



درخت دانش

تابع فصل اول

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت های بعدی پیشرفت کردید، می توانید خانه های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ ها نگاه کنید متوجه می شوید در کدام قسمت ها نیاز به تمرین بیشتر دارید.

تابع

۲۲۰ سؤال شناسنامه دار

۶ پیمانه ای ۲۰ سؤالی
 ۸ پیمانه ای ۱۰ سؤالی
 و یک آزمون جمع بندی ۲۰ سؤالی

۱۱۷ سؤال طراحی شده از کتاب درسی

این سؤال ها برای پوشش مطالب کتاب درسی طراحی شده اند.

۵۹ سؤال

از آزمون های کانون

۴۴ سؤال

از کنکورهای سراسری

مرجع کتاب درسی
 ریاضی ۳: فصل اول
 صفحه های ۱ تا ۲۹



مؤلف درس، تست‌های طراحی شده و تنظیم تست‌های این فصل: فرهاد حمای

۱. توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای و تابع درجه‌ی سوم

صفحه‌های ۲ تا ۵ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۰ ریاضی ۳

توابع چندجمله‌ای و تابع درجه‌ی سوم

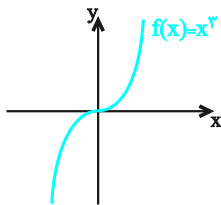
توابع چندجمله‌ای - هر تابع به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k$ در آن a, b, c, \dots و k اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a \neq 0$ ، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامند.

تذکره: دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

توابع زیر همگی چندجمله‌ای‌اند.	توابع زیر چندجمله‌ای نیستند.
$y = 5x - 2$ و $y = 7$ و $y = x^2 - x$	$y = x x $ و $y = x^{-2} + x$
$y = 3x^3 - 2x^2$ و $y = x^6 + x^5 - 2x + 7$	$y = \frac{x^3}{x}$ و $y = \sqrt{x^3}$

توجه: توابع ثابت، همانی، خطی و درجه‌ی دوم، توابعی چندجمله‌ای هستند.

تابع درجه‌ی سوم - هر تابع به معادله‌ی $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)، یک تابع درجه‌ی سوم نامیده می‌شود، یک حالت خاص از این تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ است.



با نقطه‌یابی می‌توان نمودار این تابع را یافت. با توجه به شکل روبه‌رو، ویژگی‌های زیر در این تابع دیده می‌شود:

- دامنه و برد تابع، R است.
- نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.
- تابع $f(x) = x^3$ یک به یک است.

توجه: با استفاده از خواص انتقالی می‌توانیم نمودار توابع به شکل کلی $y = a(x+b)^3 + c$ ($a \neq 0$ و b و c اعداد حقیقی) را به کمک تابع $y = x^3$ رسم کنیم.

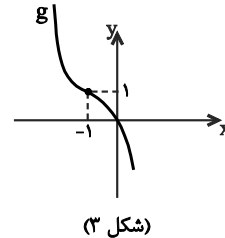
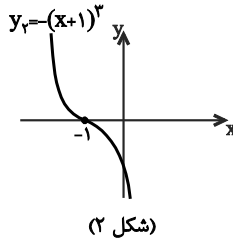
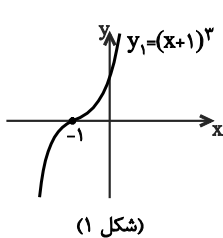
مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $g(x) = 1 - (x+1)^3$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) انتقال افقی: ابتدا نمودار $y = x^3$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y_1 = (x+1)^3$ به دست آید. (شکل ۱)

(۲) انعکاس: قرینه‌ی نمودار y_1 نسبت به محور x را رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y_2 = -(x+1)^3$ به دست آید. (شکل ۲)

(۳) انتقال عمودی: نمودار y_2 را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $g(x) = 1 - (x+1)^3$ به دست آید. (شکل ۳)



سؤال

صفحه‌های ۲ تا ۵ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۰ ریاضی ۳

تیپ ۱

تابع درجه‌ی سوم

(ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۵ - مکمل کار در کلاس)

۱- نمودار تابع $y = 2 - x^3$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

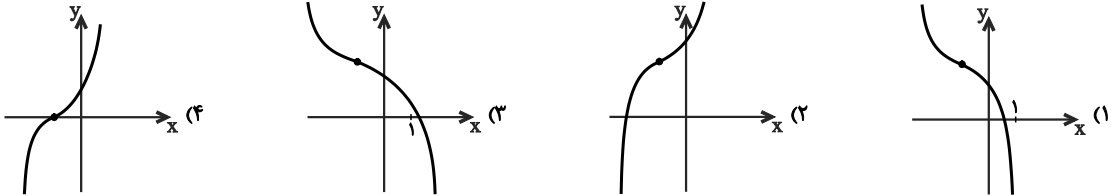
۲-۲ نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(-\infty, a)$ بالای نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار ندارد. بیشترین مقدار a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۴- مکمل فعالیت)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) هر مقدار دلخواهی (۴) -۱

(ریاضی ۳- صفحه ۵- مشابه کار در کلاس)

۳-۳ نمودار تابع با ضابطه $y = 2 - (x+1)^3$ کدام شکل زیر است؟



۴-۴ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ با دو انتقال بر نمودار تابع $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ منطبق می‌شود. در این انتقال، نقطه به طول ۲ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار تابع g قرار می‌گیرد؟

(ریاضی ۳- صفحه ۵- مرتبط با کار در کلاس)

- (۱) ۷ (۲) ۶۳ (۳) -۱ (۴) ۲۶

۵-۵ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -(x-1)^3 + a$ ، همواره به ازای هر مقدار a از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند. حدود a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱)

- (۱) $a \geq 1$ (۲) $a \leq 1$ (۳) $a \geq -1$ (۴) $a \leq -1$

۶-۶ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3(x^2 - x) + 2$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۷-۷ اگر $f(x) = x^3$ ، آنگاه نمودار دو تابع $y = f(x) - 1$ و $y = f(x-1)$ در چند نقطه مشترک‌اند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

۸-۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ ، در بازه $(-\infty, a)$ همواره پایین خط به معادله $y = 3 - 2x$ است، بیشترین مقدار a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۴- مکمل فعالیت)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۹-۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = (x+1)^3$ ، خط به معادله $y = -3x + 5$ را در کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات قطع می‌کند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۴- مکمل فعالیت)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۰-۱۰ برد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & x \geq 0 \\ a + x & x < 0 \end{cases}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، کم‌ترین مقدار a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۲

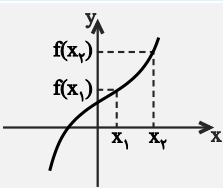
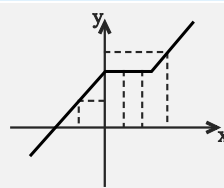
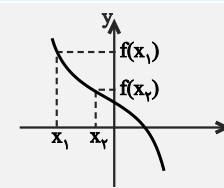
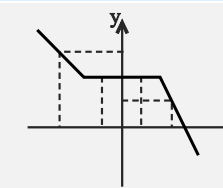
۱. توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع صعودی و نزولی

صفحه‌های ۱۰ تا ۶ ریاضی ۳

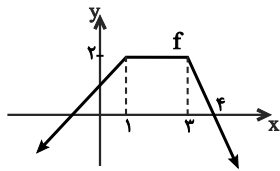
توابع صعودی و نزولی

تعریف و نمودار - فرض کنید x_1 و x_2 متعلق به یک بازه (دامنه) از تابع f باشند، آنگاه f تابعی:

اکیداً صعودی	صعودی	اکیداً نزولی	نزولی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
			
در بازه‌ای که تابع f اکیداً صعودی است با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f صعودی است با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً نزولی است با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به پایین خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f نزولی است با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.

دقت کنید اگر بازه‌ی I برابر دامنه‌ی تابع باشد، آنگاه گوییم تابع f در دامنه‌ی خود صعودی (اکیداً صعودی) یا نزولی (اکیداً نزولی) است. همچنین اگر تابعی در دامنه‌ی خود صعودی (نزولی) باشد، آنگاه آن را **یکنوا** می‌نامیم.

تذکره: ۱) هر تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع صعودی است و به طریق مشابه هر تابع اکیداً نزولی، خود یک تابع نزولی است.
 ۲) تابع f را در یک بازه، ثابت گوییم، هرگاه به ازای تمام مقادیر x در این بازه، $f(x)$ یک مقدار ثابت باشد، تابع ثابت را، تابعی هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.



مثال: شکل مقابل نمودار تابع f را نمایش می‌دهد. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

- الف) تابع f در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟
- ب) تابع f در چه بازه‌ای صعودی است؟
- پ) f در چه بازه‌ای ثابت است؟
- ث) f در چه بازه‌ای نزولی است؟

حل: الف) f در بازه‌ی $(-\infty, 1]$ اکیداً صعودی است.
 پ) f در بازه‌ی $[1, 3]$ ثابت است.
 ث) f در بازه‌ی $[1, +\infty)$ نزولی است.

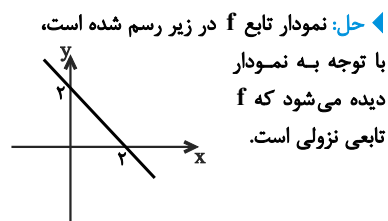
ب) f در بازه‌ی $(-\infty, 3]$ صعودی است.
 ت) f در بازه‌ی $[3, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

توجه: اگر تابع f در دامنه‌ی خود صعودی یا نزولی نباشد، آنگاه f را تابعی **غیریکنوا** می‌نامیم.

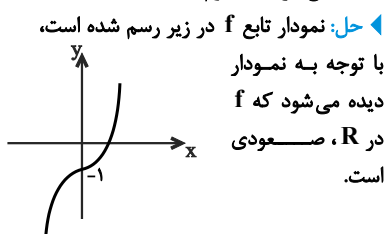
تعیین یکنوایی توابع با رسم نمودار آن‌ها - با رسم نمودار یک تابع می‌توان در مورد یکنوایی آن نظر داد.

مثال: با رسم نمودار، یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

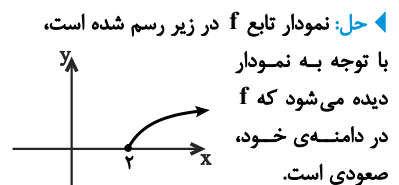
۱) $f(x) = 2 - x$ (تابع خطی)



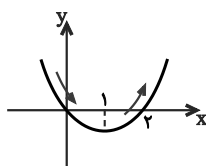
۲) $f(x) = x^3 - 1$ (تابع درجه‌ی سوم)



۳) $f(x) = \sqrt{x-2}$



تذکره: بعضی توابع در دامنه‌ی خود غیریکنوا هستند، ولی با محدود کردن دامنه‌ی تابع می‌توان تابعی یکنوا به دست آورد.



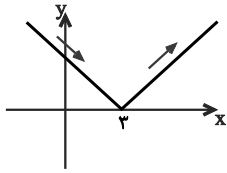
مثال: نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را رسم کنید. آیا f در R یکنواست؟ در چه بازه‌هایی f یکنواست؟

حل: محل‌های تلاقی نمودار f با محور x ها، صفر و ۲ است. طول رأس $x = 1$ و عرض آن (-1) است، بنابراین نمودار تابع به صورت روبه‌روست. با توجه به نمودار دیده می‌شود که f در R غیر یکنواست. تابع f در بازه‌ی $(-\infty, 1]$ نزولی و در بازه‌ی $[1, +\infty)$ صعودی است.

نتیجه: تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ در R غیر یکنواست ولی در هر بازه‌ای که طول رأس نقطه‌ی درونی آن بازه نباشد، یکنواست؛ به عبارت دیگر f در بازه‌های $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ و $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ یکنواست.

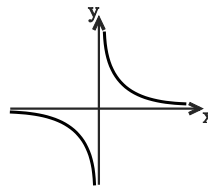
■ **مثال:** با رسم نمودار، یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

۱ $f(x) = |x - 3|$



◀ **حل:** نمودار تابع f در روبه‌رو رسم شده است. با توجه به نمودار دیده می‌شود که f غیر یکنواست ولی در بازه‌ی $[3, +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-\infty, 3]$ نزولی است.

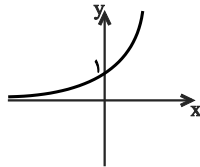
۲ $f(x) = \frac{1}{x}$



◀ **حل:** دامنه‌ی تابع f ، $R - \{0\}$ است. f در دامنه‌ی خود غیر یکنواست ولی در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ نزولی است.

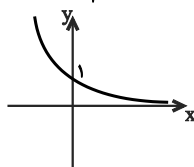
■ **مثال:** با رسم نمودار، یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

۱ $f(x) = 3^x$



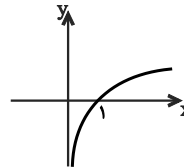
(f اکیداً صعودی است.)

۲ $f(x) = (\frac{1}{3})^x$



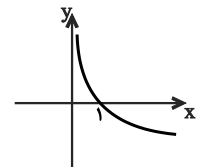
(f اکیداً نزولی است.)

۳ $f(x) = \log_3 x$



(f اکیداً صعودی است.)

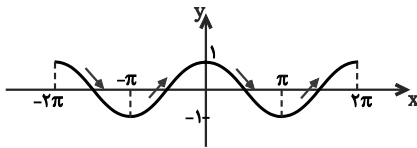
۴ $f(x) = \log_{0.1} x$



(f اکیداً نزولی است.)

نتیجه: الف) توابع $y = \log_a x$ و $y = a^x$ ، به ازای $a > 1$ ، اکیداً صعودی‌اند. ب) توابع $y = \log_a x$ و $y = a^x$ ، به ازای $0 < a < 1$ ، اکیداً نزولی‌اند.

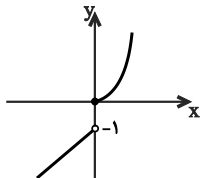
■ **مثال:** با رسم نمودار تابع $f(x) = \cos x$ در بازه‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ ، یکنوایی آن را بررسی کنید. ◀ **حل:** نمودار تابع در روبه‌رو رسم شده است. با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع f در این بازه غیر یکنواست. تابع f در هر یک از بازه‌های $[0, \pi]$ و $[\pi, 2\pi]$ نزولی و در هر یک از بازه‌های $[-2\pi, -\pi]$ و $[-\pi, 0]$ صعودی است.



■ **مثال:** یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

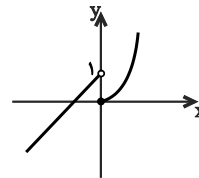
۱ $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

◀ **حل:** با رسم نمودار دیده می‌شود که f در R ، صعودی و یکنواست.



۲ $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

◀ **حل:** با رسم نمودار دیده می‌شود که f در R ، غیر یکنواست.



سؤال ۱۰

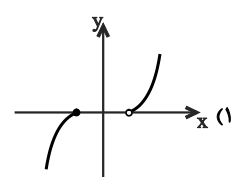
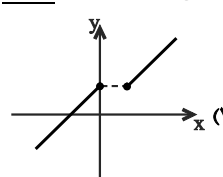
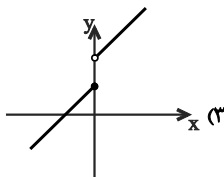
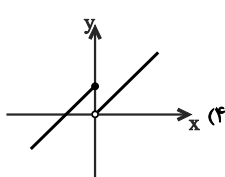
صفحه‌های ۶ تا ۱۰ ریاضی ۳

تیپ ۲

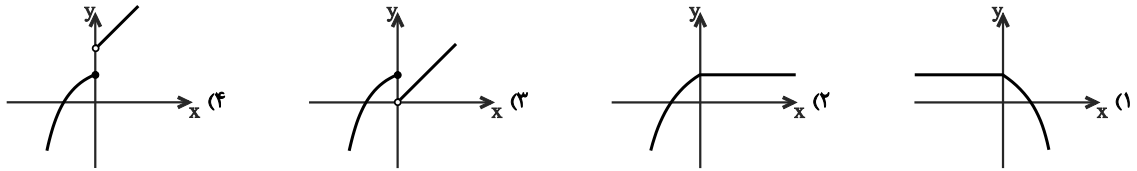
تعریف و نمودار

ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۸ - مکمل کار در کلاس (آزمون کانون - ۸۷)

۱۱ - کدام تابع با نمودار زیر، صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست؟



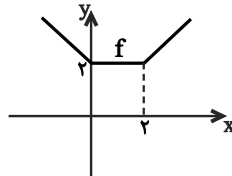
۲) -۱۲ کدام تابع با نمودار زیر، غیر یکنواست؟



(ریاضی ۳- صفحه ۸- مکمل کار در کلاس)

۳) -۱۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. در کدام بازه‌ی زیر، f نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست؟

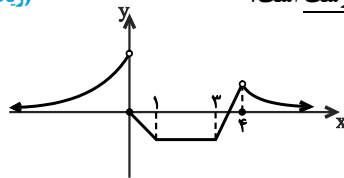
(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۸۷)



- (۱) $(-\infty, 0]$
- (۲) $(-\infty, 2]$
- (۳) $[-4, 4]$
- (۴) $[0, +\infty)$

۴) -۱۴ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. کدام گزینه نادرست است؟

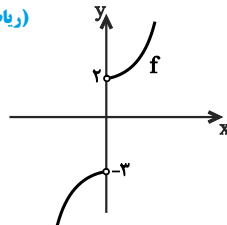
(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۸۸)



- (۱) f در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ اکیداً صعودی است.
- (۲) f در بازه‌ی $[0, 3]$ نزولی است.
- (۳) f در بازه‌ی $[3, 4]$ اکیداً صعودی است.
- (۴) f در بازه‌ی $(4, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

۵) -۱۵ نمودار تابع f در زیر رسم شده است. $f(0)$ در کدام بازه قرار داشته باشد تا تابع f در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی باشد؟

(ریاضی ۳- صفحه ۸- مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون - ۸۸)



- (۱) $[-3, 2]$
- (۲) $[2, +\infty)$
- (۳) $(-\infty, -3]$
- (۴) $(-3, 3)$

۶) -۱۶ اگر تابع $f = \{(2, 2m+3), (1, 6), (3, -4)\}$ یک تابع نزولی اکید باشد، آن‌گاه در محدوده‌ی m چند عدد صحیح وجود دارد؟

(ریاضی ۳- صفحه ۷- متن درس) (آزمون کانون - ۹۶ تیر ۹۶)

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۷) -۱۷ اگر f تابعی پیوسته در R و یکنوا باشد و داشته باشیم $f(0) = f(4) = 2$ ، آنگاه خط $y = 2$ نمودار تابع $y = f(x)$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۱۰) (آزمون کانون - ۸۸)

- (۱) یک
- (۲) دو
- (۳) بی‌شمار
- (۴) هیچ

۸) -۱۸ اگر تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه f محور x ها را؟

(ریاضی ۳- صفحه ۸- مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون - ۸۹)

- (۱) حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.
- (۲) دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند.
- (۳) قطع نمی‌کند.
- (۴) حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

۹) -۱۹ تابع $f: R \rightarrow R$ یک تابع پیوسته و اکیداً نزولی است که محور x ها را با طول یک قطع می‌کند. دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۸- مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون - ۹۶ آذر ۹۶)

- (۱) $[1, +\infty)$
- (۲) $[0, +\infty)$
- (۳) $(-\infty, 1]$
- (۴) $[0, 1]$

۱۰) -۲۰ تابع f اکیداً نزولی است، هرگاه $f(3a-1) < f(a+1)$ باشد، آنگاه حدود a کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۷- متن درس) (آزمون کانون - ۸۹)

- (۱) $a \geq 2$
- (۲) $a \geq 1$
- (۳) $a > 1$
- (۴) $a > 2$

۲۰
سؤال

صفحه‌های ۶ تا ۱۰ ریاضی ۳

تیپ ۳

تعیین یکتوایی با رسم نمودار تابع

- ۱) ۲۱- در تابع خطی نزولی $f(x) = ax + b$ ، اگر $f(ax + b) = 4x + 1$ باشد، $f(1)$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۲ (۴) -۳
- ۲) ۲۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه‌ی $\{x : |x - 1| < 2\}$ ، همواره چگونه است؟
 (۱) منفی (۲) مثبت (۳) صعودی (۴) نزولی
- ۳) ۲۳- حدود a برای آن که تابع $y = (a - 4)x^2 - x$ در بازه‌ی $[2, +\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۸- کار در کلاس- مکمل پ) (سراسری ریاضی - ۹۱)
- ۴) ۲۴- کدام تابع زیر صعودی است؟
 (۱) $a \geq 4$ (۲) $a \geq \frac{17}{4}$ (۳) $\frac{1}{2} < a < \frac{17}{4}$ (۴) $\frac{1}{3} < a < 4$
- ۵) ۲۵- کدام تابع زیر نزولی است؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۹- مکمل کار در کلاس ۲) (آزمون کانون - ۸۸)
- ۶) ۲۶- کدام تابع زیر غیر یکتواست؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۵)
- ۷) ۲۷- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + |x - 2|$ در کدام بازه‌ی زیر هم صعودی و هم نزولی است؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۹- مکمل کار در کلاس ۲)
- ۸) ۲۸- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} -x & , x < -2 \\ -1 & , -2 \leq x < 2 \\ 2x - 4 & , x \geq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست نیست؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مشابه تمرین ۲)
- ۹) ۲۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , -1 \leq x < 1 \\ 0 & , x = 1 \\ x + 1 & , x > 1 \end{cases}$ در بازه‌ی $[-1, +\infty)$...
 (ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مشابه تمرین ۲) (آزمون کانون - ۸۹)
- ۱۰) ۳۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & ; x \geq 0 \\ ax + a + 4 & ; x < 0 \end{cases}$ در تمام دامنه‌اش نزولی اکید باشد، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۲) (آزمون کانون - ۹۵)
- ۱۱) ۳۱- اگر تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ g(x) & , x > 0 \end{cases}$ در \mathbb{R} نزولی باشد، g کدام تابع با ضابطه‌ی زیر می‌تواند باشد؟
 (ریاضی ۳- صفحه ۱۰- مکمل تمرین ۲)

۱۲) -۳۲ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 + 6x & , x < 0 \end{cases}$ در بازه $[a, b]$ صعودی است. اگر $-1 \in [a, b]$ باشد، آنگاه بزرگترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(ریاضی ۳ - صفحه ۱۰ - مکمل تمرین ۲)

- ۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

۱۳) -۳۳ تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 2|x - 2|$ در کدام بازه صعودی است؟

(ریاضی ۳ - صفحه ۹ - مکمل کار در کلاس ۲)

- ۱) $(-\infty, 1)$ ۲) $(1, +\infty)$ ۳) $(-1, +\infty)$ ۴) $(-\infty, -1)$

۱۴) -۳۴ کدام تابع با ضابطه $y = \sqrt{x - 2}$ زیر، در دامنه خود نزولی است؟

(ریاضی ۳ - صفحه ۱۰ - مکمل تمرین ۴)

- ۱) $y = \sqrt{x - 2}$ ۲) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ۳) $y = \frac{1}{x - 2}$ ۴) $y = \log_5^x$

۱۵) -۳۵ رابطه $f(x) = (13 - a^x)^x$ به ازای بزرگترین مقدار صحیح a ، یک تابع نمایی صعودی است، $f(0/25)$ کدام است؟

(ریاضی ۳ - صفحه ۱۰ - مکمل تمرین ۴)

- ۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۴

۱۶) -۳۶ کدام تابع با ضابطه $y = 2^{-x+2}$ زیر نزولی نیست؟

(ریاضی ۳ - صفحه ۱۰ - مکمل تمرین ۴)

- ۱) $y = 2^{-x+2}$ ۲) $y = \log_{1/3}^x$ ۳) $y = -\log_2^x + 2$ ۴) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x-2}$

۱۷) -۳۷ مجموعه جواب نامعادله $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x^2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2-3x}$ کدام است؟

(ریاضی ۳ - صفحه ۱۰ - مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۹۰)

- ۱) $R - (2, 3)$ ۲) $[2, 3]$ ۳) $R - (1, 2)$ ۴) $[1, 2]$

۱۸) -۳۸ مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{x-2}{10}} \geq \log_{\frac{6-x}{10}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

(ریاضی ۳ - صفحه ۱۰ - مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۸۷)

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹) -۳۹ تابع $y = \cos x$ در بازه $(-\pi, 3\pi)$ ، چند بار از صعودی به نزولی تغییر جهت می‌دهد؟

(ریاضی ۳ - صفحه ۹ - مکمل کار در کلاس ۱)

- ۱) یکبار ۲) دوبار ۳) سه‌بار ۴) چهاربار

۲۰) -۴۰ در کدام بازه زیر، هر دو تابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ نزولی‌اند و مقادیر آنها مختلف‌العلامت هستند؟

(ریاضی ۳ - صفحه ۹ - مشابه کار در کلاس ۱)

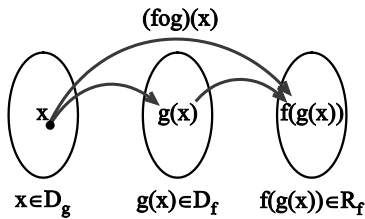
- ۱) $(0, \frac{\pi}{2})$ ۲) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ۳) $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ ۴) $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

۲. ترکیب توابع

نمایش ضابطه‌ای و ماشینی

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و تمرین‌های صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ ریاضی ۳

نمایش ضابطه‌ای و ماشینی



تعریف ترکیب دو تابع: فرض کنید f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب دو تابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

شرط تشکیل این تابع آن است که اشتراک برد تابع g و دامنه‌ی تابع f تهی نباشد، در این صورت دامنه‌ی تابع fog ، زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی تابع g خواهد بود و برد تابع fog زیرمجموعه‌ی برد تابع f خواهد بود و می‌نویسیم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

نمایش ضابطه‌ای ترکیب توابع: در نماد تابع‌های مرکب، پراکنش نشان می‌دهد که کدام تابع اول وارد محاسبه می‌شود، نماد $f(g(x))$ ، یعنی،

«اول g ، بعد f » و نماد $g(f(x))$ ، یعنی «اول f بعد g ». به حالت‌های زیر توجه کنید.

۱ محاسبه‌ی مقدار $(fog)(a)$: برای محاسبه‌ی $(fog)(a)$ ، داریم:

$$(fog)(a) = f(g(a))$$

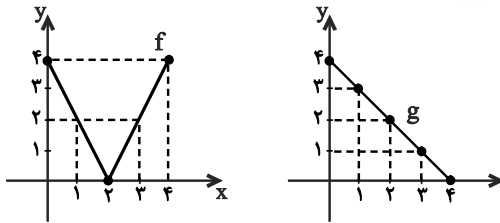
ابتدا مقدار تابع g را در a محاسبه کرده و سپس مقدار تابع f را در $g(a)$ می‌یابیم. توجه کنید که شرط تشکیل $(fog)(a)$ آن است که g در a و f در $g(a)$ تعریف شده باشد.

مثال: اگر $f(-3) = 6$ و $g(6) = 4$ باشد، آنگاه $(fog)(-3)$ را بیابید.

حل: از آنجایی که $(fog)(-3) = g(f(-3))$ ، بنابراین ابتدا $f(-3)$ وارد محاسبه می‌شود:

$$(fog)(-3) = g(f(-3)) = g(6) = 4 \Rightarrow (fog)(-3) = 4$$

مثال: نمودار دو تابع f و g در شکل زیر رسم شده است، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



$$(1) f(g(1)) \quad (2) (fog)(0)$$

$$(3) (fog)(2) \quad (4) (gog)(3)$$

حل: (۱) $g(1) = 3$ بنابراین $f(g(1)) = f(3) = 3$

(۲) $f(0) = 4$ بنابراین $(fog)(0) = g(f(0)) = g(4) = 0$

(۳) $f(2) = 0$ بنابراین $(fog)(2) = f(f(2)) = f(0) = 4$

(۴) $g(3) = 1$ بنابراین $(gog)(3) = g(g(3)) = g(1) = 3$

مثال: اگر $f(x) = [-x]$ و $g(x) = \sqrt{2+x}$ ، آنگاه $(fog)(1)$ را بیابید.

حل: از آنجایی که $(fog)(1) = f(g(1))$ ، از طرفی $g(1) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ ، بنابراین:

$$(fog)(1) = f(g(1)) = f(\sqrt{3}) = [-\sqrt{3}] = -\sqrt{3} \approx -1.732$$

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ x^2-7 & x < 0 \end{cases}$ ، آنگاه $(fof)(-3)$ را بیابید.

حل: از آنجایی که $(fof)(-3) = f(f(-3))$ ، بنابراین ابتدا $f(-3)$ را از ضابطه‌ی پایین محاسبه می‌کنیم:

$$f(-3) = (-3)^2 - 7 = 9 - 7 = 2 \Rightarrow (fof)(-3) = f(f(-3)) = f(2)$$

$$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5 \Rightarrow (fof)(-3) = 5$$

برای محاسبه‌ی $f(2)$ از ضابطه‌ی بالا استفاده می‌کنیم:

۲ یافتن ضابطه‌ی $(fog)(x)$: نماد $(fog)(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

و به این معنی است که در تابع $f(x)$ هر جا به جای x قرار دهیم $g(x)$.

مثال: اگر $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) و $(fog)(x) = 4x + 3$ ، آنگاه $f(-2)$ را بیابید.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + b(a+1) & (1) \\ f(f(x)) = 4x + 3 & (2) \end{cases}$$

حل:

با متحد قرار دادن دو طرف خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{(1) \equiv (2)} \begin{cases} a^2x + b(a+1) = 4x + 3 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(-2) = -3$$

■ مثال: اگر $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = x^2 - 3$ آن گاه به ازای چه مقادیری از x نمودار تابع $h(x) = (f \circ g)(x)$ پایین خط $y = 8$ است؟
 ◀ حل: داریم $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، با تشکیل آن داریم:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3) = 3(x^2 - 3) + 2 = 3x^2 - 7$$

باید $h(x) < 8$ باشد، بنابراین:

$$3x^2 - 7 < 8 \Rightarrow x^2 < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

■ مثال: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $(f \circ g)(x) = \sqrt{x} - 1$ ، آنگاه $g(25)$ را بیابید.

◀ حل: در تابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ، با تشکیل $f(g(x))$ به رابطه‌ی $f(x) = \frac{g(x)+1}{g(x)}$ می‌رسیم، از طرفی $f(g(x)) = \sqrt{x} - 1$ ، بنابراین:

$$\frac{g(x)+1}{g(x)} = \sqrt{x} - 1 \xrightarrow{x=25} \frac{g(25)+1}{g(25)} = \sqrt{25} - 1 = 4 \Rightarrow g(25)+1 = 4g(25) \Rightarrow g(25) = \frac{1}{3}$$

■ مثال: اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x}$ باشد، آن گاه $f(5)$ را بیابید.

◀ حل: با توجه به $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{x}$ با توجه به این که $g(x) = 2x + 1$ ، پس $f(2x + 1) = \sqrt[3]{x}$ ، برای یافتن $f(5)$ ، کافی است قرار دهیم $2x + 1 = 5$ ، بنابراین $x = 2$ ، پس:

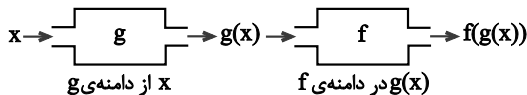
$$f(2x + 1) = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{x=2} f(5) = \sqrt[3]{2}$$

■ مثال: اگر $f(x - 2) = \sqrt[3]{x}$ باشد، آن گاه $f(5 - 2x)$ را بیابید.

◀ حل: با فرض $x - 2 = t$ داریم: $x = t + 2$ ، پس:

$$f(t) = \sqrt[3]{t+2} \rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow 5-2x} f(5-2x) = \sqrt[3]{5-2x+2} = \sqrt[3]{7-2x}$$

■ نمایش ماشینی ترکیب توابع ◀ فرض کنید خروجی‌های تابعی مانند g را بتوان به عنوان ورودی‌های تابعی مانند f به کار برد. در این صورت همان طوری که در شکل زیر دیده می‌شود، می‌توانیم f و g را با هم ترکیب کنیم تا تابع جدیدی تشکیل شود که ورودی‌هایش، ورودی g و خروجی‌هایش، مقادیر $f(g(x))$ باشند.



■ مثال: اگر خروجی ماشین زیر برابر ۶ باشد، مقدار ورودی را بیابید.

$$\text{ورودی} \rightarrow \boxed{2x+3} \rightarrow \boxed{5x+1} \rightarrow \text{خروجی}$$

◀ حل: اگر در ماشین بالا ورودی را x ، $f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = 5x + 1$ و خروجی را y بگیریم در این صورت $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow y$ ، این همان تعریف تابع با ضابطه‌ی $(g \circ f)(x)$ است و داریم:

$$y = g(f(x)) = g(2x + 3) = 5(2x + 3) + 1 = 6 \Rightarrow 10x + 16 = 6 \Rightarrow 10x = -10 \Rightarrow x = -1$$

۲۰
سؤال

۲۰
سؤال

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و تمرین‌های صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ ریاضی ۳

تیپ ۴

محاسبه‌ی مقدار $(f \circ g)(a)$

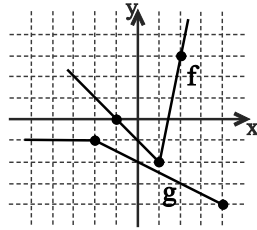
(ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۴ - مشابه کار در کلاس)

x	f(x)	g(x)
-1	-2	2
0	1	3
1	-3	5
2	4	-1

① -۴۱ با توجه به جدول روبه‌رو، حاصل $\frac{(f \circ g)(-1) + (g \circ f)(0)}{f(-g(2))}$ کدام است؟

-۳ (۲)	۳ (۱)
$-\frac{9}{5}$ (۴)	$\frac{9}{5}$ (۳)

ریاضی ۳ - صفحه ۲۳ - مکمل تمرین ۸

۴۲ (۲) نمودار دو تابع f و g در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\frac{(g \circ f)(1)}{(f \circ g)(0)}$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین ۳ - پ

۴۳ (۳) اگر $f(5) = 3$ ، $g(3) = 2$ و $f(-2) = 1$ باشند، آنگاه حاصل $f(-g(f(5)))$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۵

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین ۴ - الف (سراسری ریاضی - ۷۰)

۴۴ (۴) اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = x - 4$ مقدار $\frac{(f \circ g)(2)}{(g \circ f)(-1)}$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۲

۴۵ (۵) اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آنگاه حاصل $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ ، کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین ۴ - الف (سراسری تجربی - ۸۹)

- (۱) $4(1 - \sqrt{2})$ (۲) $4(\sqrt{2} - 1)$ (۳) ۴ (۴) $4\sqrt{2}$

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین ۴ - الف (سراسری تجربی - ۸۶)

۴۶ (۶) اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آنگاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۷ (۷) در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ ، مقدار $f\left(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین ۴ - الف (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

- (۱) $1/75$ (۲) $2/25$ (۳) $2/5$ (۴) $2/75$

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین ۴ - الف (آزمون کانون - ۵ آذر ۹۵)

۴۸ (۸) اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3} + 2x & , x \geq 1 \\ \sqrt{3} - x & , x < 1 \end{cases}$ مقدار $f(f(\sqrt{3} - 1))$ کدام است؟

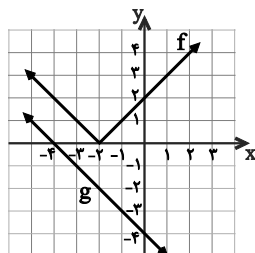
- (۱) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 2$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) ۱

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین ۴ - الف

۴۹ (۹) اگر $f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x < 2 \\ 2x + 1 & , x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 - 5x$ ، آنگاه $(\Delta f) \circ g$ در $x = 1$ کدام است؟

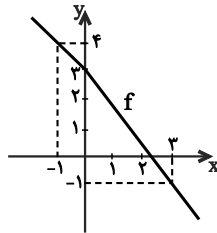
- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) -۱ (۴) ۱

ریاضی ۳ - صفحه ۲۳ - مکمل تمرین ۸

۵۰ (۱۰) اگر نمودار دو تابع f و g به صورت زیر باشند، آنگاه از $(f \circ g)(a) = 0$ مقدار a کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) -۱
(۳) -۲
(۴) ۱

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۳- مکمل تمرین ۸)



۱۱) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، جواب معادله $(f \circ f)(x) = 4$ کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) -۱
- ۳) صفر
- ۴) $\frac{9}{4}$

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و تمرین‌های صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ ریاضی ۳

تیپ ۵

یافتن ضابطه‌ی fog

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۳- مکمل تمرین ۹) (سراسری تجربی - ۷۶)

۱۲) اگر $f(x) = 3x + a$ و $g(x) = 2 - x$ و $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = 6$ ، چقدر است a ؟

- ۱) -۲
- ۲) -۱
- ۳) ۱
- ۴) ۲

۱۳) اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۴-۱۴- مشابه کار در کلاس) (سراسری تجربی - ۹۶)

- ۱) $x-1$
- ۲) $x+1$
- ۳) x
- ۴) $2x$

۱۴) اگر $y = f(x)$ یک تابع خطی گذرنده از نقاط $(0, a)$ و $(a, 0)$ باشد، ضابطه‌ی $(f \circ f)(x)$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۴-۱۴- مکمل مثال ۱) (سراسری ریاضی - ۷۷)

- ۱) صفر
- ۲) x
- ۳) $f(x)$
- ۴) $x + 2a$

(ریاضی ۳- صفحه ۱۴-۱۴- مکمل مثال ۱)

۱۵) اگر تابع $f(x) = 2x + m$ نمودار تابع $(f \circ f \circ f)(x)$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، m کدام است؟

- ۱) -۲
- ۲) ۲
- ۳) -۴
- ۴) ۴

(ریاضی ۳- صفحه ۱۴-۱۴- مکمل مثال ۱) (سراسری تجربی - ۸۳)

۱۶) اگر $f(x) = |x| - x$ ، ضابطه‌ی تابع $(f \circ f)(x)$ برابر کدام است؟

- ۱) x
- ۲) $|x|$
- ۳) $x + |x|$
- ۴) صفر

۱۷) اگر $f(x) = (2x-3)^2$ و $g(x) = x+2$ نمودارهای دو تابع f و g با کدام طول متقاطع‌اند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۳- مکمل تمرین ۹-الف) (سراسری تجربی - ۹۲)

- ۱) -۱
- ۲) $\frac{1}{2}$
- ۳) ۱
- ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸) اگر $f(x) = 2x - 5$ و $g(x) = x^2 - 3x + 8$ ، آنگاه مجموع مربعات ریشه‌های معادله $(f \circ g)(x) = 7$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۳- مکمل تمرین ۹-الف)

- ۱) ۵
- ۲) ۴
- ۳) ۶
- ۴) ۸

۱۹) اگر $g(x) = 1 - 2x$ و $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ، آنگاه خط $y = -5$ نمودار تابع $y = (g \circ f)(x)$ را را

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۳- مکمل تمرین ۸-ب)

- ۱) در دو نقطه به طول مثبت قطع می‌کند.
- ۲) در دو نقطه به طول منفی قطع می‌کند.
- ۳) قطع نمی‌کند.
- ۴) در دو طرف محور y ها قطع می‌کند.

۲۰) اگر $f(x) = x^2 + 5x + 4$ و $g(x) = 3x^2 + x - 2$ ، آنگاه مجموع جواب‌های حقیقی معادله $(f \circ g)(x) = 0$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۳- مکمل تمرین ۸) (آزمون کانون - ۹۱)

- ۱) $-\frac{1}{3}$
- ۲) $-\frac{2}{3}$
- ۳) $-\frac{16}{3}$
- ۴) جواب حقیقی ندارد.

۶۱) اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۲۳-۲۳- مکمل تمرین ۸) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۷)

- ۱) $-1, -7$
- ۲) $1, -7$
- ۳) $-1, 7$
- ۴) $1, 7$

۶۲- اگر $f(x) = x^2 + x + 1$ ، آنگاه جواب منفی معادله‌ی $f(3x) = f(x+1)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مکمل تمرین ۸) (آزمون کانون - ۶ آذر ۹۴)

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۶۳- اگر $f(x) = x^2$ ، آنگاه معادله‌ی $f(f(x)-1) = 1$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مکمل تمرین ۸)

- (۱) دو ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف (۲) یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف
(۳) چهار ریشه‌ی ساده (۴) سه ریشه‌ی ساده

۶۴- اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ، آنگاه مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x ها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مکمل تمرین ۸) (سراسری تجربی - ۹۱)

- (۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-3, 2)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-1, 4)$

۶۵- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ ، آنگاه مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله‌ی $y = 3$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مکمل مثال ۲) (سراسری تجربی - ۹۵)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۶

۶۶- تابع با ضابطه‌ی $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مکمل مثال ۲) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

- (۱) $\frac{1}{4}$ و ۹ (۲) $\frac{1}{4}$ و ۹ (۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۴) ۹ و ۴

۶۷- اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (سراسری تجربی - ۹۷)

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

۶۸- اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (سراسری تجربی - ۹۰)

- (۱) $x^2 + 1$ (۲) $x^2 + 3$ (۳) $x^2 + 4x + 5$ (۴) $x^2 - 4x + 5$

۶۹- اگر $f(x+1) + f(3) = 2x + 1$ باشد، نمودار تابع $y = (f \circ f)(x)$ محور y ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۹ بهمن ۹۴)

- (۱) $\frac{27}{2}$ (۲) $-\frac{21}{2}$ (۳) $-\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۷۰- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ ، مقدار $g(1)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (سراسری تجربی - ۸۴)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۱- اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ ، مقدار $g(-2)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۷۲- اگر $f(x) = 2x^2 + 1$ و $(f \circ g)(x) = 2x - 4\sqrt{x} + 3$ باشند، $g(4)$ کدام می‌تواند باشد؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۹ بهمن ۹۴)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۳- اگر $f(x) = \frac{4x-1}{3}$ و $g \circ f(x+1) = \frac{2x+3}{5}$ باشد، $g(-1)$ کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۱۵ مرداد ۹۵)

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) ۱ (۴) صفر

۱۴ -۷۴ اگر $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(g(x)) = x^2 + x$ باشد، مقدار $f(2f(1)) + f(2g(1))$ کدام است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۲ (۴) ۲۴

۱۵ -۷۵ اگر $f(x) = (\sqrt{3})^x$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ ، آنگاه تابع $g \circ f$ چگونه است؟
 (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی و بعد نزولی (۴) ابتدا نزولی و بعد صعودی

۱۶ -۷۶ تعداد باکتری‌هایی که در یک غذای معین تولید می‌شود با فرمول $2 \leq T \leq 14$ و $N(T) = 20T^2 - 80T + 500$ که در آن T دمای غذا برحسب درجه‌ی سلسیوس است، محاسبه می‌شود. وقتی غذا از فریزر خارج می‌شود، دمای غذا توسط رابطه‌ی $T(t) = 4t + 2$ ، $0 \leq t \leq 3$ محاسبه می‌شود، که در آن t برحسب ساعت است، چند ساعت بعد تعداد باکتری‌ها ۱۱۴۰ خواهد بود؟
 (۱) ۲ ساعت (۲) ۳ ساعت (۳) ۱/۵ ساعت (۴) ۲/۵ ساعت

۱۷ -۷۷ هزینه‌ی تولید هفتگی x واحد از یک کالای صنعتی، توسط تابع با ضابطه‌ی $c(x) = 70x + 800$ (به هزار تومان) به دست می‌آید. هم‌چنین تعداد واحد کالای تولید شده در هر ساعت از رابطه‌ی $x(t) = 40t$ به دست می‌آید. هزینه‌ی تولید ۶ ساعت از کالای مفروض، چند هزار تومان است؟
 (۱) ۱۷۶۰۰ (۲) ۱۵۸۰۰ (۳) ۱۶۸۰۰ (۴) ۱۵۶۰۰

نمایش ماشین‌ترکیب توابع تیپ ۶ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ ریاضی ۳

۱۸ -۷۸ اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow 2x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ ، آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹ -۷۹ با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow 6x + k$ ، اگر $g(x) = 3x^3 - 2$ و $f(-\frac{19}{9}) = 1$ باشد، حاصل $f(1)$ کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) ۵

۲۰ -۸۰ اگر خروجی ماشین شکل مقابل برای ورودی ۲، برابر ۵- باشد، A کدام است؟
 خروجی $\rightarrow \boxed{\sqrt{x} - 2x - 4} \rightarrow \boxed{2x + A} \rightarrow$ ورودی
 (۱) $-\frac{15}{4}$ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) $\frac{15}{4}$

صفحه ۱۳ و تمرین های صفحه ۲۲ ریاضی ۳

نمایش زوج مرتبی ترکیب توابع \leftarrow برای محاسبه ی تابع $f \circ g$ وقتی دو تابع f و g به صورت زوج مرتب داده شده باشند، مقدار تابع $f \circ g$ را در نقاط دامنه ی g حساب می کنیم. اگر $x_0 \in D_g$ ولی $x_0 \notin D_f$ ، آنگاه x_0 در ترکیب شرکت نمی کند.

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (3, 6), (-2, 5), (7, 11)\}$ و $g = \{(1, 0), (2, -1), (5, 11), (6, 9)\}$ ، آنگاه تابع $f \circ g$ را بیابید.

حل: از آنجایی که $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، با ورودی های x_0 از زوج های مرتب (x_0, y_0) تابع f شروع می کنیم و مقدار تابع g را در y_0 می یابیم. (به شرط وجود).

$$\xrightarrow{x=1} g(f(1)) = g(2) = -1 \rightarrow (1, -1)$$

$$\xrightarrow{x=3} g(f(3)) = g(6) = 9 \rightarrow (3, 9) \quad \Rightarrow f \circ g = \{(1, -1), (3, 9), (-2, 11)\}$$

$$\xrightarrow{x=-2} g(f(-2)) = g(5) = 11 \rightarrow (-2, 11)$$

$$\xrightarrow{x=7} g(f(7)) = g(11) \text{ تعریف نمی شود.}$$

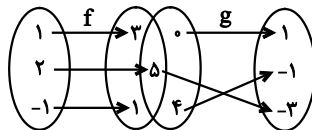
سؤال ۱۰

صفحه ۱۳ و تمرین های صفحه ۲۲ ریاضی ۳

تیپ ۷

نمایش زوج مرتبی ترکیب توابع

ریاضی ۳ - صفحه ۱۳ - مکمل مثال (آزمون کانون - ۹۲)

۱-۸۱ با توجه به شکل مقابل، تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $\{(2, -2)\}$
 (۲) $\{(1, 1), (2, -2), (-1, -2)\}$
 (۳) $\{(0, 3), (4, 1)\}$
 (۴) $\{(5, -2)\}$

۲-۸۲ اگر $f = \{(3, -1), (4, -5), (1, -2)\}$ و $g = \{(-1, -3), (2, 4), (-1, 3)\}$ باشد، حاصل $f(g(-1)) + g(2f(4))$ کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱)

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۲

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۲) (آزمون کانون - ۹۰)

۳-۸۳ اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g = \{(1, 4), (2, 1), (3, -1)\}$ ، آنگاه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $\{(1, \frac{1}{3}), (3, -1)\}$ (۲) $\{(4, \frac{4}{3}), (-1, \frac{-1}{3})\}$ (۳) $\{(1, \frac{1}{3}), (3, \frac{-1}{3})\}$ (۴) $\{(1, 4), (3, -1)\}$

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱) (سراسری تجربی - ۸۳)

۴-۸۴ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$ ، تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵-۸۵ تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $(4, 2) \in f \circ g$ و $(4, 1) \in g$ باشند، دوتایی (a, b) کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱) (سراسری ریاضی - ۹۰)

- (۱) $(3, 4)$ (۲) $(4, 3)$ (۳) $(4, 5)$ (۴) $(5, 4)$

۶-۸۶ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ ، آنگاه عدد a کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱) (سراسری تجربی - ۹۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷-۸۷ اگر $f = \{(a, 2), (5, 2a-b), (2a, -b)\}$ و $g = \{(2, a+b), (-1, 5), (6, 3a+b)\}$ و $g(f(a)) = 2f(g(-1)) = 6$ ، آنگاه $g(6)$ کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱)

- (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۱۵ (۴) ۲۷

۸-۸۸ مجموعه اعضای برد تابع $y = f \circ f$ وقتی که $f = \{(2, 6), (1, 5), (5, 7), (6, 9)\}$ باشد، کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱) (آزمون کانون - ۹۴)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۶ (۴) ۸

۹-۸۹ اگر $f = \{(1, -1), (5, 2), (-1, 0/5), (4, 1/5)\}$ و $g = \{(3, 2), (2, 3), (4, -3), (1, 5)\}$ ، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

ریاضی ۳ - صفحه ۲۲ - مکمل تمرین (۱)

- (۱) $\{5, -3\}$ (۲) $\{5, -3, 2\}$ (۳) $\{2, -3, 3\}$ (۴) $\{-3, 2, 5, 3\}$

۱۰-۹۰ اگر بدانیم که $f(x) = 2^{-x}$ و $g = \{(5, 6), (4, 5), (2, 1), (3, a)\}$ ، حداکثر a برای این که تابع $f \circ g$ نزولی باشد، کدام است؟

ریاضی ۳ - ترکیبی - ترکیب توابع و یکنوایی (آزمون کانون - ۹۶)

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

دامنه‌ی ترکیب توابع

۲. ترکیب توابع

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ ریاضی ۳

دامنه‌ی ترکیب توابع

دامنه‌ی ترکیب توابع \leftarrow برای دو تابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g ، دامنه‌ی تابع $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

■ مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x+2}$ آنگاه دامنه و ضابطه‌ی تابع $f \circ f$ را بیابید.

◀ حل: دامنه‌ی تابع f ، $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ است، با توجه به تعریف داریم:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq -2 \mid \frac{1}{x+2} \neq -2\} \Rightarrow \frac{1}{x+2} \neq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq x+2 \Rightarrow x \neq -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-2, -\frac{5}{2}\}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} + 2} = \frac{x+2}{2x+5} \Rightarrow (f \circ f)(x) = \frac{x+2}{2x+5}, x \neq -2$$

نتیجه: در تعیین ضابطه‌ی تابع مرکب، باید دامنه‌ی تابع مرکب را بیابیم و در کنار ضابطه بنویسیم.

■ مثال: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد و آنگاه دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را بیابید.

◀ حل: دامنه‌ی تابع f ، برابر $D_f = [-3, 4]$ و $D_g = [1, +\infty)$ بنابراین:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [1, +\infty) \mid -3 \leq 3\sqrt{x-1} \leq 4\}$$

باید نامعادله‌ی $-3 \leq 3\sqrt{x-1} \leq 4$ را حل کنیم، با به توان دو رساندن طرفین نامساوی داریم:

$$0 \leq 3\sqrt{x-1} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 9x-9 \leq 16 \Rightarrow 9 \leq 9x \leq 25 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{25}{9}$$

$$\text{پس } D_{f \circ g} = \left[1, \frac{25}{9}\right]$$

نکته: با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع مرکب، اگر دامنه‌ی تابع f ، بازه‌ی $[a, b]$ باشد، برای تعیین دامنه‌ی تابع $f(kx)$ کافی است از نامعادله‌ی $a \leq kx \leq b$ ، حدود تغییرات x را بیابیم.

■ مثال: اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-2, 4]$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(2x)$ را بیابید.

◀ حل: باید نامعادله‌ی توأم $-2 \leq 2x \leq 4$ را حل کنیم:

$$-2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_{f(2x)} = [-1, 2]$$

تذکره: ترکیب توابع در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد، یعنی $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

■ مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = 2x$ ، ضابطه‌ی دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را بیابید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-2} = \sqrt{2x-2}, x \geq 1$$

◀ حل:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) = 2\sqrt{x-2}, x \geq 2$$

■ مثال: تابع $h(x) = (\sqrt{x} + 1)^3$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

◀ حل: دو تابع f و g را با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x} + 1$ و $g(x) = x^3$ در نظر بگیرید. با تشکیل تابع $g \circ f$ داریم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} + 1)^3 = h(x)$$

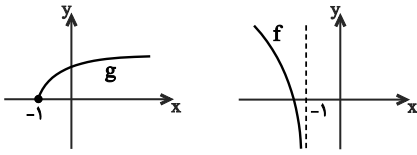
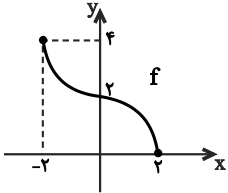
از طرفی با انتخاب دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = (x+1)^3$ و تشکیل تابع $g \circ f$ نیز به همین جواب می‌رسیم، پس جواب منحصر به فرد نیست.

سؤال ۱۰

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و تمرین‌های صفحه‌ی ۲۲ ریاضی ۳

تیپ ۸

دامنه‌ی ترکیب توابع

- ۱-۹۱ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = 2x^2 - 5$ ، آنگاه ضابطه‌ی تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟
 (۱) $x \geq 1$ و $2x - 3$ (۲) $x \in \mathbb{R}$ و $2x - 9$ (۳) $x \geq 2$ و $2x - 9$ (۴) $x \in \mathbb{R}$ و $2x - 3$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۴ - مشابه مثال ۲)
- ۲-۹۲ اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ ، آنگاه $(f \circ g)(x)$ برابر است با:
 (۱) $x \neq 0$ و $\frac{1}{1-x}$ (۲) $x \neq 0$ و $\frac{1}{x-1}$ (۳) $\frac{1}{1-x}$ (۴) $\frac{1}{x-1}$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۲ - مشابه کار در کلاس)
- ۳-۹۳ اگر f و g دو تابع و $h(x) = (f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ ، آنگاه ضابطه‌ی $f(x)$ کدام تابع زیر نمی‌تواند باشد؟
 (۱) $\sqrt[3]{x}$ (۲) $\sqrt[3]{x-4}$ (۳) $\sqrt[3]{x+4}$ (۴) $\sqrt[3]{x^4 - 4}$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۲۲ - مکمل تمرین ۷)
- ۴-۹۴ اگر $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $D_f = [3, +\infty)$ باشند، آنگاه دامنه‌ی تابع $(f \circ g)(x)$ کدام است؟
 (۱) $(1, 3]$ (۲) $[3, +\infty)$ (۳) $(1, 2]$ (۴) $[2, +\infty)$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۴ - مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون - ۱۱ بهمن ۹۲)
- ۵-۹۵ هرگاه نمودار تابع‌های f و g به صورت زیر باشد، $D_{f \circ g}$ کدام است؟
 (۱) $[-1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -1]$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) \emptyset

- ۶-۹۶ اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ f$ شامل چند عدد صحیح خواهد بود؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

- ۷-۹۷ در کدام محدوده از دامنه‌ی تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ ، تابع $f \circ f$ قابل تعریف است؟
 (۱) $x \geq -1$ (۲) $x \geq 1$ (۳) $x \leq 3$ (۴) $-1 \leq x \leq 3$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۴ - مکمل مثال ۲) (آزمون کانون - ۱۷ آذر ۹۶)
- ۸-۹۸ اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{2x+4}$ باشند، آنگاه دامنه‌ی تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟
 (۱) $[-1, 0)$ (۲) $(-2, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $[0, 1]$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۲۲ - مشابه تمرین ۱-ب) (آزمون کانون - ۲۳ بهمن ۹۴)
- ۹-۹۹ اگر $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $f(x) = x + \frac{1}{x}$ باشند، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ کدام است؟
 (۱) $\{1, -1\}$ (۲) $\{1, 0, -1\}$ (۳) $[2, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -2]$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۲۲ - مکمل تمرین ۱-ب)
- ۱۰-۱۰۰ اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ ، دامنه‌ی تابع $f(-x)$ کدام است؟
 (۱) $x \leq -1$ (۲) $x \geq -1$ (۳) $x \leq 1$ (۴) $x \geq 1$ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۲۲ - مکمل تمرین ۱) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

نمودار تابع $kf(x)$

۳. تبدیل نمودار توابع

صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳ ریاضی ۳

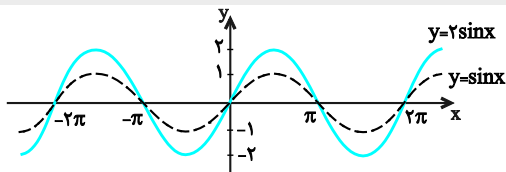
نمودار تابع $kf(x)$

نمودار تابع $kf(x)$ فرض کنید نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در دسترس است. برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه‌ی تابع f را k برابر کنیم. به عبارت دیگر اگر نقطه‌ی $A(a, b)$ روی تابع f باشد، نقطه‌ی $A'(a, kb)$ روی تابع $kf(x)$ است.

$y = kf(x), k > 1$	$y = kf(x), 0 < k < 1$
	
اگر $k > 1$ باشد، تابع f با ضریب k در راستای محور y ها منبسط (کشیده‌تر) می‌شود.	اگر $0 < k < 1$ باشد، تابع f با ضریب k در راستای محور y ها منقبض (فشرده‌تر) می‌شود.

نکته‌ی (۱): دامنه‌ی تابع‌های $y = kf(x)$ و $y = f(x)$ یکسان است. برای محاسبه‌ی برد تابع $y = kf(x)$ کافی است برد f را در عدد k ضرب کنیم. به عبارت دیگر اگر برد تابع f بازه‌ی $[a, b]$ باشد، آنگاه برد تابع kf بازه‌ی $[ka, kb]$ است. ($k > 0$)

نکته‌ی (۲): محل‌های تلاقی (صفرهای تابع) دو تابع f و kf با محور x ها یکسان است.

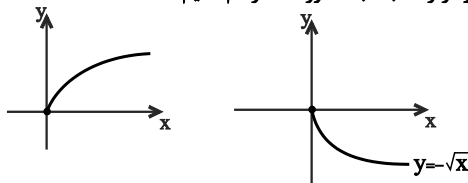


مثال: نمودار تابع $y = 2\sin x$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ رسم کنید.
 حل: برای رسم تابع $y = 2\sin x$ به کمک $y = \sin x$ کافی است عرض هر نقطه از آن را ۲ برابر کنیم. در این صورت حداکثر تابع $y = 2\sin x$ برابر ۲ و حداقل آن -۲ است.

رسم نمودار تابع $y = -f(x)$: فرض کنید نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در دسترس باشد، برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال: با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را بیابید.

حل: نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به شکل زیر است، برای رسم $y = -\sqrt{x}$ کافی است قرینه‌ی نمودار را نسبت به محور x ها رسم کنیم:



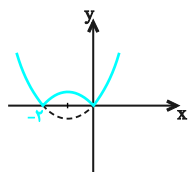
$D_y = [0, +\infty)$

$R_y = (-\infty, 0]$

مثال: چگونه می‌توان با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2$ ، نمودار تابع با ضابطه‌ی $g(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ را رسم نمود؟

حل: ابتدا تابع $f(x) = x^2$ را سه واحد به راست انتقال می‌دهیم تا $y = (x - 3)^2$ حاصل شود، سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا $y = -(x - 3)^2$ به دست آید و با ضریب ۲ آن را در راستای محور y ها (عمودی) می‌کشیم و در نهایت یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$: فرض کنید نمودار تابع $y = f(x)$ در اختیار باشد، برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافی است قسمت‌هایی از نمودار که پایین محور x هاست را نسبت به محور x ها، قرینه کنیم و سپس قسمت پایین محور x ها را حذف کنیم.



مثال: نمودار تابع $y = |x^2 + 2x|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار تابع $y = x^2 + 2x$ را رسم نموده و سپس قسمت‌هایی از نمودار که پایین محور x هاست را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

سؤال ۱۰

صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ ریاضی ۳

تیپ ۹

نمودار تابع $kf(x)$

۱-۱۰۱ اگر نقطه‌ی $A(-4, 2)$ بر روی تابع $y = f(x)$ باشد و تبدیل یافته‌ی این نقطه بر روی تابع $g(x) = af(x)$ نقطه‌ی $A'(-4, -4)$ باشد، آنگاه a کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

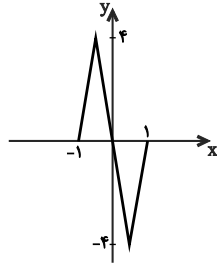
-۲ (۲)

۲ (۱)

(ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۵- مرتبط با یادآوری)

۱۰۲- اگر نمودار تابع $y = 2f(x-1)$ به شکل زیر باشد، آنگاه برد تابع $g(x) = \frac{-2}{3}f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۵- مکمل مثال)



- (۱) یک
- (۲) دو
- (۳) سه
- (۴) چهار

۱۰۳- برای رسم نمودار تابع $y = -2f(x)$ از روی تابع $y = f(x)$ کافی است ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور قرینه کرده و سپس با ضریب در راستای محور y ها منبسط کنیم.

(ریاضی ۳- صفحه ۱۵- مکمل مثال)

(۴) y ها - $\frac{1}{2}$

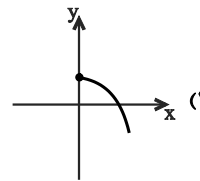
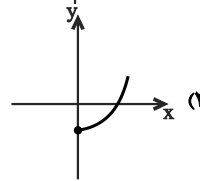
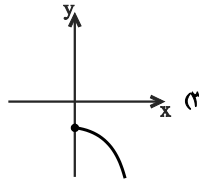
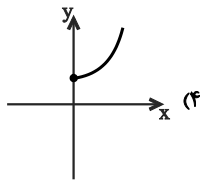
(۳) y ها - ۲

(۲) x ها - $\frac{1}{2}$

(۱) x ها - ۲

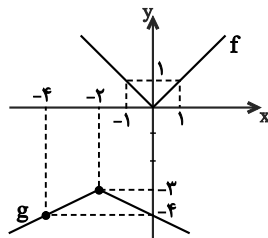
۱۰۴- اگر نمودار تابع $y = 1 - f(x)$ به شکل باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ به کدام شکل زیر است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۵- مکمل مثال)



(ریاضی ۳- صفحه ۱۶- مکمل کار در کلاس ۱)

۱۰۵- در شکل زیر، نمودار g از روی f ساخته می‌شود. $g(x)$ برابر کدام است؟



(۱) $-2f(x+2) - 3$

(۲) $\frac{1}{2}f(x+2) - 3$

(۳) $2f(x+2) - 3$

(۴) $-\frac{1}{2}f(x+2) - 3$

۱۰۶- فرض کنید $f(x) = |x|$. تابع g از انتقال یک واحد f به راست و سپس انعکاس نمودار حاصل نسبت به محور x ها و در انتها انتقال یک واحد به بالای نمودار حاصل در راستای محور y ها به دست می‌آید. در چه بازه‌ای نمودار دو تابع f و g بر هم منطبق‌اند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۶- مکمل کار در کلاس ۱)

(۴) \mathbb{R}

(۳) $(-\infty, 0]$

(۲) $[1, +\infty)$

(۱) $[0, 1]$

۱۰۷- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ باشد، آنگاه نمودار دو تابع $y = f(x-2) - 2$ و $y = 3 - f(x)$ ، یکدیگر را در کدام بازه‌ی زیر قطع می‌کنند؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۶- مرتبط با کار در کلاس ۱)

(۴) $(9, +\infty)$

(۳) $(6, 9)$

(۲) $(2, 6)$

(۱) $(0, 6)$

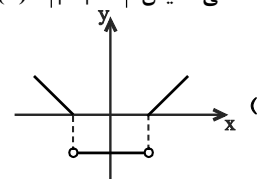
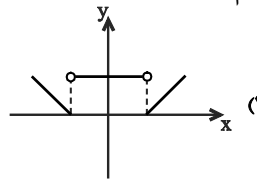
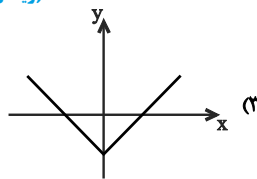
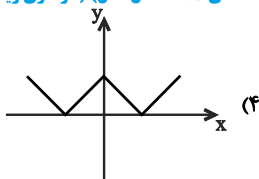
صفحه ۱۷ ریاضی ۳

تیپ ۱۰

نمودار تابع $y = |f(x)|$

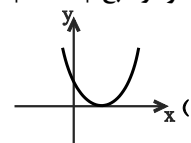
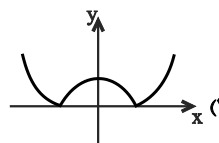
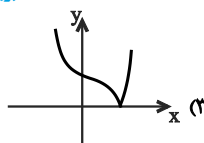
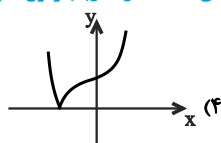
۱۰۸- منحنی نمایش $f(x) = ||x| - 2|$ کدام است؟

(ریاضی ۳- صفحه ۱۷- مکمل مثال) (سراسری ریاضی - ۶۷)



(ریاضی ۳- صفحه ۱۷- مکمل مثال) (آزمون کانون - ۵ آذر ۹۵)

۱۰۹- نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ کدام است؟



(ریاضی ۳- صفحه ۱۷- مکمل مثال) (آزمون کانون با تغییر - ۱۹ آذر ۹۵)

۱۱۰- خط به معادله‌ی $y = 2x$ نمودار تابع $y = |x^2 - 2|$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

(۴) ۴

(۳) صفر

(۲) ۲

(۱) ۱

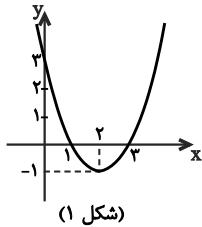
نمودار تابع $f(kx)$

۳. تبدیل نمودار توابع

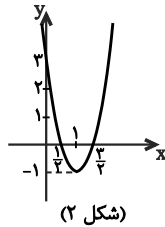
صفحه‌های ۲۳ تا ۲۳ ریاضی ۳

نمودار تابع $f(kx)$

نمودار تابع $f(kx)$ ◀ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x-1)(x-3)$ را در نظر بگیرید. محل‌های تلاقی این تابع با محور x ها دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ هستند و نقطه‌ی می‌نیم آن به طول $x_S = \frac{1+3}{2} = 2$ و به عرض -1 است، بنابراین رأس آن $S(2, -1)$ و نمودار این تابع به شکل (۱) است. حال تابع با ضابطه‌ی $y = f(2x)$ را در نظر بگیرید. داریم:



(شکل ۱)



(شکل ۲)

$$y = f(2x) = (2x-1)(2x-3)$$

محل‌های تلاقی این تابع با محور x ها نقاط به طول‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ است، هم‌چنین طول رأس آن $x_{S'} = 1$ و رأس آن به مختصات $S'(1, -1)$ است و نمودار آن به شکل (۲) است.

با مقایسه‌ی دو نمودار دیده می‌شود که هر نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع $f(x)$ ، به نقطه‌ی $A'(\frac{x_0}{k}, y_0)$ روی تابع $f(kx)$ تبدیل می‌شود. فرض کنید نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در اختیار باشد. برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول هر نقطه‌ی تابع f را بر k تقسیم کنیم، به عبارت دیگر اگر نقطه‌ی $A(a, b)$ روی تابع f باشد، نقطه‌ی $A'(\frac{a}{k}, b)$ روی تابع $f(kx)$ است. در این حالت عرض هر نقطه ثابت می‌ماند.

$y = f(kx), k > 1$	$y = f(kx), 0 < k < 1$
اگر $k > 1$ باشد، تابع f در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده‌تر) می‌شود.	اگر $0 < k < 1$ باشد، تابع f در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده‌تر) می‌شود.

نکته (۱): برد تابع‌های $y = f(kx)$ و $y = f(x)$ یکسان است. برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع $y = f(kx)$ کافی است دامنه‌ی f را بر عدد k تقسیم کنیم.

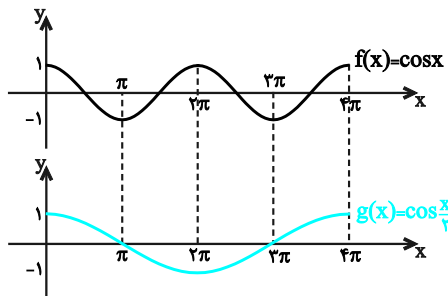
نکته (۲): برای یافتن محل‌های تلاقی (صفرهای تابع) $y = f(kx)$ با محور x ها کافی است محل‌های تلاقی تابع f با محور x ها را بر k تقسیم کنیم.

مثال: اگر دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ بازه‌ی $D_f = [-3, 9]$ ، و برد آن $R_f = [2, 4]$ باشد، دامنه و برد تابع $h(x) = f(3x)$ را بیابید.
 حل: برای تعیین دامنه داریم:
 $-3 \leq 3x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3x)} = [-1, 3]$
 برد دو تابع $y = f(x)$ و $h(x) = f(3x)$ یکسان است:

$$R_{f(x)} = R_{f(3x)} = [2, 4]$$

مثال: نمودار تابع $g(x) = \cos \frac{x}{2}$ را به کمک نمودار تابع $f(x) = \cos x$ در بازه‌ی $[0, 4\pi]$ رسم کنید.

حل: نمودار تابع f در بازه‌ی $[0, 4\pi]$ به شکل زیر است. از آنجایی که $k = \frac{1}{2}$ نمودار تابع g از انبساط نمودار تابع f با ضریب ۲ به دست می‌آید.



محل‌های تلاقی نمودار تابع g با محور x ها از تقسیم محل‌های تلاقی نمودار تابع f بر $\frac{1}{2}$ به دست می‌آید، بنابراین محل‌های تلاقی نمودار تابع g با محور x ها عبارتند از:

$$\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = \pi, \quad \frac{3\pi}{\frac{1}{2}} = 3\pi$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت روبرو است.

۱ رسم نمودار تابع‌های $y = f(-x)$ و $y = -f(-x)$: فرض کنید نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در دسترس باشد:

الف- برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ ، کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.

ب- برای رسم نمودار تابع $y = -f(-x)$ ، کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.