

## مقدمه ناشر

الان! همین الان وقتشه! الان می شه خیلی کارا کرد. می شه یه بستنی خورد؛ می شه یه فیلم دید؛ می شه رفت تو صفحات مجازی وقت گذروند؛ می شه تلفنی با یه نفر حرف زد؛ می شه خوابید، می شه رفت سرقرار، می شه هیچ کاری نکرد و به در و دیوار خیره شد، می شه مقدمه این کتاب رو خونند، می شه یه آهنگ با حال گوش کرد، می شه کارایی که باید انجام بدیم رو عقب نینداخت، می شه تست هندسه ۳ زد و هزارتا می شه دیگه.

بخش بزرگی از سرنوشت آدمها به این بستگی داره که با الانشون چی کار می کنن. هر الانی برای یه کاری مناسبه، اگر اونا رو جابه جا کنی، همه چیز به هم می ریزه. مثلاً اگر وقت خواب بریم تو اینستا و تلگرام، وقت تست هندسه زدن خوابمون می گیره و ... فکر کنم فهمیدی چی می خوام بگم. پس الانتو بهت پس می دم که بری اون کاری که فکر می کنی درسته رو انجام بدی. این کتاب رو یه نویسنده خوب، یه معلم خوب و از همه مهم تر یه دوست خوب نوشته. مهربار راشدی این قدر برای کارش ارزش قائله که نمی تونه کتاب خوب ننویسه. مهربار جان دمت گرم.

برای رسیدن این کتاب خلیلیا زحمت کشیدن. خانم مهناز سخاوت زاده، لولوا مرادی و خانم میترا حسامی و ویراستارای خوبمون که در وقت تنگ و فشرده همه تلاششون رو کردن تا بهترین کتاب رو آماده کنن. کارشناسان عزیز، آقایان اسحاق اسفندیاری، مجید رضاصدیقیان کاشی، سعید دارایی و خانم زهرا جالینوسی، اساتید بزرگوار آقایان سیامک شهبازی زاده و مهدی مژدهی که با نظرات ارزشمند خود، به ما کمک زیادی کردند. همکاران پرتلاشمون در واحد تولید هم که مثل همیشه سنگ تموم گذاشتن. از ته دل بچه ها متشکریم!

مواظب خودتون و الاناتون باشید ...

## مقدمه مؤلف

کلماتم را  
در جوی سحر می‌شویم  
لحظه‌هایم را  
در روشنی باران‌ها  
تا برای تو شعری بسرایم، روشن  
تا که بی‌دغدغه، بی‌ابهام  
سخنانم را در حضور باد  
این سالک دشت و هامون  
با تو بی‌برده بگویم  
که تو را  
دوست می‌دارم تا مرز جنون ...

(دکتر محمدرضا شفیعی کدگنی)

سلام به شما مهندسان آینده نزدیک!

ورود شما به سال دوازدهم و کتاب هندسه ۳ را خوش آمد می‌گویم. قرار است با هم به کوچه تست هندسه دوازدهم واقع در خیابان دوطرفه خیلی سبز سر بزنیم و در هر یک از سه ساختمان این کوچه را بزنیم، آمار دقیق ساکنین این ساختمان‌ها را بگیریم و از احوالات آن‌ها باخبر شویم. روی پلاک ساختمان اول که سه طبقه است «ماتریس و کاربردها»، روی پلاک ساختمان چهار طبقه دوم «آشنایی با مقاطع مخروطی» و روی پلاک ساختمان سه طبقه انتهایی کوچه، «بردارها» حک شده است.

اگر به مسیر حرکت دقت کنید و حواستان به گپ و گفت‌ها باشد، حتماً آمار دقیقی به دست خواهید آورد و دست پُر، خوشحال و به سلامت از کوچه تست هندسه دوازدهم خارج خواهید شد.

همان‌طور که اشاره شد کتاب درسی شامل سه فصل ① ماتریس و کاربردها، ② آشنایی با مقاطع مخروطی و ③ بردارها است و هر فصل شامل چند بخش است.

تمام تلاشمان را کرده‌ایم که پس از خواندن درس نامه‌های هر بخش و حل تست‌های آن (البته با حواس جمع!)، تسلط خوبی بر مطالب کتاب درسی و آنچه قرار است در کنکور با آن روبه‌رو شوید، پیدا کنید.

بعد از تست‌های هر بخش، یک آزمونک ۵ سؤالی گذاشتیم که خودتان را محک بزنید. در انتهای هر بخش و بعد از آزمونک، تعدادی تست تکمیلی (که کمی سخت‌تر از مسائل کتاب هستند) با عنوان سری [Z] داریم؛ از این تست‌ها، ساده و سرسری نگذرید! حتماً پس از تسلط به تست‌های هر بخش سراغ تست‌های سری [Z] بروید و خیلی دقیق آن‌ها را بررسی کنید. (البته هیچ اجباری به زدن تست‌های [Z] نیست) در پایان هر فصل دو آزمون گذاشتیم که بتوانید تسلط خودتان بر فصل را ارزیابی کنید. آزمون‌های جامع کتاب را هم دریابید که مرور خوبی روی کلیات مطالب کتاب دارند. در مجموع، هر آنچه برای پاسخ‌گویی به سؤالات آزمون‌ها و کنکور نیاز داشتید در قالب تمرین‌های کتاب، تست‌های کنکورهای گذشته، تعمیم مطالب کتاب و کنکورها، با تست‌های متنوع تقدیم شما شده است.



- ۱- حتی اگر یک تست را درست زده‌اید؛ پاسخ آن را کاملاً و با دقت زیاد بررسی کنید.
- ۲- تست‌هایی که احیاناً غلط زدید یا نزدیک را علامت‌گذاری کنید تا بعداً یک یا چند بار دیگر آن‌ها را مرور کنید.
- ۳- برای مواقع اورژانسی که برای زدن همه تست‌ها وقت ندارید، تست‌های رنگی به داد شما خواهند رسید و تسلط نسبتاً خوبی برای شما ایجاد خواهند کرد؛ این تست‌ها را جدی بگیرید!

### سپاسگزاری

لازم است از دوست عزیزم دکتر کمیل نصری که مثل همیشه از حمایت بی‌دریغش بهره‌مند بودم، تشکر ویژه داشته باشم. از مهندس رضا سبزمیدانی مدیریت تألیف کتاب‌های تست که با دقت و ریزبینی بر تمام مراحل تألیف کتاب، نظارت داشتند، سپاسگزارم. از مهندس نوید شاهی به خاطر تمام همراهی‌ها و نظرات سازنده‌اش تشکر می‌کنم.

از خانم‌ها میترا حسامی، مهناز سخاوت‌زاده و لولوا مرادی که زحمات زیادی برای به ثمر رسیدن این اثر کشیدند، ممنونم. از دوستان عزیزم آقایان مهندس سیدعلیرضا شیرازی، مهندس علیرضا شریف خطیبی، مهندس منصور آقاخانی که نظرات مفیدشان باعث غنای این اثر شد، صمیمانه تشکر می‌کنم.

از ویراستاران علمی کتاب و هم‌چنین همکاران تولید سپاسگزارم.

سعی جمعی ما بر این بود که کتابی مفید، راهگشا و بدون غلط به شما عزیزان تقدیم کنیم اما وجود اشکالات ادبی، نگارشی و حتی محاسباتی و علمی، امری اجتناب‌ناپذیر است. از طریق سایت یا صفحات مجازی خیلی سبز می‌توانید با ما در ارتباط باشید و نظرات اصلاحی یا ایرادات احتمالی را با ما در میان بگذارید.

در پناه خدا باشید  
مه‌ریار راشدی

@HendeseKheiliSabz

آیکون‌هایی که در کتاب می‌بینید

توجه قدرتی و نیمه‌خفن اشاره و نکته یادآوری

(فصل ۲)

## آشنایی با مقاطع مخروطی

۵۵	درس ۱: مکان هندسی
۶۳	درس ۲: دایره
۷۷	درس ۳: بیضی
۸۸	درس ۴: سهمی

(فصل ۱)

## ماتریس و کاربردها

۷	درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
۲۴	درس ۲: دترمینان
۳۶	درس ۳: وارون ماتریس

## آزمون‌های جامع

۱۳۸	آزمون جامع ۱
۱۳۸	آزمون جامع ۲
۱۳۹	آزمون جامع ۳
۱۳۹	آزمون جامع ۴
۱۴۰	آزمون جامع ۵

(فصل ۳)

## بردارها

۱۰۱	درس ۱: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$
۱۱۷	درس ۲: ضرب داخلی بردارها
۱۲۵	درس ۳: ضرب خارجی بردارها

## پاسخ‌نامه

۱۴۱	پاسخ‌نامه تشریحی
۳۰۱	پاسخ‌نامه کلیدی

# فصل ۱ ماتریس و کاربردها

درس ۱

## ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

شماره ۳  
خطی سبز

ماتریس، آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی است که به هر عضو آن درایه می‌گوییم. هر ماتریس از تعدادی سطر و تعدادی ستون تشکیل شده است. اگر ماتریس  $A$ ،  $m$  سطر و  $n$  ستون داشته باشد، مرتبه ماتریس  $A$ ،  $m \times n$  است و آن را به صورت  $A_{m \times n}$  یا  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  نمایش می‌دهیم.  $a_{ij}$  یعنی درایه واقع در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $A$ . ماتریس مقابل دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، پس مرتبه آن  $2 \times 3$  است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{سطر اول} \\ \rightarrow \text{سطر دوم} \\ \rightarrow \text{سطر سوم} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{ستون} & \text{ستون} & \text{ستون} \\ \text{اول} & \text{دوم} & \text{سوم} \end{matrix}$$

درایه  $a_{21}$  را در نظر بگیرید! این درایه در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.

مثلاً ماتریس  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس  $3 \times 2$  است (سه سطر و دو ستون دارد). در این ماتریس عدد ۴، درایه واقع در سطر سوم و ستون اول است.

تمرین کتاب درسی

**تست** کدام گزینه ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$  با شرایط  $\begin{cases} i+j & i > j \\ 7 & i = j \\ i^2 & i < j \end{cases}$  را مشخص می‌کند؟

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

**پاسخ گزینه ۳** ماتریس  $A$  یک ماتریس  $3 \times 4$  است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

در جایی که شماره سطر و ستون با هم برابرند ( $i = j$ ) باید ۷ بگذاریم، در جایی که شماره سطر از شماره ستون کم‌تر است باید شماره سطر را به توان ۲ برسانیم و در ماتریس جایگزین کنیم. بنابراین داریم:

$$a_{12} = 1^2, a_{13} = 1^2, a_{14} = 1^2, a_{22} = 2^2, a_{23} = 2^2, a_{24} = 2^2, a_{33} = 3^2, a_{34} = 3^2$$

در جایی که شماره سطر از شماره ستون بزرگ‌تر است، شماره سطر و ستون را با هم جمع می‌کنیم و در ماتریس قرار می‌دهیم. پس:

$$a_{21} = 2+1=3, a_{31} = 3+1=4, a_{32} = 3+2=5$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

شناخت ماتریس‌های خاص یکی از اولین مراحل ورود به بازی ماتریس است.

### ماتریس‌های خاص

$$\bar{O}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱ **ماتریس صفر**: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است و آن را با  $\bar{O}$  نمایش می‌دهیم.

$$[a \ b \ c \ d \ e]_{1 \times 5}$$

۲ **ماتریس سطری**: ماتریسی که فقط یک سطر دارد. مرتبه این ماتریس،  $1 \times n$  است.

۳ ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون دارد. مرتبه این ماتریس،  $n \times 1$  است.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

۴ ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند. مرتبه این ماتریس  $n \times n$  است. این ماتریس دارای قطر اصلی و قطر فرعی است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$  قطر فرعی       $\downarrow$  قطر اصلی

در درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس مربعی  $i < j$ ، روی قطر اصلی  $i = j$  و پایین قطر اصلی  $i > j$  است. (i شماره سطر و j شماره ستون درایه  $a_{ij}$  است.)

۵ ماتریس پایین‌مثلثی: ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ d & b & \circ \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

۶ ماتریس بالامثلثی: ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ \circ & b & f \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$$

۷ ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند. (ماتریس قطری هم بالامثلثی است و هم پایین‌مثلثی)

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$$

۸ ماتریس اسکالر: ماتریسی است قطری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

$$\begin{bmatrix} k & \circ & \circ \\ \circ & k & \circ \\ \circ & \circ & k \end{bmatrix}$$

۹ ماتریس همانی (واحد): ماتریسی است اسکالر که درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشند.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$$

**نقته کنید!** گاهی ماتریس همانی را این‌گونه معرفی می‌کنند:  $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$  که  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \circ & i \neq j \end{cases}$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$$

مثلاً اگر بگویند ماتریس  $A = \begin{bmatrix} m+1 & n-1 \\ 2m & m+n-1 \end{bmatrix}$ ، قطری است؛ سریع نتیجه می‌گیریم درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی باید صفر باشند، یعنی

$$\begin{cases} n-1 = \circ \Rightarrow n=1 \\ 2m = \circ \Rightarrow m = \circ \end{cases}$$

باید  $m = \circ$  و  $n = 1$  باشد.

بنابراین ماتریس  $A$  به شکل  $\begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$  است.

$$\begin{bmatrix} k & \circ & \circ \\ \circ & k & \circ \\ \circ & \circ & k \end{bmatrix}$$

حالا اگر گفته شده بود مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر از مرتبه ۳ برابر ۶- است؛ می‌گفتیم ماتریس اسکالر  $3 \times 3$  به شکل

و مجموع درایه‌های آن برابر با  $3k$  است، نتیجه می‌گرفتیم  $3k = -6$  و  $k = -2$  و ماتریس به صورت  $\begin{bmatrix} -2 & \circ & \circ \\ \circ & -2 & \circ \\ \circ & \circ & -2 \end{bmatrix}$  بوده است.

### تساوی دو ماتریس

دو ماتریس  $A$  و  $B$  مساوی‌اند هرگاه: ۱ دو ماتریس، هم‌رتبه باشند و ۲ درایه‌های نظیرهم‌نظیر در  $A$  و  $B$  برابر باشند.

مثلاً دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 2 & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$  زمانی با هم برابرند که  $x = 1$ ،  $y = 5$  و  $z = 3$  باشد.

(تمرین کتاب درسی)

**مثال** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $A = B$ ، در این صورت حاصل  $x+y+z$  کدام است؟

**پاسخ** مرتبه دو ماتریس یکی است، بنابراین برای این که دو ماتریس برابر باشند باید درایه‌های دو ماتریس نظیر به نظیر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \\ z=-2 \end{cases} \xrightarrow{+} 4x=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=1$$

$$x+y+z=2+1-2=1$$

پس:

آشنایی با جمع، تفریق و ضرب ماتریس‌ها از مهم‌ترین موضوعات مربوط به ماتریس‌ها است که در ادامه به آن می‌پردازیم.

## اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

### ۱- جمع و تفریق

اگر دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، با جمع یا تفریق کردن درایه‌های نظیر دو ماتریس، جمع یا تفریق دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 \\ 0+2 & 1+(-1) \\ 2+1 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-1 \\ 0-2 & 1-(-1) \\ 2-1 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**تست** اگر  $A = [a_{ij}]_{r \times r}$  و  $i > j$  و  $i + j$  و  $i < j$  در ماتریس  $I - A$  کدام درایه وجود ندارد؟

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

(۴) مضرب ۷

(۳) مضرب ۵

(۲) مضرب ۴

(۱) مضرب ۳

**پاسخ گزینه ۴** اول باید تکلیف ماتریس  $A$  را روشن کنیم.

قبلاً گفته بودیم که در درایه‌های پایین قطر اصلی ماتریس مربعی  $i > j$  و در درایه‌های بالای قطر اصلی  $i < j$  است.

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & -4 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$I$  (ماتریس همانی) هم که آشناست!

در بین درایه‌های  $I - A$  عدد مضرب ۷ نداریم.

### ۲- ضرب عدد در ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow -3A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -9 \\ -6 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

اگر عددی در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های آن ضرب می‌شود.

تک‌تک درایه‌های  $A$  را در  $-3$  ضرب کردیم و  $-3A$  به دست آمد.

**دقت کنید!** اگر ماتریس  $A$  را در  $(-1)$  ضرب کنیم، ماتریس  $(-A)$  به دست می‌آید. به ماتریس  $(-A)$ ، قرینه ماتریس  $A$  می‌گوییم.

### چند ویژگی در مورد جمع و تفریق و ضرب عدد در ماتریس

اگر ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  هم‌مرتبه،  $m$  و  $k$  اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه:

- ۱  $A + B = B + A$  (خاصیت جابه‌جایی)
- ۲  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (خاصیت شرکت‌پذیری)
- ۳  $A + \vec{0} = A$  (خاصیت عضو خنثی در جمع)
- ۴  $A + (-A) = \vec{0}$  (خاصیت عضو قرینه)
- ۵  $0 \times A = \vec{0}$
- ۶  $k(A \pm B) = kA \pm kB$

- ۷  $(k \pm m)A = kA \pm mA$
- ۸  $k(mA) = m(kA) = (km)A$
- ۹  $kA = \vec{0} \Rightarrow k = 0$  یا  $A = \vec{0}$
- ۱۰  $\begin{cases} A = B \Rightarrow kA = kB \\ kA = kB \xrightarrow{k \neq 0} A = B \end{cases}$

### ۳- ضرب دو ماتریس

اگر  $A_{m \times n}$ ،  $B_{k \times l}$  باشد،  $A \times B$  زمانی وجود دارد که  $n = k$  باشد، یعنی ضرب دو ماتریس زمانی قابل تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با

$$A_{m \times n} \times B_{k \times l} \quad ; \quad A_{r \times t} \times B_{t \times f} = C_{r \times f}$$

تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.  $A \times B$ ، ماتریسی است از مرتبه  $m \times l$ .

برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول، سطر و از ماتریس دوم، ستون برمی‌داریم و درایه‌های هر سطر در ستون، نظیر به نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می‌شود و در ماتریس حاصل ضرب جایگزین می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1+0 & 4+1+0 \\ 1+3+8 & 2-3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

سطر اول ستون اول    سطر اول ستون دوم  
 سطر دوم ستون اول    سطر دوم ستون دوم

چگونگی به دست آوردن درایه واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس حاصل ضرب را ببینید:

باید  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  را به دست آوریم. برای این کار، هر درایه در درایه نظیرش ضرب می‌شود، حاصل ضرب‌ها را با هم جمع می‌کنیم و به جای درایه واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس حاصل ضرب قرار می‌دهیم.

$$2 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 4 = 2 - 1 + 0 = 1$$

**تست** اگر  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $a+b+e$  کدام است؟

۱۱ (۱)      ۱۵ (۲)  
 ۱۸ (۳)      ۲۱ (۴)

**پاسخ گزینه ۱** ماتریس  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  که  $3 \times 1$  است در ماتریس  $A_{m \times n}$  باید ضرب شود تا یک ماتریس  $3 \times 3$  به ما بدهد.

$B_{3 \times 1} \times A_{m \times n} = C_{3 \times 3}$

برای این که دو ماتریس  $B$  و  $A$  ضرب پذیر باشند باید  $m=1$  باشد و برای این که ضرب  $B$  در  $A$  ماتریس  $3 \times 3$  شود باید  $n=3$  باشد؛ یعنی ماتریس  $A$  از مرتبه  $1 \times 3$  است. با فرض  $A$  به شکل  $[x \ y \ z]$  داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [x \ y \ z] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

واضح است که  $a=2x$ ،  $b=2y$  و  $e=3y$ ، بنابراین:

$$a+b+e=2x+2y+3y=2x+5y=2(3)+5(1)=11$$

**مثال** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  باشند، درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس  $A \times B$  را به دست آورید.

**پاسخ** فب! انگار راهی نداریم و باید ماتریس  $A$  که  $3 \times 2$  است را در ماتریس  $B$  که یک ماتریس  $2 \times 3$  است، ضرب کنیم. ماتریس  $A \times B$  یک ماتریس  $3 \times 3$  خواهد شد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 7 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم  $A \times B$  برابر ۷ است.

به جای این که دو ماتریس را در هم ضرب کنیم تا درایه مورد نظرمان را به دست آوریم، می‌توانستیم سطر دوم  $A$  را در ستون سوم  $B$  ضرب کنیم تا درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم  $A \times B$  به راحتی به دست آید.

$$AB = [A \text{ سطر دوم}] \times [B \text{ ستون سوم}] = [2 \ 1] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = 2+5=7$$

**دقت کنید!** اگر  $A \times B = C$  باشد، آن گاه درایه  $c_{ij}$  از ضرب سطر  $i$ ام ماتریس  $A$  در ستون  $j$ ام ماتریس  $B$  به دست می‌آید.

$$c_{ij} = [A \text{ سطر } i \text{ام}] \times [B \text{ ستون } j \text{ام}]$$

**تست** اگر برای دو ماتریس  $A$  و  $B$  روابط  $3A + 2B = I$  و  $B - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  برقرار باشند، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول  $BA$  کدام است؟

۷ (۴)

صفر (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

**پاسخ گزینه ۲**  $B - A$  مربعی و  $2 \times 2$  است، پس  $A$  و  $B$  نیز مربعی و  $2 \times 2$  هستند.

به کمک داده‌های سؤال می‌توانیم ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را به دست آوریم. ببینید

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2B - 2A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow \Delta A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

حالا که  $A$  را داریم،  $B$  به راحتی به دست می‌آید.

$$B - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

می‌توانستیم بگوییم درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول  $BA$  از ضرب سطر دوم  $B$  در ستون اول  $A$  به دست می‌آید.

$$BA \text{ درایهٔ سطر دوم و ستون اول} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 - 4 = -1$$

**مثال** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  باشند، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس  $(A \times B) \times C$  را به دست آورید.

(برگرفته از کار در کلاس کتاب درسی)

**پاسخ** می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد؛ یعنی  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$  است. می‌توانیم اول ضرب دو ماتریس  $B$  و  $C$  که هر دو مربعی هستند را محاسبه کنیم و سپس  $A$  را در حاصل ضرب  $B$  و  $C$  ضرب کنیم.

$$B \times C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad A \times (B \times C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون سوم ماتریس  $(A \times B) \times C$  برابر با  $-5$  است.

به جای این کار می‌توانستیم سطر سوم  $A$  را در ماتریس  $B$  و ستون دوم  $C$  ضرب کنیم تا درایهٔ مورد نظرمان به دست آید.

$$(A \times B) \times C \text{ درایهٔ سطر سوم و ستون دوم} = [A \text{ سطر سوم}] \times [B \text{ ماتریس}] \times [C \text{ ستون دوم}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -5$$

**دقت کنید!** اگر  $(A \times B) \times C = D$  باشد، آن‌گاه درایهٔ واقع در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $D$  از رابطهٔ  $d_{ij} = [A \text{ سطر } i\text{ام}] \times [B \text{ ماتریس}] \times [C \text{ ستون } j\text{ام}]$  به دست می‌آید.

### ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱ در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad B \times A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

دیدید؟!  $A \times B$  و  $B \times A$  برابر نشدند؛ در حالت کلی  $A \times B$  و  $B \times A$  برابر نیستند.

**دقت کنید!** در حالت‌های خاصی دو ماتریس می‌توانند خاصیت تعویض‌پذیری ( $A \times B = B \times A$ ) داشته باشند. چند حالت مهم را در زیر می‌بینید.

$$AI = IA = A$$

**الف)** ضرب ماتریس هماتی ( $I_n$ ) در ماتریس مربعی  $n \times n$ ، خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری) دارد.



(ب) ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه، خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری) دارد. مثلاً اگر  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$  باشند، آن‌گاه:

$$A \times B = B \times A = \begin{bmatrix} am & 0 & 0 \\ 0 & bn & 0 \\ 0 & 0 & cp \end{bmatrix}$$

(پ) ضرب ماتریس اسکالر با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با آن، خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

(ت) دو ماتریس به شکل  $\begin{bmatrix} m & n \\ n & m \end{bmatrix}$ ، تعویض‌پذیرند.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

دیدید که  $A \times B$  و  $B \times A$  برابر شدند، بنابراین دو ماتریس  $A$  و  $B$  تعویض‌پذیرند.

(ث) ضرب دو ماتریس به شکل  $\begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}$  خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}}_B = \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$$

از آن جایی که  $A \times B = B \times A$  شد، نتیجه می‌گیریم ماتریس‌های  $A$  و  $B$  تعویض‌پذیرند.

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

(ی) اگر  $AB = AC$  باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت  $B = C$  است (حذف برقرار نیست).

فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  باشد.

$AB = AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  است. آیا ماتریس‌های  $B$  و  $C$  برابرند؟! معلوم است که جواب «نه» است. این یعنی ممکن است  $AB = AC$  باشد اما  $B$

و  $C$  برابر نباشند.

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

(ز) ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

**تست** جواب‌های معادله  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$  کدام‌اند؟

۱ و ۳ (۴)

-۱ و ۳ (۳)

۱ و -۳ (۲)

-۱ و -۳ (۱)

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

**پاسخ گزینه ۲** از قبل آگاهی داریم که ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، یعنی:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix}$$

پس ابتدا حاصل  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$  را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = [-x^2 + 2x + 3]_{1 \times 1} = [0]$$

حالا باید  $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix}$  برابر با  $\vec{0}$  باشد، بنابراین:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

یعنی باید  $-x^2 + 2x + 3 = 0$  باشد، پس:

معادله ماتریسی داده‌شده دارای دو جواب ۳ و -۱ است.

(۴) در ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری (و فاکتورگیری) برقرار است. (توزیع‌پذیری از چپ)

$(B \pm C) \times A = B \times A \pm C \times A$  (توزیع‌پذیری از راست)

(۵) اگر حاصل ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است. به عبارت دیگر ممکن است از ضرب کردن دو

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس غیرصفر یک ماتریس صفر به دست آید. مثلاً:

همان طور که ملاحظه می‌کنید، حاصل ضرب دو ماتریس صفر شده اما هیچ‌کدام از ماتریس‌ها، ماتریس صفر نبوده‌اند.

۶ حاصل ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است و برای محاسبه آن باید درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس را نظریه‌نظیر در هم ضرب کرد.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$

۷ ضرب ماتریس قطری در یک ماتریس مربعی هم مرتبه:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}}_{\text{قطری}} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} ma & mb & mc \\ nd & ne & nf \\ pg & ph & pi \end{bmatrix}$$

همان طور که می‌بینید! اگر ماتریس قطری از چپ در ماتریس A ضرب شود، سطر اول A در m، سطر دوم A در n و سطر سوم A در p ضرب می‌شود.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}}_{\text{قطری}} = \begin{bmatrix} ma & nb & pc \\ md & ne & pf \\ mg & nh & pi \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس قطری از راست در ماتریس A ضرب شود، ستون اول A در m، ستون دوم A در n و ستون سوم A در p ضرب می‌شود.

۸ اگر دو ماتریس A و B تعویض پذیر باشند یعنی  $A \times B = B \times A$  باشد، اتحادها در مورد آن‌ها برقرارند. اتحادهای مهم را ببینید

- ۱)  $(A+B)^T = A^T + B^T + 2AB$       ۲)  $(A-B)^T = A^T + B^T - 2AB$       ۳)  $(A-B)(A+B) = A^T - B^T$   
 ۴)  $A^T + B^T = (A+B)(A^T - AB + B^T)$       ۵)  $A^T - B^T = (A-B)(A^T + AB + B^T)$

**دقت کنید!** اتحادهای بالا در مورد  $A_{n \times n}$  و  $I_n$  برقرارند. (چون I و A تعویض پذیر هستند؛ یعنی  $IA = AI = A$ )

**تست** اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ضرب ماتریس A با چه تعداد از ماتریس‌های زیر، خاصیت جابه‌جایی دارد؟

- الف)  $I - A$  (۴)      ب)  $(A+I)^T$  (۲)      پ)  $A^T + 2A - I$  (۳)      ت)  $A^T$  (۴)

**پاسخ گزینه ۱** می‌دانیم A و I تعویض پذیرند (یعنی  $AI = IA$ )، پس ضرب هر ماتریس که فقط شامل ماتریس‌هایی از A و I باشد، با ماتریس A خاصیت جابه‌جایی دارد.

بدون این‌که ضربی انجام دهیم، خیلی شیک می‌گوییم ضرب A با هر چهار ماتریس  $I - A$ ،  $(A+I)^T$ ،  $A^T + 2A - I$  و  $A^T$  خاصیت جابه‌جایی دارد.

**تست** اگر  $A = [a_{ij}]$  و  $B = [b_{ij}]$  دو ماتریس  $3 \times 3$  با این ویژگی باشند که  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$  و  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = 2k \\ 0 & i + j = 2k + 1 \end{cases}$  (ماتریس  $(A-B)^T$  کدام است؟  $k \in \mathbb{Z}$ )

- ۱)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$       ۲)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$       ۳)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       ۴)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

**پاسخ گزینه ۲** اول باید تکلیف درایه‌های دو ماتریس A و B را مشخص کنیم:  
 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**دقت کنید!** در ماتریس A هر جا مجموع شماره سطر و ستون یک درایه، عددی فرد بود به جای آن صفر و هر جا مجموع شماره سطر و ستون درایه، عددی زوج بود به جای آن یک گذاشتیم.

حالا نوبت  $A - B$  است که خودش را به شما نشان دهد!  
 $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

برای این‌که سطر اول  $(A - B)^T$  را به دست بیاوریم کافی است سطر اول  $A - B$  را در هر سه ستون  $A - B$  ضرب کنیم.

$$(A - B)^T \text{ سطر اول} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**تست** اگر  $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 15 & 13 \end{bmatrix}$ ،  $B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$  و  $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$  باشند،  $AB + BA$  کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix}$

**پاسخ گزینه ۳**  $A^2$ ،  $B^2$  و  $A - B$  ما را یاد اتحاد می‌اندازد؛ اما یادتان باشد اگر  $A$  و  $B$  تعویض‌پذیر نباشند، اتحاد بی‌اتحاد! یعنی:

$$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2$$

بنابراین:  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 15 & 13 \end{bmatrix} - AB - BA + \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 54 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 27 & 20 \end{bmatrix} - (AB + BA)$

پس:  $AB + BA = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 27 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 54 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -27 & -16 \end{bmatrix}$

### توان ماتریس‌ها

اگر ماتریس  $A$  مربعی باشد، داریم:

$A^1 = A$   
 $A^2 = A.A$   
 $A^3 = A.A^2 = A^2.A$   
 $\vdots$   
 $A^n = A.A^{n-1} = A^{n-1}.A$

**دقت کنید!** اگر  $A$ ، ماتریسی مربعی،  $m$  و  $n$  طبیعی و  $k$  عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

- ۱  $I^n = I$
- ۲  $(kA)^n = k^n A^n$
- ۳  $A^m \times A^n = A^{m+n}$
- ۴  $(A^m)^n = A^{mn}$

برای محاسبه توان‌های ماتریس مربعی  $A$  (به طور خاص در مورد توان‌های بزرگ)، راه کلی این است که بین  $A$ ،  $A^2$ ،  $A^3$  و ... رابطه‌ای پیدا کنیم.

(تمرین کتاب درسی)

**مثال** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  باشد،  $A^7$  و  $A^{14}$  را به دست آورید.

**پاسخ** ابتدا  $A^2$  را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

حالا که  $A^2 = I$  شده، خیلی راحت  $A^7$  و  $A^{14}$  را به دست می‌آوریم.

$$A^7 = (A^2)^3 \times A = I^3 \times A = IA = A$$

$$A^{14} = (A^2)^7 = I^7 = I$$

اگر  $A^2 = I$  باشد به ماتریس  $A$ ، ماتریس متناوب گویند؛ زیرا توان‌های زوج این ماتریس برابر  $I$  و توان‌های فرد آن برابر با خود ماتریس است.

**تست** اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  باشد،  $A^{2021}$  کدام است؟

(۱)  $-I$  (۲)  $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  (۳)  $I$  (۴)  $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

**پاسخ گزینه ۲** برای رسیدن به  $A^{2021}$  راهی به جز پیدا کردن  $A^2$  نداریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$A^2$  که کمکی به ما نکرد! مجبوریم  $A^3$  را نیز به دست آوریم.

حالا شرایط بهتر شد.

$$A^{2021} = (A^3)^{673} \times A^2 = (-I)^{673} \times A^2 = -A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

**تست** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های سطر سوم  $A^f B^r$  کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴) -۱۶

**پاسخ گزینه ۲** یادتان باشد! اگر  $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  باشد ( $A$  مثلثی باشد) و  $A^n$  را بخواهیم ( $n \in \mathbb{N}$ )، درایه‌های روی قطر اصلی به توان  $n$  می‌رسند و صفرها سر جای‌شان می‌مانند اما در مورد بقیه درایه‌ها چیزی نمی‌دانیم. بنابراین:

$$A^f = \begin{bmatrix} 1^f & a & b \\ 0 & 3^f & c \\ 0 & 0 & (-1)^f \end{bmatrix}, \quad B^r = \begin{bmatrix} 1^r & x & y \\ 0 & 1^r & z \\ 0 & 0 & 2^r \end{bmatrix}$$

$$A^f B^r = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

از ما مجموع درایه‌های سطر سوم  $A^f B^r$  خواسته شده، پس کافی است سطر سوم  $A^f$  را در  $B^r$  ضرب کنیم تا سطر سوم  $A^f B^r$  مشخص شود.

$$A^f B^r \text{ سطر سوم} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر سوم  $A^f B^r$  برابر ۸ است.

**تست** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$  باشد، آن‌گاه  $A^{1399}$  کدام است؟

(۱)  $A^{1399}$  (۲)  $A^{1398}$  (۳)  $I^{1399}$  (۴)  $1399A$

**پاسخ گزینه ۲** **روش اول**  $A^2$  را به دست می‌آوریم ببینیم تکلیفمان مشخص می‌شود یا نه!

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} = 3A$$

اگر از تمام درایه‌های ماتریس  $A^2$  عدد ۳ را فاکتور بگیریم، داریم:

باید به دنبال رابطه‌ای بین  $A^2$ ،  $A$  و  $A^3$  باشیم.

$$A^2 = 3A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (3A) \cdot A = 3A^2 = 3(3A) = 3^2 A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (3^2 A) \cdot A = 3^2 A^2 = 3^2 (3A) = 3^3 A, \dots$$

$$A^{1399} = 3^{1398} A$$

خیلی ساده!  $\odot$  می‌توان نتیجه گرفت:

$$A^{1399} = 3^{1398} A$$

**روش دوم** اگر  $A^2 = kA$  باشد،  $A^n = k^{n-1} A$  است. در این تست که  $A^2 = 3A$  شده، بنابراین:

**تست** اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی و  $AB = A$  و  $BA = B$  باشد، حاصل  $A + A^2 + \dots + A^{1399}$  کدام است؟

(۱)  $1398A$  (۲)  $1399A$  (۳)  $1400I$  (۴)  $1400A$

**پاسخ گزینه ۲** طرفین رابطه  $AB = A$  را از راست در  $A$  ضرب می‌کنیم و به جای  $BA$ ،  $B$  قرار می‌دهیم.

$$AB = A \xrightarrow{\times A} (AB)A = A^2 \Rightarrow A(\underbrace{BA}) = A^2$$

$$AB = A^2 \xrightarrow{AB=A} A = A^2$$

اگر  $A^2 = A$  باشد، آن‌گاه  $A^n = A$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) است و در نتیجه داریم:  $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{1399} = A + A + A + \dots + A = 1399A$



**دقت کنید!** با توجه به قسمت‌های بالا، می‌توان روش به دست آوردن توان ماتریس‌های خاص را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱ اگر ماتریس  $A$  قطری باشد، برای به دست آوردن  $A^n$ ، کافی است درایه‌های روی قطری اصلی  $A$  را به توان  $n$  برسانیم. ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

$$A^\top = A \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} A^n = A$$

۲ اگر ماتریس  $A$  مربعی و  $A^\top = A$  باشد، آن‌گاه تمام توان‌های طبیعی  $A$  با خود  $A$  برابرند.

**حواستان هست!** ماتریس  $I$  به هر توان طبیعی برسد برابر با  $I$  می‌شود. ( $I^n = I$ )

$$A^\top = kA \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} A^n = k^{n-1}A$$

۳ اگر ماتریس  $A$  مربعی و  $A^\top = kA$  باشد، آن‌گاه:

$$A^\top = I \Rightarrow \begin{cases} A^{\text{فرد}} = A \\ A^{\text{زوج}} = I \end{cases}$$

۴ اگر ماتریس  $A$  مربعی و  $A^\top = I$  باشد، آن‌گاه اگر  $A$  به توان طبیعی برسد، داریم:

در برخورد با توان‌های ماتریس‌ها، اولین قدم، یافتن  $A^\top$  است. اگر  $A$  قطری باشد یا  $A^\top$  یکی از حالت‌های خاص بالا باشد، تکلیف ما روشن است. در غیر این صورت برای یافتن توان‌های بزرگ ماتریس  $A$  باید سعی کنیم بین  $A$ ،  $A^\top$  و ... رابطه‌ای پیدا کنیم.

دختران و پسران عزیز، سلام!

قبل از حل تست‌ها به نکات زیر توجه کنید! ●●●

- ۱ درس‌نامه هر بخش را دقیق و کامل مطالعه کنید و مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه را با دقت حل کنید.
- ۲ تست‌هایی که علامت دارند کمی سخت‌تر از بقیه تست‌ها هستند.
- ۳ پس از تسلط کامل به تست‌های هر بخش سراغ تست‌های سری [Z] بروید. (البته هیچ اجباری به زدن تست‌های سری [Z] نیست.)
- ۴ در مواقع اورژانسی که برای زدن همه تست‌ها وقت ندارید، تست‌های رنگی (به ویژه تست‌های کنکورهای سراسری و تمرین کتاب درسی) تسلط نسبتاً خوبی بر مطالب هر بخش برای شما ایجاد خواهند کرد.
- ۵ حتماً حتماً پاسخ تست‌ها را با دقت و وسواس بررسی کنید؛ حتی اگر گزینه درست را به عنوان پاسخ انتخاب کرده باشید.

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  درست است؟

(الف) ماتریس  $A$  دارای دو ستون است. (ب) در هر سطر سه درایه وجود دارد.

(پ) ماتریس  $A$  سه سطر دارد. (ت) هر ستون ماتریس  $A$  شامل دو درایه است.

(ث) ماتریس  $A$  دارای ۶ درایه است.

۴ (۴)                      ۳ (۳)                      ۲ (۲)                      ۱ (۱)

۲- اگر  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  و  $i = j$  و  $\begin{cases} i+j & i < j \\ -i & \\ 3 & \\ i-j & i > j \end{cases}$  باشد، حاصل  $a_{21} + a_{12} - a_{22}$  کدام است؟

۵ (۴)                      ۴ (۳)                      ۳ (۲)                      ۲ (۱)

۳- تعریف  $a_{ij} = \begin{cases} i+2 & i=j \\ i-j & i > j \\ 2j-i & i < j \end{cases}$ ، نمایش کدام ماتریس  $3 \times 3$  زیر است؟

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (۴)	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (۳)	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (۲)	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ (۱)
---	--	---	--

۴- اگر  $A = [a_{ij}]_{1 \times 3} = [\alpha i + \beta j]$  و  $B = [b_{ij}]_{3 \times 1} = [2\alpha j - 2\beta i]$  باشند، مجموع درایه‌های ستون دوم  $A$  و سطر سوم  $B$  کدام است؟

۸ $\alpha$  - ۷ $\beta$  (۴)                      ۷ $\alpha$  -  $\beta$  (۳)                      ۲ $\alpha$  - ۹ $\beta$  (۲)                      ۳ $\alpha$  - ۷ $\beta$  (۱)

۵- اگر  $4I + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 3X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  باشد، حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $X$  و حاصل ضرب درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی  $X$ ، چه قدر اختلاف دارند؟

(۱)  $\frac{1}{9}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{8}{3}$

۶- اگر  $A = [i - j]_{3 \times 3}$  و  $B = [6 - ij]_{3 \times 3}$ ، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس  $A + B$  کدام است؟

(۱)  $-2$  (۲) صفر (۳)  $2$  (۴)  $5$

۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & m & n-1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & m-2 & n+1 \end{bmatrix}$ ،  $C = A - 2B$ ،  $c_{11} = -c_{22} + 1$  و  $c_{23} = -3c_{13}$  باشد،  $n - m$  کدام است؟

(۱)  $-8$  (۲)  $2$  (۳)  $4$  (۴)  $8$

۸- اگر دو ماتریس  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 0 & -1 \\ n^2 + 1 & 3 \end{bmatrix}$  برابر باشند، مجموع درایه‌های ماتریس  $A$  کدام است؟

(۱)  $16$  (۲)  $14$  (۳)  $12$  (۴)  $10$

۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 & x \\ n-1 & 2 & m-p \\ k+2 & 3 & y \end{bmatrix}$ ،  $B = [ij - i]_{3 \times 3}$  و  $A = B$  باشد، حاصل  $x - y - k + p + n - m$  کدام است؟

(۱)  $-5$  (۲)  $-7$  (۳)  $-9$  (۴)  $-11$

۱۰- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -8 & -4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$  باشند، در مورد ماتریس  $2A - 3B$  چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) ماتریس صفر است. (ب) ماتریس قطری است. (پ) ماتریس اسکالر است.

(۱)  $3$  (۲)  $2$  (۳)  $1$  (۴) صفر

۱۱- اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} mn & 3-n \\ m+2 & m+n \end{bmatrix}$  یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی  $A$  کدام است؟

(۱)  $-6$  (۲)  $-5$  (۳)  $-1$  (۴)  $11$

۱۲- اگر ماتریس قطری  $A$  در رابطه  $4A - 2I - A = \begin{bmatrix} 2-m & m-3 \\ n+2 & 3-n \end{bmatrix}$  صدق کند، ماتریس  $A - I$  کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

۱۳- اگر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی یک ماتریس اسکالر  $3 \times 3$ ، برابر  $\frac{-1}{8}$  باشد، مجموع درایه‌های ستون سوم این ماتریس کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{24}$  (۳)  $\frac{-1}{2}$  (۴)  $\frac{-1}{24}$

۱۴- دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} p+n & -1 \\ m-2 & -3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -7 & p-n \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  مساوی هستند. ماتریس  $C = [c_{ij}]_{3 \times 2}$  با تعریف  $i = j$  یا  $i < j$  یا  $i > j$ ، چگونه ماتریسی است؟

(۱) ماتریس صفر (۲) ماتریس همانی (۳) ماتریس اسکالر (۴) ماتریس غیرقطری

۱۵- اگر  $A = [i - j]_{2 \times 2}$ ،  $B = \begin{bmatrix} m & m \\ 2+n & n \end{bmatrix}$  و  $A - B$  ماتریسی اسکالر باشد، حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی  $A - B$  کدام است؟

(۱)  $-1$  (۲) صفر (۳)  $1$  (۴)  $4$

۱۶- اگر  $B$  ماتریس اسکالر از مرتبه  $3$ ،  $A = [a_{ij}] = [(i + j)m]$  و  $3B - A = I$  باشد، مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس  $A + B$  کدام است؟

(۱)  $1$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴) به مقدار  $m$  بستگی دارد.

۱۷- اگر  $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$  با تعریف  $b_{ij} = \begin{cases} i+j & i \leq j \\ j-i & i > j \end{cases}$  و  $A$  یک ماتریس اسکالر با مجموع درایه‌های ۱۲ باشند که در رابطه  $A + I = B + C$  صدق کنند، مجموع درایه‌های ماتریس  $C$  کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۹ (۴) -۱۲

۱۸- در تساوی  $\begin{bmatrix} -2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$  حاصل  $m - n$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، کوچک‌ترین درایه ماتریس  $AB$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

(ریاضی خارج درسی)

۲۰- به ازای کدام مقدار  $x$  و  $y$ ، ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  یک ماتریس قطری است؟

- (۱)  $x = 1, y = -7$  (۲)  $x = 2, y = -7$  (۳)  $x = 2, y = -5$  (۴)  $x = 1, y = -5$

۲۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  و  $A \times B$  یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی  $B \times A$  کدام است؟

(برگرفته از تمرین کتاب درسی)

- (۱) صفر (۲) ۸ (۳) ۱۴ (۴) ۲۴

۲۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix}$  و ماتریس  $BA$  قطری باشد، ماتریس  $\begin{bmatrix} -3x & x-y-1 \\ y^2-x^2+x+3 & -4y \end{bmatrix}$  چگونه ماتریسی است؟

- (۱) ماتریس همانی (۲) ماتریس اسکالر (۳) ماتریس قطری (۴) ماتریس صفر

۲۳- دو ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$  به صورت  $B = \begin{cases} -i^2 - 1 & i = j \\ m & i < j \\ n & i > j \end{cases}$  و  $a_{ij} = \begin{cases} -i - 1 & i = j \\ m & i < j \\ n & i > j \end{cases}$  تعریف شده‌اند و  $m$  و  $n$  اعداد طبیعی

یک‌رقمی هستند. اگر  $B \times A$  ماتریسی قطری باشد، ماتریس  $\begin{bmatrix} m-3 & \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -n \\ m \end{bmatrix} + 1 & m-n \end{bmatrix}$  چگونه ماتریسی است؟

- (۱) غیرقطری (۲) همانی (۳) قطری (۴) اسکالر

۲۴- اگر دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} m & -1 \\ -1 & n \end{bmatrix}$  در شرط  $AB - BA = \bar{O}$  صدق کنند، حاصل  $m^2 - n^2$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) نامشخص

۲۵- اگر  $A \times \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$  و  $A \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$  و  $A \times \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $A \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

۲۶- چند ماتریس  $A_{2 \times 2}$  وجود دارد که  $A \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$  باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۲۷- اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$  به صورت  $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$  و  $b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$  باشند،  $A \times B$  کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

- (۱)  $\begin{bmatrix} -3 & -5 & -1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 5 & 18 & 19 \\ 5 & 11 & 13 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 5 & 18 & 19 \\ 5 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

۲۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2a & 0 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 2b & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 4c \end{bmatrix}$  و  $7 = 4a + 3b - 2c$  باشد، مجموع عناصر روی قطر اصلی  $BA$  چه قدر است؟

- ۱۴ (۱)      ۱۶ (۲)      ۱۸ (۳)      ۲۱ (۴)

۲۹- اگر  $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $C = A \times B = [c_{ij}]$ ، آن گاه حاصل  $c_{33}$  کدام است؟

- صفر (۱)      ۱۶ (۲)      ۲۲ (۳)      ۲۴ (۴)

(ریاضی فارج ۱۴۰۰)

۳۰- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ ،  $C = A \times B$  مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس  $A$ ، کدام است؟

- ۱۲ (۱)      ۱۷ (۲)      ۱۹ (۳)      ۲۱ (۴)

۳۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & -2 \end{bmatrix}$  باشند، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس  $BAC$  کدام است؟

- ۶۶۱ (۱)      ۵۲ (۲)      صفر (۳)      -۲ (۴)

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۳۲- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ ،  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس  $A$  کدام است؟

- ۳ (۱)      ۵ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۳ (۴)

۳۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$  و ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی داشته باشد،  $\alpha + \beta$  کدام است؟

- ۷ (۱)      ۵ (۲)      ۳ (۳)      ۱ (۴)

۳۴- حاصل  $\sin 75^\circ \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \cos 75^\circ \\ \cos 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} + \cos 75^\circ \begin{bmatrix} \sin 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \cos 15^\circ & \cos 75^\circ \end{bmatrix}$  کدام است؟

- I (۱)       $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (۲)       $\bar{O}$  (۳)       $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  (۴)

(سراسری ریاضی ۹۸)

۳۵- از رابطه ماتریسی  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$ ، عدد غیر صفر  $x$  کدام است؟

- $\frac{2}{9}$  (۱)       $\frac{2}{8}$  (۲)       $\frac{4}{9}$  (۳)       $\frac{3}{5}$  (۴)

۳۶- حاصل جمع ریشه‌های معادله  $\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$  کدام است؟

- $\frac{3}{2}$  (۱)      ۱ (۲)      -۱ (۳)       $-\frac{3}{2}$  (۴)

۳۷- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix} = 17$  باشند، حاصل  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$  کدام است؟

- $\frac{7}{3}$  (۱)       $\frac{10}{3}$  (۲)       $\frac{13}{3}$  (۳)       $\frac{16}{3}$  (۴)

۳۸- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} = 6$  باشند، حاصل  $\alpha^2 + \beta^2$  کدام است؟

- ۵ (۱)      ۸ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۳ (۴)



۳۹- مجموع معکوس ریشه‌های معادله  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -2 & 1 & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) -۱ (۴) -۲

۴۰- اگر  $B$  و  $A$  هر دو  $2 \times 2$  باشند و  $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه‌های ماتریس  $A + B \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۲ (۳) -۶ (۴) -۱۲

۴۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$  و  $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -6 & a_{22} \end{bmatrix}$  ،  $m$  کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$  و  $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} [-(b+1) \quad -a]$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۷

۴۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$  و  $A^T = \alpha A + \beta I$  ، دوتایی  $(\alpha, \beta)$  کدام است؟

(۱)  $(2, 1)$  (۲)  $(2, 13)$  (۳)  $(4, 11)$  (۴)  $(4, 3)$

(سراسری ریاضی ۸۴)

۴۴- ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  به صورت  $\begin{cases} 1 & i=j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$   $a_{ij}$  تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس  $A^T - 4A$  کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۶)

(۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۴۵- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس  $A^7 - A^6$  کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۳)

(۱)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۴۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس  $A^3$  کدام است؟

(۱)  $3x$  (۲)  $3y$  (۳)  $2(x^2 + y^2)$  (۴)  $3(x^2 + y^2)$

(سراسری ریاضی ۹۹)

۴۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس  $A^3$  کدام است؟

(۱)  $[30 \quad 6 \quad 64]$  (۲)  $[30 \quad 6 \quad 78]$  (۳)  $[24 \quad 8 \quad 86]$  (۴)  $[30 \quad 6 \quad 86]$

(ریاضی خارج ۹۹)

۴۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس  $A^6$  کدام است؟

(۱)  $[0 \quad 1 \quad 0]$  (۲)  $[1 \quad 0 \quad 0]$  (۳)  $[0 \quad 0 \quad 1]$  (۴)  $[1 \quad 0 \quad 1]$

۴۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $(A+I)^6 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  آن‌گاه  $a - b$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳۶

۵۰- در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ، حاصل جمع درایه‌های ماتریس  $A + A^2 + A^3 + A^4$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۵۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  ، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی  $B^T A$  کدام است؟

(۱) -۹ (۲) -۵ (۳) -۱ (۴) ۹

۵۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  باشند، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس  $A^T B$  کدام است؟

- (۱)  $-50$  (۲)  $-43$  (۳)  $18$  (۴)  $68$

۵۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، در ماتریس  $A^6$  مجموع درایه‌های ستون دوم کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $6$  (۳)  $7$  (۴)  $27$

۵۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، حاصل جمع درایه‌های سطر اول ماتریس  $A^6$  کدام است؟

- (۱)  $31$  (۲)  $37$  (۳)  $(2 \times 3^5) + 1$  (۴)  $(2 \times 3^6) + 1$

(ریاضی تارچ ۹۲)

۵۵- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس  $A^6$  کدام می‌باشد؟

- (۱) بالامتلی (۲) پایین‌متلی (۳) قطری غیرهمانی (۴) همانی

۵۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های  $A^5$  کدام است؟

- (۱)  $-3^7$  (۲)  $3^7$  (۳)  $-3^6$  (۴)  $3^6$

۵۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{2023} + A^{1402}$  کدام است؟

- (۱)  $3423$  (۲)  $3425$  (۳)  $3427$  (۴)  $3429$

۵۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  و  $A^{12} = (kA)^4$ ، مقدار  $k$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $-4$  (۲)  $-2$  (۳)  $4$  (۴)  $64$

۵۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس  $A^{1400} - A^{1401}$  کدام است؟

- (۱)  $\bar{O}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۶۰- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$  و مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{2n} - A^{2n-1}$  برابر  $7$  باشد،  $m$  کدام است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

- (۱)  $10$  (۲)  $3$  (۳)  $-4$  (۴)  $-5$

۶۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  باشد،  $A^{2021}$  کدام است؟

- (۱)  $2^{2020} I$  (۲)  $2^{1010} A$  (۳)  $2^{2020} A$  (۴)  $2^{1010} I$

۶۲- اگر  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  با تعریف  $a_{ij} = \begin{cases} j-i & j=1 \\ 1 & j=2 \end{cases}$  باشد،  $A^{1400}$  کدام است؟

- (۱)  $A^T$  (۲)  $A$  (۳)  $I$  (۴)  $-A^T$

۶۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = [1 \ -2]$  و  $C = A \times B$  باشد، مجموع درایه‌های  $C^{1402}$  کدام است؟

- (۱)  $-1402$  (۲)  $-8$  (۳)  $8$  (۴)  $1402$

۶۴- اگر  $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $a + b + c - d$  کدام است؟

- (۱)  $6$  (۲)  $7$  (۳)  $9$  (۴)  $12$

۶۵- اگر  $A$  یک ماتریس قطری باشد و داشته باشیم  $2I - 3A = \begin{bmatrix} a^2 - 2b & a + 2b \\ (b-1)^2 - 2a & a - b - 3 \end{bmatrix}$ ، ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $A^{1401}$  کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲)  $2^{-1401}$  (۳)  $1$  (۴)  $2^{1401}$

۶۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $B = I - A$  و  $C = A + I$  باشد، ماتریس  $B^T + C^T$  کدام است؟

- (۱)  $-4A$  (۲)  $-4I$  (۳)  $4I$  (۴)  $4A$

۶۷- اگر  $A^T = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$ ،  $B^T = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$  و  $BA = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ ،  $A$  و  $B$  دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، حاصل  $(2A - B)(A + 3B)$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} 64 & 46 \\ 69 & 73 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 12 & 42 \\ 63 & 135 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 4 & 34 \\ 51 & 115 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 4 & 46 \\ 69 & 73 \end{bmatrix}$

۶۸- اگر  $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ ،  $B^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$  و  $AB = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -6 & -24 \end{bmatrix}$ ،  $B$  اسکالر باشد، درایه واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس  $(B - 2A)(A + 3B)$  کدام است؟

- (۱)  $26$  (۲)  $34$  (۳)  $38$  (۴)  $76$

۶۹- برای دو ماتریس  $A$  و  $B$  داریم  $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ ،  $B^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$  و  $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، حاصل  $AB + BA$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

۷۰- سه ماتریس هم‌مرتبه  $A$ ،  $B$  و  $C$  دارای رابطه  $A = B + C$  می‌باشند، حاصل  $A^T + B^T - AB - BA$  کدام است؟

- (۱)  $-C^T$  (۲)  $\bar{O}$  (۳)  $C$  (۴)  $C^T$

۷۱- ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$  در رابطه  $(A - B)(A + B) = A^T - B^T$  صدق می‌کنند، حاصل  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 \\ -y \end{bmatrix}$  کدام است؟

- (۱)  $-3$  (۲)  $1$  (۳)  $3$  (۴)  $5$

۷۲- ماتریس‌های مربعی  $A$  و  $B$  در رابطه  $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  صدق می‌کنند، مجموع درایه‌های ماتریس  $(A^T + AB + BA + B^T)^T$  کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $-1$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{4}$

۷۳- اگر  $A$  یک ماتریس مربعی و  $2A - I = A^T$  باشد،  $A^5 - A^6$  کدام است؟

- (۱)  $29A + 12I$  (۲)  $17A + 7I$  (۳)  $12A + 5I$  (۴)  $A$

۷۴- اگر  $A^T + I = A$  باشد،  $A^{2021}$  کدام است؟

- (۱)  $-A$  (۲)  $A - I$  (۳)  $-I$  (۴)  $I - A$

۷۵- اگر  $A^T = A$  و  $A + B = I - A$  باشد، حاصل  $B^{1401}$  کدام است؟

- (۱)  $I$  (۲)  $A$  (۳)  $1401I$  (۴)  $B$

۷۶- برای دو ماتریس متمایز  $A$  و  $B$  روابط  $AB = A$  و  $BA = B$  برقرار است. ماتریس  $(BA^T)^{1403}$  برابر با کدام است؟

- (۱)  $B$  (۲)  $-I$  (۳)  $A$  (۴)  $I$

۷۷- اگر  $A - B = -kI$  باشد، حاصل  $A^T - AB + kB$  کدام است؟

- (۱)  $k^T I$  (۲)  $k^T I$  (۳)  $-k^T I$  (۴)  $-k^T I$

۷۸- اگر  $AB = B$  و  $BA = A$  باشد،  $A^T B^T$  کدام است؟

- (۱)  $I$  (۲)  $A$  (۳)  $B$  (۴)  $A^T$

۷۹- اگر  $B^T = -B$  و  $A + B = I$  باشد،  $A^T B$  کدام است؟

- (۱)  $-4B$  (۲)  $-2B$  (۳)  $2B$  (۴)  $4B$



۸۰- اگر  $AB^T = A$  و  $BA = B$  باشد، ماتریس  $B^T$  کدام است؟

- (۱)  $I$  (۲)  $A$  (۳)  $B$  (۴)  $AB$

۸۱- اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند،  $B^T = B + I$  و  $B - A = I$  باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱)  $AB = BA$  (۲)  $BA = I$  (۳)  $A^T B = A$  (۴)  $B^T A = I$

۸۲- اگر  $BA = 2A$  و  $AB = B$  باشد،  $2A^T - 3A^T$  کدام است؟

- (۱)  $-A$  (۲)  $\bar{O}$  (۳)  $A$  (۴)  $2A$

۸۳-  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی و  $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  است، مجموع درایه‌های ماتریس  $A(BA)^T B$  کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲) صفر (۳)  $1$  (۴)  $2$

۸۴- اگر  $AB - 2BA = \bar{O}$  و  $B^T A = kAB^T$  باشند،  $k$  کدام است؟

- (۱)  $8$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $-\frac{1}{8}$  (۴)  $-8$

۸۵- اگر  $A^T = -\frac{3}{4}A$  و  $2A + 3B = \bar{O}$  باشد، حاصل  $A(A+B)(2A-B)(A-B)$  کدام است؟

- (۱)  $5A$  (۲)  $-5A$  (۳)  $-5I$  (۴)  $5I$

### آزمونک

۸۶- اگر درایه‌های سطر ۴ ماتریس  $A$ ،  $0, 5, 2, -1$  و درایه‌های ستون سوم ماتریس  $B$ ،  $1, 2, 5, 0$  باشند، درایه سطر چهارم و ستون سوم ماتریس  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $2$  (۲)  $5$  (۳)  $10$  (۴)  $20$

۸۷- حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ -x & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ -x \end{bmatrix} = 0$  کدام است؟

- (۱)  $-14$  (۲)  $-9$  (۳)  $-5$  (۴)  $-1$

۸۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه‌های ماتریس  $A^6$  کدام است؟

- (۱)  $3^5$  (۲)  $3^6$  (۳)  $3^7$  (۴)  $3^8$

۸۹- اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و  $BA - 3AB = \bar{O}$ ، مقدار  $m$  از رابطه  $mAB^T = B^T A$  چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{27}$  (۲)  $-27$  (۳)  $-\frac{1}{27}$  (۴)  $27$

۹۰- اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند، به طوری که  $A^T = A$  و  $A + B = I$  باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱)  $AB = BA$  (۲)  $AB = I$  (۳)  $AB^T = I$  (۴)  $A = B^T$

### سری

۹۱- حاصل  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

۹۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل  $A^{1400} - A^{1399}$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (۴)  $\bar{O}$

۹۳- در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  حاصل  $A^n - A^{n-1}$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۹۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  و  $BA^n = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$ ، آن گاه:

$n = 8$  (۴)

$n = 9$  (۳)

$n = 10$  (۲)

$n = 11$  (۱)

۹۵- اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد به طوری که  $A^2 - A = \bar{O}$ ، آن گاه  $(2A - I)^{1399}$  کدام است؟

$2A - I$  (۴)

$A$  (۳)

$I$  (۲)

$\bar{O}$  (۱)



۱- **گزینه ۳** ماتریس A از مرتبه  $2 \times 3$  است؛ یعنی دو سطر، سه ستون و ۶ درایه دارد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

هر سطر ماتریس A شامل سه درایه و هر ستون A شامل دو درایه است. بنابراین گزاره‌های (ب)، (ت) و (ث) درست هستند.

۲- **گزینه ۴** ماتریس  $2 \times 2$  در حالت کلی به شکل  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  است.

سؤال از ما سه درایه از چهار درایه ماتریس را خواسته! برای به دست آوردن هر درایه نیز رابطه‌ای را به ما داده! ما هم درایه‌هایی را که خواسته به دست می‌آوریم و تحویلش می‌دهیم.

در  $a_{12}$  (درایه واقع در سطر اول و ستون دوم A)،  $i=1$  و  $j=2$  است. با توجه به این که  $i < j$  است، درایه  $a_{12}$  را از رابطه  $j-i$  به دست می‌آوریم. بنابراین:  $a_{12} = 1+2 = 3$

در  $a_{21}$  (درایه واقع در سطر دوم و ستون اول A)،  $i=2$  و  $j=1$  است. از آنجایی که  $i > j$  است، درایه  $a_{21}$  از رابطه  $j-i$  به دست می‌آید. پس:  $a_{21} = 2-1 = 1$

در  $a_{22}$  (درایه واقع در سطر دوم و ستون دوم A)،  $i=2$  و  $j=2$  است. چون  $i=j$  است، درایه  $a_{22}$  را به کمک رابطه  $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$  مشخص می‌کنیم. بنابراین:  $a_{22} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -1$

در نهایت باید حاصل  $a_{21} + a_{12} - a_{22}$  را به دست بیاوریم که برابر با  $1+3+1=5$  است.

۳- **گزینه ۲** صورت کلی یک ماتریس  $3 \times 3$  به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

۱ هر جا شماره سطر و ستون درایه برابر بودند کافی است شماره سطر را با ۲ جمع کنیم و به جای آن درایه بنویسیم. (درایه‌های  $a_{11}$ ،  $a_{22}$  و  $a_{33}$  این‌طور هستند.)

۲ هر جا شماره سطر از شماره ستون بزرگ‌تر بود، شماره سطر را منهای شماره ستون می‌کنیم و به جای آن درایه می‌نویسیم. (درایه‌های  $a_{21}$ ،  $a_{31}$  و  $a_{32}$  این ویژگی را دارند.)

۳ هر جا شماره سطر از شماره ستون کوچک‌تر بود، دو برابر شماره ستون را منهای شماره سطر می‌کنیم و به جای آن درایه می‌نویسیم. ( $a_{12}$ ،  $a_{13}$  و  $a_{23}$  چنین خصوصیتی دارند.)

$$A = \begin{bmatrix} 1+2 & 2 \times 2 - 1 & 2 \times 3 - 1 \\ 2-1 & 2+2 & 2 \times 3 - 2 \\ 3-1 & 3-2 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

۴- **گزینه ۱** به تعریف درایه‌های ماتریس A **دقت کنید!** می‌گوید برای به دست آوردن هر درایه از ماتریس A باید شماره سطر آن درایه را در  $\alpha$  و شماره ستون آن را در  $\beta$  ضرب کنید و حاصل این دو ضرب را با هم جمع کنید.

حواسمان هست! که A یک ماتریس سطری است (یک سطر و سه ستون دارد)؛ بنابراین درایه ستون دوم A یعنی درایه واقع در سطر اول و ستون دوم A برابر است با:  $a_{12} = (\alpha \times 1) + (\beta \times 2) = \alpha + 2\beta$

هر درایه ماتریس B از ضرب شماره ستون آن درایه در  $2\alpha$  منهای ضرب

شماره سطر درایه در  $3\beta$  به دست می‌آید.

ماتریس B یک ماتریس ستونی است (سه سطر و یک ستون دارد)؛ بنابراین درایه سطر سوم B یعنی درایه واقع در سطر سوم و ستون اول B برابر می‌شود با:  $b_{31} = (2\alpha \times 1) - (3\beta \times 2) = 2\alpha - 9\beta$

سؤال از ما  $a_{12} + b_{31}$  را خواسته که برابر است با:

$$a_{12} + b_{31} = (\alpha + 2\beta) + (2\alpha - 9\beta) = 3\alpha - 7\beta$$

۵- **گزینه ۱**  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  را می‌شناسیم.

**دقت کنید!** همه ماتریس‌های داده شده  $2 \times 2$  هستند؛ زیرا فقط ماتریس‌های هم‌مرتبه قابلیت جمع و تفریق دارند. با توجه به صورت سؤال، داریم:

$$3X = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی} = \frac{-1}{9} \\ \text{حاصل ضرب درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی} = 0 \end{cases}$$

اختلاف حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی و حاصل ضرب درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی X، برابر  $\frac{1}{9}$  است.

۶- **گزینه ۱** نیازی نیست هر دو ماتریس را بنویسیم و با هم جمع کنیم! بلکه کافی است سطر دوم هر دو ماتریس را به دست آوریم و با هم جمع کنیم.

$$a_{21} = 2-1^2 = 1, a_{22} = 2-2^2 = -2, a_{23} = 2-3^2 = -7,$$

$$b_{21} = 6-(2 \times 1) = 4, b_{22} = 6-(2 \times 2) = 2,$$

$$b_{23} = 6-(2 \times 3) = 0$$

بنابراین:  $A+B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \end{bmatrix}$  مجموع درایه‌های سطر دوم A+B برابر با  $5+0-7 = -2$  است.

۷- **گزینه ۳**  $C = A - 2B$  می‌گوید هر درایه A منهای دو برابر درایه نظیرش در B، درایه نظیر در C را می‌سازد. بنابراین:

$$c_{11} = a_{11} - 2b_{11} = -2 - 2(1) = -4$$

$$c_{22} = a_{22} - 2b_{22} = m - 2(m-2) = -m + 4$$

با توجه به این که  $c_{11} = -c_{22} + 1$  است، پس:

$$-4 = -(-m+4) + 1 \Rightarrow m = -1$$

حالا باید سراغ  $c_{23} = -3c_{13}$  برویم.

$$c_{23} = a_{23} - 2b_{23} = (n-1) - 2(n+1) = -n - 3$$

$$c_{13} = a_{13} - 2b_{13} = 0 - 2(m) = -2m = -2(-1) = 2$$

از تساوی  $-n-3 = -6$  نتیجه می‌شود  $n = 3$ .

خواسته سؤال  $n-m$  بود که برابر با  $4 = 3 - (-1)$  است.

۸- **گزینه ۳** برای این که دو ماتریس A و B مساوی باشند باید: **۱** دو ماتریس هم‌مرتبه باشند.

با توجه به این که ماتریس B یک ماتریس  $3 \times 2$  است پس A نیز  $3 \times 2$  است؛ یعنی  $m = 3$  و  $n = 2$  است.

$$4A - A = \begin{bmatrix} 2-m & m-3 \\ n+2 & 3-n \end{bmatrix} - 2I$$

$$\Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 2-m & m-3 \\ n+2 & 3-n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} -m & m-3 \\ n+2 & 1-n \end{bmatrix}$$

از آنجا که ماتریس  $A$  قطری است، پس  $3A$  نیز قطری است و درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی باید صفر باشند.

$$\begin{cases} m-3=0 \Rightarrow m=3 \\ n+2=0 \Rightarrow n=-2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$3A = \begin{bmatrix} -m & m-3 \\ n+2 & 1-n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالا که  $A$  را پیدا کردیم،  $A - I$  به راحتی به دست می‌آید.

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**۱۳- گزینه ۳** ماتریس اسکالر، ماتریسی است قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

ماتریس اسکالر  $3 \times 3$  به صورت  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$  است که حاصل ضرب درایه‌های آن  $a^3$  است؛ بنابراین داریم:

$$a^3 = \frac{-1}{8} \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

ماتریس مورد نظر به شکل  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  و مجموع درایه‌های ستون سوم آن برابر  $\frac{-1}{2}$  است.

**۱۴- گزینه ۳** دو ماتریس  $A$  و  $B$  مساوی‌اند، پس باید درایه‌های نظیرهم‌نظیر دو ماتریس برابر باشند.

$$\begin{cases} m-2=1 \Rightarrow m=3 \\ p+n=-7 \\ p-n=-11 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} p=-9 \\ n=2 \end{cases}$$

حالا که تکلیف  $m$ ،  $n$  و  $p$  روشن شد باید براساس تعریف داده‌شده، ماتریس  $C$  را بنویسیم. درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $C$  از رابطه  $\left[\frac{i+p}{m+n}\right]$ ، درایه‌های بالای قطر اصلی از رابطه  $\left[\frac{m-j}{2n}\right]$  و درایه‌های پایین قطر اصلی از رابطه  $\left[\frac{i+j}{3m-n}\right]$  به دست می‌آیند.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{1+3}{3+2}\right] & \left[\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{0}{3}\right] \\ \left[\frac{2}{3}\right] & \left[\frac{-7}{5}\right] & \left[\frac{0}{3}\right] \\ \left[\frac{3}{3}\right] & \left[\frac{5}{3}\right] & \left[\frac{-6}{5}\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $C$  با هم برابرند و تمام درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی  $C$ ، صفرند؛ پس ماتریس  $C$ ، اسکالر است.

**۱** درایه‌های متناظر در دو ماتریس  $A$  و  $B$  برابر باشند.

$$\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

از آنجا که  $A = B$  است، پس ماتریس  $A$  به صورت  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  است و مجموع درایه‌های  $A$  برابر با  $2+3+0+(-1)+5+3=12$  است.

**۹- گزینه ۱** باید  $B$  را با درایه‌هایش بنویسیم؛ آن هم به کمک تعریفی که داده!

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$A = B$  است، پس:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & 1 & x \\ n-1 & 2 & m-p \\ k+2 & 3 & y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+1=0 \Rightarrow m=-1 \\ n-1=0 \Rightarrow n=1 \\ k+2=0 \Rightarrow k=-2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ m-p=4 \xrightarrow{m=-1} p=-5 \\ y=6 \end{cases}$$

بنابراین:  $x - y - k + p + n - m = 2 - 6 + 2 - 5 + 1 + 1 = -5$

**۱۰- گزینه ۱** باید  $2A - 3B$  را به دست آوریم و ببینیم چندتا از گزاره‌ها در مورد  $2A - 3B$  درست است؟!

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \\ -2 & -8 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \\ -2 & -8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$2A - 3B = \bar{O}$  شد. این ماتریس علاوه بر این که ماتریس صفر است، قطری است زیرا تمام درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی صفرند. اسکالر هم هست؛ زیرا قطری است و درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند.

**نقد کنید!** ماتریس مربعی صفر  $(\bar{O}_{n \times n})$ ، هم قطری است هم اسکالر. بنابراین هر سه گزاره (الف)، (ب) و (پ) در مورد  $2A - 3B$  درست هستند.

**۱۱- گزینه ۲** ماتریس قطری از مرتبه ۲ به شکل  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$  است؛

یعنی درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی ماتریس  $A$  باید صفر باشند تا ماتریس  $A$  قطری باشد.

$$A = \begin{bmatrix} mn & 3-n \\ m+2 & m+n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mn & 0 \\ 0 & m+n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3-n=0 \Rightarrow n=3 \\ m+2=0 \Rightarrow m=-2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی  $A$  برابر با  $-6+1=-5$  است.

**۱۲- گزینه ۳** جمع و تفریق دو ماتریس زمانی امکان‌پذیر است که دو ماتریس هم‌مرتبه باشند؛ بنابراین ماتریس‌های  $A$  و  $I$ ،  $2 \times 2$  هستند.

در تساوی ماتریسی داده‌شده  $4A$  را به سمت چپ تساوی و  $2I$  را به سمت راست تساوی منتقل می‌کنیم.

رسیدیم به ماتریس B که باید براساس تعریف داده شده، درایه‌هایش را مشخص کنیم.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

با جای‌گذاری ماتریس‌های A، B و I در رابطه  $A + I = B + C$ ، ماتریس C مشخص می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} + C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} + C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} = C$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

مجموع درایه‌های C برابر با -5 است.

۱۸- گزینه ۴ **حواصن هست!** که حاصل  $[-1 \ 2]_{1 \times 2}$   $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2 \times 1}$  یک ماتریس  $2 \times 2$  است.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & 2x \\ -y & 2y \end{bmatrix}$$

به کمک تساوی داده شده در سؤال، مقدار X و Y و همچنین m و n به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} -2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & 2x \\ -y & 2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = -2 \Rightarrow x = 2 \\ -y = 1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

از ما حاصل  $m - n$  خواسته شده که برابر است با:

$$m - n = 2x - 2y = 2(2) - 2(-1) = 4 + 2 = 6$$


۱۹- گزینه ۱۹ باید A و B را ضرب کنیم تا کوچک‌ترین درایه مشخص شود!

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

کوچک‌ترین درایه ماتریس AB، -2 است.

۲۰- گزینه ۲۰ ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که درایه‌های

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

طرفین قطر اصلی آن همگی صفرند؛ این شکلی 

دو ماتریس را در هم ضرب می‌کنیم و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم تا X و Y به دست آیند.

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 1 + 4y & -2x + 0 + 4 \\ 4 + 3 + y & -4 + 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 4 + 3 + y = 0 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$$

پس:

۱۵- گزینه ۳ اگر  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  باشد، داریم:  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

در ماتریس اسکالر، درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی، صفرند. بنابراین:

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & m \\ 2+n & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m & -1-m \\ -n-1 & -n \end{bmatrix}$$

A - B اسکالر است، پس:

$$\begin{cases} -m = -n \Rightarrow m = n \\ -n - 1 = -1 - m = 0 \Rightarrow n = m = -1 \end{cases}$$

حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی A - B برابر با 1 است.

۱۶- گزینه ۲ ماتریس B،  $3 \times 3$  است. با توجه به خواص جمع‌پذیری و تساوی ماتریس‌ها، ماتریس‌های A و I هم  $3 \times 3$  هستند. ماتریس B اسکالر

$$\text{و } 3 \times 3 \text{ است، پس به صورت } \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \text{ می‌باشد.}$$

با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 3m & 4m \\ 3m & 4m & 5m \\ 4m & 5m & 6m \end{bmatrix}$$

از آن‌جا که  $3B - A = I$  داده شده، پس:

$$\begin{bmatrix} 3k & 0 & 0 \\ 0 & 3k & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2m & 3m & 4m \\ 3m & 4m & 5m \\ 4m & 5m & 6m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3k - 2m & -3m & -4m \\ -3m & 3k - 4m & -5m \\ -4m & -5m & 3k - 6m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از تساوی ماتریسی بالا نتیجه می‌گیریم درایه‌های  $-3m$ ،  $-4m$  و  $-5m$  برابر صفرند، بنابراین  $m = 0$  است. حالا که  $m = 0$  شد و هر کدام از درایه‌های  $3k - 2m$ ،  $3k - 4m$ ،  $3k - 6m$  باید برابر 1 باشند، پس  $3k = 1$  و  $k = \frac{1}{3}$  است.

مجموع درایه‌های سطر سوم  $A + B$  برابر  $k = \frac{1}{3}$  است.

۱۷- گزینه ۲ می‌دانیم زمانی ماتریس‌ها با هم جمع می‌شوند که هم‌مرتبه باشند. با توجه به این‌که B یک ماتریس  $3 \times 3$  است، نتیجه می‌گیریم ماتریس‌های A، C و I نیز باید  $3 \times 3$  باشند.

سؤال گفته ماتریس A یک ماتریس اسکالر است. می‌دانیم ماتریس اسکالر

$$3 \times 3 \text{ به شکل } \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \text{ است. حالا که مجموع درایه‌های ماتریس}$$

اسکالر A برابر 12 شده، پس  $3k = 12$  یعنی  $k = 4$  است. بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ است.}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ هم که معرف حضور شما هست!}$$



۲۱- گزینه ۴

همین اول کار باید تکلیف  $A \times B$  را روشن کنیم!

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & 2a-8 \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

برای این که  $A \times B$  قطری باشد باید درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی صفر باشند، پس:

$$\begin{cases} b-3=0 \Rightarrow b=3 \\ 2a-8=0 \Rightarrow a=4 \end{cases}$$

حالا که  $A$  و  $B$  را داریم،  $B \times A$  را می‌یابیم.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی  $B \times A$  برابر است با:

$$6+18=24$$

**مراقب باشید!** اگر  $A \times B$  قطری باشد، دلیلی وجود ندارد که  $B \times A$  هم

قطری باشد.

۲۲- گزینه ۲

$BA$  قطری است؛ یعنی باید درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی

آن صفر باشد.

$$BA = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-4 & 8-2x \\ 3-y & 2y-6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8-2x=0 \Rightarrow x=4 \\ 3-y=0 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -3x & x-y-1 \\ y^2-x^2+x+3 & -4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

چون درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی صفرند و درایه‌های روی قطر اصلی برابرند، واضح و مبرهن است که ماتریس بالا، اسکالر است.

۲۳- گزینه ۱

با توجه به تعریفی که سؤال از ماتریس‌های  $A$  و  $B$  ارائه

داده، می‌توانیم این دو ماتریس را با درایه‌های مشخص کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & m \\ n & -5 \\ n & n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & m & m \\ n & -3 & m \end{bmatrix}$$

حالا باید  $B \times A$  را به دست آوریم.

$$B \times A = \begin{bmatrix} -2 & m & m \\ n & -3 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & m \\ n & -5 \\ n & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2mn & mn-7m \\ mn-5n & 2mn+15 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس  $B \times A$  قطری است، درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی آن باید صفر باشند.

$$\begin{cases} mn-7m=0 \\ mn-5n=0 \end{cases}$$

از  $mn-7m=mn-5n$  درمی‌یابیم  $7m=5n$  است و چون  $m$  و  $n$  طبیعی و یک‌رقمی‌اند، پس  $n=7$  و  $m=5$  است. با قراردادن مقادیر  $m$

$$\text{و } n \text{ در ماتریس } \begin{bmatrix} m-3 & \frac{m}{n} \\ \frac{-n}{m}+1 & m-n \end{bmatrix} \text{ به ماتریس } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ می‌رسیم}$$

که یک ماتریس غیرقطری است.

۲۴- گزینه ۲

$A$  و  $B$  را داریم؛  $AB$  و  $BA$  را پیدا می‌کنیم و در رابطه

داده‌شده قرار می‌دهیم تا  $m$  و  $n$  مشخص شوند.

$$AB - BA = \bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -1 \\ -1 & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m & -1 \\ -1 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -m & mn \\ mn & -n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -n & m^2 \\ n^2 & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n-m & mn-m^2 \\ mn-n^2 & -(n-m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n-m & m(n-m) \\ -n(n-m) & -(n-m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (n-m) \begin{bmatrix} 1 & m \\ -n & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow n-m=0 \Rightarrow n=m \Rightarrow m^2-n^2=0$$

۲۵- گزینه ۴ فرض کنید ماتریس  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد، با توجه

$$\text{به شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس داریم: } A_{m \times n} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

بنابراین ماتریس  $A$  یک ماتریس  $2 \times 2$  به شکل  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  است. با توجه به معادلات ماتریسی داده‌شده داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+3b=2 \\ -c+3d=-4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a-2b=-7 \\ 5c-2d=7 \end{cases} \quad (2)$$

دو برابر معادلات (۱) را با معادلات (۲) جمع می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} 2(-a+3b) + (5a-2b) = 2(2) + (-7) \Rightarrow 3a+4b=-3 \\ 2(-c+3d) + (5c-2d) = 2(-4) + 7 \Rightarrow 3c+4d=-1 \end{cases}$$

اگر به معادلات بالا دقت کنید درمی‌یابید که به صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ است.}$$

یعنی حاصل  $A \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  برابر با  $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$  است.

۲۶- گزینه ۴ فرض می‌کنیم  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  باشد، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & a \\ 2c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=4 \end{cases}$$

در ماتریس  $A$  باید  $a=0$  و  $c=4$  باشد و برای این که رابطه داده‌شده برقرار باشد به مقدار  $b$  و  $d$  بستگی ندارد، یعنی به ازای هر عدد حقیقی  $b$  و  $d$ ،  $a=0$  و  $c=4$  معادله ماتریسی داده‌شده برقرار است، پس بی‌شمار ماتریس  $A$  وجود دارد که در رابطه داده‌شده، صدق کند.

۲۷- گزینه ۲ اول باید  $A$  و  $B$  را مشخص کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^2-1) & (2-1) \\ (2-1) & (2^2-1) \\ (3-1) & (3-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^2+1) & (1-2+2) & (1-3+2) \\ (2+1) & (2^2+1) & (2-3+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix} \text{ بنابراین:}$$

۲۸- گزینه ۱ هر چند که کتاب فراموش کرده!!! ماتریس مثلثی را معرفی

کند؛ اما ما معرفی می‌کنیم!

ماتریسی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس پایین‌مثلثی و ماتریسی که درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر باشند را بالامثلثی گویند. یادتان بماند که: ۱ ضرب دو ماتریس بالامثلثی، بالامثلثی و ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی، پایین‌مثلثی است.

۲ عناصر روی قطر اصلی حاصل‌ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی (یا بالامثلثی) برابر با حاصل‌ضرب نظریه‌نظیر عناصر روی قطر اصلی دو ماتریس

است؛ یعنی:

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ \circ & b & f \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ \circ & b' & f' \\ \circ & \circ & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & ? & ? \\ \circ & bb' & ? \\ \circ & \circ & cc' \end{bmatrix}$$

حالا که می‌دانیم ماتریس مثلثی چه شکلیه! سراغ حل سؤال می‌رویم. سؤال از ما عناصر روی قطر اصلی ضرب دو ماتریس پایین‌مثلثی را خواسته!

$$BA = \begin{bmatrix} 2b & \circ & \circ \\ 5 & 4 & \circ \\ 5 & 6 & 4c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \circ & \circ \\ 7 & 2a & \circ \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6b & \circ & \circ \\ ? & 8a & \circ \\ ? & ? & -4c \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های روی قطر اصلی BA برابر است با:

$$6b + 8a - 4c = 2(3b + 4a - 2c) = 2 \times 7 = 14$$

۲۹- گزینه ۲ اگر  $A \times B = C$  باشد، درایه واقع در سطر ۳م و ستون ۳م ماتریس C از ضرب سطر ۳م ماتریس A در ستون ۳م ماتریس B به دست می‌آید، بنابراین درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس C از ضرب سطر دوم A در ستون سوم B به دست می‌آید.

$$C_{23} = [5 \quad 2] \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = (5 \times 4) + (2 \times 1) = 22$$

۳۰- گزینه ۲ راهی نداریم جز این‌که ضرب سه ماتریس را به دست

آوریم.

$$\begin{bmatrix} \circ & \circ & 1 \\ 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

حالا که ضرب دو ماتریس اول را به دست آوردیم، حاصل را در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم تا ماتریس A مشخص شود.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ \\ 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

مجموع عناصر (درایه‌های) روی قطر اصلی ماتریس A برابر با  $6 + 7 + 5 = 21$  است.

۳۱- گزینه ۲ برای به دست آوردن سطر ۳م و ستون ۳م ماتریس BAC، کافی است به ترتیب سطر ۳م ماتریس B، ماتریس A و ستون ۳م ماتریس C را در هم ضرب کنیم. بنابراین:

$$BAC = [4 \quad 5 \quad 6] \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ \circ & 4 & 1 \\ 5 & \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \circ \\ -2 \end{bmatrix} = [26 \quad 32 \quad 13] \begin{bmatrix} 1 \\ \circ \\ -2 \end{bmatrix} = 26 + 0 - 26 = 0$$

۳۲- گزینه ۱ یک راه این است که دو ماتریس اول را ضرب کنیم و سپس

حاصل را در ماتریس سوم ضرب کنیم تا سطر سوم ماتریس A مشخص شود. اما ساده‌تر این است که سطر سوم ماتریس اول را در دو ماتریس بعدی ضرب کنیم تا سطر سوم ماتریس A (مستقیم) به دست آید.

$$A = \begin{bmatrix} \circ & 1 & -1 \\ 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} \circ & 1 & -1 \\ 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A برابر با  $7 + 1 - 5 = 3$  است.

۳۳- گزینه ۱ ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی  $AB = BA$  است.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & \beta - 2 \\ 3 - \alpha & 6 - \beta \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3\beta - \alpha & \alpha - \beta \end{bmatrix}$$

از برابری AB و BA داریم:

$$\begin{bmatrix} \alpha - 1 & \beta - 2 \\ 3 - \alpha & 6 - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3\beta - \alpha & \alpha - \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 5 \Rightarrow \alpha = 6 \\ \beta - 2 = -1 \Rightarrow \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 7$$

دقت کنید! که به ازای  $\alpha = 6$  و  $\beta = 1$  و  $3 - \alpha = 3\beta - \alpha$  و  $6 - \beta = \alpha - \beta$  برقرار است.

۳۴- گزینه ۱ بهتر نیست اول از شرّ زوایای مختلف خلاص شویم!؟

از مثلثات به یاد داریم:

$$\begin{cases} \sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ \\ \cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \\ \cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ \end{cases}$$

همه زوایا را برحسب  $15^\circ$  می‌نویسیم و حاصل را حساب می‌کنیم.

$$\cos 15^\circ \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{bmatrix} + \sin 15^\circ \begin{bmatrix} \sin 15^\circ & -\cos 15^\circ \\ \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 15^\circ & \cos 15^\circ \sin 15^\circ \\ -\cos 15^\circ \sin 15^\circ & \cos^2 15^\circ \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \sin^2 15^\circ & -\cos 15^\circ \sin 15^\circ \\ \cos 15^\circ \sin 15^\circ & \sin^2 15^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1 \quad \text{دقت کنید!}$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{6} + \frac{6}{2} = \frac{2}{6} + \frac{18}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

**دقت کنید!** به کمک روابط بین ریشه‌های معادله  $x^2 - 8x + 12 = 0$  هم می‌شد پاسخ سؤال را پیدا کرد.

**۳۸- گزینه ۲** حاصل ضرب دو ماتریس اول را به دست می‌آوریم و در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 6$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+1 & x^2+1 & x^2+1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$$

$$\Rightarrow 2(x+1) + 1(x^2+1) + 0(x^2+1) = 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 6 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

بنابراین  $\alpha^2 + \beta^2$  برابر با  $10 = (-3)^2 + 1^2$  است.

**روش دوم:** از آن‌جا که  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 + 2x - 3 = 0$  هستند و  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$  است، داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{-2}{1} = -2, \quad \alpha\beta = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2(-3) = 4 + 6 = 10$$

**دقت کنید!** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آن‌گاه:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

**۳۹- گزینه ۱** ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -2 & 1 & x+1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$  را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -2 & 1 & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3-2x \\ -9-x \end{bmatrix}$$

حالا باید  $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2x \end{bmatrix}$  را در ماتریس بالا ضرب کنیم و مساوی صفر قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -2 & 1 & x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3-2x \\ -9-x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -3 + (-9 - 6x) + (18x + 2x^2) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 12x - 12 = 0$$

**۳۵- گزینه ۱** ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$  را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2x - 1 \\ 4x + 0 + 2 \\ x + 4x + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ 4x+2 \\ 5x \end{bmatrix}$$

حالا باید حاصل ضرب ماتریس  $\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}$  را در ماتریس بالا به دست آوریم و برابر صفر قرار دهیم تا  $x$  پیدا شود.

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ 4x+2 \\ 5x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1) + 2x(4x+2) - 1(5x) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 8x^2 + 4x - 5x = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(9x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{9} \end{cases}$$

سؤال، عدد غیر صفر  $x$  را خواسته، پس جواب سؤال  $x = \frac{2}{9}$  است.

**۳۶- گزینه ۱** اول حاصل ضرب دو ماتریس  $\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2x-1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$$

حالا باید حاصل بالا را در  $\begin{bmatrix} -2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$  ضرب کنیم و برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix} x+1 & 2x-1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 2 + 2x^2 - x - 1 = 0$$

پس جمع ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x - 3 = 0$  برابر با  $\frac{3}{2} = \frac{-(-3)}{2}$  است.

**تذکر:** جمع ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر با  $-\frac{b}{a}$  است.

**۳۷- گزینه ۲** ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس اول را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & x \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 3-x & 2x+2 \end{bmatrix}$$

حالا حاصل ضرب دو ماتریس اول را در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم و مساوی با ۱۷ قرار می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} x+1 & 3-x & 2x+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 17$$

$$\Rightarrow 3(x+1) + x(3-x) + 1(2x+2) = 17$$

$$\Rightarrow -x^2 + 8x + 5 = 17 \Rightarrow -x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

$\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله فوق هستند.

**روش دوم** شاید اسم مرحوم همیلتن و شادروان کیلی به گوشتان خورده باشد! نخستین بار مفهوم ماتریس در کارهای این دو نفر طرح شده. رابطه‌ای به نام کیلی- همیلتن نام‌گذاری شده که در حل این سؤال به ما کمک می‌کند.

رابطه کیلی- همیلتن می‌گوید: «هر ماتریس  $2 \times 2$  به شکل  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

در رابطه  $A^T - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$  صدق می‌کند.»

به کمک رابطه کیلی- همیلتن داریم:  $A^T - (-2+4)A + (-8-5)I = \bar{O}$

$\Rightarrow A^T = 2A + 13I \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$

**۴۴- گزینه ۲** اول ماتریس را مشخص می‌کنیم.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

حالا  $A^T$  و  $4A$  را به دست می‌آوریم و مجموع درایه‌های  $A^T - 4A$  را به عنوان جواب اعلام می‌کنیم.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -7 & -6 \\ -6 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

بنابراین:  $A^T - 4A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -7 & -6 \\ -6 & -6 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -14 & -14 \\ -14 & -11 & -14 \\ -14 & -14 & -7 \end{bmatrix}$

مجموع درایه‌های ماتریس  $A^T - 4A$  برابر با ۱۵ است.

**۴۵- گزینه ۲** ابتدا  $A^T$  را پیدا می‌کنیم تا بعد ببینیم چه اتفاقی می‌افتد ...

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I$$

حالا که  $A^T$  پیدا شد، می‌توانیم  $A^T, A^4, A^5$  و ... را پیدا کنیم.

$A^T = A^T \times A = IA = A \quad A^4 = A^T \times A = A \times A = A^2 = I$

$A^5 = A^4 \times A = IA = A \quad A^6 = A^5 \times A = A \times A = A^2 = I$

$A^7 = A^6 \times A = IA = A$

بنابراین:  $A^7 - A^4 = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

**روش دوم** بد نیست بدانید که اگر  $A^T = I$  باشد به ماتریس  $A$  متناوب می‌گویند؛ توان‌های زوج ماتریس  $A$  برابر  $I$  و توان‌های فرد ماتریس  $A$  برابر با خود ماتریس  $A$  می‌شوند.

در این سؤال  $A^T = I$  شده، پس  $A^7 = A$  و  $A^4 = I$  است و ...

**۴۶- گزینه ۱** با توجه به دو نکته زیر به سؤال پاسخ می‌دهیم.

۱) اگر  $C \times D = E$  باشد، درایه واقع در سطر  $\alpha$ م و ستون  $\beta$ م ماتریس  $E$  از ضرب سطر  $\alpha$ م ماتریس  $C$  در ستون  $\beta$ م ماتریس  $D$  به دست می‌آید.

۲) می‌دانیم  $A^3 = A^2 \times A$

بنابراین درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس  $A^3$  از ضرب سطر دوم ماتریس  $A^2$  در ستون سوم ماتریس  $A$  به دست می‌آید.

به درایه‌های سطر دوم ماتریس  $A^3$  نیاز داریم که از ضرب سطر دوم  $A$  در ماتریس  $A$  به دست می‌آید.

ما به دنبال مجموع معکوس ریشه‌های معادله  $x^2 + 6x - 6 = 0$  هستیم. فرض کنید  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله فوق باشند، حاصل  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$  جواب سؤال است.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-6}{-6} = 1$$

**دقت کنید!** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند،

آن‌گاه:  $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$  = مجموع ریشه‌ها

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$  = حاصل ضرب ریشه‌ها

**۴۰- گزینه ۲**  $B$  را از سمت چپ فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$B \left( \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} A \right) = B \left( \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \right) A$$

با جمع دو ماتریس بین  $A$  و  $B$ ، نتیجه جالبی به دست می‌آید.

$$B \left( \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right) A = B(-3I)A = -3(BI)A = -3BA$$

$$= -3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس فوق برابر با  $-9 - 6 - 3 + 0 = -18$  است.

**۴۱- گزینه ۱** می‌دانیم  $A^T = A \times A$ ، پس:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-m & -2 \\ 2m & 1-m \end{bmatrix}$$

بنابراین باید:

$$\begin{bmatrix} 1-m & -2 \\ 2m & 1-m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -6 & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow 2m = -6 \Rightarrow m = -3$$

**۴۲- گزینه ۲** راهی نداریم جز این که  $A$  را به توان ۲ برسانیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+a & 2a+ab \\ 2+b & a+b^2 \end{bmatrix}$$

سؤال،  $A^2$  را به ما داده، پس می‌توانیم  $a$  و  $b$  را کشف کنیم.

$$\begin{bmatrix} 4+a & 2a+ab \\ 2+b & a+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4+a=3 \Rightarrow a=-1 \\ 2+b=5 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} -(b+1) & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 \\ 7 \end{bmatrix} = 7$$

**۴۳- گزینه ۲** بدون فوت وقت!  $A^T$  را به دست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  را از قبل می‌شناسیم. (بله!  $I$  ماتریس همانی است.)

$$A^T = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - 2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

کاملاً واضح است که  $\alpha = 2$  است. با قراردادن  $\alpha = 2$  در معادله  $\beta - 2\alpha = 9$  داریم:  $\beta - 4 = 9 \Rightarrow \beta = 13$

بنابراین دوتایی  $(\alpha, \beta)$ ،  $(2, 13)$  است.

۵۰- گزینه ۲ به نظر می آید راهی به جز به توان رساندن نداریم!

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

از به دست آوردن  $A^4$  راحت شدیم!

$$A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{O} + \bar{O}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس  $A + A^2 + A^3 + A^4$  برابر با  $1+2+1=4$  است.

**روش دوم** توان سوم به بعد ماتریس‌های  $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$  توان سوم به بعد ماتریس‌های

صفر است. (قدیما می‌گفتند! این ماتریس‌ها پوچ‌توان از مرتبه ۳ هستند؛ یعنی  $A^3 = \bar{O} \Rightarrow A^{n \geq 3} = \bar{O}$ ).

$A^3 = \bar{O}$  و  $A^4 = \bar{O}$  است؛ بنابراین فقط  $A + A^2$  را به دست می‌آوریم.

$$A + A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس  $A + A^2 + A^3 + A^4$  برابر ۴ است.

۵۱- گزینه ۲ دو نکته را با هم مرور می‌کنیم و سپس به سؤال پاسخ می‌دهیم.

۱) اگر  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  باشد (یعنی  $A$  یک ماتریس قطری باشد)،

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix} \text{ است.}$$

۲) اگر  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ d' & b' & 0 \\ e' & f' & c' \end{bmatrix}$  باشند،  $AB$  به

$$\begin{bmatrix} aa' & 0 & 0 \\ \bigcirc & bb' & 0 \\ \bigcirc & \bigcirc & cc' \end{bmatrix} \text{ صورت است.}$$

(به ماتریسی که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس پایین‌مثلثی گویند.)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

با توجه به نکات بالا داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

حالا می‌توانیم درایه سطر دوم و ستون سوم  $A^3$  را به دست آوریم.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + x + 2x = 3x$$

می‌توانستیم  $A^2$  را به دست آوریم و در  $A$  ضرب کنیم تا  $A^3$  به دست آید و از روی  $A^3$ ، درایه سطر دوم و ستون سوم را اعلام کنیم.

۴۷- گزینه ۲ ابتدا  $A^2$  را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -2 & -3 & -7 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

چون سؤال فقط سطر اول  $A^3$  را خواسته، کافی است سطر اول  $A^2$  را در  $A$  ضرب کنیم.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ -2 & -3 & -7 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \end{bmatrix}$$

۴۸- گزینه ۲ ابتدا  $A^2$  را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

کافی است سطر اول  $A^2$  را در  $A^2$  ضرب کنیم تا سطر اول  $A^4$  مشخص شود.

$$A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴۹- گزینه ۳ ماتریس همانی (I) را می‌شناسیم (درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس همانی ۱ و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفرند).

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

بدون معطلی باید توان‌های دوم و سوم و بعد توان ششم  $A + I$  را پیدا کنیم.

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(A + I)^6 = (A + I)^3 (A + I)^3$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 365 & 364 \\ 364 & 365 \end{bmatrix}$$

$$a - b = 365 - 364 = 1$$

بنابراین:

از روی  $(A + I)^2$  و  $(A + I)^3$  نیز می‌شد حدس زد که  $a - b$  برابر یک می‌شود!

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^T \times A^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 18 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر اول  $A^6$  برابر است با:  $1+18+18=37$

**روش دوم** با توجه به  $A, A^T$  و  $A^T$  می‌شود حدس زد که  $A^n$  به شکل

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n & 3n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مقابل است:

یعنی مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس  $A^n$ ،  $6n+1$  است؛ اگر به جای  $n$  عدد ۶ قرار دهیم، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس  $A^6$  برابر می‌شود  $6 \times 6 + 1 = 37$

**۵۵- گزینه ۲** همین اول در مورد گزینه‌ها توضیح کوتاهی بدهیم! اگر تمام درایه‌های پایین قطر اصلی برابر صفر باشند به ماتریس، بالامثلی و اگر تمام درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر باشند به ماتریس پایین‌مثلثی می‌گویند. اگر تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس برابر صفر باشند، به این ماتریس، قطری می‌گویند و اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر یک باشند، به این ماتریس، ماتریس همانی (واحد) گویند. برای این که به  $A^T$  برسیم باید  $A^T$  را به دست آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$A^T$  را در خودش ضرب می‌کنیم و به  $A^T$  می‌رسیم! به همین سادگی

$$A^4 = A^T \times A^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین  $A^4$ ، همانی است.

**۵۶- گزینه ۳**  $A^T$  را به دست می‌آوریم تا ببینیم بعد چه پیش می‌آید ...

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = -3A$$

بنابراین:  $A^T = A^T \times A = (-3A)A = -3A^T = -3(-3A) = 3^2 A$   
 $A^4 = A^T \times A = 3^2 A \times A = 3^2 \times A^T = 3^2(-3A) = -3^3 A$   
 $A^5 = A^4 \times A = -3^3 A \times A = -3^3 A^T = -3^3(-3A) = 3^4 A$   
 مجموع درایه‌های  $A$  برابر ۹- یا  $-3^2$  است، پس مجموع درایه‌های  $A^5$  برابر با  $3^4 \times (-3^2) = -3^6$  خواهد بود.  
 اگر دنبال  $A^n$  بودیم از روی  $A, A^T = 3^2 A, A^T = -3A$  و  $A^4 = -3^3 A, A^5 = 3^4 A$  می‌توانستیم حدس بزنیم  $A^n = (-3)^{n-1} A$  است.

$$B^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های روی قطر اصلی  $B^T A$  برابر با  $-5 = -1 + (-12) + 8$  است.

**۵۲- گزینه ۲** در روش معمول باید  $A^T$  را پیدا کنیم و در  $B$  ضرب کنیم تا درایه مورد نظر سؤال را پیدا کنیم.

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -7 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -7 & 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 18 & 9 \\ 68 & -43 \end{bmatrix}$$

درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم  $A^T B$  برابر با  $-43$  است.

**روش دوم** درایه واقع در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $ABC$  این طوری به دست می‌آید:

[ستون  $j$ ام  $C$ ]  $\times$   $B$   $\times$  [سطر  $i$ ام  $A$ ]

بنابراین:

درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم  $A^T B$

[ستون دوم  $B$ ]  $\times$   $A$   $\times$  [سطر سوم  $A$ ]

درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم  $A^T B$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 25 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= 7 - 50 = -43$$

**۵۳- گزینه ۳** به نظر می‌آید راهی غیر از یافتن  $A^T, A^T$  و ... نداریم.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^T \times A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ما فقط ستون دوم ماتریس  $A^6$  را می‌خواستیم (می‌توانستیم فقط درایه‌های سطر اول، دوم و سوم را در درایه‌های ستون دوم ضرب و با هم جمع کنیم).  
 $A^6$  مجموع درایه‌های ستون دوم  $= 6 + 1 + 0 = 7$

**۵۴- گزینه ۲** یک راه این است که  $A^T$  را بیابیم، بعد  $A^T$  را در  $A^T$  و سپس حاصل را در  $A^T$  ضرب کنیم (می‌توانید  $A^T$  را در  $A$  ضرب کنید و  $A^T$  را به دست آورید و در  $A^T$  ضرب کنید تا  $A^6$  به دست آید).

۵۷- گزینه ۴ طبق معمول اول باید  $A^T$  را به دست آوریم.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالا باید رابطه‌های بین  $A$ ،  $A^T$  و  $A^3$  ... بیابیم.

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

خیلی راحت 😊 می‌توان حدس زد که  $A^n$  به شکل  $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  خواهد بود. بنابراین:

$$A^{1402} + A^{2023} = \begin{bmatrix} 1 & 1402 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2023 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3425 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{1401} + A^{2023}$  برابر است با:

$$2 + 3425 + 2 = 3429$$

۶۱- گزینه ۳  $A^T$  را به دست می‌آوریم تا راهی برای رسیدن به

$A^{2021}$  پیدا کنیم.

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$$

مسیر برای یافتن  $A^{2021}$  هموار شد 😊

$$A^{2021} = (A^T)^{1010} \times A = (4I)^{1010} \times A$$

$$= 2^{2020} (I^{1010}) \times A = 2^{2020} A$$

اگر از ما  $A^{2022}$  خواسته شده بود، می‌گفتیم  $I^{2022}$ ، زیرا:

$$A^{2022} = (A^T)^{1010} \times A^T = 2^{2020} I \times (4I) = 2^{2022} I$$

**دقت کنید!**  $(n \in \mathbb{N}) \quad I^n = I$

۶۲- گزینه ۱ با تعریف داده‌شده،  $A$  را می‌نویسیم و چون توان  $1400$  از  $A$  خواسته شده، اول  $A^T$  را پیدا می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^T$  هیچ کدام از ماتریس‌های خاص نیست، مجبوریم  $A^T$  را نیز به دست بیاوریم و بعد تصمیم بگیریم.

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

به جای خوبی رسیدیم. حالا می‌توانیم به کمک  $A^T$ ،  $A^{1400}$  را به دست آوریم.

$$A^{1400} = (A^T)^{466} \times A^T = (-I)^{466} \times A^T = I \times A^T = A^T$$

۶۳- گزینه ۲ ماتریس  $C$  که از ضرب ماتریس  $A_{3 \times 1}$  در ماتریس  $B_{1 \times 3}$  به دست می‌آید، یک ماتریس  $3 \times 3$  است.

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

برای رسیدن به  $C^{1402}$  باید اول  $C^T$  را به دست آوریم.

$$C^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

جالب شد!

$C^T$  با  $C$  برابر شد و این یعنی ماتریس  $C$  خودتوان است و به هر توان طبیعی برسد با خودش برابر است.  $(\forall n \in \mathbb{N}; C^n = C)$

بنابراین:

$$C^{1402} = C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس  $C^{1402}$  برابر با  $-8$  است.

۶۴- گزینه ۱ **تابلوه** که باید تکلیف  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{12}$  را روشن کنیم.

در گام اول توان دوم ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  را به دست می‌آوریم.

$$= I^2 - 2AI + A^2 + (A^2 + 2AI + I^2)$$

$$= I - 2A + A^2 + A^2 + 2A + I = 2A^2 + 2I$$
 از آن جا که  $A^2 = I$  است، پس:  $B^2 + C^2 = 2A^2 + 2I = 2I + 2I = 4I$   
**دقت کنید!** در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند؛ اما اتحادها بین دو ماتریس  $A$  و  $I$  برقرارند.

**۲**  $I^n = I$   
**۳** اگر  $A^2 = I$  باشد (به ماتریس  $A$ ، متناوب گویند)، آن‌گاه:
 
$$\begin{cases} A^{2n} = I \\ A^{2n-1} = A \end{cases}$$

**۶۷- گزینه ۱:** از تعویض پذیری دو ماتریس  $A$  و  $B$  نتیجه می‌گیریم  $AB = BA$  است. باید ببینیم سؤال از ما چه می‌خواهد تا مسیر مناسب برای حل را انتخاب کنیم.

$$(2A - B)(A + 3B) = 2A^2 + 6 \underset{BA}{AB} - BA - 3B^2$$

$$= 2A^2 + 5BA - 3B^2$$

کار خاصی نکردیم! دو پارانتر را در هم ضرب کردیم (حواسمان بود که ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد و ترتیب ماتریس‌ها در ضرب مهم است).

چون می‌دانستیم  $AB = BA$  است، به جای  $AB$ ، ماتریس  $BA$  را قرار دادیم. همین.

$A^2$ ،  $B^2$  و  $BA$  را داریم، پس می‌توانیم حاصل  $(2A - B)(A + 3B)$  را پیدا کنیم.

$$(2A - B)(A + 3B) = 2A^2 + 5BA - 3B^2$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (2A - B)(A + 3B) = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 30 & 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & -6 \\ -9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 46 \\ 69 & 73 \end{bmatrix}$$

**۶۸- گزینه ۱:** اگر خاطرتان باشد! در درس‌نامه گفتیم که «ضرب ماتریس اسکالر با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با آن، خاصیت جابه‌جایی دارد.» با توجه به این که  $B$  اسکالر است، پس  $AB$  و  $BA$  برابرند. با بازکردن  $(B - 2A)(A + 3B)$ ، راحت‌تر به پاسخ سؤال می‌رسیم.

$$(B - 2A)(A + 3B) = BA + 3B^2 - 2A^2 - 6AB$$

از آن جا که  $BA = AB$  است، داریم:

$$(B - 2A)(A + 3B) = AB + 3B^2 - 2A^2 - 6AB$$

$$= 3B^2 - 2A^2 - 5AB$$

پس:

$$(B - 2A)(A + 3B) = \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -45 & -60 \\ -30 & -120 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 66 & 52 \\ 26 & 131 \end{bmatrix}$$

درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس  $(B - 2A)(A + 3B)$  برابر ۳۴ است.

**۶۹- گزینه ۲:** در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت تعویض‌پذیری ندارد؛ یعنی در ماتریس خیلی وقت‌ها  $AB = BA$  نیست. مثلاً اتحاد  $(A + B)^2$  در ماتریس‌ها به این شکل باز می‌شود.

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

باید توان سوم ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  را هم به دست بیاوریم تا بتوانیم در مورد توان‌های بعدی اظهار نظر کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

از توان اول، دوم و سوم ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (-2) \times 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -24 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

با ضرب ماتریس‌های داده‌شده در صورت سؤال، مقادیر  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  مشخص می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{12} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -24 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

پس:

$$\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{12} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 21 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

از  $\begin{bmatrix} -6 & 21 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  نتیجه می‌گیریم:

$a = -6$ ،  $b = 21$ ،  $c = -6$ ،  $d = 3$   
 $a + b + c - d = -6 + 21 - 6 - 3 = 6$

**۶۵- گزینه ۳:** با مرتب‌کردن رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$4A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2 - 2b & a + 2b \\ (b-1)^2 - 2a & a - b - 3 \end{bmatrix}$$

با توجه به این که  $A$  قطری است، پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفرند. یعنی:

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b \\ (b-1)^2 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = (b-1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (b-1)^2 = -4b \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = -4b$$

$$\Rightarrow b^2 + 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2$$

با جای‌گذاری  $a = 2$  و  $b = -1$  به  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$  می‌رسیم.

ماتریس  $A$  قطری است. برای به دست آوردن  $A^{1401}$  کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان ۱۴۰۱ برسانیم.

$$A^{1401} = \begin{bmatrix} 2^{1401} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^{1401} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{ضرب درایه‌های} \\ \text{روی قطر اصلی} \end{matrix} = 1$$

**۶۶- گزینه ۲:** اگر  $A^2 = I$  را به دست آورید می‌بینید که  $A^2 = I$  خواهد شد. یاد بگیرید! که اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$  باشد  $A^2 = I$  است.

بنابراین:

$$B^2 + C^2 = (I - A)^2 + (A + I)^2$$



$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}I$$

تقریباً به پاسخ سؤال نزدیک شدیم.

$$(A^T + AB + BA + B^T)^T = ((A+B)^T)^T = \left(-\frac{1}{2}I\right)^T$$

$$= -\frac{1}{2}I^T = -\frac{1}{2}I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس  $(A^T + AB + BA + B^T)^T$  برابر  $-\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{1}$  است با:

**۷۳- گزینه ۲** داریم:

$$A^T = 2A + I$$

طرفین تساوی بالا را در  $A^T$  ضرب می‌کنیم و هر جا  $A^T$  دیدیم به جای آن  $2A + I$  قرار می‌دهیم.

$$A^T \times A^T = A^T (2A + I) \Rightarrow A^T = (2A + I)(2A + I)$$

$$\Rightarrow A^T = 4A^T + 4A + I \Rightarrow A^T = 4(2A + I) + 4A + I$$

$$\Rightarrow A^T = 12A + 5I$$

کافی است طرفین تساوی بالا را در  $A$  ضرب کنیم تا  $A^5$  به دست آید.

$$A \times A^T = A(12A + 5I) \Rightarrow A^5 = 12A^2 + 5A$$

$$\Rightarrow A^5 = 12(2A + I) + 5A \Rightarrow A^5 = 29A + 12I$$

بنابراین:  $A^5 - A^T = (29A + 12I) - (12A + 5I) = 17A + 7I$

**حواسمان هست!** که:

- ۱) به هر توانی برسد خودش می‌شود ( $I^n = I$ ).
- ۲) ضرب هر ماتریسی در  $I$  خودش می‌شود ( $AI = IA = A$ ).

**۷۴- گزینه ۲** را داریم. (از کجا؟! فور سؤال راده!)

$$A^T = A - I$$

$A^T$  ماتریس خاصی نیست که بتوانیم  $A^{2021}$  را راحت پیدا کنیم.  $A^T$  را به دست می‌آوریم، شاید کمکی کرد.

$$A^T = A^T \times A = (A - I) \times A$$

$$= A^T - A = (A - I) - A = -I$$

**دقت کنید!** به جای  $A^T, A - I$  جایگزین کردیم.

$$A^{2021} = (A^T)^{673} \times A^T$$

را تبدیل به توان‌های ۳ از  $A$  می‌کنیم:

$$\Rightarrow A^{2021} = (-I)^{673} \times A^T = -I \times (A - I) = (I - A)$$

**۷۵- گزینه ۲** برای رسیدن به  $B^{1401}$  باید  $B^T$  را به دست آوریم.

$$A + B = I - A \Rightarrow B = I - 2A$$

$$\Rightarrow B^T = (I - 2A)^T = I^T - 4AI + 4A^T = 4A^T - 4A + I$$

سؤال گفته  $A^T = A$  است، پس:

$$B^T = 4(A) - 4A + I = I$$

آخرین مرحله، ساختن  $B^{1401}$  است.

$$B^{1401} = (B^T)^{400} \times B = I^{400} \times B = I \times B = B$$

**دقت کنید!**  $I^T = I$  (اصولاً!)  $I$  به توان عدد حسابی برسد، برابر با  $I$  می‌شود.

۲)  $A$  و  $I$  تعویض پذیرند، یعنی  $AI = IA$ .

حالا که  $A^T, B^T$  و  $A + B$  را داریم، می‌توانیم با استفاده از اتحاد اشاره‌شده،  $AB + BA$  را به دست آوریم.

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$(A+B)^T - A^T - B^T = AB + BA$$

$$\begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = AB + BA$$

پس:

$$AB + BA = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

**۷۰- گزینه ۲** یک راه این است که به جای  $A, B + C$  جایگزین کنیم و حاصل را به دست آوریم؛ این راه کمی طولانی است! ما با دسته‌بندی و فاکتورگرفتن کمی راحت‌تر سؤال را حل می‌کنیم. ببینید!

با توجه به رابطه  $A = B + C$  داریم:

$$A - B = C$$

$$(A^T - AB) + (B^T - BA) = A(A - B) + B(B - A)$$

$$= A(C) + B(-C) = AC - BC = (A - B)C = C^T$$

شاید باورتان نشود!  $A^T + B^T - AB - BA$  باز شده  $(A - B)^T$  است.

$A^T + B^T - AB - BA = (A - B)(A - B) = (A - B)^T = C^T$

**دقت کنید!** در حالت کلی ضرب دو ماتریس خاصیت تعویض پذیری ندارد؛ یعنی در ماتریس‌ها خیلی اوقات  $AB = BA$  نیست.

**۷۱- گزینه ۲** اگر ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی (تعویض پذیری) داشته باشد، اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است و برعکس! در این‌جا برای  $A$  و  $B$ ، اتحاد برقرار است پس ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی باید  $AB = BA$  باشد، پس:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} -4x - 3y & -3x - 4y \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x - 6 & -4y + 3 \\ -3x - 8 & -3y + 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x - 8 = -5 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1 \\ -3y + 4 = -2 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

اگر به جای  $x$  و  $y$  مقادیر آن‌ها را جایگزین کنیم، خواهید دید که بقیه درایه‌های ماتریس هم با هم برابرند. حالا باید خواسته سؤال را برآورده کنیم!

$$[x \ 2 \ -y] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix} \Rightarrow [-1 \ 2 \ -2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 4 - 2 = 1$$

**۷۲- گزینه ۲** همان  $A^T + AB + BA + B^T$  است. (می‌دانیم که در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند.) از رابطه داده‌شده در صورت سؤال نتیجه می‌گیریم:

$$A + B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

باید  $A + B$  را به توان ۲ برسانیم تا بعد ببینیم چه عملیاتی ما را به پاسخ می‌رساند.

۷۶- گزینه ۱ خاصیت شرکت پذیری در ماتریس‌ها (البته با رعایت

شرایط ضرب پذیری ماتریس‌ها) می‌گفت:  $(AB)C = A(BC)$

با استفاده از خاصیت شرکت پذیری و روابط داده شده در سؤال داریم:

$$BA^2 = B(AB)^2 = B \underbrace{(A \underbrace{B}_A) \underbrace{(A \underbrace{B}_B)}_A} = B \underbrace{A \underbrace{B \underbrace{A}_A}_A}_A \underbrace{B}_B = B^2$$

**دقت کنید!** اگر در مرحله آخر به جای  $AB$ ،  $A$  قرار می‌دادیم  $BA$  به دست می‌آمد که برابر با  $B$  بود و این یعنی  $B^2$  و  $B$  با هم برابرند.

$$BA^2 = B \underbrace{A \underbrace{B}_A}_A = B$$

از آنجا که  $B^2 = B$  است، پس  $B$  خودتوان است؛ یعنی  $B$  به هر توان طبیعی که برسد با خودش برابر است.

$$(BA^2)^{1402} = B^{1402} = B$$

۷۷- گزینه ۲ با فاکتورگیری  $A$  از رابطه  $A^2 - AB + kB$  و

جایگزین کردن  $-kI$  به جای  $A - B$  داریم:

$$A(A - B) + kB = A(-kI) + kB = -kA + kB \\ = -k(A - B) = -k(-kI) = k^2 I$$

۷۸- گزینه ۳ از رابطه داده شده باید  $A^2$  و  $B^2$  بسازیم.

با ضرب طرفین رابطه  $AB = B$  در  $B$  (از چپ) داریم:

$$AB = B \xrightarrow{B \times} (BA)B = B^2 \xrightarrow{BA=A} AB = B^2 \\ \xrightarrow{AB=B} B = B^2$$

با ضرب طرفین رابطه  $BA = A$  در  $A$  (از چپ) داریم:

$$BA = A \xrightarrow{A \times} (AB)A = A^2 \\ \xrightarrow{AB=B} BA = A^2 \xrightarrow{BA=A} A = A^2$$

$$A^2 B^2 = AB = B$$

بنابراین:

**روش دوم** این طوری هم می‌شد ...

$$AB = B \xrightarrow{\times A} A(BA) = BA \xrightarrow{BA=A} A^2 = A$$

$$BA = A \xrightarrow{\times B} B(AB) = AB \xrightarrow{AB=B} B^2 = B$$

$$A^2 B^2 = AB = B$$

پس:

۷۹- گزینه ۲ از رابطه  $A + B = I$  نتیجه می‌گیریم  $B = I - A$  است.

درست است که در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند؛ اما چون ضرب  $A$  و  $I$  تعویض پذیر است ( $AI = IA = A$ )، اتحادهای درجه ۲ در مورد  $A$  و  $I$  برقرارند (یک وقت فکر نکنید اتحادهای درجه ۳ برقرار نیستند، چون این‌جا کاری با آن‌ها نداریم در مورد آن‌ها حرفی نمی‌زنیم!)

بنابراین:  $B^2 = (I - A)^2 = I^2 - 2AI + A^2 \Rightarrow B^2 = A^2 - 2A + I$

$$\xrightarrow{B^2 = -B} -B = A^2 - A + (-A + I) \\ \xrightarrow{-I - A = B} -B = A^2 - A + B \Rightarrow A^2 = A - 2B$$

$$\xrightarrow{\pm B} A^2 = A + \underbrace{B - B}_{-2B} \xrightarrow{A+B=I} A^2 = I - 3B$$

حالا باید  $A^2 B$  را بیابیم.

$$A^2 = I - 3B \xrightarrow{\times B} A^2 B = (I - 3B)B \Rightarrow A^2 B = IB - 3B^2$$

با توجه به این که  $B^2 = -B$  است، داریم:

$$A^2 B = B - 3B^2 \Rightarrow A^2 B = B - 3(-B) \Rightarrow A^2 B = 4B$$

**روش دوم** مثال هم چیز خوبی است!

فرض کنید  $B = -I$  و  $A = 2I$  باشد که در هر دو رابطه  $B^2 = -B$  و

$A + B = I$  صدق می‌کنند، باید  $A^2 B$  را به دست آوریم.

$$A^2 B = (2I)^2 (-I) = (4I^2) (-I) = -4I$$

در گزینه‌ها به جای  $B$ ،  $-I$  قرار می‌دهیم، هر کدام که  $-4I$  داد قابل قبول است؛  $-4I$  می‌دهد، پس همین گزینه درست است.

۸۰- گزینه ۳ خاصیت شرکت پذیری در ضرب ماتریس‌ها را به یاد دارید؟! می‌گفت

$$A(BC) = (AB)C$$

سؤال از ما  $B^2$  خواسته و عباراتی را هم به ما داده که به کمک آن‌ها پاسخ را پیدا کنیم.

$$B^2 = B \times B^2 \xrightarrow{B=BA} B^2 = (BA)B^2 \\ = B(AB^2) \xrightarrow{AB^2=A} B^2 = BA \xrightarrow{BA=B} B^2 = B$$

۸۱- گزینه ۲ طرفین رابطه  $B - A = I$  را از چپ در  $B$  ضرب می‌کنیم تا  $B^2$  ایجاد شود.

$$B - A = I \xrightarrow{B \times} B^2 - BA = BI \Rightarrow B^2 - BA = B \quad (1)$$

یک بار هم طرفین رابطه را از راست در  $B$  ضرب می‌کنیم.

$$B - A = I \xrightarrow{\times B} B^2 - AB = IB \Rightarrow B^2 - AB = B \quad (2)$$

از دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$B^2 - BA = B \xrightarrow{B^2=B+I} (B+I) - BA = B$$

$$\Rightarrow BA = I \xrightarrow{B \times} B^2 A = B$$

$$B^2 - AB = B \xrightarrow{B^2=B+I} (B+I) - AB = B$$

$$\Rightarrow AB = I \xrightarrow{A \times} A^2 B = A$$

۸۲- گزینه ۱ باید سعی کنیم از رابطه‌های داده شده به توان‌های  $A$  برسیم.

اگر طرفین رابطه  $BA = 2A$  را از چپ در  $A$  ضرب کنیم، داریم:

$$ABA = A(2A) \Rightarrow (AB)A = 2A^2 \xrightarrow{AB=B} BA = 2A^2$$

با توجه به فرض سؤال،  $A^2$  به دست می‌آید.

$$\begin{cases} BA = 2A^2 \\ BA = 2A \end{cases} \Rightarrow 2A^2 = 2A \Rightarrow A^2 = A$$

به راحتی می‌توانیم  $A^4$  و  $A^6$  را از روی  $A^2 = A$  به دست آوریم.

$$A^2 = A \xrightarrow{\text{توان } 2} A^4 = A^2 \xrightarrow{A^2=A} A^4 = A$$

$$\xrightarrow{\times A^2} A^6 = A^3 \xrightarrow{\times A} A^6 = A^4 \xrightarrow{A^4=A} A^6 = A$$

$$2A^6 - 3A^4 = 2A - 3A = -A$$

بنابراین:

**دقت کنید!** اگر  $A^2 = A$  باشد به ماتریس  $A$  خودتوان گویند؛ یعنی  $A$  به هر توانی (البته توان طبیعی) برسد، خودش می‌شود.

$$A^2 = A \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} A^n = A$$

$$A^6 = A^6 = A \Rightarrow 2A^6 - 3A^4 = 2A - 3A = -A$$

پس:

۸۳- گزینه ۲  $A(BA)^4 B$  را از ما خواسته! بازش کنیم ببینیم با چه چیزی روبه‌رو هستیم ...

$$A(BA)^4 B = A(BA)(BA)(BA)(BA)B$$

$$= (AB)(AB)(AB)(AB)(AB) = (AB)^5$$

حالا باید ماتریس بالا را در  $\begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ -x \end{bmatrix}$  ضرب کنیم.

$$[x+8 \quad -3 \quad x+3] \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ -x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2x - 16 + 30 - x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 - 5x + 14 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } (AB)^5 = 1 + (-1) + 2 + (-2) = 0 \text{ برابر با } 0 \text{ است.}$$

**تذکره** می‌دانیم حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر با  $-\frac{c}{a}$  است.

**۸۸- گزینه ۳**  $A^2$  را به دست می‌آوریم و بعد تصمیم می‌گیریم چه‌طور به  $A^6$  برسیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

$$A^3 = A^2 \times A = 3A \times A = 3A^2 = 3(3A) = 9A \quad \text{بنابراین:}$$

$$A^6 = A^3 \times A^3 = 9A \times 9A = 81A^2 = 81(3A)$$

$$= 3^4 \times 3^1 A = 3^5 A$$

مجموع درایه‌های ماتریس  $A$  برابر ۹ یا  $3^2$  است.

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس  $A^6$  برابر  $3^5 \times 3^2 = 3^7$  است.

اگر از ما  $A^n$  را خواسته بود از روی  $A^2 = 3A$ ،  $A^3 = 3^2 A$ ، و ... می‌گفتیم  $A^n = 3^{n-1} A$  است.

**۸۹- گزینه ۴** از تکنیک جایگزینی! برای حل سؤال استفاده می‌کنیم:

$$BA = 3AB \Rightarrow AB = \frac{BA}{3}$$

$$mAB^T = B^T A \Rightarrow m(AB)B^T = B^T A \quad \text{بنابراین:}$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{BA}{3}\right)B^T = B^T A \Rightarrow m\left(\frac{B}{3}\right)(AB)B = B^T A$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{BA}{3}\right)B = B^T A \Rightarrow m\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{B}{3}\right)(AB) = B^T A$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{BA}{3}\right) = B^T A$$

بعد از جایگزینی‌های نفس‌گیر، می‌توانیم جواب سؤال را بدهیم.

$$\frac{m}{27} B^T A = B^T A \Rightarrow m = 27$$

**۹۰- گزینه ۱** از  $A + B = I$  نتیجه می‌گیریم:

کافی است یک بار از راست و یک بار از چپ، رابطه بالا را در  $A$  ضرب کنیم.

$$B = I - A \xrightarrow{A \times} AB = A - A^2$$

$$\xrightarrow{A^T = A} AB = A - A = \bar{0}$$

$$B = I - A \xrightarrow{\times A} BA = A - A^2$$

$$\xrightarrow{A^T = A} BA = A - A = \bar{0}$$

$$AB = BA$$

بنابراین:

در واقع سؤال  $(AB)^5$  را می‌خواسته اما با کمی شیطننت!!!

اول  $(AB)^T$  را پیدا می‌کنیم و کم‌کم پیش می‌رویم تا به  $(AB)^5$  برسیم.

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^5 = (AB)^4 (AB) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس  $(AB)^5$  برابر با  $1 + (-1) + 2 + (-2) = 0$  است.

**۸۴- گزینه ۲** باید بتوانیم از روی  $AB = 2BA$ ،  $AB^T$  و  $B^T A$  بسازیم.

اگر طرفین رابطه  $AB = 2BA$  را از راست در  $B^T$  ضرب کنیم، داریم:

$$AB = 2BA \xrightarrow{\times B^T} AB^T = 2BAB^T \Rightarrow AB^T = 2B(AB)B$$

$$\xrightarrow{AB=2BA} AB^T = 2B(2BA)B \Rightarrow AB^T = 4B^T(AB)$$

$$\xrightarrow{AB=2BA} AB^T = 4B^T(2BA) \Rightarrow AB^T = 8B^T A$$

$$\xrightarrow{\div 8} B^T A = \frac{1}{8} AB^T$$

بنابراین  $k = \frac{1}{8}$  است.

**۸۵- گزینه ۲** از  $2A + 3B = \bar{0}$  نتیجه می‌گیریم:

از  $A^2 = -\frac{2}{3}A$  هم نتیجه می‌گیریم:

$$A^4 = \left(-\frac{2}{3}A\right)^2 = \frac{4}{9}A^2 = \frac{4}{9}\left(-\frac{2}{3}A\right) = -\frac{8}{27}A$$

بنابراین:

$$A(A+B)(2A-B)(A-B) = A\left(A - \frac{2}{3}A\right)\left(2A + \frac{2}{3}A\right)\left(A + \frac{2}{3}A\right)$$

$$= A\left(\frac{A}{3}\right)\left(\frac{8A}{3}\right)\left(\frac{8A}{3}\right) = \frac{4 \cdot 8 \cdot 8}{27} A^4 = \frac{4 \cdot 8 \cdot 8}{27} \left(-\frac{8}{27}A\right) = -\frac{2048}{729}A$$

**۸۶- گزینه ۴** اگر  $A \times B = C$  باشد، درایه‌های واقع در سطر  $A$  و

ستون  $A$  ماتریس  $C$  از حاصل ضرب سطر  $A$  ماتریس  $A$  در ستون  $A$  ماتریس

ماتریس  $B$  به دست می‌آید.

از ما درایه واقع در سطر چهارم و ستون سوم  $AB$  (یعنی  $C_{43}$ ) را خواسته،

بنابراین این درایه از ضرب سطر چهارم  $A$  در ستون سوم  $B$  به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = (0 \times (-1)) + (5 \times 2) + (2 \times 5) + ((-1) \times 0) = 20$$

**۸۷- گزینه ۱** باید ضرب کنیم دیگه!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ -x & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = [x+8 \quad -3 \quad x+3]$$

۹۴- گزینه ۲ اول باید بدانیم اگر  $A$  به توان برسد چه شکلی می شود.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

می توان حدس زد که  $A^n$  به شکل  $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  خواهد بود.

$$BA^n = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4n+1 \\ 3 & 2n+2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4n+1 \\ 3 & 2n+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix} \Rightarrow 4n+1=41 \Rightarrow n=10$$

پس باید:  $n=10$  اگر از  $32=2n+2$  نیز،  $n$  را به دست می آورید  $10$  می شود!

**دقت کنید!**

۹۵- گزینه ۴ از  $A^T - A = \bar{O}$  نتیجه می گیریم  $A^T = A$  است.

توان دوم ماتریس  $(2A-I)$  را به دست می آوریم ببینیم چه پیش می آید ...

$$(2A-I)^2 = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4A^2 - 4A + I$$

$$\xrightarrow{A^T=A} (2A-I)^2 = 4A - 4A + I \Rightarrow (2A-I)^2 = I$$

ما  $(2A-I)^{1399}$  را می خواهیم، پس:

$$(2A-I)^{1399} = (2A-I)^{1398} (2A-I) = I^{699} (2A-I) = 2A - I$$

بد نیست بدانید!

اگر  $A^T = I$  شود، به ماتریس  $A$  متناوب گویند. ماتریس متناوب به توان

زوج برسد برابر  $I$  است و اگر به توان فرد برسد، خودش می شود.

$$A^T = I \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \begin{cases} A^{2k} = I \\ A^{2k-1} = A \end{cases}$$

۹۱- گزینه ۲ در حالت کلی ضرب دو ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$  به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$  است. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3-1+1+3+4+5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

۹۲- گزینه ۲  $A^T$  را به دست بیاوریم، شاید فرجی شد ...

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{1400} = (A^T)^{700} = I^{700} = I$$

په قمر فوب شد!

$$A^{1399} = (A^T)^{699} \times A = I^{699} \times A = I \times A = A$$

بنابراین:

$$A^{1400} - A^{1399} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**دقت کنید!** ۱) ماتریس همانی  $(I)$  به هر توانی (منظورم توان حسابی

است) برسد، خودش می شود.  $I^n = I$

۲) ماتریس همانی  $(I)$  در هر ماتریس هم مرتبه ای مانند  $A$  ضرب شود،

حاصل  $A$  می شود.  $I \times A = A \times I = A$

۹۳- گزینه ۲ سعی می کنیم از روی  $A, A^2, A^3, \dots$  و  $A^n$  را حدس

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

می توان گفت  $A^n$  به صورت  $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  است.

بنابراین  $A^n - A^{n-1}$  برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n - 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n (1 - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

می توانستید  $A^2$  و  $A^3$  را به دست آورید و تفاضل آن ها را در گزینه ها پیدا کنید. (چرا؟ چون حاصل گزینه ها باید به ازای هر توان طبیعی  $n$  برقرار باشد.)

$$A^3 - A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

باید ببینیم به ازای  $n=3$ ، کدام گزینه  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  را به ما می دهد.

۲) همان گزینه مطلوب ما است.