

ریاضیات تجربی

واقعاً جامع کنکور

جلد ۱: درسنامه + تست‌های دست‌گرمی

دکتر محمدرضا میرجلیلی، دکتر مهدی امیریان

دوازدهم ۱۲
یازدهم ۱۱
دهم ۱۰



مهروماه



برمخاطب‌ترین کتاب ریاضیات کنکور

جیب ۲۲۰

با بیش از یک میلیون نسخه فروش

درسنامه کامل و روان در ۲۲ فصل
۸۸ ایستگاه آموزشی سرشار از مثال و نکته
خلاصه نموداری «در یک نگاه» برای هر فصل
۱۰۰۰ تست دست‌گرمی با پاسخ‌نامه‌ی تشریحی
هدیه: پوستر جذاب فرمولنامه



فهرست

فصل صفر: مروری بر مفاهیم پایه ۷



فصل ۱: تعیین علامت و نامعادله ۱۳



- ایستگاه ۱: تعیین علامت عبارت‌های جبری ۱۴
ایستگاه ۲: روش‌های حل نامعادله‌ها ۱۷
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۴۹۲

ریاضی ۱

فصل ۲: معادله‌ی درجه‌ی دوم ۲۳



- ایستگاه ۱: روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم ۲۴
ایستگاه ۲: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم ۲۸
ایستگاه ۳: تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم ۳۱
ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم ۳۳
ایستگاه ۵: مسائلی که به حل معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌رسند ۳۵
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۴۹۴

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۳: تابع درجه‌ی دوم (سه‌می) ۳۹



- ایستگاه ۱: سه‌می و ویژگی‌های آن ۴۰
ایستگاه ۲: نوشتن معادله‌ی سه‌می و نمودار آن ۴۱
ایستگاه ۳: کاربرد سه‌می در مسائل ماکزیمم و مینیمم ۴۷
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۴۹۹

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۴: معادله‌های گویا و رادیکالی ۵۱



- ایستگاه ۱: معادله‌های گویا ۵۲
ایستگاه ۲: معادله‌های رادیکالی ۵۶
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۰۳

ریاضی ۲

فصل ۵: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ۶۱



- ایستگاه ۱: ریشه، توان و توان‌های گویا ۶۲
ایستگاه ۲: عبارت‌های جبری ۶۸
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۰۵

ریاضی ۱

فصل ۶: قدرمطلق و جزء صحیح ۷۵



- ایستگاه ۱: قدرمطلق و ویژگی‌های آن ۷۶
ایستگاه ۲: جزء صحیح و ویژگی‌های آن ۸۳
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۰۸

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۷: توابع نمایی و لگاریتمی ۸۹



- ایستگاه ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن ۹۰
ایستگاه ۲: معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی ۹۵
ایستگاه ۳: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن ۹۷
ایستگاه ۴: قوانین و ویژگی‌های لگاریتم ۱۰۱
ایستگاه ۵: معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی ۱۰۵
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۱۰

ریاضی ۲

فصل ۸: تابع دهم و یازدهم ۱۱۱



- ایستگاه ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۱۱۲
ایستگاه ۲: آشنایی با برخی از انواع توابع ۱۱۷
ایستگاه ۳: دامنه و برد توابع - تساوی دو تابع ۱۱۹
ایستگاه ۴: تابع یک‌به‌یک ۱۲۶
ایستگاه ۵: اعمال جبری روی توابع ۱۲۹
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۱۵

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۹: تابع دوازدهم ۱۳۵



- ایستگاه ۱: انتقال نمودارها ۱۳۶
ایستگاه ۲: توابع چندجمله‌ای ۱۴۱
ایستگاه ۳: توابع صعودی و نزولی ۱۴۵
ایستگاه ۴: ترکیب توابع ۱۵۱
ایستگاه ۵: تابع وارون ۱۶۰
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۲۱

ریاضی ۲
ریاضی ۳

فصل ۱۰: مثلثات دهم و یازدهم ۱۷۵



- ایستگاه ۱: مثلثات در لباس هندسه ۱۷۶
ایستگاه ۲: دایره‌ی مثلثاتی ۱۷۹
ایستگاه ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۸۴
ایستگاه ۴: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۱۸۸
ایستگاه ۵: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۹۰
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۲۸

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۱۱: مثلثات دوازدهم ۱۹۷



- ایستگاه ۱: نسبت‌های مثلثاتی ۲۵ ۱۹۸
ایستگاه ۲: تابع‌های متناوب ۲۰۳
ایستگاه ۳: توابع مثلثاتی ۲۰۷
ایستگاه ۴: معادله‌های مثلثاتی ۲۱۴
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۳۳

ریاضی ۲
ریاضی ۳

فصل ۱۷: هندسه دوازدهم	۳۷۳	
ایستگاه ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی	۳۷۴	
ایستگاه ۲: بیضی و ویژگی‌های آن	۳۸۴	
ایستگاه ۳: دایره و ویژگی‌های آن	۳۹۳	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۶۹	ریاضی ۳

فصل ۱۸: مجموعه	۴۱۳	
ایستگاه ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	۴۱۴	
ایستگاه ۲: متمم یک مجموعه	۴۱۷	
ایستگاه ۳: تعداد اعضای یک مجموعه	۴۱۹	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۷۲	ریاضی ۱

فصل ۱۹: الگو و دنباله	۴۲۳	
ایستگاه ۱: الگو و مفهوم دنباله	۴۲۴	
ایستگاه ۲: دنباله‌ی حسابی و ویژگی‌های آن	۴۲۸	
ایستگاه ۳: دنباله‌ی هندسی و ویژگی‌های آن	۴۳۲	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۷۴	ریاضی ۱

فصل ۲۰: شمارش، بدون شمردن	۴۳۹	
ایستگاه ۱: اصل ضرب و اصل جمع	۴۴۰	
ایستگاه ۲: جایگشت	۴۴۳	
ایستگاه ۳: ترکیب	۴۴۶	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۷۸	ریاضی ۱

فصل ۲۱: احتمال	۴۵۱	
ایستگاه ۱: مفاهیم اولیه‌ی احتمال	۴۵۲	
ایستگاه ۲: احتمال یا اندازه‌گیری شانس	۴۵۴	
ایستگاه ۳: قوانین احتمال	۴۵۸	
ایستگاه ۴: احتمال شرطی	۴۶۰	
ایستگاه ۵: پیشامدهای مستقل	۴۶۳	
ایستگاه ۶: قانون احتمال کل	۴۶۷	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۸۰	ریاضی ۱ ریاضی ۲ ریاضی ۳

فصل ۲۲: آمار	۴۷۷	
ایستگاه ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار	۴۷۸	
ایستگاه ۲: آمار توصیفی	۴۸۰	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۸۶	ریاضی ۱ ریاضی ۲

آزمون جامع	۴۸۹	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۸۷	ریاضی ۱ ریاضی ۲ ریاضی ۳

فصل ۱۲: حد و پیوستگی	۲۲۵	
ایستگاه ۱: بخش‌پذیری	۲۲۶	
ایستگاه ۲: فرایندهای حدی	۲۲۸	
ایستگاه ۳: محاسبه‌ی حد توابع	۲۳۳	
ایستگاه ۴: رفع ابهام صفرصفرم	۲۳۸	
ایستگاه ۵: پیوستگی	۲۴۴	
ایستگاه ۶: حد بی‌نهایت	۲۵۲	
ایستگاه ۷: حد در بی‌نهایت	۲۵۷	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۳۸	ریاضی ۲ ریاضی ۳

فصل ۱۳: مشتق	۲۶۷	
ایستگاه ۱: آشنایی با مفهوم مشتق	۲۶۸	
ایستگاه ۲: تابع مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری	۲۷۲	
ایستگاه ۳: مشتق تابع مرکب	۲۷۸	
ایستگاه ۴: قاعده‌ی هوپیتال	۲۸۰	
ایستگاه ۵: معادله‌ی مماس	۲۸۲	
ایستگاه ۶: مشتق‌پذیری و ارتباط آن با پیوستگی	۲۸۴	
ایستگاه ۷: مشتق توابع بدرفتار! ۵ شگفت‌انگیز ...	۲۸۸	
ایستگاه ۸: مشتق‌پذیری روی بازه و $\mathbb{R}$	۲۹۵	
ایستگاه ۹: رابطه‌ی بین نمودارهای f و f'	۲۹۷	
ایستگاه ۱۰: آهنگ تغییر	۳۰۱	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۴۶	ریاضی ۳

فصل ۱۴: کاربردهای مشتق	۳۰۹	
ایستگاه ۱: توابع یکتوا و اکیداً یکتوا	۳۱۰	
ایستگاه ۲: نقطه‌ی بحرانی	۳۱۳	
ایستگاه ۳: اکسترمم‌های نسبی	۳۱۶	
ایستگاه ۴: اکسترمم‌های مطلق	۳۲۳	
ایستگاه ۵: بهینه‌سازی	۳۲۷	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۵۵	ریاضی ۳

فصل ۱۵: هندسه یازدهم	۳۳۳	
ایستگاه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال	۳۳۴	
ایستگاه ۲: نسبت، تناسب و قضیه‌ی تالس	۳۳۹	
ایستگاه ۳: تشابه	۳۴۴	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۶۲	ریاضی ۲

فصل ۱۶: هندسه تحلیلی	۳۵۷	
ایستگاه ۱: دستگاه مختصات و ویژگی‌های آن	۳۵۸	
ایستگاه ۲: معادله‌ی خط و وضعیت دو خط با هم	۳۶۲	
ایستگاه ۳: فاصله‌ی نقطه از خط	۳۶۸	
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۶۵	ریاضی ۲

فصل ۳

عبارت‌های جبری و مقدماتی

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

تعیین علامت

نامعادله

تعداد تست در کنگور ۱۴ تا ۲۴ تست

تابع درجه‌ی دوم (سهمی)

ساده‌ترین و مهم‌ترین نموداری که باید بلد باشید!
سهمی، ویژگی‌هایش و نتیجه‌های مرتبط با آن تستی می‌شوند قابل حل و
لذت‌بخش...

از پُل چه سهمی دارم!؟



هر دم که می‌خندی و می‌گری،
با لبانت...
آموزش **سهمی** کشیدن می‌گذاری!

دهم فصل ۴
یازدهم فصل ۱

ایستگاه ۱ سهمی و ویژگی‌های آن

در کتاب درسی بسیار مفصل به این مورد پرداخته شده است. رسم نمودار تابع درجه‌ی دوم و تسلط بر آن، در بیشتر مسائل ریاضی، مهم و کاربردی است.

سهمی

تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط‌های $a \neq 0$ و $D_f = \mathbb{R}$ ، تابع درجه‌ی دوم نامیده می‌شود و نمودار این تابع، یک سهمی است.

$y = ax^2 + bx + c$	
طول رأس: $x = -\frac{b}{2a}$	رأس سهمی
عرض رأس: $y = -\frac{\Delta}{4a}$ یا با جای‌گذاری طول رأس در تابع، عرض رأس را پیدا کنید.	
به جای x بگذارید صفر؛ همیشه یک نقطه‌ی تلاقی دارد: $(0, c)$	تلاقی با محور y ها
$\Delta > 0$ محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند: صفرهای سهمی	تلاقی با محور x ها
$\Delta = 0$ بر محور x ها مماس است.	
$\Delta < 0$ محور x ها را قطع نمی‌کند.	
$a > 0$	تأثیر علامت a
دهانه‌ی سهمی رو به بالاست؛  مینیمم داریم.	
$a < 0$	تأثیر علامت a
دهانه‌ی سهمی رو به پایین است؛  ماکزیمم داریم.	
همواره یک خط قائم دارد: $x = -\frac{b}{2a}$ ؛ 	محور تقارن
- مختصات رأس سهمی - ریشه‌های آن در صورت وجود: که نقطه‌های برخورد با محور x ها هستند. - نقطه‌ی تلاقی با محور y ها - رو به بالا یا پایین بودن سهمی از روی نگاه به علامت a	برای رسم سهمی نیاز است

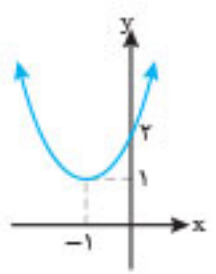
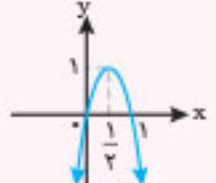
منظور از کمترین یا بیشترین مقدار سهمی، همان $-\frac{\Delta}{4a}$ است...

تست: کمترین مقدار تابع $y = kx^2 - 8x + (6k - 1)$ برابر با ۳ است. طول رأس سهمی کدام است؟

پاسخ عبارت درجه‌ی دوم ما کمترین مقدار را دارد، پس $a > 0$ بوده است که در این جا می‌شود $k > 0$. خب منظور از کمترین مقدار سهمی هم عرض رأس آن است:

$$\begin{aligned}
 kx^2 - 8x + (6k - 1) &= 0 \xrightarrow[\Delta = b^2 - 4ac]{\text{رو حساب کن}} \Delta = 64 - 4(k)(6k - 1) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 64 - 24k^2 + 4k \\
 24k^2 - 16k - 64 &= 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} 3k^2 - 2k - 8 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} 3k^2 - 6k + 4k - 8 = 0 \xrightarrow{\text{فرض تست}} \frac{64 - 24k^2 + 4k}{4k} = -\frac{\Delta}{4a} \xrightarrow{\text{فرمول عرض رأس}} -\frac{\Delta}{4a} \\
 3k^2 - 2k - 8 &= 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} \Delta = 4 - 4(3)(-8) = 100 \Rightarrow k = \frac{2 \pm 10}{6} = 2 \text{ و } -\frac{8}{3} \xrightarrow{k > 0} k = 2 \xrightarrow{\text{طول رأس}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2k} = \frac{8}{4} = 2
 \end{aligned}$$

نمونه‌ی رسم سهمی ببینید:

رسم سهمی	ابزار لازم برای رسم	دهانه	
	$x_S = \frac{-2}{2} = -1 \xrightarrow{\text{در سهمی}} y = 1$ $\Delta = 4 - 8$ که یعنی ریشه ندارد $(0, 2)$: تلاقی با محور y ها	$a = 1$ رو به بالا	$y = x^2 + 2x + 2$
	$x_S = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در سهمی}} y = 1$ $\Delta > 0$ پس: $x = 0, 1$ $(0, 0)$: تلاقی با محور y ها	$a = -4$ رو به پایین	$y = -4x^2 + 4x$

چنانچه سهمی از نقطه‌ی (m, n) بگذرد، مختصات این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

تست: سهمی $y = ax^2 + bx + c$ دارای محور تقارنی به معادله‌ی $x = -2$ بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه‌ی $(-1, -1)$ بگذرد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ

۱ محور تقارن: $y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{2a} = -2 \xrightarrow{\text{فرض تست}} b = 4a$

۲ تلاقی با محور y ها: $y = 5 \xrightarrow{x=0} c = 5$

۳ گذشتن از نقطه $(-1, -1)$: $\xrightarrow{\text{در سهمی}} -1 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=5} a - b = -6 \xrightarrow{b=4a} a - 4a = -6 \xrightarrow{\text{طبق ۱}} a = 2$

$\xrightarrow{\text{حل کن}} a = 2 \xrightarrow{b=4a} b = 8 \Rightarrow a + b + c = 2 + 8 + 5 = 15$

تست‌های دست‌گرمی و آموزشی

تکلیف شب

۷۱. مختصات رأس سهمی به معادله‌ی $y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + 1$ کدام است؟

 $(-\frac{1}{4}, -\frac{31}{16})$ (۴) $(\frac{1}{4}, -\frac{31}{16})$ (۳) $(\frac{1}{4}, \frac{31}{16})$ (۲) $(-\frac{1}{4}, \frac{31}{16})$ (۱)

۷۲. رأس سهمی به معادله‌ی $y = -3x^2 + (2m-1)x + 5$ روی محور عرض‌ها واقع است. خط به معادله‌ی $y - 2 = 0$ سهمی را در نقاطی با کدام طول قطع می‌کند؟

۴ قطع نمی‌کند (۴)

 $\pm\sqrt{2}$ (۳) ± 2 (۲) ± 1 (۱)

۷۳. اگر خط به معادله‌ی $x = -1$ محور تقارن سهمی به معادله‌ی $y = 1 - 2mx + 3x^2$ باشد، مقدار m کدام است؟

-۲ (۴)

-۳ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۷۴. تابع درجه‌ی دوم $y = x^2 + bx + 8$ نسبت به خط $x = 3$ متقارن است. این تابع محور x را در چه طولی قطع می‌کند؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)

۷۵. طول رأس سهمی به معادله‌ی $y = (m-2)x^2 - (4m-2)x + 3$ برابر ۳ است. چند جمله‌ی زیر درباره‌ی این سهمی درست است؟

الف) محور x ها را قطع نمی‌کند. ب) شکل سهمی رو به پایین است.

پ) بیشترین مقدار سهمی برابر ۳ است. ت) سهمی از نقطه‌ی $(2, 6)$ می‌گذرد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۷۶. رأس سهمی به معادله‌ی $y = -2x^2 + bx - 3$ روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع است. مقدار b کدام است؟

۴ یا -۴ (۴)

۴ و -۶ (۳)

-۶ (۲)

۴ (۱)

۷۷. سهمی به معادله‌ی $y = 2x^2 - 8x + 1$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

اول (۴)

دوم (۳)

سوم (۲)

چهارم (۱)

۷۸. به ازای کدام مقدار a ، بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 20x - 120$ برابر با ۱۸۰ است؟

 $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱)

(کتکورتیرا ۱۴۰۱)

۷۹. کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟

 $x = 3/5$ (۴) $x = 3$ (۳) $x = 2/5$ (۲) $x = 2$ (۱)

۸۰. اگر صفرهای تابع درجه‌ی دوم $y = 3x^2 + bx + c$ برابر ۳ و ۵ باشند، کمترین مقدار این سهمی کدام است؟

۵۴ (۴)

۴۲ (۳)

-۴۸ (۲)

-۳۶ (۱)

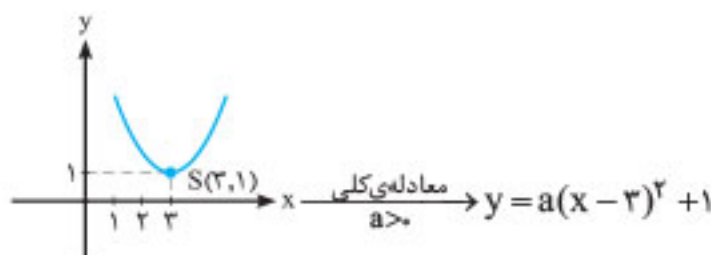
دهم فصل ۴

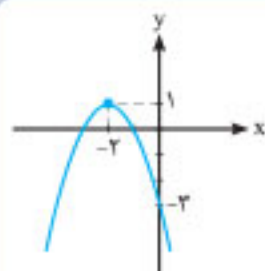
بازدهم فصل ۱

ایستگاه ۲ نوشتن معادله‌ی سهمی و نمودار آن

این‌جا با داده‌های تست معادله‌ی سهمی را می‌نویسیم و با داشتن معادله‌اش آن را رسم می‌کنیم؛ خیلی ایستگاه به‌درد بخوری‌ست!

۱ اگر مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(h, k)$ داده شده باشد: در این صورت معادله‌ی سهمی را به‌صورت $y = a(x-h)^2 + k$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال، a را پیدا کنید. **ببین:**





تست: معادله‌ی سهمی مقابل کدام است؟

(۱) $y = -x^2 + 4x - 3$

(۳) $y = -x^2 - 4x + 3$

(۲) $y = -x^2 - 4x - 3$

(۴) $y = x^2 - 4x - 3$

پاسخ

$S(-2, 1) \xrightarrow[\text{معادله‌ی کلی سهمی}]{a < 0} y = a(x - h)^2 + k \xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{h = -2, k = 1} y = a(x + 2)^2 + 1$

سهمی از نقطه‌ی $(0, -3)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه را در معادله‌ی آن صدق می‌دهیم:

$y = a(x + 2)^2 + 1 \Rightarrow -3 = a(0 + 2)^2 + 1 \Rightarrow -3 = 4a + 1 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{حل}} a = -1 \xrightarrow[\text{در معادله‌ی سهمی}]{\text{در معادله‌ی سهمی}} y = -1(x + 2)^2 + 1 \xrightarrow[\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}]{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} y = -x^2 - 4x - 3$

برای کار کردن با سهمی‌هایی که معادله‌ی آن‌ها به فرم $y = a(x - h)^2 + k$ نوشته شده است، می‌توانید اتحاد مربع دوجمله‌ای را باز کرده و عبارت را ساده کنید، همین‌طور بدانید در این شکل نمایش، رأس سهمی بوده و ماکزیمم یا مینیمم آن هم k است...

بین:

$y = (2x - 1)^2 - 1 \xrightarrow[\text{رو به بالا}]{a = 2 > 0} \text{رأس: } S(\frac{1}{2}, -1), \min = -1$

۲ اگر نقاط تلاقی سهمی با محور x ها به فرم x_1 و x_2 باشند: در این صورت معادله‌ی سهمی را به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال a را به دست بیاورید...



تست: سهمی مقابل از نقطه‌ی $(-2, -10)$ می‌گذرد. نقطه‌ی برخورد سهمی با محور y ها چه عرضی دارد؟

(۲) ۱۰

(۴) ۶

پاسخ

$\text{ریشه‌ها } -1, 3 \xrightarrow[\text{فرم کلی سهمی}]{a < 0} y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{\text{جای‌گذاری کن}} y = a(x + 1)(x - 3) \xrightarrow[\text{ضرب کن}]{\text{ضرب کن}} y = a(x^2 - 2x - 3)$

$\xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{(-2, -10)} -10 = a(4 + 4 - 3) \Rightarrow -10 = 5a \Rightarrow a = -2 \xrightarrow[\text{در معادله‌ی سهمی}]{\text{در معادله‌ی سهمی}} y = -2(x^2 - 2x - 3) \xrightarrow[\text{تلاقی با محور y ها}]{x = 0} y = -2(-3) = 6$

در حالت خاص که معادله‌ی درجه‌ی دوم، ریشه‌ی مضاعف x_0 دارد، معادله‌اش به صورت $y = a(x - x_0)^2$ درمی‌آید...

قرارداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را برای تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، **صفرهای سهمی** می‌نامیم.

۳ نوشتن معادله‌ی سهمی با داشتن سه نقطه از آن: معمولاً ضابطه‌ی سهمی را در این حالت به فرم کلی $y = ax^2 + bx + c$ نوشته و نقطه‌ها را در آن صدق می‌دهیم، دستگاه حاصل را حل می‌کنیم و a ، b و c را پیدا می‌کنیم. اما طراح کنکور چیزی را دوست دارد که می‌خواهیم به آن بپردازیم: **دو نقطه از سه نقطه قانون دارند!**

تکنیک معلم کنکور: فرض کنید نقطه‌ها $(1, 3)$ ، $(4, 6)$ و $(-2, 1)$ باشند، در دوتای اول، قانون $y = x + 2$ در نقطه‌ها برقرار! خوب معادله‌ی سهمی را به فرم $y = a(x - 1)(x - 4) + x + 2$ بنویسید و بعد نقطه‌ی سوم را در آن صدق دهید... حالا این قانون در دو نقطه می‌تواند هر چیز دیگری هم باشد:

$y = a(x - 1)(x - 4) + x + 2 \xrightarrow[\text{صدق بده}]{(-2, 1)} 1 = a(-3)(-6) + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{18}$

این جوری هم بین: دو نقطه از سه نقطه‌ی سهمی، این‌طوری هستند: $(\alpha, f(\alpha))$ و $(\beta, f(\beta))$ ، معادله‌ی سهمی را به فرم $y = a(x - \alpha)(x - \beta) + f(x)$ بنویس و با صدق دادن نقطه‌ی سوم، a را پیدا کن و تمام!

◀ $f(x)$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی دو است.

تست: سهمی گذرنده از نقطه‌های $(2, 4)$ ، $(-1, 1)$ و $(4, -14)$ محور y ها را در چه عرضی قطع می‌کند؟

(۴) -۴

(۳) ۶

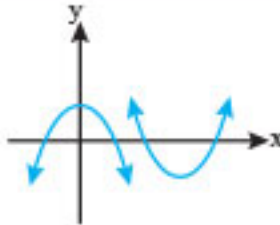
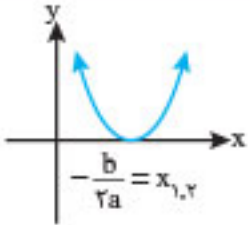
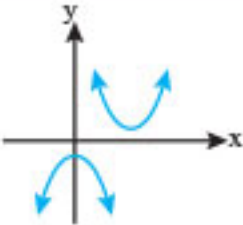
(۲) ۴

پاسخ

$(2, 4), (-1, 1) \xrightarrow[\text{معادله‌ی سهمی}]{\text{معادله‌ی سهمی}} y = a(x - 2)(x + 1) + x^2 \xrightarrow[\text{صدق بده}]{(4, -14)} -14 = a(2)(5) + 16 \Rightarrow 10a = -30 \Rightarrow a = -3$

$\xrightarrow[\text{جای‌گذاری}]{\text{جای‌گذاری}} y = -3(x - 2)(x + 1) + x^2 \xrightarrow[\text{تلاقی با y ها}]{x = 0} y = -3(-2)(1) + 0 = 6$

سهمی و محور xها

تلاقی در دو نقطه: $\Delta > 0$	مماس بر محور: $\Delta = 0$	بدون برخورد با محور: $\Delta < 0$
		
جدول تعیین علامت عبارت، ۲ ریشه‌ای است.	جدول تعیین علامت تک‌ریشه‌ای است.	جدول تعیین علامت بدون ریشه است.

تست: سهمی به معادله‌ی $y = x^2 + mx + \frac{1}{4}$ ($m \in \mathbb{N}$) محور xها را قطع نمی‌کند و سهمی $y = 2nx^2 - 4x + \frac{n}{4}$ بر محور xها مماس و رو به پایین است. مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) -2 (۳) 2 (۴) $-\frac{1}{4}$

پاسخ: $y = x^2 + mx + \frac{1}{4} \xrightarrow{\Delta < 0} \Delta = m^2 - 2 < 0 \Rightarrow |m| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 1$

پاسخ: $y = 2nx^2 - 4x + \frac{n}{4} \xrightarrow{\Delta = 0} \Delta = 16 - 4(2n)(\frac{n}{4}) = 16 - 4n^2 = 0 \Rightarrow n = \pm 2 \xrightarrow{\text{رو به پایین } 2n < 0} n = -2 \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{-2}{1} = -2$

تست: شکل مقابل مربوط به سهمی به معادله‌ی $y = mx^2 - x + \frac{n-1}{4}$ است. بین m و n چند عدد صحیح وجود دارد؟

(۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ:

$x_1 = x_2 = -\frac{3}{4}$

$S = \frac{1}{m} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{6}{4} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$

$P = \frac{n-1}{2m} = (-\frac{3}{4})(-\frac{3}{4}) \Rightarrow -\frac{3}{2}(\frac{n-1}{4}) = \frac{9}{16} \Rightarrow n-1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow n = \frac{1}{4}$

اعداد صحیح بین m و n عبارت است از: ۰.

اگر سهمی، محور xها را در دو نقطه قطع نکند، در این صورت: در حالت کلی، سهمی نسبت به محور xها یکی از چهار حالت زیر را دارد:

همواره بالای محور	بالای محور، مماس بر آن	همواره پایین محور	پایین محور، مماس بر آن	شرط
$a > 0$ و $\Delta < 0$	$a > 0$ و $\Delta = 0$	$a < 0$ و $\Delta < 0$	$a < 0$ و $\Delta = 0$	

جمله‌ی مربع کامل شدن عبارت درجه‌ی دوم، یعنی در آن عبارت، Δ مساوی صفر شده...!

تست: همه‌ی نقاط نمودار تابع $y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4}$ بالای محور xهاست. چند جواب طبیعی و یک‌رقمی برای m وجود دارد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

پاسخ:

$y = (m+1)x^2 + 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4} \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4(m+1)(\frac{1}{4}) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 7 - m$

$\xrightarrow{\text{سهمی بالای محور xهاست}} \begin{cases} \text{① } \Delta < 0 \Rightarrow 7 - m < 0 \Rightarrow m > 7 \\ \text{② } a > 0 \Rightarrow m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m > 7 \xrightarrow{m \text{ طبیعی و یک‌رقمی}} m = 8, 9 \xrightarrow{\text{تعداد}} \text{دو تا}$

تست: هرگاه نمودار تابع $y = (k-2)x^2 - 3x + 2 + k$ پایین محور xها و بر آن مماس باشد، در این صورت چند مقدار برای k وجود دارد؟

(۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

پاسخ:

$y = (k-2)x^2 - 3x + (2+k) \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (-3)^2 - 4(k-2)(k+2) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = -4k^2 + 25$

$\xrightarrow{\text{پایین محور xها و مماس بر آن}} \begin{cases} \text{① } \Delta = 0 \Rightarrow -4k^2 + 25 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{5}{2} \\ \text{② } a < 0 \Rightarrow k-2 < 0 \Rightarrow k < 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k = -\frac{5}{2} \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} \text{یکی}$

مماس بودن سهمی بر خط

اگر خط دلخواه $y = mx + n$ بر یک سهمی مماس شده باشد، به جای y سهمی بگذارید: $mx + n$ و سپس معادله‌ی درجه‌ی دوم حاصل را مرتب کرده و در معادله‌ی آخری قرار دهید: $\Delta = 0$...

تست: به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات مماس است؟

(۱) -۴ (۲) ۴ و -۱۲ (۳) -۴ و ۱۲ (۴) ۱۲

پاسخ

$$y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \xrightarrow[\text{جای گذاری کن}]{y=x: \text{نیمساز ناحیه ی اول}} x = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} x = 2x^2 + mx + x + m + 6 \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0 \text{ مماس یعنی}} m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} m^2 - 8m - 48 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (m+4)(m-12) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$$

اگر $m = 12$ باشد، معادله‌ی حاصل از تلاقی سهمی و نیمساز عبارت است از: $2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{m=12} 2x^2 + 12x + 18 = 0$ که به وضوح جوابش $x = -3$ است و در ناحیه‌ی اول نیست! پس فقط $m = -4$ قابل قبول خواهد بود.

عبارت درجه‌ی دوم با علامت ثابت: یک تیر و دو نشان!

اگر بگویند عبارت درجه‌ی دومی همواره مثبت یا همواره منفی بوده است، خوب انگار سهمی آن کاملاً بالا یا کاملاً پایین محور x ها افتاده...! این جوری هم ببین:

$ax^2 + bx + c \leq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	شرط
$\Delta \leq 0$ و $a < 0$	$\Delta < 0$ و $a < 0$	$\Delta \leq 0$ و $a > 0$	$\Delta < 0$ و $a > 0$	

تست: به ازای کدام مقادیر m عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 5$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

(۱) $m > 1$ (۲) $1 < m < \frac{14}{5}$ (۳) $m > \frac{14}{5}$ (۴) $m \geq \frac{14}{5}$

پاسخ

$$(m-1)x^2 + 6x + 5 \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta = (6)^2 - 4(m-1)(5) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = 56 - 20m$$

$$\xrightarrow{\text{عبارت همواره مثبت}} \begin{cases} \text{I} \Delta < 0 \Rightarrow 56 - 20m < 0 \Rightarrow m > \frac{14}{5} \\ \text{II} a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases} \rightarrow m > \frac{14}{5}$$

ویژگی محور تقارن سهمی

۱) محور تقارن سهمی همیشه از رأس سهمی می‌گذرد و موازی محور y ها است.

این جوری هم ببین: طول رأس سهمی، همیشه با مقدار داده شده برای محور تقارن سهمی مساوی است: **ببین:**

$$x = 4 \Rightarrow \text{طول رأس} = 4$$

معادله‌ی محور تقارن

۲) هر دو نقطه‌ای که روی سهمی بوده و عرض مساوی با هم داشته باشند، نسبت به محور تقارن سهمی قرینه‌اند. در این حالت برای پیدا کردن مقدار عددی محور تقارن، طول آن دو نقطه را میانگین بگیرید.

تست: دو نقطه‌ی $(1, \beta)$ و $(-3, \beta)$ روی نمودار سهمی با کمترین مقدار ۱ قرار دارند. اگر سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، کدام نقطه روی این سهمی واقع است؟

(۱) $(-3, 14)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(-2, 3)$ (۴) $(-3, 13)$

پاسخ

دو نقطه با عرض مساوی روی سهمی

$$(1, \beta), (-3, \beta) \xrightarrow[\text{میانگین طول ها را بگیر}]{\text{معادله ی محور تقارن}} x = \frac{1 + (-3)}{2} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x = -1 \xrightarrow[\text{فرض}]{\text{محور تقارن از رأس می گذرد}} \text{رأس } x = -1 \xrightarrow{\text{کمترین مقدار}} S(-1, 1)$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی سهمی}} y = a(x+1)^2 + 1 \xrightarrow[\text{تلاقی با } y=3]{\text{یا } y=3} 3 = a(0+1)^2 + 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\xrightarrow[\text{معادله ی سهمی}]{\text{جای گذاری کن}} y = 2(x+1)^2 + 1 \xrightarrow[\text{گزینه ی ۳}]{\text{امتحان گزینه ها}} 3 = 2(-2+1)^2 + 1 \Rightarrow 3 = 2 + 1 \checkmark$$

بیان کنگوری اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، آن وقت $f(m) = f(n) \Rightarrow m + n = -\frac{b}{a}$ ، البته غیر از حالتی که خود m و n مساوی باشند...

تست: اگر $f(x) = 2x^2 + 6x + 1$ باشد، مجموع جواب‌های معادله‌ی $f(3x+1) = f(x-3)$ کدام است؟

(۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $-\frac{9}{4}$ (۳) $-\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(3x+1) = f(x-3) \Rightarrow 3x+1 = x-3 \xrightarrow{\text{حل}} 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \\ 2) (3x+1) + (x-3) = -\frac{6}{2} \Rightarrow 4x-2 = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} -\frac{9}{4}$$

تابع چاق و لاغر

تکنیک معلم کنکور: تابعی را که ضابطه‌اش به صورت یک عبارت درجه‌ی اول، ضربدر یک عبارت درجه‌ی دوم باشد تابع چاق و لاغر می‌نامیم، ببین:

$$y = \underbrace{(2x-1)}_{\text{لاغر}} \underbrace{(x^2+5x-4)}_{\text{چاق}}$$

۱ اگر تست بگوئید: «تابع چاق و لاغر، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند»، دلتای تابع درجه‌ی دوم را منفی کنید...

تست: نمودار تابع $y = (x+2)(x^2-2x+m)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مقادیر m به کدام صورت است؟

(۱) $m < -1$ (۲) $m > -1$ (۳) $-2 < m < -1$ (۴) $m > 1$

پاسخ

$$y = (x+2)(x^2-2x+m) \xrightarrow{\Delta \text{ چاق و لاغر حساب کن}} \Delta = (-2)^2 - 4(1)(m) = 4 - 4m \xrightarrow{\text{تابع فقط یک ریشه دارد } \Delta < 0} 4 - 4m < 0 \xrightarrow{\text{حل کن}} m > 1$$

۲ اگر تست بگوئید: «تابع چاق و لاغر، بر محور x ها مماس است»، در این صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است:

الف: دلتای عبارت درجه‌ی دوم صفر بوده است.

ب: ریشه‌ی عبارت درجه‌ی اول (همون لاغره) باید ریشه‌ی عبارت درجه‌ی دوم باشد.

تست: نمودار تابع $y = (\frac{1}{3}x - k)(x^2 + 2x - 3)$ بر محور x ها مماس است. در این صورت تفاضل مقادیر k کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ همان طور که می‌بینید در قسمت چاق، Δ نمی‌تواند صفر شود:

$$x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{\Delta \text{ چاق و لاغر حساب کن}} \Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16$$

پس می‌ماند یک راه! ریشه‌ی عبارت لاغر باید در تابع چاق صدق کند تا نمودار تابع بر محور x ها مماس شود:

$$\frac{1}{3}x - k = 0 \xrightarrow{\text{ریشه رو حساب کن}} \frac{1}{3}x = k \Rightarrow x = 3k \xrightarrow{\text{بذار توی تابع درجه‌ی دوم}} (3k)^2 + 2(3k) - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 9k^2 + 6k - 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب اول و سوم یا دومی برابر است}} k = -1, k = \frac{3}{9} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \left(\frac{1}{3}\right) - (-1) = \frac{4}{3}$$

وضعیت سهمی و نواحی مختصات

بر اساس این که سهمی از کدام ناحیه‌ها بگذرد می‌توانیم روی علامت ضرایب a ، b ، c و البته Δ بحث کنیم. این جا معروفترین موارد را بررسی می‌کنیم:

۱ سهمی از چهار ناحیه بگذرد: کافی است $P < 0$ باشد...

۲ سهمی فقط از دو ناحیه بگذرد: کافی است $\Delta \leq 0$ باشد...

۳ سهمی فقط از سه ناحیه بگذرد: کافی است $P \geq 0$ و $\Delta > 0$ باشد.

$y = x^2 - 4x + 3$	$y = -x^2 + 2x - 2$	$y = x^2 - 2x + 2$	$y = x^2 - x - 2$
$\Delta > 0$ و $P > 0$	$\Delta < 0$ و $a < 0$	$\Delta < 0$ و $a > 0$	$P < 0$

تست: سهمی با معادله $y = x^2 + x + \frac{1-m}{6+m} = 0$ فقط از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد. چند جواب صحیح برای m وجود دارد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ یعنی از ناحیه‌های دوم و سوم و چهارم می‌گذرد:

۱ $P \geq 0 \Rightarrow \frac{1-m}{6+m} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -6 < m \leq 1$

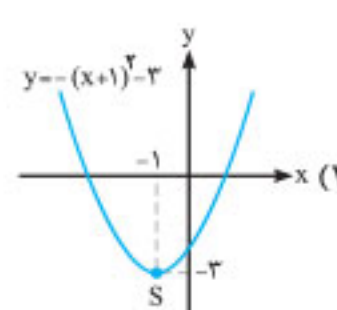
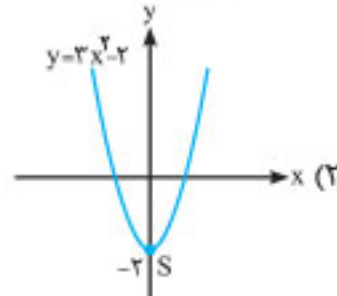
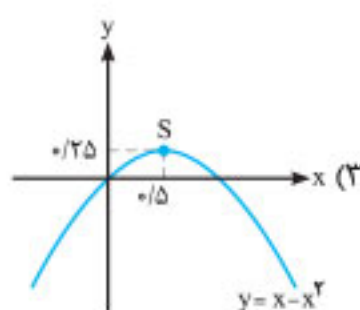
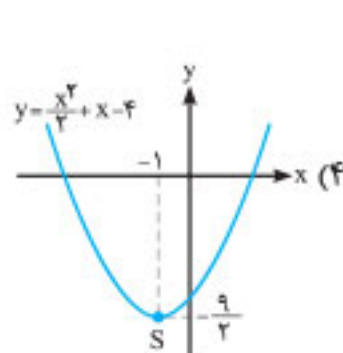
۲ $\Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4\left(\frac{1-m}{6+m}\right) > 0 \xrightarrow{\text{ساده}} \frac{5m+2}{6+m} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -\frac{2}{5} \text{ یا } m > -6$

اشتراک ۱ و ۲ می‌شود $1 < m \leq -\frac{2}{5}$ و اعداد صحیح این بازه هم عبارت‌اند از: ۱ و ۰

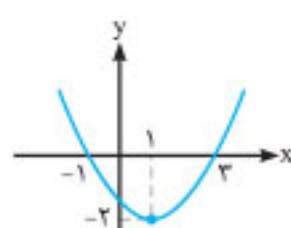
تکلیف شب تست‌های دست‌گرمی و آموزشی

(کتاب درسی)

۸۱. معادله‌ی کدام سهمی به‌درستی کنار آن نوشته نشده است؟



۸۲. معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟



(۲) $y = 2x^2 + x - 1$

(۴) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

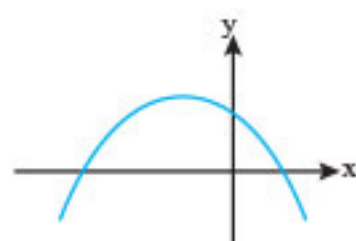
(۱) $y = x^2 - 2x - 1$

(۳) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

۸۳. سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور y را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x را در نقاطی به طول ۱ و ۲ قطع کرده است. این سهمی از کدام نقطه عبور می‌کند؟

- (۱) $(-2, -3)$ (۲) $(3, 2)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 3)$ (۴) $(1, 2)$

۸۴. نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به‌صورت مقابل است. چه تعداد از نامعادلات $ab > 0$, $bc < 0$, $ac > 0$ درست است؟



- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۵. به ازای کدام مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟

- (۱) $m > 1$ یا $m < -2$ (۲) $-2 < m < 1$ (۳) فقط $m < -2$ (۴) فقط $m > 1$

۸۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور x هاست؟

- (۱) $1 < m < 5$ (۲) $2 < m < 5$ (۳) $2 < m < 4$ (۴) $2 < m < 6$

۸۷. به ازای کدام مقدار m سهمی به معادله $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور طول‌ها و مماس بر آن است؟

- (۱) -3 (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳

۸۸. به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

- (۱) $k > \frac{9}{4}$ (۲) $k < \frac{9}{4}$ (۳) $k > -\frac{9}{4}$ (۴) $k < -\frac{9}{4}$

۸۹. به ازای چه مقادیری از a ، سهمی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ هیچ‌گاه از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a > 0$ (۳) $a \leq -2$ (۴) $-2 \leq a < 0$

۹۰. سهمی به معادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خط به معادله $y = mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

- (۱) $(5, 13)$ (۲) $(15, 23)$ (۳) $(7, 15)$ (۴) $(9, 25)$

ایستگاه ۳ کاربرد سهمی در مسائل ماکزیمم و مینیمم

بازدهم فصل ۱

تست‌های پیدا کردن بیشترین مقدار یا کمترین مقدار، اگر به تابع درجه‌ی دوم برسند، با ویژگی‌های سهمی حل می‌شوند؛ این‌جا این‌ها را ببین...

فرم این تست‌ها این‌طوری است که در ظاهر خبری از عبارت درجه‌ی دوم، ریشه و... نیست! صورت تست یک مسئله‌ی ریاضی است که با یک سری توضیحات، در نهایت خواسته که یک چیزی ماکزیمم یا مینیمم شود. شاخصه‌ی اصلی تست‌هایی که چنین فرمی دارند و با کمک تابع درجه‌ی دوم حل می‌شوند، این است که دو تا متغیر در تست حضور دارد. (معمولاً مثبت‌اند، چون در سؤالات کاربردی و عملی حضور داریم...) اما روش برخورد ما با این تست‌ها این‌طوری است:

- از رابطه‌ای که بین دو تا متغیر داده شده است، یکی را برحسب دیگری پیدا می‌کنیم؛ مثلاً m را برحسب n . ببین: $m + 2n = 4 \Rightarrow m = 4 - 2n$
- حالا عبارتی را که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود می‌نویسیم و بعد متغیری را که در مرحله‌ی قبل برحسب دیگری پیدا کرده بودیم، در این رابطه جای‌گذاری کرده و ساده می‌کنیم.

خب الان عبارتی که در مرحله‌ی ۲ پیدا کرده‌اید، یک عبارت درجه‌ی دوم است برحسب یک متغیر. جالب است بدانید اگر تست خواسته باشد که عبارت ماکزیمم شود، به تابع درجه‌ی دومی با a منفی خواهید رسید و چنانچه بخواهد که مینیمم شود، حتماً در تابع درجه‌ی دوم حاصل، a مثبت درمی‌آید: منظورمان از a ، ضریب x^2 است!

می‌دانید برای آن که عبارت $ax^2 + bx + c$ به ماکزیمم یا مینیمم خود برسد باید x مساوی $-\frac{b}{2a}$ شود و مقدار ماکزیمم یا مینیمم هم، $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

تست: برای دو عدد مثبت x و y می‌دانیم: $3x + 2y = 24$. اگر xy بیشترین مقدار ممکن باشد، مقدار $y - x$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ

$$3x + 2y = 24 \xrightarrow{y \text{ را پیدا کن}} y = \frac{24 - 3x}{2} \xrightarrow{\text{در رابطه بذار}} xy = x \left(\frac{24 - 3x}{2} \right) \xrightarrow{\text{کسر را تفکیک کن}} x \left(12 - \frac{3}{2}x \right)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}} 12x - \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} -\frac{3}{2}x^2 + 12x \xrightarrow{\text{ماکزیمم شود}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-\frac{3}{2})} = -\frac{12}{-3} = 4$$

$$\xrightarrow{y = \frac{24 - 3x}{2}} y = \frac{24 - 3(4)}{2} = \frac{24 - 12}{2} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow y - x = 6 - 4 = 2$$

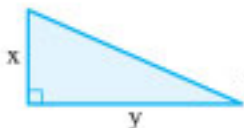
تست: مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مجموع دو ضلع قائمه‌ی آن ۱۶ است، بیشترین مقدار خود را دارد. این مساحت چقدر است؟

- ۸ (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴)

پاسخ

$$x + y = 16 \xrightarrow{y \text{ را برحسب } x \text{ بنویس}} y = 16 - x \xrightarrow{S = \frac{1}{2}xy} S = \frac{1}{2}x(16 - x) \xrightarrow{\text{ضرب کن}} 8x - \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} S = -\frac{1}{2}x^2 + 8x$$

$$\xrightarrow{S \text{ ماکزیمم شود}} S \text{ بیشترین مقدار} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8^2 - 4(-\frac{1}{2})(0)}{4(-\frac{1}{2})} = -\frac{64}{(-2)} = 32$$



تکلیف شب تست‌های دست‌گرمی و آموزشی

۹۱. مجموع دو عدد برابر ۱۱۰ است. اگر حاصل ضرب این دو عدد بیشترین مقدار ممکن باشد، مجموع مربعات این دو عدد کدام است؟

- ۶۱۰۰ (۱) ۳۰۲۵ (۲) ۳۰۵۰ (۳) ۶۰۵۰ (۴)

۹۲. یک پرتابگر وزنه، در یک مسابقه‌ی ورزشی وزنه‌ای را پرتاب می‌کند. اگر معادله‌ی مسیر حرکت وزنه برحسب زمان به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 2$ باشد، بیشترین ارتفاع وزنه از سطح زمین چقدر است؟

- ۴۱ (۱) ۴۱ (۲) ۹ (۳) ۲۵ (۴)

۹۳. محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکزیمم مساحت این مستطیل، چقدر است؟

- ۲۲۵ (۱) ۲۰۹ (۲) ۵۶/۲۵ (۳) ۱۱/۲۵ (۴)

۹۴. مستطیلی را با کمک یک سیم به طول ۲۰ ساخته‌ایم. اگر بخواهیم قطر این مستطیل کمترین مقدار ممکن شود، مساحت مستطیل چقدر است؟

- ۲۴ (۱) ۳۵ (۲) ۳۰ (۳) ۲۵ (۴)

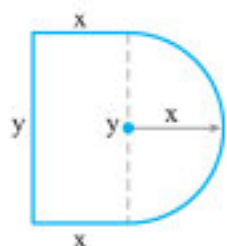
۹۵. بین مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر همان قاعده برابر ۱۲ واحد است، بیشترین مساحت چند واحد مربع است؟

- ۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴)

۹۶. بین ارتفاع (h) و قاعده (b) متوازی‌الاضلاع رابطه $b + h = 9$ برقرار است. بیشترین مقدار مساحت ممکن که با این متوازی‌الاضلاع می‌توان ساخت، چقدر است؟

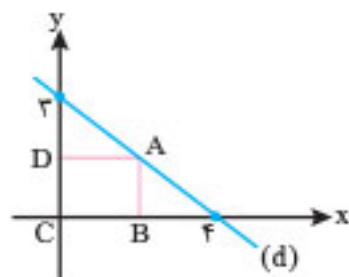
- ۲۰/۲۵ (۱) ۲۰/۵ (۲) ۱۰/۲۵ (۳) ۱۰/۵ (۴)

۹۷. می‌خواهیم با طنابی به طول ۷۰ متر، سطحی متشکل از یک مستطیل و یک نیم‌دایره مطابق شکل ایجاد کنیم. حداکثر مساحت ایجادشده برابر است با: ($\pi \approx 3$)



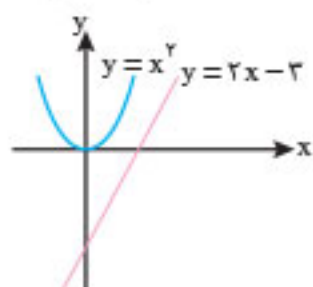
- ۱۰۵۰ m^2 (۱) ۱۱۵۰ m^2 (۲)
۱۲۲۵ m^2 (۳) ۳۵۰ m^2 (۴)

۹۸. با توجه به شکل مقابل، نقطه‌ی A روی خط d در حال حرکت است. بیشترین مقدار ممکن برای مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



- ۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

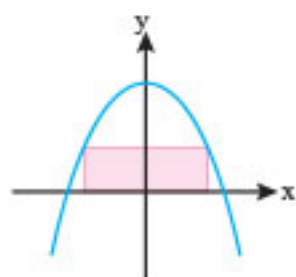
۹۹. در یک پارک، دو مسیر برای پیاده‌روی یکی روی خط $y = 2x - 3$ و دیگری روی منحنی $y = x^2$ ساخته شده است. دو شخص A و B هر کدام روی یکی از



این دو مسیر در حال حرکت هستند. حداقل فاصله‌ی ممکن بین این دو نفر چقدر است؟

- $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۲)
 $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (۴)

۱۰۰. مطابق شکل یک مستطیل را درون سهمی $f(x) = 12 - x^2$ محاط کرده‌ایم. بیشترین محیط این مستطیل کدام است؟



- ۱۳ (۱) ۲۶ (۲) ۵۲ (۳) ۳۹ (۴)

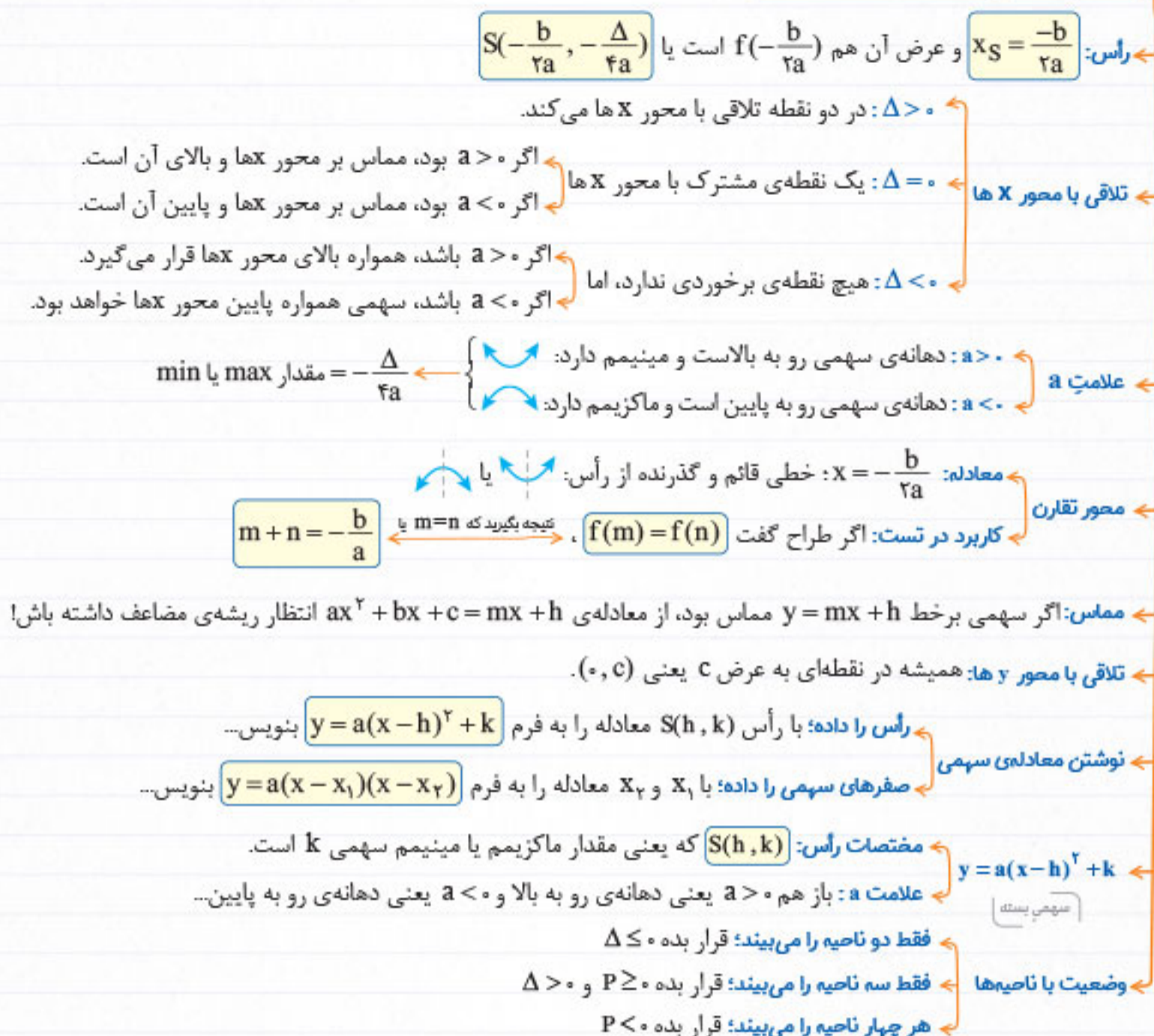
فال متولد خرداد

ریاضی را دوست داری ولی همیشه برای انجام آن بهانه‌تراشی می‌کنی...

اگه یه خُرده سبک‌تر بود حتما می‌تونستم!



فصل در یک نگاه

تمام سه‌می $f(x) = ax^2 + bx + c$ 

تا صد درصد پرواز کن!

بروسراغ «آزمون‌نیوم ریاضیات تجربی». فقط آزمون‌های استاندارد
وسط‌بندی‌شده بزن، خودتو بیمه کن..
صد آزمون برای صد درصد



فصل ۳ تابع درجه‌ی دوم (سه‌می)

۷۱. **گزینه ۲** برای سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ اگر نقطه‌ی S رأس آن باشد،

آن‌گاه $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ یعنی: $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ و $x_S = \frac{-b}{2a}$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + 1 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{1}{4}}{2(\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta = (\frac{-1}{4})^2 - 4(\frac{1}{2})(1) = \frac{1}{16} - 2 = \frac{-31}{16} \Rightarrow y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\frac{-31}{16}}{4(\frac{1}{2})} = \frac{31}{32}$$

در نهایت: $S(\frac{1}{4}, \frac{31}{32})$

زنگی: در سهمی‌ای یا ضرایب کسری اگر طول رأس سهمی x باشد، عرض آن

را از رابطه‌ی $y = c - ax^2$ پیدا کنید: $x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2 = 1 - \frac{1}{32}$

۷۲. **گزینه ۱** رأس سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ زمانی روی محور y واقع

می‌شود که $b = 0$ باشد، چون باید اتفاق $x_S = \frac{-b}{2a} = 0$ بیفتد!!

$$y = -3x^2 + (2m-1)x + 5 \xrightarrow{b=0} 2m-1=0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -3x^2 + 5$$

حالا باید سهمی به معادله‌ی $y = -3x^2 + 5$ را با خط به معادله‌ی $y - 2 = 0$ یا همان

$$\begin{cases} y = -3x^2 + 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow -3x^2 + 5 = 2 \Rightarrow -3x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\xrightarrow{-(3)} x^2 = 1 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دوم بگیر}} x = \pm 1$$

۷۳. **گزینه ۳**

$$y = 1 - 2mx + 3x^2 \xrightarrow{\text{استاندارد بنویس}} y = 3x^2 - 2mx + 1$$

$$\xrightarrow{\text{محور تقارن}} x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2m}{2(3)} = \frac{m}{3}$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2m)}{2(3)} = \frac{m}{3} = -1 \Rightarrow m = -3$$

۷۴. **گزینه ۲** در سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است:

$$y = x^2 + bx + 8 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{-b}{2(1)} = 3 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 8$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی با محور } x} x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } 4$$

که فقط $x = 2$ در گزینه‌ها آمده است.

۷۵. **گزینه ۲**

$$y = \frac{(m-2)x^2}{a} - \frac{(fm-2)x}{b} + \frac{3}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{طول رأس}} x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{-(fm-2)}{2(m-2)} = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} fm-2 = 6m-12 \xrightarrow{\text{حل معادله}} 2m = 10$$

$$\Rightarrow m = 5 \xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} y = 3x^2 - 18x + 30$$

محور x ها را قطع نمی‌کند: $\Delta = 18^2 - 360 = 18(18-20) < 0$

سهمی روبه بالا است: $a = 3 > 0$

کمترین مقدار سهمی ۳ است. $\Rightarrow y_S = 3(3)^2 - 18(3) + 30 = 3$

سهمی از $(2, 6)$ می‌گذرد: $6 = 3(2)^2 - 18(2) + 30 = 6$

۶۶. **گزینه ۳** آن دو عدد طبیعی فرد متوالی را $2n-1$ و $2n+1$ در نظر می‌گیریم:

$$(2n-1)^2 + (2n+1)^2 = 290$$

$$\xrightarrow{\text{انحادهای روباز کن}} (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) = 290$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 8n^2 + 2 = 290 \xrightarrow{-2} 8n^2 = 288$$

$$\xrightarrow{+8} n^2 = 36 \xrightarrow{\text{جذریگیر}} n = \pm 6 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{عدد فرد اول} = 2(6) - 1 = 11 \\ \text{عدد فرد بعدی} = 2(6) + 1 = 13 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب کن}} 11 \times 13 = 143$$

۶۷. **گزینه ۳** هدف تست، حل معادله‌ی $0.006s^2 - 0.02s + 120 = 124$ یا

$$0.006s^2 - 0.02s - 4 = 0 \text{ است. طرفین را در } 1000 \text{ ضرب کنید!}$$

$$6s^2 - 20s - 4000 = 0 \xrightarrow{+4} 3s^2 - 10s - 2000 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از } \Delta \text{ بیو}} s = \frac{10 \pm \sqrt{24100}}{6}$$

$$\xrightarrow{\Delta = (-10)^2 - 4(3)(-2000) = 24100} \sqrt{24100} = 10\sqrt{241} \approx 10(15.5) = 155 \Rightarrow s = \frac{10 \pm 155}{6}$$

$$\Rightarrow s = \frac{165}{6} = 27.5 \checkmark, s = \frac{-145}{6} < 0 \times$$

یعنی سن فرد موردنظر یا فشارخون 124 mmHg ، برابر 27.5 است.

۶۸. **گزینه ۳**

$$\Rightarrow m \xrightarrow{\text{داده‌های سؤال را هندسی کن.}} \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline fm+3 \\ \hline \end{array}$$

$$S_{\text{مستطیل}} = (fm+3) \times m = 45 \xrightarrow{\text{مرتب کن}} fm^2 + 3m - 45 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از روش } \Delta \text{ حل کن}} \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(f)(-45) = 729$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2} = 12 \text{ عرض}$$

$$\Rightarrow fa+3 = 4(3)+3 = 15 = \text{طول} \Rightarrow \text{قطر} = \sqrt{3^2 + 15^2} = \sqrt{234}$$

حالت $m = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ یا توجه به مثبت نبودن a و جواب منفی برای m می‌دهد

که خب نشدنی است!

۶۹. **گزینه ۲**

$$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \sqrt{106} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{رابطه‌ی فیثاغورس: } a^2 + b^2 = (\sqrt{106})^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 106 \\ \text{فرض سؤال: } a + b = 14 \Rightarrow b = 14 - a \end{array}$$

حال اگر در رابطه‌ی $a^2 + b^2 = 106$ قرار دهیم $b = 14 - a$ داریم:

$$a^2 + (14-a)^2 = 106 \xrightarrow{\text{انحادهای روباز کن}} a^2 + 196 - 28a + a^2 = 106$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 2a^2 - 28a + 90 = 0 \xrightarrow{+2} a^2 - 14a + 45 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل از روش تجزیه}} (a-9)(a-5) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی}} \begin{cases} a-9=0 \Rightarrow a=9 \\ \text{یا} \\ a-5=0 \Rightarrow a=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{یا توجه بفرص } b=14-a} \begin{cases} b=14-9=5 \\ \text{یا} \\ b=14-5=9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در هر دو حالت}} S = \frac{1}{2} \times 9 \times 5 = \frac{45}{2} = 22.5$$

۷۰. **گزینه ۲**

$$\begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \begin{cases} a \times b = 26 \\ 2(a+b) = 21 \Rightarrow a+b = \frac{21}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} x^2 - \frac{21}{2}x + 26 = 0 \Rightarrow a-b = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{(-\frac{21}{2})^2 - 4 \times 26}}{1}$$

$$= \sqrt{\frac{441}{4} - 104} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

۸۰. **گزینه ۲** صفرهای تابع، همان ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو $2x^2 + bx + c = 0$ هستند یعنی -3 و 5 . حالا:

$$2x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -3 + 5 = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = -6 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (-3)(5) = \frac{c}{2} \Rightarrow c = -45 \end{cases}$$

پس معادله‌ی سهمی به صورت $y = 2x^2 - 6x - 45$ بوده و می‌دانیم که کمترین مقدار این تابع همان عرض رأس سهمی است، پس:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \times 2} = 1 \Rightarrow y_S = f(1) = 2(1)^2 - 6 \times 1 - 45 = -48$$

زنگی:

$$\text{معادله‌ی سهمی را بنویس} \rightarrow y = 2(x+3)(x-5) = 2x^2 - 6x - 45$$

۸۱. **گزینه ۱** در **گزینه‌ی ۱۰** یا این که مختصات رأس سهمی به درستی بیان شده، یک ایراد اساسی وجود دارد و آن این است که ضریب x^2 در سهمی به معادله‌ی $y = -(x+1)^2 - 3$ منفی است و دهانه‌ی سهمی باید رو به پایین باز شود! یادمان هست که در سهمی به معادله‌ی $y = a(x-h)^2 + k$ ، مختصات رأس سهمی به صورت $S(h, k)$ است. در سایر گزینه‌ها، هم مختصات رأس سهمی و هم دهانه‌ی سهمی (با توجه به علامت a) به درستی بیان و رسم شده است. همان طور که می‌دانید در سهمی‌هایی به فرم کلی $y = ax^2 + c$ (که فاقد x هستند) رأس سهمی به مختصات $S(0, c)$ ، روی محور y ها قرار دارد. (**گزینه‌ی ۲** این گونه است!)

۳. **گزینه ۳** $y = -x^2 + x \Rightarrow x_S = -\frac{1}{-2} = 0.5$

در سهمی $\rightarrow y_S = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$

۴. **گزینه ۴** $y = \frac{x^2}{2} + x - 4 \Rightarrow x_S = -\frac{1}{1}$

در سهمی $\rightarrow y_S = \frac{1}{2} - 1 - 4 = -\frac{9}{2}$

۸۲. **گزینه ۴** روش اول

$$\text{معادله بنویس} \rightarrow y = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \text{صفرهای سهمی: } 3, -1$$

$$\Rightarrow y = a(x-3)(x+1) \xrightarrow{\text{صدق بده}} -2 = a(1-3)(1+1)$$

$$\Rightarrow -2 = -4a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{جای گذاری}} y = \frac{1}{2}(x-3)(x+1) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$$

روش دوم در گزینه‌ها تمرین کار یا سهمی کنیم:

۱. **گزینه ۱** $y = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

در سهمی $\rightarrow y_S = 1 - 2 - 1 = -2$ ✓

۲. $A(-1, 0) \xrightarrow{\text{در سهمی}} 0 = (-1)^2 - 2(-1) - 1 \Rightarrow 0 = 2$ ✗

۲. **گزینه ۲** $y = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(2)} = -\frac{1}{4} \neq 1$ ✗

۳. **گزینه ۳** $y = \frac{-1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(\frac{-1}{2})} = 1$

$\Rightarrow y_S = \frac{-1}{2}(1)^2 + 1 + \frac{3}{2} = 2 \neq -2$ ✗

۴. **گزینه ۴** $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_S = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow y_S = \frac{1}{2}(1)^2 - 1 - \frac{3}{2} = -2$ ✓

۵. $A(-1, 0) \xrightarrow{\text{در سهمی}} 0 = \frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0$ ✓

۸۳. **گزینه ۴** چون سهمی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های -1 و 2 قطع کرده است، پس می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y = a(x+1)(x-2)$ در نظر گرفت. از طرف دیگر نقطه‌ی $(0, 2)$ روی سهمی است؛ پس:

$$2 = a(0+1)(0-2) \Rightarrow a = -1$$

۷۶. **گزینه ۲** مختصات رأس سهمی را به دست آورده و در معادله‌ی خط $y = -x$ صدق می‌دهیم:

$$y = -2x^2 + bx - 3 \xrightarrow{\text{طول رأس}} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2(-2)} = \frac{b}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی قرار ده}} y_S = y\left(\frac{b}{4}\right) = -2\left(\frac{b}{4}\right)^2 + b\left(\frac{b}{4}\right) - 3$$

$$= -2 \times \frac{b^2}{16} + \frac{b^2}{4} - 3 = -\frac{b^2}{8} + \frac{b^2}{4} - 3 = \frac{b^2}{8} - 3 \Rightarrow S\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3\right)$$

حالا باید رأس سهمی در معادله‌ی خط $y = -x$ یا $y + x = 0$ صدق کند:

$$\frac{b^2}{8} - 3 + \frac{b}{4} = 0 \xrightarrow{\times 8} b^2 + 2b - 24 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (b+6)(b-4) = 0 \Rightarrow b+6=0 \text{ یا } b-4=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -6 \xrightarrow{\text{در این صورت}} S\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3\right) = \left(\frac{-6}{4}, \frac{36}{8} - 3\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \checkmark \\ \text{یا} \\ b = 4 \xrightarrow{\text{در این صورت}} S\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3\right) = \left(\frac{4}{4}, \frac{16}{8} - 3\right) = (1, -1) \times \end{cases}$$

نقاط روی خط $y = -x$ اگر در ناحیه‌ی دوم باشند دارای طول منفی و عرض مثبت‌اند.

زنگی: رأس سهمی در ناحیه‌ی دوم است پس طول منفی دارد:

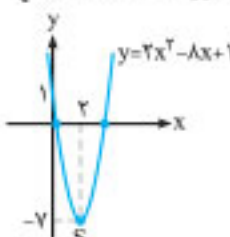
$$y = -2x^2 + bx - 3 \xrightarrow{\text{طول رأس}} -\frac{b}{2a} = \frac{-b}{-4} < 0$$

یعنی b منفی است! هر گزینه‌ای که $b > 0$ دارد حذف می‌شود؛ یعنی همه به جز **گزینه‌ی ۲**!

۷۷. **گزینه ۲**

$$y = 2x^2 - 8x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2(2)} = 2 \\ y_S = y(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow S(2, -7)$$

دهانه‌ی سهمی رو به بالا باز می‌شود $\Rightarrow a = 2 > 0$
محل تلاقی نمودار با محور y ها $\Rightarrow y(0) = 1$



رسم شکل نشان می‌دهد که سهمی وارد ناحیه‌ی سوم نمی‌شود.

۷۸. **گزینه ۲** بیشترین مقدار سهمی، همان عرض رأس آن است: $a < 0, y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$

$$-\frac{(f(0) + f(100))}{4a} = 180 \Rightarrow -\frac{f(0) + f(100)}{4a} = 180 \Rightarrow -\frac{f(0) + f(100)}{4a} = 180$$

$$\Rightarrow -\frac{f(0) + f(100)}{4a} = 180 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

زنگی:

$$x_S = -\frac{1}{a} \Rightarrow y_S = c - ax^2 = -120 - \frac{100}{a} \xrightarrow{\text{فرض}} 180$$

$$\Rightarrow \frac{100}{a} = -300$$

۷۹. **گزینه ۱** سهمی دارای $\min$ است، از این رو دهانه‌ی سهمی رو به بالاست و در نتیجه $m > 0$.

$$y = mx^2 - 12x + 5m - 1 \xrightarrow{\text{فرض است}} \min = 2 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 2$$

$$\Rightarrow -\frac{(-12)^2 - 4 \times m(\Delta m - 1)}{4m} = 2 \Rightarrow \frac{\Delta m^2 - m - 36}{m} = 2 \Rightarrow \Delta m^2 - 3m - 36 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب کن}} \Delta m^2 - 3m - 36 = 0 \xrightarrow{\text{رو نادیده بگیر}} m^2 - 3m - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (m-15)(m+12) = 0 \xrightarrow{m>0} m = \frac{15}{\Delta} = 3$$

$$\Rightarrow y = 3x^2 - 12x + 14 \xrightarrow{\text{محور تقارن سهمی}} x = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \times 3} = 2$$

۸۶. گزینه ۲

$$y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$$

شکل تقریبی سهمی پایین محور x هاست
محاسبه کن $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ شرط‌ها رو بنویس

$$\begin{cases} a = 1-m < 0 \Rightarrow m > 1 \\ \Delta = (2(m-3))^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(m^2 - 6m + 9) + 4(1-m) < 0 \xrightarrow{+4}$$

$$m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$\Rightarrow (m-5)(m-2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 < m < 5$$

$$\boxed{1} \cap \boxed{2} \Rightarrow 2 < m < 5$$

زنگی

$$m = 1/5 \xrightarrow{\text{در معادله}} y = -\frac{1}{5}x^2 - 3x - 1$$

$$\Rightarrow \Delta = 9 - 4(-\frac{1}{5})(-1) = 9 - \frac{4}{5} > 0 \Rightarrow \text{حذف گزینه ۱}$$

$$m = 4 \xrightarrow{\text{در معادله}} y = -3x^2 + 2x - 1$$

$$\Delta = 4 - 12 < 0 \xrightarrow{a < 0} \text{همواره پایین} \Rightarrow \text{حذف گزینه ۳}$$

$$m = 5 \xrightarrow{\text{در معادله}} y = -4x^2 + 4x - 1$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0 \xrightarrow{a < 0} \text{مماس بر } x \text{ ها و پایین} \Rightarrow \text{حذف گزینه ۴}$$

۸۷. گزینه ۳ شرط این که سهمی بالای محور x ها و مماس بر آن قرار گیرد این است که:

$$a > 0, \Delta = 0$$

$$a = m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(m-2)(m+2) = 0 \Rightarrow 4 - 4m^2 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 = 20 \Rightarrow m^2 = \frac{5}{1} \Rightarrow m = \pm \frac{\sqrt{5}}{1}$$

$$\Rightarrow m \text{ مورد قبول} = \boxed{1} \cap \boxed{2} = \frac{\sqrt{5}}{1}$$

۸۸. گزینه ۱ عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ یا شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$ همواره مثبت و

یا شرط $\Delta < 0$ و $a < 0$ همواره منفی است

$$A = x^2 + 3x + k$$

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \checkmark \text{ (این شرط بدیهه!)} \\ \Delta = (3)^2 - 4(1)(k) < 0 \Rightarrow 9 - 4k < 0 \\ \xrightarrow{+4k} 9 < 4k \xrightarrow{+4} k > \frac{9}{4} \checkmark \end{cases}$$

زنگی: همواره مثبت است، پس به ازای $x = 0$ هم مثبت است:

$$0 + 0 + k > 0 \Rightarrow k > 0$$

فقط گزینه ۱ این شرط را دارد.

۸۹. گزینه ۲ معادله $ax^2 - (a+2)x = 0$ دو ریشه به صورت $x_1 = 0$ و $x_2 = \frac{a+2}{a}$

دارد. حالا با تجسم نموداری می‌فهمیم برای این که سهمی بتواند وارد ناحیه‌ی سوم شود،

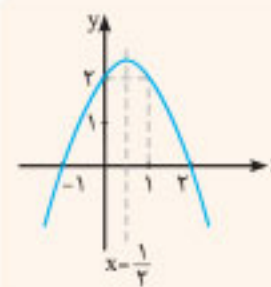
باید به شکل x باید به شکل x باشد یعنی دهانه‌ی سهمی باید رو به بالا باشد ($a > 0$) و همچنین $x_2 = \frac{a+2}{a}$ ریشه‌ی مثبت معادله باشد:

$$x_2 = \frac{a+2}{a} > 0 \xrightarrow{\text{با توجه به این که } a > 0} a+2 > 0 \Rightarrow a > -2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a > 0, a > -2 \Rightarrow a > 0$$

بنابراین معادله‌ی سهمی $y = -(x+1)(x-2)$ است؛ بررسی گزینه ۴:

$$A(1,2) \xrightarrow{\text{در سهمی}} 2 = -(1+1)(1-2) \Rightarrow 2 = 2 \checkmark$$



زنگی: نقطه‌های $(2,0)$ و $(-1,0)$ روی سهمی

هستند؛ پس معادله‌ی محور تقارن آن $x = \frac{1}{2}$ است.

$$y(0) = 2 \Rightarrow y(1) = 2$$

۸۴. گزینه ۳

۱ دهانه‌ی سهمی رویه پایین است، پس: $a < 0$

۲ محل تلاقی تابع یا محور y ها مقداری مثبت است، یعنی $f(0) > 0$ است، پس:

$$f(0) = 0 + 0 + c > 0 \Rightarrow c > 0$$

۳ طول رأس سهمی، عددی منفی است، یعنی:

$$x_s = \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{x(-1)} \frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$$

بنابراین داریم:

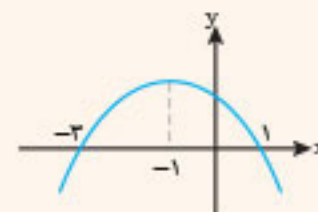
$$a, b < 0, c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ac < 0 \checkmark \\ ab > 0 \checkmark \\ bc < 0 \checkmark \end{cases}$$

همچنین سهمی در دو نقطه محور x ها را قطع کرده است، پس $\Delta > 0$ است، بنابراین داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$$

پس دو مورد از نامعادلات داده‌شده صحیح است.

زنگی: مثال عددی فرضی در نظر می‌گیریم:



$$\text{معادله سهمی } y = -x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{S=-2, P=3} \text{ریشه‌ها: } -3, 1$$

$$\Rightarrow ac = -3 < 0, bc = -6 < 0, ab = 2 > 0, b^2 - 4ac = 4 + 12 > 0$$

۸۵. گزینه ۱ وقتی نمودار یک سهمی محور x ها را در هر دو طرف مبدأ قطع می‌کند،

معادله‌ی مربوطه دو ریشه دارد؛ یکی مثبت و دیگری منفی و این یعنی حاصل ضرب ریشه‌ها

باید منفی باشد:

$$p = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت جدول}} \begin{array}{c|ccc} m & -\infty & -2 & 1 & +\infty \\ \hline p & - & + & - & + \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{می‌خواهیم } p < 0} \{m \mid m < -2 \text{ یا } m > 1\}$$

زنگی

$$m = 0 \xrightarrow{\text{در معادله}} 2x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x = -1, -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{دو ریشه منفی}} \text{حذف گزینه ۲}$$

$$m = 2 \xrightarrow{\text{در معادله}} 4x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{1}{4} < 0$$

$$\xrightarrow{\text{دو ریشه‌ی مختلف علامت}} \text{حذف گزینه ۳}$$

$$m = -3 \xrightarrow{\text{در معادله}} -x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -4 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{دو ریشه‌ی مختلف علامت}} \text{حذف گزینه ۴}$$

$$S = xy \xrightarrow{*} S = x(15-x) = 15x - x^2$$

$$\Rightarrow \max(S) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(15)^2 - 0}{4(-1)} = \frac{225}{4} = 56.25$$

زنگی

$$x + (15-x) = 15 = \text{ثابت} \xrightarrow{\text{ماکزیم}} x = 15-x \Rightarrow x = y = \frac{15}{2}$$

۹۴. (گزینه ۴) مستطیل یا سیم به طول ۲۰ ساخته شده پس محیط آن برابر ۲۰ است.

$$2r + 2t = 20 \xrightarrow{+2} r + t = 10 \quad *$$

$$\xrightarrow{\text{دو بر حسب t پیدا کن}} r = 10 - t$$

$$d = \sqrt{r^2 + t^2} \xrightarrow{\text{رادیكال رو بی خیال شو!}} r^2 + t^2$$

$$\xrightarrow{\text{مینیما شود}} (10-t)^2 + t^2 = 100 - 20t + t^2 + t^2$$

به معادله‌ی یک سهمی رسیدیم که برای مینیما شدن کافی است طول رأس آن را حساب کنیم:

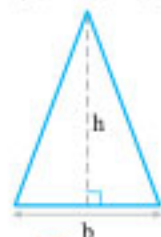
$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} 2t^2 - 20t + 100 \xrightarrow{\text{مینیما شود}} t = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2(2)} = 5$$

$$= \frac{20}{4} = 5 \xrightarrow{r+t=10} r = 5 \xrightarrow{\text{مساحت مستطیل}} 5 \times 5 = 25$$

زنگی: از آن جایی که $r + t = 10$ ، پس مجموع دو عدد مثبت، ثابت است.

می‌خواهیم حاصل ضرب آن‌ها مینیما شود؛ بنابراین $r = t = 5$ و مساحت مستطیل برابر است با: $rt = 5 \times 5 = 25$

۹۵. (گزینه ۲) اگر مثلثی با ارتفاع h و قاعده‌ی b مطابق شکل زیر در نظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم:



$$b + h = 12 \Rightarrow b = 12 - h \quad *$$

$$\text{فرمول مساحت: } S = \frac{1}{2}bh$$

$$\xrightarrow{*} S = \frac{1}{2}(12-h)h = 6h - \frac{1}{2}h^2$$

$$\Rightarrow S = \frac{-1}{2}h^2 + 6h \xrightarrow{\text{برای ماکزیم شدن}} h = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{1}{2})} = 6$$

$$\Rightarrow S_{\max} = S(6) = \frac{-1}{2}(6)^2 + 6(6) = -18 + 36 = 18$$

زنگی: جمع دو عدد مثبت، مقدار ثابتی شده است.

$$b + h = 12 \xrightarrow{\text{ماکزیم شود}} b = h = 6 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(6)(6) = 18$$

۹۶. (گزینه ۱) مساحت متوازی‌الاضلاع از حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی آن به دست می‌آید:

$$S = bh \xrightarrow{\frac{b+h=9}{b=9-h}} S = (9-h)h = -h^2 + 9h$$

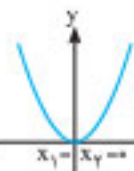
$$\xrightarrow{\text{برای ماکزیم شدن}} h = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{2(-1)} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = S(\frac{9}{2}) = -(\frac{9}{2})^2 + 9(\frac{9}{2}) = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \frac{81}{4}$$

$$= \frac{80+1}{4} = \frac{80}{4} + \frac{1}{4} = 20 + \frac{1}{4} = 20.25$$

زنگی

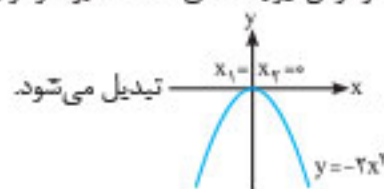
$$\begin{cases} b+h=9 \\ b=h \end{cases} \xrightarrow{\text{ماکزیم شود}} b=h=4.5 \Rightarrow S = bh = 4.5 \times 4.5 = 20.25$$



کمی اضافه‌تر: اگر می‌خواهید بدانید چرا حالت x را که در آن نیز

سهمی وارد ناحیه‌ی سوم نشده است، در نظر نگرقتیم، باید یگویم که این حالت برای سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a+2)x$ غیرممکن است؛ زیرا این حالت زمانی رخ

می‌دهد که $x_2 = \frac{a+2}{a} = 0$ شود و آن نیز به معنای $a = -2$ بوده و در این حالت ضریب x^2



منفی شده و سهمی به شکل $y = -2x^2$ تبدیل می‌شود.

زنگی: این جوری فرض کن: $a = -2$



پس گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» حذف می‌شوند.

۹۰. (گزینه ۴) نقطه‌ی مشترک نداشتن بین سهمی و خط به معنای عدم وجود ریشه در معادله‌ی تلاقی آن دو است:

$$\begin{cases} y = (2x+1)(x+8) \\ y = mx \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} (2x+1)(x+8) = mx$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} 2x^2 + 17x + 8 - mx = 0 \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حالا باید این معادله رو منفی کنیم}} \Delta = (17-m)^2 - 4(2)(8) < 0$$

$$\Rightarrow (17-m)^2 - 64 < 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} (17-m)^2 < 64$$

$$\xrightarrow{\text{جنر بگیر}} |17-m| < 8 \Rightarrow -8 < 17-m < 8$$

$$\xrightarrow{-17} -25 < -m < -9 \xrightarrow{\times(-1)} 9 < m < 25$$

زنگی

$$m = 8 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تلاقی}} 2x^2 + 9x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 81-64 > 0} \text{حذف گزینه‌های «۱» و «۳»} \Rightarrow \text{۲ ریشه دارد}$$

$$m = 10 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تلاقی}} 2x^2 + 7x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 49-64 < 0} \text{حذف گزینه‌ی «۲»} \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

۹۱. (گزینه ۴) اگر این دو عدد را x و y بنامیم، داریم:

$$x + y = 110 \Rightarrow y = 110 - x \quad *$$

$$P = xy \xrightarrow{*} P = x(110-x) = 110x - x^2$$

$$\xrightarrow{\text{ماکزیم است}} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-110}{2(-1)} = 55$$

$$\xrightarrow{*} y = 110 - 55 = 55$$

$$x^2 + y^2 = (55)^2 + (55)^2 = 6050$$

زنگی

$$x + (110-x) = 110 \xrightarrow{\text{ماکزیم}} x = 110-x \Rightarrow x = y = 55$$

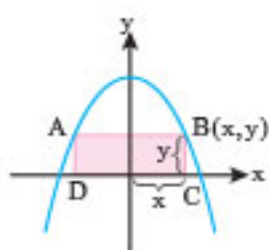
۹۲. (گزینه ۲)

$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(\frac{5}{2})^2 - 4 \times (-\frac{1}{2})(2)}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{25}{4} + 4}{2} = \frac{41}{8}$$

۹۳. (گزینه ۳) شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$y \begin{matrix} \square \\ x \end{matrix} \xrightarrow{\text{فرض سوال}} \text{محیط} = 2(x+y) = 30 \Rightarrow x+y=15$$

$$\Rightarrow y = 15 - x \quad *$$



۱۰۰. گزینه ۲) شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر مختصات

نقطه‌ی B را به صورت (x, y) در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{محیط مستطیل } ABCD = (AB + BC) \times 2$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = (2x + y) \times 2 = P$$

چون نقطه‌ی B روی سهمی قرار دارد، پس بین x و y رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$y = 12 - x^2 \xrightarrow{\text{در محیط}} P = 2(2x + 12 - x^2) = -2x^2 + 4x + 24$$

$$\Rightarrow \max(P) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4(-2)(24)}{4(-2)} = \frac{4(2+24)}{2} = 26$$

فصل ۴ معادله‌های گویا و رادیکالی

۱۰۱. گزینه ۱)

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2} \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} + \frac{12}{x^2-9} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{3(x^2-9) - 2x(x-3) + 12x}{x(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{3x^2 - 27 - 2x^2 + 6x + 12x}{x(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x - 27}{x(x-3)(x+3)} = 0 \xrightarrow{\text{صورت و مخرج مساوی صفر باشد}} x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (x+9)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+9=0 \Rightarrow x=-9 \xrightarrow{\text{چک کردن در مخرج}} \text{چک کردن نمی‌کند} \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{\text{چک کردن در مخرج}} \text{چک کردن می‌کند} \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۰۲. گزینه ۳) ابتدا مقدار a را می‌یابیم:

$$2-a = \frac{1}{a} \xrightarrow{\text{ضرب در } a} 2a - a^2 = 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a=1$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله دوم}} \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x=1$$

۱۰۳. گزینه ۲) ابتدا سمت چپ معادله را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^2 - 5x - 2(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{x+3}{2-x} \Rightarrow \frac{-2x^2 - 5x + 8}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{-(x-2)}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^2 + 5x - 12 = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm\sqrt{18}$$

۱۰۴. گزینه ۳)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{m} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{m}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2+x=m$$

$$\xrightarrow{\text{همه رو بیار یک طرف}} x^2+x-m=0 \xrightarrow{\text{شرط وجود جواب}} \Delta \geq 0 \Rightarrow 1-4(1)(-m) \geq 0$$

$$\Rightarrow 1+4m \geq 0 \Rightarrow 4m \geq -1 \xrightarrow{+4} m \geq -\frac{1}{4}$$

از آن جایی که m در مخرج است و نمی‌تواند صفر باشد، جواب تست به صورت $\{-\frac{1}{4}, +\infty\}$ است.

رنگی: حذف گزینه‌ی «۴»

$$m=0 \xrightarrow{\text{در معادله}} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$m=-\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{در معادله}} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = -4 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{1}{x(x+1)} = -4$$

$$\Rightarrow x^2+x+\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\Delta=1-1=0} \text{جواب دارد} \Rightarrow \text{گزینه‌های «۱» و «۲»}$$

۹۷. گزینه ۴) طول طناب به کار رفته برای محصور کردن این سطح برابر است با:

$$y+x+x+\text{محیط نیم دایره} = 70 \Rightarrow y+2x+\frac{2\pi x}{2} = 70$$

$$\xrightarrow{\pi=3} y+2x+3x=70 \Rightarrow y+5x=70 \Rightarrow y=70-5x$$

از طرفی مساحت ایجاد شده برابر است با:

$$S = \underbrace{xy}_{\text{برای مستطیل}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\pi x^2)}_{\text{برای نیم دایره}} \xrightarrow{\pi=3} S = xy + \frac{3}{2}x^2$$

$$\xrightarrow{*} S = x(70-5x) + \frac{3}{2}x^2 = 70x - 5x^2 + \frac{3}{2}x^2 = -\frac{7}{2}x^2 + 70x$$

حالا برای این که به بیشترین مقدار ممکن برای تابع مساحت یا ضابطه‌ی درجه‌ی دو برسیم، باید مقدار x را برابر $x = \frac{-b}{2a}$ انتخاب کنیم:

$$S = -\frac{7}{2}x^2 + 70x \Rightarrow x = \frac{-70}{2(-\frac{7}{2})} = 10 \text{ m}$$

$$\Rightarrow S = -\frac{7}{2}(10)^2 + 70(10) = 350 \text{ m}^2$$

۹۸. گزینه ۳) اگر مختصات نقطه‌ی A را به صورت $A(x, y)$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} AB = y \\ BC = x \end{cases} \Rightarrow S = AB \times BC = xy$$

حالا معادله‌ی خط d را می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{matrix} (4, 0) \\ (0, 3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow m = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{معادله خط}} y-0 = -\frac{3}{4}(x-4)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3 \xrightarrow{*} S = x(-\frac{3}{4}x + 3) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

$$\max(S) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9-0}{4(-\frac{3}{4})} = 3$$

رنگی: ضربان ماکزیمم شود

$$\frac{3}{4}x + (-\frac{3}{4}x + 3) = 3 = \text{ثابت} \xrightarrow{\text{ضربان ماکزیمم شود}} \frac{3}{4}x = -\frac{3}{4}x + 3 \Rightarrow x=2$$

۹۹. گزینه ۲) در حقیقت در این سؤال می‌خواهیم کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین منحنی

$y = x^2$ و خط $y = 2x - 3$ را پیدا کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم شخص A روی منحنی $y = x^2$ در نقطه‌ی $A(\alpha, \alpha^2)$ قرار دارد که کوتاه‌ترین فاصله‌ی ممکن را تا خط $2x - y - 3 = 0$ داشته باشد؛ پس کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را تا خط پیدا کنیم:

$$D = \frac{|a\alpha + b\alpha^2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2\alpha - \alpha^2 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha^2 - 2\alpha + 3|}{\sqrt{5}}$$

دلتای عبارت $\alpha^2 - 2\alpha + 3$ منفی است، پس این عبارت همواره مثبت است و داریم:

$$D = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 3}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha-1)^2 + 2}{\sqrt{5}}$$

برای این که D کمترین مقدار خودش را داشته باشد، باید صورت کسر کمترین مقدار خود را اختیار کند، زیرا مخرج عددی ثابت است، پس: $(\alpha-1)^2 \geq 0 \xrightarrow{+2} (\alpha-1)^2 + 2 \geq 2$ یعنی کمترین مقدار صورت برابر ۲ است و در نتیجه داریم:

$$\min(D) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

رنگی: حذف گزینه‌ی «۴»

$$D = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 3}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\min(D)} \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4-12}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

فهرست

فصل صفر: مروری بر مفاهیم پایه ۷



فصل ۱: تعیین علامت و نامعادله ۱۳



- ایستگاه ۱: تعیین علامت عبارت‌های جبری ۱۴
ایستگاه ۲: روش‌های حل نامعادله‌ها ۱۷
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۴۹۲

ریاضی ۱

فصل ۲: معادله‌ی درجه‌ی دوم ۲۳



- ایستگاه ۱: روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم ۲۴
ایستگاه ۲: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم ۲۸
ایستگاه ۳: تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم ۳۱
ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم ۳۳
ایستگاه ۵: مسائلی که به حل معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌رسند ۳۵
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۴۹۴

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۳: تابع درجه‌ی دوم (سه‌می) ۳۹



- ایستگاه ۱: سه‌می و ویژگی‌های آن ۴۰
ایستگاه ۲: نوشتن معادله‌ی سه‌می و نمودار آن ۴۱
ایستگاه ۳: کاربرد سه‌می در مسائل ماکزیمم و مینیمم ۴۷
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۴۹۹

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۴: معادله‌های گویا و رادیکالی ۵۱



- ایستگاه ۱: معادله‌های گویا ۵۲
ایستگاه ۲: معادله‌های رادیکالی ۵۶
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۰۳

ریاضی ۲

فصل ۵: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ۶۱



- ایستگاه ۱: ریشه، توان و توان‌های گویا ۶۲
ایستگاه ۲: عبارت‌های جبری ۶۸
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۰۵

ریاضی ۱

فصل ۶: قدرمطلق و جزء صحیح ۷۵



- ایستگاه ۱: قدرمطلق و ویژگی‌های آن ۷۶
ایستگاه ۲: جزء صحیح و ویژگی‌های آن ۸۳
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۰۸

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۷: توابع نمایی و لگاریتمی ۸۹



- ایستگاه ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن ۹۰
ایستگاه ۲: معادله‌ها و نامعادله‌های نمایی ۹۵
ایستگاه ۳: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن ۹۷
ایستگاه ۴: قوانین و ویژگی‌های لگاریتم ۱۰۱
ایستگاه ۵: معادله‌ها و نامعادله‌های لگاریتمی ۱۰۵
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۱۰

ریاضی ۲

فصل ۸: تابع دهم و یازدهم ۱۱۱



- ایستگاه ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۱۱۲
ایستگاه ۲: آشنایی با برخی از انواع توابع ۱۱۷
ایستگاه ۳: دامنه و برد توابع - تساوی دو تابع ۱۱۹
ایستگاه ۴: تابع یک‌به‌یک ۱۲۶
ایستگاه ۵: اعمال جبری روی توابع ۱۲۹
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۱۵

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۹: تابع دوازدهم ۱۳۵



- ایستگاه ۱: انتقال نمودارها ۱۳۶
ایستگاه ۲: توابع چندجمله‌ای ۱۴۱
ایستگاه ۳: توابع صعودی و نزولی ۱۴۵
ایستگاه ۴: ترکیب توابع ۱۵۱
ایستگاه ۵: تابع وارون ۱۶۰
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۲۱

ریاضی ۲
ریاضی ۳

فصل ۱۰: مثلثات دهم و یازدهم ۱۷۵



- ایستگاه ۱: مثلثات در لباس هندسه ۱۷۶
ایستگاه ۲: دایره‌ی مثلثاتی ۱۷۹
ایستگاه ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۸۴
ایستگاه ۴: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۱۸۸
ایستگاه ۵: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۹۰
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۲۸

ریاضی ۱
ریاضی ۲

فصل ۱۱: مثلثات دوازدهم ۱۹۷



- ایستگاه ۱: نسبت‌های مثلثاتی ۲۵ ۱۹۸
ایستگاه ۲: تابع‌های متناوب ۲۰۳
ایستگاه ۳: توابع مثلثاتی ۲۰۷
ایستگاه ۴: معادله‌های مثلثاتی ۲۱۴
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی ۵۳۳

ریاضی ۲
ریاضی ۳

فصل ۱۷: هندسه دوازدهم	۳۷۳
ایستگاه ۱: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی	۳۷۴
ایستگاه ۲: بیضی و ویژگی‌های آن	۳۸۴
ایستگاه ۳: دایره و ویژگی‌های آن	۳۹۳
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۶۹



ریاضی ۳

فصل ۱۸: مجموعه	۴۱۳
ایستگاه ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	۴۱۴
ایستگاه ۲: متمم یک مجموعه	۴۱۷
ایستگاه ۳: تعداد اعضای یک مجموعه	۴۱۹
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۷۲



ریاضی ۱

فصل ۱۹: الگو و دنباله	۴۲۳
ایستگاه ۱: الگو و مفهوم دنباله	۴۲۴
ایستگاه ۲: دنباله‌ی حسابی و ویژگی‌های آن	۴۲۸
ایستگاه ۳: دنباله‌ی هندسی و ویژگی‌های آن	۴۳۲
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۷۴



ریاضی ۱

فصل ۲۰: شمارش، بدون شمردن	۴۳۹
ایستگاه ۱: اصل ضرب و اصل جمع	۴۴۰
ایستگاه ۲: جایگشت	۴۴۳
ایستگاه ۳: ترکیب	۴۴۶
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۷۸



ریاضی ۱

فصل ۲۱: احتمال	۴۵۱
ایستگاه ۱: مفاهیم اولیه‌ی احتمال	۴۵۲
ایستگاه ۲: احتمال یا اندازه‌گیری شانس	۴۵۴
ایستگاه ۳: قوانین احتمال	۴۵۸
ایستگاه ۴: احتمال شرطی	۴۶۰
ایستگاه ۵: پیشامدهای مستقل	۴۶۳
ایستگاه ۶: قانون احتمال کل	۴۶۷
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۸۰



ریاضی ۱
ریاضی ۲
ریاضی ۳

فصل ۲۲: آمار	۴۷۷
ایستگاه ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار	۴۷۸
ایستگاه ۲: آمار توصیفی	۴۸۰
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۸۶



ریاضی ۱
ریاضی ۲

آزمون جامع	۴۸۹
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۸۷



ریاضی ۱
ریاضی ۲
ریاضی ۳

فصل ۱۲: حد و پیوستگی	۲۲۵
ایستگاه ۱: بخش‌پذیری	۲۲۶
ایستگاه ۲: فرایندهای حدی	۲۲۸
ایستگاه ۳: محاسبه‌ی حد توابع	۲۳۳
ایستگاه ۴: رفع ابهام صفرصفرم	۲۳۸
ایستگاه ۵: پیوستگی	۲۴۴
ایستگاه ۶: حد بی‌نهایت	۲۵۲
ایستگاه ۷: حد در بی‌نهایت	۲۵۷
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۳۸



ریاضی ۲
ریاضی ۳

فصل ۱۳: مشتق	۲۶۷
ایستگاه ۱: آشنایی با مفهوم مشتق	۲۶۸
ایستگاه ۲: تابع مشتق و فرمول‌های مشتق‌گیری	۲۷۲
ایستگاه ۳: مشتق تابع مرکب	۲۷۸
ایستگاه ۴: قاعده‌ی هوپیتال	۲۸۰
ایستگاه ۵: معادله‌ی مماس	۲۸۲
ایستگاه ۶: مشتق‌پذیری و ارتباط آن با پیوستگی	۲۸۴
ایستگاه ۷: مشتق توابع بدرفتار! ۵ شگفت‌انگیز...	۲۸۸
ایستگاه ۸: مشتق‌پذیری روی بازه و $\mathbb{R}$	۲۹۵
ایستگاه ۹: رابطه‌ی بین نمودارهای f و f'	۲۹۷
ایستگاه ۱۰: آهنگ تغییر	۳۰۱
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۴۶



ریاضی ۳

فصل ۱۴: کاربردهای مشتق	۳۰۹
ایستگاه ۱: توابع یکنوا و اکیداً یکنوا	۳۱۰
ایستگاه ۲: نقطه‌ی بحرانی	۳۱۳
ایستگاه ۳: اکسترمم‌های نسبی	۳۱۶
ایستگاه ۴: اکسترمم‌های مطلق	۳۲۳
ایستگاه ۵: بهینه‌سازی	۳۲۷
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۵۵



ریاضی ۳

فصل ۱۵: هندسه یازدهم	۳۳۳
ایستگاه ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال	۳۳۴
ایستگاه ۲: نسبت، تناسب و قضیه‌ی تالس	۳۳۹
ایستگاه ۳: تشابه	۳۴۴
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۶۲



ریاضی ۲

فصل ۱۶: هندسه تحلیلی	۳۵۷
ایستگاه ۱: دستگاه مختصات و ویژگی‌های آن	۳۵۸
ایستگاه ۲: معادله‌ی خط و وضعیت دو خط با هم	۳۶۲
ایستگاه ۳: فاصله‌ی نقطه از خط	۳۶۸
پاسخ‌نامه‌ی تشریحی	۵۶۵



ریاضی ۲