

پرفروش ترین
کتاب های
امتحان
نهایی

فصلنامه علمی-پژوهشی

ریاضی ۲

پایه یازدهم
رشته علوم تجربی

مؤلفان:

سجاد عظمتی

علی احمدی قزلدشت

امیر حسام شگری

فرمول

امتحانات نهایی سال یازدهم، نقطه عطفی در مسیر آموزشی شماست؛ جایی که تسلط بر مفاهیم پایه‌ای، مسیر موفقیت را علاوه بر سال یازدهم، در سال دوازدهم و کنکور نیز هموار می‌سازد. این کتاب، با نگاهی دقیق و جامع، شما را برای این مرحله مهم آماده می‌سازد.

درسنامه‌هایی برای فهم عمیق‌تر

در این کتاب، هر مفهوم ریاضی با دقت و وضوح تشریح شده است. درسنامه‌ها نه تنها به آموزش نکات کلیدی می‌پردازند، بلکه مهارت تحلیل و حل مسئله را نیز در شما تقویت می‌کنند. این درسنامه‌ها می‌توانند نقش یک راهنمای مطمئن را، به ویژه برای کسانی که در طول سال فرصت مرور کتاب را نداشته‌اند، ایفا کنند.

پاسخ‌هایی برای تسلط

در تمام پاسخ‌های سوالات این کتاب، روند آموزش ادامه دارد. در برخی سوالات با بیان روش‌های دیگر برای حل مسئله، تسلط شما را افزایش داده‌ایم.

شناخت الگوی تفکر طراحان امتحان نهایی

تمام جزئیات کتاب درسی، تمرین‌ها، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و حتی سوالات «کتاب راهنمای معلم» با دقت بررسی شده‌اند. همچنین، مجموعه‌ای از سوالات امتحانات شبه‌نهایی شهرهای مختلف و مدارس برتر ایران در این کتاب گنجانده شده تا شما را با شیوه طراحی سوالات امتحانی آشنا کنیم. برای پوشش کامل‌تر، از سوالات کتاب رشته ریاضی نیز بهره گرفته‌ایم تا همه نکات پوشش داده شوند.

سوالات 21! فراتر از نهایی، نزدیک به تسلط

اگر می‌خواهید کاملاً آماده شوید، به بخش «سوالات 21!» که مجموعه‌ای چالش‌برانگیزتر از امتحانات نهایی است، توجه ویژه‌ای داشته باشید. این سوالات طراحی شده‌اند تا شما را فراتر از سطح معمول امتحانات نهایی ببرند. هر چقدر خود را با این سوالات محک بزنید، به موفقیت در امتحان نهایی نزدیک‌تر می‌شوید.

همت بلند دار که مردان روزگار از همت بلند به جایی رسیده‌اند

(حافظ)

در پایان:

این کتاب را نه فقط به عنوان یک منبع آموزشی، بلکه به عنوان همراهی مطمئن در لحظات حساس امتحانات نهایی به شما تقدیم می‌کنیم. امیدواریم که نتیجه این مسیر، نمره‌ای درخشان و لبخندی از رضایت باشد.

سپاسگزاری

از مدیریت محترم انتشارات گاج، جناب آقای مهندس محمد جوکار، به پاس همراهی خالصانه و اعتماد بی‌دریغ در مسیر تدوین این مجموعه، صمیمانه سپاسگزاریم. همچنین، از همکاران گرامی‌ام، اساتید نریمان فتح‌الهی و شاهین پروازی که با دانش، تجربه و پیشنهادات ارزشمند خود، ما را در بهبود محتوای کتاب یاری کردند، نهایت سپاس را دارم.

امیدوارم ۲۰ بگیری!

سجاد عظمتی - علی احمدی قزلداشت - امیرحسام شکری

 @sajad_azemati

پاسخ	درسنامه و سؤالات	
۱۸۴	۴۲ تا ۱۰	فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر
۲۰۷	۶۹ تا ۴۳	فصل دوم: هندسه
۲۱۹	۹۷ تا ۷۰	فصل سوم: تابع
۲۳۶	۱۱۸ تا ۹۸	فصل چهارم: مثلثات
۲۴۹	۱۴۱ تا ۱۱۹	فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی
۲۶۳	۱۶۵ تا ۱۴۲	فصل ششم: حد و پیوستگی
۲۷۹	۱۸۲ تا ۱۶۶	فصل هفتم: آمار و احتمال

نمونه امتحانی



۲۹۰	آزمون ۱: نوبت اول
۲۹۱	آزمون ۲: نوبت دوم
۲۹۳	آزمون ۳: نوبت دوم
۲۹۵	آزمون ۴: نوبت دوم
۲۹۷	پاسخنامه تشریحی آزمون ۱ تا ۴

بارم‌بندی درس ریاضی ۲

نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل	
۲	۶	اول	
۲/۵	۶	دوم	
۲/۵	۶	سوم	
۳	۲	تا صفحه ۷۶	چهارم
	–	صفحه ۷۷ به بعد	
۳/۵	–	پنجم	
۳/۵	–	ششم	
۳	–	هفتم	
۲۰	۲۰	جمع	



مدرسہ
اینٹرنی
گاج

گاج لایو



جلسه



درس ۱
سؤالات
۵۴ تا ۶۸



جلسه



درس ۱
سؤالات
۳۱ تا ۵۳



جلسه



درس ۱
سؤالات
۱ تا ۳۰



جلسه



درس ۳
سؤالات
۱۳۴ تا ۱۵۶



جلسه



درس ۲
سؤالات
۱۰۴ تا ۱۳۳



جلسه



درس ۲
سؤالات
۶۹ تا ۱۰۳



جلسه



درس ۳
سؤالات
۱۵۷ تا ۱۶۹



جلسه



درس ۱
سؤالات
۱۹۱ تا ۲۰۳



جلسه



درس ۱
سؤالات
۱۷۰ تا ۱۹۰



جلسه



درس ۲
سؤالات
۲۲۷ تا ۲۴۷



جلسه



درس ۲
سؤالات
۲۰۴ تا ۲۲۶



جلسه



درس ۳
سؤالات
۲۶۵ تا ۲۸۵



جلسه



درس ۳
سؤالات
۲۴۸ تا ۲۶۴





جلسه



درس ۱

سؤالات

۳۲۹ تا ۳۴۰



جلسه



درس ۱

سؤالات

۳۱۲ تا ۳۲۸



جلسه



درس ۱

سؤالات

۲۸۶ تا ۳۱۱



جلسه



درس ۳

سؤالات

۳۸۰ تا ۴۰۴



جلسه



درس ۲

سؤالات

۳۶۱ تا ۳۷۹



جلسه



درس ۲

سؤالات

۳۴۱ تا ۳۶۰



جلسه



درس ۳

سؤالات

۴۰۵ تا ۴۱۶



جلسه



درس ۱

سؤالات

۴۳۶ تا ۴۴۸



جلسه



درس ۱

سؤالات

۴۱۷ تا ۴۳۵



جلسه



درس ۲

سؤالات

۴۷۳ تا ۴۸۸



جلسه



درس ۲

سؤالات

۴۴۹ تا ۴۷۲



جلسه



درس ۳

سؤالات

۵۱۱ تا ۵۲۱



جلسه



درس ۳

سؤالات

۴۸۹ تا ۵۱۰



فصل

 جلسه  درس ۲ سؤالات ۵۵۳ تا ۵۸۴	 جلسه  درس ۱ سؤالات ۵۴۴ تا ۵۵۳	 جلسه  درس ۱ سؤالات ۵۲۲ تا ۵۴۳
 جلسه  درس ۲ سؤالات ۵۹۵ تا ۵۹۸	 جلسه  درس ۲ سؤالات ۵۹۱ تا ۵۹۴	 جلسه  درس ۲ سؤالات ۵۸۵ تا ۵۹۰
 جلسه  درس ۳ سؤالات ۶۰۹ تا ۶۲۱	 جلسه  درس ۳ سؤالات ۵۹۹ تا ۶۰۸	

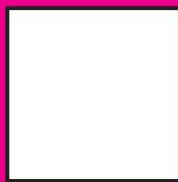
 جلسه  درس ۲ سؤالات ۶۵۰ تا ۶۶۲	 جلسه  درس ۱ سؤالات ۶۳۸ تا ۶۴۹	 جلسه  درس ۱ سؤالات ۶۲۲ تا ۶۳۷
 جلسه  درس ۳ سؤالات ۷۰۲ تا ۷۱۸	 جلسه  درس ۳ سؤالات ۶۸۵ تا ۷۰۱	 جلسه  درس ۲ سؤالات ۶۶۳ تا ۶۸۴

 جلسه  درس ۱ سؤالات ۷۴۱ تا ۷۶۱	 جلسه  درس ۱ سؤالات ۷۱۹ تا ۷۴۰
 جلسه  درس ۲ سؤالات ۷۸۳ تا ۸۰۴	 جلسه  درس ۲ سؤالات ۷۶۲ تا ۷۸۲

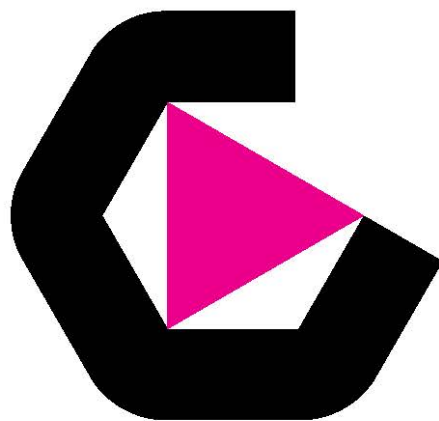
فصل

ریاضی ۲

حل تصویری تک تک سؤالات
کتاب فرمول ۲۰ در گاج لایو



برای مشاهده ویدیوها در سایت gajlive.ir
برچسب را خراش داده و از کد زیر استفاده کنید



پشتیبانی

۰۲۱-۶۴۲۰

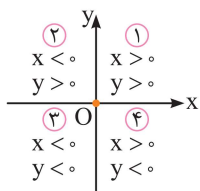
www.gajlive.ir

فصل اول

درس اول: هندسه تحلیلی

ریاضی یازدهم

یادآوری دستگاه مختصات



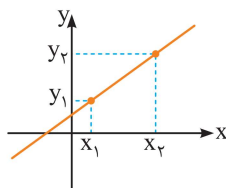
از متوسطه اول به خاطر داریم که دستگاه مختصات شامل چهار ناحیه است، که علامت x و y در هر کدام از نواحی به صورت مقابل است:

نقطه O به مختصات $(0, 0)$ را مبدأ مختصات می‌نامیم.

یادآوری و تکمیل معادله خط

می‌دانیم معادله یک خط، به شکل $y = mx + h$ یا $ax + by + c = 0$ است.

برای رسم یک خط در دستگاه مختصات کافی است در جدول زیر، مختصات دو نقطه دلخواه روی آن خط را به دست آوریم و پس از اتصال آن‌ها، خط را از طرفین امتداد دهیم.



x	x_1 دلخواه	x_2 دلخواه
y	y_1	y_2

چند مفهوم در مورد خط

۱ عرض از مبدأ: عرض نقطه‌ای است که خط با محور عرض‌ها (y) برخورد می‌کند.

۲ طول از مبدأ: طول نقطه‌ای است که خط با محور طول‌ها (x) برخورد می‌کند.

۳ شیب خط (m): برابر با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی در یک خط است. یعنی اگر دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ روی خط باشند، داریم:

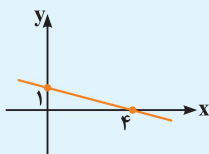
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

سؤال اگر شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(2-a, a)$ و $B(a+1, a)$ برابر -3 باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

پاسخ باید شیب خط را به دست آوریم و آن را برابر با -3 قرار دهیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow -3 = \frac{(1+a) - (a)}{a - (2-a)} \Rightarrow -3 = \frac{1}{2a-2} \Rightarrow -6a+6=1 \Rightarrow a = \frac{5}{6}$$

سؤال با توجه به خط مقابل، عرض از مبدأ، طول از مبدأ و شیب خط را به دست آورید.



پاسخ عرض از مبدأ: ۱ طول از مبدأ: ۴

با توجه به این‌که $(0, 1)$ و $(4, 0)$ نقاطی روی این خط هستند، برای محاسبه شیب می‌توانیم بنویسیم:

$$m = \frac{0-1}{4-0} = -\frac{1}{4}$$

(مشابه کار در کلاس صفحه ۲)

سؤال خطوط زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

پ $2y + 4x - 3 = 0$

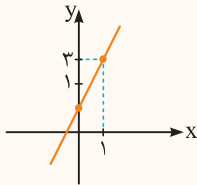
ب $y = -2x$

آ $y = 2x + 1$

پاسخ آ دو نقطه دلخواه $X = 0$ و $X = 1$ را در معادله خط قرار می دهیم:

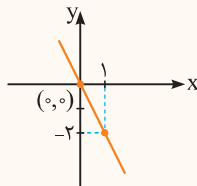
x	0	1
y	1	3

نقطه $(0, 1)$ و $(1, 3)$ را در دستگاه مختصات یافته و بعد از اتصال آن ها خط را از طرفین امتداد می دهیم.

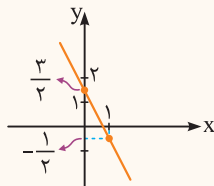


ب با قرار دادن دو نقطه دلخواه $X = 0$ و $X = 1$ در معادله خط، داریم:

x	0	1
y	0	-2



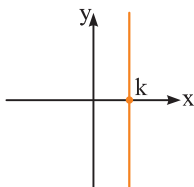
x	0	1
y	3/2	-1/2



معادلات خط خاص

۱ خط قائم: معادله این خطوط به شکل $x = k$ است.

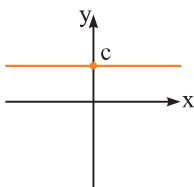
در این حالت شیب و عرض از مبدأ خط تعریف نشده اند، اما طول از مبدأ برابر k است.



۲ خط افقی: معادله این خطوط به شکل $y = c$ است.

در این حالت شیب برابر صفر و عرض از مبدأ c است، اما طول از مبدأ تعریف نشده است.

(خط افقی همان نمودار تابع ثابت است که در سال قبل آموختیم.)



نوشتن معادله خط

برای نوشتن معادله خط با داشتن شیب خط (m) و نقطه $A(x_A, y_A)$ روی آن از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

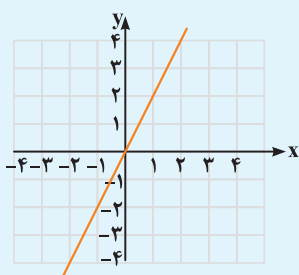
سؤال معادله خط گذرنده از نقطه $A(2, -1)$ با شیب ۳ را بنویسید.

پاسخ کافی است مختصات نقطه و شیب خط را در رابطه $y - y_A = m(x - x_A)$ جای گذاری کنیم:

$$x_A = 2, y_A = -1, m = 3$$

$$y + 1 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 7$$

سؤال معادله خط زیر را بنویسید.



پاسخ برای محاسبه شیب می‌توانیم از مختصات نقطه‌های $(1, 2)$ و $(-1, -2)$ استفاده کنیم:

$$m = \frac{2 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

روش اول: به دلخواه یکی از نقاط را انتخاب می‌کنیم و به همراه m در معادله $y - y_A = m(x - x_A)$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x$$

روش دوم: می‌توانیم از $y = mx + h$ برای نوشتن معادله خط استفاده کنیم، دیدیم که $m = 2$ است و عرض از مبدأ (h) نیز با توجه به گذر نمودار از مبدأ

$$\left. \begin{array}{l} m = 2 \\ h = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = mx + h \Rightarrow y = 2x$$

مختصات برابر صفر است، یعنی $h = 0$ ، پس داریم:

پیدا کردن شیب خط با داشتن معادله آن

دیدیم که شیب خط AB از تفاضل عرض نقاط بر روی تفاضل طول نقاط به دست می‌آید. اما اگر معادله خط را داشته باشیم با یکی از حالت‌های زیر مواجه ایم:

معادله خط	$y = ax + b$	$ax + by + c = 0$	$y = k$	$x = k$
شیب	a	$-\frac{a}{b}$	صفر	تعریف نمی‌شود



سؤال در هر مورد شیب خط‌ها را به دست آورید.

ت $x = 0$

پ $y = 3$

ب $2y - 3x + 1 = 0$

آ $y = \frac{-x}{3} + 4$



پاسخ آ شکل $y = ax + b$ است، پس شیب همان ضریب x است:

$$m = \frac{-1}{3}$$

ب خط به شکل $ax + by + c = 0$ است، پس شیب از تقسیم قرینه ضریب x بر ضریب y به دست می‌آید:

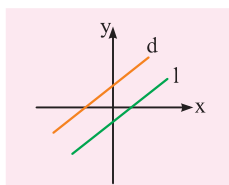
$$m = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

پ این خط افقی و شیب آن $m = 0$ است.

ت برای خط‌های قائم به فرم $x = k$ شیب تعریف نمی‌شود.

وضعیت دو خط نسبت به هم

دو خط در صفحه می‌توانند یکی از حالت‌های زیر را داشته باشند:



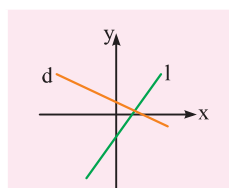
اگر شیب دو خط با هم برابر باشد، آن دو خط با هم موازی‌اند.

$$d: y = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow m_d = \frac{1}{2}$$

$$l: 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow m_l = \frac{1}{2}$$

موازی

نکته اگر دو خط موازی دارای یک نقطه مشترک باشند (مثلاً عرض از مبدأ یکی باشد) آن‌گاه آن دو خط بر هم منطبق خواهند بود.



اگر شیب دو خط با هم برابر نباشد، آن دو خط با هم متقاطع‌اند.

$$d: y = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow m_d = -1$$

$$l: 2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow m_l = \frac{2}{3}$$

متقاطع

نکته اگر شیب دو خط متقاطع عکس و قرینه هم باشد (به عبارت دیگر، حاصل ضرب شیب آن‌ها (-1) شود)، آن‌گاه دو خط برهم عمود خواهند بود؛ یعنی خط l و d برهم عموداند اگر: $m_d \times m_l = -1$ یا $m_d = \frac{-1}{m_l}$

سؤال در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید.

L : $y + 2x = 5$

T : $6x = 3y - 1$ ☐

L : $y = 3x - 2$

T : $y = \frac{-1}{3}x + 2$ ☐

L : $x = 3$

T : $y = 1$ ☐

L : $x + y = 3$

T : $2x + 2y = 4$ ☐

پاسخ در هر مورد شیب خط‌ها را به دست می‌آوریم:

$m_L = 3, m_T = \frac{-1}{3}$

چون شیب دو خط عکس و قرینه همدیگر است، پس دو خط متقاطع و برهم عمود هستند.

ب ابتدا معادله خط‌ها را به صورت $6x - 3y + 1 = 0$ و $y + 2x - 5 = 0$ می‌نویسیم و سپس شیب هریک را به دست می‌آوریم:

$m_L = \frac{-2}{1} = -2, m_T = \frac{-6}{-3} = 2$

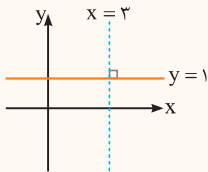
پس دو خط متقاطع هستند.

$m_L = -1, m_T = -1$

چون شیب دو خط با هم برابر است، پس دو خط موازی هستند.

ت دیدیم خط $y = k$ نمایش خط افقی (موازی محور x) و $x = k$ نمایش خط قائم (موازی محور y) است، بنابراین دو خط

$x = 3$ و $y = 1$ متقاطع و برهم عمود هستند.



سؤال مقدار m را طوری بیابید که خط $2x + 4y - 2 = 0$ بر خط به معادله $(m-1)x + my - 3 = 0$ عمود باشد.

پاسخ اگر دو خط برهم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌هایشان برابر -1 است. ابتدا شیب هر کدام از خط‌ها را به دست می‌آوریم:

$S: 2x + 4y - 2 = 0 \Rightarrow m_S = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

$T: (m-1)x + my - 3 = 0 \Rightarrow m_T = \frac{-(m-1)}{m}$

می‌دانیم $m_S \times m_T = -1$ است.

$\frac{-1}{2} \times \frac{-(m-1)}{m} = -1 \Rightarrow \frac{m-1}{2m} = -1 \Rightarrow m-1 = -2m \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

سؤال اگر خط به معادله $3x - 4y = 5$ با خط به معادله $(2m+1)x - my = m-2$ موازی باشد، مقدار m را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب‌های برابر دارند. ابتدا شیب هر کدام از خط‌ها را به دست می‌آوریم:

$S: 3x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow m_S = \frac{3}{4}$

$T: (2m+1)x - my - m + 2 = 0 \Rightarrow m_T = \frac{2m+1}{m}$

چون دو خط موازی هستند، $m_S = m_T$ ، بنابراین:

$\frac{3}{4} = \frac{2m+1}{m} \Rightarrow 3m = 4m + 4 \Rightarrow m = -\frac{4}{5}$

سؤال خط $mx + 8y = 3$ و خط $2x + my = 4$ را در نظر بگیرید.

ب آیا امکان دارد این دو خط برهم عمود باشند؟

پاسخ ابتدا شیب هر دو خط را به دست می‌آوریم:

$S = mx + 8y - 3 = 0 \Rightarrow m_S = \frac{-m}{8}$

$T = 2x + my - 4 = 0 \Rightarrow m_T = \frac{-2}{m}$

$\frac{-m}{8} = \frac{-2}{m} \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$

آ اگر دو خط موازی باشند، $m_S = m_T$ است:

$\frac{-m}{8} \times \frac{-2}{m} = -1 \Rightarrow \frac{2}{8} \neq 1$

ب اگر دو خط برهم عمود باشند، $m_S \times m_T = -1$ است:

این تساوی نادرست است، بنابراین امکان ندارد این دو خط برهم عمود باشند.

سؤال خط d به معادله $x + 2y = 5$ و نقطه $A(4, 3)$ را در نظر بگیرید:

- ☐ معادله خط گذرنده از A و موازی خط d را بنویسید.
☐ معادله خط گذرنده از A و عمود بر خط d را بنویسید.

پاسخ شیب خط $x + 2y - 5 = 0$ برابر $m = -\frac{1}{2}$ است.

☐ با نقطه $A(4, 3)$ و شیب برابر با خط داده شده $m = -\frac{1}{2}$ ، معادله $y - y_A = m(x - x_A)$ را تکمیل می‌کنیم:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5$$

☐ برای نوشتن معادله خط عمود، شیب را عکس و قرینه شیب خط $x + 2y - 5 = 0$ در نظر می‌گیریم:

$$m = 2 \Rightarrow y - 3 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 5$$

مختصات نقطه برخورد دو خط متقاطع

دو خط متقاطع تنها در یک نقطه با هم برخورد دارند. اگر دو خط به معادله‌های $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ نسبت به هم متقاطع باشند، آن‌گاه

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول، $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ، مختصات محل تلاقی دو خط به دست می‌آید.

سؤال معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $3x + 2y = 7$ و $x - y = -1$ و مبدأ مختصات گذر کند.

پاسخ ابتدا مختصات نقطه برخورد دو خط را به کمک حل دستگاه دو معادله و دو مجهول مقابل پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases} \\ &\quad \hline &\quad \Delta x = 5 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

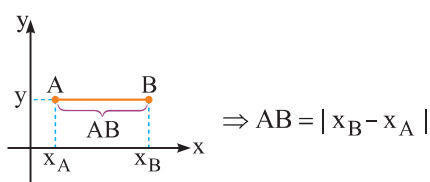
با جای‌گذاری $x = 1$ در هر کدام از معادله خط‌ها، $y = 2$ به دست می‌آید. پس نقطه برخورد دو خط $A(1, 2)$ است.

معادله خط گذرنده از $A(1, 2)$ و مبدأ مختصات $(0, 0)$ را می‌نویسیم:

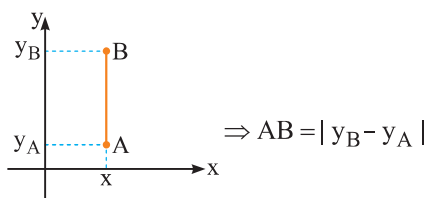
$$m = \frac{2-0}{1-0} = 2 \Rightarrow y - \cancel{y_A} = \cancel{m}(x - \cancel{x_A}) \Rightarrow y = 2x$$

فاصله دو نقطه

ابتدا فاصله دو نقطه هم‌طول یا هم‌عرض را محاسبه می‌کنیم. به شکل مقابل دقت کنید، می‌خواهیم فاصله دو نقطه هم‌عرض A و B را به دست آوریم:



اگر دو نقطه مطابق شکل هم‌طول باشند، فاصله دو نقطه A و B برابر است با:



سؤال در هر مورد فاصله دو نقطه داده شده را محاسبه کنید.

☐ $D(5, 0)$, $C(5, -3)$

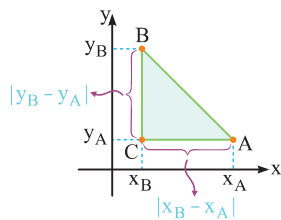
☐ $B(-2, 7)$, $A(3, 7)$

پاسخ این دو نقطه هم‌عرض هستند، پس با عرض کاری نداریم و فاصله بین طول‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$AB = |x_B - x_A| = |-2 - 3| = 5$$

☐ این دو نقطه هم‌طول هستند، پس با طول کاری نداریم و فاصله بین عرض‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$CD = |y_D - y_C| = |0 - (-3)| = 3$$



طول پاره خط در صفحه

به شکل مقابل دقت کنید، در بخش قبلی دیدیم که فاصله دو نقطه هم طول از اختلاف عرض هایشان و فاصله دو نقطه هم عرض از اختلاف طول هایشان به دست می آید، بنابراین در مثلث مقابل داریم: با توجه به رابطه فیثاغورس می توان نوشت:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

سؤال نقاط $A(-2, 3)$ ، $B(2, 0)$ و $C(5, 4)$ رؤس یک مثلث اند:

آ محیط این مثلث را به دست آورید.

ب نوع مثلث را تشخیص دهید.

پاسخ طول هر سه پاره خط BC ، AC و AB را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$AB + AC + BC = 5 + 5\sqrt{2} + 5 = 10 + 5\sqrt{2}$$

بنابراین محیط این مثلث برابر است با:

پ **روش اول:** با توجه به طول اضلاع، بین آن ها رابطه فیثاغورس برقرار است، یعنی:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \Rightarrow (5)^2 + (5)^2 = (5\sqrt{2})^2$$

پس این مثلث قائم الزاویه و چون طول دو ضلع با هم برابر است، متساوی الساقین نیز هست.

روش دوم: اگر شیب پاره خط AB و BC را محاسبه کنیم، داریم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4 - 0}{5 - 2} = \frac{4}{3}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 3}{2 - (-2)} = \frac{-3}{4}$$

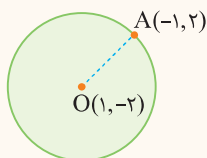
از آن جایی که $m_{AB} \times m_{BC} = -1$ است، پس خطوط AB و BC برهم عمودند و این مثلث قائم الزاویه است و با توجه به برابر بودن دو ضلع از نوع قائم الزاویه متساوی الساقین خواهد بود.

سؤال نقطه $A(-1, 2)$ روی دایره ای به مرکز $O(1, -2)$ قرار دارد:

آ شعاع این دایره چقدر است؟

ب آیا نقطه $B(5, 1)$ روی این دایره قرار دارد؟

پاسخ فاصله OA برابر شعاع دایره است:



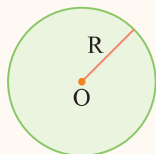
$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

پ نقطه B در صورتی روی دایره است که فاصله آن تا مرکز O برابر شعاع $(2\sqrt{5})$ باشد. پس OB را به دست آورده و با شعاع مقایسه می کنیم:

$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

از آن جایی که $OB \neq OA$ پس نقطه B روی دایره قرار ندارد.

توضیح بیش تر: در حالت کلی نقطه B نسبت به دایره یکی از سه حالت زیر را دارد:



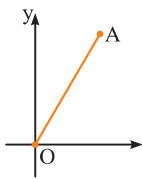
نقطه B روی محیط دایره است. $OB = R \Rightarrow$

نقطه B خارج دایره است. $OB > R \Rightarrow$

نقطه B درون دایره است. $OB < R \Rightarrow$

فاصله نقطه از مبدأ مختصات

فرض کنید فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ را از نقطه مبدأ مختصات می‌خواهیم، چون مختصات نقطه مبدأ $O(0,0)$ است پس داریم:



$$\Rightarrow OA = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

سؤال فاصله نقطه تلاقی دو خط به معادلات $x + y = 15$ و $x - 2y = -10$ از مبدأ مختصات را به دست آورید.

پاسخ ابتدا نقطه برخورد دو خط را با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - 2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 30 \\ x - 2y = -10 \end{cases}$$

با جای‌گذاری $x = 4$ در یکی از معادلات $y = 7$ خواهد بود.

پس مختصات نقطه برخورد دو خط $(4, 7)$ است که فاصله آن تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{(4)^2 + (7)^2} = \sqrt{65}$$

سؤال نقطه‌ای روی محور y ‌ها بیابید که فاصله آن از نقطه $O(3, 1)$ برابر ۵ باشد. این سؤال چند جواب دارد؟

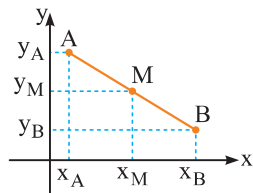
پاسخ مختصات هر نقطه روی محور y به صورت $A(0, \alpha)$ است. فاصله این نقطه را تا نقطه O به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{(0 - 3)^2 + (\alpha - 1)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{9 + (\alpha - 1)^2} = 5$$

$$\Rightarrow 9 + (\alpha - 1)^2 = 25 \Rightarrow (\alpha - 1)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 4 \Rightarrow \alpha = 5 \\ \alpha - 1 = -4 \Rightarrow \alpha = -3 \end{cases}$$

فاصله دو نقطه $A(0, 5)$ و $B(0, -3)$ روی محور y ‌ها از نقطه $O(3, 1)$ برابر ۵ است.

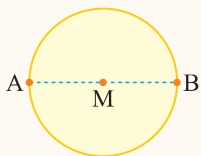
مختصات نقطه وسط پاره خط



اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو سرپاره خط AB باشند، مختصات نقطه M ، نقطه وسط پاره خط AB برابر است با:

$$M(B \text{ و } A \text{ میانگین عرض نقاط } A \text{ و } B, \text{ میانگین طول نقاط } A \text{ و } B) = M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

سؤال اگر $A(2, -3)$ و $B(-6, 7)$ دو سر قطریک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را به دست آورید.



پاسخ با توجه به شکل تقریبی زیر نقطه M مرکز دایره و وسط پاره خط AB است.

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{2 + (-6)}{2}, \frac{-3 + 7}{2}\right) = (-2, 2)$$

سؤال دو نقطه $A(2a, a-1)$ در ربع اول و $B(0, a+1)$ را در نظر بگیرید. اگر فاصله نقطه وسط پاره خط AB از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{18}$ باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

پاسخ ابتدا مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را محاسبه می‌کنیم:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{2a + 0}{2}, \frac{(a-1) + (a+1)}{2}\right) = (a, a)$$

دیدیم فاصله نقطه (x, y) تا مبدأ مختصات برابر با $\sqrt{x^2 + y^2}$ است، بنابراین فاصله $M(a, a)$ تا مبدأ برابر است با:

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{18} \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

از آن جایی که نقطه $A(2a, a-1)$ در ربع اول قرار دارد، مقدار مثبت a قابل قبول است، پس $a = 3$ است.

سؤال مثلث ABC با رئوس $A(1, -3)$ ، $B(5, 1)$ و $C(3, 5)$ را در نظر بگیرید.

آ مختصات نقطه M وسط BC و نقطه N وسط AB را پیدا کنید.

ب با نوشتن معادله خط AM و CN (این خطها را میانه مثلث می نامند) محل برخورد آنها را به دست آورید.

پاسخ می دانیم مختصات نقطه وسط از میانگین مختصات دو سرپاره خط به دست می آید.

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{5+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (4, 3)$$

$$N\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{1+5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (3, -1)$$

ب باید نقطه برخورد دو خط AM و CN را به دست بیاوریم.

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{3 - (-3)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

ابتدا شیب خط AM را به دست می آوریم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - (-3) = 2(x - 1) \Rightarrow y - 2x = -5$$

بنابراین معادله خط AM به صورت مقابل است:

سپس معادله خط CN را می نویسیم، چون نقطه $N(3, -1)$ و $C(3, 5)$ نقاط هم طول هستند، پس معادله خط گذرنده از این دو نقطه خط قائم $x = 3$ است.

نقطه برخورد دو خط $x = 3$ و $y - 2x = -5$ را با حل دستگاه زیر به دست می آوریم:

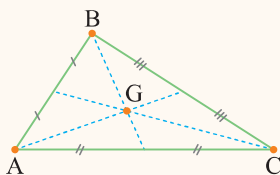
$$\begin{cases} x = 3 \\ y - 2x = -5 \Rightarrow y - 2(3) = -5 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

پس دو میانه مثلث همدیگر را در نقطه $(3, 1)$ قطع می کنند.

روش سریع تر:

برای چک کردن پاسخ نهایی می توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

نقطه G محل برخورد میانه های مثلث است.

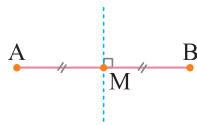


$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{1+5+3}{3}, \frac{-3+1+5}{3}\right) = (3, 1)$$

نوشتن معادله عمودمنصف

در سال های قبل آموختیم عمودمنصف یک پاره خط، خطی است که در نقطه وسط آن پاره خط بر آن عمود است، برای نوشتن معادله خط عمودمنصف این مراحل را انجام می دهیم:



۱ مختصات نقطه M وسط AB را به دست می آوریم.

۲ شیب پاره خط AB را عکس و قرینه می کنیم تا به شیب عمودمنصف برسیم.

۳ با نقطه M و شیب به دست آمده معادله خط را می نویسیم.

سؤال اگر $A(3, 6)$ و $B(-5, 2)$ باشد، معادله عمودمنصف پاره خط AB را بنویسید.

پاسخ ابتدا شیب پاره خط AB را حساب می کنیم و مختصات نقطه وسط پاره خط AB را به دست می آوریم:

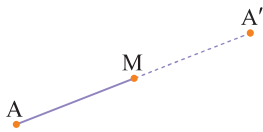
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 6}{-5 - 3} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{3+(-5)}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = (-1, 4)$$

شیب عمودمنصف از قرینه و معکوس کردن شیب خط AB به دست می آید، یعنی شیب آن برابر است با (-2) ، پس معادله خط عمودمنصف به صورت زیر است:

$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - 4 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x + 2$$

قرینه نقطه نسبت به نقطه



یکی از کاربردهای مهم مختصات نقطه وسط پاره خط، پیدا کردن قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگری است. به شکل مقابل دقت کنید اگر نقطه A را به M متصل کنیم و به همان اندازه در همان راستا امتداد دهیم، آن گاه به نقطه A' می‌رسیم، این نقطه را «قرینه نقطه A نسبت به نقطه M» می‌نامیم.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow 2x_M = x_A + x_{A'}$$

$$x_{A'} = 2x_M - x_A$$

$$y_{A'} = 2y_M - y_A$$

پس برای محاسبه طول نقطه A' داریم:

به طور مشابه برای عرض نقطه A' نیز داریم:

سؤال قرینه نقطه A(۳, -۱) را نسبت به نقطه N(-۲, ۱) به دست آورید.

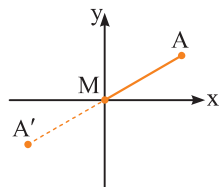
پاسخ فرض کنید قرینه نقطه A نسبت به نقطه N را A' بنامیم، در این صورت داریم:

$$x_{A'} = 2x_N - x_A \Rightarrow x_{A'} = 2(-2) - 3 = -7$$

$$y_{A'} = 2y_N - y_A \Rightarrow y_{A'} = 2(1) - (-1) = 3$$

پس A'(-۷, ۳) است.

قرینه نقطه نسبت به مبدأ مختصات



دیدیم که مختصات نقطه A' به صورت $A'(2x_M - x_A, 2y_M - y_A)$ به دست می‌آید، در این جا چون M مبدأ مختصات است، پس $M(0, 0)$ ، بنابراین:

$$A'(2(0) - x_A, 2(0) - y_A) = (-x_A, -y_A)$$

مثلاً قرینه نقطه B(۳, -۲) نسبت به مبدأ مختصات به صورت B'(-۳, ۲) نوشته می‌شود.

سؤال قرینه خط $y = 2x + 1$ را نسبت به مبدأ مختصات بنویسید. (راهنمایی: دو نقطه دلخواه از خط را قرینه کرده و معادله خط گذرنده از آن را می‌نویسیم).

پاسخ با جای گذاری x دلخواه، دو نقطه از خط به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1)$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 3 \Rightarrow B(1, 3)$$

$$A'(0, -1), B'(-1, -3)$$

قرینه نقطه A و B را نسبت به مبدأ مختصات پیدا می‌کنیم:

معادله خط گذرنده از A' و B' را می‌نویسیم:

$$m_{A'B'} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{-3 - (-1)}{-1 - (0)} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y - y_{A'} = m(x - x_{A'}) \Rightarrow y - (-1) = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x - 1$$

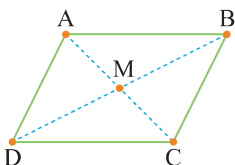
روش سریع‌تر:

برای قرینه کردن خط $ax + by + c = 0$ کافی است جای (x) عبارت (-x) و جای y قرینه آن یعنی (-y) را جای گذاری کنید.

$$y = 2x + 1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} (-y) = 2(-x) + 1 \Rightarrow -y = -2x + 1 \Rightarrow y = 2x - 1$$

ویژگی خاص متوازی الاضلاع

همان طور که می‌دانیم در متوازی الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند، بنابراین می‌توان مختصات نقطه برخورد قطرهای را با میانگین‌گیری از دو سر قطر پیدا کرد.



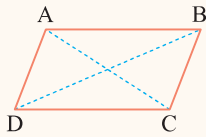
$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$$

بنابراین در یک متوازی الاضلاع داریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D, \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

توجه کنید که مربع، مستطیل و لوزی نیز نوعی متوازی الاضلاع اند، پس می‌توان از این رابطه برای آن‌ها استفاده کرد.

سؤال در متوازی‌الاضلاع ABCD، مختصات A(3, 1)، B(7, -3) و C(-4, 2) است. مختصات رأس D را بیابید.



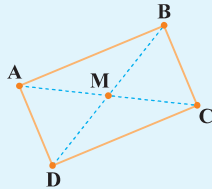
پاسخ با توجه به نام‌گذاری رئوس، متوازی‌الاضلاع به صورت زیر است:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 3 + (-4) = 7 + x_D \Rightarrow x_D = -8$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1 + 2 = (-3) + y_D \Rightarrow y_D = 6$$

پس مختصات رأس D به صورت (-8, 6) است.

سؤال در مستطیل زیر A(2, a-1)، B(2a, 6)، C(2b, a+1) و D(b, 0) است. با محاسبه a و b مختصات رئوس را بیابید.



$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + 2b = 2a + b \Rightarrow 2a - b = 2$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow a - 1 + a + 1 = 6 + 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

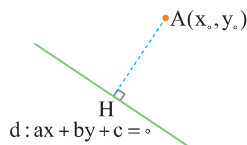
با جای‌گذاری در $2a - b = 2$ مقدار $b = 4$ به دست می‌آید.

$$A(2, 2), B(6, 6), C(8, 4), D(4, 0)$$

پس مختصات نقاط به صورت زیر خواهد بود:

فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه A از خط d، طول پاره‌خط عمودی است که از A بر خط d رسم شده است، اگر $A(x_0, y_0)$ و خط $d: ax + by + c = 0$ باشد، در این صورت با توجه به شکل مقابل فاصله نقطه از خط برابر است با:



$$\Rightarrow AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

با نگاهی به فرمول محاسبه فاصله نقطه از خط متوجه می‌شویم، در صورت کسر، مختصات نقطه در معادله خط جای‌گذاری شده است و در مخرج کسر، جذر مجموع مربع ضریب X و Y قرار دارد.

سؤال فاصله نقطه $A(-1, 3)$ را از خط به معادله $y = 3x + 1$ به دست آورید.

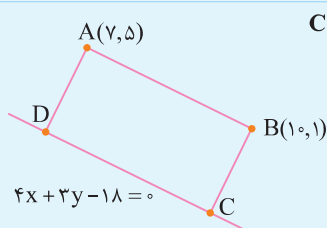
$$AH = \frac{|(3) - 3(-1) - 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

پاسخ معادله خط را به صورت $y - 3x - 1 = 0$ در نظر می‌گیریم، فاصله نقطه A از خط برابر است با:

$$\frac{5}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

می‌توانیم کسر را به صورت زیر ساده‌تر بنویسیم:

سؤال در مستطیل ABCD، مختصات نقطه A(7, 5) و B(10, 1) است و خط $4x + 3y - 18 = 0$ از دور رأس C



و D عبور می‌کند، مساحت این مستطیل را به دست آورید.

$$S = AB \times AD$$

پاسخ برای محاسبه مساحت مستطیل باید طول و عرض آن را به دست آورد و سپس:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(10 - 7)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

فاصله AB را می‌توان از فرمول فاصله دو نقطه به دست آورد.

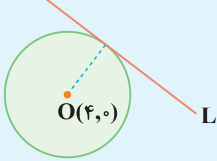
$$AD = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

فاصله AD نیز، فاصله نقطه A از خط $4x + 3y - 18 = 0$ است.

$$S = 5 \times 5 = 25$$

پس مساحت برابر است با:

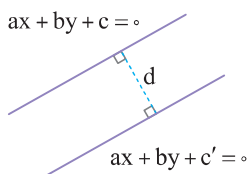
سؤال خط $L: 2x + y - 3 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(4, 0)$ مماس است، شعاع این دایره را به دست آورید.



پاسخ یکی از ویژگی‌های مهم دایره، عمود بودن شعاع بر خط مماس بر دایره است، بنابراین فاصله نقطه O تا خط L برابر شعاع (R) است.

$$R = \frac{|2(4) - (0) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

فاصله دو خط موازی



به دو خط موازی زیر و فاصله بین آن‌ها دقت کنید، واضح است که این فاصله همواره ثابت است، بنابراین برای محاسبه فاصله دو خط موازی کافی است:

- ۱ مختصات نقطه‌ای دلخواه از یکی از خطوط به دست می‌آوریم.
- ۲ فاصله نقطه به دست آمده را، تا خط دیگر محاسبه می‌کنیم.

سؤال فاصله خط $y = 2x + 1$ را از خط $4x - 2y + 1 = 0$ به دست آورید.

پاسخ شیب هر دو خط برابر است، پس دو خط با هم موازی اند.

نقطه دلخواهی از خط $y = 2x + 1$ به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1)$$

فاصله نقطه $A(0, 1)$ را از خط $4x - 2y + 1 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{|4(0) - 2(1) + 1|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20} = \frac{2\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

روش دیگری برای محاسبه فاصله دو خط

اگر دو خط $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ موازی باشند (به یکسان بودن ضریب x و ضریب y در معادلات خط توجه کنید)، آنگاه فاصله دو خط موازی از رابطه زیر نیز به دست می‌آید:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

سؤال در شکل مقابل یک دایره درون یک مربع طوری قرار گرفته است که بر اضلاع آن مماس است. اگر معادله دو



ضلع مقابل مربع $3x + y + 1 = 0$ و $6x + 2y = 18$ باشد، مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید. ($\pi = 3$)

پاسخ ضریب x و ضریب y در هر دو معادله را یکسان می‌کنیم:

$$S: 6x + 2y - 18 = 0 \xrightarrow{\div 2} S: 3x + y - 9 = 0$$

$$L: 3x + y + 1 = 0$$

فاصله دو خط S و L از هم برابر با طول ضلع مربع است که به طریق زیر به دست می‌آید:

$$\frac{|1 - (-9)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

با توجه به شکل شعاع دایره نصف ضلع مربع است و مساحت ناحیه رنگی با در نظرگیری $\pi = 3$ برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{دایره}} = (\sqrt{10})^2 - (3(\frac{\sqrt{10}}{2})^2) = 10 - \frac{30}{4} = \frac{10}{4}$$

● درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید.

۱. نقطه $(3, 7)$ روی خط $2x - y + 1 = 0$ قرار دارد.

۲. شیب خط گذرنده از دو نقطه $P(a, b)$ ، $Q(b, a)$ برابر ۱ است.

۳. اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب‌هایشان عکس یکدیگر است.

۴. خط $x = k$ بر خط $y = -k$ عمود است.

۵. دو خط $x + 2y = 1$ و $y = 2x + 3$ بر هم عمودند.

۶. قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به محور y ها نقطه $A'(-x, y)$ است.

۷. اگر $A(3, -2)$ و $B(-1, 2)$ باشند، نقطه وسط پاره خط AB روی محور طول‌ها است.

۸. معادله خطی که بر محور طول‌ها عمود باشد و از نقطه $(3, 4)$ بگذرد، خط $x = 4$ است.

۹. اگر $A(-1, 2)$ و $B(3, -1)$ باشد، طول پاره خط AB برابر ۵ است.

۱۰. مبدأ مختصات را O می‌نامیم، اگر $A(x, y)$ و $B(-x, -y)$ باشد، طول پاره خط OA با طول پاره خط OB برابر است.

● جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب تکمیل کنید.

۱۱. مقدار عرض از مبدأ خط $2x - 6y = 3$ برابر است.

۱۲. شعاع دایره‌ای که $A(3, -1)$ و $B(15, 4)$ دو سرقطر آن باشند، است.

۱۳. نقاط $A(x_1, y)$ و $B(x_2, y)$ دو سرپاره خط AB است. طول این پاره خط است.

۱۴. خط S بر خط T و خط Δ عمود است. اگر شیب خط S برابر $\frac{1}{4}$ باشد، حاصل ضرب شیب خط T و شیب خط Δ ، برابر با است.

۱۵. نقاط $A(5, 3)$ ، $B(1, 7)$ و $C(m, 0)$ روی یک خط هستند، مقدار m برابر با است.

۱۶. نقطه برخورد دو خط به معادله $3x + 4y - 7 = 0$ و $2x - y - 1 = 0$ نقطه است.

۱۷. اگر خط $y = 2x + 3$ بر خط $y = mx - 3$ عمود باشد، m برابر است.

۱۸. نقطه $A'(2, -4)$ قرینه نقطه $A(6, 0)$ نسبت به نقطه است.

۱۹. فاصله نقطه مبدأ مختصات از پاره خط $y + x + 1 = 0$ برابر است.

۲۰. فاصله دو خط موازی $4y - 3x + 1 = 0$ و $4y - 3x = 4$ برابر است.

● گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۲۱. فاصله نقطه $A(-2, 2)$ از خط $3x + 4y - 6 = 0$ کدام است؟

$$\frac{6}{5} \text{ (۴)} \quad \frac{8}{5} \text{ (۳)} \quad \frac{4}{5} \text{ (۲)} \quad -\frac{4}{5} \text{ (۱)}$$

۲۲. اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سرقطریک دایره باشند، مختصات مرکز دایره کدام است؟

$$(3, 1) \text{ (۴)} \quad (6, 2) \text{ (۳)} \quad (1, 3) \text{ (۲)} \quad (2, 6) \text{ (۱)}$$

● مسائل

می‌دونیم با داشتن ۲ نقطه از یک خط، می‌تونیم شیب اون خط رو پیدا کنیم. در ضمن، با داشتن معادله خط در حالت گسترده و استاندارد هم می‌تونیم شیب اون خط رو پیدا کنیم.

۲۳. اگر شیب خط گذرنده از نقاط $A(a+3, 2)$ و $B(-3, 2-a)$ برابر ۲- باشد، معادله این خط را بنویسید.

۲۴. نقاط $A(4, 2)$ ، $B(1, 0)$ و $C(k, -k)$ سه رأس مثلث ABC هستند، اگر مثلث در رأس B قائمه باشد مقدار k را بیابید. (حسابان نهایی خرداد ۱۴۰۲)

۲۵. نقطه $A(2, 5)$ و $B(-3, -10)$ روی خط $y = mx + n$ قرار دارند، حاصل $m + n$ را به دست آورید.

۲۶. در خط به معادله $(2a+b)x + (a-b)y = 3$ مقدار a و b را طوری تعیین کنید که عرض از مبدأ آن ۲ و طول از مبدأ آن ۱- باشد.

۲۷. پس از رسم خط $L: 2x + 3y - 12 = 0$ در دستگاه مختصات یک مثلث قائم‌الزاویه بین خط و محورهای x و y پدید می‌آید. مساحت این مثلث را به دست آورید.

۲۸. حدود m را طوری به دست آورید که معادله خط $y = 2mx + m - 2$ از ناحیه اول محورهای مختصات عبور نکند.

سرنخ برای بررسی وضعیت دو خط نسبت به هم، باید شیب خط‌ها را پیدا کنیم تا ببینیم با هم موازی‌اند، برهم عمودند یا متقاطع غیرعمودند.

۲۹. وضعیت هر جفت خط‌های زیر را نسبت به هم تشخیص دهید.

۱. $L: 3x - 5y + 2 = 0$, $S: 5x + 3y - 2 = 0$

۲. $\Delta: 2x = y + 5$, $T: \frac{y}{3} - x = 5$

۳۰. خط S به معادله $3x + y = 3$ مفروض است:

۱. معادله خطی را بنویسید که با خط S موازی باشد و از نقطه $A(-1, 2)$ بگذرد.

۲. معادله خطی را بنویسید که بر خط S عمود باشد و عرض از مبدأ آن ۳ باشد.

۳۱. به ازای چه مقدار a ، معادله خط $(3a+1)x + ay - 2 = 0$ بر خط به معادله $3x - y + 1 = 0$ عمود است؟

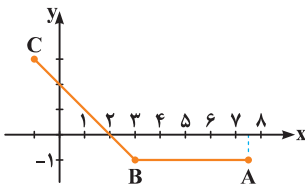
۳۲. خط $3x - 4y - 5 = 0$ و خط $(2k+1)x - y = k - 2$ با هم موازی هستند، مقدار k را به دست آورید.

۳۳. اگر $A(1, -1)$ ، $B(3, -5)$ و $C(4, 7)$ سه رأس یک مثلث باشند و CH ارتفاع وارد بر ضلع AB باشد، معادله خط CH را بنویسید.

۳۴. معادله سه ضلع مثلث ABC به صورت زیر است، معادله ارتفاع AH را به دست آورید.

$$\begin{cases} AB: 2y - x = 3 \\ AC: y - 2x = 5 \\ BC: 2y + 3x = 6 \end{cases}$$

سرنخ برای محاسبه فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ از رابطه $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ استفاده می‌کنیم. راستی چون نقطه مختصات مبدأ مختصات، فاصله نقطه A تا مبدأ به صورت $\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ نوشته می‌شود.



۳۵. نقاط $A(5\sqrt{2}, -1)$ ، $B(3, -1)$ و $C(-1, 3)$ یک مسیر از A به C را می‌سازند، طول این مسیر را محاسبه کنید.

۳۶. نقطه $A(2, 5)$ روی محیط دایره به مرکز $O(-1, 2)$ و شعاع x است. مقدار x را به دست آورید.

۳۷. نقاط $A(5, -1)$ و $B(-3, 5)$ دو رأس مقابل یک مربع‌اند، مساحت این مربع را به دست آورید.

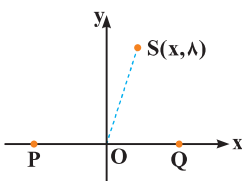
۳۸. فاصله نقطه $A(x, 3)$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{10}$ واحد است، مقدار مثبت x را به دست آورید.

۳۹. طول جغرافیایی شهر A برابر ۳۱ درجه غربی و عرض جغرافیایی این شهر برابر ۶ درجه جنوبی است. مختصات شهر A روی نقشه به صورت $(31, 6)$ نمایش داده می‌شود. اگر مختصات شهر B به صورت $(26, 18)$ باشد:

۱. فاصله این دو شهر را روی نقشه به دست آورید.

۲. اگر مسافت فیزیکی هر درجه عرض یا طول برابر ۱۲۰ کیلومتر باشد، فاصله تقریبی بین دو شهر را محاسبه کنید.

(مشابه تمرین کتاب)



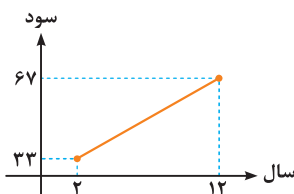
۴۰. در شکل مقابل پاره خط‌های OQ ، OS و OP همگی برابر ۱۰ واحد هستند. نشان دهید PSQ قائمه است؟

۴۱. نقطه A به طول ۱ روی محور x ‌ها و نقطه B روی خط $y = -x$ قرار دارند، اگر طول پاره خط AB برابر ۵ باشد، مختصات نقطه B را به دست آورید.

۴۲. نقطه‌ای از خط به معادله $y = 2x + 1$ بیابید که فاصله آن از نقطه $A(5, 0)$ برابر ۵ واحد باشد.

۴۳. مرکز دایره‌ای روی محور طول‌ها قرار دارد و دو نقطه با مختصات $A(6, 4)$ و $B(-1, 3)$ روی محیط این دایره‌اند. مختصات مرکز دایره را پیدا کنید.

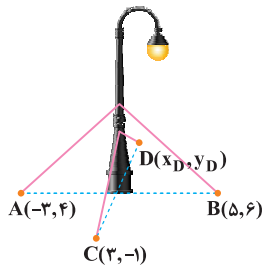
سرنخ مختصات نقطه M وسط پاره خط AB ، از میانگین مختصات دو سر پاره خط به دست می‌آید.



۴۴. سود یک شرکت تجاری از سال دوم تا سال دوازدهم به صورت خطی مطابق نمودار مقابل رشد داشته است. در سال هفتم میزان سود چقدر بوده است؟

(مشابه کاردرکلاس صفحه ۷)

(خرداد ۱۴۰۲)



۴۵. اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سرقطریک دایره باشند، مختصات مرکز دایره و شعاع دایره را به دست آورید.

۴۶. یک تیر چراغ برق، مطابق شکل توسط کابل هایی به زمین متصل شده است. به طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله، مختصات D را به دست آورید.
(مشابه کتاب درسی)

۴۷. اگر $A(-1, 4)$ و $B(-3, 5)$ باشد، معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

۴۸. اگر مبدأ مختصات، سه رأس یک مثلث باشند، محل برخورد عمود منصف های اضلاع این مثلث را به دست بیاورید.

۴۹. قرینه نقطه $A(5, 1)$ را نسبت به نقطه $B(-1, 4)$ به دست آورید.

۵۰. ابتدا قرینه نقطه $A(4, -1)$ را نسبت به نقطه $M(2, 3)$ به دست آورده و آن را A_1 می نامیم. قرینه نقطه A نسبت به مبدأ مختصات را نیز A_2 می نامیم. طول پاره خط A_1A_2 را محاسبه کنید.

۵۱. معادله سه ضلع مثلث مطابق زیر است، طول میانه CM را به دست آورید.

$$\begin{cases} AB: y = 0 \\ BC: y + 2x = 16 \\ AC: 2y - x = 2 \end{cases}$$

۵۲. قرینه نقطه $A(5, 1)$ را نسبت به خط $y = \frac{-1}{4}x + 1$ به دست آورید.

۵۳. معادله قرینه خط $2y + 3x - 10 = 0$ را نسبت به نقطه $M(1, 4)$ به دست آورید.

۵۴. قرینه نقطه $A(2, 5)$ نسبت به خط L نقطه $A'(4, 1)$ است، معادله خط L را بنویسید.

یادتون باشه برای محاسبه فاصله نقطه A از خط d ، اول باید معادله خط d رو به فرم $ax + by + c = 0$ بنویسیم و بعد از رابطه ای که توی درسنامه یاد گرفتیم استفاده کنیم.

(حسابان خرداد ۱۴۰۳)

۵۵. فاصله نقطه $A(0, 1)$ از خط $4x + 3y + 12 = 0$ را به کمک فرمول فاصله نقطه از خط به دست آورید.

(شهریور ۱۴۰۲)

۵۶. اگر خط $4x + 3y = -10$ بر دایره ای به مرکز $(1, 2)$ مماس باشد، اندازه شعاع دایره را به دست آورید.

(خرداد ۱۴۰۲)

۵۷. نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن بر خط $L: x - y = 5$ منطبق است. مساحت این مربع را به دست آورید.

۵۸. معادله قطر مربع $3x + 2y - 7 = 0$ و مختصات یک رأس مربع $A(2, 7)$ است، مساحت مربع را به دست آورید.

۵۹. نقطه $A(3, 1)$ محل برخورد قطرهای مربع است، اگر معادله یک ضلع این مربع $2y - x = 5$ باشد، محیط آن را به دست آورید.

۶۰. دو خط $3x - 2y = 2$ و $2x + 3y = 1$ معادله های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(1, 3)$ یک رأس مستطیل است. مساحت این مستطیل

(حسابان خرداد ۱۴۰۲)

چقدر است؟

۶۱. اگر رئوس مثلث ABC به صورت $A(1, 9)$ ، $B(3, 3)$ و $C(7, 11)$ باشند، طول ارتفاع AH را به دست آورید.

۶۲. اگر $A(1, -3)$ ، $B(3, -1)$ و $C(-1, 3)$ سه رأس یک مثلث باشند، مساحت مثلث را به دست آورید.

۶۳. فاصله نقطه $A(0, 1)$ از خط $x + y = k$ برابر $\sqrt{2}$ است، مقدار k را محاسبه کنید.

۶۴. مرکز دایره ای به شعاع ۳ روی محور طول ها است. اگر این دایره بر خط $3x + 4y = 0$ مماس باشد، مختصات مرکز دایره را به دست آورید.

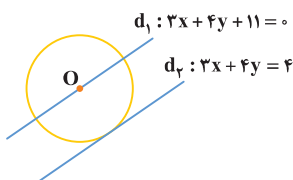
۶۵. نقاط $A(4, 2)$ ، $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشد، طول MH را

به دست آورید.

۶۶. دو ضلع مربع بر خطوط $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ منطبق اند، مساحت این مربع را محاسبه کنید.

۶۷. دو خط $y - 2x = 1$ و $y - 2x = -4$ دو ضلع یک مستطیل هستند. اگر خط $4y - 3x = 1$ یکی از قطرهای این مستطیل باشد، مساحت این مستطیل را محاسبه کنید.

۶۸. مطابق شکل، خط d_1 از مرکز دایره ای می گذرد که خط d_2 بر آن مماس است. محیط دایره را به دست آورید.



فصل اول

درس دوم: معادله و تابع درجه دوم

ریاضی یازدهم

یادآوری روش‌های حل معادله درجه دوم

در سال دهم آموختیم هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن $a \neq 0$ است، معادله درجه دوم می‌نامیم. برای یافتن جواب‌های این معادله، یکی از روش‌های زیر استفاده می‌شود:

۱ تجزیه

۲ ریشه دوم‌گیری

۳ مربع کامل

۴ دلتا (Δ)

۵ حالات خاص معادله

۱. حل معادله درجه دوم به روش تجزیه:

در این روش با استفاده از فاکتورگیری و یا اتحاد، معادله را به صورت ضرب دو عبارت درجه اول تجزیه کرده و سپس هر کدام را جداگانه مساوی صفر قرار می‌دهیم.

سؤال معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید.

ب $x^2 - 3x = 0$

ا $x^2 + 5x + 6 = 0$

پاسخ با استفاده از اتحاد جمله مشترک عبارت درجه دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x = x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

ب می‌توانیم از (x) فاکتور بگیریم، بنابراین داریم:

۲. حل معادله درجه دوم به روش ریشه‌گیری:

این روش برای معادلات درجه دوم به شکل $(ax+b)^2 = k$ ، $(a \neq 0)$ مناسب است، در این حالت با استفاده از قاعده ریشه دوم‌گیری، معادله را به شکل زیر می‌نویسیم و سپس مجهول را پیدا می‌کنیم.

$$(ax+b)^2 = k \Rightarrow \begin{cases} ax+b = \sqrt{k} \\ ax+b = -\sqrt{k} \end{cases}$$

سؤال معادله $(3x+5)^2 = 9$ را با روش ریشه‌گیری حل کنید.

پاسخ با ریشه دوم‌گیری از معادله داریم:

$$(3x+5)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 3x+5 = 3 \Rightarrow x = \frac{-2}{3} \\ 3x+5 = -3 \Rightarrow x = \frac{-8}{3} \end{cases}$$

۳. حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل:

برای حل به این روش مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱ اگر ضریب x^2 عددی غیر از ۱ باشد، طرفین معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

۲ عدد ثابت را به سمت راست معادله انتقال می‌دهیم.

۳ ضریب x را نصف کرده و مربع آن را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

۴ سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم.

۵ از طرفین ریشه دوم می‌گیریم و x را به دست می‌آوریم.

سؤال معادله $x^2 - 8x + 15 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ

$$x^2 - 8x = -15$$

$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16$$

$$(x-4)^2 = 1$$

$$\begin{cases} x-4=1 \Rightarrow x=5 \\ x-4=-1 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

ضریب x عدد ۸ است، مربع نصف آن برابر ۱۶ می‌شود. این عدد را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

سمت چپ معادله را به شکل مربع کامل می‌نویسیم:

با ریشه دوم‌گیری از معادله داریم:

۴. حل معادله درجه دوم به روش دلتا Δ :

برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) از روش کلی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ مقدار دلتا را به دست می‌آوریم: $\Delta = b^2 - 4ac$

۲ به شرطی که مقدار Δ منفی نباشد، ریشه‌های معادله برابر با $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ هستند.

تذکره اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد و اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای ریشه مضاعف برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ است.

سؤال معادلات درجه دوم زیر را به روش دلتا حل کنید.

ب $x^2 + 3x + 6 = 0$

آ $2x^2 + x - 6 = 0$

پاسخ

آ در این معادله $a = 2$ ، $b = 1$ و $c = -6$ است.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(2)(-6) = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2} \\ x = \frac{-1-7}{4} = -2 \end{cases}$$

ب در این معادله $a = 1$ ، $b = 3$ و $c = 6$ است.

چون $\Delta < 0$ است، این معادله فاقد ریشه حقیقی است.

۵. دو حالت خاص برای حل معادله درجه دوم:

امکان دارد در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) داشته باشیم:

۱ $a + b + c = 0$: در این صورت یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است.

۲ $a + c = b$: در این صورت یکی از ریشه‌ها برابر -۱ و دیگری برابر $\frac{-c}{a}$ است.

سؤال معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

ب $\sqrt{2}x^2 - x + 1 - \sqrt{2} = 0$

آ $2x^2 + 7x + 5 = 0$

پاسخ

آ در این معادله $a = 2$ ، $b = 7$ و $c = 5$ است. واضح است که $a + c = b$ بنابراین یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{-c}{a}$ است، پس داریم:

$x = -1$ ، $x = \frac{-5}{2}$

ب در این معادله $a = \sqrt{2}$ ، $b = -1$ و $c = 1 - \sqrt{2}$ است، واضح است که $a + b + c = 0$ بنابراین یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است، پس داریم:

$x = 1$ ، $x = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

ابتدا به معادلات زیر توجه کنید:

۱ $ax^4 + bx^2 + c = 0$

۲ $ax^6 + bx^3 + c = 0$

۳ $ax + b\sqrt{x} + c = 0$

معادلاتی از این دست را می‌توانیم با تغییر متغیر مناسب، به یک معادله درجه دوم تبدیل کنیم و سپس با روش‌هایی که در حل معادله درجه دوم آموختیم آن‌ها را حل کنیم.

در معادله (۱) اگر جای x^2 مجهول جدید t را قرار دهیم، معادله به شکل مقابل نوشته می‌شود:
 $at^2 + bt + c = 0$
 پس از یافتن t ، با حل معادله $x^2 = t$ می‌توانیم مقدار x ها را نیز محاسبه کنیم. در معادله (۲) و (۳) نیز با تغییر متغیر $x^3 = t$ و $\sqrt{x} = t$ به نتایج مشابهی می‌رسیم.

سؤال معادلات زیر را حل کنید.

$$x^6 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{پاسخ (۱)} \quad \frac{1}{2}x^6 - 3x^3 - 8 = 0 \quad \text{پاسخ (۲)}$$

پاسخ (۱) اگر قرار دهیم $x^2 = t$ معادله به صورت $t^2 - 5t + 4 = 0$ درمی‌آید که در این معادله $a + b + c = 0$ پس ریشه‌های آن ۱ و $\frac{c}{a}$ است:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

پاسخ (۲) اگر قرار دهیم $x^3 = t$ معادله به صورت $\frac{1}{2}t^2 - 3t - 8 = 0$ درمی‌آید. برای حل ساده‌تری می‌توانیم، عدد ۲ را در تمام جملات معادله ضرب کنیم:

$$\frac{1}{2}t^2 - 3t - 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t - 16 = 0$$

معادله فوق به صورت $(t-8)(t+2) = 0$ قابل تجزیه است، پس:

$$\begin{cases} t - 8 = 0 \Rightarrow t = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \\ t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow x^3 = -2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2} \end{cases}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

فرض کنید α و β ریشه‌های حقیقی معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) باشند. در این صورت داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \Rightarrow S = -\frac{b}{a} \quad \text{(مجموع ریشه‌ها را با S نشان می‌دهیم.)}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{c}{a} \quad \text{(ضرب ریشه‌ها را با P نمایش می‌دهیم.)}$$

سؤال بدون حل معادله $2x^2 - 7x - 3 = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله را به دست آورید.

پاسخ در این معادله $a = 2$ ، $b = -7$ و $c = -3$ است، دیدیم که $S = \frac{-b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S = \frac{-(-7)}{2} = \frac{7}{2}, \quad P = \frac{-3}{2}$$

سؤال اگر حاصل جمع ریشه‌های معادله $\frac{1}{2}mx^2 + (4+m)x + 6 = 0$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

پاسخ در این معادله $a = \frac{1}{2}m$ ، $b = 4+m$ و $c = 6$ است، داریم:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-(4+m)}{\frac{1}{2}m} = \frac{1}{2} \Rightarrow -8 - 2m = m \Rightarrow m = -2$$

پس معادله به صورت $-4x^2 + 2x + 6 = 0$ است که در آن $\Delta > 0$ است، بنابراین حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

توجه داشته باشیم که همواره پس از محاسبه ضرایب مجهول در معادله درجه دوم، بررسی کنیم که به ازای عدد به دست آمده، $\Delta \geq 0$ باشد.

سؤال α و β ریشه‌های متمایز معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هستند. $\alpha - \beta$ را بر حسب ضرایب معادله به دست آورید. ($\alpha > \beta$)

پاسخ می‌دانیم معادله در صورتی دارای ریشه‌های متمایز α و β است که $\Delta > 0$ باشد، در این صورت چون $\alpha > \beta$ است، داریم:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\alpha - \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

نکته اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، برای به دست آوردن حاصل عبارتی مثل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ یا $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$ و... می‌توانیم به کمک اتحادها، فاکتورگیری، تجزیه و مخرج مشترک‌گیری، عبارت داده شده را برحسب $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ بنویسیم.

سؤال α و β ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ است. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ **آ** $-\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2$ **ب**

پاسخ با توجه به معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{7}{3}, \quad P = \alpha\beta = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{2S}{P} = \frac{2(-\frac{7}{3})}{\frac{1}{3}} = -14$$

$$-\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 = -\alpha\beta(\beta + \alpha) = -PS = -(\frac{1}{3})(-\frac{7}{3}) = \frac{7}{9}$$

تشکیل معادله درجه دوم با استفاده از S و P

فرض کنید می‌خواهیم معادله درجه دومی بنویسیم که α و β ریشه‌های آن باشند. می‌دانیم $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ در این صورت می‌توان نوشت:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

سؤال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن عدد ۷ و -۳ باشد.

پاسخ دیدیم شکل معادله درجه دوم به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

$$S = (-3) + 7 = 4 \quad \text{جمع ریشه‌ها}$$

$$P = (-3) \times 7 = -21 \quad \text{ضرب ریشه‌ها}$$

$$\text{پس معادله درجه دوم مورد نظر } x^2 - 4x - 21 = 0 \text{ است.}$$

سؤال جمع دو عدد حقیقی برابر ۴ و ضرب آن‌ها $\frac{3}{75}$ است، آن دو عدد را بیابید.

پاسخ اگر دو عدد حقیقی را α و β در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha\beta = \frac{3}{75} \end{cases}$$

با توجه به $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ معادله درجه دوم به صورت زیر است:

$$x^2 - 4x + \frac{3}{75} = 0$$

برای حل معادله به دست آمده، از روش کلی Δ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(\frac{3}{75}) = 1 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \\ x = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین دو عدد حقیقی $\frac{5}{2}$ و $\frac{3}{2}$ است.

تحلیل علامت ریشه‌ها بدون حل معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در حالتی که دلتا مثبت باشد، دو ریشه حقیقی متمایز داریم. می‌خواهیم علامت این ریشه‌ها را با توجه به علامت حاصل جمع ریشه‌ها (S) و حاصل ضرب آن‌ها (P) تحلیل کنیم.

۱ $S > 0$ و $P > 0$: معادله دو ریشه مثبت دارد.

۲ $S < 0$ و $P > 0$: معادله دو ریشه منفی دارد.

۳ $P < 0$: معادله دو ریشه غیرهم علامت دارد.



سؤال

علامت ریشه‌های معادلات زیر را در صورت وجود مشخص کنید.

پ $4x^2 + 7x = -1$

ب $-x^2 + 4x + 7 = 0$

آ $2x^2 - 9x + 1 = 0$



پاسخ

در هر مورد پس از محاسبه Δ ، علامت S و P را به دست می‌آوریم:

آ $\Delta = (-9)^2 - 4(2)(1) = 73$ ، $S = \frac{9}{2}$ ، $P = \frac{1}{2}$

این معادله دو ریشه متمایز مثبت دارد. $\Delta > 0$ ، $P > 0$ ، $S > 0 \Rightarrow$

ب $\Delta = (4)^2 - 4(-1)(7) = 44$ ، $S = 4$ ، $P = -7$

این معادله دو ریشه متمایز غیرهم علامت دارد. $\Delta > 0$ ، $P < 0$ ، $S > 0 \Rightarrow$

روش سریع تر: اگر در یک معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ علامت P منفی باشد، معادله دارای دو ریشه غیرهم علامت است و قطعاً $\Delta > 0$ خواهد بود.

پ $4x^2 + 7x + 1 = 0$

$\Delta = (7)^2 - 4(4)(1) = 33$ ، $S = \frac{-7}{4}$ ، $P = \frac{1}{4}$

این معادله دارای دو ریشه متمایز منفی است. $\Delta > 0$ ، $P > 0$ ، $S < 0 \Rightarrow$

سهمی و ویژگی‌های آن

در سال دهم با رسم نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، به نام سهمی آشنا شدیم. برای رسم این ضابطه کافی است مختصات نقطه رأس آن $S(x_S, y_S)$ و دو نقطه دیگر در دو طرف S را به دست آوریم، از اتصال آن‌ها به هم نمودار سهمی پدید می‌آید. طول رأس سهمی (x_S) برابر با $-\frac{b}{2a}$ است و برای محاسبه عرض رأس سهمی (y_S) می‌توانیم x_S را در ضابطه تابع جای‌گذاری کنیم، یعنی $y_S = f(x_S)$.

تذکر برای محاسبه عرض رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، می‌توانیم از $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ نیز استفاده کنیم.

تذکر اگر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ ($a \neq 0$) نوشته شود، مختصات رأس آن (h, k) است.



سؤال

سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ را رسم کنید.



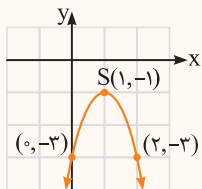
پاسخ

در این سهمی $a = -2$ ، $b = 4$ و $c = -3$ است. مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم.

$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می‌کنیم.

x	$y = -2x^2 + 4x - 3$	(x, y)
0	$-2(0)^2 + 4(0) - 3 = -3$	(0, -3)
1	$-2(1)^2 + 4(1) - 3 = -1$	(1, -1)
2	$-2(2)^2 + 4(2) - 3 = -3$	(2, -3)

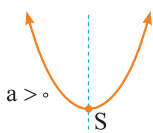


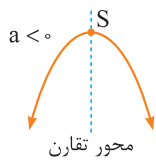
بنابراین نمودار این سهمی به صورت مقابل خواهد بود.

ماکزیمم و مینیمم سهمی

دیدیم که در سهمی با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ ، طول رأس سهمی $x_S = \frac{-b}{2a}$ است. برای به دست آوردن کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار سهمی با دو حالت مواجه‌ایم:

۱ اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه دهانه سهمی رو به بالا است و به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ ، کم‌ترین (min) مقدار سهمی به دست می‌آید.





۲ اگر $a < 0$ باشد، آنگاه دهانه سهمی رو به پایین است و به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ ، بیش‌ترین (max) مقدار سهمی به دست می‌آید.

در هر حالت برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم و یا مینیمم، $x = \frac{-b}{2a}$ را در ضابطه تابع جای‌گذاری می‌کنیم و یا می‌توانیم مقدار ماکزیمم یا مینیمم را به‌طور مستقیم از $y = \frac{-\Delta}{4a}$ به دست آوریم.

سؤال تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارد. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هریک را مشخص کنید.

$f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ (ب)

$f(x) = -x^2 + 4x + 1$ (آ)

پاسخ (آ) چون $a < 0$ است، این سهمی دارای ماکزیمم است.

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

$$f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 1 = 5$$

پس مقدار ماکزیمم تابع برابر ۵ است.

(ب) چون $a > 0$ است، این سهمی دارای مینیمم است.

می‌دانیم در سهمی به شکل $y = a(x-h)^2 + k$ ، مختصات رأس به صورت (h, k) است، پس مختصات رأس این سهمی $(3, 5)$ است، بنابراین مقدار مینیمم این تابع برابر ۵ است.

سؤال اگر طول رأس سهمی $y = -mx^2 + 3x + m$ برابر باشد، مقدار ماکزیمم یا مینیمم این سهمی را به دست آورید.

$$x_S = \frac{-3}{2(-m)} = 1 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

پاسخ می‌دانیم طول رأس سهمی به صورت $x_S = \frac{-b}{2a}$ است، بنابراین:

$$f(1) = \frac{-3}{2}(1)^2 + 3(1) + \frac{3}{2} = 3$$

بنابراین سهمی به شکل $y = \frac{-3}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}$ است. چون $a < 0$ است پس سهمی دارای ماکزیمم است. پس ماکزیمم تابع برابر ۳ است.

سؤال اگر کم‌ترین مقدار $y = x^2 + mx + 7$ برابر ۲ باشد، مقدار m را به دست آورید.

پاسخ چون $a > 0$ است، پس سهمی دارای نقطه مینیمم است و مقدار مینیمم این تابع از $\frac{-\Delta}{4a}$ به دست می‌آید:

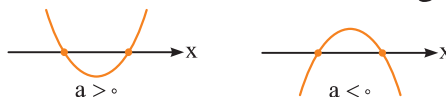
$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4(1)(7) - m^2}{4(1)} = 2 \Rightarrow 28 - m^2 = 8 \Rightarrow m^2 = 20 \Rightarrow m = \pm\sqrt{20}$$

صفرهای تابع درجه دوم

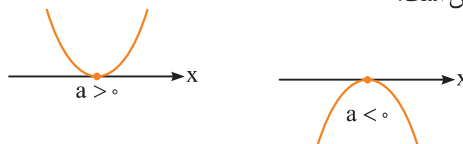
نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. به عبارت دیگر در این نقاط مقدار تابع صفر است.

در سال قبل دیدیم که تعداد صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به علامت Δ در معادله $f(x) = 0$ بستگی دارد، با توجه به Δ و علامت a به حالت‌های زیر می‌رسیم:

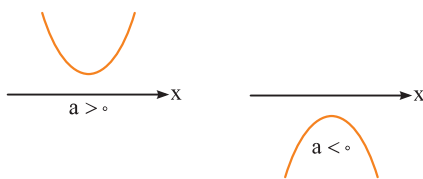
۱ $\Delta > 0$: تابع در دو نقطه با محور x ها برخورد می‌کند.



۲ $\Delta = 0$: تابع در یک نقطه بر محور x ها مماس است.



۳ $\Delta < 0$: تابع با محور x ها برخورد ندارد.



سؤال ۱ صفرهای تابع $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ را در صورت وجود تعیین کنید.

پاسخ صفرهای تابع $f(x)$ ، همان ریشه‌های معادله $-x^2 + 3x - 1 = 0$ است. برای حل این معادله از روش کلی (Δ) استفاده می‌کنیم.

$$\Delta = 3^2 - 4(-1)(-1) = 5 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2(-1)} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

تشخیص علامت c و b و a با توجه به نمودار $y = ax^2 + bx + c$

با کمک نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، می‌توانیم علامت ضرایب را مشخص کنیم.

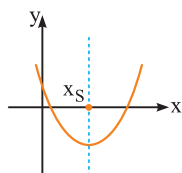
(a) در قسمت‌های قبل دیدیم که اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به سمت پایین باشد، $a < 0$ است.



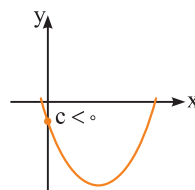
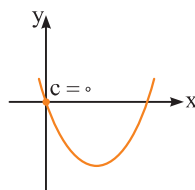
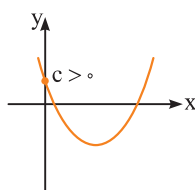
(b) دیدیم طول رأس سهمی $x_S = \frac{-b}{2a}$ است. واضح است که اگر $a > 0$ باشد، x_S و b ناهم علامت و اگر $a < 0$ باشد،

x_S و b هم علامت خواهند بود. مثلاً در نمودار مقابل:

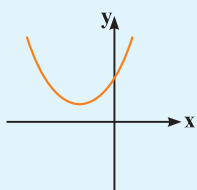
$$x_S > 0, a > 0 \Rightarrow b < 0$$



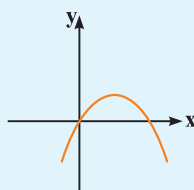
(c) به عرض از مبدأ (نقطه برخورد سهمی با محور y) دقت کنید، همان عرض از مبدأ سهمی یا $f(0)$ است و ۳ حالت زیر دارد:



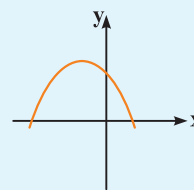
سؤال ۲ با توجه به نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ علامت a ، b و c را در هر کدام تعیین کنید.



پ



ب



آ

آ $a < 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی به سمت پایین است.

$c > 0 \Rightarrow$ عرض از مبدأ سهمی مثبت است.

$b < 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$ طول رأس سهمی منفی است.

ب $a < 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی به سمت پایین است.

$c = 0 \Rightarrow$ عرض از مبدأ سهمی صفر است.

$b > 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$ طول رأس سهمی مثبت است.

پ $a > 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی به سمت بالا است.

$c > 0 \Rightarrow$ عرض از مبدأ سهمی مثبت است.

$b > 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$ طول رأس سهمی منفی است.

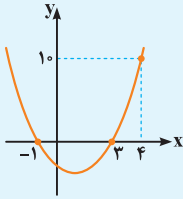
نوشتن ضابطه سهمی از نمودار

در این قسمت هدف، نوشتن تابع $y = ax^2 + bx + c$ با توجه به نمودار داده شده است. با توجه به نقاط داده شده در نمودار سهمی، معمولاً با یکی از حالات زیر می‌توان به ضرایب a ، b و c رسید.

۱. دو صفر تابع و یک نقطه دلخواه در نمودار مشخص باشد:

اگر سهمی، محور x ها را در دو نقطه x_1 و x_2 قطع کند، می‌توانیم معادله سهمی را به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ در نظر بگیریم و با جای‌گذاری هر نقطه دلخواهی از سهمی مقدار a را به دست آوریم و با ضرب پرانتزها به شکل کلی $y = ax^2 + bx + c$ برسیم.

سؤال معادله سهمی مقابل را بنویسید.



پاسخ با توجه به شکل سهمی می‌توانیم $x_1 = -1$ و $x_2 = 3$ در نظر بگیریم و شکل سهمی را به صورت $y = a(x + 1)(x - 3)$ بنویسیم، برای محاسبه مقدار a مختصات نقطه $(4, 10)$ را در معادله نوشته شده قرار می‌دهیم:

$$10 = a(4 + 1)(4 - 3) \Rightarrow 10 = a(5)(1) \Rightarrow a = 2$$

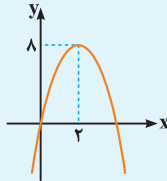
بنابراین:

$$y = 2(x + 1)(x - 3) = 2(x^2 - 2x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$$

۲. رأس سهمی و یک نقطه دلخواه در نمودار مشخص باشد:

اگر مختصات رأس سهمی به صورت $S(x_S, y_S)$ باشد، می‌توانیم معادله سهمی را به صورت $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ در نظر بگیریم و با کمک هر نقطه دلخواه دیگری از سهمی، مقدار a را به دست بیاوریم و با به توان‌رسانی به شکل کلی $y = ax^2 + bx + c$ برسیم.

سؤال معادله سهمی مقابل را بنویسید.



پاسخ مختصات رأس سهمی به صورت $(2, 8)$ ، بنابراین معادله سهمی به شکل $y = a(x - 2)^2 + 8$ است، با قرار دادن نقطه $(0, 0)$ در معادله سهمی داریم:

$$0 = a(0 - 2)^2 + 8 \Rightarrow 0 = a(-2)^2 + 8 \Rightarrow 4a + 8 = 0 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین:

$$y = -2(x - 2)^2 + 8 = -2(x^2 - 4x + 4) + 8 = -2x^2 + 8x - 8 + 8 = -2x^2 + 8x$$

۳. سه نقطه متمایز از سهمی مشخص باشد:

برای نوشتن معادله سهمی با داشتن سه نقطه متمایز از آن، معادله سهمی را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم و مختصات نقاط داده شده را در آن جای‌گذاری می‌کنیم و با حل دستگاه معادلات به ضرایب a ، b و c می‌رسیم.

سؤال یک سهمی از نقاط $(0, 1)$ ، $(1, 6)$ و $(-2, -3)$ می‌گذرد، معادله سهمی را بنویسید.

پاسخ معادله سهمی را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم و مختصات داده شده را در آن قرار می‌دهیم:

$$(0, 1) \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$(1, 6) \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 6 \Rightarrow a + b + 1 = 6 \Rightarrow a + b = 5 \quad (1)$$

$$(-2, -3) \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = -3 \Rightarrow 4a - 2b + 1 = -3 \Rightarrow 4a - 2b = -4 \quad (2)$$

با حل (۱) و (۲) در دستگاه دو معادله و دو مجهولی داریم:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 4a - 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 4$$

پس معادله سهمی به شکل $y = x^2 + 4x + 1$ است.

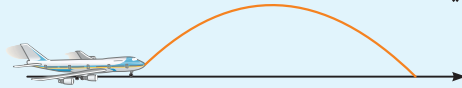
کاربردهای از تابع درجه دوم

در برخی از سؤالات که به صورت کاربردی بیان می شوند، می توانیم با ساختن ضابطه سهمی از ویژگی های آن استفاده کنیم. در این سؤالات با پیدا کردن مختصات رأس سهمی یا محل برخورد سهمی با محورهای مختصات می توانیم به جواب برسیم.

سؤال ارتفاع یک هواپیما در دقیقه t پرواز از رابطه $y = -30t^2 + 1200t$ به دست می آید:

آ) حداکثر ارتفاع هواپیما را به دست آورید.

ب) مدت زمان پرواز هواپیما را محاسبه کنید.



پاسخ آ) در تابع درجه دوم $y = -30t^2 + 1200t$ ، $a < 0$ است، پس این تابع دارای ماکزیمم است.

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1200}{2(-30)} = 20$$

$$y_S = -30(20)^2 + 1200(20) = 12000$$

بنابراین حداکثر ارتفاع هواپیما برابر ۱۲۰۰۰ است.

ب) زمان طی شده توسط هواپیما فاصله دو صفر تابع است.

$$-30t^2 + 1200t = -30t(t - 40) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -30t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ t - 40 = 0 \Rightarrow t = 40 \end{cases}$$

بنابراین مدت کل پرواز برابر ۴۰ دقیقه بوده است.

سؤال اگر طول یک مستطیل از قرینه عرض آن ۶ واحد بیش تر باشد، بیش ترین مساحت این مستطیل را به دست آورید.

$$\begin{array}{|c|} \hline -x + 6 \\ \hline x \\ \hline \end{array}$$

پاسخ با توجه به سؤال می توانیم مستطیل زیر را رسم کنیم.

مساحت این مستطیل از رابطه زیر به دست می آید:

$$S = x(-x + 6) = -x^2 + 6x \Rightarrow S(x) = -x^2 + 6x$$

با یک تابع درجه دوم مواجه ایم که چون $a < 0$ است، دارای نقطه ماکزیمم است. برای محاسبه مقدار ماکزیمم این تابع داریم:

$$x_S = \frac{-b}{2(-1)} = 3$$

پس این تابع حداکثر مقدار خود را در $x = 3$ اختیار می کند.

$$S(3) = -(3)^2 + 6(3) = 9$$

مقدار ماکزیمم این تابع برابر ۹ است.

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

پرسش های تشریحی

درس
۲

• درست یا نادرستی گزاره های زیر را تشخیص دهید.

۶۹. مقدار ماکزیمم سهمی $f(x) = -x^2 + 6x + 5$ برابر ۷ است.

۷۰. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر حاصل ضرب ریشه ها (P) منفی باشد، علامت Δ مثبت است.

۷۱. تعداد صفرهای تابع $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$ برابر ۲ است.

۷۲. در معادله $x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0$ ، یکی از ریشه ها عکس ریشه دیگر است.

۷۳. اگر سهمی، محور x ها را در $x = 2$ و $x = 1$ قطع کند، معادله آن به صورت $y = a(x+1)(x+2)$ خواهد بود.

۷۴. معادله $x^4 - 2x^2 + 6 = 0$ دارای ۴ ریشه است.

۷۵. ریشه های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ نصف ریشه های معادله $x^2 + 4x - 16 = 0$ است.

۷۶. سهمی $y = x^2 - 2x + 3$ از ناحیه سوم دستگاه مختصات نمی گذرد.

● جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پُر کنید.

۷۷. معادله $x^2 + 6x + 3 = 0$ دارای دو ریشه است. (مثبت، منفی)

۷۸. سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ دارای است. (ماکزیمم، مینیمم)

۷۹. در معادله $x^2 + 6x + 1 = 0$ مجموع حاصل ضرب ریشه‌ها (P) و حاصل جمع ریشه‌ها (S) است.

۸۰. رأس سهمی $y = 2(x+3)^2 + 4$ نقطه است.

۸۱. مقدار مینیمم تابع $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ برابر با است.

۸۲. معادله $x^2 + \sqrt{x} - 3 = 0$ دارای جواب است. (صفر، یک، دو)

۸۳. در معادله درجه دوم $mx^2 + 3mx - 6 = 0$ مقدار حاصل جمع ریشه‌ها برابر است. ($m > 0$)

۸۴. اگر α یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $3mx^2 + 7m + 1 = 0$ باشد، ریشه دیگر است.

۸۵. در معادله $x^3 + 6x^2 - 7x = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر با است.

● گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۸۶. تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + 6x + 7 = 0$ چگونه است؟

(۱) دو ریشه منفی (۲) دو ریشه مثبت

(۳) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی (۴) ریشه ندارد.

۸۷. معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $3 + 2\sqrt{5}$ و $3 - 2\sqrt{5}$ باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 + 6x + 11 = 0$ (۲) $x^2 + 6x - 11 = 0$

(۳) $x^2 - 6x + 11 = 0$ (۴) $x^2 - 6x - 11 = 0$

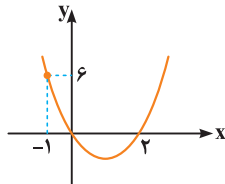
۸۸. اگر خط $x = -1$ محور تقارن تابع درجه دوم $f(x) = x^2 + mx - m + 1$ باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۸۹. نمودار تابع درجه دوم $y = f(x)$ به صورت زیر است. مقدار $f(\frac{1}{3})$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -۱

(۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{5}{4}$



● مسائل

در شروع سؤالات درس دوم، روش‌های حل معادله درجه دوم و معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم رو بررسی می‌کنیم.

۹۰. معادله‌های زیر را حل کنید. (روش دلخواه)

۱. $x^2 - 3x - 2 = 0$ ۲. $x^2 + x + 1 = 0$ ۳. $(2x-1)^2 = 9$

۹۱. با تغییر متغیر مناسب معادلات زیر را حل کنید.

۱. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ۲. $x^4 - 2x^2 - 6 = 0$

۳. $2x^6 - 14x^3 - 16 = 0$ ۴. $-2x^8 + 4x^4 + 6 = 0$

۵. $(x-1)^2 + 3(x-1) - 4 = 0$ ۶. $3x - \sqrt{x} - 2 = 0$

۹۲. معادله $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}} - 2 = 0$ را حل کنید.

۹۳. معادله $2(x^2 - 3x) - 8 = (3x - x^2)^2$ را حل کنید.

در معادله درجه دوم حاصل جمع ریشه‌ها رو با S و حاصل ضرب ریشه‌ها رو با P نشون میدیم. کاربرد مهم S و P، تحلیل ریشه‌های

یک معادله درجه دوم، مثلاً آگه $S = 0$ باشه، یعنی ریشه‌های معادله قرینه هم بودند، یا آگه $P = 1$ باشه، ریشه‌های معادله معکوس هم‌اند.

۹۴. بدون حل معادله‌های زیر جمع و ضرب ریشه‌های آن را به دست آورید.

۱. $3x^2 - 7x - 1 = 0$ ۲. $2x^2 + 6x + 1 = 0$

۹۵. α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ هستند، آنگاه حاصل عبارات زیر را بدون محاسبه مقدار ریشه‌ها به دست آورید.

ب $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$ ا $\alpha + \beta$

ت $(\alpha + 2)(\beta + 2)$ پ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

۹۶. معادله $5x^2 + 2x - 4 = 0$ ، دارای دو ریشه متمایز α و β است. مقدار $\frac{1}{\alpha - 2} + \frac{1}{\beta - 2}$ را به دست آورید.

۹۷. در معادله درجه دوم $x^2 + (a+1)x - 2a = 0$ ، حاصل ضرب دو ریشه را با P و حاصل جمع دو ریشه را با S نشان می‌دهیم؛ اگر $S - P = 2$ باشد، a را به دست آورید.

۹۸. اگر دو ریشه معادله $0 = (m+2)x^2 - (m+2)x + (m-1)$ قرینه هم باشند، m را به دست آورید.

۹۹. اگر دو ریشه معادله $0 = mx^2 + 4mx + (1-m)$ عکس هم باشند، m را به دست آورید.

21! ۱۰۰. اگر α و β ریشه‌های معادله $0 = (1-m)x^2 + 2mx - (1-m)$ باشند، m را طوری تعیین کنید که رابطه $(\alpha+1)(\beta+1) = 5$ برقرار باشد.

سرنه فرم $x^2 - Sx + P = 0$ رو به خاطر بسپارید. از این فرم، در سؤالاتی که ریشه‌ها رو دارید و بخواید با توجه به ریشه‌ها معادله درجه دوم بسازید، استفاده کنید.

(مشابه کاردرکلاس)

۱۰۱. در هر مورد دو عدد داده شده ریشه‌های معادله است، معادله آن را بنویسید.

ا $3, -2$

ب $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

پ $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}, \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$

21! ۱۰۲. معادله‌ای درجه دوم بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$ و $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ باشد.

21! ۱۰۳. معادله درجه دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از جواب‌های آن $2 - \sqrt{3}$ باشد.

(مشابه کاردرکلاس)

۱۰۴. دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها $\frac{15}{4}$ و ضرب آن‌ها ۱۴ باشد.

(مشابه کاردرکلاس)

۱۰۵. ابعاد یک مستطیل را طوری به دست آورید که محیط آن ۱۴ و مساحت آن ۶ واحد باشد.

۱۰۶. اگر α و β جواب‌های معادله $0 = x^2 + 6x + 2$ باشند، معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشند.

21! ۱۰۷. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش از ۲ برابر ریشه‌های معادله $0 = x^2 + 3x - 1$ ، یک واحد بیشتر باشد.

۱۰۸. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله $0 = 3x^2 - 6x + 1$ باشد.

سرنه با داشتن ارتباط ریشه‌های یک معادله درجه دوم میشه اونها رو برحسب هم نوشت. بعد S و P رو به دست بیارید تا به مجهولات معادله داده شده برسید.

21! ۱۰۹. اگر یکی از جواب‌های معادله $0 = x^2 + 3x + m$ ، ۳ واحد از دیگری بیش‌تر باشد، m کدام است؟

21! ۱۱۰. اگر یکی از جواب‌های معادله $0 = x^2 + 4x + m$ ، سه برابر جواب دیگر باشد، m کدام است؟

21! ۱۱۱. در معادله $0 = x^2 - 5x + m$ یک ریشه از دو برابر ریشه دیگر، یک واحد کم‌تر است. m را به دست آورید.

سرنه قسمت ساده تابع درجه دو، محاسبه مقدار $\max$ یا $\min$ تابع داده شده است. یادت باشه وقتی مقدار ماکزیمم یا مینیمم این تابع رو می‌خوای باید عرض رأس سهمی رو به دست بیاری.

۱۱۲. ماکزیمم و یا مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

ب $f(x) = 2x + x^2 + 2$ ا $f(x) = -3x^2 + 12x + 1$

ت $f(x) = (2x+1)^2 - (x-1)^2$ پ $f(x) = (x+2)(4-2x)$

21! ۱۱۳. α و β ریشه‌های معادله $0 = x^2 + 2x - 1 - m$ هستند، مینیمم مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ را به دست آورید.

21! ۱۱۴. نقطه مینیمم تابع $y = kx^2 - 6x + k$ روی خط $y = 4$ است. مقدار k را به دست آورید.

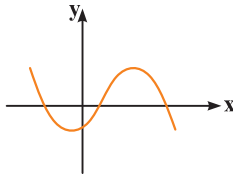
مشابه سؤال زیر رو در معادله درجه دوم حل کردیم، قراره با حل این سؤال دید بهتری به مفهوم «صفر تابع» داشته باشید.

۱۱۵. صفرهای توابع زیر را به دست آورید.

آ $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$

ب $f(x) = x^2 - 2x - 1$

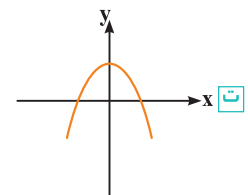
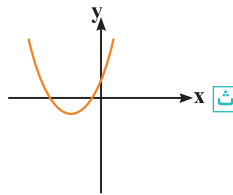
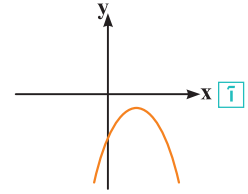
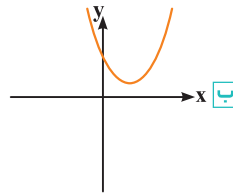
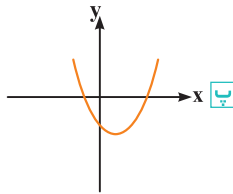
۱۱۶. با توجه به نمودار مقابل، تعداد صفرهای تابع را به دست آورید.



۱۱۷. نمودار تابعی رسم کنید که تعداد سه، صفر مثبت داشته باشد.

علامت a و b و c در تابع $y = ax^2 + bx + c$ خیلی ساده به دست میاد، علامت a به جهت دهانه سهمی بستگی داره، c دقیقاً عرض از مبدأ نموداره و برای علامت b از علامت محور تقارن و علامت a استفاده کنید.

۱۱۸. در هریک از موارد، نمودار $y = ax^2 + bx + c$ رسم شده است؛ علامت a ، b و c و تعداد صفرها را مشخص کنید.



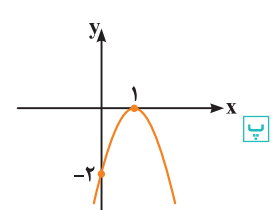
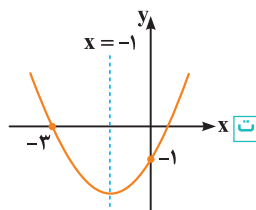
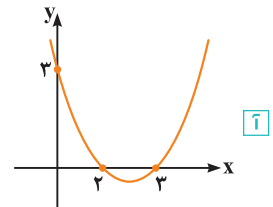
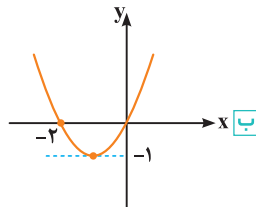
۱۱۹. در هر مورد با توجه به علامت ضرایب داده شده مربوط به سهمی با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ ، آن را رسم کنید.

آ $a > 0, b > 0, c > 0$

ب $a < 0, b < 0, c > 0$

در سه حالت میشه ضابطه سهمی رو با توجه به نمودارش نوشت. ۱- صفرهای تابع و یک نقطه دیگر معلوم باشه. ۲- نقطه رأس و یک نقطه دیگر معلوم باشه. ۳- سه نقطه دلخواه از سهمی داشته باشیم.

۱۲۰. سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در هر کدام از موارد رسم شده است. ضابطه آن را بنویسید.



۱۳۱. چند جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ را طوری بنویسید که:

$$P(0) = 0, P(4) = 0, P(2) = 8$$

۱۳۲. اگر مختصات رأس سهمی $S(-1, 9)$ باشد و این سهمی از نقطه $(3, 1)$ نیز گذر کند، معادله این سهمی را بنویسید.

۱۳۳. نقاط $A(-2, 5)$ ، $B(0, 5)$ و $C(1, 11)$ بر روی یک سهمی واقع اند. معادله این سهمی را بنویسید.

۱۳۴. نمودار یک سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- و ۵ قطع کرده است. ماکزیمم این سهمی را به دست آورید.

سرنخ برای پیدا کردن تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم، باید به علامت Δ توجه کنیم. حالا اگر $\Delta > 0$ باشد، دوتا ریشه داریم که برای تشخیص علامت ریشه‌ها، باید علامت جمع و ضرب ریشه‌ها رو تحلیل کنیم.

۱۳۵. راجع به تعداد و علامت صفرهای توابع زیر، بدون حل آن‌ها نظر دهید.

$$f(x) = x^2 + 6x + 2 \quad \text{ب} \quad f(x) = 2x^2 - 7x - 3 \quad \text{ا}$$

۱۳۶. حدود m را طوری تعیین کنید که سهمی $f(x) = x^2 + (m-1)x + \frac{1}{4}$ در دو نقطه با طول مثبت محور x ها را قطع کند.

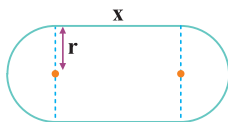
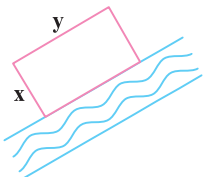
۱۳۷. حدود m را طوری تعیین کنید که معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی متمایز باشد.

۱۳۸. حدود m را طوری تعیین کنید که معادله $(m+2)x^2 + 3x + 1 - m = 0$ دارای یک ریشه مثبت حقیقی و یک ریشه منفی حقیقی باشد.

سرنخ چالشی‌ترین قسمت سؤالات زیر، ساختن تابعی که قرار $\max$ یا $\min$ اون رو به دست بیارین، توی این سؤالات به عددی غیر ژند عادت کنید.

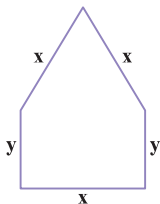
۱۳۹. دو عدد حقیقی x و y را در نظر بگیرید، اگر $x + y = 6$ باشد، کم‌ترین مقدار عبارت $x^2 + y^2$ را محاسبه کنید.

۱۴۰. کشاورزی می‌خواهد زمین مستطیل شکل خود را که کنار رودخانه‌ای قرار دارد، با ۲۴ متر طناب حصارکشی کند. بیش‌ترین مساحت این زمین کشاورزی را محاسبه کنید.



۱۴۱. مطابق شکل، استادیومی به شکل مستطیل با طول x به همراه دو نیم دایره در دو طرف آن در حال ساخت است.

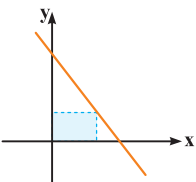
اگر محیط استادیوم 80π باشد، بیش‌ترین مقدار مساحت استادیوم را محاسبه کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱۴۲. پنجره مقابل به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است؛ اگر محیط پنجره برابر ۴ متر باشد، و بخواهیم حداکثر نوردهی را داشته باشیم، طول ضلع مثلث را محاسبه کنید. (مشابه مثال کتاب درسی)

۱۴۳. در شکل مقابل یک رأس مستطیل روی خط $3x + y - 12 = 0$ و دو ضلع دیگر آن روی محورهای مختصات

قرار دارند. بیش‌ترین مساحت مستطیل رنگی را به دست آورید.



یادداشت:

درست ۱

توضیح: اگر نقطه‌ای روی یک خط واقع شده باشد، در آن صدق می‌کند. با جای‌گذاری مختصات نقطه A در ضابطه خط داریم:

$$2(3) - (7) + 1 = 0$$

چون تساوی بالا برقرار است، پس نقطه A روی خط قرار دارد.

نادرست ۲

توضیح: شیب خط گذرا از نقاط P و Q برابر است با:

$$m_{PQ} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{b - a}{a - b} = -1$$

نادرست ۳

توضیح: اگر دو خط باهم موازی باشند، شیب‌هایشان با هم برابر است.

درست ۴

توضیح: تمام خطوط قائم بر خطوط افقی عموداند. پس خط $x = k$ بر خط $y = -k$ عمود است.

درست ۵

توضیح: ابتدا شیب خط‌ها را حساب می‌کنیم:

$$L_1: x + 2y = 1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} \quad L_2: y = 2x + 3 \Rightarrow m_2 = 2$$

چون حاصل‌ضرب شیب دو خط برابر -1 است ($m_1 \times m_2 = (-\frac{1}{2}) \times 2 = -1$)، پس دو خط بر هم عموداند.

درست ۶

توضیح: در قرینه کردن نقطه $A(x, y)$ نسبت به محور y ، تنها طول نقطه قرینه می‌شود.

$$A(x, y) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} A(-x, y)$$

درست ۷

توضیح: ابتدا مختصات نقطه وسط پاره خط AB را به دست می‌آوریم:

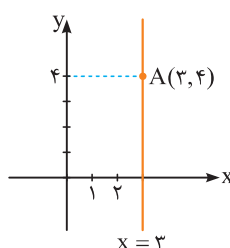
$$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) \Rightarrow M(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{-2 + 2}{2}) \Rightarrow M(1, 0)$$

چون عرض نقطه M برابر صفر است، پس روی محور طول‌ها قرار دارد.

نادرست ۸

توضیح: معادله خطی که بر محور طول‌ها عمودند به صورت $x = k$ است.

چون این خط از نقطه $A(3, 4)$ عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت $x = 3$ است.



درست ۹

توضیح: به کمک رابطه فاصله دو نقطه، طول پاره خط AB را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

درست ۱۰

توضیح: ابتدا فاصله نقاط A و B را تا مبدأ مختصات به دست می‌آوریم:

$$A(x, y) \Rightarrow OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$B(-x, -y) \Rightarrow OB = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

چون $OA = OB$ است، بنابراین طول پاره خط‌های OA و OB یکسان است.

۱۱ ۲/۳

توضیح: عرض از مبدأ یک خط، محل برخورد آن با محور y ها است؛ پس در معادله خط، $x = 0$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار عرض از مبدأ را به دست آوریم.

$$3y - 6x = 2 \xrightarrow{x=0} 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط برابر $\frac{2}{3}$ است.

۱۲ ۱۳/۲

توضیح: طول پاره خط AB برابر قطر دایره است؛ اندازه قطر دایره برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3 - 15)^2 + (-1 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

بنابراین اندازه شعاع دایره برابر $\frac{13}{2}$ است.

 ۱۳ $|x_1 - x_2|$

توضیح: دو نقطه A و B دارای عرض‌های یکسان‌اند، پس برای محاسبه AB، کافی است فاصله طول این دو نقطه را به دست آوریم:

$$AB = |x_A - x_B| = |x_1 - x_2|$$

۱۴ ۴

توضیح: خط S بر هر دو خط T و Δ عمود است، پس خطوط T و Δ هم موازی‌اند.

شیب خط S برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس خطوط T و Δ برابر ۲ است.

حاصل‌ضرب شیب‌های این دو خط برابر $2 \times 2 = 4$ است.

فاصله دو خط برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-1 - (-4)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

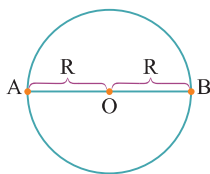
گزینه «۲»

توضیح:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(-2) + 4(2) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

گزینه «۴»

توضیح:



چون مرکز دایره، وسط دو سر قطر دایره قرار دارد، پس:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(3, 1)$$

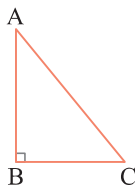
شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B از رابطه $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} m_{AB} = -2 &\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \Rightarrow \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = -2 \\ &\Rightarrow \frac{2 - (2 - a)}{a + 3 - (-3)} = -2 \Rightarrow \frac{a}{a + 6} = -2 \Rightarrow a = -2a - 12 \\ &\Rightarrow 3a = -12 \Rightarrow a = -4 \end{aligned}$$

بنابراین مختصات نقاط به صورت A(-1, 2) و B(-3, 6) هستند. معادله خط AB برابر است با:

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x$$



با توجه به شکل مقابل، چون مثلث در رأس B قائمه است، پس خطوط شامل ضلع‌های AB و BC بر هم عمودند.

ابتدا شیب AB و AC را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - 0}{-1 - 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0 - (-k)}{1 - k} = \frac{k}{1 - k}$$

می‌دانیم اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است، بنابراین داریم:

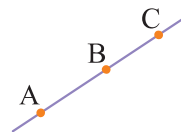
$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{k}{1 - k}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{k}{1 - k} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2k = 2 - k \Rightarrow k = 2$$

بنابراین به ازای $k = 2$ ، مثلث ABC در رأس B قائمه است.

۱۵ | ۸

توضیح: چون هر سه نقطه A، B و C روی یک خط واقع شده‌اند، پس شیب AB و شیب AC با هم برابر است.



$$\begin{aligned} m_{AB} = m_{AC} &\Rightarrow \frac{y - 3}{1 - 5} = \frac{0 - 3}{m - 5} \\ &\Rightarrow \frac{4}{-4} = \frac{-3}{m - 5} \Rightarrow 4m - 20 = 12 \Rightarrow m = 8 \end{aligned}$$

۱۶ | (1, 1)

توضیح: برای به دست آوردن مختصات نقطه تلاقی دو خط، دستگاه دو معادله و دو مجهول شامل دو خط را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

بنابراین نقطه برخورد دو خط به صورت (1, 1) است.

۱۷ | $-\frac{1}{2}$

توضیح: شیب خط $L_1: y = 2x + 3$ برابر ۲ است.

چون خط $L_2: y = mx - 3$ بر خط L_1 عمود است، پس شیب آن قرینه و معکوس L_1 است. بنابراین $m = -\frac{1}{2}$ است.

۱۸ | (4, -2)

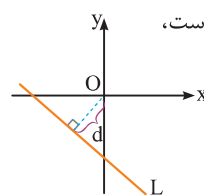
توضیح: باید مختصات وسط پاره خط AA' را پیدا کنیم.



$$\begin{aligned} M\left(\frac{x_A + x_{A'}}{2}, \frac{y_A + y_{A'}}{2}\right) &\Rightarrow M\left(\frac{6 + 2}{2}, \frac{0 + (-4)}{2}\right) \\ &\Rightarrow M(4, -2) \end{aligned}$$

۱۹ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$

توضیح: مختصات نقطه مبدأ مختصات $O(0, 0)$ است، پس فاصله آن از خط $x + y + 1 = 0$ برابر است با:

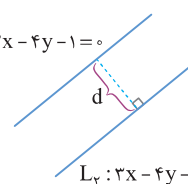


$$d = \frac{|0 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۰ | $\frac{3}{5}$

توضیح: ابتدا ضرایب x و y را در هر دو خط داده یکسان می‌کنیم و سپس به کمک رابطه فاصله دو خط موازی داریم:

$$\begin{aligned} L_1: 3x - 4y - 1 &= 0 \\ \begin{cases} 4y - 3x + 1 = 0 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 1 = 0 \\ 3x - 4y - 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



(ب) $\Delta: 2x = y + 5 \Rightarrow y = 2x - 5 \Rightarrow m_{\Delta} = 2$
 $T: \frac{y}{2} - x = 5 \Rightarrow y = 2x + 10 \Rightarrow m_T = 2$
 چون $m_{\Delta} = m_T$ است، پس دو خط Δ و T با هم موازی‌اند.

(۳۰) ابتدا شیب خط S را به دست می‌آوریم:
 $S: 2x + y = 3 \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow m_S = -2$
 خط L با خط S موازی است، پس شیب آن با شیب خط S برابر است.
 معادله خط L به صورت زیر است:

$y - y_A = m_L(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 4$
 (ب) چون خط Δ بر خط S عمود است، پس شیب آن قرینه و معکوس شیب خط S است؛ یعنی $m_{\Delta} = \frac{1}{2}$ است. هم‌چنین عرض از مبدأ خط Δ برابر ۳ است؛ یعنی خط Δ از نقطه $B(0, 3)$ می‌گذرد.
 معادله خط Δ به صورت زیر است:

$y - y_B = m_{\Delta}(x - x_B) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$
 (۳۱) ابتدا مقدار شیب دو خط داده شده را به دست می‌آوریم:

$L_1: (3a + 1)x + ay - 2 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{-(3a + 1)}{a}$
 $L_2: 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow m_2 = 2$
 می‌دانیم حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم، برابر -۱ است، بنابراین داریم:
 $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{-(3a + 1)}{a} \times 2 = -1 \Rightarrow \frac{2a + 1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a + 2 = a \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

(۳۲) چون دو خط موازی هستند، پس دارای شیب برابر هستند.
 $3x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{4}$
 $(2k + 1)x - y = k - 2 \Rightarrow m_2 = 2k + 1$
 با برابر قرار دادن دو مقدار شیب به دست آمده داریم:
 $2k + 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow 2k = -\frac{1}{4} \Rightarrow k = -\frac{1}{8}$

(۳۳) می‌دانیم خط CH بر ضلع AB عمود است، پس شیب آن، قرینه و معکوس شیب خط AB است:
 $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5 - (-1)}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$
 بنابراین شیب خط CH برابر $m_{CH} = \frac{1}{2}$ است و با توجه به مختصات نقطه C داریم:

$y - y_C = m_{CH}(x - x_C) \Rightarrow y - 7 = \frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5$

(۳۴) ابتدا نقطه A یعنی محل برخورد ضلع‌های AB و AC را پیدا می‌کنیم.
 $\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{3} \Rightarrow A(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

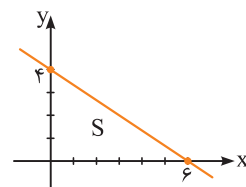
(۲۵) نقاط A و B روی خط به معادله $y = mx + n$ قرار دارند، پس در معادله خط داده شده صدق می‌کنند؛ با جای‌گذاری مختصات نقاط در معادله خط داریم:

$A(2, 5): 5 = m(2) + n \Rightarrow 2m + n = 5$
 $B(-3, -10): -10 = m(-3) + n \Rightarrow -3m + n = -10$
 با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر، مقادیر m و n به دست می‌آید:
 $\begin{cases} 2m + n = 5 \\ -3m + n = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -1 \end{cases}$
 بنابراین حاصل $m + n$ برابر $3 + (-1) = 2$ است.

(۲۶) می‌دانیم نقطه عرض از مبدأ، دارای طول صفر است، پس نقطه عرض از مبدأ خط Δ به صورت $(0, 2)$ است. هم‌چنین نقطه طول از مبدأ، دارای عرض صفر است، پس نقطه طول از مبدأ خط Δ به صورت $(-1, 0)$ است. با جای‌گذاری نقاط فوق در معادله خط داده شده، داریم:

$(0, 2): (2a + b)(0) + (a - b)(2) = 3 \Rightarrow 2a - 2b = 3$
 $(-1, 0): (2a + b)(-1) + (a - b)(0) = 3 \Rightarrow 2a + b = -3$
 با حل دستگاه دو معادله دو مجهول زیر، مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:
 $\begin{cases} 2a - 2b = 3 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$

(۲۷) ابتدا با محاسبه طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط L ، آن را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.
 $x = 0: 2(0) + 3y - 12 = 0 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0, 4)$
 $y = 0: 2x + 3(0) - 12 = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6, 0)$
 نمودار خط L به صورت مقابل است:



مساحت مثلث پدید آمده برابر است با:
 $S = \frac{1}{2}(4)(6) = 12$

(۲۸) برای اینکه خط y از ناحیه اول دستگاه مختصات عبور نکند، باید شیب و مقدار عرض از مبدأ آن منفی یا صفر باشد. در معادله خط $y = 2mx + m - 2$ مقدار شیب خط برابر $2m$ و مقدار عرض از مبدأ خط برابر $m - 2$ است:

$\begin{cases} 2m \leq 0 \Rightarrow m \leq 0 \\ m - 2 \leq 0 \Rightarrow m \leq 2 \end{cases}$
 از اشتراک دو بازه به دست آمده، محدوده m بازه $[-\infty, 0]$ به دست می‌آید.

(۲۹) $L: 3x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow m_L = \frac{3}{5}$
 $S: 5x + 3y - 2 = 0 \Rightarrow m_S = -\frac{5}{3}$
 چون $m_L \times m_S = -1$ است، پس دو خط L و S بر هم عمودند.

۳۹ | آ) به کمک رابطه فاصله دو نقطه، داریم:

$$AB = \sqrt{(31-26)^2 + (6-18)^2} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

ب) برای محاسبه مسافت واقعی بین دو شهر، کافی است فاصله AB را در ۱۲۰ کیلومتر ضرب کنیم. پس مسافت واقعی بین دو شهر برابر $120 \times 13 = 1560$ کیلومتر است.

۴۰ | ابتدا مقدار X و مختصات نقاط را به دست می‌آوریم:

فاصله نقطه S از مبدأ مختصات برابر ۱۰ است، داریم:

$$OS = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow x^2 + 64 = 100$$

$$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6 \xrightarrow{\text{نقطه S در ربع اول}} x = 6$$

پس مختصات نقاط به صورت $S(6, 8)$ ، $P(-10, 0)$ و $Q(10, 0)$ است. برای این‌که نشان دهیم زاویه $\widehat{PSQ}$ قائمه است، می‌توانیم نشان دهیم خطوط PS و SQ در نقطه S برهم عمودند. به این منظور شیب خطوط PS و SQ را به دست می‌آوریم:

$$m_{PS} = \frac{y_P - y_S}{x_P - x_S} = \frac{0 - 8}{-10 - 6} = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$$

$$m_{SQ} = \frac{y_Q - y_S}{x_Q - x_S} = \frac{0 - 8}{10 - 6} = \frac{-8}{4} = -2$$

چون $m_{SQ} \times m_{PS} = -1$ است، پس دو خط برهم عمودند و زاویه $\widehat{PSQ}$ قائمه است.

۴۱ | مختصات نقطه A به صورت $(1, 0)$ و چون نقطه B روی خط

$y = -x$ قرار دارد مختصات آن را به صورت $(\alpha, -\alpha)$ در نظر می‌گیریم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (-\alpha)^2} = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 25$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha - 24 = 0 \xrightarrow{\div 2} \alpha^2 - \alpha - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 4)(\alpha + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha = -3 \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطه B به صورت $(4, -4)$ و یا $(-3, 3)$ است.

۴۲ | با توجه به معادله خط داده شده، هر نقطه به طول α روی این

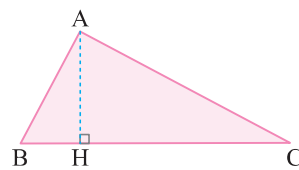
خط، دارای عرض $2\alpha + 1$ است. اگر نقطه مورد نظر را B بنامیم، مختصات آن به صورت $B(\alpha, 2\alpha + 1)$ است. فاصله AB برابر ۵ واحد است، بنابراین داریم:

$$AB = 5 \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 5)^2 + (2\alpha + 1)^2} = 5$$

$$(\alpha - 5)^2 + (2\alpha + 1)^2 = 25 \Rightarrow \alpha^2 - 10\alpha + 25 + 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 25$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = \frac{1}{5} \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطه B به صورت $B(1, 3)$ یا $B(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$ است.



با توجه به شکل تقریبی مقابل، برای به دست آوردن شیب AH، کافی است شیب خط BC را عکس و قرینه کنیم:

$$BC: 2y + 3x = 6 \Rightarrow m_{BC} = \frac{-3}{2} \Rightarrow m_{AH} = \frac{2}{3}$$

بنابراین معادله خط AH برابر است با:

$$y - y_A = m_{AH}(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x + \frac{7}{3})$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{17}{9}$$

۳۵ | برای محاسبه طول مسیر، باید فاصله BC و AB را محاسبه کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

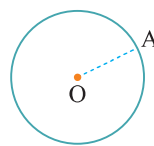
$$= \sqrt{(\delta\sqrt{2} - 3)^2 + (-1 - (-1))^2} = \delta\sqrt{2} - 3$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-1 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

طول مسیر برابر است با:

$$AB + BC = \delta\sqrt{2} - 3 + 4\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - 3$$



۳۶ | با توجه به شکل مقابل، از آنجایی که نقطه A روی محیط دایره به مرکز نقطه O است، فاصله OA برابر شعاع است:

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(\frac{2}{3} - (-1))^2 + (\frac{5}{3} - \frac{2}{3})^2}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

۳۷ | نکته) اگر AB قطر مربع باشد، مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(AB)^2$$

ابتدا مقدار قطر مربع را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

پس مساحت مربع برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(AB)^2 = \frac{1}{2} \times 10^2 = \frac{100}{2} = 50$$

۳۸ | به کمک رابطه فاصله دو نقطه، فاصله نقطه A را از مبدأ مختصات

به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم؛ بنابراین داریم:

$$x^2 + 9 = 10 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

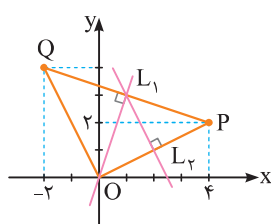
بنابراین مقدار مثبت X برابر ۱ است.

هم‌چنین چون عمودمنصف پاره خط AB بر آن عمود است، پس شیب آن قرینه و معکوس شیب پاره خط AB است:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4 - 5}{-1 - (-3)} = \frac{-1}{2}$$

پس شیب خط عمودمنصف پاره خط AB برابر ۲ است. معادله این خط به صورت زیر است:

$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - \frac{9}{2} = 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x + \frac{17}{2}$$



۴۸ می‌دانیم عمودمنصف‌های یک مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. اگر مبدأ مختصات را O بنامیم، عمودمنصف اضلاع OP و PQ را به دست می‌آوریم. عمودمنصف ضلع PQ را خط L_1 و عمودمنصف ضلع OP را خط L_2 می‌نامیم.

$$m_{PQ} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{2 - 4}{4 - (-2)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} \Rightarrow m_{L_1} = 3$$

نقطه وسط ضلع PQ را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$M_1\left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}\right) \Rightarrow M_1\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{4 + 2}{2}\right) \Rightarrow M_1(1, 3)$$

معادله خط L_1 برابر است با:

$$y - y_{M_1} = m_{L_1}(x - x_{M_1}) \Rightarrow y - 3 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x$$

اکنون سراغ محاسبه معادله خط L_2 می‌رویم:

$$m_{OP} = \frac{y_O - y_P}{x_O - x_P} = \frac{0 - 2}{0 - 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{L_2} = -2$$

مختصات نقطه وسط ضلع OP برابر است با:

$$M_2\left(\frac{x_O + x_P}{2}, \frac{y_O + y_P}{2}\right) \Rightarrow M_2\left(\frac{0 + 4}{2}, \frac{0 + 2}{2}\right) \Rightarrow M_2(2, 1)$$

معادله خط L_2 برابر است با:

$$y - y_{M_2} = m_{L_2}(x - x_{M_2}) \Rightarrow y - 1 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 5$$

اکنون برای محاسبه مختصات نقطه تلاقی عمودمنصف اضلاع، محل تلاقی خط L_1 و L_2 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -2x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطه تلاقی عمودمنصف اضلاع، برابر (۱، ۳) است.

۴۹ اگر قرینه نقطه A را نسبت به نقطه B، نقطه C بنامیم؛ مختصات نقطه C به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_C = 2x_B - x_A \Rightarrow x_C = 2(-1) - 5 \Rightarrow x_C = -7$$

$$y_C = 2y_B - y_A \Rightarrow y_C = 2(4) - 1 \Rightarrow y_C = 7$$

بنابراین مختصات نقطه C به صورت C(-7, 7) است.

۴۳ اگر مرکز دایره را O بنامیم، چون این نقطه روی محور طول‌ها قرار دارد، مختصات آن به صورت $O(\alpha, 0)$ است.

می‌دانیم فاصله هر نقطه روی محیط دایره تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است؛ پس $OA = OB = R$ است. فاصله OA و OB را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{(\alpha - 6)^2 + 4^2}, \quad OB = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + 3^2}$$

با مساوی هم قراردادن دو عبارت بالا داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 6)^2 + 16} = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + 9}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 6)^2 + 16 = (\alpha + 1)^2 + 9$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 12\alpha + 36 + 16 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + 9 \Rightarrow 14\alpha = 42$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{42}{14} = 3$$

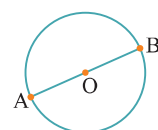
بنابراین مختصات مرکز دایره به صورت $O(3, 0)$ است.

۴۴ چون $x = 7$ وسط دو عدد $x = 2$ و $x = 12$ است، برای محاسبه میزان سود در این سال، می‌توانیم میانگین سود سال دوازدهم و سود سال دوم را به دست آوریم.

در واقع، نقطه وسط پاره خط رسم شده در نمودار را حساب می‌کنیم:

$$M\left(\frac{2 + 12}{2}, \frac{67 + 33}{2}\right) \Rightarrow M(7, 50)$$

پس سود در سال هفتم برابر ۵۰ بوده است.



۴۵ مرکز دایره، نقطه وسط

پاره خط AB است، مختصات نقطه

O برابر است با:

$$O\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow O\left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{-2 + 4}{2}\right) \Rightarrow O(3, 1)$$

اندازه شعاع برابر فاصله مرکز دایره تا نقطه A است:

$$R = OA = OB = \frac{AB}{2}$$

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \Rightarrow R = \sqrt{10}$$

۴۶ اگر نقطه پای میله تیر چراغ برق را M بنامیم، نقطه M وسط پاره خط AB و هم‌چنین وسط پاره خط CD است. بنابراین داریم:

$$x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow (-3) + (5) = (3) + x_D \Rightarrow x_D = -1$$

$$y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow (4) + (6) = (-1) + y_D \Rightarrow y_D = 11$$

بنابراین مختصات نقطه D برابر D(-1, 11) است.

۴۷ اگر نقطه M را وسط پاره خط AB در نظر بگیریم، عمودمنصف پاره خط AB از این نقطه می‌گذرد. مختصات این نقطه برابر است با:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{-1 + (-3)}{2}, \frac{5 + 4}{2}\right)$$

$$\Rightarrow M(-2, \frac{9}{2})$$

۵۳ | برای پیدا کردن قرینه خط $2y + 3x - 10 = 0$ نسبت به نقطه $M(1, 4)$ ، ابتدا دو نقطه دلخواه از خط را قرینه کرده و سپس معادله خط گذرنده از آن را می‌نویسیم. با جایگذاری x دلخواه، دو نقطه از خط را به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow 2y + 3(0) - 10 = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(0, 5)$$

$$x = 2 \Rightarrow 2y + 3(2) - 10 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(2, 2)$$

قرینه نقاط A و B را نسبت به نقطه M پیدا می‌کنیم:

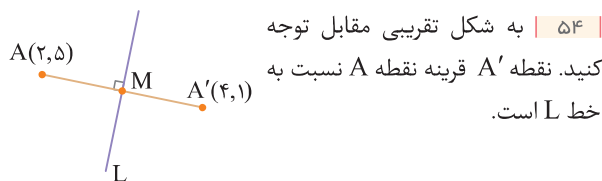
$$A'(2, 3), B'(0, 6)$$

معادله خط گذرنده از A' و B' را می‌نویسیم.

$$m_{A'B'} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{6 - 3}{0 - 2} = \frac{3}{-2}$$

$$y - y_{A'} = m_{A'B'}(x - x_{A'}) \Rightarrow y - 3 = \frac{-3}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$$



نقطه M روی خط، وسط پاره خط AA' است. بنابراین:

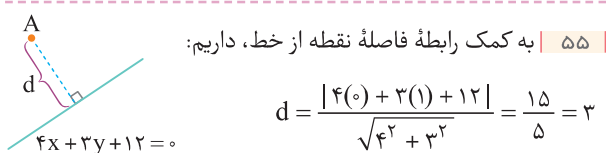
$$M\left(\frac{x_A + x_{A'}}{2}, \frac{y_A + y_{A'}}{2}\right) = \left(\frac{0 + 2}{2}, \frac{5 + 1}{2}\right) \Rightarrow M(1, 3)$$

شیب خط L ، عکس و قرینه شیب پاره خط AA' است:

$$m_{AA'} = \frac{y_A - y_{A'}}{x_A - x_{A'}} = \frac{5 - 1}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2 \Rightarrow m_L = \frac{1}{2}$$

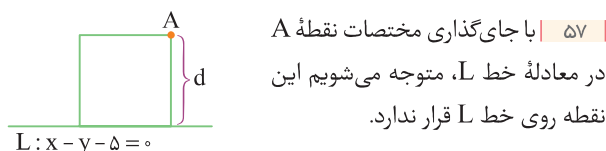
معادله خط L را می‌نویسیم:

$$y - y_M = m_L(x - x_M) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$



۵۶ | می‌دانیم خط مماس بر دایره در محل تماس بر شعاع دایره عمود است. برای محاسبه شعاع دایره می‌توانیم فاصله مرکز دایره را تا خط $4x + 3y + 10 = 0$ به دست آوریم:

$$R = \frac{|4(1) + 3(2) + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{20}{5} = 4$$



۵۰ | ابتدا مختصات نقاط A_1 و A_2 را به دست می‌آوریم:

$$x_{A_1} = 2x_M - x_A \Rightarrow x_{A_1} = 2(2) - 4 \Rightarrow x_{A_1} = 0$$

$$y_{A_1} = 2y_M - y_A \Rightarrow y_{A_1} = 2(3) - (-1) \Rightarrow y_{A_1} = 7$$

بنابراین مختصات نقطه A_1 به صورت $A_1(0, 7)$ است.

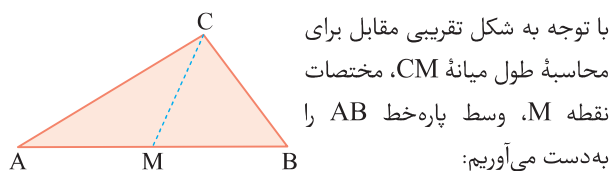
نقطه A_2 قرینه نقطه A نسبت به مبدأ مختصات است، پس مختصات آن به صورت $A_2(-4, 1)$ است. اکنون فاصله A_1A_2 را حساب می‌کنیم:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_{A_1} - x_{A_2})^2 + (y_{A_1} - y_{A_2})^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

۵۱ | ابتدا محل برخورد هر دو جفت از خط‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2y - x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2, 0) \quad \begin{cases} y + 2x = 16 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(8, 0)$$

$$\begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow C(6, 4)$$

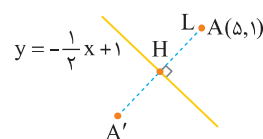


$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 8}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = (3, 0)$$

بنابراین فاصله CM برابر است با:

$$CM = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

۵۲ | مطابق شکل زیر ابتدا معادله خط L که از نقطه A بر خط داده شده عمود است را می‌نویسیم:



می‌دانیم شیب خط عمود بر خط $y = -\frac{1}{2}x + 1$ ، عکس و قرینه $-\frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$m_L = 2 \Rightarrow y - 1 = 2(x - 5) \Rightarrow y = 2x - 9$$

سپس با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول مختصات نقطه برخورد دو

خط $y = 2x - 9$ و $y = -\frac{1}{2}x + 2$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y - 2x = -9 \\ y + \frac{1}{2}x = 2 \end{cases} \xrightarrow{\times 4} \begin{cases} y - 2x = -9 \\ 4y + 2x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

حال قرینه نقطه $A(5, 1)$ را نسبت به $H(4, -1)$ به دست می‌آوریم:

$$x_{A'} = 2x_H - x_A = 2(4) - 5 = 3$$

$$y_{A'} = 2y_H - y_A = 2(-1) - 1 = -3$$

بنابراین $A'(3, -3)$ است.

مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = d_1 \times d_2 = \frac{5}{\sqrt{13}} \times \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{50}{13}$$

۶۱ | با توجه به شکل زیر، AH فاصله نقطه A از ضلع BC است. برای محاسبه AH، نیاز به معادله خط BC داریم، پس ابتدا معادله این خط را به دست می‌آوریم:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{3 - 11}{3 - 7} = \frac{8}{4} = 2$$

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 3) \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

اکنون مقدار AH را به کمک رابطه فاصله نقطه از خط به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|2(1) - (9) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

۶۲ | مطابق شکل، مساحت مثلث برابر $S = \frac{1}{2} AH \times BC$ است. به این منظور نیاز به مقادیر AH و BC داریم:

$$BC = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

همچنین فاصله نقطه A از ضلع BC است. برای محاسبه AH، نیاز به معادله خط BC داریم، پس ابتدا معادله این خط را به دست می‌آوریم:

$$m_{BC} = \frac{3 - (-1)}{-1 - 3} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$y - y_C = m_{BC}(x - x_C) \Rightarrow y - 3 = -1(x + 1) \Rightarrow y + x - 2 = 0$$

اکنون مقدار AH را به کمک رابطه فاصله نقطه از خط به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|(-3) + (1) - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})(4\sqrt{2}) = 8$$

روش سریع‌تر

در حالت کلی با داشتن مختصات سه رأس مثلث، مساحت آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \frac{1}{2} |(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C)|$$

می‌توانیم برای چک کردن جواب نهایی از رابطه بالا استفاده کنیم:

$$S = \frac{1}{2} |(-1 + 9 + 3) - (-9 + 1 + 3)| = \frac{1}{2} (16) = 8$$

توجه کنید که در امتحان نهایی نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

۶۳ | به کمک رابطه فاصله نقطه از خط، داریم:

$$d = \sqrt{2} \Rightarrow d = \frac{|(0) + (1) - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|1 - k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

می‌دانیم اگر $|a| = b$ باشد، $a = \pm b$ است، بنابراین:

$$\Rightarrow |1 - k| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - k = 2 \Rightarrow k = -1 \\ 1 - k = -2 \Rightarrow k = 3 \end{cases}$$

برای محاسبه مساحت مربع، کافی است اندازه ضلع آن را به دست بیاوریم.

$$d = \frac{|(3) - (0) - 5|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

بنابراین مساحت مربع برابر $S = d^2 = 2$ است.

۵۸ | با جای‌گذاری مختصات نقطه A در معادله خط داده شده، متوجه می‌شویم نقطه A روی قطر به معادله $3x + 2y - 7 = 0$ واقع نشده است. به کمک رابطه فاصله نقطه از خط، مقدار d را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|3(2) + 2(7) - 7|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

بنابراین اندازه قطر مربع برابر $2d = 2\sqrt{13}$ است.

مساحت مربع برابر نصف مجذور قطر آن است:

$$S = \frac{1}{2} (2d)^2 = \frac{1}{2} (2\sqrt{13})^2 = \frac{4 \times 13}{2} = 26$$

۵۹ | مطابق شکل زیر، فاصله نقطه برخورد قطرهای مربع تا هر یک از اضلاع مربع برابر نصف طول ضلع مربع است.

$$2y - x - 5 = 0$$

فاصله نقطه $A(3, 1)$ از خط $2y - x - 5 = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|2(1) - (3) - 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

بنابراین طول ضلع این مربع برابر $a = 2 \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ است و محیط این مربع برابر است با:

$$\text{محیط مربع} = 4a = 4 \times \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{48\sqrt{5}}{5}$$

۶۰ | شیب خط $L_1: 3x - 2y = 2$ برابر $m_1 = \frac{3}{2}$ و شیب خط $L_2: 2x + 3y = 1$ برابر $m_2 = -\frac{2}{3}$ است. چون $m_1 \times m_2 = -1$ است، پس دو خط L_1 و L_2 بر هم عمودند.

همچنین مختصات نقطه A در هیچ‌کدام از خط‌های L_1 و L_2 صدق نمی‌کند و روی آن‌ها واقع نشده است.

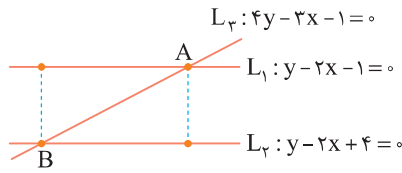
برای محاسبه مساحت مستطیل باید مقدار طول و عرض آن را به دست آوریم. به این منظور فاصله نقطه A را از خط‌های L_1 و L_2 به دست می‌آوریم:

$$L_2: 2x + 3y - 1 = 0$$

$$L_1: 3x - 2y - 2 = 0$$

$$d_1 = \frac{|3(1) - 2(3) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}, \quad d_2 = \frac{|2(1) + 3(3) - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

۶۷ | شیب خط $L_1: y - 2x = 1$ برابر $m_1 = 2$ و شیب خط $L_2: y - 2x = -4$ برابر $m_2 = 2$ است. چون شیب خط L_1 و L_2 با هم برابر است، پس دو خط با هم موازی‌اند.



برای محاسبه مساحت مستطیل، نیاز به مقادیر طول و عرض مستطیل داریم. ابتدا با به‌دست آوردن محل تلاقی L_1 و L_3 و محل تلاقی L_2 و L_3 مختصات نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ 4y - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{5} \\ y = \frac{-1}{5} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{-3}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

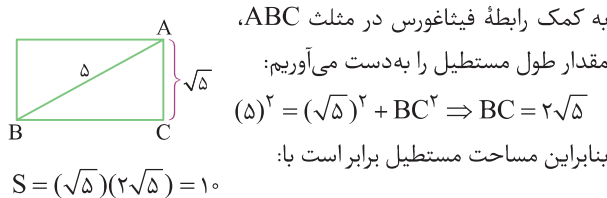
$$\begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ 4y - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{17}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

با محاسبه فاصله دو نقطه A و B ، طول قطر مستطیل را به‌دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{17}{5} - \frac{-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5} - \frac{-1}{5}\right)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

مقدار عرض مستطیل، برابر فاصله نقطه A از خط L_2 است، داریم:

$$d_1 = \frac{\left| \frac{-1}{5} - 2\left(\frac{-3}{5}\right) + 4 \right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$



۶۸ | ابتدا با محاسبه فاصله بین دو خط موازی d_1 و d_2 ، اندازه شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

$$R = \frac{|11 - (-4)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

محیط دایره برابر $2\pi R$ است، بنابراین مقدار محیط دایره برابر ۶ است.

۶۹ | نادرست

توضیح: برای محاسبه مقدار ماکزیمم، ابتدا طول رأس سهمی را پیدا کرده و آن را در ضابطه تابع جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار عرض رأس سهمی را پیدا کنیم.

$$f(x) = -x^2 + 6x + 5 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = 3$$

اکنون با جای‌گذاری $x = 3$ ، حاصل $f(3)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(3) = -(3)^2 + 6(3) + 5 = 14$$

بنابراین مقدار ماکزیمم تابع برابر $y_S = 14$ است.

۶۴ | چون مرکز دایره روی محور طول‌ها است، مختصات آن را به صورت $(a, 0)$ در نظر می‌گیریم:

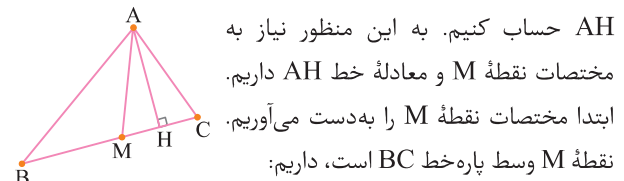
از طرفی می‌دانیم فاصله نقطه مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع است:

$$\frac{|3(a) + 4(0)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|3a|}{5} = 3 \Rightarrow |3a| = 15$$

$$\begin{cases} 3a = 15 \Rightarrow a = 5 \\ 3a = -15 \Rightarrow a = -5 \end{cases}$$

بنابراین مختصات مرکز دایره به صورت $(5, 0)$ یا $(-5, 0)$ است.

۶۵ | برای محاسبه خط طول MH می‌توانیم فاصله نقطه M را تا خط AC حساب کنیم. به این منظور نیاز به مختصات نقطه M و معادله خط AC داریم.



$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{8 + 1}{2}, \frac{-2 + (-1)}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{9}{2}, \frac{-3}{2}\right)$$

سپس معادله خط AC را می‌نویسیم:

چون خط AC بر خط BC عمود است، پس شیب آن قرینه و معکوس شیب BC است.

$$m_{BC} = \frac{-2 - (-1)}{8 - 1} = \frac{-1}{7} \Rightarrow m_{AC} = 7$$

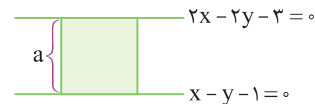
معادله خط AC برابر است با:

$$y - y_A = m_{AC}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = 7(x - 4) \Rightarrow 7x - y - 26 = 0$$

اکنون فاصله MH را به‌دست می‌آوریم:

$$MH = \frac{\left| 7\left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{-3}{2}\right) - 26 \right|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

۶۶ | شیب خط $L_1: 2x - 2y - 3 = 0$ برابر $m_1 = 1$ و شیب خط $L_2: x - y + 1 = 0$ برابر $m_2 = 1$ است: چون شیب خط L_1 و L_2 با هم برابر است، پس دو خط با هم موازی‌اند و اندازه ضلع مربع، برابر فاصله این دو خط موازی با هم است.



نقطه دلخواهی مانند $A(0, 1)$ روی خط $L_2: x - y - 1 = 0$ انتخاب می‌کنیم.

فاصله نقطه $A(0, 1)$ را از خط L_1 به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{|2(0) - 2(1) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

مساحت مربع برابر است با:

$$S = a^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

۷۰ درست

توضیح: اگر $P < 0$ باشد، یعنی $\frac{c}{a} < 0$ است و به این مفهوم است که a و c مختلف‌العلامت‌اند و حاصل ضرب آن‌ها نیز منفی است؛ یعنی $ac < 0$ است.

به کمک رابطه دلتا داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \xrightarrow{ac < 0} \Delta > 0$$

در این حالت دلتا همواره مقداری مثبت دارد و معادله دارای دو ریشه حقیقی است.

۷۱ درست

توضیح: صفرهای تابع، همان ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند؛ داریم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 6x + 1 = 0$$

در معادله فوق، چون $ac < 0$ است، پس دلتا مقداری مثبت دارد و معادله دارای ۲ ریشه است، پس تابع $f(x)$ دارای ۲ صفر است.

۷۲ درست

توضیح: در معادله $x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0$ چون حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $P = 1$ است، پس ریشه‌های این معادله معکوس یکدیگرند.

۷۳ نادرست

توضیح: تابع درجه دو اگر محور x ها را در نقاط α و β قطع کند، شکل کلی ضابطه آن به صورت $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است. بنابراین ضابطه تابع مطرح‌شده در صورت سؤال به صورت $y = a(x - 1)(x - 2)$ است.

۷۴ نادرست

توضیح: ابتدا با تغییر متغیر $x^2 = t$ معادله جدید را بازنویسی می‌کنیم:

$$x^4 - 2x^2 + 6 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 2t + 6 = 0$$

معادله $t^2 - 2t + 6 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است و در نتیجه معادله $x^4 - 2x^2 + 6 = 0$ نیز فاقد ریشه حقیقی است.

۷۵ درست

توضیح: اگر ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ را برابر α و β در نظر بگیریم، حاصل جمع و حاصل ضرب α و β را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = -4 \end{cases}$$

حال معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌هایش 2α و 2β باشد.

$$S = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2(-2) = -4$$

$$P = 2\alpha \times 2\beta = 4(\alpha\beta) = 4(-4) = -16$$

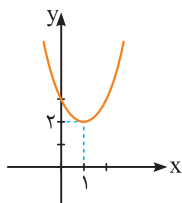
ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - 16 = 0$ ، برابر با 2α و 2β است.

پس ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ ، نصف ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - 16 = 0$ است.

۷۶ درست

توضیح: طول راس سهمی $x_S = 1$ است. داریم:

x	$y = x^2 - 2x + 3$	(x, y)
0	$(0)^2 - 2(0) + 3$	(0, 3)
1	$(1)^2 - 2(1) + 3$	(1, 2)
2	$(2)^2 - 2(2) + 3$	(2, 3)



با توجه به نمودار تابع، سهمی از نواحی ۳ و ۴ نمی‌گذرد.

۷۷ منفی

توضیح: در معادله $x^2 + 6x + 3 = 0$ دلتا، حاصل جمع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(3) = 24 > 0$$

$$x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -6 \\ P = 3 \end{cases}$$

چون حاصل جمع ریشه‌ها مقداری منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها مقداری مثبت دارد، پس معادله دارای ۲ ریشه منفی است.

۷۸ مینیمم

توضیح: در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ چون همواره ضریب x^2 مثبت است، پس دهانه سهمی رو به بالا است و تابع دارای مینیمم است.

 ۷۹ $-\frac{5}{3}$

توضیح: در معادله $3x^2 + 6x + 1 = 0$ ، $\Delta > 0$ است، حاصل جمع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$3x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -2 \\ P = \frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین حاصل $S + P$ برابر $-\frac{5}{3}$ است.

 ۸۰ $(-3, 4)$

توضیح: در سهمی به معادله $f(x) = a(x - h)^2 + k$ ، مختصات رأس سهمی به صورت $S(h, k)$ است.

در سهمی $y = 2(x + 3)^2 + 4$ ، مختصات رأس سهمی به صورت $S(-3, 4)$ است.

۸۱ ۲

توضیح: برای محاسبه مقدار مینیمم، ابتدا طول رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(3)} = -1$$

حالا $x_S = 1$ را در ضابطه تابع جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار عرض رأس سهمی را پیدا کنیم:

$$f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 3 - 6 + 5 = 2$$

پس مقدار مینیمم تابع برابر $y_S = 2$ است.

۸۷ | گزینه «۴»

توضیح: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم:
 $S = x_1 + x_2 = (3 + 2\sqrt{5}) + (3 - 2\sqrt{5}) = 6$
 $P = x_1 x_2 = (3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5}) = 9 - 20 = -11$
 حالا با قرار دادن S و P در رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ داریم:
 $x^2 - 6x - 11 = 0$

۸۸ | گزینه «۲»

توضیح: معادله محور تقارن تابع درجه دوم f برابر $x = -\frac{b}{2a}$ است:
 $x = -\frac{m}{2} \Rightarrow -\frac{m}{2} = -1 \Rightarrow m = 2$

۸۹ | گزینه «۲»

توضیح: اگر α و β صفرهای تابع درجه دو باشند، ضابطه آن به صورت $\beta = 2$ و $\alpha = 0$ به شکل $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ صفرهای این تابع هستند، پس:
 $f(x) = a(x)(x - 2)$
 نقطه $(-1, 6)$ روی این سهمی قرار دارد، پس $f(-1) = 6$ است:
 $f(-1) = a(-1)(-3) = 6 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$
 $f(x) = 2x(x - 2) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{1}{2} \times (-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2}$

۹۰ | آ | در معادله $5x^2 - 3x - 2 = 0$ چون جمع ضرایب برابر صفر است، پس یکی از جواب‌ها برابر $x_1 = 1$ و جواب دیگر برابر $x_2 = \frac{c}{a}$ است.

$5x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{5} \end{cases}$
ب) برای حل معادله، به روش دلتا عمل می‌کنیم. ابتدا مقدار دلتای این معادله را به دست می‌آوریم:
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(5)(-2) = 9 + 40 = 49$
 چون مقدار دلتای این معادله منفی است، پس معادله فاقد جواب حقیقی است.

پ) معادله $(2x - 1)^2 = 9$ را به روش ریشه‌گیری حل می‌کنیم، بنابراین داریم:
 $(2x - 1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 2x - 1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$
 بنابراین معادله دارای دو جواب $x = 2$ و $x = -1$ است.

۹۱ | آ | ابتدا با تغییر متغیر $x^2 = t$ ، معادله جدید به دست آمده را بازنویسی می‌کنیم:

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 13t + 36 = 0$
 معادله درجه دوم به دست آمده را حل می‌کنیم. به کمک روش تجزیه داریم:
 $t^2 - 13t + 36 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 9 \end{cases}$
 با توجه به مقادیر به دست آمده، مقدار مجهول x را به دست می‌آوریم:
 $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}, \quad t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

۸۲ | یک

توضیح: ابتدا به کمک تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ ، معادله جدید را بازنویسی می‌کنیم:

$2x + \sqrt{x} - 3 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} 2t^2 + t - 3 = 0$
 معادله درجه دوم به دست آمده را حل می‌کنیم. در این معادله چون جمع ضرایب برابر صفر است، پس یکی از جواب‌ها برابر $t_1 = 1$ و جواب دیگر برابر $t_2 = \frac{c}{a}$ است.

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، مقدار مجهول x را به دست می‌آوریم:
 $t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

غ ق ق $\times$ $t = -\frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = -\frac{3}{2}$

۸۳ | -۳

توضیح: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و $a \neq 0$ حاصل جمع ریشه‌ها برابر $S = -\frac{b}{a}$ است. در معادله $mx^2 + 3mx - 6 = 0$ حاصل جمع ریشه‌ها برابر با $S = -\frac{3m}{m} = -3$ است.
 دلتای معادله را محاسبه می‌کنیم:

$\Delta = 3m^2 - 4(m)(-6) = 3m^2 + 24m > 0$
 توجه داشته باشید که چون $m > 0$ است، Δ معادله همواره مثبت است.

۸۴ | $-\alpha$

توضیح: در معادله $3mx^2 + 7m + 1 = 0$ ، $b = 0$ است. بنابراین حاصل جمع ریشه‌ها برابر صفر است. پس ریشه‌های معادله قرینه یکدیگرند و ریشه دیگر معادله برابر $-\alpha$ است.

۸۵ | -۶

توضیح: ابتدا معادله را به صورت ساده‌تری بازنویسی می‌کنیم:

$$x^3 + 6x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 6x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x - 7 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = 0$ است. مقدار دلتای معادله $x^2 + 6x - 7 = 0$ نیز مثبت است و معادله دارای دو ریشه است که مجموع آن‌ها برابر -۶ است.

بنابراین این مجموع ریشه‌های معادله $x^3 + 6x^2 - 7x = 0$ برابر -۶ است.

۸۶ | گزینه «۱»

توضیح: ابتدا دلتای معادله $x^2 + 6x + 7 = 0$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 7 = 36 - 28 = 8$$

چون $\Delta > 0$ است، پس ۲ جواب حقیقی دارد. حالا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{1} = -6 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{7}{1} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \text{ ریشه منفی دارد.} \\ \end{matrix}$$

ج با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ ، معادله جدید به دست آمده را بازنویسی می‌کنیم:

$$3x - \sqrt{x} - 2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} 3t^2 - t - 2 = 0$$

در این معادله چون جمع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از جواب‌ها برابر $t_1 = 1$ و جواب دیگر $t_2 = \frac{c}{a}$ است.

$$3t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، مقدار مجهول x را به دست می‌آوریم:

$$t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = -\frac{2}{3} \quad \text{غ ق} \times$$

۹۲ با تغییر متغیر $\sqrt{\frac{1}{x}} = t$ معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$t^2 - t - 2 = 0$$

در این معادله $a + c = b$ است، پس یکی از ریشه‌ها $t_1 = -1$ و دیگری $t_2 = 2$ است.

با توجه به مقادیر t به دست آمده، مقدار مجهول x را محاسبه می‌کنیم:

$$t_1 = -1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x}} = -1 \xrightarrow{\text{توان}^3} \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x}} = 2 \xrightarrow{\text{توان}^2} \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

۹۳ ابتدا توجه کنید که $a^2 = (-a)^2$ است، بنابراین می‌توان به جای $(x^2 - 3x)^2$ عبارت $(x^2 - 3x)^2$ را جایگزین کرد:

$$(x^2 - 3x)^2 - 8 = 2(x^2 - 3x)$$

با تغییر متغیر $t = x^2 - 3x$ ، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$t^2 - 8 = 2t \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 2) = 0$$

بنابراین $t_1 = 4$ و $t_2 = -2$ جواب‌های معادله هستند:

$$t_1 = 4 \Rightarrow x^2 - 3x = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$t_2 = -2 \Rightarrow x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

۹۴ در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و $a \neq 0$ حاصل جمع ریشه‌ها برابر $S = \frac{-b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $P = \frac{c}{a}$ است. اکنون در هر معادله داریم:

$$3x^2 - 7x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=61>0} \begin{cases} S = \frac{-(-7)}{3} = \frac{7}{3} \\ P = \frac{-1}{3} \end{cases} \quad \text{آ}$$

$$2x^2 + 6x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=28>0} \begin{cases} S = \frac{-(6)}{2} = -3 \\ P = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ب}$$

ب با تغییر متغیر $x^2 = t$ ، معادله جدید به دست آمده را بازنویسی می‌کنیم:

$$x^4 - 2x^2 - 6 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 2t - 6 = 0$$

به حل معادله درجه دوم به دست آمده می‌پردازیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-6) = 28$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{28}}{2} = 1 + \sqrt{7} \\ t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{28}}{2} = 1 - \sqrt{7} \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، مقدار مجهول x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = 1 + \sqrt{7} \Rightarrow x^2 = 1 + \sqrt{7} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 + \sqrt{7}} \\ x = -\sqrt{1 + \sqrt{7}} \end{cases}$$

$$t = 1 - \sqrt{7} \Rightarrow x^2 = 1 - \sqrt{7} < 0 \quad \text{غ ق} \times$$

پ با تغییر متغیر $x^3 = t$ ، معادله جدید به دست آمده را بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^6 - 14x^3 - 16 = 0 \xrightarrow{x^3=t} 2t^2 - 14t - 16 = 0$$

در این معادله چون $a + c = b$ است، پس یکی از جواب‌ها برابر $t_1 = -1$ و جواب دیگر برابر $t_2 = \frac{-c}{a}$ است.

$$2t^2 - 14t - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{-c}{a} = 8 \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، مقدار مجهول x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = -1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$t = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

ت ابتدا با تغییر متغیر $x^4 = t$ ، معادله جدید به دست آمده را بازنویسی می‌کنیم:

$$-2x^8 + 4x^4 + 6 = 0 \xrightarrow{x^4=t} -2t^2 + 4t + 6 = 0$$

در این معادله چون $a + c = b$ است، پس یکی از جواب‌ها برابر $t_1 = -1$ و جواب دیگر برابر $t_2 = \frac{-c}{a}$ است.

$$-2t^2 + 4t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{-c}{a} = 3 \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، مقدار مجهول x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = -1 \Rightarrow x^4 = -1 \quad \text{غ ق} \times$$

$$t = 3 \Rightarrow x^4 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[4]{3} \\ x = -\sqrt[4]{3} \end{cases}$$

ث ابتدا با تغییر متغیر $t = (x - 1)$ ، معادله جدید به دست آمده را بازنویسی می‌کنیم:

$$(x - 1)^2 + 3(x - 1) - 4 = 0 \xrightarrow{x-1=t} t^2 + 3t - 4 = 0$$

در این معادله چون جمع ضرایب برابر صفر است، پس یکی از جواب‌ها برابر $t_1 = 1$ و جواب دیگر برابر $t_2 = \frac{c}{a}$ است.

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -4 \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، مقدار مجهول x را به دست می‌آوریم:

$$t = 1 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$t = -4 \Rightarrow x - 1 = -4 \Rightarrow x = -3$$

با جای‌گذاری $m = \frac{1}{4}$ در معادله داریم:

$$mx^2 + 4mx + (1-m) = 0 \xrightarrow{m=\frac{1}{4}} \frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{1}{4} = 0$$

علامت Δ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = 2^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = 3 > 0$$

بنابراین $m = \frac{1}{4}$ قابل قبول است.

۱۰۰ | ابتدا به بررسی عبارت داده شده می‌پردازیم:

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 5 \Rightarrow \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = 5 \Rightarrow \alpha\beta + (\alpha + \beta) = 4$$

$$\Rightarrow P + S = 4$$

در معادله درجه دوم داده شده، حاصل جمع ریشه‌ها برابر $S = \frac{-2m}{4}$ و

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $P = \frac{-(1-m)}{4}$ است. داریم:

$$P + S = 4 \Rightarrow \frac{m-1}{4} + \frac{-2m}{4} = 4 \Rightarrow \frac{-m-1}{4} = 4$$

$$\Rightarrow -m-1 = 16 \Rightarrow m = -17$$

با جای‌گذاری $m = -17$ در معادله داریم:

$$2x^2 + 2mx - (1-m) = 0 \xrightarrow{m=-17} 2x^2 - 18x - 16 = 0$$

علامت Δ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = (-18)^2 - 4(2)(-16) = 400 > 0$$

چون $\Delta > 0$ است، پس $m = -17$ قابل قبول است.

۱۰۱ | معادله درجه دومی که حاصل جمع ریشه‌های آن برابر S و حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر P باشد، برابر $x^2 - Sx + P = 0$ است. اکنون در هر مورد، با محاسبه مقدار S و P ، معادله درجه دوم خواسته شده را می‌نویسیم.

آ $\begin{cases} S = \alpha + \beta = 3 + (-2) = 1 \\ P = \alpha\beta = (3) \times (-2) = -6 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

ب $\begin{cases} S = \alpha + \beta = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2 \\ P = \alpha\beta = (1+\sqrt{2}) \times (1-\sqrt{2}) = 1-2 = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

پ $\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{3+\sqrt{2}}{3} + \frac{3-\sqrt{2}}{3} = 2 \\ P = \alpha\beta = \frac{3+\sqrt{2}}{3} \times \frac{3-\sqrt{2}}{3} = \frac{9-2}{9} = \frac{7}{9} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{7}{9} = 0$

۱۰۲ | می‌دانیم اگر S حاصل جمع و P حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم باشد، معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشته می‌شود.

$$S = \frac{2}{1-\sqrt{3}} + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$

اتحاد مزدوج

$$= \frac{4}{(1)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$P = \frac{2}{1-\sqrt{3}} \times \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{4}{(1)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4}{-2} = -2$$

بنابراین معادله درجه دوم به صورت زیر است:

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

۹۵ | ابتدا توجه کنید که $\Delta = 17 > 0$ است. در هر مورد، با ساده کردن عبارت داده شده، حاصل را به دست می‌آوریم.

با توجه به معادله داده شده، حاصل جمع ریشه‌ها برابر $S = -3$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $P = -2$ است.

آ $\alpha + \beta = S = -3$

ب $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P \times S = (-2)(-3) = 6$

پ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

ت $(\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4$

$$= P + 2S + 4 = (-2) + 2(-3) + 4 = -4$$

۹۶ | ابتدا عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\beta-2} = \frac{\alpha-2+\beta-2}{(\alpha-2)(\beta-2)} = \frac{\alpha+\beta-4}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4}$$

$$= \frac{S-4}{P-2S+4}$$

در معادله $5x^2 + 2x - 4 = 0$ ، $\Delta = 84 > 0$ و حاصل جمع ریشه‌ها برابر $S = \frac{-2}{5}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $P = \frac{-4}{5}$ است. با جای‌گذاری مقدار S و P ، حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{S-4}{P-2S+4} = \frac{\frac{-2}{5}-4}{\frac{-4}{5}-2(\frac{-2}{5})+4} = \frac{\frac{-22}{5}}{\frac{-4}{5}+\frac{4}{5}+4} = \frac{-22}{10} = -\frac{11}{5}$$

۹۷ | در معادله درجه دوم داده شده، حاصل جمع ریشه‌ها

$S = \frac{-(a+1)}{1}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $P = \frac{-2a}{1}$ است. داریم:

$$S - P = 2 \Rightarrow -(a+1) + 2a = 2 \Rightarrow -a-1+2a = 2 \Rightarrow a = 3$$

با جای‌گذاری $a = 3$ در معادله داریم:

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

علامت Δ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = 25 - 4(2) = 17 > 0$$

چون $\Delta > 0$ است پس a به دست آمده قابل قبول است.

۹۸ | اگر دو ریشه معادله داده شده قرینه یکدیگر باشند، حاصل جمع ریشه‌ها برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$S = 0 \Rightarrow \frac{m+2}{2} = 0 \Rightarrow m = -2$$

با جای‌گذاری $m = -2$ در معادله داریم:

$$2x^2 - (m+2)x + (m-1) = 0 \xrightarrow{m=-2} 2x^2 - 3 = 0$$

علامت Δ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = -4(2)(-3) = 24 > 0$$

چون $\Delta > 0$ است، پس $m = -2$ قابل قبول است.

۹۹ | اگر دو ریشه معادله داده شده عکس هم باشند، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر ۱ است. بنابراین داریم:

$$P = 1 \Rightarrow \frac{1-m}{m} = 1 \Rightarrow 1-m = m \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۱۰۷ | در معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -3, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

ریشه‌های معادله جدید را α' و β' می‌نامیم، بنابراین:

$$\alpha' = 2\alpha + 1, \quad \beta' = 2\beta + 1$$

برای نوشتن معادله درجه دوم جدید، حاصل جمع ریشه‌ها و حاصل ضرب

ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$S' = \alpha' + \beta' = 2\alpha + 1 + 2\beta + 1 = 2(\alpha + \beta) + 2 = 2S + 2$$

$$= 2(-3) + 2 = -4$$

$$P' = \alpha'\beta' = (2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1$$

$$= 4P + 2S + 1 = 4(-1) + 2(-3) + 1 = -11$$

معادله درجه دوم جدید را به صورت $x^2 - S'x + P' = 0$ می‌نویسیم:

$$x^2 + 4x - 11 = 0$$

۱۰۸ | در معادله $3x^2 - 6x + 1 = 0$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{6}{3} = 2, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

ریشه‌های معادله جدید را α' و β' می‌نامیم، بنابراین داریم:

$$\alpha' = \alpha^2, \quad \beta' = \beta^2$$

برای نوشتن معادله درجه دوم جدید، حاصل جمع و حاصل ضرب

ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$S' = \alpha' + \beta' = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 2^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$P' = \alpha'\beta' = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

بنابراین معادله درجه دوم جدید به صورت زیر است:

$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

۱۰۹ | با توجه به اطلاعات سؤال، اگر یکی از ریشه‌های معادله را α در

نظر بگیریم، مقدار ریشه دیگر برابر $\alpha + 3$ است، داریم:

$$S = (\alpha) + (\alpha + 3) = \frac{-3}{1} \Rightarrow 2\alpha + 3 = -3 \Rightarrow \alpha = -3$$

بنابراین ریشه‌های معادله برابر صفر و -3 هستند؛ حال می‌توان جای

x ‌های معادله، -3 و یا صفر را قرار داد تا به مقدار m برسیم:

$$x = 0: (0)^2 + 3(0) + m = 0 \Rightarrow m = 0$$

توجه داشته باشید که به ازای $m = 0$ ، دلتای معادله مثبت است.

۱۱۰ | اگر یکی از ریشه‌های معادله را α در نظر بگیریم، مقدار ریشه دیگر

برابر 3α است. به کمک رابطه مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم داریم:

$$S = (\alpha) + (3\alpha) = \frac{-4}{-1} \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$$

بنابراین ریشه‌های معادله برابر 1 و 3 هستند؛ حال می‌توان جای x ‌های

معادله 1 و 3 را قرار داد تا به مقدار m برسیم:

$$x = 1: \frac{-1}{1}(1)^2 + 4(1) + m = 0 \Rightarrow m = -3$$

توجه داشته باشید که به ازای $m = -3$ ، دلتای معادله مثبت است.

۱۰۳ | اگر ضرایب معادله درجه دوم گویا باشند باید ریشه دیگر را $2 + \sqrt{3}$

در نظر بگیریم. به کمک حاصل جمع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌ها،

معادله درجه دوم را می‌نویسیم:

$$S = (2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3}) = 4 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$P = (2 - \sqrt{3}) \times (2 + \sqrt{3}) = 1$$

$$\frac{S=4}{P=1} \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

۱۰۴ | معادله درجه دومی که حاصل جمع ریشه‌های آن S و حاصل ضرب

ریشه‌های آن برابر P باشد، برابر $x^2 - Sx + P = 0$ است. داریم:

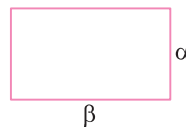
$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{15}{4}x + 14 = 0$$

با محاسبه ریشه‌های معادله بالا، دو عدد حقیقی خواسته شده را به دست

می‌آوریم:

$$x^2 - \frac{15}{4}x + 14 = 0 \Rightarrow (x-4)\left(x-\frac{7}{4}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

۱۰۵ | اگر ابعاد مستطیل را α و β در نظر بگیریم، داریم:



$$\text{محیط: } 2(\alpha + \beta) = 14 \Rightarrow \alpha + \beta = 7 \Rightarrow S = 7$$

$$\text{مساحت: } \alpha\beta = 6 \Rightarrow P = 6$$

با تشکیل معادله درجه دوم $x^2 - Sx + P = 0$ ، مقادیر α و β را به دست

می‌آوریم:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

بنابراین ابعاد مستطیل برابر $\alpha = 1$ و $\beta = 6$ است.

۱۰۶ | در معادله $-x^2 + 6x + 2 = 0$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 6$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2$$

اگر ریشه‌های معادله جدید را α' و β' بنامیم، داریم:

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha}, \quad \beta' = \frac{1}{\beta}$$

برای نوشتن معادله جدید، حاصل جمع ریشه‌ها و حاصل ضرب ریشه‌های

آن را به دست می‌آوریم:

$$S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$P' = \alpha'\beta' = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{P} = \frac{1}{-2}$$

اکنون به کمک رابطه $x^2 - S'x + P' = 0$ ، معادله درجه دوم جدید را

می‌نویسیم:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - \frac{1}{2} = 0$$

۱۱۳ | می‌دانیم: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

از طرفی با توجه به معادله $x^2 + 2x - 1 - m^2 = 0$ داریم:

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -2$, $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 - m^2$
بنابراین $\alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$\alpha^2 + \beta^2 = (-2)^2 - 2(-1 - m^2) = 4 + 2 + 2m^2 = 2m^2 + 6$

حال مینیمم تابع $y = 2m^2 + 6$ را محاسبه می‌کنیم:

$M_S = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow y_S = 2(0)^2 + 6 = 6$
پس مینیمم $\alpha^2 + \beta^2$ برابر ۶ است.

۱۱۴ | چون تابع $y = kx^2 - 6x + k$ دارای مینیمم است پس $k > 0$.

از طرفی قرار داشتن مینیمم روی خط $y = 4$ به معنی $y_S = 4$ است.

$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2k} = \frac{3}{k}$

$y_S = k\left(\frac{3}{k}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{k}\right) + k = \frac{9}{k} - \frac{18}{k} + k = -\frac{9}{k} + k$

دیدیم که $y_S = 4$ است، بنابراین:

$-\frac{9}{k} + k = 4 \xrightarrow{k \neq 0} -9 + k^2 = 4k \Rightarrow k^2 - 4k - 9 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-9) = 52 \Rightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2} = 2 \pm \sqrt{13}$

چون $k > 0$ است، پس $k = 2 + \sqrt{13}$.

۱۱۵ | صفرهای تابع، همان ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. داریم:

$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

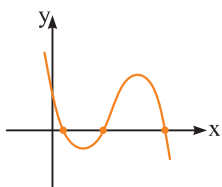
بنابراین صفرهای تابع، $x = 3$ و $x = \frac{1}{3}$ هستند.

۱۱۶ | $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

صفرهای تابع $x = 1 + \sqrt{2}$ و $x = 1 - \sqrt{2}$ هستند.

۱۱۷ | تعداد صفرهای تابع، همان تعداد نقاط برخورد نمودار تابع با

محور x ها است. بنابراین تابع دارای سه، صفر است.



۱۱۸ | برای این که نمودار سه «صفر» مثبت

داشته باشد، باید نمودار تابع سه برخورد

با محور x ها با طول مثبت داشته باشد.

می‌توانیم نمودار مقابل را در نظر بگیریم:

۱۱۹ | با توجه به نمودار تابع، دهانه سهمی رو به پایین است و عرض از

مبدأ آن مقداری منفی دارد. پس $a < 0$ و $c < 0$ است. به کمک مختصات

رأس سهمی علامت b را تعیین می‌کنیم:

$x_S = \frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$

هم‌چنین تابع دارای «صفر» نیست.

۱۲۰ | اگر یکی از ریشه‌های معادله را α در نظر بگیریم، ریشه دیگر برابر

$2\alpha - 1$ است. به کمک رابطه مجموع ریشه‌های معادله درجه دو داریم:

$S = (\alpha) + (2\alpha - 1) = \frac{-(-5)}{1} \Rightarrow 3\alpha - 1 = 5 \Rightarrow 3\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 2$

بنابراین ریشه‌های معادله برابر ۲ و ۳ است.

اکنون حاصل ضرب ریشه‌های معادله را بررسی می‌کنیم:

$P = (2) \times (3) = \frac{m}{1} \Rightarrow m = 6$

توجه داشته باشید که به ازای $m = 6$ ، دلتای معادله مثبت است.

۱۲۱ | برای محاسبه مقدار مینیمم و یا ماکزیمم، ابتدا طول رأس سهمی

را پیدا کرده و آن را در ضابطه تابع جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار عرض

سهمی را به دست آوریم.

آ $f(x) = -3x^2 + 12x + 1 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-3)} = 2$

اکنون حاصل $f(2)$ را به دست می‌آوریم:

$f(2) = -3(2)^2 + 12(2) + 1 = 13 \Rightarrow y_S = 13$

در این سهمی چون $a < 0$ است، پس دهانه سهمی رو به پایین است و

تابع دارای ماکزیمم است. مقدار ماکزیمم تابع برابر $y_S = 13$ است.

ب ابتدا طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$f(x) = 2x + x^2 + 2 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1$

اکنون با جای‌گذاری $x = -1$ در ضابطه تابع، مقدار عرض رأس سهمی را

پیدا می‌کنیم:

$f(-1) = 2(-1) + (-1)^2 + 2 = 1 \Rightarrow y_S = 1$

در این سهمی چون $a > 0$ است، پس دهانه سهمی رو به بالا است و تابع

دارای مینیمم است. مقدار مینیمم تابع برابر $y_S = 1$ است.

پ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$f(x) = (x+2)(4-2x) = 4x - 2x^2 + 8 - 4x \Rightarrow f(x) = -2x^2 + 8$

اکنون طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$f(x) = -2x^2 + 8 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-2)} = 0$

با جای‌گذاری $x = 0$ در ضابطه تابع، مقدار عرض رأس سهمی را پیدا

می‌کنیم:

$f(0) = -2(0)^2 + 8 = 8 \Rightarrow y_S = 8$

در این سهمی چون $a < 0$ است، پس دهانه سهمی رو به پایین است و

تابع دارای ماکزیمم است. مقدار ماکزیمم تابع برابر $y_S = 8$ است.

ت ابتدا ضابطه تابع را به صورت ساده‌تری بازنویسی می‌کنیم:

$f(x) = (2x+1)^2 - (x-1)^2 = (4x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 2x + 1) \Rightarrow f(x) = 3x^2 + 6x$

اکنون طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$f(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(3)} = -1$

با جای‌گذاری $x = -1$ در ضابطه تابع، مقدار عرض رأس سهمی را پیدا

می‌کنیم:

$f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3 \Rightarrow y_S = -3$

در این سهمی چون $a > 0$ است، پس دهانه سهمی رو به بالا است و تابع

دارای مینیمم است. مقدار مینیمم تابع برابر -3 است.