

دورهٔ دوم متوسطه
پایه یازدهم

حسابان

حسین انصاری ●

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

خداوند منان را سپاس می‌گزاریم که توفیق نگارش این کتاب را عطا فرمود تا بدین وسیله سهمی کوچک در پرورش استعدادهای درخشان جوانان این مرز و بوم داشته باشم. افزون بر ۳۰ سال کار با هوشمندان کشور تجارب گران‌بهایی در اختیار حقیر نهاده است که با بکارگیری این تجربیات کتابی ارزشمند و عمیق که منطبق با اهداف نظام جدید آموزشی کشور می‌باشد، به رشته تحریر درآورده و آن را به آینده‌سازان میهن تقدیم کنم تا با بهره‌گیری مناسب از آن بر دانش ریاضی خود افزوده و آینده‌ای روشن در تحصیل علم ریاضی برای خود ترسیم کنند.

در این کتاب در هر فصل مفاهیم مهم حسابان آموزش داده شده و با مثال‌های متنوع به تعمیق آن پرداخته‌ایم در پایان هر بخش نیز تمریناتی در سطوح مختلف یادگیری قرار داده‌ام که نیاز دانش‌آموزان کوشا و خلاق را برآورده می‌کنند.

در پایان از کارکنان انتشارات پرافتخار مبتکران که کار آماده‌سازی کتاب را بر عهده داشته‌اند به ویژه از آقایان خدایار مبین و محسن انصاری و خانم‌ها: کبری مرادی، ملیحه محمدی آندرس، مینا غلام احمدی، و مینا هرمزی صمیمانه تشکر می‌کنم.

حسین انصاری

فصل اول: جبر و معادله ۷

بخش اول (دنباله‌های حسابی و هندسی) ۸

تمرین بخش اول ۲۵

بخش دوم: (معادلات درجه دوم) ۳۱

تمرین بخش دوم ۴۶

بخش سوم (معادلات گویا و گنگ) ۵۱

تمرین بخش سوم ۵۶

بخش چهارم (قدرمطلق و ویژگی‌های آن) ۶۳

تمرین بخش چهارم ۷۳

بخش پنجم (آشنایی با هندسه تحلیلی) ۷۶

تمرین بخش پنجم ۸۴

..... ۸۷

فصل دوم: تابع

بخش اول (آشنایی بیش تر با تابع) ۸۸

تمرین بخش اول ۹۵

بخش دوم (انواع تابع) ۹۸

تمرین بخش دوم ۱۱۵

بخش سوم (وارون تابع) ۱۲۰

تمرین بخش سوم ۱۲۸

بخش چهارم (اعمال روی توابع) ۱۳۳

تمرین بخش چهارم ۱۴۰

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی ۱۴۵

بخش اول (تابع نمایی) ۱۴۷

تمرین بخش اول ۱۵۱

۱۵۲	بخش دوم (تابع لگاریتمی و لگاریتم)
۱۵۵	تمرین بخش دوم
۱۵۶	بخش سوم (ویژگی‌های لگاریتم و معادلات لگاریتمی)
۱۶۵	تمرین بخش سوم
۱۶۷	فصل چهارم: مثلثات
۱۶۸	بخش اول (رادیان)
۱۷۲	تمرین بخش اول
۱۷۳	بخش دوم (مقادیر مثلثاتی برای برخی زوایا)
۱۸۱	تمرین بخش دوم
۱۸۴	بخش سوم (توابع مثلثاتی)
۱۹۴	تمرین بخش سوم
۱۹۷	بخش چهارم (روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا)
۲۰۶	تمرین بخش چهارم
۲۱۱	فصل پنجم: (حد و پیوستگی)
۲۱۲	بخش اول (مفهوم حد و فرآیندهای آن)
۲۱۸	تمرین بخش اول
۲۲۰	بخش دوم (حدهای یک طرفه - حد چپ و حد راست)
۲۲۵	تمرین بخش دوم
۲۲۷	بخش سوم (قضایای حد)
۲۳۷	تمرین بخش سوم
۲۳۹	بخش چهارم (محاسبه حد توابع کسری)
۲۴۴	تمرین بخش چهارم
۲۴۶	بخش پنجم (پیوستگی)
۲۵۴	تمرین بخش پنجم
۲۵۶	سوالات کنکور سال ۹۶ و پاسخ
۲۶۲	سوالات کنکور سال ۹۷ و پاسخ
۲۶۸	سوالات کنکور سال ۹۸ و پاسخ
۲۷۳	سوالات کنکور سال ۹۹ و پاسخ

فصل ۱

جبر و معادله

بخش اول : دنباله‌های حسابی و هندسی

بخش دوم : معادلات درجه دوم

بخش سوم : معادلات گویا و گنگ

بخش چهارم : قدر مطلق و ویژگی‌های آن

بخش پنجم : آشنایی با هندسه‌ی تحلیلی

چپر و معادله

۱

بفش اول: دنباله‌های حسابی و هندسی

در باره دنباله‌ها در کتاب دهم به تفصیل سخن گفته‌ایم؛ در این مقال ضمن یادآوری به تکمیل و تعمیق آن می‌پردازیم.

دنباله عددی (حسابی)

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با افزودن مقداری ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید، دنباله حسابی نامیده می‌شود. آن مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله می‌نامند و آن را با d نشان می‌دهند. اگر جمله اول دنباله حسابی باشد، جمله عمومی آن به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ می‌باشد.

مثال ۱: در دنباله حسابی زیر اولاً جمله پانزدهم را به دست آورید. ثانیاً معین کنید جمله چندم دنباله برابر ۳۹ است؟

$-۹, -۵, -۱, ۳, \dots$

حل

$$d = -۵ - (-۹) = ۴$$

$$t_{15} = t_1 + (15-1)d = -۹ + 14 \times 4 = -۹ + ۵۶ = ۴۷$$

$$t_n = ۳۹ \Rightarrow t_1 + (n-1)d = ۳۹ \Rightarrow -۹ + (n-1) \times 4 = ۳۹$$

$$-۹ + 4n - 4 = ۳۹ \Rightarrow 4n - 13 = ۳۹ \Rightarrow 4n = ۵۲ \Rightarrow n = 13$$

مثال ۲: در یک دنباله عددی جمله هفتم برابر ۱۱- و جمله سیزدهم برابر ۲۹- است، دنباله را مشخص کنید.

حل

$$\begin{cases} t_7 = -۱۱ \\ t_{13} = -۲۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 6d = -۱۱ \\ t_1 + 12d = -۲۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_1 - 6d = ۱۱ \\ t_1 + 12d = -۲۹ \end{cases}$$

$$6d = -۱۸ \Rightarrow d = -۳$$

$$t_1 + 6d = -۱۱ \Rightarrow t_1 + 6(-۳) = -۱۱ \Rightarrow t_1 - ۱۸ = -۱۱ \Rightarrow t_1 = ۷$$

$۷, ۴, ۱, -۲, \dots$

مثال ۳: در یک دنباله حسابی اگر $m + n = r + s$ باشد ثابت کنید:

$$t_m + t_n = t_r + t_s$$

حل

$$t_m + t_n = t_1 + (m-1)d + t_1 + (n-1)d = 2t_1 + md - d + nd - d = 2t_1 + (m+n)d - 2d$$

$$= 2t_1 + (r+s)d - 2d = t_1 + t_1 + rd + sd - d - d = (t_1 + rd - d) + (t_1 + sd - d)$$

$$= [t_1 + (r-1)d] + [t_1 + (s-1)d] = t_r + t_s$$

با توجه به مثال فوق می‌توان گفت در دنباله حسابی مجموع جمله‌های متساوی‌البعد از طرفین برابرند و اگر تعداد جمله‌ها فرد باشد، این مجموع با دو برابر جمله وسط مساوی است.

$$t_1, t_p, t_s, \dots, t_n$$

$$t_1 + t_n = t_p + t_{n-1} = t_s + t_{n-2} = \dots = 2t_{\frac{n+1}{2}}$$

اگر تعداد جمله‌ها زوج باشد خواهیم داشت:

$$t_1 + t_n = t_p + t_{n-1} = t_s + t_{n-2} = \dots = 2t_1 + (n-1)d$$

مثال ۴: در یک دنباله حسابی $t_9 + t_{15} = -52$ جمله دوازدهم دنباله چقدر است؟

حل

$$12 + 12 = 9 + 15 \Rightarrow t_{12} + t_{12} = t_9 + t_{15} \Rightarrow 2t_{12} = -52 \Rightarrow t_{12} = -26$$

نکته اگر t_m و t_n دو جمله از یک دنباله حسابی و $m > n$ باشد، آن‌گاه:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

نکته در یک دنباله حسابی که جمله اول و جمله آخر آن معلوم باشد تعداد جمله‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1$$

مثال ۵: چند عدد سه رقمی وجود دارد که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر ۵ برابر یک باشد؟

حل

$$101, 106, 111, \dots, 996$$

جملات دنباله عبارتند از:

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1 = \frac{996 - 101}{5} + 1 = 179 + 1 = 180$$

مثال ۶: مجموع پنج عدد که تشکیل دنباله حسابی می‌دهند ۱۰ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۳۲۰ است، این پنج عدد کدامند؟

حل

اعداد دنباله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$$

$$(x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 10 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

$$(x - 2d)(x - d)x(x + d)(x + 2d) = 320$$

$$x(x^2 - 4d^2)(x^2 - d^2) = 320 \Rightarrow 2(4 - 4d^2)(4 - d^2) = 320$$

$$8(1-d^2)(4-d^2) = 320 \Rightarrow (1-d^2)(4-d^2) = 40$$

$$4-d^2-4d^2+d^4 = 40 \Rightarrow d^4-5d^2-36 = 0 \Rightarrow (d^2-9)(d^2+4) = 0$$

$$d^2-9=0 \Rightarrow d^2=9 \Rightarrow d = \pm 3$$

با فرض $d = 3$ جملات دنباله عبارتند از:

$$-4, -1, 2, 5, 8$$

با فرض $d = -3$ جملات دنباله عبارتند از:

$$8, 5, 2, -1, -4$$

مجموع جملات یک تصاعد حسابی متناهی

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$$

$$\begin{cases} S_n = t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + \dots + (t_n - 2d) + (t_n - d) + t_n \\ S_n = t_n + (t_n - d) + (t_n - 2d) + \dots + (t_1 + 2d) + (t_1 + d) + t_1 \end{cases}$$

$$2S_n = (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + \dots + (t_1 + t_n)$$

$$2S_n = n(t_1 + t_n) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n)$$

برای به دست آوردن مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی بدون داشتن جمله n ام می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر تغییر داد:

$$S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n) = \frac{n}{2}[t_1 + t_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$$

مثال ۷: حاصل عبارت $(5 + 8 + 11 + \dots + 53)$ را حساب کنید.

حل

$$t_1 = 5 \quad d = 8 - 5 = 3 \quad n = \frac{53 - 5}{3} + 1 = 17$$

$$S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}(5 + 53) = \frac{17}{2} \times 58 = 493$$

مثال ۸: مجموع بیست جمله اول دنباله زیر را به دست آورید.

$$-10, -6, -2, 2, \dots$$

حل

$$S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times (-10) + (20-1) \times 4] = 10[-20 + 76] = 10 \times 56 = 560$$

مثال ۹: مجموع اعداد سه رقمی که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر یک می‌باشد را حساب کنید.

حل

دنباله اعداد سه رقمی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۳ برابر یک می‌باشد عبارتند از:

$$103, 106, 109, \dots, 997$$

$$n = \frac{997 - 103}{3} + 1 = 298 + 1 = 299$$

$$S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n) \Rightarrow S_{299} = \frac{299}{2}(103 + 997) = \frac{299}{2} \times 1100 = 164450$$

مثال ۱۰: مجموع چند جمله از دنباله زیر برابر ۲۴۶ است؟

$$4, 7, 10, \dots$$

حل

$$S_n = 246 \Rightarrow \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d] = 246 \Rightarrow \frac{n}{2}[2 \times 4 + (n-1) \times 3] = 246$$

$$\frac{n}{2}[8 + 3n - 3] = 246 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n + 5) = 246 \Rightarrow 3n^2 + 5n = 492$$

$$3n^2 + 5n - 492 = 0 \Rightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \times 3 \times 492}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{5929}}{6} = \frac{-5 \pm 77}{6}$$

$$n = \frac{-5 + 77}{6} = \frac{72}{6} = 12 \quad \text{غ ق ق} \quad n = \frac{-5 - 77}{6} = \frac{-82}{6} = \frac{-41}{3}$$

مثال ۱۱: نشان دهید مجموع اعداد طبیعی فرد کوچک‌تر از ۱۰۰۰ مجذور کامل است؟

حل

$$1, 3, 5, \dots, 999$$

$$n = \frac{999 - 1}{2} + 1 = 499 + 1 = 500$$

$$S_{500} = \frac{500}{2}(1 + 999) = \frac{500}{2} \times 1000 = 500 \times 500 = 500^2$$

مثال ۱۲: در یک دنباله حسابی جمله هشتم برابر ۱۰- و مجموع ده جمله اول برابر ۲۵- است، دنباله را مشخص کنید.

حل

$$\begin{cases} t_8 = -10 \\ S_{10} = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 7d = -10 \\ \frac{10}{2}(2t_1 + 9d) = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 7d = -10 \\ 5(2t_1 + 9d) = -25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + 7d = -10 \\ 2t_1 + 9d = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t_1 - 14d = 20 \\ 2t_1 + 9d = -5 \end{cases} \Rightarrow -5d = 15 \Rightarrow d = -3$$

$$t_1 + 7d = -10 \Rightarrow t_1 - 21 = -10 \Rightarrow t_1 = 11$$

$$11, 8, 5, 2, -1, \dots$$

مثال ۱۱: مجموع نه جمله اول یک دنباله حسابی برابر ۸۱ و مجموع پانزده جمله اول آن برابر ۲۲۵ است. مجموع بیست جمله اول دنباله را به دست آورید.

حل

$$\begin{cases} S_9 = 81 \\ S_{15} = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{2}[2t_1 + 8d] = 81 \\ \frac{15}{2}[2t_1 + 14d] = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 4d = 9 \\ t_1 + 7d = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -t_1 - 4d = -9 \\ t_1 + 7d = 15 \end{cases} \Rightarrow 3d = 6 \Rightarrow d = 2$$

$$t_1 + 4 \times 2 = 9 \Rightarrow t_1 = 1$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2t_1 + 19d] = 10[2 \times 1 + 19 \times 2] = 10 \times 40 = 400$$

مثال ۱۲: در یک دنباله حسابی مجموع پنج جمله اول برابر ۳۵ و مجموع پنج جمله بعدی برابر ۴۰ است دنباله را مشخص کنید.

حل

$$\begin{cases} S_5 = 35 \\ S_{10} - S_5 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}[2t_1 + 4d] = 35 \\ 5[2t_1 + 9d] - \frac{5}{2}[2t_1 + 4d] = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + 2d = 7 \\ 10t_1 + 45d - 5t_1 - 10d = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 7 \\ 5t_1 + 35d = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 7 \\ t_1 + 7d = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -t_1 - 2d = -7 \\ t_1 + 7d = -8 \end{cases} \Rightarrow 5d = -15 \Rightarrow d = -3$$

$$t_1 + 2 \times (-3) = 7 \Rightarrow t_1 = 13$$

$$13, 10, 7, 4, 1, -2, \dots$$

مثال ۱۳: اگر مجموع n جمله اول یک دنباله به صورت $S_n = an^2 + bn + c$ باشد، دنباله را مشخص کنید.

حل

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (an^2 + bn + c) - [a(n-1)^2 + b(n-1) + c]$$

$$\begin{aligned}
 &= (an^p + bn + c) - (an^p - 2an + a + bn - b + c) \\
 &= an^p + bn + c - an^p + 2an - a - bn + b - c = 2an + (b - a)
 \end{aligned}$$

$a_n = 2an + b - a$ جمله عمومی دنباله

با توجه به این که درجه n برابر یک می باشد دنباله حسابی است.

$$d = a_n - a_{n-1} = [2an + b - a] - [2a(n-1) + b - a]$$

$$= 2an + b - a - 2an + 2a - b + a = 2a$$

$$a_1 = 2a \times 1 + b - a = a + b$$

مثال ۱۶: در یک دنباله حسابی $t_1 + t_3 + t_5 + \dots + t_{49} = 625$ حاصل عبارت $t_1 + t_5 + t_9 + \dots + t_{49}$ چقدر است؟

حل

$$n = \frac{49-1}{2} + 1 = 25$$

$$\begin{cases}
 t_1 + t_3 + t_5 + \dots + t_{49} = 625 \\
 t_{49} + t_{47} + t_{45} + \dots + t_1 = 625
 \end{cases}$$

$$(t_1 + t_{49}) + (t_3 + t_{47}) + (t_5 + t_{45}) + \dots + (t_{49} + t_1) = 1250$$

$$(t_1 + t_{49}) + (t_1 + t_{49}) + (t_1 + t_{49}) + \dots + (t_1 + t_{49}) = 1250$$

$$25(t_1 + t_{49}) = 1250 \Rightarrow t_1 + t_{49} = 50$$

$$A = t_1 + t_5 + t_9 + \dots + t_{49} \quad n = \frac{49-1}{4} + 1 = 13$$

$$A = t_{49} + t_{45} + t_{41} + \dots + t_1$$

$$2A = (t_1 + t_{49}) + (t_5 + t_{45}) + (t_9 + t_{41}) + \dots + (t_{49} + t_1)$$

$$2A = (t_1 + t_{49}) + (t_1 + t_{49}) + (t_1 + t_{49}) + \dots + (t_1 + t_{49})$$

$$2A = 13(t_1 + t_{49}) \Rightarrow 2A = 13 \times 50 \Rightarrow A = 325$$

مثال ۱۷: اگر $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ مجموع جمله از دنباله های حسابی به جمله های اول ۱ و ۲ و ۳ و ... و قدر نسبت های ۱ و ۳ و ۵ و ... باشند حاصل $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ را به دست آورید.

حل

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2 = 2 + 5 + 8 + \dots = \frac{n}{2} [4 + (n-1) \times 3] = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$$S_3 = 3 + 8 + 13 + \dots = \frac{n}{2} [6 + (n-1) \times 5] = \frac{n(5n+1)}{2}$$

⋮

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= 10 + 20 + 30 + \dots = \frac{n}{2} [20 + (n-1) \times 10] = \frac{n(19n+1)}{2} \\
 S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{10} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(3n+1)}{2} + \frac{n(5n+1)}{2} + \dots + \frac{n(19n+1)}{2} \\
 &= \frac{n}{2} [(n+1) + (3n+1) + (5n+1) + \dots + (19n+1)] \\
 &= \frac{n}{2} [n(1+3+5+\dots+19) + 10] = \frac{n}{2} [n \times \frac{10(1+19)}{2} + 10] \\
 &= \frac{n}{2} (100n + 10) = 5n(10n+1)
 \end{aligned}$$

دنباله هندسی: دنباله‌ای که در آن هر جمله آن (به جز جمله اول) با ضرب کردن جمله قبلی در یک عدد ثابت به دست می‌آید دنباله هندسی نامیده می‌شود، عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامند که آن را با r نشان می‌دهیم. جمله عمومی دنباله به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ می‌باشد.

مثال ۱۸: در دنباله هندسی زیر جمله دوازدهم را حساب کنید و معین کنید جمله چندم دنباله برابر ۱۵۳۶ است؟

$$3, 6, 12, 24, \dots$$

حل

$$r = \frac{6}{3} = 2 \quad t_{12} = t_1 r^{11} = 3 \times 2^{11} = 3 \times 2048 = 6144$$

$$t_n = 1536 \Rightarrow t_1 r^{n-1} = 1536 \Rightarrow 3 \times 2^{n-1} = 1536$$

$$2^{n-1} = 512 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^9 \Rightarrow n-1 = 9 \Rightarrow n = 10$$

مثال ۱۹: در یک دنباله هندسی جمله هفتم برابر ۲۷ و جمله دهم برابر ۷۲۹ است. جمله دوازدهم را به دست آورید.

حل

$$\frac{t_{10}}{t_7} = \frac{729}{27} \Rightarrow \frac{t_1 r^9}{t_1 r^6} = 27 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$t_7 = 27 \Rightarrow t_1 r^6 = 27 \Rightarrow t_1 \times 3^6 = 27 \Rightarrow t_1 = \frac{27}{3^6} = \frac{1}{27}$$

$$t_{12} = t_1 r^{11} = \frac{1}{27} \times 3^{11} = 3^8$$

مثال ۲۰: در یک دنباله هندسی $t_{12} = 8t_9$ و $t_5 = 128$ است دنباله را مشخص کنید.

حل

$$t_{12} = 8t_9 \Rightarrow t_1 r^{11} = 8t_1 r^8 \Rightarrow r^{11} = 8r^8 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$t_5 = 128 \Rightarrow t_1 r^4 = 128 \Rightarrow t_1 \times 2^4 = 128 \Rightarrow t_1 = 8$$

$$8, 16, 32, 64, \dots$$

مثال ۱۱: در یک دنباله هندسی مجموع جمله‌های اول و چهارم برابر ۲۱ و مجموع جمله‌های دوم و سوم برابر ۶- است، دنباله را مشخص کنید.

حل

$$\begin{cases} t_1 + t_4 = 21 \\ t_2 + t_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_1 r^3 = 21 \\ t_1 r + t_1 r^2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1(1+r^3)}{t_1 r(1+r)} = \frac{21}{-6}$$

$$\frac{(1+r)(1-r+r^2)}{r(1+r)} = \frac{-7}{2} \Rightarrow \frac{1-r+r^2}{r} = \frac{-7}{2}$$

$$2 - 2r + 2r^2 = -7r \Rightarrow 2r^2 + 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{4}$$

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$$r = \frac{-5+3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad r = \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

اگر $r = -\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه:

$$t_1 + t_4 = 21 \Rightarrow t_1 + t_1 r^3 = 21 \Rightarrow t_1 + t_1 \times \frac{-1}{8} = 21 \Rightarrow \frac{7}{8} t_1 = 21 \Rightarrow t_1 = 24$$

$$24, -12, 6, -3, \dots$$

اگر $r = -2$ باشد، آن‌گاه:

$$t_1 + t_1 \times (-2)^3 = 21 \Rightarrow -7t_1 = 21 \Rightarrow t_1 = -3$$

$$-3, 6, -12, 24, \dots$$

مثال ۱۲: حاصل ضرب سه عدد که تشکیل دنباله هندسی می‌دهند برابر ۱۰۰۰ و مجموع آن‌ها برابر ۳۵ است آن سه عدد کدامند؟

حل

$$\frac{x}{r} \times x \times xr = 1000 \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$$

$$\frac{x}{r} + x + xr = 35 \Rightarrow \frac{10}{r} + 10 + 10r = 35 \Rightarrow \frac{10}{r} + 10r - 25 = 0$$

$$10 + 10r^2 - 25r = 0 \Rightarrow 10r^2 - 25r + 10 = 0 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$r = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$r = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

اگر $r = 2$ باشد آن‌گاه سه عدد عبارت‌اند از:

$$\frac{1}{2}, 1, 2$$

$$5, 10, 20$$

$$\frac{1}{2}, 1, 2$$

$$2, 1, 5$$

اگر $r = \frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه:

مثال ۱۱۱: ثابت کنید در یک دنباله هندسی اگر $m+n=p+q$ آن‌گاه $t_m \times t_n = t_p \times t_q$.

حل

$$\begin{aligned} t_m \times t_n &= t_1 r^{m-1} \times t_1 r^{n-1} = t_1^2 r^{m+n-2} = t_1^2 r^{p+q-2} \\ &= t_1^2 r^{p-1} r^{q-1} = (t_1 r^{p-1})(t_1 r^{q-1}) = t_p \times t_q \end{aligned}$$

مثال ۱۱۲: در یک دنباله هندسی $t_5 \times t_7 = 144$ است t_6 را حساب کنید.

حل

$$6+6=5+7 \Rightarrow t_6 \times t_6 = t_5 \times t_7 \Rightarrow t_6^2 = 144 \Rightarrow t_6 = 12$$

ماصل ضرب جمله‌های یک دنباله هندسی

$$p_n = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \dots \times t_n$$

$$p_n = t_n \times t_{n-1} \times t_{n-2} \times \dots \times t_1$$

$$p_n^2 = (t_1 \times t_n) \times (t_2 \times t_{n-1}) \times (t_3 \times t_{n-2}) \times \dots \times (t_n \times t_1)$$

$$p_n^2 = (t_1 \times t_n) \times (t_1 \times t_n) \times (t_1 \times t_n) \times \dots \times (t_1 \times t_n)$$

$$p_n^2 = (t_1 \times t_n)^n \Rightarrow |p_n| = \sqrt{(t_1 \times t_n)^n}$$

مجموع جمله‌های یک دنباله هندسی

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$$

$$\begin{cases} rS_n = t_1 r + t_2 r + t_3 r + \dots + t_n r \\ S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} rS_n = t_1r + t_1r^2 + t_1r^3 + \dots + t_1r^n \\ S_n = t_1 + t_1r + t_1r^2 + \dots + t_1r^{n-1} \end{cases}$$

$$rS_n - S_n = t_1r^n - t_1 \Rightarrow (r-1)S_n = t_1(r^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}$$

این رابطه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$۳, ۶, ۱۲, \dots, ۷۶۸$$

مثال ۵۵: مجموع جملات دنبالهٔ مقابل را حساب کنید.

حل

$$r = \frac{۶}{۳} = ۲$$

$$t_n = ۷۶۸ \Rightarrow t_1r^{n-1} = ۷۶۸ \Rightarrow ۳ \times ۲^{n-1} = ۷۶۸ \Rightarrow ۲^{n-1} = ۲۵۶ \Rightarrow ۲^{n-1} = ۲^8$$

$$n-1=8 \Rightarrow n=9$$

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{۳(۲^9 - 1)}{۲-1} = ۳(۵۱۲-1) = ۳ \times ۵۱۱ = ۱۵۳۳$$

مثال ۵۶: مجموع شش جملهٔ اول دنبالهٔ زیر را حساب کنید.

$$\frac{1}{۸}, \frac{1}{۴}, \frac{1}{۲}, 1, \dots$$

حل

$$r = \frac{\frac{1}{۴}}{\frac{1}{۸}} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_۶ = \frac{\frac{1}{۸}(۲^۶ - 1)}{۲-1} = \frac{1}{۸} \times ۶۳ = \frac{۶۳}{۸}$$

مثال ۵۷: در یک دنبالهٔ هندسی $t_9 - t_1 = ۴۸$ و $S_۸ = ۲۴$ است. قدر نسبت دنبالهٔ چقدر است؟

حل

$$S_۸ = ۲۴ \Rightarrow \frac{t_1(r^8 - 1)}{r-1} = ۲۴ \Rightarrow \frac{t_1r^8 - t_1}{r-1} = ۲۴$$

$$\frac{t_9 - t_1}{r-1} = ۲۴ \Rightarrow \frac{۴۸}{r-1} = ۲۴ \Rightarrow ۲۴r - ۲۴ = ۴۸ \Rightarrow ۲۴r = ۷۲ \Rightarrow r = ۳$$

مثال ۱۸: در یک دنباله هندسی $t_p = 3$ و $t_v = 729$ است مجموع هفت جمله اول دنباله چقدر است؟

حل

$$\frac{t_v}{t_p} = \frac{729}{3} \Rightarrow \frac{t_1 r^6}{t_1 r} = 243 \Rightarrow r^5 = 243 \Rightarrow r = 3$$

$$t_1 = \frac{t_p}{r} = \frac{3}{3} = 1 \quad S_v = \frac{1 \times (1 - 3^7)}{1 - 3} = \frac{3^7 - 1}{2} = 1093$$

مثال ۱۹: در یک دنباله هندسی مجموع هشت جمله اول ۱۷ برابر مجموع چهار جمله اول می‌باشد. قدر نسبت دنباله چقدر است؟

حل

$$S_8 = 17 S_4 \Rightarrow \frac{t_1(1-r^8)}{1-r} = 17 \times \frac{t_1(1-r^4)}{1-r}$$

$$1-r^8 = 17(1-r^4) \Rightarrow (1-r^4)(1+r^4) = 17(1-r^4) \Rightarrow 1+r^4 = 17 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

مثال ۲۰: حاصل عبارت $1 + x + x^2 + \dots + x^{13}$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ حساب کنید.

حل

$$r = \frac{x}{1} = x$$

$$n = 13$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{13} = \frac{1(1-x^{14})}{1-x} = \frac{x^{14}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{2})^{14}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{13} - 1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2} \times 2^6 - 1}{\sqrt{2}-1} = \frac{64\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(64\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= 128 + 64\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 = 127 + 63\sqrt{2}$$

مثال ۲۱: مجموع هشت جمله اول دنباله زیر را حساب کنید.

۹, ۹۹, ۹۹۹, ...

حل

$$9 + 99 + 999 + \dots = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (10^8 - 1)$$

$$= (10 + 100 + 1000 + \dots + 10^8) - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{8 \text{ تا}} = \frac{10(10^8 - 1)}{10 - 1} - 8$$

$$= 111111110 - 8 = 111111102$$

مثال ۱۳۱: حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$1 + ۳ + ۳^۲ + \dots + ۳^{۱۰}$$

حل قدر نسبت دنباله ۳ و تعداد جملات آن ۱۱ می‌باشد.

$$S_{۱۱} = \frac{۱(۳^{۱۱} - ۱)}{۳ - ۱} = \frac{۳^{۱۱} - ۱}{۲}$$

مثال ۱۳۲: نشان دهید در یک دنباله هندسی $\frac{S_{۲n}}{S_n} = 1 + r^n$.

حل

$$\frac{S_{۲n}}{S_n} = \frac{\frac{t_1(1-r^{۲n})}{1-r}}{\frac{t_1(1-r^n)}{1-r}} = \frac{1-r^{۲n}}{1-r^n} = \frac{(1-r^n)(1+r^n)}{1-r^n} = 1+r^n$$

مثال ۱۳۳: حاصل جمع زیر را به دست آورید.

$$S = 1^p + ۲^p + ۳^p + \dots + n^p$$

حل اتحاد $(a+1)^p = a^p + p a^{p-1} + p a^{p-2} + \dots + p a + 1$ را در نظر بگیرید:

$$a = 1 \Rightarrow ۲^p = 1^p + p \times 1^{p-1} + p \times 1 + 1$$

$$a = ۲ \Rightarrow ۳^p = ۲^p + p \times ۲^{p-1} + p \times ۲ + 1$$

$$a = ۳ \Rightarrow ۴^p = ۳^p + p \times ۳^{p-1} + p \times ۳ + 1$$

.....

.....

$$a = n \Rightarrow (n+1)^p = n^p + p \times n^{p-1} + p \times n + 1$$

$$\frac{۲^p + ۳^p + ۴^p + \dots + (n+1)^p = (1^p + ۲^p + ۳^p + \dots + n^p) + p(1^{p-1} + ۲^{p-1} + ۳^{p-1} + \dots + n^{p-1}) + p(1 + ۲ + ۳ + \dots + n) + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_n \Rightarrow$$

$$(n+1)^p = 1 + pS + p \times \frac{n(n+1)}{۲} + n$$

$$pS = (n+1)^p - \frac{p n(n+1)}{۲} - (n+1)$$

$$pS = \frac{۲(n+1)^p - p n(n+1) - ۲(n+1)}{۲} = \frac{(n+1)(۲n^p + ۴n + ۲ - pn - ۲)}{۲}$$

$$3S = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

نکته تعداد مربع‌هایی که در صفحه شطرنج (8×8) می‌توان شمرد برابر است با:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2 = \frac{8 \times (8+1) \times (2 \times 8 + 1)}{6} = \frac{8 \times 9 \times 17}{6} = 204$$

نکته به همین ترتیب با استفاده از اتحاد $(a+1)^n = a^n + n a^{n-1} + \dots + n a + 1$ می‌توان ثابت کرد:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

مثال ۵۳: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$S = 1 + 10 + 75 + 500 + \dots + 11 \times 5^{10}$$

حل با دقت در جملات موجود در S ملاحظه می‌گردد که:

$$S = 1 \times 5^0 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^2 + 4 \times 5^3 + \dots + 11 \times 5^{10}$$

از آنجا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 5S = 1 \times 5^1 + 2 \times 5^2 + 3 \times 5^3 + 4 \times 5^4 + \dots + 11 \times 5^{11} \\ -S = -1 \times 5^0 - 2 \times 5^1 - 3 \times 5^2 - 4 \times 5^3 - \dots - 11 \times 5^{10} \end{cases}$$

و همچنین:

با جمع دو رابطه اخیر:

$$4S = (-1 \times 5^0 - 1 \times 5^1 - 1 \times 5^2 - 1 \times 5^3 - \dots - 1 \times 5^{10}) + 11 \times 5^{11}$$

$$4S = -(1 + 5 + 25 + 125 + \dots + 5^{10}) + 11 \times 5^{11}$$

$$4S = -\frac{1(5^{11} - 1)}{5 - 1} + 11 \times 5^{11}$$

$$4S = \frac{1 - 5^{11}}{4} + 11 \times 5^{11} = \frac{1 - 5^{11} + 44 \times 5^{11}}{4}$$

$$4S = \frac{1 + 43 \times 5^{11}}{4} \Rightarrow S = \frac{43 \times 5^{11} + 1}{16}$$

مجموع جمله‌های تصاعد هندسی نزولی نامتناهی

تصاعد هندسی زیر را در نظر بگیرید:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

در این تصاعد $t_1 = 1$ و $q = \frac{1}{2}$ است. بنابراین: