زوج یا فرد می‌کنند. مثلاً گفته شده « $A=\{۳,۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,\dots,۶\}$ است و $n\in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد، آن‌گاه $n\in A$.» که به‌صورت زیر اثبات می‌شود:

$$n=۲\Rightarrow\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۴\times۹}{۴}=۹\ \times \qquad n=۱\Rightarrow\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۱\times۴}{۴}=۱\ \times$$

$$n=۴\Rightarrow\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۱۶\times۲۵}{۴}=۱۰۰\ \checkmark \qquad n=۳\Rightarrow\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۹\times۱۶}{۴}=۳۶\ \checkmark$$

$$n=۶\Rightarrow\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۳۶\times۴۹}{۴}=۹\times۴۹\ \times \qquad n=۵\Rightarrow\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\frac{۲۵\times۳۶}{۴}=۲۵\times۹\ \times$$

۴) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، آن‌گاه $a^۲+b^۲$ زوج است. برای اثبات کافی است تمام حالت‌های زوج و فرد را برای a و b در نظر بگیرید و بررسی کنید که در کدام حالت ab عددی فرد می‌شود (زمانی ab فرد می‌شود که a و b هر دو فرد باشند)، سپس نشان دهید به ازای a و b فرد، $a^۲+b^۲$ زوج است.

نتیجه اگر حاصل‌ضرب چند عدد، عددی فرد باشد، حتماً تک تک اعداد، فرد هستند.

❓ اگر a و b دو عدد صحیح باشند، کدام گزاره همواره درست است؟

۱) اگر ab زوج باشد، $a^۲+b^۲$ زوج است. ۲) اگر ab زوج باشد، $a^۲-b^۳$ فرد است.

۳) اگر ab فرد باشد، $a^۲+b^۳$ فرد است. ۴) اگر ab فرد باشد، $a^۲+b^۲$ زوج است.

✅ **گزینهٔ ۴** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر ab زوج باشد، با دو حالت مواجه می‌شویم، یا هر دو عدد a و b زوج هستند یا یکی از آن‌ها فرد و دیگری زوج است که در حالت دوم، توان دوم یکی، زوج و توان دوم دیگری، فرد است، پس مجموع آن‌ها عددی فرد می‌شود. بنابراین گزینهٔ «۱» نادرست است.

۲) اگر ab زوج باشد، در حالتی که a و b هر دو، عددی زوج هستند، حاصل $a^۲-b^۳$ عددی زوج می‌شود. بنابراین گزینهٔ «۲» نیز نادرست است.

گزینه‌های «۳» و «۴»: اگر ab فرد باشد، حتماً a و b فرد هستند و به هر توانی که برسند فرد باقی می‌مانند که مجموع دو عدد فرد، همواره عددی زوج است. بنابراین گزینهٔ «۳» نادرست، اما گزینهٔ «۴» همواره درست است.

برهان خلف: در این روش، برای اثبات گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$، فرض می‌کنیم حکم، یعنی q نادرست باشد. سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا متضاد با فرض می‌رسیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که فرض نادرستی حکم، باطل است و درستی حکم ثابت می‌شود.

نکته روال منطقی اثبات به روش برهان خلف این‌گونه است که وقتی فرض می‌کنیم حکم نادرست است، پس نقیض آن یعنی $\sim q$ درست است. حال اگر از $\sim q$ به نادرستی فرض برسیم یعنی درستی گزارهٔ شرطی $\sim q\Rightarrow\sim p$ را نشان داده‌ایم که هم‌ارز منطقی $p\Rightarrow q$ است. پس درستی $p\Rightarrow q$ را ثابت کرده‌ایم و اگر از $\sim q$ به یک عبارت نادرست برسیم، در واقع نشان داده‌ایم گزارهٔ شرطی « $\sim q\Rightarrow ن$ » هم‌ارز منطقی q است:

$$(\sim q\Rightarrow ن)\equiv(ن\vee\sim(\sim q))\equiv ن\vee q\equiv q$$

از آن‌جایی که $\sim q$ را درست فرض کرده‌ایم، پس ارزش q نادرست بوده و این یعنی گزارهٔ شرطی $\sim q\Rightarrow ن$ نادرست است، بنابراین فرض درستی $\sim q$ اشتباه بوده و $\sim q$ نادرست و در نتیجه q درست می‌باشد.

اثبات به کمک برهان خلف‌های کتاب درسی: در کتاب درسی گزاره‌های زیر به کمک برهان خلف ثابت شده است:

۱) اگر a عددی گویا و b عددی گنگ باشد، $a+b$ و $a-b$ و هم‌چنین با فرض $a \neq 0$، اعداد ab، $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ گنگ هستند.

نتیجه اگر a و b اعداد گنگ باشند، ab، $\frac{a}{b}$، $a+b$ و $a-b$ ممکن است گنگ یا گویا باشند.

۲) اگر a، b و c اعداد صحیح باشند، $(a-b)(b-c)(c-a)$ عددی زوج است.

۳) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد، $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

؟ در اثبات حکم «حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.» به روش برهان خلف، با تکیه بر کدام استدلال درست، به یک نتیجهٔ متضاد با فرض می‌رسیم؟

۱) حاصل جمع دو عدد گنگ، عددی گویا است.

۲) تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است.

۳) حاصل ضرب دو عدد گویا، عددی گویا است.

۴) تفاضل یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

گزینهٔ ۲ عدد گویا را با r و عدد گنگ را با x نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $r+x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. حال با توجه به این‌که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است باید تفاضل $r+x$ و r نیز گویا باشد یعنی $\underbrace{(r+x)-r}_{x} \in \mathbb{Q}$، که در تضاد با گنگ بودن x است.

؟ کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

۱) اگر $x+y$ گنگ باشد، x و y هر دو گنگ‌اند.

۲) اگر $x+y$ گویا باشد، x یا y گویا است.

۳) اگر x و y گویا باشند، $x \pm y$ گویا است.

۴) اگر x و y گنگ باشند، $x \pm y$ گنگ است.

گزینهٔ ۳ اگر $x=\sqrt{3}$ و $y=2$ باشد، $x+y$ گنگ است، ولی $y=2$ گنگ نیست، بنابراین گزینهٔ «۱» مثال نقض دارد. در گزینهٔ «۲»، اگر $x=1-\sqrt{3}$ و $y=2+\sqrt{3}$ باشد، $x+y$ گویا است ولی x و y گویا نیستند، پس گزینهٔ «۲» هم مثال نقض دارد. در گزینهٔ «۴»، اگر $x=1+\sqrt{2}$ و $y=2-\sqrt{2}$ باشد، $x+y=3$ می‌شود که عددی گویا است. هم‌چنین اگر $x=1+\sqrt{2}$ و $y=\sqrt{2}$ باشند، $x-y=1$ می‌شود که گویا است، پس گزینهٔ «۴» هم مثال نقض دارد. اما گزینهٔ «۳» مثال نقض ندارد و می‌توان به کمک اثبات مستقیم درستی آن را نشان داد.

؟ درستی کدام گزینه به روش برهان خلف ثابت نمی‌شود؟

۱) حاصل ضرب هر عدد گنگ در عدد گویا، عددی گنگ است.

۲) معکوس هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳) اگر a، b و c اعدادی طبیعی باشند، عبارت $(a-b)(b-c)(c-a)$ عددی زوج است.

۴) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

گزینهٔ ۱ گزینهٔ «۱» مثال نقض دارد. اگر عدد گویا، صفر باشد، حکم نادرست است. اما سه گزینهٔ دیگر را می‌توان به کمک برهان خلف ثابت کرد.

؟ اگر $a+b$ عددی گویا و $a+2b$ عددی گنگ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) a و b هر دو گویا هستند.

۲) a و b هر دو گنگ هستند.

۳) a گنگ و b گویا است.

۴) b گنگ و a گویا است.

گزینهٔ ۲ می‌دانیم تفاضل اعداد گنگ و گویا، عددی گنگ است، پس: $(a+2b)-(a+b) \in \mathbb{Q}' \Rightarrow b \in \mathbb{Q}'$

از طرفی چون b عددی گنگ و $a+b$ عددی گویا است، پس حتماً a عددی گنگ است.

یادآوری برای آشنایی با اثبات بازگشتی، ابتدا مفاهیم گزاره‌های هم‌ارز و ترکیب دوشرطی را یادآوری می‌کنیم.

■ **گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش):** اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، یعنی هر دو گزاره درست یا هر دو نادرست باشند، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

■ **ترکیب دو شرطی:** اگر p و q دو گزارهٔ هم‌ارز باشند، آن‌گاه گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو درست هستند و در نتیجه $p \Leftrightarrow q$ یک گزارهٔ درست است. بر عکس اگر ترکیب دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، آن‌گاه p و q دو گزارهٔ هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آن‌ها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود.

❓ اگر a و b اعداد حقیقی باشند، چه تعداد از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست هستند؟

الف) $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$ ب) $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ پ) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ت) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

✅ گزینهٔ ۲ ترکیب دوشرطی (ب) نادرست است، زیرا اگر $a = 2$ و $b = -2$ باشد، تساوی $a^2 = b^2$ برقرار است، در حالی که $a = b$ نمی‌باشد. ترکیب دوشرطی (پ) نیز نادرست است، زیرا اگر $a = -4$ و $b = 1$ باشد، $a < b$ است ولی $a^2 < b^2$ نمی‌باشد. اما ترکیب‌های دوشرطی (الف) و (ت) درست هستند.

■ **اثبات بازگشتی:** با توجه به مطالب فوق برای اثبات گزارهٔ $p \Rightarrow q$، اگر بتوانیم ترکیب‌های دوشرطی درست و مناسب ارائه دهیم، آن‌گاه با نشان دادن درستی یا نادرستی گزارهٔ آسان‌تر، عملاً درستی یا نادرستی تمام گزاره‌های هم‌ارز را نشان داده‌ایم.

❓ در اثبات نامساوی $x^2 + y^2 + 1 \geq x + xy + y$ به روش بازگشتی، به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^2 + (x+y+2)^2 \geq 0$ ۲) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$

۳) $(x-y-1)^2 \geq 0$ ۴) $(x-y)^2 + (x+y+1)^2 \geq 0$

✅ گزینهٔ ۲ به کمک ساختن گزاره‌های هم‌ارز، سعی می‌کنیم به یک نامساوی بدیهی برسیم:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq x + xy + y \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2x + 2xy + 2y \Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 1 + 1 - 2x - 2xy - 2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

❓ کدام دو گزارهٔ زیر هم‌ارز نیستند؟

۱) $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و $(a-1)^2 \geq 0$ ۲) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ و $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

۳) $(a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$ و $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ ۴) $(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ و $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

✅ گزینهٔ ۱ گزاره‌های $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و $(a-1)^2 \geq 0$ زمانی که $a > 0$ باشد، هم‌ارز هستند. مثلاً به ازای $a = -1$ گزارهٔ $(a-1)^2 \geq 0$ درست است ولی $a + \frac{1}{a} = -2$ می‌شود که بزرگ‌تر و یا مساوی ۲ نیست. حال به عنوان تمرین نشان می‌دهیم که گزاره‌های موجود در گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» هم‌ارز هستند:

$$2)\ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$3)\ a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$$

$$4)\ a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

حال ببینید که چه‌طور به ازای $a > 0$، گزاره‌های $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و $(a-1)^2 \geq 0$ هم‌ارز هستند:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2 \xLeftrightarrow{a>0} a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

اثبات بازگشتی‌های کتاب درسی: در کتاب درسی درستی موارد زیر به کمک اثبات بازگشتی نشان داده شده است:

۱ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند:

$a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$ 　 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ 　 $a^2+ab+b^2 \geq 0$

۲ اگر $a>0$ باشد، $a+\frac{1}{a} \geq 2$ است.

نتیجه به طریق مشابه اثبات حکم بالا، می‌توان ثابت کرد که اگر $a<0$ باشد، $a+\frac{1}{a} \leq -2$ است.

۳ میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

$a,b \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

نکته ممکن است نامساوی‌های معروف زیر در به‌دست آوردن کم‌ترین یا بیشترین مقدار یک عبارت مورد استفاده قرار بگیرند، بنابراین باید نامساوی‌های زیر را حفظ باشیم:

$a,b \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 　 $a<0 \Rightarrow a+\frac{1}{a} \leq -2$ 　 $a>0 \Rightarrow a+\frac{1}{a} \geq 2$

اگر a، b و c اعداد مثبت باشند، کم‌ترین مقدار $(a+b)(b+c)(c+a)$ کدام است؟

۱) abc 　 ۲) $2abc$ 　 ۳) $4abc$ 　 ۴) $8abc$

گزینهٔ ۴ می‌دانیم میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست، پس:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$, $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$

با ضرب طرفین نامساوی‌ها در هم، داریم:

$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\times2\times2} \geq abc \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

درس ۱ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مثال نقض و اثبات مستقیم

۱. کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

۱) اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ است.

۲) اگر x و y دو عدد حقیقی و مثبت باشند، آن‌گاه $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ است.

۳) برای هر سه مجموعهٔ A، B و C اگر $A \cup B = A \cup C$، آن‌گاه $B = C$.

۴) برای هر سه مجموعهٔ A، B و C اگر $B - A = C - A$، آن‌گاه $B = C$.

۲. کدام گزاره مثال نقض ندارد؟

۱) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $2^{2^n}+1$، عددی اول است.

۲) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 عددی اول است.

۳) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $\sqrt{4k+1}$ عددی صحیح است.

۴) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳. کدام گزینه، مثال نقض برای گزارهٔ «حاصل‌ضرب دو عدد گنگ مثبت، عددی گنگ است.» می‌باشد؟

۱) $2+\sqrt{5}$ و $2-\sqrt{5}$ 　 ۲) $3\sqrt{2}$ و $2\sqrt{3}$ 　 ۳) $2-\sqrt{2}$ و $3+\sqrt{2}$ 　 ۴) $3-\sqrt{7}$ و $3+\sqrt{7}$

۴. کدام عدد، کلیت حکم «توان دوم هر عدد مثبت بزرگ‌تر از خود آن عدد است.» را نقض می‌کند؟

۱) $۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}-۲$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{۲}$

۵. کدام عدد، کلیت حکم «اگر عددی به فرم $۸k+۱$ باشد، آن‌گاه مربع کامل است.» را نقض می‌کند؟

۱) ۸۹ ۲) ۲۵ ۳) ۴۹ ۴) مثال نقض ندارد.

۶. کدام عدد، کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.» را نقض می‌کند؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۷. کدام عدد، کلیت حکم «هر عدد طبیعی دورقمی را می‌توان به صورت مجموع سه عدد طبیعی مربع کامل نوشت.» را نقض می‌کند؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۵ ۳) ۳۶ ۴) ۳۷

۸. کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

۱) اگر عددی گنگ به توان عددی گنگ برسد، حاصل عددی گنگ است.

۲) حاصل‌ضرب چهار عدد طبیعی متوالی دورقمی، مضرب ۱۲۰ است.

۳) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴) مربع هر عدد فرد به فرم $۴k+۱$ است.

۹. کدام عدد، کلیت حکم «اگر a عددی گنگ باشد، آن‌گاه $۶a+۶a^۲+۲a^۳$ نیز عددی گنگ است.» را نقض می‌کند؟

۱) $(\frac{۱}{۳})^{-\frac{۱}{۳}}+۲$ ۲) $(\frac{۱}{۳})^{-\frac{۱}{۳}}-۲$ ۳) $(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۱}{۳}}-۱$ ۴) $(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۳}}+۱$

۱۰. کدام دو عدد، کلیت حکم «حاصل‌ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.» را نقض می‌کند؟

۱) $\sqrt{۴}, \sqrt[۴]{۲}$ ۲) $۱-\sqrt{۳}, ۲+\sqrt{۳}$ ۳) $۲-\sqrt{۳}, ۳-\sqrt{۲}$ ۴) $\log_{۵} ۳, \log_{۳} ۲۵$

۱۱. کدام گزینه، مثال نقض دارد؟

۱) هر مربع یک لوزی است.

۲) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲، فرد است.

۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.

۴) توان سوم هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از توان دوم آن است.

۱۲. اگر a و b اعداد طبیعی باشند، کدام حکم، مثال نقض دارد؟

۱) اگر $a+b$ فرد باشد، $a-b$ فرد است.

۲) اگر ab فرد باشد، $a+b$ زوج است.

۳) اگر ab زوج باشد، $a+b$ زوج است.

۴) اگر a زوج باشد، $a^۲+۳a$ زوج است.

۱۳. میانگین اعداد طبیعی و متوالی a,b,c,d,e عددی زوج است. کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) ae عددی زوج است. ۲) $b+d$ عددی زوج است. ۳) $a+d$ عددی فرد است. ۴) $e-c$ عددی فرد است.

۱۴. در اثبات حکم «اگر a زوج باشد، $a(a^۲-۴)$ مضرب ۴۸ است.» به روش اثبات مستقیم از کدام گزارهٔ درست استفاده می‌شود؟

۱) مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است.

۲) حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی، مضرب ۶ است.

۳) مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است.

۴) مجموع سه عدد صحیح متوالی، مضرب ۳ است.

۱۵. اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، کدام نتیجه‌گیری در مورد $A=۴k+۱$ درست است؟

۱) مضرب ۸ است. ۲) مربع کامل است. ۳) عددی اول است. ۴) مضرب ۶ است.

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

۱۶. در اثبات با در نظر گرفتن تمام حالت‌ها برای یک حکم، از کدام هم‌ارزی زیر استفاده می‌شود؟

۱) $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

۲) $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)$

۳) $(p\wedge q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

۴) $(p\wedge q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)$

۱۷. در اثبات حکم «برای هر عدد طبیعی n، عدد $A=n^۲-۷n+۵$ فرد است.» با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها برای n، وقتی $n=۲k$ باشد نتیجه می‌گیریم $A=۲q-۱$ است. q کدام است؟

۱) $۲k^۲-۷k+۲$ ۲) $k^۲-۷k+۳$ ۳) $۲k^۲+۷k+۲$ ۴) $۲k^۲-۷k+۳$

۱۸. اگر $S=\{۱,۲,۳,...,۶\}$ و $n\in S$ و حاصل $۱+۲+\cdots+n$ عددی زوج باشد، مجموع مقادیر n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۹. در اثبات حکم «اگر a عددی زوج و $(a-۱)(b+۲)=۰$، آن‌گاه $b=-۲$ است.» طرفین تساوی را در معکوس کدام عدد ضرب می‌کنیم؟

۱) a ۲) b ۳) $a-۱$ ۴) $b+۲$

۲۰. اگر a و b اعداد صحیح و $(a+b)^۲=a^۲+b^۲$ باشد، کدام نتیجه‌گیری همواره صحیح نیست؟

۱) $(a+b)^۳=a^۳+b^۳$ ۲) $(a-b)^۲=a^۲+b^۲$ ۳) $a=۰$ و $b=۱$ ۴) $ab^۳=ba^۳$

۲۱. مجموعهٔ $A=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ مفروض‌اند. اگر $a,b\in A$، چند زوج مرتب مانند (a,b) وجود دارد که درتساوی $a^۲+b^۲=(a-b)^۲$ صدق می‌کند؟

۱) ۱۶ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۵

برهان خلف

۲۲. در مورد حکم «اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند، $(a-b)(b-c)(c-a)$ عددی زوج است.» کدام گزینه درست است؟

۱) برای اثبات a، b و c به ترتیب ۵، ۸ و ۱ فرض می‌کنیم. در این صورت $(a-b)(b-c)(c-a)$ برابر ۸۴ می‌شود که عدد زوج است.

۲) به روش اثبات مستقیم، ثابت می‌شود.

۳) روش اثبات، روش برهان خلف است که نتیجهٔ «مجموع سه عدد فرد، عددی زوج شده است»، یک غیرممکن می‌باشد.

۴) روش اثبات، روش برهان خلف است که نتیجهٔ «مجموع سه عدد زوج، عددی فرد شده است.» یک غیرممکن می‌باشد.

۲۳. اگر $a+b$ عددی گویا و $a-b$ عددی گنگ باشد، کدام نتیجه‌گیری در مورد a و b همواره درست است؟

۱) هر دو گنگ هستند. ۲) یکی گنگ و یکی گویا است.

۳) حاصل‌ضرب آن‌ها گنگ است. ۴) حاصل‌ضرب آن‌ها گویا است.

۲۴. اگر a و b دو عدد گنگ ولی $a+b$ گویا باشد، کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $a-b$ و $a+۲b$ گنگ هستند. ۲) $a-b$ و $a+۲b$ گویا هستند.

۳) $a-b$ گویا و $a+۲b$ گنگ است. ۴) $a-b$ گنگ و $a+۲b$ گویا است.

۲۵. $n^۳$ مضرب کدام عدد باشد تا به‌وسیلهٔ برهان خلف نتوان ادعا کرد که n نیز مضرب همان عدد است؟

۱) ۷ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۲۶. در اثبات حکم «حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.» به روش برهان خلف، با تکیه بر کدام استدلال درست، به یک نتیجهٔ متضاد با فرض می‌رسیم؟

۱) حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویا و معکوس هر عدد گویای ناصفر، عددی گویا است.

۲) حاصل تقسیم هر دو عدد گویای ناصفر، عددی گویا است.

۳) حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴) حاصل تقسیم هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲۷. کدام گزینه مثال نقض دارد؟

۱) حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳) اگر x یک عدد گنگ باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

۴) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

گزاره‌های هم‌ارز و اثبات بازگشتی

۲۸. کدام دو گزاره زیر هم‌ارز هستند؟

۱) $|a|=|b|\ ,\ a=b$ ۲) $a^۲=b^۲\ ,\ a=b$ ۳) $a^۴=b^۴\ ,\ a=b$ ۴) $a^۳=b^۳\ ,\ a=b$

۲۹. کدام‌یک از قضایای زیر را می‌توان به صورت قضیهٔ دوشرطی نوشت؟

۱) $n=۲k\Rightarrow n^۲=۲k$ ۲) $۰<a<۱\Rightarrow ۰<a^۲<۱$

۳) $a<b\Rightarrow a^۲<b^۲$ ۴) $A=B\Rightarrow A\cap C=B\cap C$

۳۰. چند زوج مرتب مانند (a,b) در تساوی $\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$ صدق می‌کنند؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۴

۳۱. اگر n یک عدد طبیعی باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) مضرب ۳ بودن n و مضرب ۳ بودن $n^{۲}$، هم‌ارزند.
۲) مضرب ۶ بودن n و مضرب ۶ بودن $n^{۲}$، هم‌ارزند.
۳) مضرب ۱۲ بودن n و مضرب ۱۲ بودن $n^{۲}$، هم‌ارزند.
۴) مضرب ۷ بودن n و مضرب ۷ بودن $n^{۲}$، هم‌ارزند.

۳۲. در اثبات نامساوی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\ge xy+xz+yz$ به روش بازگشتی، به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(x-xz+y)^{۲}\ge ۰$　۲) $(x-yz)^{۲}+(yz-z)^{۲}\ge ۰$
۳) $(x+yz+z)^{۲}\ge ۰$　۴) $(x-y)^{۲}+(x-z)^{۲}+(y-z)^{۲}\ge ۰$

۳۳. در اثبات نامساوی $a^{۳}+b^{۳}\ge a^{۲}b+b^{۲}a$ با فرض مثبت بودن a و b به روش بازگشتی به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟

۱) $a^{۲}+b^{۲}\ge ۰$　۲) $(a+b)^{۲}\ge ۰$　۳) $(a-b)^{۲}\ge ۰$　۴) $a(a^{۲}+b^{۲})\ge ۰$

۳۴. در اثبات گزارهٔ «اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه $\frac{a}{b^{۲}}+\frac{b}{a^{۲}}\ge\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$» به روش بازگشتی به کدام گزارهٔ بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(a+b)^{۲}\ge ۰$　۲) $(a+\frac{b}{۲})^{۲}+\frac{۳b^{۲}}{۴}\ge ۰$　۳) $(a-b)^{۲}\ge ۰$　۴) $(a-\frac{b}{۲})^{۲}+\frac{۳b^{۲}}{۴}\ge ۰$

۳۵. در اثبات حکم «اگر $a,b>۰$، آن‌گاه $\frac{a+b}{۴a-b}\ge\frac{b}{۲a}$»، به روش بازگشتی به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(a+b)^{۲}+a^{۲}\ge ۰$　۲) $(a+b)^{۲}+b^{۲}\ge ۰$　۳) $(a-b)^{۲}+a^{۲}\ge ۰$　۴) $(a-b)^{۲}+b^{۲}\ge ۰$

۳۶. اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند، در اثبات حکم $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+m\ge ۲(a+b+c)$ به روش اثبات بازگشتی، حداقل مقدار m برای این‌که به یک رابطهٔ بدیهی برسیم، کدام است؟

۱) ۳　۲) ۲　۳) ۱　۴) ۶

۳۷. اگر گزاره‌های $a^{۲}+b^{۲}+ab\ge ۰$ و $(\frac{a}{۲}+b)^{۲}+m\ge ۰$ هم‌ارز باشند، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{a^{۲}}{۴}$　۲) $\frac{۳a^{۲}}{۴}$　۳) $a^{۲}+b^{۲}$　۴) ۱

۳۸. اگر a و b دو عدد حقیقی و گزاره‌های $۴+b^{۲}\ge a(۴-a)$ و $(m-a)^{۲}+nb^{۲}\ge ۰$ هم‌ارز باشند، مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) ۱　۲) -۱　۳) ۲　۴) -۲

۳۹. اگر گزاره‌های $a^{۲}+۲b^{۲}\ge ab$ و $(a+mb)^{۲}+nb^{۲}\ge ۰$ هم‌ارز باشند، مقدار $n-m$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$　۲) $-\frac{۳}{۴}$　۳) $\frac{۹}{۴}$　۴) $-\frac{۹}{۴}$

۴۰. در اثبات گزارهٔ $۱۷x^{۲}+y^{۲}\ge ۴(۲xy+x-۱)$ به روش بازگشتی به رابطهٔ بدیهی $(mx+ny)^{۲}+(x+p)^{۲}\ge ۰$ می‌رسیم. کمترین مقدار $m+n-p$ کدام است؟

۱) ۴　۲) ۵　۳) ۲　۴) -۱

۴۱. اگر $۰<\theta<۱۸۰^{\circ}$ و $\frac{۲}{\sin\theta}-\cos\theta\cot\theta\ge k$ باشد، بیش‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۱　۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$　۳) ۲　۴) $\frac{۵}{۲}$

۴۲. اگر اعداد a، b، c و d مثبت باشند، کم‌ترین مقدار عبارت $A=\frac{cd(a^{۲}+b^{۲})+bd(a^{۲}+c^{۲})}{abcd}$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۶　۳) ۴　۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۳. اگر a و b دو عدد نامنفی، $a+b=۲m$ و $n^{۲}=ab$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $m\ge n$　۲) $m>n$　۳) $m<n$　۴) $m\le n$

۴۴. اگر در مجموعهٔ اعداد مثبت $abc=۴$ باشد، کم‌ترین مقدار $(a+۱)(b+۱)(c+۱)$ کدام است؟

۱) ۸　۲) ۱۶　۳) ۳۲　۴) ۶۴

۴۵. اگر a و b دو عدد مثبت و $a+b=1$ باشد، کم‌ترین مقدار عبارت $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{2}$ ۲) $\frac{19}{2}$ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۴۶. اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند، کدام حکم زیر برقرار نیست؟

۱) $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$ ۲) $(\frac{x+y}{2})^2\leq xy$

۳) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ ۴) $x^2+y^2\geq 2(x+y-1)$

۴۷. روش اثبات کدام حکم زیر با بقیه متفاوت است؟

۱) حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) اگر a، b و c سه عدد صحیح باشند، آن‌گاه $(a-b)(b-c)(c-a)$ عددی زوج است.

۳) اگر a یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{a}$ عددی گنگ است.

۴) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

۴۸. کدام‌یک از گزینه‌های زیر را با مثال نقض نمی‌توان رد کرد؟

۱) مربع هر عدد طبیعی از خودش بزرگ‌تر است.

۲) عکس هر عدد حقیقی غیرصفر، از خودش کم‌تر است.

۳) مجموع هر عدد حقیقی و معکوسش، بزرگ‌تر از ۲ است.

۴) مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی از دو برابر حاصل‌ضرب آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی است.

۴۹. اگر a یک عدد صحیح فرد باشد، با استفاده از .... می‌توان ثابت کرد که عبارت a^2-1 .... است.

۱) برهان خلف – مضرب ۶ ۲) چند مثال مختلف – مضرب ۸

۳) اثبات مستقیم – مضرب ۸ ۴) اثبات بازگشتی – مضرب ۲۴

۵۰. برای نشان دادن .... حکم «مجموع هر دو عدد گویا، یک عدد گویا است.» از .... استفاده می‌شود.

۱) درستی – اثبات مستقیم ۲) درستی ـ اثبات بازگشتی

۳) نادرستی – مثال نقض ۴) نادرستی – برهان خلف

۵۱. «اگر x و y دو عدد گنگ باشند، آن‌گاه xy عددی گنگ است.» برای نشان دادن .... این حکم، از .... استفاده می‌شود.

۱) درستی – برهان خلف ۲) نادرستی – مثال نقض

۳) درستی – اثبات بازگشتی ۴) نادرستی – برهان خلف

۵۲. «اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه $x^4+y^4\geq xy(x^2+y^2)$ می‌باشد.» برای نشان دادن .... این حکم، از روش .... استفاده می‌شود.

۱) درستی – برهان خلف ۲) نادرستی – مثال نقض

۳) درستی – اثبات بازگشتی ۴) درستی – اثبات مستقیم

یادداشت:

. فصل آخر .

پاسخ‌نامه

Final Chapter

Answers

فصل اول: آشنایی با نظریهٔ اعداد

۱ ۲

در گزینهٔ ۱، $x=5$ و $y=4$ مثال نقض تساوی داده‌شده هستند؛ زیرا:

$\sqrt{5+4}=\sqrt{5}+\sqrt{4} \Rightarrow 3=\sqrt{5}+2 \Rightarrow 1=\sqrt{5}$ ×

مجموعه‌های $A=\{1,2,3,4,5\}$، $B=\{1,2,3\}$ و $C=\{2,3\}$ مثال نقض گزینه‌های ۳ و ۴ هستند، زیرا $A\cup B$ و $A\cup C$ هر دو برابر $\{1,2,3,4,5\}$ می‌باشند در حالی‌که $B\neq C$ است. همچنین $B-A$ و $C-A$ هر دو تهی هستند، اما $B\neq C$ می‌باشد.

نتیجه قانون حذف در اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها برقرار نیست.

$A\cap B=A\cap C \not\Rightarrow B=C$ $\quad$ $A\cup B=A\cup C \not\Rightarrow B=C$

$A-B=A-C \not\Rightarrow B=C$

۲ ۳

مثال نقض گزینهٔ (۱)، $n=5$، مثال نقض گزینهٔ (۲)، $n=4$ و مثال نقض گزینهٔ (۴) عدد گویای صفر است.

۳ ۴

باید دو عدد گنگی را انتخاب کنیم که اولاً مثبت باشند و ثانیاً حاصل ضرب آن‌ها عددی گنگ نشود که $3-\sqrt{7}$ و $3+\sqrt{7}$ این‌چنین هستند.

۴ ۱

از ریاضی دهم می‌دانیم اگر $1>a>0$ باشد، آن‌گاه $a^2<a$ خواهد بود. تنها گزینه‌ای که بین صفر و یک است، گزینهٔ ۱ می‌باشد. پس $1-\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0/3$ مثال نقضی برای حکم مطرح شده است.

۵ ۱

عدد ۸۹ به فرم $8k+1$ است، در حالی‌که مربع کامل نیست. پس ۸۹ مثال نقضی برای حکم داده‌شده می‌باشد. دقت کنید مربع هر عدد فرد به فرم $8k+1$ است ولی هر عددی که به فرم $8k+1$ باشد، حتماً مربع کامل نیست مثل ۱۷، ۳۳ و ... .

۶ ۲

روش اول اعداد ۱۸، ۱۲ و ۱۰ را می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت اما عدد ۱۶ را نمی‌توان به‌صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت:

$18=3+4+5+6$

$12=3+4+5 \qquad 10=1+2+3+4$

روش دوم

نکته اعداد به فرم 2^n را نمی‌توان به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت.

با توجه به نکتهٔ فوق واضح است که عدد ۱۶ به فرم 2^n می‌باشد و نمی‌توان آن را به‌صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.

۷ ۴

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $34=3^2+3^2+4^2$

۲ $35=1^2+3^2+5^2$

۳ $36=4^2+4^2+2^2$

اما ۳۷ را نمی‌توان به‌صورت مجموع سه عدد طبیعی متوالی نوشت.

۸ ۴

اعداد $a=\sqrt{3}$ و $b=\log_3 4$ یک مثال نقض برای گزینهٔ ۱ هستند؛ زیرا:

$$a^b=(\sqrt{3})^{\log_3 4}=4^{\log_3\sqrt{3}}=4^{\log_3 3^{\frac{1}{2}}}=4^{\frac{1}{2}\log_3 3}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$$

یادآوری ویژگی زیر در لگاریتم برقرار است:

$c^{\log_b a}=a^{\log_b c}$

اعداد ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ مثال نقضی برای گزینهٔ ۲ هستند. توجه کنید که هیچ‌کدام از این اعداد عامل ۵ ندارند، پس حاصل ضرب آن‌ها مضرب ۱۲۰ نیست.

اعداد $\sqrt{2}$ و $3-\sqrt{2}$ مثال نقضی برای گزینهٔ ۳ هستند، زیرا مجموع آن‌ها ۳ می‌شود که گنگ نیست اما به کمک اثبات مستقیم می‌توان نشان داد مربع هر عدد فرد به فرم $4k+1$ است:

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(\underbrace{k^2+k}_{q})+1=4q+1$$

۹ ۳

می‌دانیم $2a^3+6a^2+6a$ برابر است با:

$$2a^3+6a^2+6a=2(a^3+3a^2+3a)$$

$$=2(a^3+3a^2+3a+1)-2=2(a+1)^3-2$$

از طرفی $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}-1$ برابر $\sqrt[3]{2}-1$ است؛ پس:

$$a=\sqrt[3]{2}-1\Rightarrow 2(a+1)^3-2=2(\sqrt[3]{2}-1+1)^3-2=4-2=2$$

همان‌طور که ملاحظه کردید $2a^3+6a^2+6a$ برابر عدد گویای ۲ شد.

۱۰ ۴

با توجه به ویژگی‌های لگاریتم، داریم:

$$\log_3 25\times\log_5 3=\frac{\log 25}{\cancel{\log 3}}\times\frac{\cancel{\log 3}}{\log 5}=\frac{\log 25}{\log 5}=\frac{2\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 5}}=2$$

یادآوری در محاسبات فوق از ویژگی‌های $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$ و $\log a^n=n\log a$ استفاده کرده‌ایم.

۱۱ ۴

واضح است که 1^3 از 1^2 بزرگ‌تر نیست. پس عدد ۱ مثال نقضی برای حکم گزینهٔ ۴ است.

۱۲ ۳

در گزینهٔ ۳ اگر $a=4$ و $b=3$ باشد، آن‌گاه $ab=12$ است که عددی زوج می‌باشد، در حالی‌که $a+b=7$ می‌شود که عددی فرد است.

۱۳ ۴

می‌دانیم میانگین ۵ عدد صحیح و متوالی برابر عدد وسطی است، پس میانگین a,b,c,d,e برابر c می‌باشد و این یعنی c عددی زوج است. بنابراین d,b اعداد فرد و e,a اعداد زوج هستند. پس $e-c$ عددی زوج می‌باشد.

۱۴ **۲**

چون a یک عدد زوج است، داریم:

$$a=2k \Rightarrow a(a^2-4)=2k(4k^2-4)=2\times 4k(k^2-1)$$

$$=8k\,\underbrace{k(k-1)(k+1)}_{\text{ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است.}}=8\times 6q=48q$$

همان‌طور که ملاحظه کردید، از گزارهٔ درست «ضرب سه عدد صحیح متوالی، مضرب ۶ است.» استفاده شده است.

۱۵ **۲**

فرض می‌کنیم $k=n(n+1)$ باشد، پس:

$$A=4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید A مربع کامل است.

۱۶ **۱**

شیوهٔ اثبات با در نظر گرفتن تمام حالت‌ها به‌صورت زیر است:

$$(p\vee q\Rightarrow r)\equiv r\vee\sim(p\vee q)\equiv r\vee(\sim p\wedge\sim q)$$

$$\equiv(r\vee\sim p)\wedge(r\vee\sim q)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$$

۱۷ **۴**

روش اول وقتی $n=2k$ باشد، داریم:

$$A=n^2-7n+5=(2k)^2-7(2k)+5=4k^2-14k+\overset{6-1}{\overset{\uparrow}{5}}$$

$$=2(\underbrace{2k^2-7k+3}_{q})-1=2q-1$$

بنابراین $q=2k^2-7k+3$ می‌باشد.

روش دوم با فرض $k=1$ داریم:

$$n=2\Rightarrow A=4-14+5=-5\Rightarrow 2q-1=-5\Rightarrow q=-2$$

حال مقدار گزینه‌ها را به‌ازای $k=1$ به‌دست می‌آوریم:

۱) -3 ۲) -3

۳) 11 ۴) -2

در گزینه‌ها فقط $2k^2-7k+3$ به ازای $k=1$ برابر -2 می‌شود.

۱۸ **۴**

می‌دانیم $n+\dots+2+1$ برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است. حال به کمک اثبات با درنظر گرفتن همهٔ حالت‌ها داریم:

$n=1\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1\times2}{2}=1$ ✗

$n=2\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2\times3}{2}=3$ ✗

$n=3\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3\times4}{2}=6$ ✓

$n=4\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}=\frac{4\times5}{2}=10$ ✓

$n=5\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}=\frac{5\times6}{2}=15$ ✗

$n=6\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}=\frac{6\times7}{2}=21$ ✗

بنابراین مقادیر قابل قبول برای n، اعداد ۳ و ۴ می‌باشند که مجموع آن‌ها ۷ است.

۱۹ **۳**

چون a عددی زوج است، پس $a-1\neq0$ می‌باشد. در این حالت اگر طرفین تساوی را در معکوس $a-1$ ضرب کنیم، ثابت می‌شود که $b=-2$ است. نگاه کنید:

$$(a-1)(b+2)=0\xRightarrow{a-1\neq0}\frac{1}{a-1}\times(a-1)(b+2)=\frac{1}{a-1}\times0$$

$$\Rightarrow b+2=0\Rightarrow b=-2$$

۲۰ **۳**

از تساوی $(a+b)^2=a^2+b^2$ داریم:

$$(a+b)^2=a^2+b^2\Rightarrow a^2+b^2+2ab=a^2+b^2$$

$$\Rightarrow 2ab=0\xRightarrow{2\neq0}ab=0\Rightarrow a=0 \text{ یا } b=0$$

بنابراین لزومی ندارد $a=0$ و $b=1$ باشند. ممکن است $b=0$ و $a=1$ یا $a=0$ و b هر عدد دلخواه دیگر و یا $b=0$ و a هر عدد دلخواه دیگر باشند، اما واضح است که تحت شرایط سؤال، همواره تساوی‌های $(a+b)^3=a^3+b^3$، $(a-b)^2=a^2+b^2$ و $ab^3=ba^3$ برقرار هستند.

۲۱ **۲**

از تساوی $a^2+b^2=(a-b)^2$ داریم:

$$a^2+b^2=a^2+b^2-2ab\Rightarrow 2ab=0\Rightarrow a=0\vee b=0$$

بنابراین حداقل یکی از a , b باید صفر باشد، پس زوج مرتب‌های زیر در تساوی صدق می‌کنند که تعداد آن‌ها ۹ تا است.

$$(0,1)(0,2)(0,3)\,,\,(0,4)(1,0)(2,0)(3,0)(4,0)(0,0)$$

۲۲ **۳**

روش اثبات، روش برهان خلف است، به این‌صورت که فرض می‌کنیم $(a-b)(b-c)(c-a)$ زوج نباشد، پس عدی فرد است. پس هر سه عامل $a-b$، $b-c$ و $c-a$ هم باید فرد باشند، چون حاصل‌ضرب چند عدد فرد، عددی فرد می‌شود. از طرفی می‌دانیم جمع سه عدد فرد، عددی فرد است، پس باید $(a-b)+(b-c)+(c-a)$ عددی فرد باشد، اما مجموع این سه عدد، برابر صفر می‌باشد و صفر عددی زوج است.

۲۳ **۱**

چون $a+b$ عددی گویا و $a-b$ عددی گنگ است، پس حاصل جمع و تفاضل آن‌ها عددی گنگ است. بنابراین داریم:

$$(a+b)+(a-b)\in\mathbb{Q}'\Rightarrow 2a\in\mathbb{Q}'\Rightarrow a\in\mathbb{Q}'$$

$$(a+b)-(a-b)\in\mathbb{Q}'\Rightarrow 2b\in\mathbb{Q}'\Rightarrow b\in\mathbb{Q}'$$

۲۴ **۱**

به کمک برهان خلف می‌توان ثابت کرد که $a-b$ و $a+2b$ هر دو گنگ هستند.

۲۵ **۳**

اگر $n=6$ باشد، آنگاه $n^3=216$ مضرب ۲۴ است، درحالی که ۶ مضرب ۲۴ نیست.

۲۶ **۱**

اگر r یک عدد گویای ناصفر و x عددی گنگ باشد، فرض می‌کنیم rx گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. حال با توجه به این‌که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویا است و هم‌چنین معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویا است، پس $(\frac{1}{r})(rx)$ عددی گویا بوده، پس x عددی گویا است که با فرض ما در تناقض می‌باشد.

۲۷ | ۲

اگر عدد گویا، صفر باشد، حاصل‌ضرب آن در یک عدد گنگ، صفر می‌شود که عددی گویا است.

۲۸ | ۴

گزاره‌های $a=b$ و $a^۳=b^۳$ هم‌ارز هستند. در مورد سایر گزاره‌ها داریم:

۱ $|-۲|=|۲| \not\Rightarrow -۲=۲$

۲ $(-۲)^۲=۲^۲ \not\Rightarrow -۲=۲$

۳ $(-۲)^۴=۲^۴ \not\Rightarrow -۲=۲$

۲۹ | ۱

زوج بودن n و $n^۲$ هم‌ارز هستند، پس می‌توان آن را به صورت قضیهٔ دو شرطی نوشت.

۳۰ | ۱

گزاره‌های هم‌ارز با گزارهٔ $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{a+b}$ را می‌سازیم:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{۱}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^۲=ab$$
$$\Leftrightarrow a^۲+b^۲+۲ab=ab \Leftrightarrow a^۲+b^۲+ab=۰$$
$$\Leftrightarrow ۲a^۲+۲b^۲+۲ab=۰ \Leftrightarrow a^۲+b^۲+۲ab+a^۲+b^۲=۰$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^۲+a^۲+b^۲=۰$$

گزارهٔ آخر در صورتی برقرار است که تک‌تک جملات صفر باشند. امّا به‌ازای $a=۰$ و $b=۰$ تک‌تک کسرهای $\frac{۱}{a+b}$، $\frac{۱}{a}$ و $\frac{۱}{b}$ تعریف‌نشده هستند، پس به‌ازای هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) تساوی صورت سؤال برقرار نیست.

۳۱ | ۳

اگر $n=۶$ باشد، $n^۲=۳۶$ می‌شود که مضرب ۱۲ است ولی n مضرب ۱۲ نیست. اما در بقیهٔ موارد به کمک برهان خلف می‌توان نشان داد که دو گزاره هم‌ارز هستند.

نکته به‌طور کلی اگر در تجزیهٔ m به عوامل اول، توان هیچ عاملی بزرگ‌تر از ۱ نباشد، آن‌گاه مضرب m بودن n و مضرب m بودن $n^۲$ هم‌ارز می‌باشند.

دقت کنید با توجه به نکتهٔ فوق، گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ درست هستند.

۳۲ | ۴

به کمک اثبات بازگشتی داریم: $x^۲+y^۲+z^۲\ge xy+xz+yz$

$$\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\ge ۲xy+۲xz+۲yz$$
$$\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۲xy-۲xz-۲yz\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (x^۲-۲xy+y^۲)+(x^۲-۲xz+z^۲)+(y^۲-۲yz+z^۲)\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\ge ۰ \quad \text{بدیهی}$$

۳۳ | ۳

به کمک ساختن گزاره‌های هم‌ارز داریم:

$$a^۳+b^۳\ge a^۲b+b^۲a \Leftrightarrow (a+b)(a^۲-ab+b^۲)\ge ab(a+b)$$
$$\Leftrightarrow a^۲-ab+b^۲\ge ab \Leftrightarrow a^۲-۲ab+b^۲\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^۲\ge ۰$$

۳۴ | ۳

به کمک گزاره‌های هم‌ارز داریم:

$$\frac{a}{b^۲}+\frac{b}{a^۲}\ge\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b} \Leftrightarrow a^۳+b^۳\ge ab^۲+ba^۲$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(a^۲-ab+b^۲)\ge ab(a+b) \Leftrightarrow a^۲-ab+b^۲\ge ab$$
$$\Leftrightarrow a^۲-۲ab+b^۲\ge ۰ \Leftrightarrow (a-b)^۲\ge ۰$$

۳۵ | ۳

با ساختن گزاره‌های هم‌ارز داریم:

$$\frac{a+b}{۴a-b}\ge\frac{b}{۲a} \Leftrightarrow ۲a(a+b)\ge b(۴a-b)$$
$$\Leftrightarrow ۲a^۲+۲ab\ge ۴ab-b^۲$$
$$۲a^۲-۲ab+b^۲\ge ۰ \Rightarrow a^۲-۲ab+b^۲+a^۲\ge ۰ \Rightarrow (a-b)^۲+a^۲\ge ۰$$

۳۶ | ۱

به کمک اثبات بازگشتی داریم: $a^۲+b^۲+c^۲+m\ge ۲(a+b+c)$

$$\Leftrightarrow a^۲-۲a+b^۲-۲b+c^۲-۲c+m\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-۱)^۲-۱+(b-۱)^۲-۱+(c-۱)^۲-۱+m\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-۱)^۲+(b-۱)^۲+(c-۱)^۲+m-۳\ge ۰$$

واضح است که اگر $m-۳\ge ۰$ باشد، رابطهٔ اخیر همواره برقرار است. بنابراین حداقل مقدار m برابر ۳ است.

۳۷ | ۲

به کمک گزاره‌های هم‌ارز و توجه به گزارهٔ $(\frac{a}{۲}+b)^۲+m\ge ۰$ داریم:

$$a^۲+b^۲+ab\ge ۰ \Leftrightarrow \frac{a^۲}{۴}+۲(\frac{a}{۲})b+b^۲+\frac{۳a^۲}{۴}\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (\frac{a}{۲}+b)^۲+\frac{۳a^۲}{۴}\ge ۰$$

بنابراین $m=\frac{۳a^۲}{۴}$ می‌باشد.

۳۸ | ۱

به کمک گزاره‌های هم‌ارز داریم:

$$۴+b^۲\ge a(۴-a) \Leftrightarrow ۴+b^۲\ge ۴a-a^۲ \Leftrightarrow a^۲+b^۲-۴a+۴\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (a^۲-۴a+۴)+b^۲\ge ۰ \Leftrightarrow (۲-a)^۲+b^۲\ge ۰$$

با مقایسهٔ نامساوی‌های $(۲-a)^۲+b^۲\ge ۰$ و $(m-a)^۲+nb^۲\ge ۰$ مقادیر m و n به ترتیب ۲ و ۱ خواهند بود، پس $m-n$ برابر $۲-۱=۱$ است.

۳۹ | ۳

به کمک گزاره‌های هم‌ارز داریم:

$$a^۲+۲b^۲-ab\ge ۰ \Rightarrow a^۲-۲a(\frac{b}{۲})+\frac{b^۲}{۴}+\frac{۷b^۲}{۴}\ge ۰$$
$$\Rightarrow (a-\frac{b}{۲})^۲+\frac{۷}{۴}b^۲\ge ۰$$

با مقایسهٔ نامساوی‌های $(a-\frac{b}{۲})^۲+\frac{۷}{۴}b^۲\ge ۰$ و $(a+mb)^۲+nb^۲\ge ۰$، $m=-\frac{۱}{۲}$ و $n=\frac{۷}{۴}$ می‌باشد و داریم:

$$n-m=\frac{۷}{۴}-(-\frac{۱}{۲})=\frac{۷+۲}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

۴۰ ۴

به کمک گزاره‌های هم‌ارز و هم‌چنین $(x+p)^2$ داریم:

$$17x^2+y^2\ge 4(2xy+x-1)\Rightarrow 17x^2+y^2-8xy-4x+4\ge 0$$

$$\Rightarrow (16x^2-8xy+y^2)+(x^2-4x+4)\ge 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(4x-y)^2+(x-2)^2\ge 0\Rightarrow m=4\ ,\ n=-1\ ,\ p=-2\\(-4x+y)^2+(x-2)^2\ge 0\Rightarrow m=-4\ ,\ n=1\ ,\ p=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m+n-p=4+(-1)-(-2)=5\\m+n-p=-4+1-(-2)=-1\end{cases}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $m+n-p$ برابر -1 است.

۴۱ ۳

چون $0<\theta<180^\circ$ است، پس $\sin\theta>0$ است. حال داریم:

$$\frac{2}{\sin\theta}-\cos\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ge k\Rightarrow\frac{2-\cos^2\theta}{\sin\theta}\ge k$$

$$\Rightarrow\frac{1+1-\cos^2\theta}{\sin\theta}\ge k\Rightarrow\frac{1+\sin^2\theta}{\sin\theta}\ge k\Rightarrow\frac{1}{\sin\theta}+\sin\theta\ge k$$

می‌دانیم که اگر $x>0$ آن‌گاه $x+\frac{1}{x}\ge 2$ است، پس چون $\sin\theta>0$ است، داریم:

$$\frac{1}{\sin\theta}+\sin\theta\ge 2\Rightarrow \max(k)=2$$

۴۲ ۳

ابتدا عبارت داده‌شده را به صورت مجموع دو کسر می‌نویسیم و داریم:

$$A=\frac{cd(a^2+b^2)+bd(a^2+c^2)}{abcd}$$

$$=\frac{cd(a^2+b^2)}{abcd}+\frac{bd(a^2+c^2)}{abcd}$$

$$=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}+\frac{a^2}{ac}+\frac{c^2}{ac}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$

با فرض $x=\frac{a}{b}$, $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}$ می‌شود. چون a و b مثبت هستند. پس $x>0$ است. طبق گزارهٔ «اگر $x>0$، آن‌گاه $x+\frac{1}{x}\ge 2$ می‌باشد.» می‌توان گفت $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ است. با همین استدلال $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2$ می‌باشد.

پس داریم:

$$\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\\\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge 2+2\Rightarrow A\ge 4$$

$$\Rightarrow \min(A)=4$$

۴۳ ۱

می‌دانیم اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، آن‌گاه $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ می‌باشد. در این سؤال $m=\frac{a+b}{2}$ و $n=\sqrt{ab}$ است، پس همواره $m\ge n$ می‌باشد.

۴۴ ۲

می‌دانیم در مجموعهٔ اعداد مثبت، میانگین حسابی دو عدد از میانگین هندسی آن کم‌تر نیست، پس:

$$\begin{cases}\frac{a+1}{2}\ge\sqrt{a}\Rightarrow a+1\ge 2\sqrt{a}\\\frac{b+1}{2}\ge\sqrt{b}\Rightarrow b+1\ge 2\sqrt{b}\\\frac{c+1}{2}\ge\sqrt{c}\Rightarrow c+1\ge 2\sqrt{c}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+1)(b+1)(c+1)\ge 2\times 2\times 2\times\sqrt{abc}$$

$$\xRightarrow{abc=4}(a+1)(b+1)(c+1)\ge 16$$

بنابراین کم‌ترین مقدار عبارت $(a+1)(b+1)(c+1)$ برابر ۱۶ است.

۴۵ ۱

ابتدا به کمک اتحاد دوجمله‌ای داریم:

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2=a^2+2+\frac{1}{a^2}+b^2+2+\frac{1}{b^2}$$

$$=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4$$

$$=(a+b)^2-2ab+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2-\frac{2}{ab}+4$$

$$=(a+b)^2-2ab+(\frac{a+b}{ab})^2-\frac{2}{ab}+4$$

با توجه به فرض مسئله $a+b=1$ است، پس:

$$a+b=1\Rightarrow (a+b)^2-2ab+(\frac{a+b}{ab})^2-\frac{2}{ab}+4$$

$$=1-2ab+\frac{1}{a^2b^2}-\frac{2}{ab}+4=1-2ab+\frac{1-2ab}{a^2b^2}+4$$

از طرفی می‌دانیم میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست، پس:

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{1}{2}\ge\sqrt{ab}\Rightarrow ab\le\frac{1}{4}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}ab\le\frac{1}{4}\Rightarrow 2ab\le\frac{1}{2}\Rightarrow -2ab\ge-\frac{1}{2}\\ab\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{ab}\ge 4\Rightarrow\frac{1}{a^2b^2}\ge 16\end{cases}$$

$$\Rightarrow 1-2ab+\frac{1-2ab}{a^2\times b^2}+4\ge(1-\frac{1}{2})+16(1-\frac{1}{2})+4=\frac{25}{2}$$

۴۶ ۲

به‌ازای $x=2$ و $y=4$ حکم $(\frac{x+y}{2})^2\le xy$ برقرار نیست؛ زیرا:

$$x=2\ ,\ y=4\Rightarrow(\frac{2+4}{2})^2\le 2\times 4\Rightarrow 9\le 8\quad\times$$

توجه کنید درستی سه حکم دیگر را می‌توان به کمک اثبات بازگشتی نشان داد:

۱ $x^2+y^2+1\ge xy+x+y\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2\ge 2xy+2x+2y$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\ge 0$$

۳ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2xy\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$$

۴ $x^2+y^2\ge 2(x+y-1)\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1\ge 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\ge 0$$

۴۷ ۴

گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ به روش برهان خلف، اما گزینهٔ ۴ به کمک اثبات بازگشتی ثابت می‌شود.

۴۸ **۴**

عدد ۱ مثال نقض گزینهٔ ۱ است، زیرا 1^2 از ۱ بزرگ‌تر نیست. برای گزینهٔ ۲ مثال‌های نقض زیادی وجود دارد، مثلاً عکس عدد $\frac{1}{2}$ عدد ۲ است که ۲ کم‌تر از $\frac{1}{2}$ نیست. در گزینهٔ ۳ هم عدد ۱- مثال نقض است، زیرا $-1+\frac{1}{-1}=-2$ که بزرگ‌تر از ۲ نیست. اما گزینهٔ ۴ را به روش اثبات بازگشتی می‌توان ثابت کرد. نگاه کنید:

$$a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$$

۴۹ **۳**

اگر a فرد باشد، داریم:

$$a=2k+1 \Rightarrow a^2=(2k+1)^2 \Rightarrow a^2=4k^2+4k+1$$
$$\Rightarrow a^2=4\underbrace{k(k+1)}_{2q}+1 \Rightarrow a^2=8q+1 \Rightarrow a^2-1=8q$$

همان‌طور که می‌بینید روش استدلال، اثبات مستقیم است.

۵۰ **۱**

برای اثبات درستی حکم «مجموع هر دو عدد گویا، یک عدد گویا است.» از اثبات مستقیم استفاده می‌کنیم. نگاه کنید:

$$a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ b,d\ne 0 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

می‌دانیم ضرب دو عدد صحیح، عددی صحیح و جمع دو عدد صحیح نیز عددی صحیح است، پس:

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{m}{n}$$

۵۱ **۲**

این حکم همواره درست نیست، مثلاً اگر $x=\sqrt{3}$ و $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ باشد، $xy=2$ می‌شود که عددی گویا است، بنابراین برای نشان دادن نادرستی حکم از مثال نقض استفاده می‌شود.

۵۲ **۳**

به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$$x^4+y^4\ge xy(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^4+y^4\ge x^3y+xy^3$$
$$\Leftrightarrow x^4-xy^3+y^4-x^3y\ge 0 \Rightarrow x(x^3-y^3)+y(y^3-x^3)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x^3-y^3)(x-y)\ge 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)(x-y)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2(x^2+xy+y^2)\ge 0 \Leftrightarrow x^2+xy+y^2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2\ge 0$$

همواره درست است.

۵۳ **۳**

از $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نتیجه می‌گیریم $ad=bc$ است. با توجه به تعریف عاد کردن که به‌صورت « $a|b \Leftrightarrow b=aq$ » می‌باشد، گزارهٔ $b|ad$ صحیح است. زیرا:

نقش q را بازی می‌کند.

$$ad=bc \Rightarrow b|ad$$

۵۴ **۲**

باید $3x+1$ برابر ۱± یا ۲± یا ۱۷± یا ۳۴± باشد، پس:

$3x+1=1 \Rightarrow x=0$

$3x+1=-1 \Rightarrow$ غیرصحیح

$3x+1=2 \Rightarrow$ غیرصحیح

$3x+1=-2 \Rightarrow x=-1$

$3x+1=17 \Rightarrow$ غیرصحیح

$3x+1=-17 \Rightarrow x=-6$

$3x+1=34 \Rightarrow x=11$

$3x+1=-34 \Rightarrow$ غیرصحیح

بنابراین مجموع مقادیر صحیح x برابر $0+(-1)+(-6)+11=4$ می‌باشد.

۵۵ **۳**

می‌دانیم صفر فقط مقسوم‌علیه صفر است، پس:

$$3n^2-7n+2=0 \Rightarrow (3n-1)(n-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=\frac{1}{3} & \text{(غ ق ق)} \\ n=2 \end{cases}$$

۵۶ **۳**

برای آن‌که کسر $\frac{14}{2x+3}$ تبدیل به عدد صحیح شود، باید مخرج کسر، صورت آن را عاد کند، یعنی:

$$2x+3|14 \Rightarrow 2x+3=\pm1,\pm2,\pm7\pm14$$

از آن‌جایی که $2x+3$ همواره فرد است، پس:

$$\begin{cases} 2x+3=\pm7 \Rightarrow x=2,-5 \\ 2x+3=\pm1 \Rightarrow x=-1,-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ منحنی از ۴ نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد.

۵۷ **۴**

در رابطهٔ عاد کردن $ac|b$ ابتدا از عامل‌های ac کم می‌کنیم و سپس عامل‌های b را تقویت می‌کنیم:

$$ac|b \Rightarrow a|b \Rightarrow a|b^3$$

اما دلیل نادرستی گزینه‌های دیگر را ببینید:

در گزینهٔ ۱ در رابطهٔ $a|b$، عامل‌های a تقویت شده است و در گزینهٔ ۲ و در رابطهٔ $a|bc$ عامل‌های bc کم شده و به b تبدیل شده است. در گزینهٔ ۳ هم اگر $b\ne 0$ باشد، برقرار است.

۵۸ **۴**

چون $ac|b$، پس می‌توان عامل‌های ac را کاهش داد و گفت $a|b$.

۵۹ **۴**

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $b^3+c^3|a \Rightarrow (b+c)(b^2-bc+c^2)|a \Rightarrow b+c|a$

۲ $\begin{cases} a|a-b \\ a|a \end{cases} \Rightarrow a|a-(a-b) \Rightarrow a|b$

$\begin{cases} a|b \\ a|a \end{cases} \Rightarrow a|a+b$

۳ $a^2-b^2|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a \Rightarrow a+b|a$

$\begin{cases} a+b|a \\ a+b|a+b \end{cases} \Rightarrow a+b|(a+b)-a \Rightarrow a+b|b$

بنابراین گزینهٔ ۴ نادرست است. مثال نقض برای گزینهٔ ۴، $a=3$ و $b=15$ است.