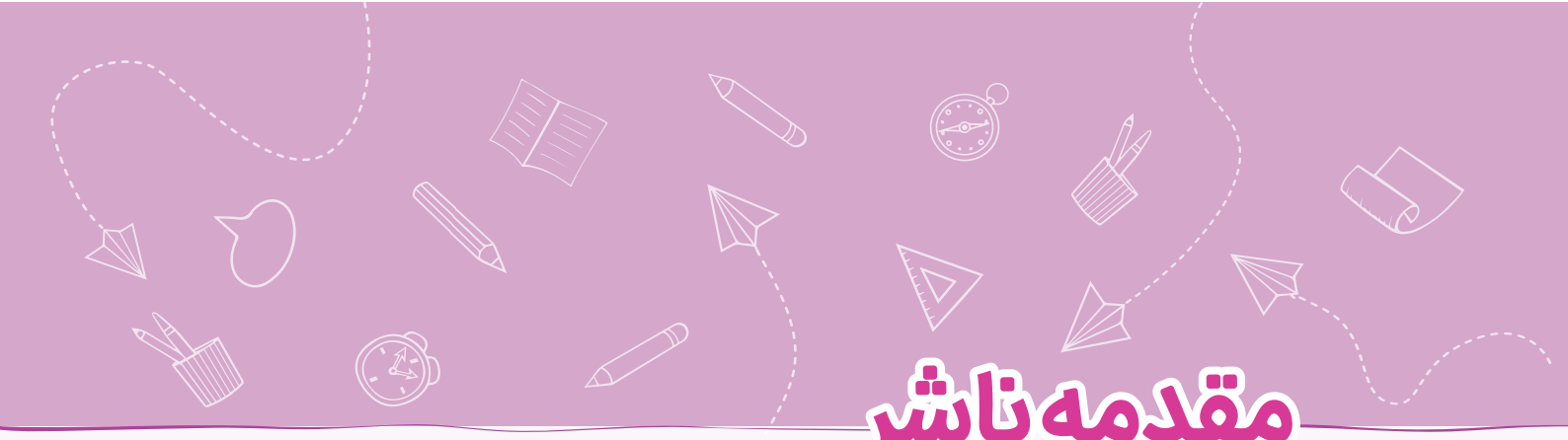




مقدمه ناشر

نسخه کاغذی کتاب شامل بانک تست گسسته و آمار و احتمال کنکور

در نسخه کاغذی کتاب، حدود ۲۰۰۰ تست موضوعی و طبقه‌بندی شده وجود دارد. در هر موضوع تست‌ها را از آسان به سخت چیده‌ایم. تمام مفاهیم کتاب درسی، تست‌های کنکورهای اخیر و آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز را پوشش داده‌ایم و با آدرس برایتان مشخص کرده‌ایم. همچنین در انتهای هر فصل نیز یک آزمون برایتان طرح کرده‌ایم تا کمی هم فضای چیدنش سؤال‌های آزمون را تجربه کنید.

نسخه EBOOK پاسخ‌های تشریحی

در این قسمت پاسخ‌های کاملاً تشریحی و آموزنده را برایتان آماده کرده‌ایم. در این پاسخ‌ها از روش‌های خلاقانه، نکات، تله‌ها و ... استفاده کردیم تا پاسخ‌ها بیشتر و بیشتر آموزنده و قابل فهم باشند.

نسخه EBOOK درس‌نامه

درس‌نامه‌هایی کاملاً خودآموز، با مثال‌هایی کاربردی و هماهنگ با بانک تست برایتان گذاشته‌ایم تا با مطالعه آن‌ها بتوانید به راحتی تمام تست‌های بانک تست را جواب دهید. این درس‌نامه‌ها تمام مفاهیم گسسته و آمار و احتمال کنکور را پوشش می‌دهند.

نسخه‌های EBOOK را می‌توانید با اسکن QR CODE دریافت کنید و از محتوای بی‌نظیر آن‌ها لذت ببرید.

فهرست

صفحه

۱ فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

۵	درس اول: استدلال ریاضی
۹	درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح
۱۹	درس سوم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

۲ فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

۳۱	درس اول: معرفی گراف
۴۲	درس دوم: مدل‌سازی با گراف

۳ فصل سوم: ترکیبیات

۵۳	درس اول: شمارش بدون شمردن
۵۹	درس دوم: مباحثی در ترکیبیات
۶۹	درس سوم: روش‌هایی برای شمارش

۴ فصل چهارم: آشنایی با مبانی ریاضیات

۷۶	درس اول: آشنایی با منطق ریاضی
۸۲	درس دوم: مجموعه‌ها

۵ فصل پنجم: احتمال

۹۳	درس اول: مبانی احتمال
۱۰۰	درس دوم: احتمال غیر هم‌شانس
۱۰۳	درس سوم: احتمال شرطی
۱۱۰	درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

۶ فصل ششم: آمار توصیفی و استنباطی

۱۱۴	درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها
۱۱۸	درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز
۱۲۳	درس سوم: معیارهای پراکندگی
۱۲۹	درس چهارم: روش‌های جمع‌آوری اطلاعات
۱۳۳	درس پنجم: برآورد
۱۳۸	پاسخنامه کلیدی

فصل ۱: آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

مثال نقض و اثبات مستقیم

۱- کدام یک از گزاره‌های زیر مثال نقض ندارد؟

(۱) به ازای هر عدد طبیعی n ، $2^n + 3$ اول است.

(۳) مربع هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر یا مساوی با آن عدد است.

۲- برای گزاره «عدد $2^{2^n} + 1$ به ازای همه عددهای طبیعی n عددی اول است.» از استفاده می‌کنیم.

(برگرفته از کتاب درسی)

(۱) اثبات - روش مستقیم (۲) اثبات - برهان خلف (۳) رد - مثال نقض (۴) رد - برهان خلف

۳- کدام عدد کلیت حکم «اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، $2^n + 1$ عددی اول است.» را نقض می‌کند؟

(ق.م)

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴- برای رد کردن گزاره «حاصل ضرب دو عدد اول به علاوه یک، همواره عددی زوج است.»، کدام گزینه یک مثال نقض مناسب است؟

(۱) ۷ و ۴ (۲) ۷ و ۵ (۳) ۷ و ۲ (۴) گزاره درست است و مثال نقض ندارد.

۵- به ازای کدام مقدار x گزاره «اگر $3x + 2$ اول باشد، x نیز اول است.» نقض می‌شود؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۹

۶- گزاره «عدد ۱، عددی فرد است ولی اول نیست.» یک مثال نقض برای کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

(۱) بعضی از اعداد اول، فرد نیستند.

(۳) بعضی از اعداد فرد، اول نیستند.

(۴) تمام اعداد فرد، اول‌اند.

۷- کدام گزینه هم‌زمان مثال نقضی برای هر دو گزاره: «مجموع دو عدد گنگ مثبت همواره گنگ است.» و «حاصل ضرب دو عدد گنگ مثبت همواره گنگ است.»

به حساب می‌آید؟

(۱) $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2} + 1$ و $\sqrt{2} - 1$ (۳) $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ (۴) $2 + \sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$

۸- کدام گزینه مثال نقض، برای گزاره «اگر x گنگ باشد آن گاه $x^2 + 4x + 5$ هم گنگ است.» به حساب می‌آید؟

(۱) $\sqrt{4} - 1$ (۲) $\sqrt{2} + 1$ (۳) $\sqrt{2} - 2$ (۴) $\sqrt{2} - 1$

(برگرفته از کتاب درسی)

۹- کدام گزینه را نمی‌توان به صورت مستقیم اثبات کرد؟

(۱) مجموع دو عدد متوالی فرد است.

(۳) مجموع چهار عدد متوالی مضرب ۴ است.

۱۰- برای کدام یک از گزاره‌های زیر مثال نقض وجود ندارد؟

(۱) مجموع پنج عدد متوالی همواره فرد است.

(۳) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همواره فرد است.

۱۱- برای کدام یک از گزاره‌های زیر نمی‌توان مثال نقض پیدا کرد؟

(۱) مجموع مربعات دو عدد زوج متمایز مضرب ۸ است.

(۳) مجموع مربعات دو عدد فرد متمایز مضرب ۸ است.

۱۲- اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، می‌توان ثابت کرد مربع کامل است.

(۱) $k + 4$ (۲) $2k + 1$ (۳) $4k + 1$ (۴) $2k + 4$

۱۳- کدام گزینه مثال نقض دارد؟

(۱) حاصل ضرب دو عدد به فرم $4k + 3$ عددی به شکل $4q + 1$ است.

(۲) مربع عددی به فرم $5k + 3$ عددی به شکل $5q + 4$ است.

(۳) حاصل ضرب دو عدد به فرم‌های $6k + 4$ و $6k' + 5$ عددی به فرم $6q + 2$ است.

(۴) حاصل ضرب دو عدد به فرم‌های $7k + 5$ و $7k' + 6$ عددی به فرم $7q + 1$ است.

۱۴- گزاره «به ازای همه عددهای طبیعی n : $2^{n+2} \leq (n+2)!$ » چند مثال نقض دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بیشتر از ۳

(ریاضی ۹۲)

۱۵- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.» را نقض می‌کند؟

(۱) ۶۱ (۲) ۶۴ (۳) ۶۶ (۴) ۵۸



۱۶- اگر $8k + 1$ مربع کامل باشد، کدام گزینه در مورد k درست است؟

- (۱) حاصل ضرب دو عدد متوالی (۲) حاصل جمع دو عدد متوالی (۳) میانگین دو عدد متوالی (۴) حاصل ضرب دو عدد متوالی تقسیم بر ۲

۱۷- می توان ثابت کرد عدد $n^2 - n$ همواره بر بخش پذیر است و اگر n فرد باشد این عدد همواره بر بخش پذیر است.

- (۱) $18 - 6$ (۲) $24 - 6$ (۳) $18 - 12$ (۴) $24 - 12$

۱۸- اگر $n^3 - n$ مضرب ۱۲ باشد، باقی مانده n بر ۴ برابر کدام یک از عددهای زیر نمی تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت ها

۱۹- برای اثبات حکم «برای هر عدد طبیعی n ، $5n + 7 - n^2$ عددی فرد است.» همه حالت های ممکن را در نظر می گیریم. در حالتی که $n = 2k + 1$ باشد، باید نشان دهیم کدام یک از گزینه های زیر همواره فرد است؟

- (۱) $4k^2 - 10k + 3$ (۲) $4k^2 - 10k + 7$ (۳) $4k^2 - 6k + 3$ (۴) $4k^2 - 6k + 7$

۲۰- برای اثبات حکم: «اگر n مضرب ۳ نباشد، $n^2 - 1$ مضرب ۳ است.» به روش در نظر گرفتن همه حالت ها، برای n چند حالت مختلف باید در نظر بگیریم؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(۴) با این روش نمی توان این حکم را ثابت کرد.

۲۱- در کدام گزینه با روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالت ها می توان ثابت کرد عبارت داده شده همواره زوج است؟

- (۱) $n^2 + 4n + 1$ (۲) $n^2 + 3n + 1$ (۳) $n^2 + 4n + 2$ (۴) $n^2 + 3n + 2$

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۲- کدام یک از گزاره های زیر مثال نقض ندارد؟

(۱) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی زوج باشد $a^2 + b^2$ فرد است. (۲) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد $a^2 + b^2$ زوج است.

(۳) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a + b$ عددی زوج باشد $a^2 + b^2$ فرد است. (۴) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a + b$ عددی فرد باشد $a^2 + b^2$ زوج است.

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۳- اگر n عددی طبیعی و کوچک تر مساوی ۶ باشد و $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، n چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۴- به ازای چند عدد طبیعی $n \leq 20$ عدد $\frac{n(n+1)}{3}$ عددی زوج است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۲۵- به ازای چند مقدار n از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 60\}$ حاصل $1 + 2 + 3 + \dots + n$ فرد است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۲۶- برای این که ثابت کنیم $3 - 5n + n^2$ به ازای هر عدد طبیعی n عددی فردی است یک بار n را زوج و بار دیگر فرد، فرض می کنیم. در این صورت از کدام هم ارزی استفاده کرده ایم؟

(۱) $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ (۲) $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

(۳) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ (۴) $(p \wedge q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

۲۷- می دانیم $S = \{5, 6, \dots, 10\}$ و A یک زیر مجموعه از S است به شرط آن که اگر $n \in A$ ، آن گاه $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ زوج است. در این صورت A چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۸- اگر به ازای هر عدد طبیعی n عبارت $n^2 + an + b^2$ زوج باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) a فرد و b زوج است. (۲) a زوج و b فرد است. (۳) a و b هر دو زوج اند. (۴) a و b هر دو فردند.

۲۹- اگر a مربع کامل باشد، یکی از عددهای a و همواره بر ۵ بخش پذیر است.

- (۱) $a^2 - 1$ (۲) $a^2 + 1$ (۳) $a^2 + 2$ (۴) $a^2 - 2$

۳۰- تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ مضرب ۴ است. n برابر کدام یک از عددهای زیر می تواند باشد؟

- (۱) ۱۴۰۱ (۲) ۱۴۰۲ (۳) ۱۴۰۳ (۴) ۱۴۰۴

برهان خلف

(قبل از پاسخ گویی به تست های این بخش یک بار نکات مربوط به اعداد گنگ و گویا را مرور کنید.)

(ریاضی ۸۶)

۳۱- اثبات کدام گزاره احتیاج به برهان خلف ندارد؟

(۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

(۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می توان رسم کرد.

(۳) در یک صفحه از نقطه مفروض فقط یک خط می توان بر خط مفروض عمود کرد.

(۴) مربع هر عدد طبیعی فرد از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

۳۲- برای اثبات این که «اگر $3n + 5$ زوج باشد آن گاه n فرد است» به روش برهان خلف، فرض می کنیم:

- (۱) $3n + 5$ فرد بوده و به زوج بودن n می رسیم.
 (۲) n زوج بوده و به فرد بودن $3n + 5$ می رسیم.
 (۳) $3n + 5$ زوج بوده و به زوج بودن n می رسیم.
 (۴) n زوج بوده و به زوج بودن $3n + 5$ می رسیم.

(برگرفته از کتاب درسی)

۳۳- کدامیک از گزاره های زیر را نمی توان با برهان خلف ثابت کرد؟

- (۱) حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
 (۲) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
 (۳) معکوس هر عدد گنگ نیز عددی گنگ است.
 (۴) اگر x و y دو عدد گنگ باشد، $x + y$ نیز گنگ است.

(برگرفته از کتاب درسی)

۳۴- اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$
 (۱) گنگ است - گنگ است.
 (۲) گنگ است - گویا است.
 (۳) گنگ است - ممکن است گنگ یا گویا باشد.
 (۴) ممکن است گنگ یا گویا باشد - گنگ است.

(ق.م)

۳۵- a و b عددهایی گنگ و r عددی گویا است. کدامیک از عددهای زیر گنگ است؟

- (۱) $a + r$ (۲) $a - b$ (۳) a^2 (۴) ra

۳۶- اگر a_1, a_2, a_3 عددهایی صحیح و b_1, b_2, b_3 نیز همان سه عدد ولی به ترتیب دیگری باشند، در این صورت گزاره « $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ »
 همواره است. گزاره های
 (۱) زوج - درست است که درستی آن را می توان با برهان خلف ثابت کرد.
 (۲) زوج - نادرست است که درستی آن را می توان با مثال نقض رد کرد.
 (۳) فرد - درست است و درستی آن را می توان با برهان خلف ثابت کرد.
 (۴) فرد - درست است و درستی آن را می توان به روش اشباع ثابت کرد.

(برگرفته از کتاب درسی)

۳۷- اگر a, b, c, d, e, f شش متغیر باشند، به طوری که هر کدام یا ۱ باشند یا -۱، چندتا از عبارتهای « $ab + bc + ca$ » و « $ab + bc + cd + da$ » و « $ab + bc + cd + de + ef + fa$ » می تواند برابر صفر باشد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

اثبات های بازگشتی / گزاره های همارز

۳۸- کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) صفر زوج است. $\Leftrightarrow$ صفر مضرب ۴ است.
 (۲) ۵ زوج است. $\Leftrightarrow$ ۸ اول است.
 (۳) $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$
 (۴) $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

۳۹- ترکیب دوشرطی $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ارزش و ترکیب دوشرطی $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$ ارزش دارد. (a و b هر دو عضو $\mathbb{R}$ هستند).

(برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) درست - درست
 (۲) درست - نادرست
 (۳) نادرست - درست
 (۴) نادرست - نادرست

۴۰- در کدام گزینه، گزاره ها همارز هستند؟

- (۱) $a = b$ و $|a| = |b|$ (۲) $a = b$ و $a^2 = b^2$ (۳) $a = b$ و $a^3 = b^3$ (۴) $a = b$ و $a^2 = ab$

۴۱- گزاره « $x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow |x| < 0$ » و گزاره « $x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$ » است.

- (۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست

۴۲- کدام دو گزاره زیر همارز نیستند؟

- (۱) « $\frac{a+b}{4} \geq \sqrt{ab}$ » و « $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ » اگر a و b دو عدد نامنفی باشند.
 (۲) « n^2 مضرب ۴ باشد» و « n مضرب ۴ باشد» اگر n عددی طبیعی باشد.
 (۳) «نقطه C روی عمودمنصف پاره خط AB است» و «فاصله نقطه C از دو سر پاره خط AB یکسان است».

$$(a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0 \text{ و } a^2 + b^2 + ab \geq 0$$

۴۳- اگر a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a^2 + b^2 = (a+b)^2$ در این صورت چندتا از عبارتهای $(a-b)^2$ ، $a^2b + b^2a$ و $(\frac{a}{4} + \frac{b}{4})^2$ همواره صفر است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(برگرفته از کتاب درسی)

۴۴- به ازای چند زوج مرتب مانند (a, b) ، مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۲

در مسائل مربوط به اثبات بازگشتی باید رابطه را آن قدر ساده کنیم تا در نهایت به یک رابطه بدیهی برسیم.

(برگرفته از کتاب درسی)

۴۵- کدامیک از نامساوی های زیر، نادرست است؟ ($a > 0$ و $b > 0$)

- (۱) $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (۲) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (۳) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ (۴) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \geq 2$

۴۶- در اثبات نامساوی $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم، در این صورت در نهایت به کدام نامساوی بدیهی زیر می‌رسیم؟

(برگرفته از کتاب درسی)

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \\ (2) \quad & (x+y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 0 \\ (3) \quad & (x+y-1)^2 \geq 0 \\ (4) \quad & (x+y+1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

۴۷- اگر a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a > b$ ، در اثبات نامساوی $a^3 \geq b^3 + ab(b-a)$ به روش استدلال بازگشتی، به کدام رابطه بدیهی زیر می‌رسیم؟

$$(1) \quad (a+b)^2 \geq 0 \quad (2) \quad a^2 + b^2 \geq 0 \quad (3) \quad a^2 + b^2 \geq ab \quad (4) \quad (a-b)^2 \geq 0$$

۴۸- در اثبات نامساوی $|a-b| \leq |a| + |b|$ با استدلال بازگشتی، به کدام رابطه همواره درست می‌رسیم؟

$$(1) \quad |ab| \geq 0 \quad (2) \quad (a-b)^2 \geq 0 \quad (3) \quad ab \leq |ab| \quad (4) \quad |a-b|^2 = (a-b)^2$$

۴۹- برای اثبات درستی گزاره «اگر $a, b > 0$ باشند: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ » با استفاده از گزاره‌های هم‌ارز به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & (a-b)^2 \geq 0 \\ (2) \quad & (a+b)^2 \geq 0 \\ (3) \quad & (a-b)^2 + (a+b)^2 \geq 0 \\ (4) \quad & (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

۵۰- برای اثبات نامساوی $(x-y)(z-t)(x+y)(z+t) \leq (xz-yt)^2$ به روش بازگشتی، در پایان به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & (xy-zt)^2 \geq 0 \\ (2) \quad & (xt-yz)^2 \geq 0 \\ (3) \quad & (xy+zt)^2 \geq 0 \\ (4) \quad & (xt+yz)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

۵۱- در اثبات نامساوی $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$ از طریق اثبات بازگشتی، کدام گزینه با نامساوی داده شده هم‌ارز است؟ ($a > 0$ و $b > 0$)

$$(1) \quad (a-b)^2 \geq 0 \quad (2) \quad (a+b)^2 \geq 0 \quad (3) \quad a^2 + b^2 \geq 0 \quad (4) \quad (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$$

۵۲- کدام یک از نامساوی‌های زیر هم‌ارز گزاره « $(\frac{x}{y} - \frac{y}{x})^2 + (\frac{y}{z} - \frac{z}{y})^2 + (\frac{x}{z} - \frac{z}{x})^2 \geq 0$ » است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & x + y + z \geq xy + yz + zx \\ (2) \quad & x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz + y + z + x \\ (3) \quad & x + y + z \geq xy + yz + zx \\ (4) \quad & x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \end{aligned}$$

(برگرفته از کتاب درسی)

۵۳- اگر گزاره $a^2 + b^2 + ab \geq 0$ با گزاره $(a + \frac{b}{p})^2 + X \geq 0$ هم‌ارز باشد، X کدام است؟

$$(1) \quad \frac{3b^2}{4} \quad (2) \quad \frac{b^2}{4} \quad (3) \quad a^2 + b^2 \quad (4) \quad 2a^2 + 2b^2$$

۵۴- در اثبات نامساوی $\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq \frac{4\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}$ برای عدد حقیقی و مثبت x به روش بازگشتی، به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

$$(1) \quad x^2 \geq 0 \quad (2) \quad \sqrt{x-1} \geq 0 \quad (3) \quad (x\sqrt{x}-1)^2 \geq 0 \quad (4) \quad (x-\sqrt{x})^2 \geq 0$$

۵۵- کدام یک از رابطه‌های دشرطی زیر نادرست است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

(۱) اگر n مضرب ۳ باشد، n^2 نیز مضرب ۳ است و برعکس.

(۲) اگر n حاصل ضرب دو عدد متوالی باشد، $4n+1$ مربع کامل است و برعکس.

(۳) اگر $n^2 + 2$ فرد باشد، $3n+1$ زوج است و برعکس.

(۴) اگر n فرد باشد، $3^n - 1$ زوج است و برعکس.

۵۶- در اثبات نامساوی $\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} \leq 2\sqrt{x}$ به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟ ($|x| \geq |a|, x > 0$)

$$(1) \quad 1 \geq 0 \quad (2) \quad a^2 \geq 0 \quad (3) \quad (a-1)^2 \geq 0 \quad (4) \quad |a-1| \geq 0$$

۵۷- برای اثبات نامساوی $4x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy + 2x + y$ به روش بازگشتی، به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x-1)^2 + (2x-y)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \\ (2) \quad & (2x-1)^2 + (x-y)^2 + (2y-1)^2 \geq 0 \\ (3) \quad & (2x-1)^2 + (2x-y)^2 + (2y-1)^2 \geq 0 \\ (4) \quad & (2x-1)^2 + (2x-y)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

۵۸- با استفاده از اثبات بازگشتی می‌توانیم ثابت کنیم: $(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x})(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}) \geq m$ اگر $x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ باشند، m حداکثر برابر چند می‌تواند باشد تا مطمئن شویم رابطه همواره برقرار است؟



(برگرفته از کتاب درسی)

۵۹- کدام گزاره را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

(۱) مجموع هر دو عدد فرد متوالی همواره بر ۴ بخش پذیر است.

(۲) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

(۳) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از یک، عدد $2^n - 1$ اول است.

(۴) میانگین ۴ عدد متمایز حقیقی همواره بزرگتر و یا مساوی دوتای آن‌ها است.

۶۰- کدام یک از اعداد زیر مثال نقضی است برای گزاره «اگر مجموع ارقام یک عدد بر ۶ بخش پذیر باشد، آن گاه خود عدد نیز بر ۶ بخش پذیر است»؟

(۱) ۵۱۲۴ (۲) ۲۳۱۱ (۳) ۹۱۱۱ (۴) گزاره مثال نقض ندارد.

۶۱- مجموع پنج عدد زوج متوالی همواره مضرب کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(برگرفته از کتاب درسی)

۶۲- به ازای چند عدد طبیعی $1 \leq n \leq 20$ عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

(برگرفته از کتاب درسی)

۶۳- اگر α و β دو عدد گنگ غیرقرینه و $\alpha + \beta$ گویا باشند، $\alpha\beta$ و $\alpha^2 + \beta^2$
(۱) گنگ است - گنگ است.
(۲) ممکن است گویا یا گنگ باشد - گنگ است.
(۳) گنگ است - ممکن است گویا یا گنگ باشد.
(۴) ممکن است گویا یا گنگ باشد - ممکن است گویا یا گنگ باشد.

(ق.م)

۶۴- گزاره «اگر $x > 2$ باشد، آن گاه $x^2 > 4$ است» هم‌ارز کدام گزاره است؟

(۱) اگر $x^2 < 4$ آن گاه $x < 2$ (۲) اگر $x^2 \geq 4$ آن گاه $x \geq 2$

(۳) اگر $x^2 \leq 4$ آن گاه $x \leq 2$ (۴) اگر $x^2 > 4$ آن گاه $x > 2$

۶۵- در اثبات گزاره «اگر $a > 0$ باشد، $a + \frac{1}{a} \geq 2$ » در نهایت به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم که ارزش آن با ارزش این گزاره برابر است؟

(۱) $a^2 + 1 > 0$ (۲) $a^2 - 1 > 0$ (۳) $(a+1)^2 \geq 0$ (۴) $(a-1)^2 \geq 0$ (برگرفته از کتاب درسی)

۶۶- در اثبات نامساوی $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq \frac{4}{a^4 + b^4}$ از طریق اثبات بازگشتی، رابطه درست به دست آمده کدام است؟

(۱) $a^4 + b^4 \geq 0$ (۲) $(a^4 + b^4)^2 \geq 0$

(۳) $(a^4 - b^4)^2 (a^4 + b^4)^2 \geq 0$ (۴) $(a-b)^2 (a+b)^2 (a^2 + b^2)^2 \geq 0$

۶۷- اگر a و b عددهایی صحیح و n عددی طبیعی باشد و $an^2 + bn + 1$ زوج باشد، n و $a + b$ است.

(۱) زوج - زوج (۲)زوج - فرد (۳)فرد - زوج (۴)فرد - فرد

۶۸- در اثبات رابطه $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} \geq 3(x-y)$ به کمک اثبات بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ (x و y دو عدد حقیقی مثبت هستند به طوری که $x > y$)

(۱) $(x-y)^2 \geq 0$ (۲) $(x-2y)^2 \geq 0$ (۳) $(x-3y)^2 \geq 0$ (۴) $(3x-y)^2 \geq 0$

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

ویژگی‌های بخش پذیری

سوال‌های آغازین این بخش اگر چه ممکن است ساده به نظر برسند اما سوال‌های مفهومی هستند و یادگرفتنشان ضروری است.

(برگرفته از کتاب درسی)

۶۹- اگر a ، b و c سه عدد طبیعی باشند، کدام گزینه درست نیست؟

(۱) $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (۲) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid bc$

(۳) $a \mid bc \Rightarrow a \mid c \vee a \mid b$ (۴) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b+c$

(برگرفته از کتاب درسی)

۷۰- چندان‌ا از رابطه‌های زیر درست است؟

(الف) $a \mid b+c \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$ (ب) $bc \mid a \Rightarrow b \mid a \wedge c \mid a$ (پ) $a \mid b \Rightarrow a+c \mid b+c$ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

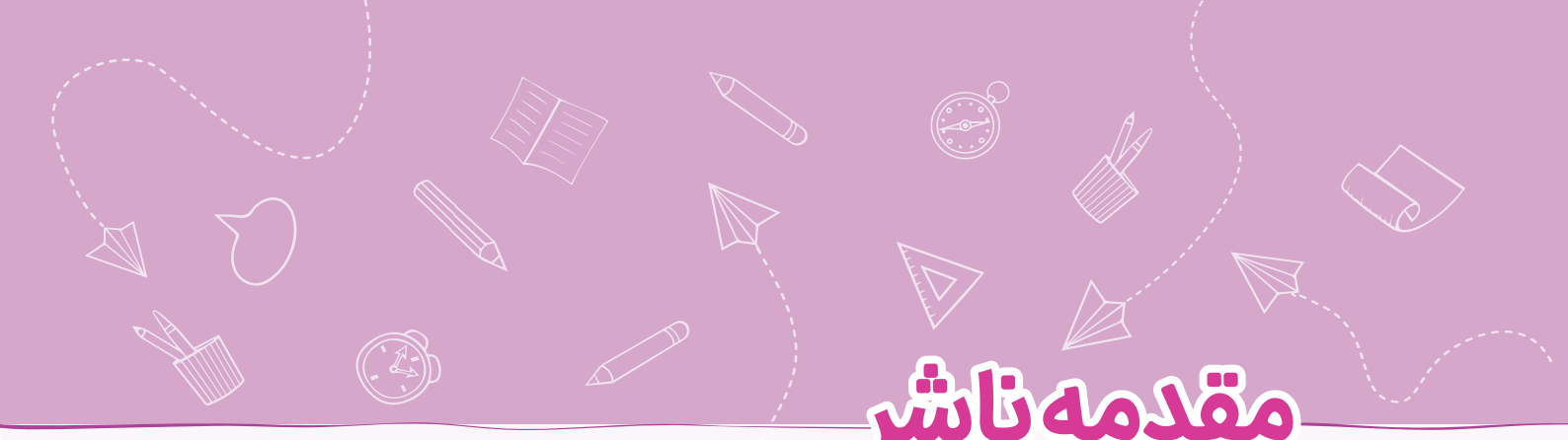
(ق.م)

۷۱- اگر $a-b \mid a$ ، آن گاه:

(۱) $a \mid a-b$ (۲) $b \mid a-b$ (۳) $a \mid b$ (۴) $a-b \mid b$

۷۲- اگر $a+b \mid a+c$ و $a+b \mid 2c$ ، کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

(۱) $a+b \mid a-c$ (۲) $a+b \mid 2b+c$ (۳) $a+b \mid 2a$ (۴) $a+b \mid 2b$



مقدمه ناشر

نسخه کاغذی کتاب شامل بانک تست هندسه کنکور

در نسخه کاغذی کتاب، حدود ۱۸۰۰ تست موضوعی و طبقه‌بندی شده وجود دارد. در هر موضوع تست‌ها را از آسان به سخت چیده‌ایم. تمام مفاهیم کتاب درسی، تست‌های کنکورهای اخیر و آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز را پوشش داده‌ایم و با آدرس برایتان مشخص کرده‌ایم. همچنین برای سه فصل اول که مربوط به سال دوازدهم است، در پایان هر فصل یک آزمون برایتان طرح کرده‌ایم.

نسخه EBOOK پاسخ‌های تشریحی

در این قسمت، پاسخ‌های کاملاً تشریحی، گام‌بندی شده و آموزنده را برایتان آماده کرده‌ایم. در این پاسخ‌ها از روش‌های خلاقانه (تیزبازی‌ها)، نکات، شفاف‌سازی‌ها، تله‌ها و استفاده کردیم تا پاسخ‌ها بیشتر و بیشتر آموزنده و قابل فهم باشند.

نسخه EBOOK درس‌نامه

درس‌نامه‌هایی کاملاً خودآموز، با مثال‌هایی کاربردی و هماهنگ با بانک تست برایتان گذاشته‌ایم تا با مطالعه آن‌ها بتوانید به راحتی تمام تست‌های بانک تست را جواب بدهید. این درس‌نامه‌ها تمام مفاهیم هندسه کنکور را پوشش می‌دهند.

نسخه‌های EBOOK را می‌توانید با اسکن QR CODE دریافت کنید و از محتوای بی‌نظیر آن‌ها لذت ببرید.

فهرست

۵	 ماتریس و کاربردها	فصل اول
۶	 درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها	
۱۵	 درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان	
۳۴	 آشنایی با مقاطع مخروطی	فصل دوم
۳۵	 درس اول: مکان هندسی	
۳۵	 درس دوم: دایره	
۴۱	 درس سوم: بیضی	
۴۷	 درس چهارم: سهمی	
۵۳	 بردارها	فصل سوم
۵۴	 درس اول: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$	
۶۱	 درس دوم: ضرب داخلی دو بردار	
۶۸	 درس سوم: ضرب خارجی دو بردار	
۷۳	 ترسیم‌های هندسی و استدلال	فصل چهارم
۸۱	 قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردها	فصل پنجم
۹۵	 چندضلعی‌ها	فصل ششم
۱۰۸	 تجسم فضایی	فصل هفتم
۱۱۷	 دایره	فصل هشتم
۱۲۹	 تبدیل‌های هندسی و کاربردها	فصل نهم
۱۳۸	 روابط طولی در مثلث	فصل دهم
۱۴۸	 پاسخنامهٔ کلیدی	

فصل اول

ماتریس و کاربردها

به فصل ماتریس و کاربردها خوش آمدید.

مباحث مهم و پرسؤال اعمال روی ماتریس‌ها - دترمینان - وارون ماتریس

مباحث پیش‌نیاز کمی معادله خط و مهارت محاسبه با چهار عمل اصلی

فصل‌های مرتبط با کتاب درسی فصل ۱ کتاب درسی هندسه سال دوازدهم

حرف آخر این فصل کاملاً مستقل است و یک تست مستقیماً در کنکور دارد که با تمرین

کافی می‌توان آن را پاسخ داد.

درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

معرفی ماتریس

۱- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، کدام گزینه صحیح نیست؟

$a_{ii} = 2 \quad (i = 1, 2, 3)$

$a_{31} = 3 \quad (3)$

$a_{32} = 1 \quad (2)$

$a_{21} = -1 \quad (1)$

۲- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ ، کدام گزینه صحیح است؟

$a_{12} = -1 \quad (4)$

$a_{31} = 3 \quad (3)$

$a_{42} = 2 \quad (2)$

(۱) مرتبه ماتریس 3×4 است.

۳- در ماتریس روبه‌رو حاصل $a_{44} - a_{32} + a_{12}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

-۱ (۳)

-۲ (۴)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۴- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 5}$ تمام درایه‌های به صورت a_{ij} مربوط به و حداکثر مقدار i برابر است.

(۴) سطر دوم - ۳

(۳) ستون دوم - ۵

(۲) سطر دوم - ۵

(۱) ستون دوم - ۳

۵- اگر تعداد ستون‌های ماتریس A از مرتبه $(5n-2) \times (3n+1)$ از تعداد سطرهای آن ۵ تا بیشتر باشد، ستون سوم آن چند درایه دارد؟

۱۸ (۴)

۱۳ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۶- در ماتریس A می‌دانیم $a_{ij} = -a_{ji}$ و $A = \begin{bmatrix} 0 & -b+4 & 3 \\ 3b & a^2-8 & 2c+7 \\ -3 & c-1 & 0 \end{bmatrix}$ ، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

۷- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & 3 & 2y \\ 4 & 0 & 5-x \end{bmatrix}$ ، حداقل مقدار عبارت $a_{11}^2 - a_{12} + 2a_{33}$ کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

تعریف ماتریس با درایه عمومی

۸- مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A = [2i + j^2]_{3 \times 3}$ کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

۹- در ماتریس $A = [mi - j^2]_{3 \times 3}$ اگر درایه واقع بر سطر سوم و ستون سوم ماتریس، صفر باشد، مجموع درایه‌های این ماتریس کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

۱۰- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i \geq j \\ ij & i < j \end{cases}$ مجموع درایه‌های سطر دوم کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۱۱- اگر ماتریس $A = [i^2 + j]_{3 \times 3}$ را به صورت زیر نمایش دهیم، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس B و ستون اول ماتریس C کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & | & & & \\ 5 & | & B & & \\ \hline C & | & 11 & & 12 \end{bmatrix}$$

۲۲ (۱)

۲۳ (۲)

۲۴ (۳)

۲۵ (۴)

۱۲- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ برابر کدام گزینه است؟

$[i^2 - j^2]_{2 \times 2} \quad (4)$

$[j^2 - i^2]_{2 \times 2} \quad (3)$

$[i^2 - j]_{2 \times 2} \quad (2)$

$[j^2 - i]_{2 \times 2} \quad (1)$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

۱۳- کدام تعریف برای تعریف درایهٔ عمومی ماتریس روبه‌رو صحیح است؟

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \\ j^2 & i = j \\ i & i > j \end{cases} \quad a_{ij} = \begin{cases} 2i-j+1 & i < j \\ i^2 & i = j \\ j & i > j \end{cases} \quad a_{ij} = \begin{cases} i+2j & i < j \\ i^2+j & i \geq j \end{cases} \quad a_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \\ ij & i \geq j \end{cases} \quad (1)$$

۱۴- در ماتریس $A = [2i + j]_{n \times n}$ اگر مجموع درایه‌های سطر دوم برابر ۳۴ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ستون سوم این ماتریس کدام است؟

$$48 \quad (4) \quad 42 \quad (3) \quad 36 \quad (2) \quad 30 \quad (1)$$

۱۵- در ماتریس $A = [i + 2j + 4]_{n \times n}$ درایهٔ سطر دوم و ستون آخر، $\frac{1}{9}$ درایهٔ سطر چهارم و ستون پنجم است. در این ماتریس a_{nn} کدام است؟

$$20 \quad (4) \quad 17 \quad (3) \quad 15 \quad (2) \quad 14 \quad (1)$$

۱۶- مجموع درایه‌های ماتریس $A = [\sin(i - j)]_{5 \times 5}$ کدام است؟

$$25 \sin 5 \quad (4) \quad 5 \sin 5 \quad (3) \quad 5 \sin 2 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

ماتریس‌های مربعی

۱۷- اگر ماتریس A ، یک ماتریس مربعی با دو ستون باشد، مجموع درایه‌های آن با توجه به تعریف $A = [i^2 - ij]$ کدام است؟

$$2 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

۱۸- اگر ماتریس $A = [2n + i - j]_{(5-n) \times (n-1)}$ مربعی باشد، حاصل جمع درایه‌های روی قطر فرعی کدام است؟

$$9 \quad (4) \quad 10 \quad (3) \quad 11 \quad (2) \quad 12 \quad (1)$$

۱۹- اگر درایه‌های ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \\ ij-1 & i = j \\ 2i-j & i > j \end{cases}$ تعریف شده باشند، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی کدام است؟

$$13 \quad (4) \quad 12 \quad (3) \quad 11 \quad (2) \quad 10 \quad (1)$$

۲۰- در ماتریس $A = [i^2 + j^2]_{4 \times 4}$ ، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی چند برابر مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی است؟

$$16 \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۲۱- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ درایه‌ها از دستور $a_{ij} = \begin{cases} mi+j & i < j \\ fi^2 & i = j \\ i-j & i > j \end{cases}$ به دست می‌آیند. اگر مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی سه برابر مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی باشد، m کدام است؟

$$-2 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

ماتریس‌های سطری و ستونی، قطری، اسکالر و صفر

۲۲- اگر ماتریس $A = [ni - j]_{(2n) \times (2n-5)}$ ستونی باشد، a_{41} کدام است؟

$$9 \quad (4) \quad 8 \quad (3) \quad 7 \quad (2) \quad 6 \quad (1)$$

۲۳- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} x^3+1 & x^2-1 \\ x^3-1 & x^4-1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (1)$$

۲۴- ماتریس A دارای $n-4$ سطر و $n+2$ ستون است. اگر ماتریس A سطری باشد، کدام ماتریس قطری است؟

$$\begin{bmatrix} n-2 & n-5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} 3 & n-4 \\ n+2 & n-1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} n+2 & 0 \\ n-4 & n-2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} n+2 & 1 \\ 0 & n-4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

۲۵- اگر $A_{m \times n}$ ماتریس ستونی و $B_{f \times m}$ ماتریس مربعی باشد، کدام گزینه ماتریس صفر است؟

$$\begin{bmatrix} n-2 & m-3 \\ n-2 & m-3 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} n-1 & m-4 \\ n-1 & m-4 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} n-4 & m-2 \\ n-3 & m-3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} m-1 & n-1 \\ n-2 & m-3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

۲۶- اگر درایه‌های ماتریس اسکالر $A = [a_{ij}]_{5 \times 5}$ از رابطهٔ $a_{ij} = \begin{cases} 3a-2b & i < j \\ 2a-b+1 & i = j \\ 5-a-b & i > j \end{cases}$ به دست آید، حاصل جمع درایه‌های روی قطر فرعی کدام است؟

$$10 \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

۲۷- اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ m & 2 \\ -1 & n^2 \end{bmatrix}$ و $B_{m \times n}$ با هم برابر باشند، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس B کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۲۸- اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} x-2y & 2 \\ 2-x & y \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ y-1 & y^2 \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $x+y$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقداری برای x و y نمی‌توان یافت.

۲۹- اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} 2a+b & 0 & 3c+d \\ d+c & 1 & 2b \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ b & 1 & 2c \end{bmatrix}$ با هم برابر باشند، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2a+b & b-1 \\ -3 & 2b+5 \end{bmatrix}$ و $A+B=2I$ باشد، آنگاه مقدار $a-b$ کدام است؟

- (۱) هیچ مقداری برای a و b پیدا نمی‌شود. (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۱- اگر برای دو ماتریس A و B داشته باشیم: $A+B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $A-B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۲- اگر $A = [i^2 + j]_{3 \times 3}$ ، $B = [ij - 2]_{3 \times 3}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $A+B$ کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۳۳- اگر $A = [i^2 + j]_{4 \times 4}$ ، $B = [j - i - 3]_{4 \times 4}$ و ماتریس C را به صورت $C = 3A - B$ تعریف کنیم، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی C کدام است؟

- (۱) ۱۳۱ (۲) ۱۳۲ (۳) ۱۳۳ (۴) ۱۳۴

۳۴- اگر $A = [i + 1]_{3 \times 3}$ ، $B = [j - 1]_{3 \times 3}$ و بدانیم ماتریس $A + 2B - C$ ماتریس همانی است، مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴) ۴۲

۳۵- از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 3A + [ni + j]_{n \times n}$ ، مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $I - 2A$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

ضرب ماتریس‌ها

۳۶- در حاصل ضرب $[0]_{5 \times 2} \times [0]_{4 \times 5} \times [0]_{3 \times 4}$ ، مرتبه ماتریس A کدام است؟

- (۱) 3×2 (۲) 2×3 (۳) 4×5 (۴) 5×2

۳۷- اگر $A = [0]_{2 \times 3}$ ، $B = [0]_{3 \times 3}$ و $C = [0]_{4 \times 3}$ ، کدام ضرب قابل تعریف است؟

- (۱) ABC (۲) ACB (۳) BAC (۴) هیچ‌کدام

۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} x \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $AB = +1$ باشد، x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، اختلاف درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس‌های AB و BA کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۴۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و ماتریس AB قطری باشد، آنگاه حاصل $a-b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۷ (۴) -۷



۴۱- حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A \times B$ ، با فرض $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i < j \\ 0 & i = j \\ 2i - j & i > j \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i < j \\ 0 & i = j \\ 2i - j & i > j \end{cases}$ است، کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) صفر

(خارج ۹۸)

۴۲- به ازای کدام مقدار x و y ، ماتریس $\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ y & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟

(۱) $x = 1, y = -7$ (۲) $x = 2, y = -7$ (۳) $x = 2, y = -5$ (۴) $x = 1, y = -5$

۴۳- اگر $A = \begin{bmatrix} y & z & y \\ 2 & 0 & 4z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} y & -1 & x \\ 0 & 0 & -x \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و AB ماتریسی اسکالر باشد، حاصل $x + y + z$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) AB نمی‌تواند اسکالر باشد.

۴۴- مجموع مقادیر x از معادله $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -x \end{bmatrix} = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۴۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ 12 & c & d \\ e & f & 21 \end{bmatrix}$ ، $A \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ 12 & c & d \\ e & f & 21 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

(سراسری ۹۸)

۴۶- از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ ، عدد غیر صفر x ، کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۴۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $D = ABC$ باشد، به ازای کدام مقدار x ، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی

(سراسری نوبت اول ۱۴۰۲)

ماتریس D برابر هستند؟

(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۸- در رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & -2 & 0 & 8 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ ، حاصل مقدار $b_1 + a_2 + c_3$ کدام است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۷ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵

۴۹- اگر α و β جواب‌های معادله $m = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -4 \\ x \end{bmatrix}$ باشند و رابطه $\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta} = 3$ برقرار باشد، m کدام است؟

(۱) ۱۳ (۲) ۳۷ (۳) -۱۳ (۴) -۳۷

درایه خاص C_{ij}

۵۰- فرض کنید $A = [i + 1]_{2 \times 2}$ ، $B = [j - 1]_{2 \times 2}$ و $C = BA$ باشد، در این صورت درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس C کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & y \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ و در ماتریس $C = AB$ بدانیم $c_{11} = 4$ و $c_{22} = 2y$ ، مقدار xy کدام است؟

(۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۱۰ (۴) -۱۰

(سراسری ۱۴۰۰)

۵۲- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

(خارج ۹۹)

۵۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^T کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(سراسری ۹۹)

۵۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^T کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

(سراسری خارج ۱۴۰۱)

۵۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^T کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 9 & 12 & 16 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

(سراسری نوبت اول ۱۴۰۳)

۵۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس A^T کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 7 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

(سراسری ۹۷)

۵۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^T کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

خواص ضرب ماتریس‌ها

۵۸- ماتریس $AB - B^T$ با کدام ماتریس برابر است؟

(۱) $B(A - B)$ (۲) $B(A - I)$ (۳) $(A - B)B$ (۴) $(A - I)B$

۵۹- A ، B و C سه ماتریس مربعی مرتبه ۴ و I ماتریس همانی مرتبه ۴ است. کدام گزینه در حالت کلی صحیح نیست؟

(۱) $AB + AC = A(B + C)$ (۲) $BA + B = B(I + A)$ (۳) $AB - CB = (A - C)B$ (۴) $AB - CA = A(B - C)$

۶۰- اگر $AB = 2B$ و $BA = -A$ باشد، حاصل $(A + B)(A - 2B)$ کدام است؟

(۱) $A - 2B$ (۲) B (۳) $2B + 2A$ (۴) A

۶۱- اگر $AB - BA = 2I$ باشد، حاصل $A^2B - BA^2$ کدام است؟

(۱) $2A$ (۲) $2B$ (۳) $4A$ (۴) $4B$

۶۲- اگر $A + I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $AB + B - A$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۶۳- اگر $A = [ij - 3]_{2 \times 2}$ و B و C ماتریس‌های مرتبه ۲ باشند و $BC = I$ ، ماتریس حاصل عبارت $(AB + 2B)(C - 2CA)$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

۶۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = [i^T + j - 3]_{3 \times 3}$ ، مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس $A(BC - B) + 2AB$ کدام است؟

(۱) ۴۰۴ (۲) ۴۰۳ (۳) ۴۰۲ (۴) ۴۰۱



۶۵- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس $B - \frac{3}{2}A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟
(سرآسری نوبت اول ۱۴۰۳)

۳ (۱) ۹ (۳) -۳ (۲) -۹ (۴)

به توان رساندن ماتریس‌ها

۶۶- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A^2 - A$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۶۷- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 2 & i \geq j \\ -1 & i < j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های A^2 کدام است؟

۳ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴)

۶۸- اگر $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(AC^2 + BC^2)(A + B)$ کدام است؟

۱۲۶ (۱) ۱۲۷ (۲) ۱۲۸ (۳) ۱۲۹ (۴)

۶۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ و $A^2 - B$ ماتریس صفر باشد، $b - a$ کدام است؟

۵ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۷۰- چند ماتریس به صورت $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$ وجود دارد، به طوری که ماتریس A^2 برابر با $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ باشد؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) صفر (۴)

۷۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A^3 کدام است؟

۳۳ (۱) ۳۴ (۲) ۳۵ (۳) ۳۶ (۴)

۷۲- مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس اسکالر A از مرتبه ۴ است، برابر ۲- است. مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس A^4 کدام است؟

۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

۷۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ، آن‌گاه A^{100} با کدام ماتریس برابر است؟

$A^{100} - I$ (۱) $A^{100} + I$ (۲) $A^{100} + 2I$ (۳) A^{100} (۴)

۷۴- اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ و $A^2 = A$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^5 کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

محاسبه توان ماتریس‌های متناوب و خاص

۷۵- اگر $A^2 = I$ باشد، A^{201} کدام است؟

I (۱) $-I$ (۲) A (۳) $-A$ (۴)

۷۶- اگر $A^2 = 2I$ باشد، A^{18} کدام است؟

$512A$ (۱) $256A$ (۲) $512I$ (۳) $256I$ (۴)

۷۷- اگر $A^2 = -A$ باشد، A^{17} کدام است؟

A (۱) $-A$ (۲) I (۳) $-I$ (۴)

۷۸- اگر $A^3 = \bar{O}$ باشد، آن‌گاه $(A^2 - I)^3$ کدام است؟

$3A - I$ (۱) $3A + I$ (۲) $3A^2 - I$ (۳) $3A^2 + I$ (۴)

۷۹- اگر $A^2 = -2A$ باشد، A^7 کدام است؟

- (۱) $-64A^2$ (۲) $64A^2$ (۳) $-32A^2$ (۴) $32A^2$

۸۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل ضرب درایه‌های ستون اول A^n کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 21×2^{39} (۲) 21×2^{37} (۳) 19×2^{39} (۴) 19×2^{37}

۸۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های $A^5 + A^6$ کدام است؟

- (۱) -428 (۲) -468 (۳) -528 (۴) -568

۸۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 27 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، n کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۸۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $BA^n = \begin{bmatrix} 80 & 80 \\ -16 & -16 \end{bmatrix}$ باشد، n کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۸۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^{12} کدام است؟

- (۱) 3×2^{10} (۲) 3×2^{11} (۳) 3×2^{12} (۴) 3×2^{13}

۸۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^6 + A^4 + A^2$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۵۶

۸۶- ماتریس $A = \begin{bmatrix} -\cot x & \frac{1}{\sin x} \\ -\frac{1}{\sin x} & \cot x \end{bmatrix}$ را با شرط $x \neq k\frac{\pi}{4}$ داریم. مجموع درایه‌های ماتریس $A^{12} + A^{11} - A^2 + I$ به ازای $x = 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۸۷- اگر $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{70} + A^{30}$ کدام است؟

- (۱) $2I$ (۲) $2A$ (۳) $A + I$ (۴) $A + 2I$

۸۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های A^5 کدام است؟

- (۱) ۴۸۴ (۲) ۴۸۶ (۳) ۴۸۸ (۴) ۴۹۰

۸۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $(A^2 - I)(A^2 + A + I^2)(A^2 - A + I^2)$ کدام است؟

- (۱) -430 (۲) -432 (۳) -434 (۴) -436

۹۰- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل جمع درایه‌های ماتریس A^6 کدام است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۲۷ (۳) ۲۴۳ (۴) ۹

۹۱- اگر ماتریس A به صورت $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $2A + A^2 + 3A^3 + A^5$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۹۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^3 کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۴



۹۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^6 کدام است؟

۸۷ (۴)

۸۶ (۳)

۸۵ (۲)

۸۴ (۱)

۹۴- اگر $BA = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & -8 & -3 \end{bmatrix}$ ، $AB = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 5 \\ 9 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ و $B^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 4 & -1 & 11 \end{bmatrix}$ باشد، سطر اول ماتریس $(2A - B)^T$ کدام است؟

$[10 \quad -24 \quad -3]$ (۴)

$[10 \quad -24 \quad 3]$ (۳)

$[11 \quad 24 \quad 3]$ (۲)

$[11 \quad 24 \quad -3]$ (۱)

۹۵- اگر A اسکالر مرتبه ۳ و $B^T = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 4 & 8 & 5 \\ 12 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $AB = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -2 \\ -8 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ باشد، ستون سوم ماتریس $(A + B)(A - 3B)$ کدام است؟

$\begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -15 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -15 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} -1 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$ (۱)

۹۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^{21} کدام است؟

3^{22} (۴)

3^{21} (۳)

3^{20} (۲)

3^{19} (۱)

۹۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{2024} کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

۹۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ باشد و $\bar{O} = A^6 - 3A^4 - mI$ باشد، m کدام است؟

۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

۹۹- اگر $B = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $B(BAB)^T B = 64A$ ، برای a چند عدد طبیعی یکره‌ای وجود دارد؟

۹ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

صفر (۱)

۱۰۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های A^n برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟

-۱۷۶ (۴)

-۱۷۴ (۳)

-۱۷۲ (۲)

-۱۷۰ (۱)

۱۰۱- اگر دنباله ماتریس‌های 2×2 را به صورت $A_n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ تعریف کنیم، مجموع درایه‌های $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۶۷ (۴)

۴۷ (۳)

۳۸ (۲)

۳۰ (۱)

۱۰۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^{2n} + A^{2n+1} + A^{2n+2}$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

۱۰۳- اگر $A^T = \bar{O}$ باشد، حاصل $(2A + I)^8$ کدام است؟

$I + 64A$ (۴)

$I + 32A$ (۳)

$I + 16A$ (۲)

$I + 8A$ (۱)

۱۰۴- اگر برای ماتریس A بدانیم $A^T = \bar{O}$ ، حاصل $A(2A - I)^6$ کدام است؟

$2A - 11A^T$ (۴)

$A - 12A^T$ (۳)

$2A - 7A^T$ (۲)

$A - 7A^T$ (۱)

۱۰۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $(A - I)^{10}$ کدام است؟

-۱ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۰۶- اگر $AB = A$ و $BA^T = B^T$ باشد، ماتریس A^F کدام است؟

- (۱) A^T (۲) AB^T (۳) I (۴) $B^T A$

۱۰۷- اگر $A^T = 3A$ باشد، حاصل $(A - 2I)^F$ کدام است؟

- (۱) $16I - 3A$ (۲) $16I - 5A$ (۳) $8I - 3A$ (۴) $8I - 5A$

۱۰۸- اگر برای ماتریس A بدانیم $A^T = A$ ، ماتریس $(A + I)^5$ کدام است؟

- (۱) $8A$ (۲) $16A$ (۳) $32A$ (۴) $64A$

۱۰۹- اگر $A^T = 2A$ و $B = 2A + I$ باشد، آن گاه حاصل B^T کدام است؟

- (۱) $112A + I$ (۲) $114A + I$ (۳) $116A + I$ (۴) $118A + I$

۱۱۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^V + A^H$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۱- اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و $B = 2A - I$ و $A^T = 3A - I$ باشد، حاصل B^T کدام است؟

- (۱) $8A - 3I$ (۲) $8A + 3I$ (۳) $8A - 4I$ (۴) $8A + 4I$

۱۱۲- اگر $\bar{O} = A + I + A^T + A^F + A^3$ باشد، A^{26} کدام است؟

- (۱) A^6 (۲) A^T (۳) A^T (۴) A^F

۱۱۳- اگر $\bar{O} = 4I + 6A + 4A^T + A^2$ باشد، به ازای کدام n رابطه $(A + I)^n = A + I$ برقرار است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۱۱۴- اگر A و B ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه، $A^T = 2A$ و $B = I - 3A$ باشد، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $AB = B^T$ (۲) $AB^T = I$ (۳) $AB = BA$ (۴) $A = B^T$

۱۱۵- اگر $\bar{O} = 4BA + AB + KB^3A$ باشد، K کدام است؟

- (۱) -64 (۲) -32 (۳) -16 (۴) -8

۱۱۶- اگر بدانیم $3A^T = 4A$ و $A^{19} = \frac{2^a}{3^b} A$ باشد، $a - b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

ماتریس‌های تعویض‌پذیر و اتحادها

۱۱۷- اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، $a + b$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) -2 (۳) -3 (۴) -4

۱۱۸- اگر ماتریس‌های $\begin{bmatrix} x & z \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & y \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند و مجموع درایه‌های دو ماتریس برابر باشند، $2x - y + z$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) -2 (۳) -3 (۴) -4

۱۱۹- اگر ضرب ماتریس‌های $\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، حاصل $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 & -y \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} y-2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $(A + B)^T = A^T + B^T + 2BA$ ، حاصل $x + y$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) -2 (۳) -3 (۴) -4

۱۲۱- اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و تعویض‌پذیر باشند، حاصل $(A + B)^T - (A - B)^T + 4AB$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\bar{O}$ (۲) $4BA$ (۳) $6BA$ (۴) $8BA$

۱۲۲- اگر $A = [\sin(i^T - j)]_{F \times F}$ و I ماتریس همانی مرتبه ۴ باشد، A با چه تعداد از ماتریس‌های روبه‌رو تعویض‌پذیر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^T = \alpha A + \beta I_2$ باشد، دوتایی (α, β) کدام است؟

- (۱) $(11, 2)$ (۲) $(2, 13)$ (۳) $(4, 11)$ (۴) $(4, 13)$

۱۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^T + aI = bA$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) -5 (۲) 5 (۳) 10 (۴) 15

۱۲۵- به ازای کدام مقدار a ، برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ رابطه $A^T = \gamma I$ برقرار است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) -2 (۴) 2

۱۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A^T = aA + bI$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 5 (۳) 9 (۴) 19

۱۲۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^T - A^T = mA + nI$ ، آن گاه دوتایی مرتب (m, n) کدام است؟

- (۱) $(5, 19)$ (۲) $(3, 13)$ (۳) $(-5, 19)$ (۴) $(-3, 13)$

۱۲۸- اگر A ماتریس 3×3 و $A^T = A - I$ باشد، A^{31} کدام است؟

- (۱) A (۲) $-A$ (۳) $A - I$ (۴) $I - A$

۱۲۹- اگر $A^T = 2A - 3I$ باشد و $A^5 = aA + bI$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) -1 (۴) -2

۱۳۰- اگر A ماتریس مربعی، $A^T = I - A$ و $A^n = 13A - 8I$ باشد، n کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8

درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان

تعریف وارون ماتریس

۱۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه مجموع درایه های A^{-1} کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۱۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، ستون دوم ماتریس A^{-1} کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

۱۳۳- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A + B = 2I$ باشد، وارون ماتریس B کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

۱۳۴- اگر $A = [i^2 + j - 2]$ ، مجموع درایه های $A^{-1} - I_2 + 3A^{-1}$ کدام است؟

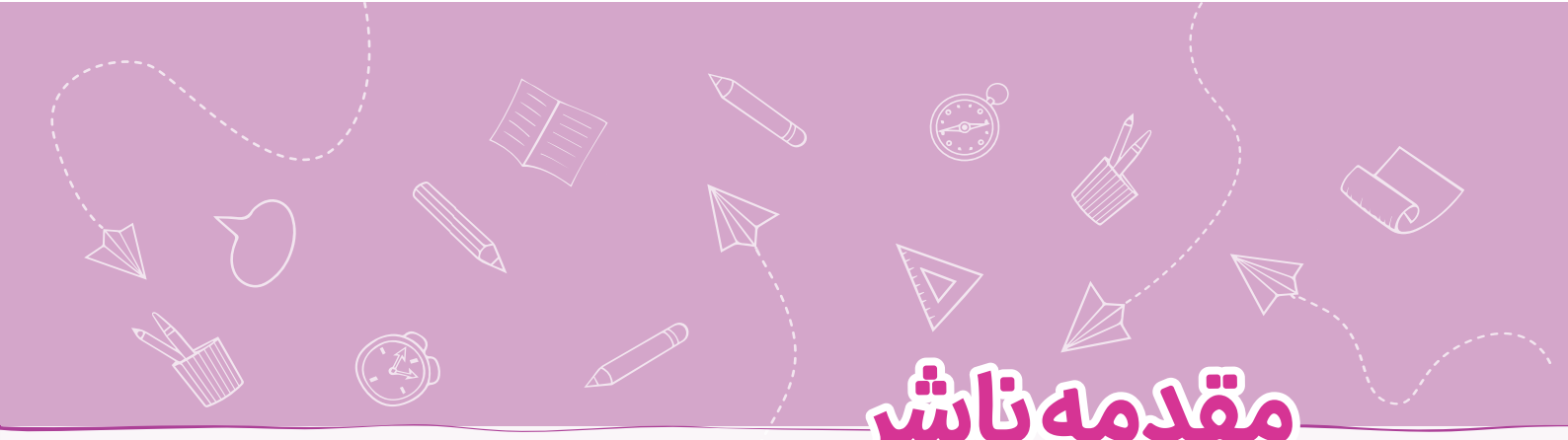
- (۱) 6 (۲) 7 (۳) 8 (۴) 9

۱۳۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس AB کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$

۱۳۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، حاصل $23(A + 2B)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$



مقدمه ناشر

نسخه کاغذی کتاب شامل بانک تست حسابان و ریاضیات پایه کنکور

در نسخه کاغذی کتاب، بیش از ۳۶۰۰ تست موضوعی و طبقه‌بندی‌شده وجود دارد. در هر موضوع، تست‌ها را از آسان به سخت چیده‌ایم. تمام مفاهیم کتاب درسی، تست‌های کنکورهای اخیر و آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز را پوشش داده‌ایم و با آدرس برایتان مشخص کرده‌ایم. حتی سؤال‌های شبیه‌ساز کنکور را هم با آدرس «مثل کنکور» برایتان آورده‌ایم تا خیالتان از سؤال‌های کنکوری راحت باشد.

نسخه EBOOK پاسخ‌های تشریحی

در این قسمت، پاسخ‌های کاملاً تشریحی و آموزنده را برایتان آماده کرده‌ایم. در این پاسخ‌ها از روش‌های خلاقانه، نکات، تله‌ها و استفاده کردیم تا پاسخ‌ها بیشتر و بیشتر آموزنده و قابل فهم باشند.

نسخه EBOOK درس‌نامه

درس‌نامه‌هایی کاملاً خودآموز، با مثال‌هایی کاربردی و هماهنگ با بانک تست برایتان گذاشته‌ایم تا با مطالعه آن‌ها بتوانید به راحتی تمام تست‌های بانک تست را جواب بدهید. این درس‌نامه‌ها تمام مفاهیم حسابان و ریاضیات پایه کنکور را پوشش می‌دهند.

نسخه‌های EBOOK را می‌توانید با اسکن QR CODE دریافت کنید و از محتوای بی‌نظیر آن‌ها لذت ببرید.

فهرست

فصل اول: تابع

- درس ۱: رابطه و بازنمایی‌های یک رابطه ۶
 درس ۲: دامنهٔ توابع ۱۰
 درس ۳: معرفی چند تابع خاص ۱۵
 درس ۴: تبدیل نمودارها ۱۹
 درس ۵: توابع چندجمله‌ای ۲۷
 درس ۶: اعمال جبری روی توابع ۳۰
 درس ۷: ترکیب توابع ۳۳
 درس ۸: توابع یکنوا ۳۹
 درس ۹: تابع یک‌به‌یک ۴۳
 درس ۱۰: تابع وارون ۴۵
 درس ۱۱: بُرد ۵۴
 درس ۱۲: تقسیم ۵۶

فصل دوم: مثلثات

- درس ۱: رادیان ۶۲
 درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ۶۴
 درس ۳: دایرهٔ مثلثاتی ۶۸
 درس ۴: اتحادهای مثلثاتی مقدماتی ۷۱
 درس ۵: زوایای متمم، مکمل، قرینه و هم‌پایان ۷۴
 درس ۶: اتحادهای مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ و 2α و ۷۶
 درس ۷: توابع متناوب ۸۶
 درس ۸: نمودار توابع سینوسی و کسینوسی ۸۸
 درس ۹: تانژانت ۹۴
 درس ۱۰: معادلهٔ مثلثاتی ۹۷

فصل سوم: حد، پیوستگی و مجانب

- درس ۱: همسایگی ۱۰۴
 درس ۲: فرایندهای حدی و قوانین محاسبهٔ حد ۱۰۴
 درس ۳: رفع ابهام صفرصفرم ۱۱۰
 درس ۴: حد بی‌نهایت ۱۲۰
 درس ۵: حد در بی‌نهایت ۱۲۴
 درس ۶: مجانب ۱۳۱
 درس ۷: پیوستگی ۱۳۶

فصل چهارم: مشتق

- درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ۱۴۴
 درس ۲: قواعد مشتق‌گیری ۱۴۶
 درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده‌کردن) ۱۵۱
 درس ۴: معادلهٔ خط مماس بر منحنی ۱۵۵
 درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق‌گیری در حضور براکت و قدرمطلق ۱۵۸
 درس ۶: پیوستگی و مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه) ۱۶۰
 درس ۷: نقاط مشتق‌ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم ۱۶۲
 درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق ۱۶۶
 درس ۹: مشتق تابع مرکب ۱۶۸
 درس ۱۰: آهنگ تغییر ۱۷۳

فصل پنجم: کاربرد مشتق

- درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق ۱۷۶
 درس ۲: نقطهٔ بحرانی ۱۷۸
 درس ۳: اکسترم‌های نسبی ۱۸۰
 درس ۴: اکسترم‌های مطلق ۱۸۴
 درس ۵: بهینه‌سازی ۱۸۷
 درس ۶: تقعر و نقطهٔ عطف ۱۹۱
 درس ۷: رسم نمودار ۱۹۷

فصل ششم: معادلهٔ درجه دوم و سهمی

- درس ۱: روش‌های حل معادلهٔ درجه دو ۲۰۳
 درس ۲: سهمی ۲۰۹

فصل هفتم: معادله، نامعادله و تعیین علامت

- درس ۱: معادلات گویا ۲۱۶
 درس ۲: معادلات رادیکالی ۲۱۸
 درس ۳: تعیین علامت و نامعادله ۲۲۰

فصل هشتم: قدرمطلق و جزء صحیح

- درس ۱: قدرمطلق ۲۲۴
 درس ۲: جزء صحیح ۲۲۸

فصل نهم: توان‌های گویا و عبارات‌های جبری

- درس ۱: توان و ریشه ۲۳۴
 درس ۲: رادیکال‌ها و توان‌های گویا ۲۳۵
 درس ۳: اتحادها ۲۳۶
 درس ۴: گویاکردن مخرج کسرها ۲۳۹

فصل دهم: توابع نمایی و لگاریتمی

- درس ۱: تابع نمایی ۲۴۲
 درس ۲: تابع لگاریتمی ۲۴۵
 درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم ۲۴۸
 درس ۴: معادلات لگاریتمی ۲۵۱
 درس ۵: کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی ۲۵۳

فصل یازدهم: الگو و دنباله

- درس ۱: الگوهای هندسی ۲۵۵
 درس ۲: دنبالهٔ حسابی ۲۵۸
 درس ۳: دنبالهٔ هندسی ۲۶۱

فصل دوازدهم: هندسهٔ تحلیلی

- درس ۱: هندسهٔ تحلیلی ۲۶۷

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

۲۷۴

فصل اول

تابع

به فصل تابع خوش آمدید.

فصل تابع مهم‌ترین فصل کتاب شماست! این فصل تقریباً در تمام فصل‌های بعد به کارتان می‌آید. معمولاً در کنکور ۳ یا ۴ تست دارد اما علاوه بر این تست‌ها از مفاهیم مختلفش در سؤال‌های فصل‌های دیگر هم استفاده می‌شود.

مباحث مهم و پرسؤال انتقال نمودارها، تابع مرکب، تابع وارون و تقسیم چندجمله‌ای‌ها

مباحث پیش‌نیاز معادله درجه ۲، تعیین علامت، قدرمطلق و جزء صحیح

فصل‌های مرتبط با کتاب درسی فصل ۵ ریاضی دهم، فصل ۲ حسابان یازدهم و فصل ۱

حسابان دوازدهم

حرف آخر حتماً نمودار توابع مهم را بلد باشید. خیلی وقت‌ها مشکل‌گشا هستند!

درس ۱: رابطه و بازنمایی‌های یک رابطه

برای شروع، دوتا تست از رابطه حل کنید.

۱- اگر $A = \{2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ ، رابطه $R = \{(x, y) \mid x^2 \geq y, x \in A, y \in B\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(ریاضی ۸۸)

۲- رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۴

تشخیص تابع بودن

۳- کدام یک از روابط زیر، یک تابع است؟

(۱) رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی کمتر از ۴، مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.

(۲) رابطه‌ای که به اعداد ۴ و ۷، ریشه‌های دوم آن‌ها را نسبت می‌دهد.

(۳) رابطه‌ای که به اعداد ۲، ۳ و ۴، مربع آن‌ها را نسبت می‌دهد.

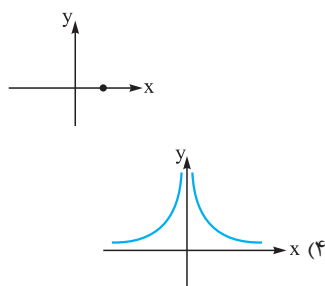
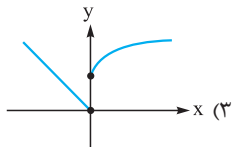
(۴) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز یک کلاس، دوستانش را نسبت می‌دهد.

۴- اگر نمودار تابع $f = \{(a+b, 1-a), (6-c, a-b)\}$ به صورت مقابل باشد، c کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵- کدام گزینه، نمایش یک تابع است؟

(۱) $(y-1)(x+2) = 0$ (۲) $|y| = x$



(تجربی خارج ۸۵)

۶- رابطه $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m ، یک تابع است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار m

۷- اگر رابطه $f = \{(2, 2a+3b), (-1, 2a), (2, b+10), (-1, \frac{6}{b})\}$ یک تابع باشد، حاصل $a^3 + b^3$ کدام است؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۸۵

مثال نقض

۸- کدام رابطه زیر نمایش جبری یک تابع است؟

(۱) $y^2 = x^2$ (۲) $y^2 = x$ (۳) $|y| = 2x + 1$ (۴) $|y| = |x|$

۹- در کدام گزینه، y تابعی از x است؟

(۱) $[y] = x + 1$ (۲) $y^4 + x^2 + 1 = 2x$ (۳) $\sin y = x + \cos x$ (۴) $y^2 - y = x$

۱۰- کدام رابطه یک تابع است؟

(۱) $y^3 - 3y^2 + x = 0$ (۲) $y + y^3 = x^2 + 1$ (۳) $|y-1| + x = 0$ (۴) $xy^2 - x = 1$

۱۱- در کدام رابطه زیر، y تابعی از x نیست؟

(۱) $y + \sqrt{4y - 4y^2 - 1} = |x|$ (۲) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ (۳) $x^2 + y^4 - 4y^2 + 4 = 0$

(۳) $\sqrt{1-y} + \sqrt{2y-2} + y^2 = x$

۱۲- در کدام رابطه، y تابعی از x نیست؟

(۱) $2y + |y| = 3x$ (۲) $-2y + |y| = x$ (۳) $y + 2\sqrt{y} = 3x$ (۴) $y - 2\sqrt{y} = 3x$

۱۳- اگر در رابطه $9x^2 - 6x + y^2 + 8y + k = 0$ ، y تابعی (غیر تهی) بر حسب x باشد، k کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

تعداد توابع از یک مجموعه m عضو به یک مجموعه m عضو برابر است با ...

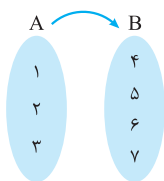
۱۴- چند تابع از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c\}$ می‌توان نوشت؟

- (۱) ۳! (۲) ۴! (۳) ۳^۴ (۴) ۴^۳

۱۵- از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c\}$ چند تابع می‌توان نوشت به طوری که شامل زوج مرتب $(2, a)$ باشد ولی شامل $(4, c)$ نباشد؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۵۴ (۳) ۴۸ (۴) ۲۷

۱۶- با توجه به مجموعه‌های A و B، چند تابع از A به B می‌توانیم نمایش بدهیم به طوری که برد تابع حداقل ۲ عضو داشته باشد؟



۵۴ (۱)

۵۶ (۲)

۵۸ (۳)

۶۰ (۴)

نوشتن ضابطه جبری یک تابع

۱۷- تابع f ، رابطه‌ای است که به تعداد اضلاع هر n ضلعی، مجموع زوایای داخلی‌اش را برحسب تعداد رئوس متناظر می‌کند، $f(6)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۹۰۰° (۴)

۷۲۰° (۳)

۵۴۰° (۲)

۳۶۰° (۱)

۱۸- یک تانکر گاز از یک استوانه به ارتفاع ۴ متر و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر تابع حجم تانکر برحسب شعاع را با $V(r)$ نشان دهیم، $\frac{V(r)}{4\pi r^2}$ کدام است؟

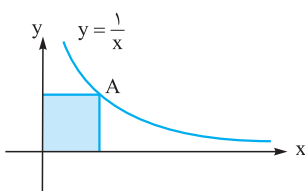
$\frac{2r+6}{3}$ (۴)

$\frac{2r+3}{3}$ (۳)

$\frac{r+6}{3}$ (۲)

$\frac{r+3}{3}$ (۱)

۱۹- در شکل روبه‌رو، مستطیل رنگی را حول محور x ‌ها دوران می‌دهیم. اگر حجم شکل حاصل تابعی از عرض نقطه A باشد، ضابطه این تابع کدام است؟



$V(y) = \pi y^2$ (۲)

$V(y) = \pi y$ (۱)

$V(y) = \pi y^4$ (۴)

$V(y) = \frac{\pi}{y}$ (۳)

۲۰- طول یک مستطیل ۴ برابر عرض آن است، کدام رابطه ریاضی، عرض مستطیل را برحسب مساحت آن (S) نشان می‌دهد؟

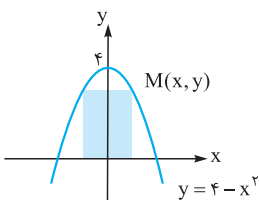
$2(S^{\frac{1}{2}})$ (۴)

$\frac{S^{\frac{1}{2}}}{2}$ (۳)

$\frac{S^{\frac{1}{2}}}{2}$ (۲)

$2S^{\frac{1}{2}}$ (۱)

۲۱- در شکل مقابل، نقطه $M(x, y)$ بر روی سهمی $y = 4 - x^2$ در حال حرکت است. مساحت مستطیل موجود



$f(x) = 4x^2 - x^2$ (۲)

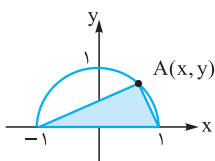
$f(x) = 4x - x^2$ (۱)

$f(x) = 8x - 2x^2$ (۴)

$f(x) = 8x^2 - 2x^2$ (۳)

در شکل برحسب تابعی از x کدام است؟

۲۲- در شکل روبه‌رو، مساحت مثلث محاط‌شده در نیم‌دایره، تابعی از x است. ضابطه این تابع کدام است؟



$S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ (۲)

$S(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)$ (۱)

$S(x) = \sqrt{1-x^2}$ (۴)

$S(x) = 1-x^2$ (۳)

۲۳- خط‌هایی به شیب a ، که محور x ‌ها را با طول ۲ قطع می‌کنند و در ناحیه چهارم، با محورهای مختصات تشکیل یک مثلث می‌دهند، در نظر بگیرید. ضابطه

تابعی که مساحت این مثلث را برحسب a بیان می‌کند، کدام است؟

$S(a) = 4a$ (۴)

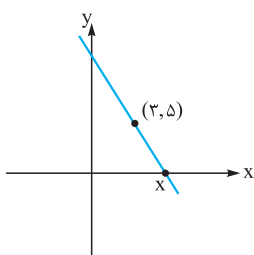
$S(a) = 2a$ (۳)

$S(a) = -4a$ (۲)

$S(a) = -2a$ (۱)

۲۴- مطابق شکل خطی گذرا از نقطه $(3, 5)$ محورهای x و y را در ربع اول قطع می‌کند. مساحت مثلث قائم‌الزاویه

ایجادشده، برحسب طول نقطه برخورد با محور x ‌ها کدام است؟



$\frac{\Delta x^2}{x-3}$ (۲)

$\frac{\Delta x^2}{2(x-3)}$ (۱)

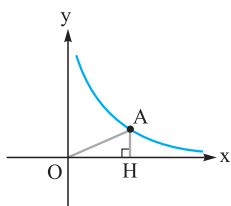
$\frac{\Delta x^2}{4(x-3)}$ (۴)

$\frac{1 \cdot x^2}{x-3}$ (۳)

۲۵- ضابطه تابعی که فاصله هر نقطه واقع بر تابع $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}(|x|-x)}$ را از مبدأ مختصات، برحسب طول آن بیان می‌کند، کدام است؟

$d(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ (۴) $d(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x} & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$ (۳) $d(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-x} & x < 0 \end{cases}$ (۲) $d(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x} & x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-x} & x < 0 \end{cases}$ (۱)

۲۶- مطابق شکل از نقطه A واقع بر تابع $y = \frac{1}{x}; x > 0$ عمود AH را بر محور x وارد کرده‌ایم. ضابطه تابعی که فاصله H از OA را به طول نقطه A وابسته می‌کند، کدام است؟



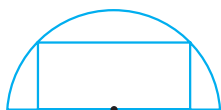
$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (۲)$$

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (۱)$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (۴)$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (۳)$$

۲۷- شعاع نیم‌دایره زیر برابر با ۶ است. ضابطه تابعی که مساحت مستطیل را برحسب قطر آن بیان کند، کدام است؟



$$S(x) = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 36)(144 - x^2)} \quad (۲)$$

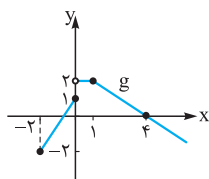
$$S(x) = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 36)(144 - x^2)} \quad (۱)$$

$$S(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 - 36)(144 - x^2)} \quad (۴)$$

$$S(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 - 36)(144 + x^2)} \quad (۳)$$

مقدار تابع در یک نقطه

۲۸- اگر $f = \{(1, 2), (-1, 4), (2, -3), (0, 1)\}$ و نمودار g به صورت مقابل باشد، حاصل $\frac{f(1) + g(4)}{g(0)}$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) صفر

۲۹- اگر $f = \{(-1, 2m+1), (2, 3-m), (-6, 2), (-m, m-1)\}$ و $f(f(-6)) - f(-6) + 2f(-1) = 9$ باشد، $f(f(m))$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۱

(۳) -۶

(۴) وجود ندارد.

۳۰- اگر در تابع $f = \{(3, 4), (1, a^2 + 4a), (a + 2, a^2 - a), (2a, a^4)\}$ داشته باشیم $f(1) = 5$ ، مقدار $f(-3)$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۵

(۳) ۳۰

(۴) ۴

۳۱- اگر $f(f(a)) = 4$ و $f = \{(1, 4), (5, 1), (7, 4), (4, 2), (6, 7)\}$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

(۱) ۸

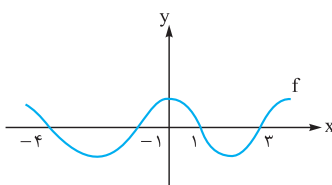
(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

f(x) منفی باشد، یعنی نمودار f پایین محور x ها باشد! مثبت باشد، چی؟

۳۲- با توجه به نمودار تابع f، به ازای چند مقدار صحیح x، $f(x) < 0$ است؟



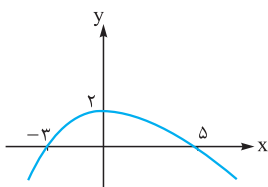
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۳۳- شکل مقابل، نمودار تابع f است. در کدام بازه هر دو رابطه $x < 0$ و $f(x) > 0$ برقرار هستند؟



(۱) $(-\infty, -3)$

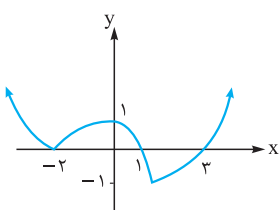
(۲) $(-3, 0)$

(۳) $(0, 5)$

(۴) $(5, +\infty)$

(مثل کنکور)

۳۴- نمودار تابع f رسم شده است. معادله $f(f(x)) = 0$ چند جواب دارد؟



(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۶

در نمایش ضابطه‌ای برای محاسبه f(a) به جای تمام x ها، a قرار می‌دهیم.

۳۵- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ، اگر $f(m) = 1$ باشد، $f(m+1)$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{4}{5}$

۳۶- اگر $f(x) = \sqrt{x+2}|x|$ ، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

(۱) تعریف نشده

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲

۳۷- اگر $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ و $f(f(a)) = \frac{5}{3}$ ، کدام a، $f(f(a)) = \frac{5}{3}$ است؟

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) $\frac{4}{3}$

(تجربی ۸۸)

برای به دست آوردن محل برخورد یک تابع با محور x باید y را صفر بدهیم با محور y باید x را صفر بدهیم.

۳۸- نقاط برخورد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 24}{x^2 + 3}$ با محورهای مختصات را به هم وصل می‌کنیم. مساحت شکل حاصل چند واحد است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴) ۸۰

۳۹- تابع $y = x^2 + ax + b$ محور y را در -4 و خط $y = 2x + 2$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۵

۴۰- تابع $y = x^2 + bx + a$ و خط $y = x + b$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول ۳ روی محور x ها قطع می‌کنند. مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۵ (۳) -۲۱ (۴) -۱۵

۴۱- تابع $f(x) = x^3 - 2x$ نیمساز ربع اول را در نقطه A و نیمساز ربع چهارم را در نقطه B قطع می‌کند. طول پاره خط AB کدام است؟ (A و B مبدأ مختصات نیستند.)

- (۱) $\sqrt{3} + 1$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

وقتی ضابطه تابع f را داریم و $f(\text{...})$ را خواستند، به جای همه x ها، قرار می‌دهیم!

۴۲- اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x) + 1 - 2f(x) - f(x^2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{1-x^2}$ (۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ (۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۴۳- اگر $f(x) = 2^x$ باشد، حاصل $f(x+2) - 2f(x-1)$ برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $f(x)$ (۳) $2f(x)$ (۴) $3f(x)$

اگر $f(a) = k$ بود و ما $f(a)$ را می‌خواستیم، باید اول معادله $a = \text{...}$ را حل کنیم.

۴۴- اگر $f(x) = x^2 - 3x + 5$ باشد، $f(2x+1)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۹

۴۵- اگر $f(x) = 4x^2 - 1$ باشد، $f(2x-1)$ برابر کدام است؟

- (۱) $x^2 - x$ (۲) $x^2 + x$ (۳) $x^2 - 2x$ (۴) $x^2 + 2x$

گاهی بهتر است که قبل از جای‌گذاری، ضابطه تابع را ساده کنیم.

۴۶- در تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ، حاصل $f(1 + \sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۴۷- اگر $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشد، حاصل $f(\sqrt[3]{2})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) $3\sqrt[3]{2}$

۴۸- در تابع $f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-1)^2 + 3x}$ ، حاصل $f(\frac{1}{\sqrt{2}-1})$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2} + 1$ (۳) $\sqrt{2} - 1$ (۴) $\sqrt{2} + 1$

۴۹- اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 6$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + 8$ (۲) $x^2 - 8$ (۳) $x^2 + 4$ (۴) $x^2 - 4$

۵۰- اگر $f(x) = x^3 + \frac{\lambda}{x^2}$ باشد، حاصل $\sqrt{2}f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) -۸ (۴) -۱۶

۵۱- اگر $f(x) = 2 + \cos x$ باشد، مقدار $f(\frac{1}{3})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{22}{9}$ (۴) $\frac{26}{9}$

۵۲- اگر $f(x) = \cos^2 x$ باشد، ضابطه $f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x^4 + 1}{x^4}$ (۲) $\frac{x^4}{x^4 + 1}$ (۳) $(\frac{x^2 + 1}{x^2})^2$ (۴) $(\frac{x^2}{x^2 + 1})^2$

۵۳- اگر $f(x) = 2 - f(\frac{1}{x+1}) - xf(\frac{1}{x} + \frac{1}{x})$ ، آن‌گاه $f(0/5)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۴

۵۴- اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$ ، آن‌گاه $f(0/1)$ کدام است؟

- (۱) $2/25$ (۲) ۲ (۳) $1/75$ (۴) $1/5$

۵۵- اگر $\frac{f(x^2 - 3x) - x}{1 - f(x - 4)} = x^2$ ، آن گاه $f(-2)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۸/۰ (۳) ۶/۰ (۴) ۲/۱

۵۶- اگر $\frac{f(x^2 + 2x)}{x^2 + 1} = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$ ، آن گاه $f(0/5)$ کدام است؟

- (۱) ۴/۵ (۲) ۳ (۳) ۳/۵ (۴) ۴

۵۷- اگر $f(x+2) - f(x+1) = x^2 - 2x$ ، آن گاه حاصل $f(4) - f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

اگر ضابطه تابع $f(1)$ یا شبیه آن را داشتید، اول باید مقدارش را پیدا کنید و بعد سؤال را ادامه دهید.

۵۸- اگر در تابع f با دامنه $\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) = 5x^2 + 2f(1)$ ، مقدار $f(2)$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۱۲

۵۹- اگر $f(x) = 2x^2 - 2f(1) - f(3)$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

- (۱) ۲/۵ (۲) ۳/۵ (۳) ۴/۵ (۴) ۵/۵

۶۰- اگر $x^2 + xf(-x) = f(x) + xf(-x)$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

- (۱) ۱/۲ (۲) ۱/۴ (۳) ۱/۶ (۴) ۱/۸

۶۱- اگر $4x^2 - 2f(\frac{1}{x}) = f(x) - 2f(a)$ در تساوی $af(2) - 7 = f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳

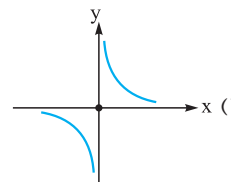
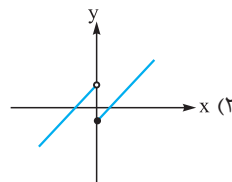
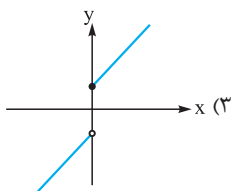
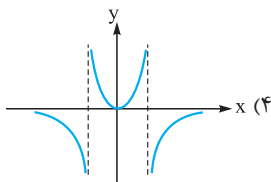
۶۲- اگر $2x^2 + 4x = f(x-2) + 3f(2-x)$ باشد، ضابطه تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x^2}{2} - 6x + 4$ (۲) $-\frac{x^2}{2} + 6x + 4$ (۳) $\frac{x^2}{2} - 6x - 4$ (۴) $-\frac{x^2}{2} + 6x - 4$

درس ۲: دامنه توابع

مفهوم دامنه و برد

۶۳- در کدام گزینه دامنه برابر $\mathbb{R}$ است و برد $\mathbb{R}$ نیست؟



۶۴- نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. اگر R_f برد و D_f دامنه این تابع باشد، $D_f \cap R_f$ کدام است؟

- (۱) $[-4, 4]$

- (۲) $[-2, 2]$

- (۳) $[-4, 2] \cup (2, 4]$

- (۴) $[-4, -2] \cup [2, 4]$

۶۵- اگر برد تابع $f(x) = \frac{2}{x+2}$ به صورت مجموعه $\{-1, 1, 2\}$ باشد، مجموع اعضای دامنه این تابع کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۵ (۴) -۶

۶۶- تعداد اعضای دامنه و برد یک تابع به ترتیب $6n - 60$ و $12 - 2n$ است. چند مقدار طبیعی برای n وجود دارد؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۳

۶۷- چند تابع از مجموعه $\{a, b, c\}$ به $B = \{m, n, p, q, r\}$ می‌توان نوشت به طوری که تعداد اعضای دامنه و برد آن برابر باشد؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۲۴ (۳) ۵! (۴) ۱۲۵

۶۸- در تابع $f: \{-3, a, 2\} \rightarrow \{b, -4, -1, c\}$ مقدار $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

دامنه توابع کسری و رادیکالی

۶۹- دامنه تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} + \frac{|x|}{x}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

مقدمه ناشر

به بسته فیزیک کنکور ۳۶۰ خوش آمدید. این بسته شامل دو بخش است:

❶ نسخه کاغذی این کتاب شامل ۳۰۲۳ تست منتخب فیزیک، پوشش کامل کتاب درسی و کنکورهای سراسری است. این

تست‌ها به ترتیب مباحث کتاب درس‌نامه طبقه‌بندی و مرتب شده است.

❷ کتاب درس‌نامه و پاسخ‌های تشریحی را در یک فایل pdf قرار دادیم و شما می‌توانید بدون پرداخت حتی ۱ ریال آن را از

QR-code پشت جلد کتاب تست دانلود کنید و حالش را ببرید!

نحوه استفاده از این بسته آسان است:

🟡 اول درس‌نامه درس مورد نظر را از فایل pdf بخوانید.

🟡 دوم تست‌های مرتبط با آن درس را بزنید.

🟡 سوم پاسخ‌های تشریحی را با پاسخ‌های خودتان مطابقت دهید.

براتون آرزوی موفقیت‌های بزرگ داریم

بخش ۱ | اندازه‌گیری

درس ۱: فیزیک علمی تجربی و آزمون پذیر

کتاب رو با تستی درباره تغییر مدل اتمی در طول زمان شروع می‌کنیم. با خواندن درس‌نامه درس (۱) به راحتی به این تست جواب می‌دین.

- ۱- مدل اتمی بور نتیجه بازنگری مدل است. هم‌چنین با بازنگری مدل بور، مدل ارائه شد.
- (۱) هسته‌ای، ابر الکترونی (۲) سیاره‌ای، ابرالکترونی (۳) سیاره‌ای، هسته‌ای (۴) هسته‌ای، سیاره‌ای

درس ۲: مدل سازی در فیزیک

حالا وقتشه که دو نمونه مدل سازی ببینین. تا یاد بگیرین که توی مدل سازی پدیده‌های مختلف، کدوم عوامل مهمن و کدوم عوامل قابل چشم پوشی.

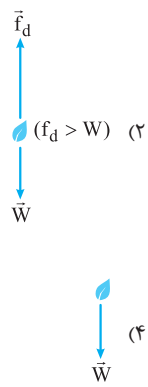
- ۲- چند مورد از موارد زیر در مدل سازی آرمانی حرکت پرتابی توپ بسکتبال قابل چشم پوشی است؟



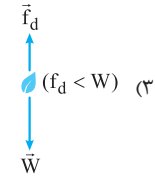
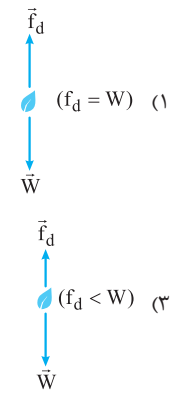
توپ بسکتبال در هوا

- ۳- شکل زیر یک برگ را نشان می‌دهد که به صورت تندشونده سقوط می‌کند. کدام گزینه حرکت سقوط برگ به طرف زمین را بهتر مدل سازی کرده است؟

(برگرفته از کتاب راهنمای معلم)



($\vec{W}$ وزن برگ و $\vec{f}_d$ نیروی مقاومت هوای وارد بر برگ است.)



درس ۳: کمیت و یکا

تست زیر شما رو با مفهوم کمیت و یکای تعریف شده برای اون آشنا می‌کنه.



- ۴- وجب یکی از یکاهای قدیمی طول است. یک وجب برابر فاصله نوک انگشت شست تا نوک انگشت کوچک دست باز شده است. مزیت و ایراد این یکا به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) قابلیت بازتولید دارد، تغییرپذیر است.
(۲) تغییرناپذیر است، قابلیت بازتولید دارد.
(۳) قابلیت بازتولید دارد، تغییرناپذیر است.
(۴) تغییرناپذیر است، قابلیت بازتولید ندارد.

تشخیص این که کدوم کمیت اصلیه و کدوم کمیت فرعیه کاری نداره. تا کمیت اصلی رو حفظ باشید. همه کمیت‌ها به جز این تا ۷ فرعی اند.

- ۵- کدام کمیت‌ها، همگی از کمیت‌های اصلی هستند؟

- (۱) دما، نیرو، فشار (۲) فشار، زمان، سرعت (۳) جریان الکتریکی، جرم، نیرو (۴) دما، جریان الکتریکی، جرم

(ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲، برگرفته از کتاب درسی)

- ۶- کدام یکاها، همگی مربوط به کمیت‌های اصلی هستند؟

- (۱) ژول، کولن و مول (۲) کیلوگرم، آمپر و مول (۳) کیلوگرم، کولن و کندلا (شمع) (۴) ژول، آمپر و کندلا (شمع)



(تجربی ۹۸)

۷- در کدام یک از موارد زیر، همه کمیت‌ها فرعی هستند؟

- (۱) جرم، زمان، فشار (۲) چگالی، تندی، انرژی (۳) چگالی، جریان الکتریکی، حجم (۴) شدت روشنایی، مقدار ماده، زمان

حالا وقت تشخیص کمیت‌های نرده‌ای و برداریه. آگه درس‌نامه رو خونده باشی. می‌دونید که کمیت‌های برداری که شما باید در حد کنکور سر اسری بلد باشید ۸ تا ست. به جز این‌ها، بقیه کمیت‌ها نرده‌ای اند.

(ریاضی ۹۷)

۸- کدام کمیت‌ها همگی فرعی و نرده‌ای هستند؟

- (۱) نیرو، جرم، گرمای ویژه (۲) انرژی جنبشی، شار مغناطیسی، شتاب (۳) فشار، جرم، میدان مغناطیسی (۴) انرژی جنبشی، شار مغناطیسی، فشار

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

۹- در کدام یک از گزینه‌های زیر، کمیت اصلی یا کمیت برداری وجود ندارد؟

- (۱) جریان الکتریکی، شتاب گرانشی، سرعت، زمان (۲) کار، میدان الکتریکی، چگالی، فشار (۳) تندی، توان صوتی، شدت روشنایی، اختلاف پتانسیل الکتریکی (۴) نیروی محرکه الکتریکی، بار الکتریکی، فشار، انرژی پتانسیل الکتریکی

موضوع تست‌های بعدی سازگاری یک‌ها است. این‌جا باید بتونید یکای کمیت‌های فرعی رو بر حسب یکای کمیت‌های اصلی به دست بیارین.

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱۰- یکای فرعی فشار کدام است؟

- (۱) Pa (۲) $\frac{kg}{m.s^2}$ (۳) $\frac{kg.m}{s^2}$ (۴) $\frac{N}{m.s}$

(تجربی کنکور مجدد ۱۴۰۱)

۱۱- یکای فرعی انرژی، کدام است؟

- (۱) $\frac{kg.m}{s^2}$ (۲) $\frac{kg.m^2}{s^2}$ (۳) $\frac{kg.m^2}{s}$ (۴) $\frac{kg.m}{s}$

(تجربی ۱۴۰۱)

۱۲- یکای فرعی کدام کمیت، $\frac{kg}{A.s}$ است؟

- (۱) میدان مغناطیسی (۲) شار مغناطیسی (۳) میدان الکتریکی (۴) نیروی محرکه القایی

۱۳- در رابطه $mgx + \frac{1}{2}kx^2$ اگر m جرم، x ارتفاع و g شتاب گرانشی زمین باشد، کمیت مجهول A بر حسب یکاهای اصلی کدام و از جنس چه کمیتی است؟

- (۱) $\frac{kg.m^2}{s}$ ، انرژی (۲) $\frac{kg.m^2}{s}$ ، توان (۳) $\frac{kg.m^2}{s^2}$ ، توان (۴) $\frac{kg.m^2}{s^2}$ ، انرژی

درس ۴: تبدیل یکا و نمادگذاری علمی

ابتدا تبدیل زنجیره‌ای یکاهایی رو بررسی می‌کنیم که براتون ناآشنا هستن و برای تبدیلسون به اطلاعاتی نیاز دارید که در صورت تست داده می‌شه و لازم نیست که این اطلاعات رو حفظ باشین.

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۴- ۴۸ فرسنگ تقریباً برابر با چند سانتی‌متر است؟ (۱۰۴ cm = ۱ ذرع و ۶۰۰۰ ذرع = ۱ فرسنگ)

- (۱) 25×10^6 (۲) 30×10^6 (۳) 3×10^6 (۴) 3×10^6

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۵- در یک سوله $3/5$ خورار گندم انبار شده است. مقدار این گندم بر حسب مثقال برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $1/03 \times 10^5$ (۲) $2/24 \times 10^5$ (۳) 224×10^4 (۴) 103×10^4

حالا باید با پیشوندهای یکاها و یکاهای پیشونددار آشنا بشید و تبدیل زنجیره‌ای این یکاها رو بررسی کنید.

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۶- جرم یک گیره کاغذ تقریباً 10^{-4} kg است. این مقدار بر حسب میلی‌گرم کدام است؟

- (۱) 10^1 (۲) 10^2 (۳) 10^{-1} (۴) 10^{-2}

۱۷- اگر فشار در یک نقطه روی یک رشته کوه ۲۰ kPa باشد، این فشار بر حسب سانتی‌متر جیوه (cmHg) تقریباً چه قدر است؟ (۱ cmHg = ۱۳۶۰ Pa)

- (۱) ۱۲ (۲) $14/7$ (۳) $13/7$ (۴) $11/8$

در تست‌های بعدی هم یکاهای ناآشنا که در صورت تست اطلاعاتش داده می‌شه، هم یکاهای پیشونددار و هم یکاهای ناآشنا (مثل دقیقه و سال که باید اطلاعات اونا رو بلد باشیم) رو داریم و باید تبدیل زنجیره‌ای اونا رو بررسی کنیم.

۱۸- یکی از بزرگ‌ترین الماس‌های موجود در ایران، دریای نور به جرم ۱۸۲ قیراط است. جرم این الماس در SI چه قدر است؟ (هر قیراط معادل ۲۰۰ میلی‌گرم است.) (ریاضی خارج ۱۴۰۱، مشابه ریاضی خارج ۹۸ و برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) $36/4$ (۲) $9/1$ (۳) $9/1 \times 10^{-2}$ (۴) $3/64 \times 10^{-2}$

۱۹- ارتفاع هواپیمایی که در فاصله ۳۰۰۰ پا از سطح آزاد دریاها در حال پرواز است، به ترتیب بر حسب متر و یارد کدام است؟ (هر پا ۱۲ اینچ، هر یارد ۳ پا و هر اینچ تقریباً $2/5$ سانتی‌متر است.)

- (۱) $1000, 900$ (۲) $1000, 9000$ (۳) $10000, 9000$ (۴) $10000, 900$

(ریاضی ۱۴۰۱)

۲۰- تندی ۲۱۶ کیلومتر بر ساعت، معادل چند مایل بر دقیقه است؟ (یک مایل را ۱۸۰۰ متر فرض کنید.)

- (۱) ۳ (۲) $3/6$ (۳) ۲ (۴) $2/5$

۲۱- طول جزیره قشم حدود 120 km است. این طول برحسب فرسنگ تقریباً کدام است؟ (هر ذرع 104 cm و هر فرسنگ 6000 ذرع است.) (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) 19 (۲) 69 (۳) 190 (۴) 690

۲۲- یک کشتی حمل کالا با تندی 18 گره حرکت می‌کند. تندی کشتی برحسب کیلومتر بر ساعت و مایل بر ساعت به ترتیب کدام است؟ (هر گره دریایی را برابر 1.85 m/s و هر مایل دریایی را برابر 1800 متر فرض کنید.) (برگرفته از کتاب درسی و مشابه آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

- (۱) $4/5, 25$ (۲) $18, 32/4$ (۳) $18, 25$ (۴) $4/5, 32/4$

۲۳- اگر فاصله زمین تا زحل برابر $1/2 \text{ Tm}$ باشد، این فاصله چند یکای نجومی (AU) است؟ (فاصله زمین تا خورشید $1/5 \times 10^{11} \text{ m}$ است.) (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) $1/8$ (۲) 8 (۳) 18 (۴) 80

۲۴- تندی چرخش زمین به دور خورشید تقریباً 30 km/s است. تندی چرخش زمین برحسب AU/min (یکای نجومی بر دقیقه) برای کدام گزینه است؟ (یکای نجومی، فاصله متوسط زمین تا خورشید و تقریباً 150 میلیون کیلومتر است.) (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

- (۱) 12×10^{-6} (۲) $1/2 \times 10^{-6}$ (۳) $1/3 \times 10^{-6}$ (۴) 3×10^{-5}

۲۵- یکی از یكاهای پر کاربرد انرژی که در صنایع برق از آن استفاده می‌شود، کیلووات‌ساعت (kW.h) است. اگر انرژی مصرفی توسط یک دستگاه الکتریکی برابر با 1 kW.h باشد، این مقدار انرژی برابر با چند ژول است؟

- (۱) 3600 (۲) $3/6$ (۳) $3/6 \times 10^6$ (۴) 36×10^4

توان بعضی یکاهای بیشتر از یک، مثل m^3 ، حالا می‌خواهیم تبدیل این جور یکاهای بر رسی کنیم.

۲۶- کدام یک از تبدیل یکاهای زیر نادرست است؟

- (۱) $5 \text{ g/cm}^3 = 5000 \text{ kg/m}^3$ (۲) $3 \times 10^3 \text{ N/m}^2 = 3 \text{ N/cm}^2$
(۳) $10 \text{ m/s}^2 = 3/6 \text{ km/min}^2$ (۴) $125 \text{ cm}^3/\text{s} = 7/5 \text{ L/min}$

بیشتر وقتا توی تست‌های فیزیک باید یکاهای متناسب با خواسته تست رو در فرمول قرار بدیم. مثلاً اگر در یک تست تندی رو بر حسب متر بر ثانیه بخوان، باید در رابطه تندی، فاصله رو بر حسب متر و زمان رو بر حسب ثانیه قرار بدیم.

۲۷- اگر زمین را کره‌ای یکنواخت به شعاع 6400 km در نظر بگیریم، مساحت آن تقریباً چند هکتار است؟ ($\pi = 3$ و هر هکتار برابر 10 هزار متر مربع است.)

- (۱) $7/7 \times 10^{10}$ (۲) 5×10^{10} (۳) $7/7 \times 10^{14}$ (۴) 5×10^{14} (برگرفته از کتاب درسی)

۲۸- یک کشتی مسافری فاصله 4000 مایلی بین دو بندر را با تندی 120 گره می‌پیماید. مدت زمان حرکت کشتی چند ثانیه است؟ (تقریباً هر گره دریایی 1.85 m/s و هر مایل در دریا برابر 1800 m است.) (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) $4/8 \times 10^4$ (۲) $4/8 \times 10^5$ (۳) $1/2 \times 10^4$ (۴) $1/2 \times 10^5$

توی چندتا تست بعدی یاد می‌گیریم جواب آخر رو به صورت نمادگذاری علمی بنویسیم!

۲۹- بار الکتریکی جسمی $160 \times 10^{-10} \text{ } \mu\text{C}$ است. این مقدار بار بر حسب کولن و بر حسب نمادگذاری علمی، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۲)

- (۱) $1/6 \times 10^{-20}$ (۲) $1/6 \times 10^{-8}$ (۳) $1/60 \times 10^{-2}$ (۴) $1/60 \times 10^{-14}$

۳۰- جرم یک زنبور عسل (15 g) و قطر میانگین یک گویچه (گلبول) قرمز ($7 \times 10^{-3} \text{ mm}$) به ترتیب بر حسب کیلوگرم و نانومتر و با نمادگذاری علمی کدام‌اند؟

- (۱) $7 \times 10^{-6}, 1/5 \times 10^{-2}$ (۲) $7 \times 10^{-6}, 1/5 \times 10^{-4}$ (۳) $7 \times 10^{-3}, 1/5 \times 10^{-2}$ (۴) $7 \times 10^{-3}, 1/5 \times 10^{-4}$ (برگرفته از کتاب درسی)

۳۱- ظرف استوانه‌ای شکلی به قطر 20 cm و ارتفاع 400 mm را پر از آب می‌کنیم. حجم آب بر حسب لیتر به صورت نمادگذاری علمی در کدام گزینه درست بیان شده است؟ ($\pi = 3/14$)

- (۱) 1256×10^3 (۲) 1256×10^{-3} (۳) $1/256 \times 10^{-1}$ (۴) $1/256 \times 10^1$

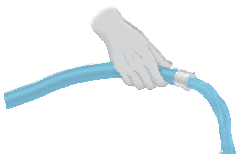
در ۲ تست بعدی با مفهوم «آهنگ کمیت» آشنا می‌شیم.

۳۲- سریع‌ترین رشد گیاه متعلق به گیاهی موسوم به هسپروئوکا است که در مدت 14 روز، $3/7 \text{ m}$ رشد می‌کند. آهنگ رشد این گیاه بر حسب میکرومتر بر ثانیه تقریباً چه قدر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) $3/06$ (۲) $18/36$ (۳) $30/6$ (۴) $183/6$

۳۳- از شیلنگ شکل روبه‌رو، آب با آهنگ $125 \text{ cm}^3/\text{s}$ خارج می‌شود. این آهنگ بر حسب لیتر بر دقیقه کدام است و در مدت 1 ساعت چند متر مکعب آب از شیلنگ خارج می‌شود؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز)

- (۱) $4/5, 7/5$ (۲) $0/45, 7/5$
(۳) $4/5, 75$ (۴) $0/45, 75$



درس ۵: دقت وسیله‌های اندازه‌گیری

دقت گزارشی که ما از نتیجه اندازه‌گیری ارائه می‌دهیم، به عوامل مختلفی بستگی دارد. با یک تست مفهومی، دقت اندازه‌گیری رو شروع می‌کنیم.

(برگرفته از کتاب درسی)

۳۴- چه تعداد از عوامل زیر، نقش مهمی در افزایش دقت اندازه‌گیری یک کمیت فیزیکی دارند؟

(الف) دقت و حساسیت وسیله اندازه‌گیری

(ب) مهارت شخص آزمایشگر در نحوه خواندن نتیجه اندازه‌گیری

(پ) انتخاب یکاهای کوچک‌تر برای بیان نتیجه اندازه‌گیری

(ت) استفاده از ابزار اندازه‌گیری دیجیتال به جای ابزار مدرج

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

می‌ریم سراغ نمونه‌های عددی دقت وسیله اندازه‌گیری. ابتدا دقت اندازه‌گیری وسیله‌های مدرج!

۳۵- در شکل‌های زیر، دقت وسیله‌های اندازه‌گیری (الف) و (ب) به ترتیب برحسب سانتی‌متر و میلی‌متر، چه قدر است؟

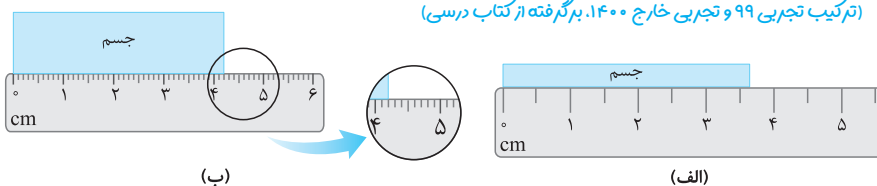
(ترکیب تجربی ۹۹ و تجربی خارج ۱۴۰۰. برگرفته از کتاب درسی)

(۱) ۰/۱، ۱

(۲) ۰/۱، ۰/۵

(۳) ۱، ۱

(۴) ۱، ۰/۵



(ب)

(الف)

۳۶- شکل روبه‌رو صفحه تندی‌سنج یک خودرو را نشان می‌دهد. دقت این تندی‌سنج برحسب متر بر ثانیه و مایل بر ساعت به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

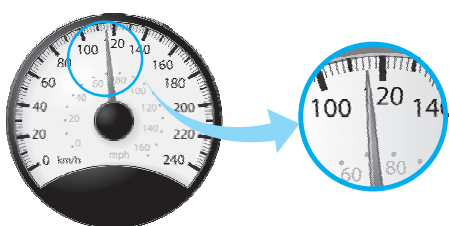
(برگرفته از کتاب درسی)

(۲) $10, \frac{5}{9}$

(۱) $10, \frac{9}{5}$

(۴) $20, \frac{5}{9}$

(۳) $20, \frac{9}{5}$



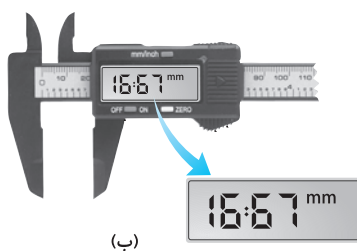
حالا دقت اندازه‌گیری وسیله‌های رقمی (دیجیتال) رو بررسی می‌کنیم.

۳۷- وسیله‌های نشان داده شده در شکل‌های (الف) و (ب) به ترتیب از راست به چپ و هستند و دقت ریزسنج میکرومتر است.

(آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز، مشابه ریاضی ۱۴۰۰)



(الف)



(ب)

(۱) ریزسنج، کولیس، ۱

(۲) کولیس، ریزسنج، ۱۰

(۳) ریزسنج، کولیس، 10^{-3}

(۴) کولیس، ریزسنج، 10^{-2}

با حل تست زیر یاد می‌گیرید که چه‌طور می‌توانید دقت اندازه‌گیری دقیق‌تره.

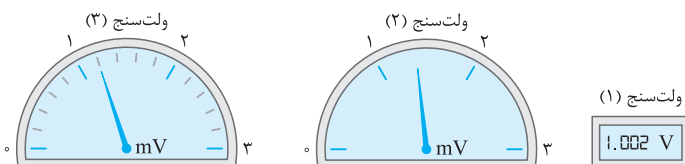
۳۸- با توجه به شکل‌های زیر دقیق‌ترین ولت‌سنج کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) هر سه ولت‌سنج دقت یکسانی دارند.



ولت‌سنج (۱)

تست بعدی درباره مهارت شخص آزمایشگر در نحوه خواندن نتیجه اندازه‌گیری.

۳۹- در شکل مقابل نتیجه اندازه‌گیری گزارش شده توسط شخص دقت بیشتری دارد و

(برگرفته از کتاب درسی)

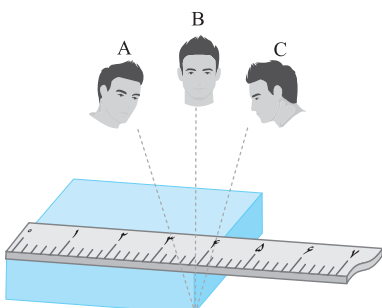
شخص طول جسم را بیشتر از مقدار واقعی گزارش می‌کند.

A, B (۱)

A, C (۲)

C, B (۳)

B, C (۴)



پاسخ نامہ تشریحی



۱. هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱. $n = 5$ مثال نقضی برای این گزینه است:

$$n = 5 \Rightarrow 2^n + 3 = 35 \text{ اول نیست}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲. می‌دانیم:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

بنابراین:

که به ازای عددهای زوج، عددی طبیعی نمی‌شود.

۳. هر عدد حقیقی در بازه $(0, 1)$ مثال نقضی برای این گزاره است. برای مثال:

$$n = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$$

۴. اگر $a + b$ زوج باشد، a و b یا هر دو فردند و یا هر دو زوج‌اند که در هر دو حالت $a - b$ نیز زوج است:

$$a = 2k + 1, b = 2k' + 1 \Rightarrow a - b = 2k - 2k' = 2(k - k') = 2k''$$

$$\Rightarrow a - b = 2k'' \text{ زوج}$$

$$a = 2q, b = 2q' \Rightarrow a - b = 2q - 2q' = 2(q - q') = 2q''$$

$$\Rightarrow a - b = 2q'' \text{ زوج}$$

۲. ۳. گفتیم برای رد یک گزاره از مثال نقض استفاده می‌کنیم. گزاره‌ای که گفته به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ درست است ولی اگر $n = 5$ عدد $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$ اول نبوده و به 641 می‌خورد!

این حدس در ریاضیات به حدس فرما معروف است که بعدتر اویلر نشان داد این حدس نادرست است و به ازای $n = 5$ رد می‌شود.

۳. ۴. گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

$$n = 2 \Rightarrow 2^2 + 1 = 5 \text{ اول است.}$$

$$n = 4 \Rightarrow 2^4 + 1 = 17 \text{ اول است.}$$

$$n = 6 \Rightarrow 2^6 + 1 = 65 \text{ اول نیست.}$$

در مورد $n = 5$ ، اگر چه $2^5 + 1 = 33$ اول نیست اما در گزاره آمده n عدد طبیعی زوج است و با توجه به این که 5 زوج نیست، $n = 5$ مثال نقض این گزاره نیست.

۴. ۳. گفته «حاصل ضرب دو عدد اول ...» پس هر دو عدد داده‌شده در گزینه‌ها حتماً باید اول باشند (۱ رد می‌شه)

در ۲ ضرب دو عدد 5 و 7 را اگر با یک جمع کنیم حاصل $5 \times 7 + 1 = 36$ می‌شود که زوج است.

در ۳ حاصل ضرب دو عدد 2 و 7 را اگر با یک جمع کنیم حاصل $7 \times 2 + 1 = 15$ می‌شود که فرد است و مثال نقضی برای گزاره داده‌شده است.

۵. ۴. گفتیم یک مثال نقض برای گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ باید دو شرط داشته باشد: (۱) p درست باشد و (۲) q نادرست باشد؛ یعنی الان باید x جوری باشد که $3x + 2$ اول باشد ولی x اول نباشد. بررسی کنیم در کدام گزینه این اتفاق می‌افتد. چون x نباید اول باشد، پس فقط ۳ و ۴ را بررسی می‌کنیم. در ۴ می‌بینیم که اگر $x = 9$ باشد، $3x + 2 = 29$ می‌شود که عددی اول است ولی خود x یعنی عدد 9 اول نیست.

در ۳ اگر $x = 6$ باشد $3x + 2 = 20$ می‌شود که اصلاً اول نیست و شرط اول یعنی درست بودن p برقرار نمی‌شود.

۶. ۴. ۱ درست است، چون 2 عدد اولی است که فرد نیست، پس مثال نقض ندارد.

۲. ۲ مثال نقض این گزاره است، زیرا عدد اولی است که فرد نیست.

۳. درست است. برای مثال، 9 عدد فردی است که اول نیست.

۴. ۱ مثال نقض این گزاره است، چون 1 عدد فردی است که اول نیست.

۷. ۴. ۱ گزاره اول را نقض نمی‌کند، چون $-\sqrt{2}$ مثبت نیست.

۲ گزاره اول را نقض نمی‌کند، چون $\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2}$ که عددی گنگ است.

۳ گزاره اول را نقض نمی‌کند، چون $1 - \sqrt{2}$ منفی است.

۴ هر دو گزاره را نقض می‌کند، چون $2 + \sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$ هر دو مثبت‌اند و داریم:

$$(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$$

$$(2 + \sqrt{2}) \times (2 - \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$$

۸. ۳ باید x عدد گنگی باشد که (۱ رد می‌شه) به ازای آن $x^2 + 4x + 5$ گنگ نشود. به جای این که سریع گزینه‌ها را امتحان کنیم خوب است روی $x^2 + 4x + 5$ کمی کار کنیم:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1$$

مشخص است که به ازای $x = \sqrt{2} - 2$ حاصل گویا می‌شود، چون:

$$(\sqrt{2} - 2 + 2)^2 + 1 = 3$$

۹. ۳، ۱، ۲ و ۴ همگی درست بوده و می‌توانیم آن‌ها را به صورت مستقیم ثابت کنیم. اما ۳ غلط است. مثلاً جمع $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ می‌شود که مضرب ۴ نیست. خوب است این نکته را هم حفظ باشید:

اگر n فرد باشد مجموع n عدد متوالی، مضرب n است. (اما اگر n زوج باشد مجموع n عدد متوالی لزوماً مضرب n نیست! توی قسمت آموزش اینو اثبات کردیم.)

۱۰. ۴ $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ می‌شود پس ۱ غلط است. ۲ هم

تابلو غلط است! برای مثال میانگین همین پنج عدد برابر $\frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$ است که برابر کوچک‌ترین عدد نیست. ۳ هم با همین مثال رد می‌شود اما

۴ را ثابت می‌کنیم: پنج تا عدد متوالی را $n, n+1, n+2, \dots, n+4$ می‌گیریم:

$$\frac{n + (n+1) + \underbrace{(n+2)}_{\text{عدد وسطی}} + (n+3) + (n+4)}{5} = \frac{5n+10}{5} = n+2 = \text{عدد وسط}$$

این نکته در حالت کلی هم درست است، یعنی میانگین n عدد طبیعی متوالی که n عددی فرد است، برابر عدد وسطی می‌شود.

۱۱. ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{مضرب ۸ نیست. } 2^2 - 0^2 = 4 \quad \text{مضرب ۸ نیست. } 2^2 + 0^2 = 4$$

$$\text{مضرب ۸ نیست. } 1^2 + 3^2 = 10$$

سه گزینه اول را با مثال نقض رد کردیم. چهارمی را ثابت می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \text{ فرد است} \Rightarrow a = 2k + 1 \\ b \text{ فرد است} \Rightarrow b = 2k' + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4k'^2 - 4k' - 1 = 4k(k+1) - 4k'(k'+1)$$

حالا دقت کنید k و $k+1$ دو عدد متوالی‌اند. از دو عدد متوالی یکی حتماً زوج است و یکی حتماً فرد. بنابراین ضربشان هم زوج است یعنی $k(k+1)$ را می‌توان به صورت $2q$ نوشت.

با همین استدلال $k'(k'+1)$ را نیز می‌توان به صورت $2q'$ نوشت. بنابراین:

$$a^2 - b^2 = 4(2q) - 4(2q') = 8(q - q') = 8q'' \text{ مضرب ۸ است.}$$

۱۲. ۳ می‌توانیم با عددگذاری به سؤال پاسخ دهیم. مثلاً اگر $k = 1 \times 2 = 2$ باشد $k + 4 = 6$ ، $2k + 1 = 5$ ، $4k + 1 = 9$ و $2k + 4 = 8$ می‌شود.

می‌بینید که فقط سومی مربع کامل است.

اما اثبات ۳ نیز کار سختی نیست. k را ضرب دو عدد طبیعی متوالی می‌گیریم:

$$k = n(n+1) \Rightarrow 4k + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$



پس اگر n فرد باشد ضرب سه عدد بر ۸ بخش پذیر است از طرفی ضرب ۳ عدد مضرب ۳ نیز هست، پس اگر n فرد باشد همواره بر ۲۴ بخش پذیر می شود.

روش ۲ عدد بدهیم: طبق نکته: (۶ به ۱۲ نمی فوره پس ۳ و ۴ رد می شه)

$$n=2 \Rightarrow 2^2 - 2 = 2, \quad n=3 \Rightarrow 3^2 - 3 = 24$$

یعنی فقط ۲ می تواند درست باشد!

۱۸. **۳** می دانیم $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ که حاصل ضرب سه عدد متوالی است. از سه عدد متوالی یکی حتماً مضرب ۳ است. بنابراین عبارت بر ۳ بخش پذیر است اما اگر بخواهیم این عبارت بر ۴ نیز بخش پذیر باشد، دو حالت رخ می دهد:

الف) n فرد باشد. چون اگر n فرد باشد $n+1$ و $n-1$ هر دو زوج می شوند و بنابراین حاصل ضرب آن ها بر ۴ بخش پذیر می شود.

ب) n مضرب ۴ باشد. که در این صورت نیز $n^3 - n$ مضرب ۱۲ می شود. از طرفی می دانیم در تقسیم به ۴ عددها به ۴ دسته تقسیم می شوند و ۴ نوع باقی مانده مختلف می توانند داشته باشند:

$$4k \Rightarrow 4 \text{ مضرب}$$

$$4k+1 \Rightarrow \text{فرد}$$

$$4k+2$$

$$4k+3 \Rightarrow \text{فرد}$$

حالا با توجه به این که n یا فرد است یا مضرب ۴، پس n هیچ گاه نمی تواند به صورت $4k+2$ باشد. یعنی باقی مانده n بر ۴ برابر ۲ نمی شود.

۱۹. **۳**

$$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k+1)^2 - 5(2k+1) + 7$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7 = 4k^2 - 6k + 3$$

پس کافی است نشان دهیم $4k^2 - 6k + 3$ عددی فرد است (۳) که خیلی ساده این جوری می شود:

$$4k^2 - 6k + 3 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 1}_q) + 1 = 2q + 1$$

۲۰. **۲** به اثبات این حکم کاری نداریم اما با توجه به این که n مضرب ۳ نیست، پس n دو حالت می تواند داشته باشد. یا در تقسیم به ۳ باقی مانده ای برابر ۱ دارد یا به بیان دیگر به صورت $3k+1$ است و یا در تقسیم به n باقی مانده ای برابر ۲ دارد و به صورت $3k+2$ است.

۲۱. **۴**

$$1 \quad \text{زوج} + 1 = \text{زوج} + \text{فرد} + 1 = n^2 + 4n + 1 \Rightarrow n \text{ فرد باشد.}$$

$$\text{فرد} + 1 = \text{زوج} + \text{زوج} + 1 = n^2 + 4n + 1 \Rightarrow n \text{ زوج باشد.}$$

پس همواره زوج نیست.

$$2 \quad \text{فرد} + 1 = \text{فرد} + \text{فرد} + 1 = n^2 + 3n + 1 \Rightarrow n \text{ فرد باشد.}$$

$$\text{فرد} + 1 = \text{زوج} + \text{زوج} + 1 = n^2 + 3n + 1 \Rightarrow n \text{ زوج باشد.}$$

این که اصلاً همواره فرد است!

$$3 \quad \text{فرد} + 2 = \text{زوج} + \text{فرد} + 2 = n^2 + 4n + 2 \Rightarrow n \text{ فرد باشد.}$$

$$\text{زوج} + 2 = \text{زوج} + \text{زوج} + 2 = n^2 + 4n + 2 \Rightarrow n \text{ زوج باشد.}$$

این هم همواره زوج نیست.

$$4 \quad \text{زوج} + 2 = \text{فرد} + \text{فرد} + 2 = n^2 + 3n + 2 \Rightarrow n \text{ فرد باشد.}$$

$$\text{زوج} + 2 = \text{زوج} + \text{زوج} + 2 = n^2 + 3n + 2 \Rightarrow n \text{ زوج باشد.}$$

همواره زوج است.

۱۳. **۴** فرض کنید دو عدد در حالت کلی به صورت $4k+3$ و $4k'+3$ باشند، داریم:

$$(4k+3)(4k'+3) = 16kk' + 12k + 12k' + 9 = 4(4kk' + 3k + 3k' + 2) + 1 = 4q + 1$$

۲ عددی که به فرم $4k+3$ است را به توان ۲ می رسانیم:

$$(4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1 = 4q + 1$$

۳ همانند ۱ داریم:

$$(6k+4)(6k'+5) = 36kk' + 30k + 24k' + 20 = 6(6kk' + 5k + 4k' + 3) + 2 = 6q + 2$$

۴ مثال نقض دارد. برای مثال عدد ۱۲ به صورت $7k+5$ و عدد ۶ به صورت $7k'+6$ است، ولی ضرب این دو عدد در هم یعنی ۷۲ به صورت $7q+2$ است.

۱۴. **۱** عددهای طبیعی را از ۱ امتحان می کنیم:

$$n=1 \Rightarrow 2^3 \leq 3! \Rightarrow 8 \nless 6 \quad (\text{این یکی})$$

$$n=2 \Rightarrow 2^4 \leq 4! \Rightarrow 16 \leq 24$$

$$n=3 \Rightarrow 2^5 \leq 5! \Rightarrow 32 \leq 120$$

می بینید هر چه جلوتر برویم سمت راست خیلی بزرگ تر (رشد فاکتوریل از نمایی بیشتره!) از چپ می شود، پس همان $n=1$ تنها مثال نقض این گزاره است.

۱۵. **۲**

$$61 = 30 + 31$$

$$66 = 21 + 22 + 23$$

$$58 = 13 + 14 + 15 + 16$$

اما ۶۴ را نمی توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.

حواستون باشه عددهای به فرم 2^n را نمی توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.

اثبات آن نیز چندان سخت نیست. فرض کنید 2^n را به صورت مجموع k عدد متوالی نوشته ایم در این صورت:

$$2^n = x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+k-1) \\ \Rightarrow 2^n = kx + (1+2+\dots+k-1) = kx + \frac{(k-1)k}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2^{n+1} = 2kx + k(k-1) = k(2x+k-1)$$

اگر k زوج باشد، $2x+k-1$ فرد است ولی 2^{n+1} هیچ عامل فردی نمی تواند داشته باشد. اگر k فرد باشد هم که همین طور. بنابراین این تساوی هیچ گاه نمی تواند برقرار باشد.

۱۶. **۴** مربع کامل را به صورت a^2 نشان می دهیم. داریم:

$$4k+1 = a^2 \Rightarrow a^2 - 1 = 4k \Rightarrow (a-1)(a+1) = 4k$$

$4k$ زوج است، پس a باید عددی فرد باشد. (ب) $a-1$ و $a+1$ زوج شوند و

سمت راست تساوی هم زوج بشه.)

$$a = 2q+1 \Rightarrow (2q+1-1)(2q+1+1) = 2q(2q+2) = 4k$$

$$\Rightarrow 4q(q+1) = 4k \Rightarrow q(q+1) = 2k \Rightarrow k = \frac{q(q+1)}{2}$$

بنابراین k حاصل ضرب دو عدد متوالی است تقسیم بر ۲.

۱۷. **۲** روش ۱ می دانیم $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)(n)(n+1)$ است، یعنی

ضرب ۳ عدد متوالی است، پس همواره بر ۶ بخش پذیر است. اما اگر n فرد باشد،

$$\text{یعنی } n = 2k+1 \text{ داریم: } (n-1)(n)(n+1) = (2k)(2k+1)(2k+2) = 2(k+1) \cdot (2k+1) \cdot 2k = 4k(k+1)(2k+1)$$

$$= 4k(k+1)(2k+1) = 4(2q)(2k+1) = 8q(2k+1)$$

ضرب دو عدد متوالی زوج است

۲۲. ۲ اگر ab زوج باشد، حداقل یکی از a و b زوج است (یا یکی یا هر دو) پس $a^2 + b^2$ ممکن است زوج یا فرد باشد (برای مثال اگر $a = 2$ و $b = 1$ آن گاه $a^2 + b^2 = 5$ ولی اگر $a = 2$ و $b = 4$ آن گاه $a^2 + b^2 = 20$ بوده است.) اما اگر ab فرد باشد a و b هر دو فرد هستند. مربع هر عدد فرد، فرد است پس b^2 و a^2 هر دو فرد شده پس $a^2 + b^2$ زوج می شود این یعنی **۲** قطعاً درست است.

$$ab = \begin{cases} a \text{ فرد است} \Rightarrow a = 2k + 1 \\ b \text{ فرد است} \Rightarrow b = 2k' + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 2(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1)$$

زوج است.

اما برای اطمینان بیشتر دو گزینه **۳** و **۴** را نیز بررسی می کنیم.

۳ اگر $a + b$ زوج باشد، a و b یا هر دو زوج اند و یا هر دو فرد.

(الف) اگر هر دو زوج باشند:

$$\begin{cases} a = 2k \\ b = 2k' \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k'^2 = 4(k^2 + k'^2)$$

زوج است.

(ب) اگر هر دو فرد باشند:

$$\begin{cases} a = 2k + 1 \\ b = 2k' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 2(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1)$$

زوج است.

پس $a^2 + b^2$ همیشه زوج است.

۴ اگر $a + b$ فرد باشد یکی از a و b فرد و دیگری زوج است. فرض می کنیم a فرد و b زوج باشد، در این صورت:

$$\begin{aligned} a &= 2k + 1 \\ b &= 2k' \end{aligned} \Rightarrow a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 = 4(k^2 + k + k'^2) + 1$$

فرد است.

۲۳. ۱ $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ است. امتحان کنیم ببینیم به ازای کدام اعداد n عبارت $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج می شود.

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1 \\ n = 2 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4 \times 9}{4} = 9 \\ n = 3 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{9 \times 16}{4} = 36 \quad \checkmark \\ n = 4 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{16 \times 25}{4} = 100 \quad \checkmark \\ n = 5 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{25 \times 36}{4} = 225 \\ n = 6 &\Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(6 \times 7)^2}{4} = 21^2 = 441 \end{aligned}$$

پس شد دوتا!

۲۴. ۱ اگر بخواهیم $\frac{n(n+1)}{3}$ زوج باشد یا باید n مضرب ۳ باشد و یا $n+1$ که با ۳ در مخرج ساده شود. اما با توجه به این که از میان n و $n+1$ یکی حتماً زوج است، پس $n(n+1)$ همواره زوج است. پس فقط کافی است n یا $n+1$ مضرب ۳ باشد.

در هر دو حالت تعداد عددها را پیدا می کنیم:

$$n \Rightarrow n = 3k \Rightarrow 1 \leq 3k \leq 20 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{20}{3}$$

$$k = 1, 2, \dots, 6$$

در این حالت ۶ عدد وجود دارد.

$$n+1 \Rightarrow n+1 = 3k \Rightarrow n = 3k - 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 3k - 1 \leq 20 \Rightarrow 2 \leq 3k \leq 21 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq k \leq 7$$

$$k = 1, 2, \dots, 7$$

در این حالت نیز ۷ عدد وجود دارد، پس در مجموع به ازای ۱۳ مقدار n عبارت زوج است.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{۲۵. ۲} \quad \text{می دانیم:}$$

اما این کسر چه زمانی زوج می شود؟ زمانی که یکی از دو عدد n یا $n+1$ مضرب ۴ باشد. (۲ تو مفرج ساره بشه و ۲ هم بمونه که عدد زوج بشه)

یعنی اگر $n = 4k$ یا $n+1 = 4k$ باشد، $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج و در بقیه حالتها فرد می شود؛ پس تعداد حالت هایی که حاصل زوج می شود را پیدا کرده از کل حالتها کم می کنیم:

$$n = 4k \Rightarrow 31 \leq 4k \leq 60 \Rightarrow 7.75 \leq k \leq 15$$

$$k = 8, 9, \dots, 15$$

$15 - 8 + 1 = 8$ عدد در این حالت وجود دارد.

$$n+1 = 4k \Rightarrow n = 4k - 1 \Rightarrow 31 \leq 4k - 1 \leq 60$$

$$\Rightarrow 32 \leq 4k \leq 61 \Rightarrow 8 \leq k \leq 15.25 \Rightarrow k = 8, 9, \dots, 15$$

$$15 - 8 + 1 = 8$$

در این حالت نیز ۸ عدد وجود دارد:

پس در مجموع در ۱۶ حالت این حاصل زوج می شود.

$$60 - 31 + 1 = 30$$

تعداد کل اعضای مجموعه برابر است با:

پس در $14 = 30 - 16$ حالت این حاصل فرد می شود.

۲۶. ۲ داریم از روش در نظر گرفتن همه حالتها اثبات می کنیم می خواهیم بگوییم اگر n زوج باشد (p) یا n فرد باشد (q) ، فرد بودن $n^2 + 5n - 3$ نتیجه می شود (r) ، یعنی می خواهیم درستی $(p \vee q) \Rightarrow r$ را ثابت کنیم. به جای آن می گوییم اگر n زوج باشد (p) ، $n^2 + 5n - 3$ فرد است (r) و اگر n فرد باشد (q) باز هم $n^2 + 5n - 3$ فرد است (r) ، یعنی $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ را داریم ثابت می کنیم. با جدول ارزش هم به سادگی می توانیم نشان بدهیم که **۲** درست است.

۲۷. ۲ **روش ۱** در هر ۶ حالت زوج یا فرد بودن عدد را بررسی می کنیم:

$$n = 5 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

فرد = فرد + زوج + فرد + زوج + فرد

$$n = 6 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 6^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + 5^2) + 6^2 = 55 + 36 = 91$$

زوج در حالت قبلی دیدیم که فرد شد.

$$n = 7 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 7^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) + 7^2 = 91 + 49 = 140$$

فرد در حالت قبلی دیدیم که فرد شد.

$$n = 8 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 8^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + 7^2) + 8^2 = 140 + 64 = 204$$

زوج زوج

$$n = 9 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 9^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + 8^2) + 9^2 = 204 + 81 = 285$$

فرد زوج

$$n = 10 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + 9^2) + 10^2 = 285 + 100 = 385$$

فرد زوج

پس در دو حالت این مجموع زوج می شود.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{۲} \quad \text{روش ۲: می دانیم:}$$

$2n+1$ فرد است، پس اگر قرار باشد این حاصل زوج شود، باید یکی از دو عدد

$$n = 4k \Rightarrow n = 8$$

n یا $n+1$ مضرب ۴ باشد.

۳۲. ۲ اگر بخواهیم از برهان خلف استفاده کنیم باید خلاف حکم (یعنی n زوج باشد) را در نظر گرفته و به تناقض با فرض ($3n+5$ زوج است) برسیم.

$$n=2k \Rightarrow 3n+5=3(2k)+5=6k+4+1=2(\underbrace{3k+2}_q)+1=2q+1$$

همان طور که می بینید $3n+5$ فرد است، بنابراین به تناقض با فرض اولیه می رسیم.
 ۳۳. ۴ ۱ و ۲ و ۳ با برهان خلف ثابت می شوند اما ۴ اصلاً درست نیست که بخواهد ثابت بشود! چرا؟ کافی است $x = \sqrt{2}$ و $y = -\sqrt{2}$ باشد در این صورت $x+y=0$ و گویا می شود.

۳۴. ۱ هر چهار حالت این مطلب را یک دوره ای بکنیم:
 (۱) جمع، تفريق، ضرب و تقسيم دو عدد گویا (البته مخرج صفر نشه!)، گویا است.
 (۲) جمع و تفريق یک عدد گویا و یک عدد گنگ، گنگ است (با برهان خلف ثابت می شه).
 (۳) ضرب یک عدد گویا در عدد گنگ ممکن است گویا یا گنگ باشد مگر آن که عدد گویا غیر صفر باشد که در این صورت ضرب عدد گویای غیر صفر در عدد گنگ، حتماً گنگ می شود.

(فقط وقتی عدد گویا برابر صفر باشد ضرب گویا در گنگ، گویا می شه).
 (۴) جمع، تفريق، ضرب و تقسيم دو عدد گنگ نیز در حالت کلی نامشخص است، ممکن است گویا یا گنگ باشد.

خب $\alpha + \beta$ گویا و β گنگ است پس جمع آن ها یعنی $\alpha + 2\beta$ طبق ۲، گنگ می شود، از طرفی 2β گنگ است پس $\alpha - \beta = \underbrace{\alpha + 2\beta}_{\text{گنگ}} - \underbrace{3\beta}_{\text{گنگ}}$ هم گنگ می شود. پس هر دو گنگ هستند.

۳۵. ۱ دیدیم که با برهان خلف می توان ثابت کرد جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، همواره گنگ است. بنابراین $a+r$ گنگ است، پس ۱ درست است. بقیه گزینه ها را با مثال نقض رد می کنیم:

- ۲ $a = \sqrt{2} \Rightarrow a-b=0$. گویا است.
 ۳ $a = \sqrt{2} \Rightarrow a^2=2$. گویا است.
 ۴ $a = \sqrt{2} \Rightarrow ra=0$. گویا است.
 $r=0$

۳۶. ۱ از برهان خلف استفاده می کنیم، ادعا می کنیم $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است، اما اگر فرض کنیم این حاصل ضرب فرد باشد. چون ضرب ۳ عبارت فرد شده است، پس (a_1-b_1) ، (a_2-b_2) و (a_3-b_3) همگی فرد هستند، ولی اگر این سه عدد را با هم جمع کنیم، داریم:

$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)=(a_1+a_2+a_3)-(b_1+b_2+b_3)=0$
 دقت کنید b_1, b_2, b_3 همان اعداد a_1, a_2, a_3 با ترتیب دیگری هستند، پس حاصل جمع b_1, b_2, b_3 با جمع a_1, a_2, a_3 برابر است. اما جمع سه عدد فرد در حالت کلی همیشه فرد است.

فرد است. $(2k+1)+(2k'+1)+(2k''+1)=2(k+k'+k''+1)+1$
 بنابراین چون جمع سه عدد $a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$ برابر صفر شده، هر سه آن ها نمی توانند فرد باشند و به تناقض می رسیم. بنابراین این حاصل ضرب همیشه زوج است.

۳۷. ۲ وقتی همه متغیرها ۱ باشند یا -۱، پس حاصل هایی مثل $ab, ac, \dots$ نیز یا یک می شوند یا -۱، پس:

الف) $ab+bc+ca$ هیچ وقت نمی تواند صفر شود چون جمع سه عدد که ۱ یا -۱ هستند، صفر نمی شود!

$$n+1=4k \Rightarrow n=4k-1 \Rightarrow n=7$$

پس فقط در دو حالت این مجموع زوج است.

۲۸. ۱ چون گفته به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد n^2+an+b^2 زوج است. هر دو حالت زوج یا فرد بودن n را بررسی می کنیم:

اگر n زوج باشد، واضح است که n^2 و an زوج است و چون می دانیم n^2+an+b^2 نیز زوج است، پس b^2 زوج است، در نتیجه b زوج است.
 اگر n فرد باشد، n^2 نیز فرد است و چون b^2 زوج است پس n^2+b^2 عددی فرد است. اما چون می دانیم n^2+b^2+an عددی زوج است، a حتماً باید فرد باشد که an فرد شود و کل عبارت زوج شود.

۲۹. ۱ اگر a بر ۵ بخش پذیر باشد که a بر ۵ بخش پذیر است و مسئله ثابت می شود. باید بررسی کنیم در حالتی که a بر ۵ بخش پذیر نیست، پاسخ چگونه است. عددی که بر ۵ بخش پذیر نباشد در تقسیم به ۵ می تواند باقی مانده های ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ داشته باشد. از طرفی عدد، مربع کامل است. داریم:

$$n=5k+1 \Rightarrow n^2=\underbrace{25k^2+10k+1}_{\text{مضرب 5}}$$

در تقسیم به ۵ باقی مانده ای برابر ۱ دارد.

$$n=5k+2 \Rightarrow n^2=\underbrace{25k^2+20k+4}_{\text{مضرب 5}}$$

در تقسیم به ۵ باقی مانده ای برابر ۴ دارد.

$$n=5k+3 \Rightarrow n^2=\underbrace{25k^2+30k+9}_{\text{مضرب 5}}$$

با توجه به این که باقی مانده ۹ در تقسیم به ۵ برابر ۴ است، پس باقی مانده n^2 بر ۵ نیز در این حالت برابر ۴ است.

$$n=5k+4 \Rightarrow n^2=\underbrace{25k^2+40k+16}_{\text{مضرب 5}}$$

باقی مانده ۱۶ بر ۵ برابر ۱ است، پس n^2 در این حالت در تقسیم به ۵ باقی مانده ای برابر ۱ دارد. بنابراین با توجه به چهار حالتی که بررسی کردیم، باقی مانده یک مربع کامل (وقتی خود عدد، مضرب ۵ نباشد) در تقسیم بر ۵ یا برابر ۱ است و یا برابر ۴، یعنی اگر a مربع کامل باشد یا به صورت $5q+1$ است یا $5q+4$ ، در این صورت:

$$a=5q+1 \Rightarrow a^2=25q^2+10q+1$$

$$a=5q+4 \Rightarrow a^2=25q^2+40q+16$$

باقی مانده ۱۶ در تقسیم به ۵ برابر ۱ است.

بنابراین باقی مانده a^2 در تقسیم به ۵، برابر ۱ است، در نتیجه a^2-1 بر ۵ بخش پذیر است.

۳۰. ۱ می دانیم برای داشتن یک زیرمجموعه دو عضوی کافی است ۲ عضو از این n عضو را انتخاب کنیم:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

حالا اگر بخواهیم این عدد مضرب ۴ باشد، یا n باید مضرب ۸ باشد یا $n-1$ مضرب ۸ باشد. (پهنه ۲ یا ۳ توی مخرج ساده می شه و عبارت، مضرب ۳ می شه)
 بنابراین: $n=8k$ یا $n-1=8k \Rightarrow n=8k+1$

در میان گزینه ها فقط ۱۴۰۱ چنین ویژگی ای دارد.

۳۱. ۴ این که مربع هر عدد طبیعی فرد به صورت $8q+1$ است به صورت مستقیم ثابت می شود نه با برهان خلف! ببینید:

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1=4(2q)+1=8q+1$$

ضرب دو عدد متوالی زوج است

بقیه گزینه ها از تیپ سؤال هایی هستند که با برهان خلف ثابت می شوند.

ب) $ab + bc + cd + da$ می‌تواند صفر شود. برای مثال اگر $a = b = 1$ و $c = d = -1$ باشد، داریم:

$$ab + bc + cd + da = 1 + (-1) + (-1) + (-1) = 0$$

پ) اگر بخواهیم $ab + bc + cd + de + ef + fa$ صفر باشد، باید سه تا ۱ و سه تا -۱ داشته باشیم. اما با استفاده از برهان خلف می‌توانیم نشان دهیم امکان این که سه تا از این جمله‌ها -۱ باشد، وجود ندارد.

اگر همه این جمله‌ها را در هم ضرب کنیم، داریم:

$$ab \times bc \times cd \times de \times ef \times fa = a^2 b^2 c^2 d^2 e^2 f^2 = 1$$

پس این حاصل ضرب همواره برابر ۱ است. اما اگر سه تا از متغیرها ۱ و سه تا ۱ دیگر -۱ باشد، حاصل ضرب می‌شود: $1 \times 1 \times 1 \times -1 \times -1 \times -1 = -1$

که به تناقض می‌رسیم.

۳۸. ۳ از بحث منطقی یادمان هست که $q \Leftrightarrow p$ زمانی درست است که p و q یا هر دو درست باشند یا هر دو نادرست. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ درست $\Leftrightarrow$ درست. پس این ترکیب دوشروطی درست است.

۲ نادرست $\Leftrightarrow$ نادرست. پس این ترکیب دوشروطی درست است.

اما یک راه دیگر بررسی درستی ترکیب دوشروطی $q \Leftrightarrow p$ این است که هم بتوانیم از درستی p درستی q را نتیجه بگیریم و هم بتوانیم از درستی q درستی p را (و یا از نادرستی p نادرستی q را نتیجه بگیریم و از نادرستی q نادرستی p را) در ۳ اگر $x = 1$ باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم $x^2 = 1$ یعنی $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ درست است، اما $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ لزوماً درست نیست، چون x ممکن است -۱ باشد.

در ۴ ولی هم $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ درست است و هم $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ پس این ترکیب دوشروطی نیز درست است.

۳۹. ۲ ترکیب دوشروطی $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ همواره درست است زیرا هم از $a = b$ می‌توان نتیجه گرفت $a^3 = b^3$ و هم از $a^3 = b^3$ می‌توان نتیجه گرفت $a = b$ است.

اما ترکیب دوشروطی $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$ درست نیست. برای مثال:

$$-2 < 1 \Rightarrow 4 > 1$$

۴۰. ۳ برای این که یک ترکیب دوشروطی درست باشد، باید از درستی هر طرف به درستی طرف دیگر برسیم. خوب $|-1| = |1|$ است، ولی $1 \neq -1$ پس

۱ غلط است. $(-1)^2 = 1^2$ است، ولی $1 \neq -1$ پس ۲ هم غلط است. اگر $a = 0$ و $b = 1$ باشد $a^2 - ab = 0$ می‌شود. ولی $0 \neq 1$ است، پس ۴ هم

غلط است. درستی ۳ را ثابت می‌کنیم. اگر $a = b$ باشد می‌توانیم دو طرف را به توان فرد برسانیم. برعکس آن هم درست است اگر از دو طرف $a^2 = b^2$ ریشه سوم بگیریم $a = b$ می‌شود.

۴۱. ۱ ارزش گزاره $q \Leftrightarrow p$ وقتی درست می‌شود که p و q هم‌ارزش باشند. $|x| < 0$ و $x^2 + 1 < 0$ به ازای هر عدد حقیقی نادرست هستند، پس گزاره $x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow |x| < 0$ درست می‌شود. اما برای بررسی درستی

$x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$ باید از درستی $|x| > 1$ به درستی $x^2 > 1$ برسیم و برعکس: $x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1$ توان $|x| > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ یا $x < -1$ یا $x > 1$

پس این هم درست است.

۴۲. ۲ اگر $n = 2$ بگیریم 2^2 مضرب ۴ است ولی ۲ مضرب ۴ نیست پس ۲ می‌شود جواب.

یک نکته‌ای هم این‌جا بگویم، اگر n^2 مضرب عدد اول p باشد n هم مضرب آن است و برعکس (مثلاً اگر n^2 ۳ باشد حتماً باید n هم ۳ باشد!) بقیه چیزهایی که گفته هم‌ارز هستند؛ ببینید:

$$1 \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

در هندسه اثبات این را زیاد دیده‌اید.

$$۳ \quad a^2 + b^2 + ab \geq 0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$$

۴۳. ۲ باید ببینیم اول $a^2 + b^2 = (a+b)^2$ چه موقع درست می‌شود! خوب،

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$$

پس حداقل یکی از a و b باید صفر باشد. (مثلاً $a = 0$ و $b = 1$)

فقط $a^2 b + b^2 a$ قطعاً صفر می‌شود، ولی $(a-b)^2$ و $(\frac{a}{2} + \frac{b}{2})^2$ لزوماً صفر نیستند. (همین مثالی که زدیم هر سه گزینه دیگر را رد می‌کند!)

۴۴. ۱ عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{b+a}{ab}$$

$$\Rightarrow ab = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + ba + b^2 = 0$$

روشن! این را یک معادله درجه دوم برحسب a ببینید.

$\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2$ می‌شود که همواره منفی است (چون $b \neq 0$) پس این معادله جواب ندارد یعنی اصلاً a و b این‌چنینی نداریم!

روشن! این عبارت را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$a^2 + ba + b^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3}{4}b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2$$

این عبارت مجموع دو مربع کامل است و چون $a \neq 0$ و $b \neq 0$ معادله به ازای هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از صفر است.

۴۵. ۴

$$1 \quad a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$
 درست است.

$$۲ \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$
 درست است.

$$۳ \quad a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$
 درست است.

۴ درست نیست و $a = 1$ و $b = 1$ مثال نقضی برای آن است.

$$a = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 0 < 2$$

۴۶. ۱ اگر طرفین را در ۲ ضرب کنیم، داریم:

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

$$۴۷. ۱ \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
 می‌دانیم:

$$a^3 \geq b^3 + ab(b-a) \Leftrightarrow a^3 - b^3 \geq ab(b-a)$$
 بنابراین:

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \geq ab(b-a)$$

۵۴. ۳

$$\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq \frac{4\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x}+1}{x} \geq \frac{4\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{x}+1)^2 \geq 4x\sqrt{x} \Leftrightarrow (x\sqrt{x})^2 + 1 + 2x\sqrt{x} \geq 4x\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{x})^2 + 1 - 2x\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$$

رابطه آخر همواره درست است و چون همه معادله‌ها بازگشت پذیرند، همه گزاره‌ها هم‌ارز هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

۵۵. ۴ ۱ می‌دانیم $q \Leftrightarrow p$ زمانی درست است که هم $p \Rightarrow q$ درست باشد و هم $q \Rightarrow p$. اگر n مضرب ۳ باشد، آن‌گاه واضح است که n^2 نیز مضرب ۳ است:

$$n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2$$

درست است.

اما با برهان خلف نشان می‌دهیم n^2 مضرب ۳ باشد، n نیز مضرب ۳ است. چون اگر n مضرب ۳ نباشد، در تقسیم به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۲ دارد که در این صورت:

$$n = 3k+1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1$$

مضرب ۳ نیست.

$$n = 3k+2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4$$

مضرب ۳ نیست.

پس اگر n مضرب ۳ نباشد، n^2 نیز نمی‌تواند مضرب ۳ باشد و به تناقض می‌رسیم، پس n باید مضرب ۳ باشد.

۲ اگر n حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد، یعنی $n = k(k+1)$ در این صورت:

$$4n+1 = 4k(k+1)+1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2$$

اما اگر $4n+1$ مربع کامل باشد نیز می‌توان نشان داد n حاصل‌ضرب دو عدد متوالی است.

مربع کامل را با a^2 نشان می‌دهیم، در این صورت:

$$4n+1 = a^2 \Rightarrow 4n = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

سمت چپ تساوی مضرب ۴ است، پس a باید حتماً فرد باشد که $a-1$ و $a+1$ زوج شوند:

$$a = 2k+1 \Rightarrow 4n = (2k+1-1)(2k+1+1) = 2k(2k+2)$$

$$\Rightarrow 4n = 4k(k+1) \Rightarrow n = k(k+1)$$

۳ اگر $n^2 + 2$ فرد باشد، n نیز فرد است (پهن اگر n زوج باشد $n^2 + 2$ هم زوج می‌شود) و اگر n فرد باشد $3n$ فرد و در نتیجه $3n+1$ زوج می‌شود.

از طرفی اگر $3n+1$ زوج باشد، $3n$ باید فرد باشد و در نتیجه n باید فرد باشد و با فرد بودن n می‌توان نتیجه گرفت n^2 نیز فرد و $n^2 + 2$ نیز فرد است، پس این گزاره دوشرطی نیز درست است.

۴ نادرست است. اگر n فرد باشد، $3^n - 1$ زوج است اما اگر $3^n - 1$ زوج باشد (که اصولاً همیشه زوج است) دلیلی ندارد n فرد باشد. (برای مثال: $1 = 3^0 - 1$ زوج است اما n فرد نیست.)

۵۶. ۲

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} \leq 2\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} x-a+x+a+2\sqrt{(x-a)(x+a)} \leq 4x$$

$$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{(x-a)(x+a)} \leq 4x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-a^2} \leq x \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2-a^2 \leq x^2 \Leftrightarrow a^2 \geq 0$$

۵۷. ۴ همه جمله‌ها را به سمت چپ نامساوی می‌بریم:

$$4x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - y \geq 0$$

چون ضریب y برابر ۱- است، نمی‌توان این عبارت را به سادگی به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت. (از کجا فهمیدیم باید به صورت مجموع سه مربع کامل بنویسیم، از گزینه‌ها!)

طرفین رابطه را بر $a-b$ تقسیم می‌کنیم. دقت کنید که در صورت سؤال گفته $a > b$ است، پس $a-b$ عددی مثبت است و بنابراین جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab \geq -ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 0$$

۴۸. ۳ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم. (چون سمت راست نامساوی همواره مثبت است مشکلی پیش نمی‌آید.)

$$(|a|-|b|)^2 \leq (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2|ab| \leq a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\Leftrightarrow 2ab \leq 2|ab| \Leftrightarrow ab \leq |ab|$$

۴۹. ۱ صبورانه برویم جلو:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \geq \frac{a+b}{ab}$$

$$\xrightarrow{\times(a^2 b^2)} \frac{a^2 + b^2}{(چاق و لاغر)} \geq (a+b)(ab)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a+b)(ab)$$

$$\xrightarrow{\div(a+b)} a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ بدیهی}$$

۵۰. ۲

$$(x-y)(x+y)(z-t)(z+t) = (xz-yt)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)(z^2 - t^2) \leq (xz - yt)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 z^2 - x^2 t^2 - y^2 z^2 + y^2 t^2 \leq x^2 z^2 + y^2 t^2 - 2xyzt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 t^2 + y^2 z^2 - 2xyzt \Leftrightarrow (xt - yz)^2 \geq 0$$

۵۱. ۱ عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

۵۲. ۴

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} - \frac{xy}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} - \frac{yz}{z^2} + \frac{z^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2} - \frac{xz}{z^2} + \frac{z^2}{z^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} - \frac{xy}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} - \frac{yz}{z^2} + \frac{z^2}{z^2} - \frac{xz}{z^2} \geq 0$$

$$\xrightarrow{\times y^2 z^2} x^2 - xy + y^2 - yz + z^2 - xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

۵۳. ۱ گزاره دوم را ساده می‌کنیم:

$$\left(a + \frac{b}{x}\right)^2 + X \geq 0 \Rightarrow a^2 + ab + \frac{b^2}{x} + X \geq 0$$

این گزاره با $a^2 + b^2 + ab \geq 0$ هم‌ارز است. با مقایسه این دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 \geq 0 \\ a^2 + ab + \frac{b^2}{x} + X \geq 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 = \frac{b^2}{x} + X \Rightarrow X = \frac{xb^2}{x}$$

بنابراین طرفین رابطه را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\Leftrightarrow \underbrace{4x^2}_{4x^2+4x^2} + 2y^2 + \underbrace{2}_{1+1} - 4xy - 4x - 2y \geq 0$$

حالا با یکی از y^2 ها و $-2y$ و ۱ اتحاد می‌سازیم: $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$

چون جمله $-4xy$ داریم، پس با $4x^2$ و y^2 و $-4xy$ نیز یک اتحاد می‌سازیم:

$$4x^2 + y^2 - 4xy = (2x - y)^2$$

جمله‌های باقی‌مانده $4x^2$ ، $-4x$ و ۱ هستند که با آن‌ها نیز می‌توان یک اتحاد ساخت:

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 + (2x-y)^2 + (2x-1)^2 \geq 0$$

بنابراین: **۵۸. ۳** در تمرین‌های کتاب درسی دیدیم که اگر $a > 0$ و $b > 0$ باشد،

آن‌گاه $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ یعنی جمع هر عدد مثبت با معکوس آن همواره بزرگ‌تر و یا مساوی ۲ است.

حالا اگر این عبارت را ساده کنیم، داریم:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{xz}{y^2} + \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + 1 + \frac{yx}{z^2} + \frac{zy}{x^2} + \frac{z^2}{yx} + 1\right)$$

$$= 3 + \underbrace{\frac{xz}{y^2} + \frac{x^2}{yz}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{y^2}{xz} + \frac{yz}{x^2}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{yx}{z^2} + \frac{z^2}{yx}}_{\geq 2}$$

بنابراین حداقل مقدار این عبارت برابر ۹ است. یعنی اگر m حداکثر برابر ۹ باشد می‌توان این نامساوی را ثابت کرد. اما اگر برای مثال $m = 10$ باشد، دلیلی ندارد نامساوی درست باشد.

۵۹. ۱ اگر دو عدد فرد متوالی را $2k+1$ و $2k+3$ بگیریم مجموع آن‌ها $4k+4$ می‌شود که همواره بر ۴ بخش‌پذیر است، پس **۱** درست است. مثال نقض بقیه را هم ببینید:

۲ $x=1, y=4 \Rightarrow \sqrt{1+4} \neq \sqrt{1} + \sqrt{4}$

۳ $n=4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15$ اول نیست

۴ میانگین ۴ عدد ۹، ۸، ۷ و ۱ برابر $\frac{25}{4}$ می‌شود که فقط از ۱ بزرگ‌تر است.

۶۰. ۳ **۱** بر ۶ بخش‌پذیر است.

۲ مجموع ارقام آن برابر ۷ است، بنابراین فرض گزاره شرطی درست نیست.

۳ مجموع ارقام برابر ۱۲ است که بر ۶ بخش‌پذیر است، اما عدد بر ۶ بخش‌پذیر نیست، چون زوج نیست.

۶۱. ۳ عددها را برای سادگی کار $2k-4$ ، $2k-2$ ، $2k$ ، $2k+2$ ، $2k+4$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$(2k-4) + (2k-2) + 2k + (2k+2) + (2k+4) = 10k$$

که همواره مضرب ۵ است.

۶۲. ۲ این‌جا روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها مناسب نیست چون امتحان کردن n از یک تا بیست طولانی است.

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{4} \text{ می‌شود. اگر } \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \text{ زوج باشد}$$

نیز باید زوج باشد. $n+1$ و n دو عدد متوالی هستند، پس یکی زوج و دیگری فرد است. برای این‌که وقتی $n(n+1)$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم عبارت زوج باشد یا $n+1$ باید مضرب ۴ باشد یا n . پس $n=4k$ یا $n=4k-1 \Rightarrow n+1=4k$

$$n=4k \xrightarrow{1 \leq n \leq 20} 1 \leq 4k \leq 20 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq 5$$

$$\Rightarrow k=1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow n=4, 8, 12, 16, 20$$

$$n=4k-1 \xrightarrow{1 \leq n \leq 20} 1 \leq 4k-1 \leq 20 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow k=1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow n=3, 7, 11, 15, 19$$

پس به ازای ۱۰ عدد طبیعی n که $1 \leq n \leq 20$ است، آن عبارت زوج می‌شود.

۶۳. ۲ حاصل ضرب دو عدد گنگ ممکن است گویا یا گنگ باشد. برای مثال مجموع دو عدد $2-\sqrt{2}$ و $2+\sqrt{2}$ عددی گویا و حاصل ضرب آن‌ها نیز گویاست:

$$\text{اما مجموع دو عدد } 2-\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2} \text{ گویا ولی حاصل ضرب آن‌ها گنگ است:}$$

$$\sqrt{2}(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2 = \text{گنگ} = \text{گنگ} - \text{گنگ}$$

هم‌چنین می‌دانیم حاصل ضرب یک عدد گویای غیرصفر در یک عدد گنگ همواره گنگ است، چون α و β قرینه نیستند پس $\alpha + \beta \neq 0$ است و گویاست و از طرفی α گنگ است پس ضربشان نیز گنگ است:

$$(\alpha + \beta) \times \alpha = \alpha^2 + \alpha\beta$$

گنگ گنگ گنگ

۶۴. ۳ هر گزاره شرطی با عکس نقیضش هم‌ارز است، یعنی $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

$$(x > 2) \Rightarrow (x^2 > 4) \equiv \sim (x^2 > 4) \Rightarrow \sim (x > 2)$$

$$\equiv x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$$

۶۵. ۴

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2 \xrightarrow{\text{چون } a \text{ مثبت است جهت عوض نمی‌شود.}} \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0 \text{ همواره برقرار}$$

۶۶. ۴

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq \frac{4}{a^4 + b^4} \Leftrightarrow \frac{a^4 + b^4}{a^4 b^4} \geq \frac{4}{a^4 + b^4}$$

$$\Leftrightarrow (a^4 + b^4)^2 \geq 4a^4 b^4 \Leftrightarrow a^8 + b^8 + 2a^4 b^4 \geq 4a^4 b^4$$

$$\Leftrightarrow a^8 + b^8 - 2a^4 b^4 \geq 0 \Rightarrow (a^4 - b^4)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 (a+b)^2 (a^2+b^2)^2 \geq 0$$

۶۷. ۴ اگر n زوج باشد، $an^2 + bn$ زوج و در نتیجه $an^2 + bn + 1$ همواره فرد می‌شود. پس n نمی‌تواند زوج باشد و فرد است. از طرفی:

$$an^2 + bn + 1 = n(an + b) + 1$$

a	b	$an \mp b$
زوج	زوج	زوج = زوج + زوج
زوج	فرد	فرد = فرد + زوج
فرد	زوج	فرد = زوج + فرد
فرد	فرد	زوج = فرد + فرد

اگر $an^2 + bn + 1$ بخواهیم زوج باشد $n(an + b)$ باید فرد باشد و چون n فرد است $an + b$ نیز باید فرد باشد.

پس a فرد است و b زوج یا a زوج است و b فرد که در هر دو حالت $a+b$ فرد است.

۶۸. ۱

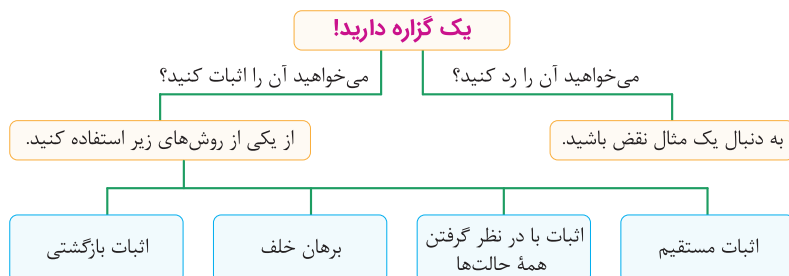
$$\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} \geq 2(x-y) \Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{yx} \geq 2(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) \geq 3xy(x-y)$$

فصل ۱: آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

در درس استدلال ریاضی درباره روش‌های اثبات و رد یک گزاره صحبت می‌کنیم. برای آن‌که متوجه شویم در این درس چه می‌خوانیم خیلی مختصر و مفید به نمودار زیر نگاه کنید:



مثال نقض

مثالی است که نشان می‌دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است.

برای مثال گزاره «به ازای هر عدد طبیعی n عبارت $n^2 + 2$ همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.» همیشه درست نیست و مثال نقض دارد. برای پیدا کردن کوچک‌ترین مثال نقض این گزاره عددها را از ۱، یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow n^2 + 2 = 3 \Rightarrow \text{بر ۳ بخش‌پذیر است.}$$

$$n = 2 \Rightarrow n^2 + 2 = 6 \Rightarrow \text{بر ۳ بخش‌پذیر است.}$$

$$n = 3 \Rightarrow n^2 + 2 = 11 \Rightarrow \text{بر ۳ بخش‌پذیر نیست.}$$

همان‌طور که می‌بینید به ازای $n = 3$ ، عدد $n^2 + 2$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، پس $n = 3$ مثال نقضی برای این گزاره است.

نکته: یک وقت‌هایی گزاره ما به صورت $p \Rightarrow q$ است. در این صورت یک مثال نقض مناسب باید هم‌زمان دو شرط زیر را داشته باشد:

۱ p درست باشد.

۲ q نادرست باشد.

چون در این صورت $p \Rightarrow q$ به صورت $n \Rightarrow d$ درمی‌آید که در منطق ریاضی گفتیم ارزش آن نادرست است.

مثلاً گزاره «اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه p فرد است.» را در نظر بگیرید. واضح است که عدد ۴ مثال نقض، برای رد کردن این گزاره نیست، چرا که عدد ۴ اصلاً اول نیست. اما به ازای $p = 2$ می‌توان درستی این حکم را رد کرد. به بیان دیگر عدد ۲ مثال نقض مناسبی برای رد این حکم است؛ چرا که ۲ عددی اول است ولی فرد نیست.

تست: کدام عدد k مثال نقض مناسبی برای نشان دادن نادرستی گزاره «اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، $3k + 1$ عددی اول است.» به

حساب می‌آید؟

۳۰ (۴)

۲۰ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ ۴: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ ۱۲ حاصل ضرب دو عدد متوالی ۳ و ۴ است و $3 \times 12 + 1 = 37$ عددی اول است.

۲ اگرچه $3 \times 16 + 1 = 49$ عددی اول نیست، اما ۱۶ مثال نقض مناسبی برای این حکم نیست؛ چرا که ۱۶ حاصل ضرب هیچ دو عدد پشت سرهمی نیست.

۳ ۲۰ حاصل ضرب دو عدد متوالی ۴ و ۵ است و $3 \times 20 + 1 = 61$ اول است.

۴ ۳۰ حاصل ضرب دو عدد متوالی ۵ و ۶ است و $3 \times 30 + 1 = 91$ اول نیست؛ چرا که $91 = 7 \times 13$.

بنابراین **۴** پاسخ سؤال است و عدد ۳۰ مثال نقض مناسبی برای رد گزاره داده شده است، چرا که ۳۰ حاصل ضرب دو عدد متوالی است و $3 \times 30 + 1 = 91$ نیز عددی اول نیست.

نکته ۱: برای نشان دادن نادرستی یک گزاره، پیدا کردن یک مثال نقض کافی است اما برای اثبات یک حکم، نمی‌توانیم به مثال اکتفا کنیم و

به روش‌هایی برای استدلال کردن نیازمندیم.

۲ پیدا کردن مثال نقض خیلی وقت‌ها کار آسانی نیست و ممکن است مدت‌ها طول بکشد. برای مثال عبارت $991n^2 + 1$ را برای n های طبیعی در نظر بگیرید. اولین مثال نقض برای حکم: «برای n های طبیعی $991n^2 + 1$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.» یک عدد ۲۹ رقمی است!!!

$$n = 12055735790331359447442538738$$

(سرپیشگی ریاضی‌دان معاصر لهستانی اینو فهمیده. تو کتاب درسی هم تو قسمت برای فوآندن اومده.)



همان‌طور که دیدید، برای رد کردن یک گزاره، یک مثال کافی است که به آن مثال نقض گفته می‌شود، اما برای اثبات یک حکم باید یکی از روش‌های اثبات را به کار ببریم:

۱. اثبات مستقیم در اثبات مستقیم سعی می‌کنیم از دانش ریاضی که پیش از این یاد گرفته‌ایم استفاده کنیم و به صورت مستقیم از فرض به حکم برسیم. مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم مربع عددی فرد، عددی فرد است.

عدد فرد n را به صورت $2k+1$ می‌گیریم؛ پس:
یعنی n^2 نیز عددی فرد است.

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_q) + 1 = 2q + 1$$

تست: کدام یک از گزاره‌های زیر را می‌توان اثبات کرد؟

(۱) عدد $2^{2^n} + 1$ به ازای همهٔ عددهای طبیعی n اول است.

(۳) مجموع سه عدد متوالی بر ۳، بخش پذیر است.

(۲) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(۴) حاصل ضرب سه عدد متوالی بزرگ‌تر از یک بر ۱۲ بخش پذیر است.

پاسخ: ۳: یادتان باشد به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ درست است، ولی $n = 5$ مثال نقضی برای این گزینه است. چون:

$$n = 5 \Rightarrow 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

(این تو کتاب درسی اومده و فوبه که بلدش باشید!)

$$\sqrt{4+5} = \sqrt{4} + \sqrt{5} \Rightarrow 3 \neq 2 + \sqrt{5}$$

به ازای $x = 4$ و $y = 5$ می‌توان رابطهٔ داده‌شده در ۲ را رد کرد:

در مورد ۴: عددهای ۵، ۶ و ۷ سه عدد متوالی هستند اما حاصل ضرب آن‌ها یعنی 210 بر ۱۲ بخش پذیر نیست.

اما گزارهٔ داده‌شده در ۳: مثال نقضی ندارد و همواره درست است. برای اثبات آن اگر عدد کوچک‌تر از n فرض کنیم. داریم:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$$

همواره مضرب ۳ است.

نکته: ۱ به طور کلی اگر k عدد متوالی داشته باشیم همیشه مجموع آن‌ها بر k بخش پذیر است به شرط آن‌که k عددی فرد باشد.

۲ همچنین حاصل ضرب n عدد متوالی همواره بر $n!$ بخش پذیر است.

۲. اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها گاهی برای اثبات یک گزاره باید مسئله را در چند حالت در نظر بگیریم و هر حالت را بررسی کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: ثابت کنید مربع هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر صفر یا یک دارد.

پاسخ: می‌دانیم هر عدد طبیعی یا فرد است یا زوج. بنابراین در هر دو حالت، باقی‌ماندهٔ مربع عدد را به ۴ به دست می‌آوریم.

(بر ۴ بخش پذیر است، یعنی باقی‌مانده برابر صفر است.) $n^2 = 4k^2 \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n$ زوج باشد

(بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.) $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(\underbrace{k^2 + k}_q) + 1 = 4q + 1 \Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n$ فرد باشد

در هر دو حالت فرد یا زوج بودن n ثابت کردیم باقی‌ماندهٔ n^2 بر ۴، ۰ یا ۱ است.

اگر «زوج بودن n » را با p ، «فرد بودن n » را با q و «۰ یا ۱ بودن باقی‌ماندهٔ n^2 در تقسیم به ۴» را با r نشان دهیم، باید ثابت کنیم $(p \vee q) \Rightarrow r$ گزارهٔ درست است.

با توجه به هم‌ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ گزارهٔ مورد نظر ثابت می‌شود.

نکته: فرض کنید می‌خواهیم گزارهٔ $p \Rightarrow q$ را ثابت کنیم و برای p باید n حالت $p_1, p_2, \dots, p_n$ را در نظر بگیریم. (تو مثال قبل دو حالت فرد و زوج رو در نظر گرفتیم، تو یه مثالی باید سه حالت در نظر بگیریم و تو یه مثالی ۴ حالت و ... تو یه مثالی هم n حالت)

یک هم‌ارزی از درس منطق کتاب یازدهم داشتیم که این‌جوری بود:

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow q \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge (p_3 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

از این هم‌ارزی دقیقاً در روش اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها استفاده می‌شود.

مثال: ثابت کنید همواره یکی از عددهای a ، $a+10$ و $a+20$ بر ۳ بخش پذیر است.

پاسخ: اگر a مضرب ۳ باشد که خوب مسئله اثبات می‌شود، چون که خود a بر ۳ بخش پذیر است.

اگر a مضرب ۳ نباشد یا بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد که می‌شود آن را به صورت $3k+1$ نوشت و یا بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد و می‌توان آن را به صورت $3k+2$ نوشت.

مضرب ۳ است. $a = 3k+1 \Rightarrow a+20 = 3k+21 = 3(k+7)$

مضرب ۳ است. $a = 3k+2 \Rightarrow a+10 = 3k+12 = 3(k+4)$

پس نتیجه می‌گیریم اگر a مضرب ۳ باشد، خود a بر ۳ بخش پذیر است و همچنین اگر a بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشد، $a+20$ بر ۳ بخش پذیر است.

و بالاخره اگر a در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشد، $a+10$ بر ۳ بخش پذیر است.

۳. برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد، سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و استدلال، به یک نتیجه غیرممکن یا متضاد با فرض می‌رسیم.

برای مثال اگر بخواهیم ثابت کنیم «اگر n عددی طبیعی و n^2 مضرب ۵ باشد، n نیز مضرب ۵ است»، نشان می‌دهیم که اگر n مضرب ۵ نباشد به تناقض می‌رسیم: اگر n مضرب ۵ نباشد، در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ای بین ۱ تا ۴ دارد که آن را r می‌نامیم، بنابراین $1 \leq r \leq 4$ و $n = 5q + r$. در این صورت:

$$n^2 = \underbrace{25q^2 + 10qr + r^2}_{\text{مضرب ۵}}$$

همان‌طور که می‌بینید n^2 نیز در تقسیم بر ۵ دارای باقی‌مانده غیرصفر خواهد شد، در نتیجه نمی‌تواند مضرب ۵ باشد.

تست: برای اثبات حکم «حاصل جمع عدد گویای a و عدد گنگ b ، عددی گنگ است.» به روش فرض می‌کنیم $a + b$ گویاست و نشان می‌دهیم b است و به تناقض می‌رسیم.

(مشابه مثال کتاب درسی)

(۲) اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها - گنگ

(۴) برهان خلف - گنگ

(۱) اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها - گویا

(۳) برهان خلف - گویا

پاسخ ۳: فرض کنیم a گویا و b گنگ است. نشان می‌دهیم $a + b$ نیز گنگ است. برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

اگر $a + b$ گنگ نباشد، گویا است. حالا اگر $a + b$ گویا باشد و a نیز گویا باشد، با توجه به این که می‌دانیم اختلاف دو عدد گویا نیز گویا است، پس اختلاف $a + b$ و a نیز عددی گویا است. پس b نیز عددی گویا است که با فرض اولیه متناقض است، در نتیجه $a + b$ نمی‌تواند گویا باشد و در نتیجه گنگ است. پس ۳ درست است.

نکته ۱: در اثبات مستقیم از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم، یعنی:

$$p \Rightarrow q$$

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

۲ در اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف از نادرستی حکم به نادرستی فرض می‌رسیم، یعنی:

و یادتان هست که در درس منطق داشتیم:

۴. اثبات بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز این روش را خیلی وقت‌ها برای اثبات نامساوی‌ها استفاده می‌کنیم. به این صورت که یک نامساوی را آن‌قدر ساده

می‌کنیم تا به یک گزاره همیشه درست برسیم. حالا با توجه به این که این گزاره‌ها همگی هم‌ارزند و همه مراحل را می‌توان بازگشت، نامساوی ثابت می‌شود. برای مثال اگر بخواهیم ثابت کنیم اگر $a > 0$ باشد، $a + \frac{1}{a} \geq 2$ است، این رابطه را آن‌قدر ساده می‌کنیم تا به یک رابطه بدیهی کاملاً درست برسیم:

(مشابه مثال کتاب درسی)

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

می‌دانیم $a > 0$ است. با ضرب طرفین رابطه در a داریم:

این گزاره یک ترکیب دوشرطی است که اگر درستی هر کدام را نشان دهیم، درستی دیگری نیز مشخص می‌شود اما مشخص است از میان این دو گزاره اثبات گزاره سمت راست ساده‌تر است:

$$a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$$

با توجه به این که می‌دانیم $(a - 1)^2$ مربع کامل و همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس همه این گزاره‌های دوشرطی با هم، هم‌ارزند (یعنی می‌توانیم هر مرحله رو به عقب برگردیم) و در نتیجه: $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

یادآوری: خوب است از درس منطق این چیزها را یک بار دیگر با هم مرور کنیم!

۱ به گزاره $p \Leftrightarrow q$ یک گزاره دوشرطی می‌گویند.

۲ گزاره $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q یا هر دو درست باشند و یا هر دو نادرست.

۳ بنابراین اگر $p \Leftrightarrow q$ درست باشد و بدانیم q درست است، (همون گزاره همیشه درسته که تو آخر نامساوی بهوش می‌رسیم)، می‌توانیم نتیجه بگیریم p نیز درست است.

۴ حالا اگر چندتا گزاره داشته باشیم؛ مثلاً p و q و r و بدانیم $p \Leftrightarrow q$ و $q \Leftrightarrow r$ درست است، یعنی این سه‌تا گزاره با همدیگر هم‌ارزند. بنابراین اگر r درست باشد (همون گزاره بدیهی که آخر نامساوی بهوش می‌رسیم)، پس q درست است و در نتیجه p درست است.

تست: برای اثبات گزاره «اگر a و b دو عدد مثبت باشند، $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ است.» به روش بازگشتی، در نهایت به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

(مشابه مثال کتاب درسی)

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (۲)$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (۴)$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0 \quad (۱)$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0 \quad (۳)$$

پاسخ ۴: با توجه به هم‌ارز بودن دو گزاره در عبارت‌های دوشرطی داریم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

رابطه آخری همواره درست است و چون همه مرحله‌ها برگشت‌پذیر است، همه گزاره‌ها هم‌ارز هستند، یعنی حکم ثابت می‌شود.

البته گاهی هم کار به همین سادگی نیست و برای رسیدن به یک رابطه بدیهی باید کمی بیشتر زحمت بکشیم. تست زیر را نگاه کنید.

تست: برای اثبات نامساوی $x^2 + y^2 + 4 \geq xy + 2x + 2y$ به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (۲)$$

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (x+y)^2 \geq 0 \quad (۴)$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (۱)$$

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (۳)$$



$$x^2 + y^2 + 4 \geq xy + 2x + 2y$$

پاسخ ۲: به صورت سؤال نگاه کنید:

در این مدل سؤال‌ها، همان‌طور که از گزینه‌ها پیداست، باید عبارت را به صورت مجموع چند مربع کامل بنویسیم. اما با توجه به این که یکی از جملات xy است و در عبارت‌های $(x \pm y)^2$ ما $2xy$ داریم، پس زمانی به وجود می‌آید که یا $(\frac{x}{2} \pm y)^2$ و یا $(\frac{y}{2} \pm x)^2$ را داشته باشیم ولی با توجه به گزینه‌ها و نبود چنین عبارت‌هایی در آن، بهتر است طرفین رابطه را در ۲ ضرب کنیم، چون با $2xy$ خیلی راحت‌تر می‌شود کار کرد:

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 8 \geq 2xy + 4x + 4y$$

همه جملات را می‌بریم سمت چپ نامساوی، داریم:

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 8 - 2xy - 4x - 4y \geq 0$$

حالا سعی می‌کنیم عبارت را به صورت مجموع سه مربع کامل بنویسیم:

$$\Leftrightarrow \underline{x^2} + \underline{x^2} + \underline{y^2} + \underline{y^2} - \underline{2xy} - \underline{4x} - \underline{4y} + \underline{4} + \underline{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 0$$

اما در پایان این بخش خوب است یک بررسی کلی داشته باشیم که با هر کدام از این روش‌های اثبات معمولاً چه مسائلی را می‌توان حل کرد؟ برای جمع‌بندی این بحث و فهمیدن این موضوع، بهتر است بررسی کنیم که در مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی، چه سؤالی از چه روشی حل شده است. به جدول زیر نگاه کنید:

نمونه‌ها	
مثال نقض (درخت) گزاره‌هایی در مورد اعداد اول $2^{2^n} + 1$ عددی اول است. (مثال کتاب) $2^n - 1$ همواره اول است. (مثال کتاب) $991n^2 + 1$ همواره اول است. (مثال کتاب) گزاره‌هایی درباره اعداد گنگ و گویا: حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، گنگ است. (کنکور) گزاره: هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت. (کنکور) (مثال نقض این گزاره، اعداد به صورت 2^n است.)	گزاره‌هایی در مورد اعداد اول گزاره‌هایی درباره اعداد گنگ و گویا: حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، گنگ است. (کنکور) گزاره: هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت. (کنکور) (مثال نقض این گزاره، اعداد به صورت 2^n است.)
مجموع سه عدد متوالی بر ۳ بخش پذیر است. (مثال کتاب) در حالت کلی: اگر k فرد باشد، مجموع k عدد متوالی بر k بخش پذیر است. مجموع هر دو عدد فرد، زوج است. (مثال کتاب) در حالت کلی: k عدد فرد را با هم جمع می‌کنیم، اگر k فرد باشد، مجموع این k عدد، فرد و اگر k زوج باشد، مجموع این k عدد، زوج است. اگر k حاصل ضرب دو عدد متوالی باشد، $4k + 1$ مربع کامل است. (مثال کتاب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی، عدد وسطی است. (مثال کتاب) در حالت کلی: میانگین k عدد متوالی، عدد وسطی است، اگر k فرد باشد. مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.	اثبات مستقیم
به ازای هر عدد طبیعی n، $5n + 7 - n^2$ فرد است. (مثال کتاب) اگر $ab = 0$، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$. (مثال کتاب) اگر ab فرد باشد، $a^2 + b^2$ زوج است. (مثال کتاب) سؤال‌هایی مثل } مربع هر عدد در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر صفر یا ۱ دارد. یکی از عددهای a، $a+1$ و $a+2$ مضرب ۳ است. حاصل ضرب ۳ عدد متوالی بر ۶ بخش پذیر است. در حالت کلی حاصل ضرب n عدد متوالی بر $n!$ بخش پذیر است.	اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها
جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، همواره گنگ است. (مثال کتاب) ضرب یک عدد گویای غیرصفر در یک عدد گنگ، همواره گنگ است. (مثال کتاب) اگر x گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است. (تمرین کتاب) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است. (تمرین کتاب) اگر n مضرب ۳ نباشد، n^5 نیز مضرب ۳ نیست. اگر a_1 و a_2، ... و a_n عددهایی صحیح و b_1، b_2، ... و b_n همان عددها ولی به ترتیب دیگری باشند $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_n - b_n)$ عددی زوج است. (تعمیم یافته مثال کتاب)	برهان خلف
گزاره‌های بازگشتی $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$ (مثال کتاب) $a^5 = b^5 \Leftrightarrow a = b$ (شبهه مثال کتاب) بسیاری از نامساوی‌ها	اثبات‌های بازگشتی

مقدمه مؤلف

۱ پاسخ‌های تشریحی

🍌 پاسخ‌های کاملاً تشریحی، گام‌بندی‌شده و آموزنده را برایتان آماده کرده‌ایم. در این پاسخ‌ها از روش‌های خلاقانه (تیزبازی‌ها)، نکات، شفاف‌سازی‌ها، تله‌ها و استفاده کردیم تا پاسخ‌ها بیشتر و بیشتر آموزنده و قابل فهم باشند.

🍌 در کنار پاسخ اولین تست هر فصل، یک آیکون به صورت 🎧 گذاشته‌ایم. با کلیک کردن روی این آیکون مستقیماً به درس‌نامه آن درس می‌روید.

۲ درس‌نامه

درس‌نامه‌هایی کاملاً خودآموز، با مثال‌هایی کاربردی و هماهنگ با بانک تست برایتان گذاشته‌ایم تا با مطالعه آن‌ها بتوانید به راحتی تمام تست‌های بانک تست را جواب بدهید. این درس‌نامه‌ها تمام مفاهیم هندسهٔ کنکور را پوشش می‌دهند.

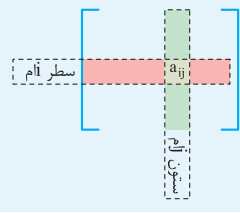
فهرست

درس نامه	پاسخ	
		فصل اول ماتریس و کاربردها
۲۶۳	۶	درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس ها
۲۷۷	۳۰	درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان
		فصل دوم آشنایی با مقاطع مخروطی
۲۹۴	۶۴	درس ۱: مکان هندسی
۲۹۶	۶۶	درس ۲: دایره
۳۰۶	۸۸	درس ۳: بیضی
۳۱۶	۹۸	درس ۴: سهمی
		فصل سوم بردارها
۳۲۶	۱۱۲	درس ۱: معرفی فضای R^3
۳۳۶	۱۲۳	درس ۲: ضرب داخلی دو بردار
۳۳۹	۱۳۴	درس ۳: ضرب خارجی دو بردار
۳۴۳	۱۴۵	فصل چهارم ترسیم های هندسی و استدلال
۳۵۲	۱۵۶	فصل پنجم قضیه تالس، تشابه و کاربردها
۳۶۵	۱۷۶	فصل ششم چندضلعی ها
۳۸۶	۱۹۵	فصل هفتم تجسم فضایی
۳۹۷	۲۰۶	فصل هشتم دایره
۴۱۰	۲۲۴	فصل نهم تبدیل های هندسی و کاربردها
۴۱۹	۲۳۹	فصل دهم روابط طولی در مثلث

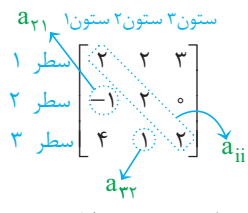
پاسخ نامہ تشریحی



یادآوری: a_{ij} یعنی درایه سطر i ام، ستون j ام از ماتریس:



ماتریس مقابل داده شده، در نتیجه:



$a_{21} = -1$ = درایه سطر دوم و ستون اول
 $a_{32} = 1$ = درایه سطر سوم و ستون دوم
 $a_{ij} = 2$ ✓ = درایه سطر i ام، ستون j ام
 مثل a_{33}, a_{22}, a_{11}

بنابراین، فقط ۳ نادرست است.

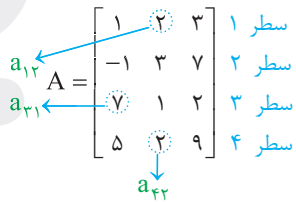
۲. ۲

یادآوری: ماتریس با مرتبه $m \times n$ یعنی m تا سطر دارد و n تا ستون.

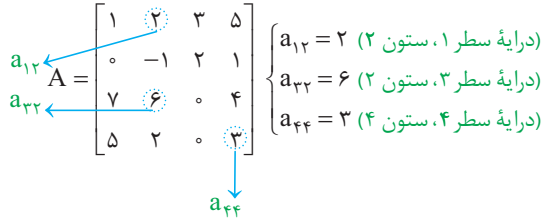
(بررسی گزینه‌ها):

- ۱ مرتبه ماتریس 4×3 است، چون ۴ تا سطر دارد و ۳ تا ستون ×
- ۲ $a_{44} = 2$ (درایه سطر ۴، ستون ۲) ✓
- ۳ $a_{31} = 7$ (درایه سطر ۳، ستون ۱) ×
- ۴ $a_{12} = 2$ (درایه سطر ۱، ستون ۲) ×

ستون ۳ ستون ۲ ستون ۱



۳. **گام اول: (شناسایی درایه‌ها):** با توجه به ماتریس داده شده، درایه‌های a_{12}, a_{22}, a_{44} را در آن پیدا می‌کنیم:



گام دوم: (محاسبه خواسته سؤال): از ما حاصل $a_{44} - a_{32} + a_{12}$ را خواسته‌اند که برابر است با:

۴. **گام اول: (شناخت a_{ij}):** a_{ij} یعنی درایه سطر i ام، ستون j ام.

گام دوم: (بررسی ماتریس و a_{ij}): این ماتریس از مرتبه 3×5 یعنی دارای سه سطر است؛ پس a_{12}, a_{22}, a_{32} می‌تواند a_{32} یا a_{22} باشد. در نتیجه حداکثر مقدار ۱، برابر ۳ است.

۵. ۳

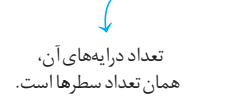
شفاف‌سازی: تعداد درایه‌های هر ستون ماتریس = تعداد سطرهاى ماتریس؛ پس تعداد درایه‌های ستون سوم همان تعداد سطرهاى ماتریس A است.

گام اول: (تشکیل معادله): مرتبه ماتریس $(3n+1) \times (5n-2)$ است و این یعنی:

$3n+1$ = تعداد سطرها
 $5n-2$ = تعداد ستون‌ها
 تست، گفته تعداد ستون‌ها، ۵ واحد بیشتر از تعداد سطرهاست. در نتیجه:

گام دوم: (حل معادله): حالا به سادگی معادله به‌دست آمده را حل می‌کنیم تا n به دست آید:

گام سوم: (تعداد درایه‌ها): اگر n را ۴ بگذاریم، مرتبه ماتریس‌ها 13×18 می‌شود و طبق شفاف‌سازی، تعداد درایه‌های ستون سوم برابر با ۱۳ است.



تعداد درایه‌های آن، همان تعداد سطرهاست.

۶. **۲ گام اول: (به جای i و j چه اعدادی قرار دهیم؟):**

برای حل تست به دنبال a, b و c می‌گردیم و ما این‌ها را در درایه‌های $a_{21}, a_{12}, a_{33}, a_{22}$ می‌بینیم؛ بنابراین بهتر است به جای i و j یک بار ۱ و ۲، یک بار ۲ و ۳ و یک بار هم ۲ و ۲ قرار دهیم.

گام دوم: (محاسبه a, b و c): با توجه به رابطه $a_{ij} = -a_{ji}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & -b+4 & 3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3b & a^3-8 & 2c+7 \\ -3 & c-1 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} i=1, j=2 \Rightarrow a_{12} = -a_{21} \Rightarrow -b+4 = -3b \\ \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2 \\ i=2, j=3 \Rightarrow a_{23} = -a_{32} \Rightarrow 2c+7 = 1-c \\ \Rightarrow 3c = -6 \Rightarrow c = -2 \\ i=j=2 \Rightarrow a_{22} = -a_{22} \Rightarrow a^3-8 = -a^3+8 \\ \Rightarrow 2a^3 = 16 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

گام سوم: (محاسبه خواسته سؤال): از ما $a+b+c$ را خواسته‌اند که می‌شود:

۷. **۲ گام اول: (شناخت درایه‌ها):** در صورت سؤال درایه‌های a_{12}, a_{21} و a_{33} آمده‌اند؛ یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & -3 & 2y \\ 4 & 0 & 5-x \end{bmatrix} \begin{cases} a_{21} = \text{سطر دوم، ستون اول} = x \\ a_{12} = \text{سطر اول، ستون دوم} = 2 \\ a_{33} = \text{سطر سوم، ستون سوم} = 5-x \end{cases}$$

گام دوم: (تشکیل عبارت داده‌شده): ما مینیمم عبارت $a_{21}^2 - a_{12} + 2a_{33}$ را می‌خواهیم:

یادآوری: در سهمی $ax^2 + bx + c$ کم‌ترین یا بیشترین مقدار همان عرض رأس سهمی است.

$$\text{کم‌ترین یا بیشترین مقدار} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) \text{ رأس سهمی}$$



خبرنگار

گام دوم: (i و j مناسب): درایه‌های سطر دوم را می‌خواهیم؛ پس به جای i قرار می‌دهیم ۲ و به جای j یک بار ۱، یک بار ۲ و یک بار ۳ می‌گذاریم:

$$\left. \begin{aligned} i=2, j=1 &\Rightarrow a_{21}=2+1=3 \\ (i \geq j) &\Rightarrow \text{ضابطه بالا} \\ i=2, j=2 &\Rightarrow a_{22}=2+2=4 \\ (i \geq j) &\Rightarrow \text{ضابطه بالا} \\ i=2, j=3 &\Rightarrow a_{23}=2 \times 3=6 \\ (i < j) &\Rightarrow \text{ضابطه پایین} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_{21}+a_{22}+a_{23}=13$$

۱۱. **۲ گام اول: (شناخت ماتریس‌های A, B و C):** ماتریس A, B و C را می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$B = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{یک ماتریس } 2 \times 2$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$C = [a_{31}] \quad \text{یک ماتریس } 1 \times 1$$

گام دوم: (کدام درایه‌ها؟): درایه‌های سطر دوم ماتریس B، یعنی a_{22}, a_{23} . درایه‌های ستون اول ماتریس C هم یعنی a_{31} . دقت کنید که ماتریس C تنها یک درایه دارد که همان سطر اول و ستون اول آن است.

گام سوم: (محاسبه جواب): با توجه به $j = i^2$ ، جمع درایه‌های مشخص شده، این‌طوری است:

$$a_{22} + a_{23} + a_{31} = (2^2 + 2) + (2^2 + 3) + (3^2 + 1) = 23$$

۱۲. **۴ گام اول و آخر: (بررسی گزینه‌ها):** باید درایه‌های گزینه‌های داده شده را به دست بیاوریم و با ماتریس A مقایسه کنیم. فقط دقت کنید که بعد از محاسبه هر درایه، نگاهی به A بیندازیم. به این شکل:

$$\begin{aligned} a_{ij} = j^2 - i &\Rightarrow a_{11} = 1^2 - 1 = 0 \checkmark, a_{12} = 2^2 - 1 = 3 \times \quad 1 \\ a_{ij} = i^2 - j &\Rightarrow a_{11} = 1^2 - 1 = 0 \checkmark, a_{12} = 1^2 - 2 = -1 \times \quad 2 \\ a_{ij} = j^3 - i^2 &\Rightarrow a_{11} = 1^3 - 1^2 = 0 \checkmark, a_{12} = 2^3 - 1^2 = 7 \times \quad 3 \\ a_{ij} = i^2 - j^3 &\Rightarrow a_{11} = 1^2 - 1^3 = 0 \checkmark, a_{12} = 1^2 - 2^3 = -7 \checkmark \quad 4 \\ a_{31} = 2^2 - 1^3 = 3 \checkmark, a_{12} = 2^2 - 2^3 = -4 \checkmark \end{aligned}$$

توجه: نیازی به محاسبه درایه‌های ۴ نیست، چون سه گزینه دیگر مردود بودند، ولی ما برای آموزش بیشتر این کار را کردیم.

۱۳. **۴**

گام اول و آخر: (بررسی گزینه‌ها): باید درایه‌های گزینه‌های داده شده را به دست بیاوریم و با ماتریس A مقایسه کنیم. فقط دقت کنید که بعد از محاسبه هر درایه، نگاهی به A بیندازیم. به این شکل:

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \\ ij & i \geq j \end{cases} \quad 1$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} a_{11} = 1 \times 1 = 1 \checkmark, a_{12} = 1 + 2 = 3 \checkmark, a_{13} = 1 + 3 = 4 \checkmark \\ (i \geq j) \quad (i < j) \quad (i < j) \\ a_{21} = 2 \times 1 = 2 \checkmark, a_{22} = 2 \times 2 = 4 \checkmark, a_{23} = 2 + 3 = 5 \checkmark \\ (i \geq j) \quad (i \geq j) \quad (i < j) \\ a_{31} = 3 \times 1 = 3 \checkmark, a_{32} = 3 \times 2 = 6 \times \quad (i \geq j) \quad (i \geq j) \end{aligned}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} i+2j & i < j \\ i^2+j & i \geq j \end{cases} \Rightarrow a_{11} = 1^2 + 1 = 2 \times \quad (i \geq j) \quad 2$$

گام سوم: (محاسبه حداقل): به یک عبارت درجه دوم رسیدیم و min آن را می‌خواهیم. دوتا روش دارید که هر کدام مورد علاقه شماست، از آن استفاده کنید: $x^2 - 2x + 8 = x^2 - 2x + 1 + 7 = (x-1)^2 + 7$ کمترین مقدار یک مربع کامل، صفر است.

$$\Delta f(x) = x^2 - 2x + 8$$

$$\Rightarrow \min \{f(x)\} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4(1)(8)}{4(1)} = 7$$

۸. **۴ گام اول: (شناخت ماتریس):** یک ماتریس 3×3 داریم؛ پس در هر سطر سه درایه دیده می‌شود و سؤال از ما $a_{11} + a_{12} + a_{13}$ را می‌خواهد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

گام دوم: (i و j مناسب): درایه‌های سطر اول را می‌خواهیم؛ پس به جای i قرار می‌دهیم ۱ و به جای j یک بار ۱، یک بار ۲ و یک بار ۳ می‌گذاریم:

$$a_{ij} = 2i + j^2 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 2 \times 1 + 1^2 = 3 \\ a_{12} = 2 \times 1 + 2^2 = 6 \\ a_{13} = 2 \times 1 + 3^2 = 11 \end{cases}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 20 \quad \text{و داریم:}$$

۹. **۱ گام اول: (شناخت ماتریس):** یک ماتریس 3×3 داریم به این صورت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

گام دوم: ($i = j = 3$): درایه سطر سوم و ستون سوم؛ یعنی a_{33} .

پس ما قرار می‌دهیم $i = j = 3$: $a_{33} = 3m - 9$ $\Rightarrow a_{ij} = mi - j^2$ گفته شده $a_{33} = 0$. در نتیجه $3m - 9 = 0$ پس $m = 3$.

گام سوم: (مجموع درایه‌ها): حالا که m پیدا شد، می‌شود نوشت $a_{ij} = 3i - j^2$. ما مجموع همه درایه‌ها را می‌خواهیم؛ پس همه را حساب می‌کنیم:

$$a_{11} = 3 \times 1 - 1^2 = 2, a_{12} = 3 \times 1 - 2^2 = -1,$$

$$a_{13} = 3 \times 1 - 3^2 = -6$$

$$a_{21} = 3 \times 2 - 1^2 = 5, a_{22} = 3 \times 2 - 2^2 = 2,$$

$$a_{23} = 3 \times 2 - 3^2 = -3$$

$$a_{31} = 3 \times 3 - 1^2 = 8, a_{32} = 3 \times 3 - 2^2 = 5,$$

$$a_{33} = 3 \times 3 - 3^2 = 0$$

حالا مجموع درایه‌ها را می‌خواهیم: $2 - 1 - 6 + 5 + 2 - 3 + 8 + 5 + 0 = 12$

تیزبازی: اگر خیلی حرفه‌ای باشید، این‌طوری می‌نویسید:

$$\begin{aligned} &\text{سه ستون داریم} \quad \text{سه سطر داریم} \\ &\uparrow \quad \uparrow \\ &3 \times 3(1+2+3) - 3(1^2+2^2+3^2) = 54 - 42 = 12 \\ &\quad \text{برای هر سطر} \quad \text{برای هر ستون (تجاه)} \\ &\quad \text{(ها)} \end{aligned}$$

۱۰. **۳ گام اول: (شناخت ماتریس):** یک ماتریس 3×3 داریم؛ پس در هر سطر سه درایه دیده می‌شود و سؤال از ما $a_{21} + a_{22} + a_{23}$ را می‌خواهد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

۳

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - j + 1 & i < j \\ i^2 & i = j \\ j & i > j \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{11} = 1^2 = 1 \checkmark, a_{12} = 2 \times 1 - 2 + 1 = 1 \times (i < j)$$

۴

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & i < j \\ j^2 & i = j \\ i & i > j \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{11} = 1^2 = 1 \checkmark, a_{12} = 1 + 2 = 3 \checkmark, a_{13} = 1 + 3 = 4 \checkmark (i < j)$$

$$a_{21} = 2 \checkmark, a_{22} = 2^2 = 4 \checkmark, a_{23} = 2 + 3 = 5 \checkmark (i > j)$$

$$a_{31} = 3 \checkmark, a_{32} = 3 \checkmark, a_{33} = 3^2 = 9 \checkmark (i = j)$$

توجه: نیازی به محاسبه درایه‌های ۴ نیست، چون سه گزینه دیگر مردود بودند، ولی ما برای آموزش بیشتر این کار را کردیم.

۱۴. **گام اول: (درایه‌های سطر دوم):** مرتبه ماتریس (n) نامعلوم است؛ پس ابتدا مقدار n را پیدا می‌کنیم. سؤال مجموع درایه‌های سطر دوم را برابر با ۳۴ در نظر گرفته است؛ یعنی:

گام دوم: (مجموع درایه‌های سطر دوم): حالا مجموع این درایه‌ها را با کمک فرمول $a_{ij} = 2i + j$ محاسبه می‌کنیم و آن را برابر با ۳۴ قرار می‌دهیم:

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{2n} = (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 2) + (2 \times 3 + 3) + \dots + (2 \times n + n) = 34$$

گام سوم: (محاسبه n): رابطه بالا را برحسب n به دست می‌آوریم تا به یک معادله برسیم و با حل آن مقدار n به دست بیاید. همان‌طور که می‌بینید ما n تا ۶ داریم و در کنار آن اعداد ۱ تا n جمع شده‌اند؛ پس:

$$\text{مجموع درایه‌های سطر دوم} = 6n + 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$= 6n + \frac{n(n+1)}{2} = 34$$

برای راحتی در محاسبات، همه چیز را در ۲ ضرب می‌کنیم تا از شر کسر و مخرج خلاص شویم:

$$\xrightarrow{\times 2} 12n + n^2 + n = 68 \Rightarrow n^2 + 13n - 68 = 0$$

ضرب دو عدد -۶۸ شود. جمع دو عدد ۱۳ شود.

$$\Rightarrow (n + 17)(n - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -17 \times \\ n = 4 \checkmark (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

گام چهارم: (درایه‌های ستون سوم): حالا که $n = 4$ شد، می‌دانیم ماتریس ما از مرتبه 4×4 است و این یعنی درایه‌های ستون سوم به شکل $a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}$ هستند؛ پس به کمک رابطه $a_{ij} = 2i + j$ ، مجموع درایه‌های ستون سوم را حساب می‌کنیم:

$$= (2 \times 1 + 3) + (2 \times 2 + 3) + (2 \times 3 + 3) + (2 \times 4 + 3) = 42$$

تیزبازی: در گام دوم نیازی به حل معادله درجه دوم نیست و با نوشتن مناسب می‌شود به جواب رسید:

$$\begin{aligned} \text{مجموع درایه‌های سطر دوم} &= a_{21} + a_{22} + \dots \\ &= 3 \times 2 + 1 + 3 \times 2 + 2 + 3 \times 2 + 3 + 3 \times 2 + 4 = 34 \checkmark \end{aligned}$$

دیگر کافی است!

۱۵. ۲

گام اول: (درایه‌شناسی!): مرتبه ماتریس معلوم نیست و باید حساب شود. اول از همه بیایید ببینید سؤال در خصوص کدام درایه‌ها صحبت کرده است و با توجه به رابطه $a_{ij} = i + 2j + 4$ مقدار آن‌ها را حساب کنیم: (ماتریس $n \times n$ است؛ یعنی n سطر و n ستون دارد)

$$a_{2n} = 2 + 2n + 4 = 2n + 6 \quad \text{درایه سطر دوم، ستون آخر}$$

$$a_{45} = 4 + 2 \times 5 + 4 = 18 \quad \text{درایه سطر چهارم، ستون پنجم}$$

$$a_{n2} = n + 2 \times 2 + 4 = n + 8$$

گام دوم: (تشکیل معادله): طبق گفته سؤال، بین a_{2n} و a_{45} این رابطه را داریم:

$$a_{2n} = \frac{1}{9} \times a_{45}$$

حالا مقدار درایه‌ها را از گام اول جای‌گذاری می‌کنیم که می‌رسیم به این معادله:

$$2n + 6 = \frac{1}{9} \times 18 \Rightarrow 2n = 14 \Rightarrow n = 7$$

گام سوم: (جواب آخر): n معلوم شد و می‌ماند محاسبه a_{n2} . با توجه به گام اول و گام دوم داریم:

$$a_{n2} = n + 8 \xrightarrow{n=7} a_{72} = 7 + 8 = 15$$

۱۶. ۱

گام اول: (تشکیل ماتریس): ما یک ماتریس 5×5 داریم که درایه‌های آن با رابطه $a_{ij} = \sin(i - j)$ به دست می‌آیند. خب، این از ماتریسمان:

$$A = \begin{bmatrix} \sin(1-1) & \sin(1-2) & \sin(1-3) & \sin(1-4) & \sin(1-5) \\ \sin(2-1) & \sin(2-2) & \sin(2-3) & \sin(2-4) & \sin(2-5) \\ \sin(3-1) & \sin(3-2) & \sin(3-3) & \sin(3-4) & \sin(3-5) \\ \sin(4-1) & \sin(4-2) & \sin(4-3) & \sin(4-4) & \sin(4-5) \\ \sin(5-1) & \sin(5-2) & \sin(5-3) & \sin(5-4) & \sin(5-5) \end{bmatrix}$$

گام دوم: (مجموع درایه‌های ماتریس): حالا مجموع درایه‌های ماتریس را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \text{مجموع} &= 5\sin(0) + 4\sin(-1) + 3\sin(-2) + 2\sin(-3) + \sin(-4) \\ &\quad + 4\sin(1) + 3\sin(2) + 2\sin(3) + \sin(4) \end{aligned}$$

گام سوم: (نکته مثلثاتی و محاسبه نهایی): از درس حسابان ۱ می‌دانیم که:

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{و} \quad \sin(0) = 0$$

تیزبازی: ابتدافت کنیم که: $\sin(i - j) = -\sin(j - i)$ و $\sin(i - i) = 0$. پس در این ماتریس درایه‌های a_{ij} (مانند $a_{11}, a_{22}, \dots$) همگی صفر و بقیه درایه‌ها نیز دویهدو قرینه هستند، مثلاً $a_{31} = -a_{13}$ و $a_{25} = -a_{52}$ ؛ بنابراین جمع تمامی درایه‌ها صفر است.

۱۷. ۳

گام اول: (مرتبه ماتریس): ماتریس A مربعی است؛ یعنی از مرتبه $n \times n$. گفته شده دوتا ستون دارد و این یعنی $n = 2$ و در نتیجه A ماتریسی از مرتبه 2×2 است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

گام دوم: (درایه‌ها): حالا به کمک رابطه $a_{ij} = i^2 - ij$ ، درایه‌های ماتریس را

$$a_{11} = 1^2 - 1 \times 1 = 0, a_{12} = 1^2 - 1 \times 2 = -1$$

$$a_{21} = 2^2 - 2 \times 1 = 2, a_{22} = 2^2 - 2 \times 2 = 0$$

گام سوم: (مجموع درایه‌ها): این هم جمع درایه‌ها که خواسته سؤال است:

$$0 - 1 + 2 + 0 = 1$$

گام اول: (محاسبه n): یک ماتریس مربعی است؛ پس تعداد سطرها و ستون هایش برابرند. این یعنی:

$$5 - n = n - 1 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$$

گام دوم: (قیافه ماتریس): اگر n را ۳ قرار دهیم، می‌رسیم به $A = [6 + i - j]_{3 \times 3}$ و در نتیجه ظاهر ماتریس ما این‌طوری است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

گام سوم: (قطر فرعی): ما به دنبال درایه‌های قطر فرعی یعنی a_{21} و a_{12} هستیم. با توجه به رابطه $a_{ij} = 6 + i - j$ داریم:

$$\begin{cases} a_{12} = 6 + 1 - 2 = 5 \\ a_{21} = 6 + 2 - 1 = 7 \end{cases}$$

بنابراین مجموع این دو درایه برابر است با $5 + 7 = 12$.

گام اول: (کدام درایه‌ها؟): ما درایه‌های بالای قطر اصلی در یک ماتریس 3×3 را می‌خواهیم؛ یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

گام دوم: (محاسبه درایه‌ها): می‌بینید که a_{12} ، a_{13} و a_{23} را می‌خواهیم و در همه این‌ها $i < j$ است؛ پس باید از ضابطه $a_{ij} = i + j$ استفاده کنیم:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & i < j \\ ij - 1 & i = j \\ 2i - j & i > j \end{cases}$$

$$a_{12} = 1 + 2 = 3, a_{13} = 1 + 3 = 4, a_{23} = 2 + 3 = 5$$

گام سوم: (مرحله آخر): مجموع درایه‌های به‌دست‌آمده برابر می‌شود با:

$$3 + 4 + 5 = 12$$

۲۰. ۱ گام اول: (محاسبه درایه‌ها): با توجه به رابطه $a_{ij} = i^3 + j^3$ ، ماتریس ما این‌طوری است:

$$a_{11} = 1^3 + 1^3 = 2, a_{12} = 1^3 + 2^3 = 9, a_{13} = 1^3 + 3^3 = 28, a_{14} = 1^3 + 4^3 = 65,$$

$$a_{21} = 2^3 + 1^3 = 9, a_{22} = 2^3 + 2^3 = 16, a_{23} = 2^3 + 3^3 = 35, a_{24} = 2^3 + 4^3 = 72,$$

$$a_{31} = 3^3 + 1^3 = 28, a_{32} = 3^3 + 2^3 = 35, a_{33} = 3^3 + 3^3 = 54, a_{34} = 3^3 + 4^3 = 91,$$

$$a_{41} = 4^3 + 1^3 = 65, a_{42} = 4^3 + 2^3 = 72, a_{43} = 4^3 + 3^3 = 91, a_{44} = 4^3 + 4^3 = 128$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 28 & 65 \\ 9 & 16 & 35 & 72 \\ 28 & 35 & 54 & 91 \\ 65 & 72 & 91 & 128 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (جواب آخر): همان‌طور که می‌بینید درایه‌های بالای قطر اصلی، همان درایه‌های پایین قطر اصلی هستند. مثلاً $a_{12} = a_{21}$ یا $a_{23} = a_{32}$. این یعنی مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی برابر است با مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی و در نتیجه نسبت آن‌ها برابر ۱ است.

تیزبازی: هرگاه در فرمول a_{ij} جای i و j را عوض کنید و اتفاقی در فرمول نیفتد (رابطه متقارن باشد)، می‌توان گفت $a_{ij} = a_{ji}$ و این یعنی درایه‌های بالای قطر اصلی در پایین قطر اصلی تکرار می‌شوند. در این تست $a_{ij} = i^3 + j^3$ و در نتیجه تعویض جای i و j تأثیری در فرمول ندارد و این یعنی $a_{ij} = a_{ji}$ ؛ بنابراین درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی، دوبره‌دو با هم برابرند.

۲۱. ۲ گام اول: (پیدا کردن درایه‌ها): می‌دانیم درایه بالای قطر اصلی یعنی $i < j$ و درایه پایین قطر اصلی یعنی $i > j$ ؛ پس:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} mi + j & i < j \rightarrow \text{درایه‌های بالای قطر را می‌دهد} \\ fi^2 & i = j \\ i - j & i > j \rightarrow \text{درایه‌های پایین قطر را می‌دهد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{12} = m + 2, a_{13} = m + 3, a_{23} = 2m + 3$$

$$\Rightarrow a_{21} = 2 - 1 = 1, a_{31} = 3 - 1 = 2, a_{32} = 3 - 2 = 1$$

گام دوم: (مجموع درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی): گفته شده مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی سه برابر مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی است؛ پس:

$$a_{12} + a_{13} + a_{23} = 3(a_{21} + a_{31} + a_{32}) \Rightarrow 4m + 8 = 12$$

$$\Rightarrow m = 1$$

۲۲. ۲ گام اول: (مرتبه ماتریس): ماتریس ستونی یعنی ماتریسی که تنها یک ستون دارد و این یعنی در ماتریس $A = [ni - j]_{(2n) \times (3n-5)}$ ، عدد $3n - 5$ که نشان‌دهنده تعداد ستون‌ها است برابر می‌شود با ۱؛ پس:

$$3n - 5 = 1 \Rightarrow 3n = 6 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow A = [2i - j]_{4 \times 1}$$

گام دوم: (محاسبه a_{ij}): حالا با توجه به $a_{ij} = 2i - j$ داریم:

$$a_{41} = 2 \times 4 - 1 = 7$$

۲۳. ۲ گام اول: (شناخت ماتریس): ماتریس A قطری است و این یعنی این‌شکلی است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

درایه‌ای که روی قطر اصلی نباشد، صفر است.

گام دوم: (محاسبه x): با توجه به $a_{12} = a_{21} = 0$ ، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} x^3 + 1 & x^3 - 1 \\ x^3 - 1 & x^4 - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

ما می‌خواهیم هر دو درایه هم‌زمان صفر باشند؛ پس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم و می‌رسیم به $x = 1$.

گام سوم: (جواب آخر): مجموع درایه‌های قطر اصلی را می‌خواهیم؛ یعنی:

$$a_{11} + a_{22}$$

$$a_{11} + a_{22} = (x^3 + 1) + (x^4 - 1) \xrightarrow{x=1} = 2 + 0 = 2$$

۲۴. ۴ گام اول: (مرتبه ماتریس A): یک ماتریس سطری است و این یعنی یک سطر دارد؛ پس $n - 4 = 1$ و در نتیجه:

$$n = 5$$

گام دوم: (بررسی گزینه‌ها): به دنبال گزینه‌ای هستیم که ماتریس قطری باشد، یعنی درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی‌اش صفر شوند.

۱ $a_{12} = 1$ ✗

۲ $a_{21} = n - 4 = 1$ ✗

۳ $a_{12} = n - 4 = 1$ (تازه، $a_{21} = n + 2 = 7$) ✗

۴ $a_{12} = n - 5 = 0$, $a_{21} = 0$ ✓

پس ۴ درست‌ه!

۲۵. گام اول: (مرتبه A و B): $A_{r \times m}$ ستونی است؛ یعنی یک ستون دارد و در نتیجه $n = 1$.

$B_{4 \times m}$ مربعی است؛ یعنی تعداد سطر و ستون برابر است و در نتیجه: $m = 4$
گام دوم: (بررسی گزینه‌ها): به دنبال ماتریس صفر هستیم؛ یعنی یک ماتریس با درایه‌های صفر! خوب ببینیم:

۱ $a_{11} = m - 1 = 3$ ✗

۲ $a_{11} = n - 4 = -3$ ✗

۳ $a_{11} = a_{21} = n - 1 = 0$, $a_{12} = a_{22} = m - 4 = 0$ ✓

۴ $a_{11} = n - 2 = -1$ ✗

بنابراین ۳ درست‌ه!

۲۶. گام اول: (استفاده از تعریف ماتریس اسکالر): $A_{5 \times 5}$ ، اسکالر است؛ یعنی چنین قیافه‌ای دارد:

$$A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} = s \\ a_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

گام دوم: (محاسبه a و b): با توجه به گام اول و رابطه زیر باید داشته باشیم:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3a - 2b & i < j \\ 3a - b + 1 & i = j \\ 5 - a - b & i > j \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 5 - a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ -a - b = -5 \end{cases}$$

حالا باید دستگاه دو معادله و دو مجهول حل کنیم. بیایید معادله دوم را در ۳

$$\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ -3a - 3b = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ -5b = -15 \end{cases}$$

$$-5b = -15 \Rightarrow b = 3$$

حالا $b = 3$ را در یکی از معادله‌ها قرار می‌دهیم:

$$3a - 2b = 0 \xrightarrow{b=3} 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

گام سوم: (محاسبه درایه‌های روی قطر اصلی):

گفته شده برای $i = j$ ، $a_{ij} = 3a - b + 1$ و با توجه به $a = 2$ و $b = 3$ داریم:

$$a_{ij} = 4 - 3 + 1 = 2; (i = j)$$

این یعنی درایه‌های روی قطر اصلی همگی ۲ هستند.

گام چهارم: (گام آخر): ما مجموع درایه‌های روی قطر فرعی را می‌خواهیم که همگی صفر هستند به جز a_{33} که مساوی ۲ است؛ بنابراین جواب می‌شود ۲.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های روی قطر فرعی} = 2$$

۲۷. گام اول: (مرتبه‌ها): $A = B$ در ماتریس‌ها یعنی مرتبه دو ماتریس مثل هم و درایه‌های آن‌ها نیز دوبره‌دو برابرند. این‌جا که از درایه‌های B خبر نداریم؛ پس فقط مرتبه‌اش را نگاه می‌کنیم. B از مرتبه $m \times n$ است و از مرتبه 3×2 در نتیجه $m = 3$ و $n = 2$.

گام دوم: (ستون دوم ماتریس B): مگر $A = B$ نیست؟

پس ستون دوم ماتریس B همان ستون دوم ماتریس A است و این یعنی:

مجموع درایه‌های ستون دوم A = مجموع درایه‌های ستون دوم B

$$1 + 2 + n^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

۲۸. گام اول: (درایه‌های برابر): دو ماتریس برابر یعنی مرتبه‌های یکسان (که هست، هر دو 2×2) و درایه‌های دوبره‌دو برابر. در نتیجه داریم:

$$\begin{bmatrix} x-2y & 2 \\ 2-x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ y-1 & y^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2-x=y-1 \\ y=y^3 \end{cases}$$

گام دوم: (حل دستگاه دو معادله و دو مجهول): حالا دستگاه زیر را حل می‌کنیم

تا X و Y پیدا شوند:

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 2-x=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2-2y=y-1 \end{cases} \Rightarrow 2-2y=y-1 \Rightarrow 3y=3 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=2y=2$$

گام سوم: (چک کردن $y=1$): باید داشته باشیم $y = y^3$ و اگر Y را ۱ قرار دهیم این تساوی برقرار است. در غیر این صورت، دستگاه جواب قابل قبول نداشت!

گام چهارم: ($x+y$): از ما $x+y$ خواسته شده که برابر می‌شود با: $2+1=3$

توجه: گام سوم یک گام اضافی برای آموزش شما بود! چون در گزینه‌ها چیزی نمی‌بینیم که ما را از جواب‌نداشتن دستگاه بترساند! در واقع با توجه به گزینه‌ها، قطعاً $y=1$ قابل قبول است.

۲۹. گام اول: (درایه‌های برابر): دو ماتریس برابر یعنی مرتبه‌های یکسان (که هست، هر دو 2×3) و درایه‌های دوبره‌دو برابر. در نتیجه داریم:

$$\begin{bmatrix} 2a+b & 0 & 3c+d \\ d+c & 1 & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ b & 1 & 2c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=3 \\ 3c+d=1 \\ d+c=b \\ 2b=2c \end{cases}$$

گام دوم: (حل دستگاه): از $2b=2c$ نتیجه می‌گیریم:

بنابراین $d+c=b$ به ما می‌گوید $d+b=b$ و این یعنی $d=0$ حالا

$3c+d=1$ را داریم که اگر d را صفر قرار دهیم، می‌رسیم به $c = \frac{1}{3}$ و در

نتیجه $b = \frac{1}{3}$ در آخر می‌رویم سراغ $2a+b=3$ و با قراردادن $b = \frac{1}{3}$ مقدار

a برابر $\frac{4}{3}$ به دست می‌آید.

گام سوم: (جواب آخر): ما $a+b+c+d$ را می‌خواستیم:

$$a = \frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}, d = 0 \Rightarrow a+b+c+d = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{6}{3} = 2$$

۳۰. گام اول: ($A+B$): بیاید ماتریس $A+B$ را تشکیل دهیم.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a+b & b-1 \\ -3 & 3b+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b-1 & b+1 \\ 0 & 3b+5 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ($C=2I$): حالا طبق گفته سؤال C را برابر با 2I قرار می‌دهیم:

$$2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{C=2I} \begin{bmatrix} 2a+b-1 & b+1 \\ 0 & 3b+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

گام دوم: (c_{ij}) ها: از آن جایی که $C = 3A - B$ ، می توان گفت $c_{ij} = 3a_{ij} - b_{ij}$ و در نتیجه:

$$c_{ij} = 3(i^2 + j) - (j - i - 3) = 3i^2 + i + 2j + 3$$

$$\Rightarrow c_{ii} = 3i^2 + i + 2i + 3 = 3(i^2 + i + 1)$$

گام سوم: (مجموع درایه ها): حالا درایه های روی قطر اصلی C را حساب و با هم جمع می زنیم:

$$c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44} = 3(1^2 + 1 + 1) + 3(2^2 + 2 + 1) + 3(3^2 + 3 + 1) + 3(4^2 + 4 + 1) = 3(3 + 7 + 13 + 21) = 132$$

توجه: می توانستیم a_{ii} ها و b_{ii} ها را جداگانه حساب کنیم و بعد عملیات را روی آن ها پیاده کنیم. هیچ فرقی ندارد! ترتیب و نوع محاسبات عوض می شود و راه همان است.

۳۴. ۴ گام اول: (تشکیل ماتریس ها): ما به ماتریس های A ، B و I دسترسی داریم؛ پس بیایید آن ها را بنویسید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ماتریس همانی)

گام دوم: (ماتریس C): به ما گفته شده $A + 2B - C = I$ و این یعنی:

$$C = A + 2B - I$$

گام سوم: (مجموع درایه ها): به جای آن که درایه های ماتریس C را تک تک حساب کنیم و آخرش جمع بزنیم، از اول با جمع درایه ها کار می کنیم:

دو برابر مجموع درایه های B

$$C = A + 2B - I \Rightarrow \text{مجموع درایه های } C = 27 + 18 - 3 = 42$$

مجموع درایه های I مجموع درایه های A

۳۵. ۱ گام اول: (مرتبه ها): در جمع و تفریق ماتریس ها، باید مرتبه ها با هم برابر باشد؛ پس ماتریس های A و $[ni + j]_{n \times n}$ از مرتبه 2×2 هستند، چون جواب حاصل از عملیات جمع روی آن ها ماتریسی 2×2 است. این یعنی $n = 2$.

$$3A + [ni + j]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (تشکیل ماتریس ها): حالا که $n = 2$ ، چنین رابطه ای در سؤال داریم:

$$3A + [2i + j]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\div 3} A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

گام سوم: $(I - 2A)$: با داشتن ماتریس A ، می توانیم ماتریس $I - 2A$ را حساب کنیم:

$$I - 2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

گام چهارم: (جواب آخر): مجموع درایه های قطر فرعی $I - 2A$ برابر است با:

$$2 + 4 = 6$$

بنابراین باید درایه ها دوبرابر برابر باشند:

$$\begin{cases} 2a + b - 1 = 2 \\ b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1 \\ 3b + 5 = 2 \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{باید این دو مقدار} \\ \text{یکسان باشند وگرنه} \\ \text{قابل قبول نیست!} \end{cases}$$

که اگر در معادله اول b را -1 قرار دهیم، می رسم به:

$$2a - 1 - 1 = 2 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

گام سوم: (جواب آخر): $a - b$ را می خواستیم:

$$a - b = 2 - (-1) = 3$$

۳۱. ۲ گام اول: (چه کنیم؟): دقیقاً مثل دنیای اعداد، یک دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم. منتها به جای اعداد با ماتریس سروکار داریم. حالا ما به دنبال B هستیم و باید سعی کنیم A را از دستگاه حذف کنیم.

$$\begin{cases} A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

گام دوم: (کم کردن دو معادله): اگر دو معادله بالا را از هم کم کنیم، ماتریس A حذف می شود و می توانیم B را پیدا کنیم:

$$(A + B) - (A - B) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\div 2} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

گام سوم: (جواب آخر): ما مجموع درایه های ماتریس B را می خواهیم:

$$1 + 1 + 1 - 2 = 1$$

تیزبازی: مجموع درایه های B برابر است با نصف مجموع درایه های

$$A + B \quad A - B$$

$$\frac{4 - 2}{2} = 1$$

۳۲. ۳ گام اول: (سطر دوم A و B): در ماتریس A داریم $a_{ij} = i^2 + j$ و

در ماتریس B داریم $b_{ij} = ij - 2$

ما مجموع سطر دوم این دو ماتریس را می خواهیم؛ یعنی:

$$[b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23}] + [a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}]$$

سطر دوم این دو ماتریس به این صورت هستند:

$$\begin{cases} a_{21} = 2^2 + 1 = 5 \\ a_{22} = 2^2 + 2 = 6 \\ a_{23} = 2^2 + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \text{سطر دوم } A = [5 \quad 6 \quad 7]$$

$$\begin{cases} b_{21} = 2 \times 1 - 2 = 0 \\ b_{22} = 2 \times 2 - 2 = 2 \\ b_{23} = 2 \times 3 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{سطر دوم } B = [0 \quad 2 \quad 4]$$

گام دوم: (مجموع سطرها دوم): اگر فرض کنیم $A + B = C$ ، می توانیم

سطر دوم C را به شکل زیر بنویسیم:

$$C \text{ سطر دوم} = [5 \quad 8 \quad 11] = [5 \quad 6 \quad 7] + [0 \quad 2 \quad 4]$$

و در آخر این هم از جمع درایه های سطر دوم C :

$$5 + 8 + 11 = 24$$

۳۳. ۲ گام اول: (درایه های روی قطر اصلی C): اگر درایه های ماتریس C

را c_{ij} بگیریم، ما به دنبال $c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44}$ هستیم چون درایه روی قطر اصلی یعنی c_{ii} .

۴۰. **گام اول: (نوشتن AB):** با ضرب ماتریس A در ماتریس B، ماتریس AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & 8+2a \\ b+3 & 2b+2 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (شرط قطری بودن): گفته شده AB قطری است و این یعنی درایه‌های غیر قطر اصلی صفر هستند:

$$\begin{cases} 8+2a=0 \\ b+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a-b=-4+3=-1$$

نکته: اگر AB را C بگیریم، ما فقط C_{11} و C_{21} را می‌خواستیم؛ پس در ضرب می‌شود صرفه‌جویی کرد!

$$\begin{aligned} c_{11} &= A \times \text{سطر اول} \times B \text{ دوم} = 8+2a \\ c_{21} &= A \times \text{سطر دوم} \times B \text{ اول} = b+3 \end{aligned}$$

۴۱. **گام اول: (کدام سطر ضرب در کدام ستون؟):** اگر فرض کنیم $AB=C$ ، ما درایه‌های قطر اصلی C را می‌خواهیم. A و B از مرتبه 3×3 اند؛ پس C هم 3×3 می‌شود و قطر اصلی آن یعنی C_{11}, C_{22}, C_{33} . بنابراین ما باید سطر اول A را در ستون اول B، سطر دوم A را در ستون دوم B و سطر سوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & * & * \\ * & c_{22} & * \\ * & * & c_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ستون ۱ از } B \times \text{سطر ۱ از } A \\ \text{ستون ۲ از } B \times \text{سطر ۲ از } A \\ \text{ستون ۳ از } B \times \text{سطر ۳ از } A \end{matrix}$$

گام دوم: (تشکیل A و B): ماتریس‌های A و B را لازم داریم که با توجه به فرمول a_{ij} و b_{ij} ماتریس A و B را تشکیل می‌دهیم.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ i-j & i \geq j \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} i^2-j & i < j \\ 2 & i=j \\ 0 & i > j \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

گام سوم: (محاسبه C_{11}, C_{22}, C_{33}): با توجه به توضیحات گام اول و نتایج گام دوم داریم:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1(2) = 2 \\ c_{22} &= 2(-1) + 2(2) = 1 \\ c_{33} &= 3(-2) + 4(1) + 3(2) = 0 \end{aligned}$$

و حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی AB برابر صفر می‌شود.

۴۲. ۲

یادآوری: درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس قطری، برابر صفر است.

گام اول: (مرتبه ماتریس حاصل): ما یک ماتریس 2×3 را در یک ماتریس 3×2 ضرب کرده‌ایم؛ پس حاصل 2×2 است. سطر اول ستون دوم

گام دوم: (ماتریس قطری): ما اسم ماتریس اول را A و ماتریس دوم را B و ماتریس حاصل را C می‌گذاریم. برای آن که ماتریس C (که 2×2 است)، قطری شود، باید $C_{11} = C_{22} = 0$ باشد. (درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی)

گام سوم: (کدام سطر ضرب در کدام ستون؟): ما باید یک بار سطر اول A را در ستون دوم B ضرب کنیم تا حساب شود و یک بار هم سطر دوم A را در ستون اول B ضرب کنیم تا C_{21} حساب شود.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

یادآوری:

گام اول و آخر: ابتدا دو ماتریس سمت چپ به صورت $[\bullet]_{3 \times 4} \times [\bullet]_{4 \times 5}$ را در نظر می‌گیریم که ضرب آن‌ها یک ماتریس 3×5 می‌شود و اگر در ماتریس آخری که 5×2 ضرب شود $[\bullet]_{3 \times 5} \times [\bullet]_{5 \times 2}$ یک ماتریس 3×2 می‌شود.

$$M_{3 \times 4} \times N_{4 \times 5} \times P_{5 \times 2} = A_{3 \times 2}$$

۳۷. ۴

یادآوری: شرط این که ضرب AB قابل تعریف باشد، آن است که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهاى B برابر باشد؛ یعنی:

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p}$$

گام اول و آخر: (بررسی گزینه‌ها): باید تمامی گزینه‌ها را بررسی کنیم:

۱ $ABC = A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 3} \times C_{3 \times 3} = D_{2 \times 3} \times C_{3 \times 3}$ نمی‌شود. $\times$

۲ $ACB = A_{2 \times 3} \times C_{3 \times 3} \times B_{3 \times 3}$ نمی‌شود. $\times$

۳ $BAC = B_{3 \times 3} \times A_{2 \times 3}$ نمی‌شود. $\times$

بنابراین ۴ جواب مسئله است.

۳۸. ۲

گام اول: (تشکیل AB): برای ضرب AB، سطر اول A را در ستون B ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 3(x) + (-1)(5) + 0(0) = 3x - 5$$

گام دوم: (حل معادله): چون مسئله $AB = +1$ را داده؛ بنابراین $3x - 5 = +1$ و مقدار x برابر ۲ به دست می‌آید.

۳۹. **گام اول: (کدام سطر ضرب در کدام ستون؟):** هرگاه دو ماتریس در هم ضرب شوند، برای محاسبه درایه سطر i ام، ستون j ام از ماتریس حاصل، باید سطر i ام از ماتریس اول را در ستون j ام از ماتریس دوم ضرب کنیم؛ پس اگر $AB=C$ و $BA=D$ ، داریم:

$$C = AB, D = BA \Rightarrow \begin{cases} c_{12} = A \text{ سطر اول} \times B \text{ از } 2 \\ d_{12} = B \text{ سطر اول} \times A \text{ از } 2 \end{cases}$$

درایه سطر اول، ستون دوم ماتریس D

گام دوم: (محاسبه c_{12} و d_{12}): با توجه به گام اول و این که:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = -1 + 20 = 19 \\ d_{12} &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 - 4 = -2 \end{aligned} \Rightarrow c_{12} - d_{12} = 19 - (-2) = 21$$

فهمید ماتریس A از مرتبه 3×1 است، چون تعداد سطرهاى آن با تعداد سطرهای سمت راست تساوى و تعداد ستونهای آن با تعداد ستونهای ماتریس دوم در ضرب، برابر است.

گام دوم: (پیدا کردن ماتریس A): با توجه به گام اول می توانیم ماتریس A را به صورت

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ 12 & c & d \\ 21 & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4x & ax & bx \\ 12y & cy & dy \\ 21z & ez & fz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ 12 & c & d \\ 21 & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \\ 12y = 12 \Rightarrow y = 1 \\ 21z = 21 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

بنابراین ماتریس A به صورت $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ بوده و مجموع درایه های برابر می شود با: $2+6+3=11$

۴۶. ۱ گام اول: (ضرب ماتریس ها): در ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس سمت چپی را حساب می کنیم:

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3x-2x-1 & -x-2 & x-2x \end{bmatrix}_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} x-1 & -x-2 & -x \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} x-1 & -x-2 & -x \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} x^2-2x-1 & -x^2-2x-1 & x^2-x \end{bmatrix}_{1 \times 1}$$

(که در واقع، یک عدد است)

گام دوم: (معادله درجه دوم): پس از ساده کردن به معادله $x^2 - 2x = 0$ می رسیم که ریشه های آن 0 و $\frac{2}{1}$ است:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

که ما به دنبال ریشه غیر صفر؛ یعنی $x = \frac{2}{1}$ بودیم!

۴۷. ۱ گام اول: (D چیست؟): به گفته سؤال D را باید به این صورت بنویسیم:

$$D = ABC$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(قطعاً D یک ماتریس 3×3 است)

گام دوم: (چه می خواهیم): سؤال گفته مجموع درایه های قطر اصلی و فرعی

ماتریس D برابر هستند؛ پس باید داشته باشیم:

$$d_{11} + d_{22} + d_{33} = d_{13} + d_{21} + d_{32} \Rightarrow d_{11} + d_{22} + d_{33} = d_{13} + d_{21} + d_{32}$$

بنابراین فقط ۴ درایه از D را می خواهیم که همگی از سطر و ستون اول و سوم هستند.

گام سوم: ($A \times B$): حالا $A \times B$ را حساب می کنیم، ولی از A فقط سطرهای اول و سوم را می خواهیم:

گام چهارم: ($c_{12} = c_{21} = 0$): با توجه به توضیحات گام سوم داریم:

$$\begin{cases} c_{12} = [x \quad -1 \quad 4] \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ c_{21} = [2 \quad 3 \quad 1] \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 4 + 3 + y = 0 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$$

۴۳. ۲ گام اول: (AB): اول ماتریس AB را محاسبه می کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} y & z & y \\ 2 & 0 & 4z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & -1 & x \\ 0 & 0 & -x \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 - y & 0 & xy - xz + y \\ 2y - 4z & 4z - 2 & 2x + 4z \\ 0 & 0 & -xz \end{bmatrix}$$

گام دوم: (شرط اسکالر): برای آن که یک ماتریس، اسکالر باشد، باید درایه های

غیر قطر اصلی صفر و درایه های قطر اصلی با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} 2y - 4z = 0 \Rightarrow y = 2z \quad (1) \\ 2x + 4z = 0 \Rightarrow x = -2z \quad (2) \\ xy - xz + y = 0 \xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} (-2z)(2z) - (-2z)(z) + 2z = 0 \\ \Rightarrow -2z^2 + 2z = 0 \Rightarrow -2z(z-1) = 0 \Rightarrow z(z-1) = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ یا } z = 1 \end{cases}$$

حالا $z = 1$ و $z = 0$ را امتحان می کنیم:

$$z = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 2z = 2 \\ x = -2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{درایه های قطر اصلی } = 2, 2, 2 \checkmark$$

$$z = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow \text{درایه های قطر اصلی } = 0, -2, 0 \times$$

گام سوم: (پاسخ تست): ما $x + y + z$ را می خواهیم که برابر است با:

$$-2z + 2z + z = z = 1$$

۴۴. ۴ گام اول: (ضرب ماتریس ها): در ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس سمت

چپ را حساب می کنیم:

$$\begin{bmatrix} x & 3 & -1 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3x-3x-1 & 2x+3(-1)+1(-1) & -x+3(1)+3(-1) \end{bmatrix}_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 2x-4 & -x \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

دقت کنید که یک ماتریس 1×3 را در یک ماتریس 3×3 ضرب کرده ایم که حاصل باز هم 1×3 است.

و حالا جواب این حاصل ضرب که به صورت $\begin{bmatrix} -1 & 2x-4 & -x \end{bmatrix}$ بود را در ماتریس

سومی ضرب می کنیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2x-4 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -x \end{bmatrix} = -x + 2x - 4 + x^2 = x^2 + x - 4$$

(توجه داشته باشید که یک ماتریس 1×3 را در یک ماتریس 3×1 ضرب

کرده ایم و حاصل قطعاً 1×1 یا در واقع یک عدد است.)

گام دوم: (معادله درجه دوم): حاصل ضرب هایمان طبق گفته سؤال، برابر عدد

$$x^2 + x - 4 = 0$$

صفر است؛ پس می رسیم به این معادله:

$$x^2 + x - 4 = 0$$

گام سوم: (مجموع جواب ها): در واقع به دنبال مجموع ریشه های معادله

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -1$$

۴۵. ۲ گام اول: (مرتبه ماتریس A): از تساوی $A \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ 12 & c & d \\ e & f & 21 \end{bmatrix}$ سه سطر

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ 12 & c & d \\ e & f & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ 12 & c & d \\ e & f & 21 \end{bmatrix}$$

سه ستون می شود

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2-x & -3 & -2x+1 \end{bmatrix}$$

سطر اول و سوم A × B B سطر اول و سوم A

گام چهارم: $((A \times B) \times C)$: حالا باید ماتریس به دست آمده را در C ضرب کنیم، ولی فقط ستون اول و سوم C را می‌خواهیم:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2-x & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 & * & x+1 \\ * & d_{22} & * \\ -7-2x & * & -3 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی قطر فرعی

گام پنجم: (حل معادله): سؤال می‌خواهد مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی مساوی هم باشند، پس باید بنویسیم:

$$(x+5) + d_{22} - 3 = (x+1) + d_{22} + (-7-2x)$$

$$\Rightarrow 2 = -6 - 2x \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$$

۴۸. ۱ گام اول: (مرتبه ماتریس A): برای این که ضرب $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \times A$ قابل انجام و جواب یک ماتریس 4×4 شود، باید مرتبه ماتریس A به صورت زیر باشد:

تعداد سطر آن برابر با تعداد ستون ماتریس اول $1 \times 4 = 4$ باشد. تعداد ستون‌های آن، برابر با تعداد ستون‌های ماتریس حاصل ضرب 4×4 باشد.

گام دوم: (قیافه ماتریس A): ماتریس $A_{1 \times 4}$ را به صورت $\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم.

گام سوم: (ماتریس A): حالا با توجه به حاصل ضرب، x، y، z و w را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & -2 & 0 & 8 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z & 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=1, y=-1, z=0, w=4$$

گام چهارم: (a_2, b_1, a_4, c_4) : با توجه به گام سوم، ماتریس A به صورت $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ است. حال در ضرب زیر، مقدار a_2, b_1, a_4, c_4 را پیدا می‌کنیم:

درایه سطر اول، ستون دوم

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & -2 & 0 & 8 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} : a_2 = 1(-1) = -1$$

سطر اول ستون دوم

سطر سوم، ستون اول

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & -2 & 0 & 8 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} : b_1 = 3(1) = 3$$

ستون اول سطر سوم

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & -2 & 0 & 8 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} : c_4 = 4(4) = 16$$

ستون چهارم سطر چهارم

سطر چهارم، ستون چهارم

گام پنجم: (جواب آخر): بنابراین، جمع $a_2 + b_1 + c_4$ برابر $16 + 3 - 1 = 18$ می‌شود.

۴۹. ۳ گام اول: (ضرب ماتریس‌ها): بیایید ماتریس‌ها را از چپ در هم ضرب کنیم. دوتای اول:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 & -x+3 \\ x & 2 \\ -9+x & -3+x \end{bmatrix}$$

و حالا در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x+3 & -x+3 \\ x & 2 \\ -9+x & -3+x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+3x & -x^2+3x \\ x^2+2x & -x^2+2x \\ -9x-3 & -3x+x^2 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (تشکیل معادله درجه دوم): طبق چیزی که در سؤال آمده، حاصل ضرب ماتریس‌ها برابر است با m؛ پس ما می‌رسیم به معادله $x^2 + 7x - 12 = m$ ، که مرتب شده‌اش این است:

گام سوم: (حسابان ۱): دیگر وقت آن رسیده که برویم سراغ درس حسابان ۱ و ارتباط بین ریشه‌های معادله درجه دوم. اگر ریشه‌های معادله را α و β بگیریم این روابط را بین آن‌ها داریم:

$$x^2 + 7x - 12 - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -7 & \text{(جمع ریشه‌ها)} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -12 - m & \text{(ضرب ریشه‌ها)} \\ \sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta} = 3 & \text{(سؤال داده)} \end{cases}$$

گام چهارم: (کار با روابط): بیایید دو طرف رابطه $\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta} = 3$ را به توان ۲ برسانیم که از رادیکال هم خلاص شویم:

$$(\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta})^2 = 3^2 \Rightarrow \underbrace{-\alpha - \beta}_{-(\alpha+\beta)} + 2\sqrt{\alpha\beta} = 9$$

حالا همه چیز را بر حسب S و P می‌نویسیم:

$$-S + 2\sqrt{P} = 9 \xrightarrow{S=-7, P=-12-m} 7 + 2\sqrt{-12-m} = 9$$

سعی می‌کنیم رادیکال را تنها کنیم: $2\sqrt{-12-m} = 2 \Rightarrow \sqrt{-12-m} = 1$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} -12-m = 1 \Rightarrow m = -13$$

۵۰. ۳ گام اول: (تشکیل A و B): بیایید با فرمول‌های $a_{ij} = i+1$ و $b_{ij} = j-1$ ماتریس‌های A و B را تشکیل دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+1 & 1+1 \\ 2+1 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 \\ 1-1 & 2-1 \\ 1-1 & 2-1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

گام دوم: (کدام سطر و ستون از B و A؟): برای پیدا کردن c_{23} کافی است سطر دوم ماتریس B را در ستون سوم ماتریس A ضرب کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow c_{23} = (0) \times (2) + (1) \times (3) = 3$$

- فلش‌هایی که از ماتریس دوم خارج می‌شود، نشان می‌دهد حاصل در کدام درایه نوشته می‌شود.

گام سوم: (A^4): ما سطر اول A^4 را می‌خواهیم؛ پس سطر اول A^2 را در A^2 ضرب می‌کنیم. این جوری:

$$[A^4 \text{ سطر اول}] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵۴. ۴ گام اول: (محاسبه سطر اول A^2): چون از ما سطر اول A^2 را می‌خواهد؛ پس ابتدا سطر اول A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 \text{ سطر اول} = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (سطر اول A^3): می‌دانیم $A^3 = A^2 \times A$ ؛ پس سطر اول A^3 برابر است با $A^2 \times A$ (سطر اول A^2):

$$A^3 = A^2 \times A \Rightarrow A^3 \text{ سطر اول} = A^2 \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \end{bmatrix}$$

۵۵. ۱ گام اول: (A^3 چه می‌شود؟): می‌دانیم $A^3 = A \times A \times A$ ؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (ضرب درست): ما سطر اول A^3 را می‌خواهیم؛ پس از ماتریس اول (سمت چپ‌ترین A)، فقط سطر اول را می‌خواهیم. حالا ضرب دوتا ماتریس سمت چپ:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A \text{ سطر اول}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^2 \text{ سطر اول}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}}_{A^3 \text{ سطر اول}}$$

گام سوم: (ضرب نهایی): نوبت می‌رسد به ضرب سطر به دست آمده در A سوم:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}}_{A^3 \text{ سطر اول}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^4 \text{ سطر اول}}$$

۵۶. ۲ گام اول: (ماتریس A^3): می‌دانیم: $A^3 = A \times A \times A$ ؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ولی ما فقط سطر سوم ماتریس A^3 را می‌خواهیم؛ پس از ماتریس اول (از چپ اولین A)، فقط سطر سوم را وارد ضرب می‌کنیم.

گام دوم: (ضرب اول): اول دوتا ماتریس سمت چپ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

سطر سوم A^2 A سطر سوم A

۵۱. ۲ گام اول: (محاسبه c_{11}): برای پیدا کردن c_{11} ، سطر اول ماتریس A را در ستون اول ماتریس B ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow c_{11} = 1(5) + (-1)(2) + x(1)$$

$$= x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$$

گام دوم: (محاسبه c_{22}): و به همین صورت برای پیدا کردن c_{22} ، سطر دوم

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow c_{22} = 2 \times 1 + 0(y) + 3(-4)$$

$$= -10 = 2y \Rightarrow y = -5$$

بنابراین مقدار xy برابر -5 است.

۵۲. ۱ گام اول: (چه چیزی را ضرب کنیم؟):

در ضرب ماتریس $M_1 M_2 M_3 \dots M_n = N$ یادتان باشد که سطر i ام از ماتریس N از سطر i ام ماتریس اول یعنی M_1 می‌آید و ستون j ام از ماتریس N از ستون j ام ماتریس آخر (یعنی M_n)، مثلاً:

درایه سطر i ام، ستون j ام ماتریس N :

$(\text{سطر } i \text{ام از } M_1) \times M_2 M_3 \dots M_{n-1} \times (\text{ستون } j \text{ام از } M_n)$

N سطر i ام ماتریس $N = (\text{سطر } i \text{ام از } M_1) \times M_2 M_3 \dots M_n$

N (ستون j ام از M_n) $M_1 M_2 M_3 \dots M_{n-1} \times (\text{ستون } j \text{ام از } M_n)$

بنابراین این‌جا باید سطر سوم ماتریس اول را در دوتا ماتریس دیگر ضرب کنیم تا سطر سوم ماتریس A به دست بیاید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \text{ سطر سوم} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (عملیات ضرب): حالا که فهمیدیم باید چه کار کنیم، برویم سراغ انجام ضرب‌ها:

$$\Rightarrow A \text{ سطر سوم} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

گام سوم: (جواب آخر): مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A برابر است با: $7 + 1 - 5 = 3$

۵۳. ۲ گام اول: (چه کنیم؟): می‌دانیم A^4 یعنی $A \times A \times A \times A$ ، اما به جای آن که A را چهار بار در خودش ضرب کنیم، A^2 را حساب می‌کنیم و از روی آن A^4 را به دست می‌آوریم:

$A^4 = A^2 \times A^2$

گام دوم: (محاسبه A^2): بیاید A را در خودش ضرب کنیم تا A^2 به دست بیاید:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

- فلش‌هایی که از ماتریس اول خارج می‌شوند نشان می‌دهد کدام سطر از اولی در کدام ستون از دومی ضرب می‌شود.

گام سوم: (ضرب دوم): حالا باید A^2 را در A ضرب کنید تا برسید به A^3 :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

سطر سوم A^2 A سطر سوم A^2

تیزبازی: همان طور که می بینید سطر سوم و ستون سوم گزینه ها متفاوت اند؛

پس می توانیم با محاسبه این درایه، سؤال را حل کنیم. از ضرب $A \times A \times A$ ، فقط درایه سطر سوم و ستون سوم را می خواهیم؛ پس طبق نکته بالا کافی است بنویسیم:

$$B = A^3 \Rightarrow b_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سطر سوم A ستون سوم A

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 7$$

۵۷. ۱

شفاف سازی: سطر ۱ و ۲ ماتریس C ، همان سطرهای ماتریس A و سطر ۳ و ۴ ماتریس C ، همان سطرهای ماتریس B است.

گام اول: (ماتریس C): بیاید در ابتدا ماتریس C را تشکیل دهیم؛

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

بنابراین C ، یک ماتریس 4×4 است.

گام دوم: (قطر اصلی C^2):

فرض کنیم C^2 برابر D شود؛ یعنی $D = C^2 = C \times C$.

حالا سؤال فقط درایه های روی قطر اصلی C^2 را می خواهد؛ پس کافی است فقط درایه های d_{11} ، d_{22} ، d_{33} و d_{44} از D می خواهیم که اگر سطر اول در ستون اول و سطر دوم در ستون دوم و C و ... را حساب کنیم، به این هدف می رسیم.

$$d_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$$

$$d_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = 4$$

$$d_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 4$$

$$d_{44} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$$

گام سوم: (مجموع درایه های قطر اصلی C^2): ما مجموع d_{11} ، d_{22} ، d_{33} و d_{44} را می خواستیم که برابر است با ۱۶.

$$C^2 = \begin{bmatrix} 4 & * & * & * \\ * & 4 & * & * \\ * & * & 4 & * \\ * & * & * & 4 \end{bmatrix}$$

۵۸. ۳ **گام اول و آخر: (فاکتورگیری):** در فاکتور گرفتن از ماتریس ها این که

از چپ یا راست فاکتور می گیریم مهم است. در این جا می خواهیم در $AB - B^2$ از سمت راست از B فاکتور بگیریم که به $(A - B) \times B$ می رسیم.

۵۹. ۴ تنها گام مسئله (گزینه ها):

چاره ای نیست، ما تمامی گزینه ها را بررسی می کنیم:

۱ در عبارت $AB + AC$ می توانیم از چپ فاکتور بگیریم و به $A(B + C)$ می رسیم که درست است.

۲ از سمت چپ عبارت $BA + B$ می توانیم از B فاکتور بگیریم و فقط حواستان

باشد که وقتی از B را فاکتور می گیریم ۱ باقی نمی ماند و باید I بنویسیم؛ بنابراین عبارت $BA + B = B(A + I)$ درست است. $(A + I)$ و $(I + A)$ یکی است

در ۳ از سمت راست $AB - CB$ ماتریس B را فاکتور می گیریم و به رابطه $AB - CB = (A - C)B$ می رسیم که باز هم درست است.

۴ عبارت $AB - CA$ در حالت کلی نمی توانیم از A فاکتور بگیریم، چون در AB از چپ و در CA از راست ضرب شده است و بنابراین رابطه $AB - CA = A(B - C)$ درست نیست.

۶۰. ۱ **گام اول: (ضرب جمله به جمله):** روش ضرب جمله به جمله را در دنیای اعداد به یاد بیاورید. همین کار را با ماتریس ها می کنیم. فقط یادتان باشد که در ضرب دو ماتریس تا وقتی نگفته اند یا معلوم نشده، خاصیت جابه جایی نداریم؛ یعنی $AB \neq BA$. خوب برویم:

$$(A + B)(A - 2B) = A^2 - 2AB + BA - 2B^2$$

گام دوم: (اطلاعات مسئله): در صورت سؤال گفته اند: $AB = 2B$ و $BA = -A$ ؛ بنابراین:

$$A^2 - 2AB + BA - 2B^2 = A^2 - 2(2B) + (-A) - 2B^2$$

$$= A^2 - 4B - A - 2B^2$$

مثلا آسمش را می گذارید C

گام سوم: (حذف A^2 و B^2): در گزینه ها خبری از A^2 و B^2 نیست و ما باید به کمک اطلاعات مسئله، A^2 و B^2 را از جوابمان حذف کنیم:

$$\begin{cases} AB = 2B \xrightarrow{\times A} ABA = 2BA \\ \rightarrow -A^2 = -2A \Rightarrow A^2 = 2A \\ BA = -A \xrightarrow{\times B} BAB = -AB \\ \rightarrow 2B^2 = -2B \Rightarrow B^2 = -B \end{cases}$$

به گفته سؤال

گام چهارم: (تیر آخر): بنابراین به جای A^2 قرار می دهیم $2A$ و به جای B^2 قرار می دهیم $-B$ و می رسیم به:

$$C = A^2 - 4B - A - 2B^2 = 2A - 4B - A + 2B = A - 2B$$

گام سوم: (محاسبات نهایی): حالا با توجه به A و I عبارت به دست آمده در گام دوم را ساده می کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$A+3I$ $I-2A$ جواب آخر

۶۴. ۳ گام اول: (ماتریس C): بیایید اول، ماتریس C را با توجه به رابطه $C_{ij} = i^2 + j - 3$ تشکیل دهیم تا همه ماتریس ها را داشته باشیم:

$$C = [i^2 + j - 3]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (ساده سازی): ما عبارت $A(BC - B) + 2AB$ را می خواهیم. همین جوری شروع نکنید به ضرب ماتریس ها! قبلش در صورت امکان ساده کنید تا محاسبات کم تر شود. ببینید:

$$A(BC - B) + 2AB = AB(C - I) + 2AB = AB(C - I + 2I)$$

فاکتور از AB (سمت چپ) فاکتور از B (سمت چپ)

$$= AB(C + I)$$

گام سوم: (محاسبه ماتریسی): حالا وقت آن شده که محاسبه نهایی را با ماتریس هایی که داریم، انجام بدهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 8 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$C + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

گام چهارم: (سطر سوم $AB(C + I)$):

در نهایت چون سطر سوم ماتریس $AB(C + I)$ را می خواهیم باید سطر سوم AB را در $C + I$ ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 10 & 8 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 108 & 132 & 162 \end{bmatrix}$$

و جمع درایه های سطر سوم برابر است با: $108 + 132 + 162 = 402$

۶۵. ۳ گام اول: (ساده کردن): عبارت خواسته شده در صورت سؤال، خیلی ترسناک است و باید سعی کنیم آن را تا جایی که می توانیم ساده کنیم. برای این

$$\text{کار، دقت کنید در عبارت ماتریسی } B - \frac{3}{2}A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

می توانیم از یک A سمت چپ و یک B از سمت راست فاکتور بگیریم:

(خودمان اسمش را گذاشتیم M)

$$M = A \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} B - \frac{3}{2} A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} B$$

$$= A \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \right) B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \text{ برابر هم، برابر است}$$

تیزبازی: گفته $AB = 2B$ ؛ پس می توان گفت $A = 2I$ و گفته $BA = -A$ ؛ پس می توان گفت $B = -I$ و حالا $(A + B)(A - 2B) = 4I$ را می خواهیم که برابر می شود با: $(2I - I)(2I + 2I) = 4I$ و فقط ۱ برابر است با $4I$. (دوست داشتیم A و B را وارون پذیر بگیریم! مثلاً اسمش تیزبازی است.)

۶۱. ۳ گام اول: (چه کنیم?): ما در رابطه مان AB و BA را داریم و می خواهیم A^2B و BA^2 را بسازیم؛ پس بیایید یک بار A را از چپ و یک بار هم A را از راست در دو طرف رابطه داده شده، ضرب کنیم ببینیم چه می شود:

$$AB - BA = 2I \begin{cases} \xrightarrow{A \times} A^2B - ABA = 2A & \text{رابطه (۱)} \\ \xrightarrow{\times A} ABA - BA^2 = 2A & \text{رابطه (۲)} \end{cases}$$

گام دوم: (جمع رابطه ها): خوب، عالی شد! هم A^2B و هم BA^2 ظاهر شدند و مزاحم ما در دو رابطه، ABA است؛ پس بیایید مزاحم را حذف کنیم. کافی است دو رابطه به دست آمده را با هم جمع کنیم:

$$\xrightarrow{\text{رابطه ۱} + \text{رابطه ۲}} A^2B - AB^2 = 4A$$

ABA ها ساده می شوند.

۶۲. ۲ گام اول: (A و B): بیایید اول خود ماتریس های A و B را پیدا کنیم:

$$\text{به ما در سؤال داده که } A + I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{؛ پس:}$$

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

گام دوم: (محاسبه جواب): حالا به دنبال $AB + B - A$ هستیم:

$$AB + B - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

تیزبازی: اگر دقت کنید $(A + I)(B - I) = AB + B - A - I$ ؛ پس:

$$AB + B - A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

۶۳. ۳ گام اول: (A): بیایید با رابطه $a_{ij} = ij - 3$ ، ماتریس A را تشکیل دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (ساده سازی): حالا چیزی را که سؤال خواسته، ساده می کنیم. فقط حواستان باشد، وقتی از یک ماتریس با ضریب عادی (مثل $3B$) فاکتور بگیریم، به جای ۱ نمی ماند و باید در جای آن ماتریس I را بنویسید:

$$(AB + 3B)(C - 2CA) = (A + 3I)BC(I - 2A)$$

فاکتورگیری از C فاکتورگیری از B (سمت چپ) (سمت راست)

$$= (A + 3I)(I - 2A)$$

و در نتیجه در ادامه کار، داریم:

$$M = A \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \right) B = A \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B = -3AB$$

خیلی عالی (خنثی در ضرب)

گام دوم: (جواب مسئله):

M را ساده کردیم و رسیدیم به $-3AB$. به گفته سؤال $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ است؛ پس M می‌شود:

$$M = -3AB = -3 \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -3 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

که حاصل ضرب درایه‌های غیر قطر اصلی‌اش برابر است با: $-6 \times (-\frac{3}{6}) = 9$

۶۶. گام اول: (A^T): ابتدا ماتریس A^T را به دست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ($A^T - A$): حالا می‌شود $A^T - A$ را به راحتی حساب کرد:

$$A^T - A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

۶۷. گام اول: (تشکیل ماتریس A): ماتریس A را به کمک رابطه می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (i \geq j) & (i < j) & (i < j) \\ (i \geq j) & (i \geq j) & (i < j) \\ (i \geq j) & (i \geq j) & (i \geq j) \end{matrix}$$

گام دوم: (A^T): برای تشکیل ماتریس A^T باید A را در خودش ضرب کنیم:

$$A^T = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ -6 & 0 & -6 \\ 12 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

گام سوم: (مجموع درایه‌ها): مجموع درایه‌های A^T را می‌خواهیم که برابر ۹ است:

$$-6 - 3 + 6 - 6 + 12 + 6 = 9$$

۶۸. ۱

$$C = 3I$$

شفاف‌سازی:

گام اول: (تکلیف C): ماتریس C در واقع همان ماتریس $3I$ است. ببینید:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3I$$

گام دوم: (ساده‌سازی): حالا عبارت $(AC^T + BC^T)(A+B)$ را ساده‌تر می‌کنیم تا در محاسبات بعدی راحت‌تر باشید:

$$(AC^T + BC^T)(A+B) = (A+B)C^T(A+B)$$

فکتورگیری از C^T در سمت راست

گام سوم: (C^T): مگر نگفتیم $C = 3I$ ؛ بنابراین $C^T = 9I^T = 9I$ ، چون $I^n = I$ ؛ پس عبارت به دست آمده در گام دوم به این صورت می‌شود:

$$(A+B)(9I)(A+B) = 9(A+B)^T$$

خنثی در ضرب

گام چهارم: ($(A+B)^T$): ماتریس $A+B$ در صورت سؤال داده شده و به توان ۲ رساندن آن یعنی در خودش ضرب کنیم:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^T = (A+B) \times (A+B)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام پنجم: (جواب): $9(A+B)^T$ را می‌خواستیم که یعنی ۹ برابر ماتریس بالا:

$$9 \times \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 81 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 36 + 81 + 9 = 126$$

۶۹. ۱

شفاف‌سازی: اگر $A^T - B = O$ آن‌گاه داریم: $A^T = B$

گام اول: (A^T): وقتی گفته شده $A^T - B = O$ یعنی $A^T = B$ ؛ پس باید A^T را به دست بیاوریم و آن را با B مساوی بگذاریم. برویم سراغ A و A^T :

ماتریس صفر

را به دست بیاوریم و آن را با B مساوی بگذاریم. برویم سراغ A و A^T :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ($A^T = B$): حالا ماتریس B را برابر با A^T قرار می‌دهیم که در نتیجه

باید درایه‌ها، دوبره‌دو برابر باشند:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 4a+b=5 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=5 \Rightarrow b-a=5-0=5$$

۷۰. گام اول: (A^T): اول باید ماتریس A^T را به دست بیاوریم. برای این

کار از تساوی $A^T = A \times A$ استفاده می‌کنیم:

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ b^2 + 2ac & 2ab & a^2 \end{bmatrix}$$

فقط باید این‌ها را حساب کرد؛ یعنی سه تا ضرب

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ با ماتریس } A^T \text{ می‌خواهد ماتریس } A^T \text{ (پاسخ تست):}$$

مساوی باشد، برای این که این اتفاق بیفتد، باید تک تک درایه‌های این دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ b^2 + 2ac & 2ab & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2ab = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

۷۳. **گام اول: (شوخی!)** به ما A را داده‌اند و $A^{\vee}$ را می‌خواهند! خوب از این راحت‌تر؟ A را 70° بار در خودش ضرب می‌کنیم! شوخی کردیم، معلوم است که نمی‌شود! این‌طور وقت‌ها A^2 یا در صورت نیاز A^3 و A^4 را پیدا کنید، به چیزهای خوبی می‌رسید که می‌شود توان‌های بالاتر A را بدون محاسبه به دست آورد!

گام دوم: (A^2): با توجه به صورت سؤال، همه درایه‌های ماتریس $A_{3 \times 3}$ برابر با $\frac{1}{3}$ است. بیایید A^2 را حساب کنیم ببینیم به چه چیزی می‌رسیم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

حواستان جمع باشد، وقتی اولین درایه $\frac{1}{3}$ شد؛ یعنی بقیه هم $\frac{1}{3}$ هستند، چون همه ضرب‌ها مشابه است و یک سطر به صورت $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ در یک ستون

$$\text{به شکل } \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ ضرب می‌شود که نتیجه ثابت است.}$$

گام سوم: (نتیجه‌گیری): وقتی $A^2 = A$ باشد؛ یعنی A به توان هر عددی می‌شود A ، چون:

$$A^3 = A^2 \times A = A \times A = A^2 = A, A^4 = A^3 \times A = A \times A = A^2 = A, \dots$$

که به چنین ماتریسی می‌گفتیم خودتوان؛ بنابراین $A^{\vee} = A$ و $A^2 = A$ در نتیجه $A^{\vee} = A^2 = A$

تیزبازی: ماتریس $A = [\frac{1}{n}]_{n \times n}$ ، یک ماتریس خودتوان است:

$$k \in \mathbb{N} \Rightarrow A^k = A$$

$$A^{\vee} = A^2 = A \quad \text{پس } A = [\frac{1}{3}]_{3 \times 3} \text{ نیز خودتوان است و داریم:}$$

۷۴. **۳**

شفاف‌سازی: $A^2 = A$ به ما می‌گوید A خودتوان است.

گام اول: ($n=?$): با توجه به $A^2 = A$ می‌فهمیم که A خودتوان است و می‌دانیم یک ماتریس به شکل $[\frac{1}{n}]_{n \times n}$ خودتوان است؛ پس در این سؤال با نگاه به $A = [\frac{1}{4}]_{n \times n}$ ، معلوم می‌شود $n = 4$ است.

گام دوم: (A^5): وقتی می‌گوییم A خودتوان است؛ یعنی A^5 که سؤال از ما خواسته برابر با خود A است و این یعنی A^5 ، 16 درایه برابر با $\frac{1}{4}$ دارد؛ پس مجموع درایه‌هایش برابر می‌شود با:

$$16 \times \frac{1}{4} = 4$$

همان‌طور که می‌بینید از برابری درایه‌های قرمز به تساوی $2ab = 0$ و از برابری درایه‌های آبی به تساوی $2ab = 1$ می‌رسیم. واضح است که امکان ندارد $2ab$ هم‌زمان هم صفر باشد و هم 1 ؛ پس چنین ماتریسی وجود ندارد.

۷۱. **۲**

نکته: اگر ماتریس A ، یک ماتریس قطری، اسکالر، بالا مثلثی یا پایین

مثلثی باشد، در ماتریس A^n ، درایه‌های قطر اصلی برابرند با درایه‌های قطر اصلی ماتریس A به توان n .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * \\ & a_{22} \\ & & a_{kk} \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & * \\ & a_{22}^n \\ & & a_{kk}^n \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری، اسکالر، بالا مثلثی یا پایین مثلثی از مرتبه $k \times k$

گام اول: (نوع ماتریس A): درایه‌های زیر قطر اصلی در ماتریس A صفر هستند و این یعنی A یک ماتریس بالامثلثی است.

گام دوم: (قطر اصلی A^3): با توجه به نوع ماتریس A ، درایه‌های قطر اصلی A^3 برابر می‌شوند با درایه‌های قطر اصلی A به توان 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 8 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

گام سوم: (مجموع درایه‌های قطر اصلی): در ماتریس A^3 ، درایه‌های دیگر را نمی‌خواهیم و با مجموع درایه‌های قطر اصلی کار داریم:

$$8 - 1 + 27 = 34$$

۷۲. **۳**

یادآوری: در ماتریس اسکالر، همه درایه‌ها به‌جز قطر اصلی صفر هستند.

گام اول: (ماتریس A): ماتریس A ، اسکالر مرتبه 4 است و این یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A می‌شود S و با توجه به مسئله $S = -2$ به دست می‌آید؛ پس:

$$S = -2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

و اگر از -2 در تمام درایه‌ها فاکتور بگیریم، می‌رسیم به:

$$A = -2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2I$$

گام دوم: (A^4): دیگر محاسبه A^4 کاری ندارد. بفرمایید:

$$A = -2I \Rightarrow A^4 = 16I^4 = 16I \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ستون سوم} = 16$$

$$A = \left[\frac{1}{a} \right]_{n \times n}, A^2 = A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \dots & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \dots & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \dots & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \dots & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \dots & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \dots & \frac{1}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \dots & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \dots & \frac{1}{a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \dots & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$$\text{درایهٔ سطر اول، ستون اول} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a} = \frac{n}{a} = \frac{1}{a}$$

حاصل از ضرب

$$\Rightarrow an = a^2 \Rightarrow a = n$$

۷۵. **گام اول:** (ساده و بی‌دردسر): ما $A^2 = I$ را داریم و سعی می‌کنیم A^{201} را برحسب A^2 بنویسیم:

$$A^{201} = \underbrace{A^{2 \times 100}}_{A^2} \times A = \underbrace{(A^2)^{100}}_{A^2} \times A = \underbrace{I^{100}}_{I^n = I} \times A = \underbrace{I \times A}_{I^n = I} = A$$

این طوری نوشتیم که یک توان زوج به دست بیاید.

۷۶. **گام اول:** $(A^2)^9 = A^{18}$: ما در این سؤال، $A^2 = 2I$ را داریم و سعی می‌کنیم A^{18} را برحسب A^2 بنویسیم:

$$A^{18} = (A^2)^9 = (2I)^9 = 2^9 \times \underbrace{I^9}_{I^n = I} = 512I$$

۷۷. **گام اول:** (نکته): خوب است بلد باشید که اگر $A^2 = -A$ باشد، آن‌گاه A به توان‌های زوج می‌شود $-A$ و A به توان‌های فرد می‌شود خود A . ببینید:

$$\begin{aligned} A^2 &= -A \\ \Rightarrow A^3 &= \underline{A^2} \times A = -A \times A = -A^2 = -(-A) = A \\ \Rightarrow A^4 &= \underline{A^3} \times A = A \times A = A^2 = -A \\ \Rightarrow A^5 &= \underline{A^4} \times A = -A \times A = -A^2 = -(-A) = A \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{cases} A & \text{فرد } n \\ -A & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$A^{17} = A$$

۷۸. **گام اول:** (اتحاد): دقیقاً مثل اتحادهای دنیای اعداد، برای ماتریس‌ها در کنار I اتحادهای جبری را داریم، که در دنیای ماتریس‌ها، I نقش عدد ۱ را در دنیای اعداد دارد. ببینید:

$$\begin{cases} \text{در دنیای اعداد: } (a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \\ \text{در دنیای ماتریس‌ها: } (A^2 - I)^3 = A^6 - 3A^4 + 3A^2 - I \end{cases}$$

گام دوم: $(A^3 = \bar{O})$: وقتی A^3 یک ماتریس صفر است، یعنی تمام توان‌های بزرگ‌تر از ۳ برای A ، ماتریس صفر می‌شود. چون:

$$A^3 = \bar{O} \Rightarrow A^4 = A^3 \times A = \bar{O} \times A = \bar{O}, A^5 = A^4 \times A = \bar{O} \times A = \bar{O}, \dots$$

گام سوم: $(\forall n \geq 3; A^n = \bar{O})$: حالا نتیجهٔ گام اول و دوم را کنار هم قرار می‌دهیم تا به جواب آخر برسیم:

$$A^6 = A^3 = \bar{O} \xrightarrow{\text{برو به گام اول}} (A^2 - I)^3 = 3A^2 - I$$

۷۹. **۳**

یادآوری: خیلی خوبه که شما این رابطه را حفظ باشید:

$$A^2 = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1}A$$

گام اول: $(k = -2)$: حالا در این تست $k = -2$ است و این یعنی:

$$A^2 = -2A \Rightarrow A^3 = (-2)^2 A = 4A$$

گام دوم: (برحسب A^2): به گزینه‌ها که نگاه می‌کنیم همگی برحسب A^2 هستند؛ پس ما هم باید A^3 را برحسب A^2 بنویسیم. این طوری:

$$A^2 = -2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}A^2$$

$$A^3 = 4A = 4\left(-\frac{1}{2}A^2\right) = -2A^2$$

تله: حواستان باشد که گزینه‌ها برحسب A^2 است. یک‌وقت **۲** را نزنید که یک تله است.

۸۰. **گام اول:** $(A^2, A^3, \dots)$: این طور وقت‌ها که توان‌های بالایی برای ماتریس A داریم و به دنبال یک الگو برای A^n هستیم، باید A^2, A^3 و نهایتاً A^4 را به دست بیاوریم تا به یک الگو و نظمی برای توان‌های بالاتر برسیم.

گام دوم: (تکنیک محاسبهٔ A^2, A^3 و $\dots$): دقت کنید که A یک ماتریس پایین مثلثی است؛ پس در ماتریس A^n ، درایهٔ صفر سر جایش می‌ماند و درایه‌های قطر اصلی A ، به توان n می‌رسند؛ بنابراین کافی است فقط درایهٔ سطر دوم، ستون اول A^2, A^3 و $\dots$ را حساب کنیم و الگویش را در بیاوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A^2 = A \times A$$

$$\Rightarrow \text{درایهٔ سطر ۲، ستون ۱ ماتریس } A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 + 2 = 4$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 4 & 2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2^2 = 2 \times 2^1$$

$$A^3 = A^2 \times A \Rightarrow \text{درایهٔ سطر ۲، ستون ۱ ماتریس } A^3 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 4 & 2^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 12 \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 12 & 2^3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \times 2^2$$

$$A^4 = A^3 \times A \Rightarrow \text{درایهٔ سطر ۲، ستون ۱ ماتریس } A^4 = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 12 & 2^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 32 \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 32 & 2^4 \end{bmatrix} \Rightarrow 4 \times 2^3$$

$$A^5 = A^4 \times A \Rightarrow \text{درایهٔ سطر ۲، ستون ۱ ماتریس } A^5 = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 32 & 2^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 80 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 80 & 2^5 \end{bmatrix} \Rightarrow 5 \times 2^4$$

گام سوم: (کشف الگو): اگر با دقت به درایه‌های سطر دوم، ستون اول ماتریس‌های محاسبه‌شده نگاه کنید می‌بینید که این درایه در ماتریس A^n

برابر است با $n \times 2^{n-1}$ و این یعنی ضرب درایه‌های ستون اول در ماتریس A^n برابر می‌شود با $n \times 2^{n-1}$:

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ n \times 2^{n-1} & 2^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ضرب درایه‌های ستون اول} = n \times 2^{n-1} \times 2^n = n \times 2^{2n-1}$$

گام سوم: (پاسخ مسئله): حالاً می‌خواهیم ببینیم A^n چه زمانی برابر با $\begin{bmatrix} 1 & 27 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ می‌شود! با توجه به الگویی که درآوردیم $27 = 3n$ است و این یعنی $n = 9$:

$$A^9 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \times 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

روش ۲ (یا فرمول): در درس‌نامه گفتیم که برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین در این مسئله $27 = 3n$ است و در نتیجه $n = 9$.

۸۳. ۲

نکته: (یک ماتریس مهم)؛ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ یکی از ماتریس‌های مهمی

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{است که باید توان } n \text{ آن را حفظ باشیم:}$$

گام اول: (BA^n): حالا که A^n را داریم، بیایید BA^n را حساب کنیم:

$$BA^n = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 2^{n-1} & 5 \times 2^{n-1} \\ -2^{n-1} & -2^{n-1} \end{bmatrix}$$

گام دوم: (جواب آخر): با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\begin{bmatrix} 5 \times 2^{n-1} & 5 \times 2^{n-1} \\ -2^{n-1} & -2^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 80 \\ -16 & -16 \end{bmatrix}$$

و این یعنی $5 \times 2^{n-1} = 80$ و $-2^{n-1} = -16$ که هر دو نتیجه می‌دهد $2^{n-1} = 16$ و در نتیجه: $n = 5$

توجه: دقت کنید که ضرب BA^n را نمی‌خواهد کامل حساب کنیم و فقط یک درایه C_{21} آن کافی است؛ یعنی -2^{n-1} که اگر برابر با -16 قرار دهیم، می‌رسیم به $n = 5$.

۸۴. ۳

$$A^r = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1}A$$

یادآوری:

گام اول: (محاسبه A^r): در ابتدا A^r را به دست می‌آوریم:

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

به‌به! با توجه به یادآوری داریم: $A^r = 3A \Rightarrow A^n = 3^{n-1} \times A$

گام دوم: (A^{12}): حالا که فرمول A^n را داریم، به راحتی برویم سراغ A^{12} :

$$A^{12} = 3^{11} \times A = 3^{11} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{11} & 3^{11} & 3^{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 3^{11} & 3^{11} & 3^{11} \end{bmatrix}$$

گام سوم: (مجموع درایه‌ها): به دنبال مجموع درایه‌های A^{12} بودیم؛ پس:

$$A^{12} \text{ مجموع درایه‌های } = 6 \times 3^{11} = 3 \times 2 \times 3^{11} = 3 \times 3^{12}$$

۸۵. ۳ گام اول: (توان‌های کوچک A): اول، توان‌های A^2 ، A^3 و A^4

را محاسبه می‌کنیم، تا به یک ماتریس خاص یا یک الگوی مشخص برسیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

گام چهارم: (بررسی گزینه‌ها): تنها گزینه‌ای که به شکل $n \times 2^{n-1}$ است،

۴ است که در A^{19} اتفاق می‌افتد:

$$A^{19} = \begin{bmatrix} 2^{19} & 0 \\ 19 \times 2^{18} & 2^{19} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 19 \times 2^{18} \times 2^{19} = 19 \times 2^{37}$$

۸۱. ۲ گام اول: (محاسبه A^2): اول A^2 را حساب می‌کنیم تا ببینیم ما را

به چه الگو یا ماتریس خاصی می‌رساند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = -6I$$

عالی شد، یک ماتریس خاص داریم.

گام دوم: (محاسبه A^4 و A^6): با داشتن $A^2 = -6I$ ، به راحتی می‌شود A^4

و A^6 را حساب کرد، چون $I^n = I$:

$$A^2 = -6I \begin{cases} \text{به توان ۲} \rightarrow A^4 = 36I \\ \text{به توان ۳} \rightarrow A^6 = -216I \end{cases}$$

گام سوم: (محاسبه A^5): حالا نوبت به A^5 می‌رسد که $A^5 = A^4 \times A$:

$$A^5 = A^4 \times A = 36I \times A$$

$$\xrightarrow{\times A} A^5 = 36A = \begin{bmatrix} 0 & 72 \\ -108 & 0 \end{bmatrix}$$

گام چهارم: (جواب مسئله): $A^5 + A^6$ را می‌خواستیم که هر دو را داریم:

$$A^5 + A^6 = \begin{bmatrix} 0 & 72 \\ -108 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -216 & 0 \\ 0 & -216 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -216 & 72 \\ -108 & -216 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = -216 - 216 - 108 + 72 = -468$$

نکته: خوب است بلد باشید که اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $A^r = (ab)I$

و در نتیجه:

$$\begin{cases} A^{2n} = (ab)^n I \\ A^{2n+1} = (ab)^n A \end{cases}$$

۸۲. ۳ روش ۱ (بدون فرمول)

گام اول: (محاسبه A^2 و A^3 و ...): با محاسبه A^2 و A^3 ، سعی می‌کنیم

الگویی برای A^n کشف کنیم!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس بالامثلنی

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1^2 & x \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 1^3 & y \\ 0 & 1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (الگویابی):

اگر خوب نگاه کنید می‌بینید که ماتریس A^n به شکل زیر است:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸۷. **گام اول: (ماتریس A^2):** در ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم تا ببینیم برای توان‌های بالاتر چه باید کرد.

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بسیار عالی! پس توان‌های زوج A برابر I هستند: $A^{2n} = (A^2)^n = I^n = I$
گام دوم: (پاسخ مسئله): در A^{30} و A^{50} ، توان A زوج است و این یعنی هر دو برابر I می‌شوند. در نتیجه:

تیزبازی: به ما که نگفته θ چند است. قرار می‌دهیم $\theta = 0^\circ$ و A می‌شود

$$A^{\gamma^\circ} + A^{\alpha^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2I$$

۸۸. **روش ۱:** A^5 توان بزرگی ندارد و می‌توانیم در سه مرحله به طور مستقیم حسابش کنیم:

گام اول: (محاسبه A^2): می‌دانیم $A^2 = A \times A$ ، پس:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (محاسبه A^4): حالا با توجه به A^2 به A^4 به

$$A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}$$

گام سوم: (محاسبه A^5): و در نهایت A^5 را به کمک A^4 و A محاسبه می‌کنیم:

$$A^5 = A^4 \times A = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 & 121 \\ 121 & 122 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $= 122 \times 2 + 121 \times 2 = 486$

روش ۲: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ را می‌شود به صورت $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ نوشت که هم I و هم B ماتریس‌های معروفی هستند که کارکردن با آن‌ها راحت است:

$$I^n = I, \quad B^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$A^5 = (B+I)^5 = B^5 + 5B^4 + 10B^3 + 10B^2 + 5B + I$$

مجموع درایه‌ها $= 4 \times 2^4 + 5 \times 4 \times 2^3 + 10 \times 4 \times 2^2 + 10 \times 4 \times 2 + 5 \times 4 + 2 = 64 + 160 + 160 + 80 + 20 + 2 = 486$

۸۹. **روش ۳:** بیایید از اتحادها استفاده کنیم:

گام اول: (مرتب‌سازی): در قدم اول دقت کنید که $I^3 = I^2 = I$ و بعد هم:

$$A^2 - I = (A - I)(A + I)$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I$$

گام دوم: (توان‌های بالاتر A): همان‌طور که می‌بینید در توان چهارم به ماتریس خاص $-4I$ رسیدیم. به کمک این توان، توان‌های دیگر را محاسبه می‌کنیم:

$$A^6 = A^4 \times A^2 = -4I \times A^2 = -4A^2 = -4 \times \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = A^4 \times A^4 = (-4I)(-4I) = 16I^2 = 16I = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = A^4 \times A^6 = (-4I) \times A^6 = -4A^6 = -4 \times \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -32 \\ 32 & 0 \end{bmatrix}$$

گام سوم: (پاسخ تست): حالا می‌توانیم ماتریس $A^6 + A^8 + A^{10}$ را به دست بیاوریم:

$$A^6 + A^8 + A^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -32 \\ 32 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -24 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس مورد نظر می‌شود ۳۲.

۸۶. **گام اول: (ماتریس A^2):** ابتدا بیایید ماتریس A^2 را به دست بیاوریم و ببینیم چگونه است:

$$A = \begin{bmatrix} -\cot x & \frac{1}{\sin x} \\ -\frac{1}{\sin x} & \cot x \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} -\cot x & \frac{1}{\sin x} \\ -\frac{1}{\sin x} & \cot x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cot x & \frac{1}{\sin x} \\ -\frac{1}{\sin x} & \cot x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cot^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} & \frac{\cot x}{\sin x} + \frac{\cot x}{\sin x} \\ \frac{\cot x}{\sin x} - \frac{\cot x}{\sin x} & -\frac{1}{\sin^2 x} + \cot^2 x \end{bmatrix}$$

گام دوم: (اتحاد مثلثاتی): به درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^2 با دقت نگاه کنید! یاد هیچ اتحادی نمی‌افتید؟

از ریاضی ۱، در فصل مثلثات به یاد دارید که $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$ و این یعنی $\cot^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} = -1$ ؛ بنابراین ماتریس A^2 این شکلی است:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = -I$$

عالی شد! حالا می‌شود توان‌های بالای A را به راحتی حساب کرد!

گام سوم: (جواب مسئله): از $A^{12} + A^{11} - A^2 + I$ خواسته شده که با نتیجه گام سوم، کار بسیار ساده‌ای است:

$$\begin{cases} A^{12} = (A^2)^6 = (-I)^6 = (-1)^6 \times I = I \\ A^{11} = A^{10} \times A = (A^2)^5 \times A = (-I)^5 \times A = -I \times A = -A \\ A^2 = A^2 \times A = -I \times A = -A \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{12} + A^{11} - A^2 + I = I - A + A + I = 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌هایش را گفته، که می‌شود ۴.

نکته: برای دو ماتریس خاص 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = 3^{n-1} \times A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = 3^{n-1} \times A$$

۹۱. ۳ گام اول: (محاسبه A^2):

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(در این ضرب آن قدر صفر داریم که خیلی کار راحتی داریم.)

گام دوم: (محاسبه A^3):

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(این جا که دنیای صفرهاست و سه شماره حساب می شود.)

گام سوم: (محاسبه A^5):

بنابراین A پنج توان از مرتبه ۳ است و این یعنی A^n به ازای $n \geq 3$ برابر ماتریس صفر می شود و در نتیجه $A^3 = A^5 = \bar{O}$.

$$2A + A^2 + 3A^3 + A^5 = 2A + A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

که جمع درایه هایش برابر ۶ است.

نکته:

۱ در ضرب $AB = C$

- اگر سطر A برابر صفر باشد، سطر A هم صفر است.
- اگر ستون B برابر صفر باشد، ستون B هم صفر است.

۲

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^n = \bar{O} \quad (n \geq 2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^n = \bar{O} \quad (n \geq 2)$$

۹۲. ۲ گام اول: (محاسبه A^2): اول A^2 را از روی A می سازیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (محاسبه A^3): حالا به کمک A^2 و A ، ماتریس A^3 را می سازیم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه ها $= 18$

گام دوم: (اتحاد چاق و لاغر و مزدوج):

حالا هر کدام از پرانتزهای $(A - I)(A^2 - A + I)$ و $(A + I)(A^2 + A + I)$ یک اتحاد چاق و لاغر می سازد:

$$\begin{aligned} & (A^2 - I)(A^2 + A + I)(A^2 - A + I) \\ &= (A - I)(A^2 + A + I)(A + I)(A^2 - A + I) \\ &= (A^2 - I)(A^2 + I) = A^4 - I \end{aligned}$$

گام سوم: (محاسبه A^6): در گام بعدی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ را به توان ۲ و بعد هم به توان ۶ می رسانیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = -6I$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۳}} A^6 = -216I$$

دانستن و حفظ بودن این نکته خیلی به دردیخورد است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = (ab)I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^{2n} = (ab)^n I \\ A^{2n+1} = (ab)^n A \end{cases}$$

گام چهارم: (جواب آخر): جواب مسئله که $A^6 - I$ بود، برابر $-216I - I$ یا همان $-217I$ می شود:

$$-217I = \begin{bmatrix} -217 & 0 \\ 0 & -217 \end{bmatrix}$$

و جمع درایه های آن $-434 = -217 \times 2$ است.

روش ۲ می شد بدون اتحاد و مستقیم، پاسخ مسئله را حساب کرد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = -6I$$

$$\begin{aligned} & (A^2 - I)(A^2 + A + I)(A^2 - A + I) \\ &= -7I(A - \Delta I)(-A - \Delta I) = 7I(A - \Delta I)(A + \Delta I) \\ &= 7I(A^2 - \Delta^2 I) = 7I(-6I - 2\Delta I) = -217I \end{aligned}$$

۹۰. ۲ گام اول: (محاسبه A^2): برای محاسبه A^2 ، در قدم اول می رویم سراغ A^2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (محاسبه A^4): حالا با توجه به این که $A^4 = A^2 \times A^2$ ، می توانیم A^4 را حساب کنیم:

$$A^4 = (A^2)^2 = (3A)^2 = 9A^2 = 9 \times (3A) = 27A$$

گام سوم: (مجموع درایه ها): از آن جایی که $A^4 = 27A$ شد، خیلی راحت می شود جمع درایه هایش را بر حسب جمع درایه های A نوشت:

$$\begin{aligned} \text{مجموع درایه های } A^4 &= 27 \times \text{مجموع درایه های } A \\ &= 27 \times 1 = 27 \end{aligned}$$

گام سوم: (محاسبه نهایی): بنابراین ماتریس C این شکلی است:

$$BA = AB \Rightarrow C = A^2 - 2AB - 3B^2$$

ستون سوم $B^2 \times 3 -$ ستون سوم $AB \times 2 -$ ستون سوم $A^2 =$ ستون سوم C

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

۹۶. ۴

یادآوری: برای ماتریس $A = [1]_{3 \times 3}$ داریم $A^n = [3^{n-1}]_{3 \times 3}$.

حالا که فرمول A^n مشخص است، برای A^{21} داریم:

$$A^{21} = [3^{20}]_{3 \times 3} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 9 \times 3^{20} = 3^2 \times 3^{20} = 3^{22}$$

اثبات نکته:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 3A \Rightarrow A^3 = A^2 \times A = 3A \times A = 3A^2 = 9A$$

$$\Rightarrow A^4 = A^3 \times A = 9A \times A = 9A^2 = 27A, \dots$$

۹۷. **۳ گام اول: (A^2):** بایید اول A^2 را حساب کنیم ببینیم به چه

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -A$$

$$A^2 = kA$$

عالی شد! یعنی ماتریس A، شبه خودتوان است:

گام دوم: (A^n): برای ماتریس شبه خودتوان داریم:

$$A^2 = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1}A$$

$$A^2 = -A \Rightarrow A^{2 \times 24} = (-1)^{2 \times 24} \times A = -A$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 3$$

نکته: اگر A ماتریسی مربعی و k عددی حقیقی باشد، به طوری که $A^2 = kA$ ،

آن‌گاه $A^n = k^{n-1}A$. که اسم این ماتریس را گذاشتیم شبه خودتوان.

۹۸. **۴ گام اول: (محاسبه A^2):** در اولین قدم، با امید، A^2 را حساب می‌کنیم

تا از روی آن شاید بتوانیم به توان‌های بالاتر برسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$$

چه چیزی از این بهتر؟

گام دوم: (محاسبه A^6 و A^8): حالا که $A^2 = 4I$ شد، از روی آن A^6 و A^8

$$A^6 = (A^2)^3 = (4I)^3 = 4^3 \times I$$

را می‌سازیم:

$$A^8 = (A^2)^4 = (4I)^4 = 4^4 \times I$$

نکته: در ماتریس‌های مثلثی به فرم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ یا } A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ یا } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{یا } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای A^n ، درایه‌های ۰ و ۱ سر جای‌شان می‌مانند و فقط به جای a و b، na و nb می‌آید.

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلاً برای اولی داریم:

۹۳. **۱ گام اول: (A^3 و A^2):** ابتدا ماتریس A^2 و سپس A^3 را محاسبه

می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (A^6): برای محاسبه ماتریس A^6 ، کافی است ماتریس A^3 را به توان

۲ برسانیم.

$$A^6 = A^3 \times A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 57 \\ 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های A^6 برابر است با: $1 + 6 + 57 + 1 + 18 + 1 = 84$

۹۴. **۲ گام اول: (ضرب جمله به جمله):** عبارت $(2A - B)^2$ را بازمی‌کنیم:

این اسم را خودمان گذاشتیم.

$$C = (2A - B)^2 = (2A - B)(2A - B)$$

$$= 4A^2 - 2AB - 2BA + B^2$$

خواستار آن باشد که $AB \neq BA$ و نمی‌توانیم از اتحاد مربع دو جمله‌ای برویم.

گام دوم: (سطرهای اول): ما به تمام ماتریس‌های به‌دست‌آمده در گام اول

دسترسی داریم؛ پس برای سطر اول C داریم:

$$\text{سطر اول } B^2 + \text{سطر اول } 2A \times 2 - \text{سطر اول } AB \times 2 - \text{سطر اول } A^2 \times 4$$

$$= [-4 \ 32 \ 16] - [-2 \ 14 \ 8] - [-4 \ -6 \ 8] + [9 \ 0 \ 3]$$

$$= [11 \ 24 \ 3]$$

۹۵. ۱

شفاف‌سازی: A اسکالر است؛ یعنی $BA = AB$ (A و B تعویض پذیرند).

گام اول: (ضرب جمله به جمله): عبارت $(A + B)(A - 3B)$ را باز می‌کنیم.

$$C = (A + B)(A - 3B) = A^2 - 3AB + BA - 3B^2$$

گام دوم: ($BA = ?$): ماتریس‌های به‌دست‌آمده همگی داده شده‌اند به جز BA.

اما نکته این جاست که A یک ماتریس اسکالر است و ماتریس‌های اسکالر با هر

ماتریس هم‌مرتبه‌شان خاصیت جابه‌جایی دارند؛ پس $BA = AB$.

۱۰۱. **۴ گام اول:** (یک نکته): اگر دو ماتریس به فرم $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

را ضرب کنیم، می‌رسیم به $AB = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ پس برای ضربی که در سؤال داده شده داریم:

$$A_i \times A_j = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i+j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درایه‌های سطر اول، ستون دوم A_1 تا A_n جمع می‌شود.

$$\Rightarrow A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1+2+3+\dots+n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: (مجموع درایه‌ها): با توجه به رابطه $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ مجموع درایه‌های ماتریس به دست آمده این است:

$$1+1+1+2+\dots+n = 2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

گام سوم: (بررسی گزینه‌ها): حالا باید همه گزینه‌ها را بررسی کنیم و ببینیم کدام گزینه n یک عدد طبیعی نمی‌شود:

۱ ۳۰ $2 + \frac{n(n+1)}{2} = 30 \Rightarrow n(n+1) = 56 \Rightarrow n = 7 \checkmark$

۲ ۳۸ $2 + \frac{n(n+1)}{2} = 38 \Rightarrow n(n+1) = 72 \Rightarrow n = 8 \checkmark$

۳ ۴۷ $2 + \frac{n(n+1)}{2} = 47 \Rightarrow n(n+1) = 90 \Rightarrow n = 9 \checkmark$

۴ ۶۷ $2 + \frac{n(n+1)}{2} = 67 \Rightarrow n(n+1) = 130 \Rightarrow n \notin \mathbb{N} \times$ (۱۳×۱۲=۱۵۶)

پس ۴ جواب تست است.

۱۰۲. **۲ گام اول:** (A^2): مثل همیشه ابتدا A^2 را حساب می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

خیلی خوب شد!

گام دوم: (توان‌های بالاتر A): از آن جایی که $A^2 = I$ شد، می‌توانیم بگوییم توان‌های زوج A برابر I و توان‌های فرد A برابر خود A می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{زوج} \leftarrow A^{2n} = (A^2)^n = I^n = I \\ \text{فرد} \leftarrow A^{2n+1} = A^{2n} \times A = I \times A = A \\ \text{زوج} \leftarrow A^{2n+2} = A^{2n} \times A^2 = I \times I = I \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{+} \underbrace{A^{2n}}_I + \underbrace{A^{2n+1}}_A + \underbrace{A^{2n+2}}_I = 2I + A$$

مجموع درایه‌ها = ۲
مجموع درایه‌ها = ۳

پس مجموع درایه‌های ماتریس بالا برابر است با: $2 \times 3 + 2 = 8$

۱۰۳. **۲ روش:** (اتحاد بسط دو جمله‌ای): قبل از شروع توجه کنید که $(n \geq 2) A^n = 0$.

یک اتحاد: $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$

پایه کردن اتحاد: حالا حاصل $(I + 2A)^n$ را حساب می‌کنیم و البته توجه داشته باشید که فقط دو جمله اول را لازم داریم، چون $A^2 = A^3 = A^4 = \dots = A^n = 0$

$$(I + 2A)^n = \underbrace{I^n}_I + \binom{n}{1} \underbrace{I^{n-1}}_I (2A) + 0 = I + 2nA$$

خنثی در ضرب

گام سوم: (محاسبه m): با توجه به صورت سؤال داریم $A^n - 3A^6 = mI$ ؛ بنابراین:

$$mI = 4^4 \times I - 3 \times 4^3 \times I = 4^3 (4 - 3)I = 4^3 \times I = 64I$$

و از این‌جا نتیجه می‌گیریم $m = 64$.

۹۹. **۴ گام اول:** ($(BAB)^4$): بیایید اول تکلیف $(BAB)^4$ را مشخص کنیم. یک وقت ننویسید $(BAB)^4 = B^4 A^4 B^4$ که این خیلی ناجور است! تا وقتی که ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی در ضرب نداشته باشند، از این کارها نمی‌شود کرد! پس چه کار کنیم؟ ببینید:

$$(BAB)^4 = \underbrace{(BAB)(BAB)}_{B^2} \underbrace{(BAB)(BAB)}_{B^2} = BAB^2 AB^2 AB^2 AB^2$$

گام دوم: (دنبال چی هستیم؟): گفته شده $B(BAB)^4 B = 64A$ و با استفاده از نتیجه گام اول این را داریم:

$$\underbrace{BB}_{B^2} \underbrace{AB^2}_{B^2} \underbrace{AB^2}_{B^2} \underbrace{AB^2}_{B^2} A \underbrace{BB}_{B^2} = 64A$$

$$\Rightarrow \underbrace{B^2}_{B^2} \underbrace{AB^2}_{B^2} \underbrace{AB^2}_{B^2} \underbrace{AB^2}_{B^2} \underbrace{AB^2}_{B^2} = 64A$$

بیچاره A که در بین B^2 ها اسیر و گرفتار است؛ پس بیایید به دنبال B^2 باشیم ببینیم چه موجودی است.

گام سوم: (B^2): طبق چیزی که برای ماتریس B در صورت تست داده شده، ماتریس B^2 را می‌سازیم:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

از این بهتر می‌شود؟

گام چهارم: (راهی!): حالا از B^2 ها خلاص می‌شویم، چون همگی I هستند و در ضرب بی‌تأثیرند؛ پس به این معادله می‌رسیم:

$$AAAA = 64A \Rightarrow A^4 = 64A$$

گام پنجم: (بررسی A و توان‌های بالایش): به ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ دقت کنید.

$$A = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و این شد یک ماتریس خاص و دوست‌داشتنی که رفتارش را بلدیم؛ پس:

$$A^n = 2^n \times \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = 2^4 \times \begin{bmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{bmatrix} = 2^7 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

گام ششم: (حرکت آخر): حالا به ما داده شده:

$$2^7 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 64A = 64 \times 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2^7 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و این تساوی همواره برقرار است و به مقدار a بستگی ندارد و این یعنی a هر عدد حقیقی‌ای می‌تواند باشد. چون فقط اعداد طبیعی یک‌رقمی برای a را خواسته، می‌شود ۹ جواب قابل قبول برای a .

۱۰۰. **۲**

نکته: برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ داریم $A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

گام اول و آخر: (کدام گزینه؟): با توجه به فرم A^n ، مجموع درایه‌هایش می‌شود $-3n + 2$ و تنها گزینه‌ای که به این فرم است، **۲** است، چون:

$$-172 = -3 \times 58 + 2$$

$$A^{58} = \begin{bmatrix} 1 & -174 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در واقع:

گام اول: $(2A + I)^2$: اول $2A + I$ را به توان ۲ می‌رسانیم که همگی اتحاد مربع دوجمله‌ای را بلدیم:

$$(2A + I)^2 = \underbrace{4A^2}_{O} + 4A + \underbrace{I^2}_{I} = 4A + I$$

گام دوم: $(4A + I)^2$: حالا که $(2A + I)^2 = 4A + I$ شد، می‌توانیم بگوییم:

$$(2A + I)^4 = (4A + I)^2$$

$$(2A + I)^4 = \underbrace{16A^2}_{O} + 8A + \underbrace{I^2}_{I} = 8A + I$$

گام سوم: (آخرین مربع دوجمله‌ای): یک بار دیگر عبارت به دست آمده را به توان دو می‌رسانیم تا برسیم به:

$$(2A + I)^8 = (8A + I)^2 = \underbrace{64A^2}_{O} + 16A + \underbrace{I^2}_{I} = 16A + I$$

۱۰۴. ۳

شفاف‌سازی: پوچ توان از مرتبه ۳ یعنی برای $n \geq 3$ داریم $A^n = O$.

یک اتحاد:

گام اول: (اجرای اتحاد): حالا به کمک اتحاد بالا عبارت $(2A - I)^6$ را باز می‌کنیم، اما با توجه به این که A^n برای $n \geq 3$ برابر O است، این شکلی می‌نویسیم:

$$A(2A - I)^6$$

$$= A \left(\underbrace{16A^2}_{\text{سه جمله آخر بسط}} - \underbrace{12A^2}_{\text{وقتی } A \text{ پوچ توان از مرتبه ۳ است، همگی برابر } O \text{ می‌شوند.}} + \underbrace{6A^2}_{\text{جملاتی که توان } A \text{ بزرگ‌تر مساوی ۳ است}} + \underbrace{12A^2}_{\text{بزرگ‌تر مساوی ۳ است}} - \underbrace{6A^2}_{\text{بزرگ‌تر مساوی ۳ است}} + \underbrace{1}_{\text{بزرگ‌تر مساوی ۳ است}} \right)$$

$$= 6 \cdot \underbrace{A^2}_{O} - 12A^2 + A = A - 12A^2$$

عشق فرمول: در بسط $(I + A)^n$ می‌توانیم این عبارت را بنویسیم:

$$(I + A)^n = I + nA + \frac{n(n-1)}{2!}A^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}A^3 + \dots$$

و اگر A پوچ توان از مرتبه k باشد، کافی است k جمله اول را بنویسیم و بقیه قطعاً O هستند.

۱۰۵. ۱ گام اول: $(A - I)$: در ابتدا $A - I$ را می‌سازیم تا ببینیم قرار است چه چیزی را به توان ۱۰ برسانیم.

$$B = A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اسمش را گذاشتیم B

$$\Rightarrow (A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2B$$

گام دوم: $(A - I)^3$: حالا $(A - I)^3$ یا همان B^3 را می‌خواهیم: (ماتریس B شبه خودتوان است؛ یعنی B^2 مضربی از B است.)

$$B^2 = 2B \Rightarrow B^n = 2^{n-1}B$$

(قاعده‌ای که برای ماتریس‌های شبه خودتوان یاد گرفته‌ایم.)

بنابراین رسیدیم به:

گام سوم: (مجموع درایه‌ها): ما مجموع درایه‌های ماتریس $(A - I)^{10}$ را می‌خواهیم. از آنجایی که مجموع درایه‌های ماتریس $A - I$ برابر صفر است، مجموع درایه‌های ماتریس $(A - I)^{10} = 2^9(A - I)$ هم صفر می‌شود.

۱۰۶. ۲ گام اول و آخر: $(A^3 \times)$: ماتریس A^3 را می‌خواهیم و کافی است دو طرف $AB = A$ را از راست در A^3 ضرب کنیم:

$$AB = A \xrightarrow{\times A^2} \underline{ABA^2} = A^4 \xrightarrow{BA^2 = B^2} AB^2 = A^4$$

تذکر: هیچ وقت دو طرف تساوی ماتریسی را در ضرب ماتریس‌ها ساده نکنید! مثلاً از $AB = A$ ، با زدن A از دو طرف، نتیجه نگیرید $B = I$!

۱۰۷. ۲ روش ۱ (به توان ۲ برسان):

گام اول: $A - 2I$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(A - 2I)^2 = \underbrace{A^2}_{3A} - 4AI + 4I^2 = 3A - 4A + 4I = 4I - A$$

گام دوم: یک بار دیگر نتیجه را به توان ۲ می‌رسانیم؛ پس:

$$(A - 2I)^4 = (4I - A)^2 = 16I^2 - 8IA + \underbrace{A^2}_{3A} = 16I - 8A + 3A = 16I - 5A$$

روش ۲ (استفاده از اتحاد):

گام اول: مستقیم و به کمک بسط دوجمله‌ای، $(A - 2I)^4$ را حساب می‌کنیم:

$$(A - 2I)^4 = A^4 - 4A^3(2I) + 6A^2(2I)^2 - 4A(2I)^3 + (2I)^4$$

$$= A^4 - 8A^3 + 24A^2 - 32A + 16I$$

گام دوم: با توجه به $A^2 = 3A$ می‌فهمیم A یک ماتریس شبه خودتوان است و این یعنی $A^n = 3^{n-1}A$ ؛ در نتیجه:

$$(A - 2I)^4 = \underbrace{3^2 A}_{12A} - \underbrace{8(3^1 A)}_{24A} + \underbrace{24(3^0 A)}_{24A} - 32A + 16I = 16I - 5A$$

۱۰۸. ۳

نکته: A خودتوان است؛ یعنی $A^n = A$.

گام اول: (بسط $(A + I)^5$): از اتحاد مربوط به بسط $(a + 1)^5$ استفاده می‌کنیم:

$$(A + I)^5 = \underbrace{A^5}_{A} + \underbrace{5A^4}_{5A} + \underbrace{10A^3}_{10A} + \underbrace{10A^2}_{10A} + \underbrace{5A}_{5A} + I = I + 31A$$

گام دوم: $(A^3 \times)$: حالا وقت آن است که از چپ A^3 را ضرب کنیم:

$$\xrightarrow{A^3 \times} A^3(A + I)^5 = A^3(I + 31A) = \underbrace{A^3}_{A} + 31 \underbrace{A^4}_{A} = A + 31A = 32A$$

۱۰۹. ۲ گام اول: (ماتریس شبه خودتوان): وقتی $A^2 = 3A$ داده شده، یعنی A شبه خودتوان است و $A^n = 3^{n-1}A$ ؛ در نتیجه:

$$A^3 = 3^2 \times A = 9A$$

گام دوم: (اتحاد مکعب دوجمله‌ای): حالا B^3 را به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای باز می‌کنیم:

$$B^3 = (2A + I)^3 = 8 \underbrace{A^3}_{9A} + 12 \underbrace{A^2}_{3A} I + 6 \underbrace{A}_{3A} I^2 + \underbrace{I^3}_{I}$$

$$= \underbrace{8(9A)}_{72A} + \underbrace{12(3A)}_{36A} + 6A + I = 114A + I$$

۱۱۰. ۴ ماسخت‌ترین و در عین حال راحت‌ترین راهی را که به ذهن می‌رسد، می‌رویم:

گام اول: (محاسبه A^2 ، A^4 و A^8 با توان ۲ رساندن‌های متوالی):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^8 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 2$$

گام سوم: $(A+I)$ (به توان چند؟): حالا با توجه به گزینه‌ها و نتیجه گام دوم،

دو طرف تساوی آخر را به توان ۴ می‌رسانیم که برویم در محدوده گزینه‌ها:

$$(A+I)^4 = I \xrightarrow{\text{به توان ۴}} (A+I)^4 = I^4 = I$$

و اگر در $(A+I)$ ضرب شود، می‌رسیم به: $(A+I)^4 = A+I$

۱۱۴. این نکته را بلد باشید: این‌جا چون ماتریس B از I و ضربی از A تشکیل

شده، بدون توجه به رابطه $A^2 = 2A$ همیشه A و B تعویض پذیر هستند و بنابراین

$AB = BA$ است. (البته به عنوان تمرین درسی همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.)

$$B = I - 3A, A^2 = 2A$$

با تساوی $B = I - 3A$ کار داریم و هر جا A^2 دیدیم، به جایش $2A$ را قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{\times B} B^2 = B - 3BA = I - 3A - 3BA$$

$$\Rightarrow I - 6A + 9A^2 = I - 3A - 3BA$$

$$\Rightarrow -6A + 18A = -3A - 3BA \Rightarrow 3BA = -15A$$

$$\Rightarrow BA = -5A \xrightarrow{\times B} B^2 = B - 3AB$$

$$\Rightarrow AB = -5A \Rightarrow \text{همان روند}$$

$$2 \text{ به توان } B^2 = I - 6A + 9A^2 = I - 6A + 18A = I + 12A$$

$$\xrightarrow{AB \times} AB^2 = \underbrace{AB}_{-5A} - 3 \underbrace{AB}_{-5A} A = -5A + 15A^2$$

$$= -5A + 30A = 25A$$

۱۱۵. تساوی $AB + 4BA = \bar{O}$ به ما می‌گوید $AB = -4BA$.

حالا دو طرف این رابطه را از راست در B ضرب می‌کنیم و این کار را تکرار

می‌کنیم تا AB^2 ساخته شود. هر جا هم AB ببینیم، به جایش $-4BA$ را

می‌گذاریم: $AB = -4BA \xrightarrow{\times B} AB^2 = -4B \underbrace{AB}_{-4BA} = 16B^2 A$

$$\xrightarrow{\times B} AB^3 = 16B^2 \underbrace{AB}_{-4BA} = -64B^3 A$$

$$\text{به ما گفته شده بود } AB^3 = kB^3 A \text{ و این یعنی: } k = -64$$

۱۱۶. ۳

$$A^2 = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1}A$$

نکته:

گام اول: $(A^2 \text{ بر حسب } A)$: از تساوی $3A^2 = 4A$ می‌فهمیم که $A^2 = \frac{4}{3}A$.

گام دوم: $(A^n \text{ بر حسب } A)$: بنابراین طبق نکته بالا داریم:

$$A^n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} A$$

گام سوم: (بررسی A^{19}): حالا A^{19} را می‌خواهیم که این طوری است:

$$A^{19} = \left(\frac{4}{3}\right)^{18} A = \frac{4^{18}}{3^{18}} A = \frac{2^{36}}{3^{18}} A$$

در نتیجه از تساوی $A^{19} = \frac{2^a}{3^b} A$ می‌شود گفت $36 = a$ و $18 = b$.

$$a - b = 18 \Rightarrow 36 - 18 = 18$$

۱۱۷. ۲

نکته: تعویض پذیر یعنی $AB = BA$.

گام اول: (تشکیل AB): بدون استفاده از هیچ فرمولی AB را از روی A و B می‌سازیم:

$$B = \begin{bmatrix} b & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+6 & 2 \\ ab & -2a \end{bmatrix}$$

گام دوم: (محاسبه A^6 به کمک A^2 و A^4):

$$A^6 = A^4 A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

گام سوم: (محاسبه A^7 از روی A^6 و A):

$$\Rightarrow A^7 = A^6 A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $= 2$

گام چهارم: (جواب مسئله): $\Rightarrow A^7$ و A^4 مجموع درایه‌های $2+2=4$

تیزبازی: بایک نگاه به A^4 و A^2 همان‌جا می‌شد فهمید که

$$A^n = \begin{bmatrix} n+1 & n \\ -n & -n+1 \end{bmatrix} \text{ و این یعنی مجموع درایه‌های } A^n \text{ همواره } 2 \text{ است.}$$

۱۱۱. **گام اول:** (B^2) : خیلی کار راحتی داریم. فقط کافی است دو طرف

$B = 2A - I$ را به توان ۲ برسانیم:

$$B^2 = (2A - I)^2 = 4 \underbrace{A^2}_{2A-I} - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I$$

$$= 8A - 4I$$

عالی! تمام شد و گام بعدی نداریم!

۱۱۲. **گام اول:** (یادآوری یک اتحاد): یک اتحاد در حسابان یاد گرفتیم

که این شکلی است: $(a-1)(a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1) = a^{n+1} - 1$

از همین اتحاد در دنیای ماتریس‌ها استفاده می‌کنیم.

گام دوم: (ایجاد اتحاد): در تساوی $A^4 + A^3 + A^2 + A + I = \bar{O}$ دو

طرف را از چپ در $(A - I)$ ضرب می‌کنیم تا اتحاد ساخته شود:

$$\xrightarrow{\text{اتحاد شد}} (A - I)(A^4 + A^3 + A^2 + A + I) = (A - I) \times \bar{O}$$

$$\Rightarrow A^5 - I = \bar{O} \Rightarrow A^5 = I$$

گام سوم: (به دست آوردن A^{26}):

$$A^5 = I \Rightarrow (A^5)^5 = I^5 \Rightarrow A^{25} = I \Rightarrow A^{25} \times A = IA$$

$$\Rightarrow A^{26} = A \quad (I)$$

$$A^5 = I \Rightarrow A^5 \times A = IA \Rightarrow A^6 = A \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow A^{26} = A^6$$

۱۱۳. **گام اول:** (دقت به ضرایب): به ضرایب نوشته شده در عبارت

$$4I + 6A + 4A^2 + 3A^3 \text{ خوب نگاه کنید. یاد چه چیزی یا بهتر بگوییم یاد}$$

کدام اتحاد و بسط می‌افتید؟ بله! این اتحاد:

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

گام دوم: (ساخت اتحاد): حالا برای آن‌که قیافه عبارت داده شده، مثل اتحادی که

نوشتیم بشود، باید توان A از ۴ شروع شود. خب بیایید دو طرف را در A ضرب کنیم:

$$A^3 + 4A^2 + 6A + 4I = \bar{O}$$

$$\xrightarrow{\times A} A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A = \bar{O}$$

خیلی خوب شد! اما یک چیزی هنوز کم دارد. آن هم یک I ؛ پس به دو طرف I

$$\xrightarrow{+I} A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + I = I$$

را اضافه می‌کنیم:

حالا اصل جنس است. سمت چپ همان بسط $(A+I)^4$ می‌شود؛ بنابراین

$$(A+I)^4 = I$$

رسیدیم به:

گام دوم: (تشکیل BA): حالا نوبت به BA می‌رسد:

$$B = \begin{bmatrix} b & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow BA = \begin{bmatrix} b & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-2a & 2b \\ 3+2a & 6 \end{bmatrix}$$

گام سوم: (AB=BA): باید ماتریس‌های به دست آمده برابر باشند تا A و B

تعویض پذیر شوند.

$$\begin{bmatrix} b+6 & 2 \\ ab & -2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-2a & 2b \\ 3+2a & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2b=2 \Rightarrow b=1 \\ -2a=6 \Rightarrow a=-3 \end{cases}$$

گام چهارم: (جواب مسئله): a + b را خواسته بود که -2 می‌شود.

نکته: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به این شرط تعویض پذیر هستند:

$$\frac{a-d}{x-t} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

در این تست برای تعویض پذیری دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\frac{b-2}{1-0} = \frac{-2}{2} = \frac{3}{a} \Rightarrow \begin{cases} b-2=-1 \Rightarrow b=1 \\ \frac{3}{a}=-1 \Rightarrow a=-3 \end{cases}$$

۱۱۸. ۴ دوتا راه داریم برای حل این تست: بدون فرمول و نکته با فرمول

ما هر دو را برای شما می‌آوریم. ببینید:

روش ۱: تشکیل AB و BA و مساوی قراردادن آن‌ها راه اول ماست:

گام اول: (AB و BA):

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & 3z-2 \\ 4x-2y & 4z-y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & z \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4z & -2x+zy \\ -10 & 4-y \end{bmatrix}$$

گام دوم: (معادله): اگر این دو ماتریس را مساوی هم قرار دهیم، می‌رسیم به

$$3x+4 = 3x+4z \Rightarrow 4z=4 \Rightarrow z=1$$

$$3z+2 = -2x+zy \xrightarrow{z=1} -2x+y=5$$

$$\Rightarrow 2x-y=-5$$

گام سوم: (جواب مسئله): از ما $2x-y+z$ خواسته شده که برابر می‌شود با:

$$-5+1=-4$$

دقت کنید که ما نمی‌توانستیم خود X و Y را پیدا کنیم و این‌جا هم نیازی به X و Y نداریم، بلکه فقط $2x-y$ مهم بود.

روش ۲: در این راه از این فرمول می‌رویم:

$$AB=BA \Leftrightarrow \frac{a_{11}-a_{22}}{b_{11}-b_{22}} = \frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{a_{21}}{b_{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{3-y}{x+1} = \frac{-2}{2} = \frac{4}{-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-2}{2} = -2 \Rightarrow z=1 \\ \frac{3-y}{x+1} = -2 \Rightarrow 3-y = -2x-2 \Rightarrow 2x-y = -5 \end{cases}$$

۱۱۹. ۱ گام اول: (شرط تعویض پذیری): یاد گرفتیم که اگر $\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$
 تعویض پذیر باشند، آن‌گاه:
$$\frac{4-3}{x+1} = \frac{3}{y} = \frac{-2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} = -1 \Rightarrow x+1 = -1 \Rightarrow x = -2 \\ \frac{3}{y} = -1 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

گام دوم: (جواب تست): از ما حاصل $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -x & -y \end{bmatrix}$ خواسته شده که می‌شود $3x+4+xy$.

حالا مقدار $x = -2$ و $y = -3$ را در آن می‌گذاریم و می‌رسیم به:

$$-6+4+6=4$$

۱۲۰. ۴

نکته: وقتی بین دو ماتریس مربعی، اتحادهای جبری برقرار باشد، یعنی آن

دو ماتریس تعویض پذیرند:

$$(A+B)^T = A^T + B^T + 2BA \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} AB=BA$$

گام اول: (شرط تعویض پذیری): حالا برای دو ماتریس 2×2 شرط تعویض پذیری

را می‌نویسیم:

$$B = \begin{bmatrix} y-2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{AB=BA} \frac{y-2-3}{3-0} = \frac{5}{x+1} = \frac{-1}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y-5}{3} = -1 \Rightarrow y-5 = -3 \Rightarrow y = 2 \\ \frac{5}{x+1} = -1 \Rightarrow x+1 = -5 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

گام دوم: (پاسخ تست): به دنبال $x+y$ هستیم؛ پس:

$$x+y = -6+2 = -4$$

۱۲۱. ۴

شفاف‌سازی: تعویض پذیری برای دو ماتریس، یعنی بین آن‌ها اتحادهای

جبری برقرار است.

گام اول: (اتحاد): بیایید عبارتهای $(A+B)^T$ و $(A-B)^T$ را به کمک اتحاد

مربع دو جمله‌ای باز کنیم:

(دقت کنید که اگر $AB=BA$ نباشد، اتحادها بین A و B برقرار نیستند.)

$$(A+B)^T - (A-B)^T + 4AB$$

$$= A^T + B^T + 2AB - (A^T + B^T - 2AB) + 4AB$$

$$= A^T + B^T + 2AB - A^T - B^T + 2AB + 4AB = 8AB$$

و چون A و B تعویض پذیرند:

۱۲۲. ۴ یک قضیه و یک نکته مهم: ماتریس A با ماتریس A^n و همین‌طور

ماتریس I تعویض پذیر است و بنابراین با هر ترکیب خطی آن‌ها هم تعویض پذیر است و در

نتیجه A با همه ماتریس‌های $(A^T + I, A^T - 2I, \frac{1}{4}A - 4I^T)$ تعویض پذیر است.

یعنی ماتریس A و ماتریس $(aA^n + bI^m)$ تعویض پذیرند.

گام دوم: (A^3): حالا در A ضرب کن:

$$\xrightarrow{\times A} A^3 = 2A^2 + 5A = 2(2A + 5I) + 5A = 9A + 10I$$

گام سوم: (a و b): تساوی به دست آمده را با تست مقایسه کن:

$$A^3 = aA + bI \Rightarrow a = 9, b = 10 \Rightarrow a + b = 19$$

۱۲۷. **گام اول: (کیلی - همیلتون):** اول به کمک رابطه کیلی - همیلتون

$(A^2 = \alpha A + \beta I)$ ماتریس A^2 را بر حسب A و I می نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \underbrace{(2+2)}_{\text{مجموع قطر اصلی}} A - \underbrace{((2)(2)-(1)(5))}_{|A|} I$$

$$\Rightarrow A^2 = 4A + I$$

گام دوم: (ماتریس A^3 بر حسب A و I): حالا طرفین تساوی $A^2 = 4A + I$ را در

ضرب می کنیم (یا از راست یا از چپ) تا ماتریس A^3 هم بر حسب A و I پیدا شود:

$$A^3 = 4A + I$$

$$\xrightarrow{\times A} A^3 \times A = 4A \times A + I \times A \Rightarrow A^3 = 4A^2 + A$$

$$\xrightarrow{A^2=4A+I} A^3 = 4(4A + I) + A = 17A + 4I$$

گام سوم: (پاسخ تست): حالا رابطه های گام اول و گام دوم را در تساوی

$$A^3 - A^2 = mA + nI$$
 جای گذاری می کنیم تا مقادیر m و n پیدا شوند:

$$A^3 - A^2 = mA + nI$$

$$\xrightarrow{\frac{A^3=17A+4I}{A^2=4A+I}} (17A + 4I) - (4A + I) = mA + nI$$

$$\Rightarrow 13A + 3I = mA + nI \Rightarrow \begin{cases} m = 13 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (13, 3)$$

۱۲۸. **گام اول: (ساخت A^3):** A^2 را با این قیافه اش نمی شود به توان

۱۵ رساند! پس بیا باید A^3 را بسازیم، شاید بهتر باشد. دو طرف تساوی داده شده

را در A ضرب می کنیم:

$$A^3 = A - I \xrightarrow{\times A} A^3 = A^2 - A = A - I - A = -I$$

عالی!

گام دوم: (A^{30} و A^{31}): حالا که $A^3 = -I$ شد، به راحتی آن را به توان 10

می رسانیم تا A^{30} به دست آید و آخرش با ضرب در A می رسیم به A^{31} :

$$A^3 = -I \xrightarrow{\text{به توان } 10} A^{30} = (-I)^{10} = I^{10} = I \xrightarrow{\times A} A^{31} = A$$

۱۲۹. **گام اول: (A^4):** ابتدا A^2 را به توان 2 می رسانیم تا زود برسیم به

A^4 و نزدیک A^5 شویم:

$$A^2 = 3I - 2A \xrightarrow{\text{به توان } 2} A^4 = 9I - 12A + 4A^2$$

$$= 9I - 12A + 4(3I - 2A) = 21I - 20A$$

گام دوم: (A^5): حالا تساوی گام اول را در A ضرب می کنیم تا A^5 درست شود.

$$\xrightarrow{\times A} A^5 = 21A - 20A^2 = 21A - 20(3I - 2A) = 61A - 60I$$

$$A^5 = aA + bI \Rightarrow a = 61, b = -60 \Rightarrow a + b = 1$$

۱۳۰. **گام اول: (A^{n+1}):** راه حل ما این است که ماتریس A^{n+1} را با ضرب ماتریس A^n در

A حساب کنیم؛ یعنی A^3 سپس A^4 و A^5 ... را تا جایی به دست آوریم که

$13A - 8I$ در یکی از توان های A نمایان شود و نقطه شروع ها A^2 است که

به ما داده اند.

۱۲۳. **گام اول: (یک قضیه مهم):** طبق قضیه کیلی - همیلتون داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \underbrace{(a+d)}_{\text{مجموع درایه های قطر اصلی}} A - \underbrace{(ad-bc)}_{|A| \text{ یا } \det(A) \text{ دترمینان}} I$$

این قضیه را بلد باشید. خیلی مهم و کار راه انداز است.

گام دوم: (کیلی - همیلتون در این تست): حالا در این جا برای ماتریس A

داده شده داریم:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \underbrace{(-2+4)}_2 A - \underbrace{((-2)(4)-(1)(5))}_{-13} I$$

پس شد $A^2 = 2A + 13I$ و این یعنی $(\alpha, \beta) = (2, 13)$.

۱۲۴. **گام اول: (اجرای قضیه کیلی - همیلتون):** خب حالا این جا در

این مسئله A به صورت $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعریف شده؛ بنابراین:

$$A^2 = (1+4)A - (1 \times 4 - (-2)(3))I \Rightarrow A^2 = 5A - 10I$$

دترمینان A که جلوتر یاد می گیرید. مجموع درایه های قطر اصلی

$$\Rightarrow A^2 + 10I = 5A$$

مثل صورت تست نوشتیم.

با نگاه به $A^2 + aI = bA$ که تست به ما داده بود، معلوم می شود $a = 10$ و

$b = 5$ و این یعنی $a + b = 15$.

تله: رابطه کیلی - همیلتون را که نوشتید، ظاهر تساوی را مثل تست کنید؛

$$A^2 + 10I = 5A$$

یعنی

این جمله باید برود سمت چپ تساوی

وگرنه اگر عجله کنید، می رسید به $a = -10$ و $b = 5$ و 1 را می زنید.

۱۲۵. **گام اول: (تشکیل A^2):**

اول از روی ماتریس A ، ماتریس A^2 را می سازیم:

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 6 & 2a - 2 \\ 3a - 3 & 7 \end{bmatrix}$$

گام دوم: ($A^2 = 7I$): حالا باید ماتریس به دست آمده را با $7I$ برابر قرار دهیم:

$$A^2 = 7I \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + 6 & 2a - 2 \\ 3a - 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 6 = 7 \Rightarrow a = \pm 1 \\ 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ 3a - 3 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

ریشه مشترک این سه معادله $a = 1$ است.

تیزبازی: طبق رابطه کیلی - همیلتون داریم:

$$A^2 = \alpha A + \beta I$$

مجموع درایه های قطر اصلی

$$A^2 = (a-1)A + (6+a)I \quad \text{پس برای } A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ داریم:}$$

با مقایسه این رابطه و $A^2 = 7I$ می رسیم به $a - 1 = 0$ و $6 + a = 7$ که

این یعنی $a = 1$.

۱۲۶. **گام اول: (کیلی - همیلتون):** اول برویم سراغ A^2 :

$$\Rightarrow A^2 = 2A - (-3-2)I = 2A + 5I$$

فصل اول

ماتریس و کاربردها

به فصل ماتریس و کاربردها خوش آمدید.

مباحث مهم و پرسؤال اعمال روی ماتریس‌ها - دترمینان - وارون ماتریس

مباحث پیش‌نیاز کمی معادله خط و مهارت محاسبه با چهار عمل اصلی

فصل‌های مرتبط با کتاب درسی فصل ۱ کتاب درسی هندسه سال دوازدهم

حرف آخر این فصل کاملاً مستقل است و یک تست مستقیماً در کنکور دارد که با تمرین کافی می‌توان آن را پاسخ داد.

درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس

به هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی که شامل تعدادی سطر و ستون است، ماتریس می‌گوییم. هر عدد حقیقی در این ماتریس یک درایه نام دارد. ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A ، B و C نمایش می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -4 & 8 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

مرتبه ماتریس

اگر ماتریس، m سطر و n ستون داشته باشد، به $m \times n$ مرتبه ماتریس گفته می‌شود.

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

مثلاً مرتبه ماتریس روبه‌رو که ۲ سطر و ۳ ستون دارد، 2×3 است و آن را به صورت 2×3 نمایش می‌دهیم.

درایه موجود در سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نمایش می‌دهیم. پس a_{12} یعنی عنصر روی سطر اول و ستون دوم و a_{23} یعنی عنصر روی سطر دوم و ستون سوم. مطالب بالا را در جدول زیر مرور می‌کنیم:

مرتبه	درایه	سطر و ستون
مرتبه ماتریس 3×2	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$	$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ ستون اول سطر سوم

تست: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}_{3 \times m}$ اگر بدانیم $a_{22} = 3$ و جمع درایه‌های ستون دوم ۵ است، حاصل $b + m$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

پاسخ ۲: ابتدا دقت کنید که مرتبه ماتریس، 3×2 است؛ پس $m = 2$. حالا منظور از a_{22} ؛ یعنی عدد روی سطر دوم و ستون دوم ماتریس که همان a است و باید برابر ۳ باشد؛ پس ماتریس به صورت روبه‌رو است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & b \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

حالا مجموع اعداد ستون دوم ماتریس را مساوی ۵ قرار می‌دهیم تا b را به دست آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -b+4 & a \\ b & 2 & 2c+7 \\ 3 & c-1 & 1 \end{bmatrix}$$

تست: در ماتریس روبه‌رو می‌دانیم $a_{12} = a_{21}$ و $a_{22} = a_{33}$. مقدار $b + c$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) -۶ (۴) -۸

پاسخ ۳: با توجه به ماتریس می‌دانیم $a_{12} = -b + 4$ ، $a_{21} = b$ ، $a_{22} = c - 1$ و $a_{33} = 2c + 7$ ؛ حالا داریم:

$$\begin{cases} a_{12} = a_{21} \Rightarrow b = -b + 4 \Rightarrow b = 2 \\ a_{22} = a_{33} \Rightarrow 2c + 7 = c - 1 \Rightarrow c = -8 \\ b + c = 2 + (-8) = -6 \end{cases}$$

بنابراین:

تست: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} y & 2 & -1 \\ x & 3 & 2 \\ 14 & 0 & -x \end{bmatrix}$ مجموع ریشه‌های معادله $2a_{33} - a_{21}^2 + 2a_{22} = 0$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) -۲

پاسخ ۴: با توجه به درایه‌های ماتریس داریم: $a_{33} = -x$ و $a_{21} = x$ و $a_{22} = 2$. پس معادله داده‌شده به صورت $-2x - x^2 + 4 = 0$ است. می‌دانیم در معادله درجه ۲ مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است؛ پس:

درایه عمومی یک روش دیگر تعریف ماتریس‌ها، نوشتن یک تابع برحسب i و j برای هر درایه است. مثلاً در یک ماتریس $a_{ij} = i + j^2$ تعریف می‌شود؛ یعنی اگر درایه a_{12} را بخواهیم باید در فرمول $i + j^2$ اعداد $i = 1$ و $j = 2$ را جای‌گذاری کنیم که $1 + 2^2 = 5$ به دست می‌آید؛ پس درایه سطر اول و ستون دوم برابر ۵ است. در همین مثال اگر مثلاً مرتبه ماتریس 3×4 باشد، ماتریس را به صورت $A = [i + j^2]_{3 \times 4}$ نمایش می‌دهیم.

تست: مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A = [i^2 - j]_{2 \times 2}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ ۲: چون ماتریس 2×2 است؛ پس ۴ درایه دارد و به صورت روبه‌رو است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

از فرمول $i^2 - j$ باید تمام درایه‌های $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ را به دست آوریم و ماتریس را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} a_{11} = 1^2 - 1 = 0 \\ a_{12} = 1^2 - 2 = -1 \\ a_{22} = 2^2 - 2 = 2 \\ a_{21} = 2^2 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های سطر اول ماتریس -۱ است.

تذکر: البته چون در این تست فقط مجموع درایه‌های سطر اول را می‌خواستیم می‌توانستیم فقط a_{11} و a_{12} را حساب کنیم.

تست: در ماتریس $A = [2ai + 3j]_{3 \times 3}$ اگر درایه واقع بر سطر اول و ستون دوم، صفر باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

پاسخ ۲: درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس همان a_{12} است که برای به دست آوردن آن در فرمول $2ai + 3j$ مقدار $i = 1$ و $j = 2$ جایگزین می‌کنیم و مطابق فرض مسئله، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$a_{12} = 0 \Rightarrow 2a(1) + 3(2) = 0 \Rightarrow a = -3$$

تست: ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $[i^2 + j]_{2 \times 2}$ (۲) $[2i - j]_{2 \times 2}$ (۳) $[i^2 + j]_{2 \times 3}$ (۴) $[2i - j]_{2 \times 3}$

پاسخ ۴: دقت کنید که مرتبه ماتریس 2×3 است. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند. حالا در بین گزینه‌های ۳ و ۴ باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که فرمول کلی درایه‌های ماتریس باشد، مثلاً اگر a_{11} را بخواهیم پیدا کنیم در ۳، عدد ۲ می‌شود که غلط است ولی ۴، فرمول تمامی درایه‌هاست و پاسخ ۴ است.

تست: اگر $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ و $b_{ij} = \begin{cases} 2i - j & i > j \\ ij & i = j \\ 2j - i & i < j \end{cases}$ ، مجموع درایه‌های ستون اول و سوم کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴) ۳۶

پاسخ ۳: ماتریس 3×3 هست و باید ۹ درایه آن با توجه به ضابطه‌های داده‌شده مشخص شود:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 1 \times 1 = 1 & b_{22} &= 2 \times 2 = 4 & b_{33} &= 3 \times 3 = 9 \\ b_{21} &= 2(2) - 1 = 3 & b_{32} &= 2(3) - 2 = 4 & b_{31} &= 2(3) - 1 = 5 \\ b_{12} &= 2(2) - 1 = 3 & b_{23} &= 2(3) - 2 = 4 & b_{13} &= 2(3) - 1 = 5 \end{aligned}$$

بنابراین درایه‌های ماتریس B به گونه مقابل است:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون اول ۹ و مجموع درایه‌های ستون سوم ۱۸ بوده و جواب برابر ۲۷ می‌شود.

ماتریس‌های خاص

ماتریس سطری: ماتریسی که تنها یک سطر داشته باشد و مرتبه آن به صورت $1 \times n$ باشد، ماتریس سطری نام دارد. به طور مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

ماتریس سطری

ماتریس ستونی: ماتریسی که تنها یک ستون داشته باشد و مرتبه آن به صورت $n \times 1$ باشد، ماتریس ستونی نام دارد. به طور مثال:

$$\begin{bmatrix} \sin x \\ -1 \\ \cos x \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

ماتریس ستونی

مثلاً اگر ماتریس ستونی A دارای $n + 4$ سطر و $n - 3$ ستون باشد؛ پس $n - 3 = 1$ است و $n = 4$ می‌شود، بنابراین ۸ سطر دارد.

تست: ماتریس سطری A از مرتبه $(k + 4) \times (k - 2)$ دارای چند درایه است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

پاسخ ۳: ماتریس سطری، فقط یک سطر دارد و مرتبه آن به صورت $1 \times n$ است؛ پس در این سؤال $k - 2$ باید مساوی ۱ باشد و در نتیجه $k = 3$ است؛ بنابراین مرتبه

ماتریس به صورت $A_{1 \times 7}$ است و در نتیجه این ماتریس ۷ درایه دارد.

ماتریس مربعی به ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشد، ماتریس مربعی می‌گویند. بنابراین مرتبه آن به صورت $n \times n$ است. مثلاً ماتریس‌های روبه‌رو همگی مربعی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, C = [2]_{1 \times 1}$$

تذکر: ماتریس 1×1 را با نوشتن خود درایه هم می‌توان نمایش داد. مثلاً به جای $[3]_{1 \times 1}$ خود عدد ۳ را هم می‌توانیم بنویسیم.

نکته: ماتریس مربعی مرتبه $n \times n$ را به اختصار ماتریس مرتبه n هم می‌گوییم، مثلاً ماتریس مرتبه ۴ یعنی ماتریس مربعی مرتبه ۴.

تست: اگر ماتریس $A = [1-i+j^2]_{(3-n)(n+1)}$ مربعی باشد، درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس چند است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ ۴: چون ماتریس مربعی است؛ پس باید تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر باشد، بنابراین $3-n = n+1$ و از حل این معادله $n=1$ به دست می‌آید. یعنی یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ داریم. حالا برای به دست آوردن a_{12} کافی است در فرمول $1-i+j^2$ به جای اعداد ۱ و ۲ به ترتیب ۱ و ۲ قرار دهیم: $a_{12} = 1-i+j^2 = 1-1+2^2 = 4$

قطر اصلی و قطر فرعی در ماتریس مربعی قطر اصلی و قطر فرعی، مطابق شکل روبه‌رو تعریف می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

اگر به ماتریس‌های بالا دقیق‌تر نگاه کنیم، درایه‌های روی قطر اصلی به صورت a_{ii} هستند (مثلاً $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$). درایه‌های روی قطر فرعی به صورت $a_{i(n+1-i)}$ هستند (یعنی جمع سطر و ستون آن‌ها یکی بیشتر از مرتبه ماتریس است، مثل a_{13}, a_{22}, a_{31} و ... در ماتریس بالا). در ماتریس 3×3 ، a_{22} هم روی قطر اصلی و هم روی قطر فرعی است.

نکته:

در درایه‌های بالای قطر اصلی، همیشه $i < j$ است، مثلاً a_{13} .

در درایه‌های روی قطر اصلی، همیشه $i = j$ است، مثلاً a_{22} .

در درایه‌های زیر قطر اصلی، همیشه $i > j$ است، مثلاً a_{31} .

ماتریس بالامثلثی و پایین‌مثلثی ماتریس بالامثلثی: ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های پائین قطر اصلی آن صفرند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ یک ماتریس بالامثلثی مرتبه } 3$$

ماتریس پایین‌مثلثی: ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow B \text{ یک ماتریس پایین‌مثلثی مرتبه } 3$$

تست: اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i \leq j \\ 2i-j & i > j \end{cases}$ تعریف شده باشد، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی کدام است؟

۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

پاسخ ۳: از آنجایی که فقط با درایه‌های بالای قطر اصلی سر و کار داریم، فقط درایه‌هایی که در آن‌ها $i < j$ است را تعیین می‌کنیم؛ یعنی سه درایه زیر:

$$a_{12} = 1+2 = 3, a_{13} = 1+3 = 4, a_{23} = 2+3 = 5$$

$$a_{ij} = i+j \quad (i < j) \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 1+2 = 3 \\ a_{13} = 1+3 = 4 \\ a_{23} = 2+3 = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 12 \text{ است.}$$

بنابراین جمع درایه‌های بالای قطر اصلی برابر ۱۲ است.

تست: در ماتریس $A = [i^2 + j^2]_{3 \times 3}$ ، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی چند برابر مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی است؟

۱۶ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ ۱: راه اول: با فرمول درایه‌ها، ماتریس را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \\ 10 & 13 & 18 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

و مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی و همچنین پایین قطر اصلی هر دو برابر $28 = 10 + 8 + 5$ و بنابراین نسبت مجموع آن‌ها برابر ۱ می‌شود.

راه دوم: دقت کنید که رابطه $i^2 + j^2$ نسبت به i و j متقارن است یعنی به طور مثال مقدار a_{13} و a_{31} و همین‌طور a_{21} و a_{12} با هم برابرند، پس درایه a_{jj} با a_{jj} برابر است. پس مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی با مجموع درایه‌های پایین قطر اصلی برابر هستند و نسبت مجموع آن‌ها برابر ۱ می‌شود.

ماتریس قطری - اسکالر - صفر - همانی چند ماتریس معروف داریم که باید اسم و قیافه آن‌ها را خوب بشناسید، در جدول زیر این‌ها را برایتان آورده‌ایم:

ماتریس همانی	ماتریس اسکالر	ماتریس قطری	ماتریس صفر	تعریف
نوعی ماتریس اسکالر که تمام درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یک‌اند و آن را با I_n نمایش می‌دهیم.	نوعی ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی همگی با هم برابرند.	نوعی ماتریس مربعی که درایه‌های غیر قطر اصلی همگی صفر هستند.	تمامی درایه‌های آن صفر است و آن را با $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.	
$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$	$\bar{O}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{O}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	مثلاً

تست: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-1 & a-1 \\ b & x^2-x \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، $a+b+x$ کدام است؟

۱۴ (۴) صفر

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ ۲: ماتریس اسکالر 2×2 باید به صورت $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ باشد. پس $a-1=b=0$ و $x^2-x=x-1$ از حل این دو معادله به رابطه $b=0$ می‌رسیم و بنابراین $a+b+x=2$ است.

$$a-1=0 \Rightarrow a=1, b=0$$

$$x^2-x=x-1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

$$a+b+x=1+0+1=2$$

اولاً:

ثانیاً:

بنابراین:

تست: برای چند عدد طبیعی یک‌رقمی a و b ماتریس $\begin{bmatrix} a-3b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ همانی می‌شود؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ ۳: برای این که ماتریس همانی شود، باید درایه‌های روی قطر اصلی برابر یک باشند؛ پس:

$$a-3b=1 \Rightarrow a=3b+1$$

$$b=2 \Rightarrow a=3(2)+1=7 \quad \checkmark$$

$$b=3 \Rightarrow a=3(3)+1=10 \quad \times$$

به ازای $b > 4$ هم a دورقمی خواهد بود.

تعریف یک ماتریس به کمک ماتریس‌های دیگر بعضی مواقع ماتریس‌های با مرتبه بالا را می‌توان با استفاده از ماتریس‌های مرتبه پایین‌تر تعریف کرد.

به طور مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [A \quad B]$$

یعنی این که ماتریس C ، ماتریسی از مرتبه 3×5 بوده و به صورت زیر می‌باشد.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$$

تساوی دو ماتریس اگر دو ماتریس مساوی باشند، اولاً باید هم‌مرتبه باشند، ثانیاً باید تمام درایه‌های نظیر به نظیرشان با هم برابر باشد.

به زبان ریاضی اگر $A_{m \times n} = B_{p \times q}$ باشد: اولاً: $n = q, m = p$

ثانیاً: به ازای تمام i و j : $a_{ij} = b_{ij}$

مثلاً اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} c-1 & 1 \\ d+2 & 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b-2 \end{bmatrix}$ با هم برابر باشند، مرتبه دو ماتریس 2×2 است و شرط اول را دارد. حالا شرط دوم، یعنی برابری

تمامی درایه‌ها را می‌نویسیم و از آن‌جا a, b, c و d را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} c-1=0 \\ 1=a \\ d+2=0 \\ 4=b-2 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=6, c=1, d=-2 \xrightarrow{+} a+b+c+d=6$$

تست: اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} x+2y & 2 \\ y^3 & x+1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ y & y-1 \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $x+y$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ ۱: اگر دو ماتریس با هم برابر باشند، باید درایه‌های نظیر به نظیر با هم برابر باشند. بنابراین در این ماتریس باید دستگاه $\begin{cases} x+2y=1 \\ y^3=y \\ x+1=y-1 \end{cases}$ را حل کنیم:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+1=y-1 \end{cases} \Rightarrow y=x+2 \Rightarrow 2y=2x+4 \Rightarrow x+2x+4=1 \Rightarrow 3x+4=1 \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1 \text{ و } y=1$$

و بنابراین $x+y=0$ است.

اعمال مقدماتی روی ماتریس

جمع و تفریق ماتریس برای محاسبه جمع و تفریق بین دو ماتریس باید دو شرط زیر را رعایت کنیم:

۱ دو ماتریس باید هم‌مرتبه باشند. ۲ درایه‌های نظیر به نظیر را با هم جمع یا تفریق کنیم:

مثلاً

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$\oplus$ (بالا) $\oplus$ (پایین) $-1+0=-1$ (پایین)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 3+2 \\ 4+(-1) & (-1)+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A = [i+j]_{2 \times 2}$ و $B = [ij]_{2 \times 2}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A-B$ کدام است؟

-۳ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ ۳: از آنجایی که فقط ستون دوم ماتریس $A-B$ را می‌خواهیم، فقط ستون دوم هر کدام از ماتریس‌های A و B را به کمک درایه عمومی آن‌ها تعیین می‌کنیم:

$$A = [i+j]_{2 \times 2} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 1+2 = 3 \\ a_{22} = 2+2 = 4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \bigcirc & 3 \\ \bigcirc & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = [ij]_{2 \times 2} \Rightarrow \begin{cases} b_{12} = 1 \times 2 = 2 \\ b_{22} = 2 \times 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \bigcirc & 2 \\ \bigcirc & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} \bigcirc & 3 \\ \bigcirc & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bigcirc & 2 \\ \bigcirc & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bigcirc & 1 \\ \bigcirc & 0 \end{bmatrix}$$

$$1+0=1$$

حالا داریم:

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A-B$ برابر است با:

تذکر: در جمع و تفریق بین دو ماتریس می‌توان برای صرفه‌جویی در زمان، ضابطه‌ها را با هم جمع و تفریق کرده و سپس ماتریس نهایی را

به دست آوریم. به طور مثال در این‌جا:

$$A-B = [i+j]_{2 \times 2} - [ij]_{2 \times 2} = [i+j-ij]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \bigcirc & 1 \\ \bigcirc & 0 \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A = [i + j]_{4 \times 4}$ و $B = [ij - 2]_{4 \times 4}$ و ماتریس C را به صورت $C = A + B$ تعریف کنیم، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی C کدام است؟

۴۴ (۴)

۴۲ (۳)

۴۰ (۲)

۳۸ (۱)

پاسخ ۳: چون در نهایت درایه‌های روی قطر اصلی C را می‌خواهیم؛ پس در نوشتن ماتریس A و B برای راحتی کار تنها درایه‌های روی قطر اصلی را می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 4 & & \\ & & 6 & \\ & & & 8 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 7 & \\ & & & 14 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

و حالا با دستور $C = A + B$ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس C را می‌نویسیم:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 6 & & \\ & & 13 & \\ & & & 22 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

و مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر $1 + 6 + 13 + 22 = 42$ است.

تست: اگر $A = [i^2]_{3 \times 3}$ ، $B = [j + 1]_{3 \times 3}$ و $C_{3 \times 3}$ و بدانیم ماتریس $2A - B + C$ (ضرب عدد در ماتریس)، ماتریس همانی است، مجموع درایه‌های

ماتریس C کدام است؟

-۵۴ (۴)

-۴۸ (۳)

-۴۲ (۲)

-۳۸ (۱)

پاسخ ۴: به جای این که تمامی ماتریس‌ها را تشکیل دهیم، کافی است مجموع کل درایه‌های هر ماتریس را حساب کنیم. در ماتریس A سطر اول همه ۱، سطر دوم همگی ۴ و سطر سوم همگی ۹ است، پس جمع درایه‌های A برابر $3(1 + 4 + 9) = 42$ است. در ماتریس B ستون اول ۲، ستون دوم همگی ۳ و ستون سوم همگی ۴ هستند و جمع درایه‌های B هم برابر $3(2 + 3 + 4) = 27$ است. حالا چون ماتریس همانی مرتبه 3×3 ، دارای ۳ درایه ۱ و بقیه صفر هستند، پس مجموع درایه‌های $2A - B + C$ برابر ۳ است؛ پس داریم:

$$2(42) - 27 + (C \text{ مجموع}) = 3 \Rightarrow \frac{84 - 27}{57} + C = 3 \Rightarrow C \text{ مجموع درایه‌های } C = -54$$

چند ویژگی در مورد جمع و تفریق‌ها

۱) $A + B = B + A$ (خاصیت جابه‌جایی)

۲) $k(A \pm B) = kA \pm kB$ ($k \in \mathbb{R}$)

۳) $A + \vec{0} = A$ (خاصیت عضو خنثی در جمع)

۴) $A + (-A) = \vec{0}$ (قرینه ماتریس)

۵) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

ضرب عدد در ماتریس برای ضرب عدد ثابت k در یک ماتریس کافی است تمام درایه‌های ماتریس را در عدد k ضرب کنیم.

$$\frac{-1}{5} \times \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -5 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

مثلاً

$$3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 0 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$$

تست: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ مفروض است، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $3A - 2I$ کدام است؟

-۶ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ ۱: در این جا فقط درایه‌های روی قطر اصلی را بررسی می‌کنیم:

$$3A - 2I = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$1 + (-5) = -4$$

پس:

ضرب ماتریس سطری در ستونی برای یادگرفتن ضرب ماتریس‌ها ابتدا ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی را یاد بگیریم که راحت‌تر است. ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی، به شکل مقابل تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$

همان‌طور که می‌بینید عضوهای متناظر در هم ضرب و سپس، با هم جمع می‌شوند. نمونه‌های زیر را ببینید:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + (-2)(1) + 0(4) = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 3(1) + 4(2) + 5(3) + (-1)(-1) = 27$$

شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس A و B شرط آن که ضرب ماتریسی $A \times B$ تعریف شده باشد آن است که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد.

مثلاً ضرب ماتریس $A_{2 \times 4} \times B_{4 \times 5}$ به صورت $C_{2 \times 5}$ است.

مثلاً ضرب ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ قابل انجام نیست، چون عدد 4، در ماتریس دوم متناظری ندارد که در آن ضرب شود.

تست: اگر $A = [O]_{3 \times 2}$ و $B = [O]_{m \times n}$ و ضرب AB قابل انجام باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

$n = 3$ (۴)

$m = 3$ (۳)

$n = 2$ (۲)

$m = 2$ (۱)

پاسخ: همان‌طور که گفتیم برای ضرب $A_{3 \times 2} \times B_{m \times n}$ باید تعداد ستون‌های A با سطرهای B برابر باشد؛ یعنی $m = 2$. (البته اگر $n = 3$ یا $n = 2$ باشد اشکالی ندارد ولی شرط لازمی نیست، ولی حتماً باید $m = 2$ باشد)

ضرب دو ماتریس

حالا با گفتن شرط لازم ضرب دو ماتریس، به بررسی روش ضرب ماتریس‌ها برمی‌گردیم. کار را با ضرب دو ماتریس 2×2 شروع می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

A B C

برای ضرب، ماتریس اول را سطری و ماتریس دوم را ستونی تقسیم‌بندی می‌کنیم. حالا برای پیدا کردن درایه c_{11} ، سطر اول ماتریس A را در ستون اول ماتریس B ضرب می‌کنیم:

$$c_{11} = (1)(4) + (2)(5) = 14$$

و همین‌طور برای پیدا کردن c_{12} باید سطر اول A را در ستون دوم B ضرب کنیم:

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = (1)(2) + (2)(6) = 14$$

↓ ↓
سطر اول A ستون دوم B

برای پیدا کردن c_{21} باید سطر دوم A را در ستون اول B ضرب کنیم:

$$c_{21} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = (3)(4) + (-1)(5) = 7$$

↓ ↓
سطر دوم A ستون اول B

و در نهایت c_{22} نیز به همین صورت به دست می‌آید:

$$c_{22} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = (3)(2) + (-1)(6) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 12 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= 1(-1) + 2(2) + 3(1) = 6 \\ c_{13} &= 1(0) + 2(4) + 3(-1) = 5 \\ c_{21} &= (-1)(1) + 0(0) + 1(5) = 4 \\ c_{22} &= (-1)(-1) + 0(2) + 1(1) = 2 \\ c_{23} &= (-1)(0) + 0(4) + 1(-1) = -1 \\ c_{31} &= 2(1) + 4(0) + 2(5) = 12 \\ c_{32} &= 2(-1) + 4(2) + 2(1) = 8 \\ c_{33} &= 2(0) + 4(4) + 2(-1) = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= (1)(-1) + 2(0) + (-1)(4) = -5 \\ c_{21} &= 0(1) + 1(2) + 4(-3) = -10 \\ c_{22} &= 0(-1) + 1(0) + 4(4) = 16 \end{aligned}$$

تست: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 3x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ مقدار x کدام است؟

$$\begin{bmatrix} x & 3x & -1 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} x-4 & 5x+1 \end{bmatrix}$$

پاسخ ۲: در گام اول، دو ماتریس سمت چپ را در هم ضرب می‌کنیم و چون مرتبه‌ها 1×3 و 3×2 است؛ پس ماتریس 1×2 خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} x-4 & 5x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 16$$

در گام دوم، حالا مسئله به صورت مقابل است:

که ماتریس سطری را در ستونی ضرب می‌کنیم:

$$2(x-4) + 2(5x+1) = 16 \Rightarrow 3x - 12 + 10x + 2 = 16 \Rightarrow 13x = 26 \Rightarrow x = 2$$

تست: در رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 6 & -3 & -6 \end{bmatrix}$ حاصل مقدار $a_1 - a_2 + b_3$ کدام است؟

پاسخ ۴: برای این که ضرب $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times A$ قابل انجام و جواب، یک ماتریس 3×3 شود باید مرتبه ماتریس A ، 1×3 باشد؛ پس ماتریس A را به صورت $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$

در نظر می‌گیریم و با توجه به سطر دوم، حاصل ضرب x ، y و z را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 6 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

و ماتریس A به صورت $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ است. حالا در ضرب زیر، مقدار a_1 ، a_2 و b_3 را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 6 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} : a_1 = 2(2) = 4$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 6 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} : a_2 = 2(-1) = -2$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 6 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} : b_3 = (-1)(-2) = 2$$

و $a_1 - a_2 + b_3$ برابر $4 - (-2) + 2 = 8$ می‌شود.

درایه خاص C_{ij}

اگر در حاصل ضرب ماتریسی $A \times B = C$ فقط یک درایه خاص مثل C_{ij} را بخواهیم، لازم نیست که تمام حاصل ضرب $A \times B$ را حساب کنیم فقط کافی است که سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم.

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، برای پیدا کردن درایه سطر سوم و ستون دوم ماتریس $C = BA$ ؛ یعنی C_{32} ، لازم نیست تمام حاصل ضرب را حساب کنیم و فقط سطر سوم B را در ستون دوم A ضرب می کنیم:

$$C_{32} = 5(2) + 0(1) + (-1)(-1) = 11$$

نکته: اگر یک درایه از ضرب سه ماتریس مثل درایه سطر اول و ستون سوم ABC را بخواهیم، باز هم لازم نیست که تمام حاصل ضرب را حساب کنیم و فقط $[ستون سوم C] \times [کل ماتریس B] \times [سطر اول A]$ را حساب می کنیم.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ درایه سطر دوم و ستون اول ماتریس BAC کدام است؟

۴-۳

۳-۴

۲-۵

۱-۶

پاسخ ۲: فقط سطر دوم B را در کل ماتریس A و سپس در ستون اول C ضرب می کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 21 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 16 - 21 = -5$$

ستون اول C کل ماتریس A سطر دوم B

خواص ضرب ماتریس ها

در ضرب ماتریس ها هم مانند ضرب اعداد، قوانینی وجود دارد که در زیر به آن ها اشاره می کنیم:

۱ ضرب هر ماتریس در I (ماتریس همانی) خودش می شود؛ یعنی $AI = IA = A$.

۲ ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ندارد؛ یعنی $AB \neq BA$ (مگر آن که A و B تعویض پذیر باشند که در ادامه مفصل بررسی می کنیم). در اعداد می توانیم از حاصل ضرب فاکتور بگیریم. مثلاً $2(x + y) = 2x + 2y$. ولی در ماتریس ها جهت فاکتورگیری مهم است و هم چنین وقتی فاکتور می گیریم نباید ۱ یا عدد بنویسیم و باید به جای ۱ ماتریس I بگذاریم.

۳ از $AB + CA$ نمی توانیم ماتریس A را فاکتور بگیریم، چون باید یا فقط از راست یا فقط از چپ فاکتور بگیریم.

۴ اگر بخواهیم از $AB + 2A$ فاکتور بگیریم به صورت $A(B + 2I)$ می شود.

۵ در ماتریس داریم: $A \times (B \pm C) = AB \pm AC$ ، که به آن خاصیت پخش می گوئیم.

۶ قانون حذف در ماتریس ها برقرار نیست:

۷ اگر $A \times B = \vec{O}$ باشد، نمی توان نتیجه گرفت که A یا B برابر صفر است.

برای مرور نکات این بخش، جدول زیر را دقیق ببینید:

$(I + B)^2 = I^2 + B^2 + 2BI = B^2 + 2B + I$	$AI = IA = A$	عضو خنثی ضرب
$ABC \pm ADC = A(B \pm D) \times C$	$A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$	توزیع پذیری
در حالت کلی $(A + B)(B + A) = A^2 + AB + BA + B^2$	در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$	جابه جایی ضرب
ولی با $A \times (C \times B)$ یا $B \times (A \times C)$ برابر نیستند.	$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (در صورت انجام پذیر بودن ضرب)	خاصیت شرکت پذیری
در فاکتورگیری عدد ۳، ۵ یا ... خالی نداریم و I می گذاریم: $AB + 4A = A(B + 4I)$	$AB + AC = A(B + C)$ (باید فاکتورگیری فقط از راست یا فقط از چپ انجام شود.)	فاکتورگیری

حواستون باشه که بعد از فاکتورگیری نباید عدد مثل ۲، ۳ و ... باقی بماند و اگر مثلاً در عبارت $AB + 3B$ بخواهیم از راست از B فاکتور بگیریم نباید $B(A + 3)$ بنویسیم و برای این که فرم ماتریسی درستی داشته باشد، عدد را به همراه I می نویسیم، مثلاً در همین جا کافیه $B(A + 3I)$ بنویسیم. مثلاً اگر بخواهیم از عبارت $ABC + 4AB$ فاکتور بگیریم، به صورت $AB(C + 4I)$ می شود.

تست: ماتریس $2AB - A^2$ با کدام ماتریس برابر است؟

- (۱) $A(A - 2BI)$ (۲) $A(A - 2B)$ (۳) $(A - 2I)B$ (۴) $(A - 2I)AB$

پاسخ ۱: از سمت چپ از A فاکتور می‌گیریم و به صورت $A(A - 2B)$ نوشته می‌شود و چون I عضو خنثی ضرب است، به صورت $A(A - 2BI)$ هم می‌توان نوشت.

تست: اگر $A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B + I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A + B + AB$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

پاسخ ۱: در این سؤال می‌توانیم A و B را جداگانه حساب کنیم و با جای‌گذاری حاصل $AB + A + B$ را به دست آوریم. ولی راه دوم ضرب $(A + I)(B + I)$ است:

$$\Rightarrow (A + I)(B + I) = AB + B + A + I$$

همین‌طور که می‌بینید، فقط I اضافه است که پس از ضرب کردن $(A + I)(B + I)$ از جواب، یک I کم می‌کنیم تا $AB + B + A$ به دست آید:

$$(A + I)(B + I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = AB + B + A + I$$

$$\Rightarrow AB + B + A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A = [i + j - 1]_{2 \times 2}$ ، B و C ماتریس‌های مرتبه ۲ باشند و $BC = 2I$ ، ماتریس حاصل عبارت $(AB - B)(C + CA)$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 16 & 24 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 24 & 16 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 24 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$

پاسخ ۱: ابتدا عبارت $(AB - B)(C + CA)$ را ساده می‌کنیم، پراگمتر $(AB - B)$ را به صورت $(A - I)B$ و پراگمتر $(C + CA)$ را به صورت $C(I + A)$ می‌نویسیم:

$$(AB - B)(C + CA) = (A - I)2I(I + A) = 2(A - I)(I + A)$$

حالا ماتریس A را تشکیل می‌دهیم و دو ماتریس $I + A$ و $A - I$ را می‌سازیم و در هم ضرب می‌کنیم:

$$A = [i + j - 1]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2(A + I)(A - I) = 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 16 & 24 \end{bmatrix}$$

به توان رساندن ماتریس‌ها اگر A یک ماتریس مربعی باشد، $A \times A$ برابر A^2 است. توان‌های بعدی ماتریس هم به همین صورت به دست می‌آید، مثلاً برای محاسبه A^3 کافی است A را در A^2 یا A^2 را در A ضرب کنیم (فرقی نمی‌کند) $A^3 = A \times A^2 = A^2 \times A$. به همین ترتیب A^n هم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$$

خواستون باشد که برای محاسبه A^7 تنها راه، محاسبه $A \times A^6$ یا $A^6 \times A$ نیست و مثلاً می‌توان از $A^2 \times A^5$ ، $A^3 \times A^4$ یا $A^4 \times A^3$ استفاده کرد.

$$A^{m+n} = A^m \times A^n = A^n \times A^m$$

در حالت کلی برای محاسبه توان‌های ماتریس A ، ابتدا A^2 را حساب می‌کنیم، بعد در A ضرب می‌کنیم تا A^3 به دست آید، مثلاً اگر A^5 را می‌خواستیم، می‌توانیم A^2 را در A^3 ضرب کنیم یا ابتدا A^2 را به توان ۲ برسانیم تا A^4 به دست آید و سپس آن را در A ضرب کنیم. انتخاب روش مناسب بستگی به مسئله دارد که کدام روش راحت‌تر و سریع‌تر است.

تست: اگر $A = [2i - j]_{3 \times 3}$ مجموع درایه‌های A^2 کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۶۸ (۳) ۷۲ (۴) ۷۶

پاسخ ۳: ابتدا ماتریس A را به کمک درایه عمومی آن می‌نویسیم: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ و حالا $A \times A$ را حساب می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 72$$

نکته: ۱ به توان رساندن ماتریس‌های قطری و اسکالر بسیار ساده است، کافی است درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم:

$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$	به توان رساندن ماتریس قطری
$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} k^n & 0 & 0 \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & 0 & k^n \end{bmatrix}$	به توان رساندن ماتریس اسکالر

۲ در ماتریس‌های بالامتثلی و پایین‌متثلی هم درایه‌های روی قطر اصلی به توان می‌رسند ولی بقیه درایه‌ها هم تغییر می‌کنند.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های قطر اصلی A^3 کدام است؟

۵۷ (۴)

۵۵ (۳)

۵۳ (۲)

۵۱ (۱)

پاسخ: ۴ چون ماتریس متثلی است بنابراین، برای توان ۳ درایه‌های روی قطر اصلی را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$A^3 = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} \Rightarrow -8 + 1 + 64 = 57$$

ماتریس خودتوان

بعضی ماتریس‌ها به هر توانی برسند، برابر خودشان می‌شوند. معروف‌ترین آن‌ها I یا ماتریس همانی است.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow I^r = I$$

مثلاً در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A^2 = A$ هم به صورت $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ است و $A^r = A$ و به A خودتوان می‌گوییم.

$$A^r = A \Rightarrow A^n = A$$

نکته: اگر $A^r = A$ باشد، آن‌گاه هر توانی از A هم برابر خودش می‌شود:

ماتریس پوچ‌توان

اگر ماتریس A در یک توانی به ماتریس صفر برسد، به آن ماتریس پوچ‌توان می‌گوییم. برای مثال ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ اگر به توان ۲ برسد به ماتریس صفر $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ می‌رسیم و به آن پوچ‌توان می‌گوییم.

یک ماتریس پوچ‌توان معروف

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \bar{O}$$

محاسبه توان ماتریس‌های متناوب و خاص

اگر در یک تست، توان‌های بالای یک ماتریس خواسته شده بود، واضح است که نباید از راه معمولی حل کرد. باید دنبال یک رابطه خاص بگردید. یعنی A^3 (و گاهی اوقات A^4) را حساب کنید تا به یک رابطه خوب برسید. برای حل تست‌های این قسمت دانستن نکات زیر به دردتان می‌خورد.

۱	اگر A^2 را حساب کردید و به I یا $-I$ رسیدید، آن‌گاه:
۲	اگر A^2 یا A^3 ، ماتریس صفر شد، برای $n \geq 3$: $A^n = \bar{O}$
۳	اگر A^2 را حساب کردید و ضربی از خود ماتریس شد (یعنی $A^2 = KA$)، در این حالت $A^3 = K^2A$ و $A^4 = K^3A$ (و در کل $A^n = K^{n-1}A$)
۴	با محاسبه توان ۲ یا ۳ به یک رابطه رسیدیم که براساس آن توان A^n را حدس می‌زنیم و الگویابی می‌کنیم.

مثلاً ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. (که قبلاً به صورت $I + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ نوشتیم و با اتحادها به توان ۳ رساندیم.) حالا A^2 و A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر به اعدادی که دور آن‌ها خط کشیده شده دقت کنید، الگوی این ماتریس را پیدا می‌کنیم. درایه‌های روی قطر اصلی ۱ و درایه سطر اول و ستون دوم برابر $2n$ است؛ پس می‌توان الگوی A^n را پیدا کرد:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در جدول زیر چندتا از مهم‌ها و معروف‌هایشان را برایتان دسته‌بندی کرده‌ایم:

نمونه	A^n	A^2	A^3	A
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^9 = \begin{bmatrix} 1 & 27 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$A^2 = I \Rightarrow A^{2 \times 0} + A^{2 \times 1} = I + A$	$\begin{cases} A^{2K} = I \\ A^{2K+1} = A \end{cases}$	$I \Rightarrow$	$A \Rightarrow$	$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 3A$ $\Rightarrow A^n = 3^{n-1}A$	$A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$ $A^n = 3^{n-1}A$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$	$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 0 & \tan \theta \\ -\cot \theta & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = I$ $\Rightarrow A^5 = A, A^6 = A^2 = -I$	$A^2 = I$	$-A \Rightarrow$		$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 2A$ $\Rightarrow A^5 = \begin{bmatrix} 2^4 & -2^4 \\ -2^4 & 2^4 \end{bmatrix}$	$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$	$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، n کدام است؟

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۳ (۱)

پاسخ ۳: هم می‌توانیم A^2 ، A^3 و الگوی آن‌ها را پیدا کنیم و هم از ماتریس معروف $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ استفاده کنیم که توان n آن به صورت $\begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است. پس در این مسئله که $a = 4$ است، داریم:

$$4n = 20 \Rightarrow n = 5$$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & \tan 15^\circ \\ \cot 15^\circ & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $(2I + A)(2I - A)(I + A^2)$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

صفر (۱)

پاسخ ۴: ماتریس A را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^2 = I$$

حالا عبارت سؤال را ضرب می‌کنیم و به جای A^2 ماتریس I می‌نویسیم:

$$(2I + A)(2I - A)(I + A^2) = (2I - A^2)(I + A^2) = 2I \times 2I = 4I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} : 4 + 4 = 8$$

تست: اگر $A^3 = I$ باشد، A^{23} با کدام ماتریس برابر است؟

A^2 (۴)

A (۳)

$-I$ (۲)

I (۱)

$$A^3 = I \begin{cases} \xrightarrow{\times A} A^6 = A \\ \xrightarrow{\times A^2} A^9 = A^2 \end{cases}$$

پاسخ ۴: چون A^3 برابر I است، اگر طرفین را یک بار در A و بار دیگر در A^2 ضرب کنیم، داریم:

$$A^n = \begin{cases} A & n = 3k + 1 \\ A^2 & n = 3k + 2 \\ I & n = 3k \end{cases}$$

به همین طریق با محاسبه، $A^6 = I$ می‌شود و $A^9 = A$ و $A^{12} = A^2$ به یک الگو می‌رسیم:

بنابراین A^{23} برابر A^2 است.

تست: اگر $A^6 = -I$ باشد، ماتریس A^{37} با کدام ماتریس برابر است؟

A^5 (۴)

A^4 (۳)

A^3 (۲)

A (۱)

پاسخ ۳: چون $A^6 = -I$ است، پس $A^{12} = I$ و در نتیجه $A^{12k} = I$ است و بنابراین با ضرب در A ، A^2 و ... و A^5 رابطه‌های زیر می‌رسیم:

$$A^{12k+1} = A, A^{12k+2} = A^2, A^{12k+3} = A^3, \dots, A^{12k+5} = A^5$$

و چون باقی‌مانده ۳۷ بر ۱۲ برابر ۵ است، بنابراین A^{37} برابر A^5 است.

رابطه کیلی - همیلتون در ماتریس‌های 2×2 اگر بخواهیم توان‌های بالای یک ماتریس را برحسب A و I حساب کنیم، می‌توانیم از دستور زیر استفاده کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$$

مثلاً فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، حالا بدون محاسبه A^2 و با کمک دستور بالا، رابطه بین A^2 و A و I را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = (1+3)A - (1 \times 3 - 2 \times 0)I \Rightarrow A^2 = 4A - 3I$$

البته دقت کنید که فقط برای A^2 استفاده نمی‌شود و با این روش می‌توانیم A^3 ، A^4 و ... را هم برحسب A و I حساب کنیم.

در همین مثال بالا که $A^2 = 4A - 3I$ بود، اگر طرفین را در A ضرب کنیم، داریم:

$$A^2 = 4A - 3I \xrightarrow{\times A} A^3 = 4A^2 - 3AI = 16A - 12I - 3A = 13A - 12I$$

به این ترتیب A^3 برحسب A و I حساب شد، دوباره اگر همین را در A ضرب کنیم به رابطه A^4 می‌رسیم:

$$A^3 = 13A - 12I \xrightarrow{\times A} A^4 = 13A^2 - 12A = 52A - 39I - 12A = 40A - 39I$$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = aA + bI$ ، مقدار $a - b$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۷ (۲)

۱۵ (۱)

$$A^2 = (1+4)A - (4 \times 1 - 2 \times 3)I \Rightarrow A^2 = 5A + 2I$$

پاسخ ۲: ابتدا از رابطه کیلی - همیلتون A^2 را برحسب A و I حساب می‌کنیم:

حالا طرفین را در A ضرب می‌کنیم تا A^3 را بسازیم:

$$\xrightarrow{\times A} A^3 = 5A^2 + 2A$$

$$\Rightarrow A^3 = 25A + 10I + 2A = 27A + 10I \Rightarrow \begin{cases} a = 27 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow a - b = 17$$

و به جای A^2 دوباره $5A + 2I$ جای‌گذاری می‌کنیم و عبارت را ساده می‌کنیم:

ماتریس‌های تعویض‌پذیر و اتحادها

در حالت کلی $AB \neq BA$ است ولی برای بعضی از ماتریس‌ها رابطه $AB = BA$ برقرار است که به آن‌ها ماتریس‌های تعویض‌پذیر می‌گوییم.

$A(kI) = (kI)A = kA$	ماتریس I_n (همانی) و kI_n (اسکالر) با هر ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ تعویض‌پذیر هستند.
$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & by & 0 \\ 0 & 0 & cz \end{bmatrix}$	ضرب دو ماتریس قطری، همواره تعویض‌پذیر است.
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$	دو ماتریس روبه‌رو به شرط $\frac{a-d}{x-t} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ تعویض‌پذیرند.

تست: اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ در رابطه $AB = BA$ صدق کنند، $a + b$ کدام است؟

(۱) ۲+ (۲) ۳+ (۳) ۴+ (۴) ۵+

پاسخ ۲: از رابطه $AB = BA$ ، می‌فهمیم که A و B تعویض‌پذیر هستند. حالا کافی است رابطه «نسبت تفاضل قطر اصلی‌ها برابر نسبت درایه‌های نظیر به نظیر روی قطر اصلی» را بنویسیم البته از این جمله نترسید، همان $\frac{a-d}{x-t} = \frac{c}{z} = \frac{b}{y}$ است: $\frac{1-3}{0-4} = \frac{a}{-2} = \frac{2}{b} \Rightarrow a = -1, b = 4 \Rightarrow a + b = +3$ جای‌گذاری

اتحادها و ماتریس‌ها اگر ماتریس B و A تعویض‌پذیر باشند، می‌توانیم از اتحادهای جبری در ضرب و توان‌های آن‌ها استفاده کنیم، به مثال‌های زیر دقت کنید:

اگر B و A تعویض‌پذیر باشند.
$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$
$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$
$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$
$(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$

$AB \neq BA$ اگر تعویض‌پذیر نبودند.
$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$
$(A - B)(A + B) = A^2 - BA + AB - B^2$
خیلی طولانی! $(A + B)^3 = (A + B)(A^2 + B^2 + AB + BA) = \dots$
$(A + B)^2 - (A - B)^2 = 2AB + 2BA$

یادآوری: I (ماتریس همانی) با هر ماتریسی تعویض‌پذیر است و بنابراین اتحادهای ماتریسی بین A و I همیشه درست است.

مثلاً

$$(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$$

$$(A + I)^4 = A^4 + \binom{4}{1}A^3 + \binom{4}{2}A^2 + \binom{4}{3}A + I$$

$$(A + I)^5 = A^5 + \binom{5}{1}A^4 + \binom{5}{2}A^3 + \binom{5}{3}A^2 + \binom{5}{4}A + I$$

یادآوری: ممکن است اتحاد $(a + b)^n$ یادتان رفته باشد، پس بد نیست که مرور کنیم:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های $(A + I)^3$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

پاسخ ۴: در حل این تست می‌توانیم $A + I$ را تشکیل بدهیم و به توان ۳ برسانیم و چون ماتریس 2×2 است، راه سختی هم نیست. ولی می‌خواهیم این تست را از روش اتحادها حل کنیم، ابتدا دقت کنید که A پوچ‌توان از مرتبه ۲ است. (یعنی $A^2 = \bar{O}$)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$$

حالا از اتحادها داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 + 0 + 6 + 1 = 8$$

و A^3 و A^2 ماتریس صفر هستند؛ پس کافی است $3A + I$ را حساب کنیم:

تست: اگر برای دو ماتریس 2×2 ، A و B داشته باشیم $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ، آن‌گاه حاصل $((B \times A) \times B^{-1})^2$ کدام است؟

(۱) A^2 (۲) B^2 (۳) A^2B (۴) BA^2

پاسخ ۱: می‌دانیم اگر A و B تعویض‌پذیر باشند، اتحادها برقرار می‌شود؛ بنابراین با توجه به فرض مسئله می‌توان گفت: $AB = BA$ حال به سراغ حکم مسئله می‌رویم:

$$((B \times A) \times B^{-1})^2 = (A \times B \times B^{-1})^2 = (A \times I)^2 = A^2$$

پاسخ نامہ تشریحی



۱) اگر $x = 2$ باشد، آن وقت رابطه $x^2 \geq y$ به $4 \geq y$ تبدیل می‌شود که به ازای $y = 4$ برقرار است. یعنی فقط زوج مرتب $(2, 4)$ را در این حالت داریم.
۲) اگر $x = 3$ باشد، آن وقت رابطه $x^2 \geq y$ به $9 \geq y$ تبدیل می‌شود که به ازای $y = 4, 5, 6$ برقرار است. یعنی ۳ زوج مرتب $(3, 4), (3, 5), (3, 6)$ را در این حالت داریم.
پس رابطه R به شکل زیر است و ۴ عضو دارد:

$$R = \{(2, 4), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

۱. ۲ باید در رابطه $|x| + |y| = 2$ جای x و y اعداد صحیح قرار دهیم:
 $1) |x| + |y| = 2 \xrightarrow{x=2} 2 + |y| = 2 \Rightarrow |y| = 0 \Rightarrow y = 0 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (2, 0)$
 $2) |x| + |y| = 2 \xrightarrow{x=1} 1 + |y| = 2 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (1, 1), (1, -1)$
 $3) |x| + |y| = 2 \xrightarrow{x=0} 0 + |y| = 2 \Rightarrow |y| = 2 \Rightarrow y = \pm 2 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (0, 2), (0, -2)$
 $4) |x| + |y| = 2 \xrightarrow{x=-1} 1 + |y| = 2 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (-1, 1), (-1, -1)$
 $5) |x| + |y| = 2 \xrightarrow{x=-2} 2 + |y| = 2 \Rightarrow |y| = 0 \Rightarrow y = 0 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (-2, 0)$

پس در کل، شامل ۸ زوج مرتب است.

۳. همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ مثلاً به عدد ۳، دو مقدار ۱ و ۳ را نسبت می‌دهد. پس تابع نیست.

۲ مثلاً به ۴، دو مقدار ۲ و -۲ را نسبت می‌دهد. پس تابع نیست.

۳ به اعداد ۲، ۳ و ۴، به ترتیب ۴، ۹ و ۱۶ را نسبت می‌دهد. یعنی به هر ورودی، دقیقاً یک خروجی؛ پس تابع است.

۴ مثلاً به علی، دوستانش را نسبت می‌دهد (محمد، قلی، ...)؛ پس تابع نیست.

۴. چون تابع به صورت یک نقطه است، پس مختصات هر دو زوج مرتب یکسان است. هم‌چنین چون نقطه روی محور x ‌ها قرار دارد، پس عرضش صفر است:

$$f = \{(a+b, 1-a), (6-c, a-1)\}$$

صفر صفر

$$1-a=0 \Rightarrow a=1 \quad a-b=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow b=1$$

$$a+b=6-c \xrightarrow{a=b=1} 2=6-c \Rightarrow c=4$$

۵. ۴ ۱ از $(y-1)(x+2)=0$ به $y=1$ یا $x=-2$ می‌رسیم که نمودارش به صورت مقابل است:

با توجه به خط $x=-2$ ، این رابطه تابع نیست.

۲ در رابطه $|y|=x$ ، اگر $x=1$ بدهیم، دو خروجی $y=1$ و $y=-1$ را داریم؛ پس تابع نیست.

۳ خط عمودی $x=0$ ، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.

۴ هیچ خط عمودی پیدا نمی‌شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، پس تابع است.

۶. ۲ در دو زوج مرتب $(3, m+2)$ و $(3, m^2)$ ، مؤلفه‌های اول برابرند، پس مؤلفه‌های دوم هم باید برابر باشند:

$$m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \checkmark \\ m = 2 \times \end{cases}$$

به ازای $m=2$ ، دو زوج مرتب $(2, 4)$ و $(2, 1)$ را داریم که باعث می‌شود رابطه، تابع نباشد.

۷. ۳ مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(2a+3b)$ و $(2, b+10)$ برابرند، پس مؤلفه‌های دومشان نیز باید برابر باشند:

$$2a+3b=b+10 \Rightarrow 2a+2b=10 \xrightarrow{\div 2} a+b=5$$

مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(-1, 2a)$ و $(-1, \frac{6}{b})$ برابرند، پس مؤلفه‌های دومشان نیز باید برابر باشند:

$$2a = \frac{6}{b} \Rightarrow ab=3$$

حالا با داشتن $a+b=5$ و $ab=3$ ، مقدار a^3+b^3 را حساب می‌کنیم:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=5^3-3(3)(5)=125-45=80$$

۸. ۱ در ۱، اگر از دو طرف، فرجه سوم بگیریم، داریم: $y = \sqrt[3]{x^3}$

که این رابطه تابع است، چون y کاملاً تنها شد. برای سه گزینه دیگر، مثال نقض می‌زنیم:

$$2) y^2 = x \xrightarrow{x=1} y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

تابع نیست. $\Rightarrow$ خروجی

$$3) |y| = 2x+1 \xrightarrow{x=1} |y| = 3$$

تابع نیست. $\Rightarrow$ خروجی

$$4) |y|=|x| \xrightarrow{x=1} |y|=1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow$$

۹. ۲ تابع است:

$$y^4 + x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow y^4 + (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

چون هر دو عبارت y^4 و $(x-1)^2$ نامنفی هستند، پس جمعشان زمانی صفر می‌شود که هر دو صفر باشند.

پس این رابطه ترسناک، نمایش یک نقطه است! $A = (1, 0)$

برای سه گزینه دیگر، مثال نقض می‌زنیم:

$$1) [y] = x+1 \xrightarrow{x=0} y = 1, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \dots$$

$$3) \sin y = x + \cos x \xrightarrow{x=0} \sin y = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

$$4) y^3 - y = x \xrightarrow{x=0} y^3 - y = 0 \Rightarrow y(y^2-1)=0 \Rightarrow y=0, \pm 1$$

۱۰. ۲ برای گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ مثال نقض می‌زنیم:

$$1) y^3 - 3y^2 + x = 0 \xrightarrow{x=0} y^3 - 3y^2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2(y-3)=0 \Rightarrow y=0, 3 \Rightarrow$$

$$3) |y-1| + x = 0 \xrightarrow{x=-1} |y-1| = 1 \Rightarrow y=0, 2 \Rightarrow$$

$$4) xy^2 - x = 1 \xrightarrow{x=1} y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$$

برای اثبات تابع بودن ۲، باید جای x و y را عوض کنیم و ثابت کنیم وارونش، یک‌به‌یک است.

$$y + y^3 = x^3 + 1 \xrightarrow{\text{تعویض}} x + x^3 = y^3 + 1$$

$$\Rightarrow y^3 = x^3 + x - 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + x - 1}$$

حالا باید عبارت $x^3 + x - 1$ را تحلیل کنیم:

$$\underbrace{x^3 + x - 1}_{\text{صعودی اکید}} \quad \underbrace{x^3 + x - 1}_{\text{صعودی اکید}}$$

مجموع دو تابع صعودی اکید، تابعی صعودی اکید است و ریشه سوم هر تابع

صعودی اکید نیز تابعی صعودی اکید و در نتیجه، تابعی یک‌به‌یک است.

$$1) y + \sqrt{4y^3 - 4y^2 - 1} = |x|$$

$$\Rightarrow y + \sqrt{-(4y^2 - 4y + 1)} = |x| \Rightarrow y + \sqrt{-(2y-1)^2} = |x|$$

چون $\sqrt{y} + 1 \geq 0$ ، پس قدرمطلق را برمی داریم:

$$\sqrt{y} + 1 = \sqrt{3x+1} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{3x+1} - 1$$

$$\Rightarrow y = (\sqrt{3x+1} - 1)^2 \Rightarrow y \text{ تنها شد.}$$

۱۳. **۴** دوتا مربع کامل باید بسازیم.

$$9x^2 - 6x + y^2 + 8y + k = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{9x^2 - 6x + 1}_{(3x-1)^2} + \underbrace{y^2 + 8y + 16}_{(y+4)^2} + k = 0$$

$$\Rightarrow (3x-1)^2 + (y+4)^2 = 17-k$$

فقط اگر $17-k$ صفر باشد این رابطه یک تابع غیرتهی می شود:

$$17-k=0 \Rightarrow k=17$$

دقت کنید اگر $17-k > 0$ برای یک ورودی، بیشتر از یک خروجی داشتیم که تابع بودن در تناقض بود. اگر $17-k < 0$ ، مجموعه جواب تهی می شود.

۱۴. **۳** راه اول: تعداد توابع از یک مجموعه Ω عضوی به یک مجموعه m عضوی، m^n است.

در این جا، مجموعه A ، ۴ عضو و B ، ۳ عضو دارد، پس تعداد توابع از A به B برابر با 3^4 است.

راه دوم: دامنه را از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ می گیریم:

$$\{(1,), (2,), (3,), (4,)\}$$

برای هر جای خالی، ۳ حالت داریم (a یا b یا c):

$$\{(1, \downarrow), (2, \downarrow), (3, \downarrow), (4, \downarrow)\}$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

۱۵. **۲** اگر تابع راجع مرتبی ببینیم، مؤلفه های اولش راز $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\{(1,), (2,), (3,), (4,), (5,)\}$$

می گیرد.

باید جلوی عدد ۲، a را بنویسیم و جلوی عدد ۴، c را بنویسیم:

$$\{(1, \downarrow), (2, a), (3, \downarrow), (4, c), (5, \downarrow)\}$$

$$5^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

۱۶. **۴** از هر ۳ عضو دامنه باید استفاده شود.

$$\{(1,), (2,), (3,)\}$$

قیافه کلی تابع به صورت روبه رو است:

برد این تابع حداکثر ۳ عضو می تواند داشته باشد، یعنی ۱ یا ۲ یا ۳ عضو.

تعداد کل توابعی که می توانیم بنویسیم، 4^3 است.

توابعی که بردشان یک عضو دارد را می نویسیم:

$$\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}, \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\},$$

$$\{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}, \{(1, 7), (2, 7), (3, 7)\}$$

تعداد این توابع، ۴ تا شد. پس طبق اصل ممتهم داریم:

$$(تعداد کل توابع) = تعداد توابعی که بردشان ۲ یا ۳ عضو دارد$$

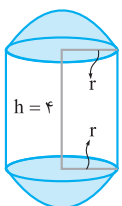
$$6 = 4^3 - (تعداد توابعی که بردشان ۱ عضو دارد)$$

۱۷. **۳** مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی از رابطه $(n-2) \times 180^\circ$ به دست می آید، پس ضابطه f به صورت $f(n) = (n-2) \times 180^\circ$ است و داریم:

$$f(6) = (6-2) \times 180^\circ = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

۱۸. **۱** یک شکل تقریبی رسم می کنیم.

حجم کل شکل از ۳ قسمت تشکیل شده است:

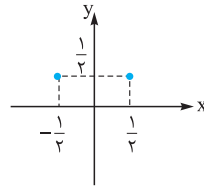


$$\text{حجم استوانه} + \text{حجم نیم کره پایین} + \text{حجم نیم کره بالا} = \text{حجم کل}$$

$$\Rightarrow V = V_{\text{کره}} + V_{\text{استوانه}} = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$

$$\xrightarrow{h=4} V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2$$

با توجه به عبارت $\sqrt{-(2y-1)^2}$ ، y فقط می تواند $\frac{1}{2}$ باشد: $\frac{1}{2} = |x|$



پس به ازای $\frac{1}{2}$ ، y ، دو مقدار برای x داریم.

$$x = \frac{1}{2} \text{ و دیگری } x = -\frac{1}{2}$$

نمودارش ۲ نقطه است که تابع هم می باشد:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow y = x \Rightarrow \text{تابع است.}$$

۳ در رابطه $\sqrt{1-y} + \sqrt{2y-2} + y^2 = x$ ، با توجه به رادیکال ها، ابتدا محدوده y را پیدا می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 1-y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1 \\ 2y-2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} y = 1$$

پس فقط $y = 1$ در رابطه صدق می کند:

$$\sqrt{1-y} + \sqrt{2y-2} + y^2 = x \xrightarrow{y=1} x = 1$$

این رابطه هم، یک نقطه است: $A(1, 1) \Leftarrow$ تابع است.

$$\mathbf{4} \quad x^2 + y^4 - 4y^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + (y^2 - 2)^2 = 0$$

چون هر دو عبارت x^2 و $(y^2 - 2)^2$ نامنفی هستند، پس جمعشان زمانی صفر می شود که هر دو صفر باشند:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{دو خروجی}$$

۱۲. **۴** برای تابع نبودن **۴**، راحت می توانیم مثال نقض بزنیم.

اگر $x = 0$ را در تساوی $y - 2\sqrt{y} = 3x$ قرار دهیم، دوتا خروجی به ما می دهد.

$$y - 2\sqrt{y} = 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{y} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2 = 4y$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y(y-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

پس این رابطه، تابع نیست.

برای تأیید تابع بودن گزینه های **۱** و **۲**، باید یک حرکت زیرکانه بزنیم!

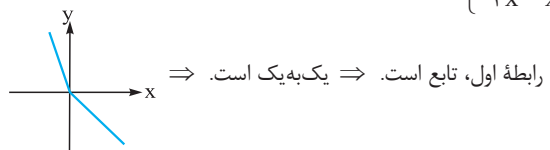
جای x و y نشان را عوض می کنیم تا وارونشان به دست آید. اگر وارونشان، یک به یک بود، پس خودشان تابع هستند!

$$\mathbf{1} \quad 2y + |y| = 3x \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ و } y} 3y = 2x + |x|$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x + |x|}{3} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \frac{x}{3} & x < 0 \end{cases}$$

رابطه اول، تابع است. $\Rightarrow$ یک به یک است.

$$\mathbf{2} \quad -2y + |y| = x \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ و } y} y = -2x + |x| = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ -3x & x < 0 \end{cases}$$



رابطه اول، تابع است. $\Rightarrow$ یک به یک است.

۳ در رابطه $y + 2\sqrt{y} = 3x$ ، با اضافه کردن عدد ۱ به دو طرف، سمت چپ

$$y + 2\sqrt{y} + 1 = 3x + 1 \Rightarrow (\sqrt{y} + 1)^2 = 3x + 1$$

$$\Rightarrow |\sqrt{y} + 1| = \sqrt{3x + 1}$$

حالا $V(r)$ را به $4\pi r^2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{V(r)}{4\pi r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{\pi r^2(\frac{r}{3} + 1)}{\pi r^2} = \frac{r}{3} + 1 = \frac{r+3}{3}$$

۱۹. ۱ مختصات A به صورت (x, y) است.

چون قرار است حجم را برحسب y بنویسیم، پس جای x ، $\frac{1}{y}$ می‌نویسیم: $A(\frac{1}{y}, y)$

شکل حاصل از دوران مستطیل رنگی، حول محور x ها یک استوانه است.

حجم استوانه را برحسب y می‌نویسیم:

$$V = \pi r^2 h = \pi(y)^2(\frac{1}{y}) = \pi y$$

$$V(y) = \pi y$$

پس:

۲۰. ۲ عرض را x می‌گیریم.

طول، ۴ برابر عرض یعنی $4x$ است. مساحت را برحسب x می‌نویسیم:

$$S = (4x)(x) = 4x^2$$

حالا از رابطه $S = 4x^2$ ، باید x را برحسب S بنویسیم:

$$4x^2 = S \Rightarrow x^2 = \frac{S}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{S}}{2}$$

۲۱. ۴ چون M روی سهمی $y = 4 - x^2$

است، پس مختصاتش به صورت $(x, 4 - x^2)$ است.

طول و عرض مستطیل را برحسب x می‌نویسیم:

$$2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$$

$$f(x) = 8x - 2x^3$$

پس:

۲۲. ۴ فاصله نقطه $A(x, y)$ تا مبدأ، برابر با شعاع (یعنی ۱) است:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \xrightarrow{y > 0} y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$S = \frac{y \times x}{2} = y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$S(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

پس:

۲۳. ۳ شکل فرضی می‌کشیم:

معادله خط گذرنده از نقطه $(2, 0)$ با شیب a را

$$y - 0 = a(x - 2) \Rightarrow y = ax - 2a$$

پس عرض از مبدأ این خط، $-2a$ است:

مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{|\text{طول از مبدأ} \times \text{عرض از مبدأ}|}{2}$$

$$= \frac{|(-2a)(2)|}{2} = |2a| = 2a \Rightarrow S(a) = 2a$$

اشاره: با توجه به داده‌های مسئله، باید شیب خط، عددی مثبت باشد.

۲۴. ۱ دو نقطه از این خط را داریم:

برای این که x نقطه B با x معادله خط قاطی نشود، جایش a می‌نویسیم:

$$B(a, 0)$$

$$m = \frac{0 - 5}{a - 3} = \frac{5}{3 - a}$$

شیب خط گذرنده از این دو نقطه را حساب می‌کنیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = \frac{5}{3 - a}(x - 3)$$

برای به دست آوردن مساحت مثلث قائم‌الزاویه

روبه‌رو، نیاز به عرض از مبدأ خط داریم:

برای به دست آوردن b ، کافی است $x = 0$ را جای‌گذاری کنیم:

$$y - 5 = \frac{5}{3 - a}(x - 3) \xrightarrow{x=0} y - 5 = \frac{-15}{3 - a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-15}{3 - a} + 5 \Rightarrow y = \frac{-5a}{3 - a} \Rightarrow b = \frac{-5a}{3 - a}$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot (\frac{-5a}{3 - a})}{2} = \frac{5a^2}{2(a - 3)}$$

پس:

$$S(x) = \frac{5x^2}{2(x - 3)}$$

در نهایت باید جای a ، x بنویسیم:

۲۵. ۲ ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(|x| - x)} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

نمودار f به این شکل می‌شود:

روی هر ضابطه یک نقطه پارامتری مشخص کردیم.

فاصله A تا مبدأ برابر است با:

$$OA = \sqrt{(x - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{x^2} = |x| \xrightarrow{x_A \geq 0} x$$

فاصله B تا مبدأ برابر است با:

$$OB = \sqrt{(x - 0)^2 + (\sqrt{-x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - x}$$

به ازای $x \geq 0$ ، این فاصله برابر با $|x|$ یا همان x و به ازای $x < 0$ ، این فاصله

برابر با $\sqrt{x^2 - x}$ است. این فاصله‌ها را به شکل یک تابع دوطرفه‌ای می‌نویسیم:

$$d(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - x} & x < 0 \end{cases}$$

۲۶. ۲ مختصات A به صورت $(x, \frac{1}{x})$ است:

اندازه OA را با فیثاغورس پیدا می‌کنیم:

$$OA = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x}$$

ما دنبال ارتفاع وارد بر وتر در مثلث OAH هستیم:

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر از

رابطه حاصل‌ضرب دوطرفه قائمه $h = \frac{\text{وتر}}{\text{وتر}}$ به دست

می‌آید، پس در این جا داریم:

$$h = \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x}} = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}} \Rightarrow h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

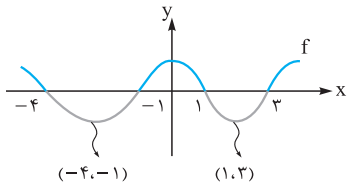
۲۷. ۴ قطر مستطیل را x می‌گیریم و

طول و عرض را برحسب آن می‌نویسیم:

$$\triangle OBC: y^2 + z^2 = 36 \Rightarrow z^2 = 36 - y^2$$

$$\triangle ABC: (2y)^2 + z^2 = x^2 \Rightarrow z^2 = x^2 - 4y^2$$

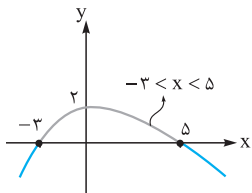
۳۲. ۲ $f(x) < 0$ ، یعنی قسمت‌هایی که زیر محور x ‌ها هستند:



برای قسمت‌هایی که نمودار مقابل محور x ‌هاست، محدوده x ‌شان را می‌نویسیم: $(-4, -1) \cup (1, 3)$
این محدوده شامل عدد ۳ صحیح است:
 $\{-3, -2, 2\}$

اشاره: دو سر بازه‌ها باز است، چون $f(x) < 0$ را می‌خواستیم و در نقاط انتهایی بازه $f(x) = 0$ است، چون محل برخورد با محور x ‌هاست.

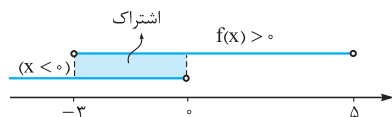
۳۳. ۲ اول قسمت‌های $f(x) > 0$ را روی



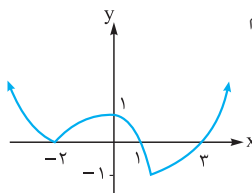
شکل مشخص می‌کنیم.
برای آن که $f(x) > 0$ باشد، باید نمودار بالای محور x باشد:

حالا بین دو شرط $x < 0$ و $f(x) > 0$ اشتراک می‌گیریم:

$$(x < 0) \cap (f(x) > 0) = (-\infty, 0) \cap (-3, 5) = (-3, 0)$$



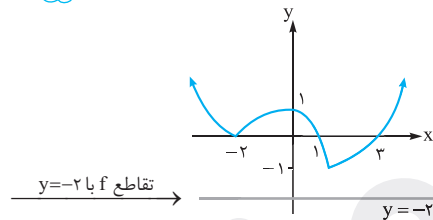
۳۴. ۱ اول جای $f(f(x)) = 0$ می‌نویسیم



با توجه به شکل، می‌تواند -2 ، 1 و 3 باشد:

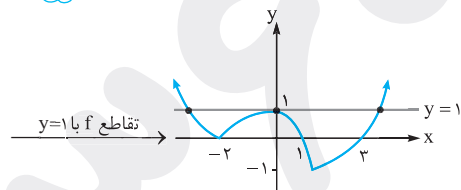
$$1) \text{ } \text{cloud} = -2 \Rightarrow f(x) = -2$$

الان با ۳ تا معادله طرفیم:



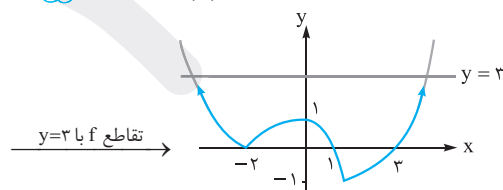
بدون جواب $\Rightarrow y = -2$ تقاطع f با $y = -2$

$$2) \text{ } \text{cloud} = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$



جواب ۳ $\Rightarrow y = 1$ تقاطع f با $y = 1$

$$3) \text{ } \text{cloud} = 3 \Rightarrow f(x) = 3$$



جواب ۲ $\Rightarrow y = 3$ تقاطع f با $y = 3$

پس در کل، معادله ۵ جواب دارد.

۳۵. ۴ برای محاسبه $f(m)$ ، در $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ جای تمام x ‌ها، m قرار

$$f(m) = 1 \Rightarrow \frac{2m}{m^2+1} = 1 \Rightarrow m^2+1=2m$$

می‌دهیم:

$$\Rightarrow m^2-2m+1=0 \Rightarrow (m-1)^2=0 \Rightarrow m=1$$

دو مقدار برابر با z^2 را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$36-y^2=x^2-4y^2 \Rightarrow 3y^2=x^2-36 \Rightarrow y=\sqrt{\frac{x^2-36}{3}}$$

با جای گذاری $y^2 = \frac{x^2-36}{3}$ ، در رابطه اول داریم:

$$z^2=36-y^2 \Rightarrow z^2=36-\frac{x^2-36}{3}=\frac{144-x^2}{3} \Rightarrow z=\sqrt{\frac{144-x^2}{3}}$$

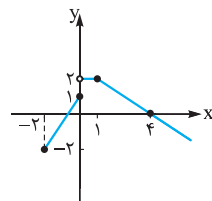
مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} = 2y \cdot z = 2\sqrt{\frac{x^2-36}{3}} \cdot \sqrt{\frac{144-x^2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-36)(144-x^2)}$$

۲۸. ۱ می‌توانیم با توجه به زوج‌های مرتب موجود

در تابع $f = \{(1, 2), (-1, 4), (2, -3), (0, 1)\}$

بگوییم $f(1) = 2$ و از طرفی با توجه به نمودار g



$$g(4) = 0 \text{ و } g(0) = 1$$

$$\frac{f(1)+g(4)}{g(0)} = \frac{1+0}{1} = 1$$

پس:

۲۹. ۴ داریم:

$$f = \{(-1, 2m+1), (2, 3-m), (-6, 2), (-m, m-1)\}$$

$$f(-6) = 2$$

پس:

$$f(f(-6)) = f(2) = 3-m \quad f(-1) = 2m+1$$

بنابراین از تساوی داده شده نتیجه می‌شود:

$$f(f(-6)) - f(-6) + 2f(-1) = 9 \Rightarrow (3-m) - (2) + 2(2m+1) = 9$$

$$\Rightarrow 1-m+4m+2=9 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2$$

حالا باید $f(f(m)) = f(f(2))$ را پیدا کنیم:

$$f(2) = 3-m = 3-2 = 1 \Rightarrow f(f(2)) = f(1)$$

و چون در زوج مرتب‌های f ، مؤلفه اول ۱ نداریم، پس $f(1)$ تعریف نشده است یا وجود ندارد.

۳۰. ۳ از زوج مرتب $(1, a^2+4a)$ و تساوی $f(1) = 5$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$a^2+4a=5 \Rightarrow a^2+4a-5=0 \quad \text{جمع ضرایب صفر} \quad \begin{cases} a=1 \\ a=-5 \end{cases}$$

دو حالت داریم: ۱) با جای گذاری $a=1$ ، رابطه به شکل زیر درمی‌آید:

$$f = \{(2, 4), (1, 5), (3, 0), (2, 1)\}$$

تابع نیست

پس این حالت رد می‌شود.

۲) با جای گذاری $a=-5$ ، رابطه به شکل زیر درمی‌آید:

$$f = \{(3, 4), (1, 5), (-3, 30), (-10, 625)\}$$

این حالت قبول است و با توجه به زوج مرتب $(-3, 30)$ داریم: $f(-3) = 30$

۳۱. ۴ تساوی $f(f(a)) = 4$ را به شکل $f(0) = 4$ می‌نویسیم.

برای پیدا کردن 0 باید بپریم f چه عددی می‌شود ۴؟

با توجه به زوج مرتب‌های $(1, 4)$ و $(7, 4)$ ، جواب سؤال بالا ۱ و ۷ است.

پس جای 0 ، یک بار ۱ و یک بار ۷ می‌نویسیم.

$$0=1 \Rightarrow f(a)=1 \xrightarrow{(5,1)} a=5$$

$$0=7 \Rightarrow f(a)=7 \xrightarrow{(6,7)} a=6$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با: $5+6=11$

پس $f(m+1)$ ، یعنی $f(2)$ که برابر است با:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f(2) = \frac{4}{5}$$

۳۶. ۲ ابتدا $f(-144)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x+2|x|} \Rightarrow f(-144) = \sqrt{-144+288} = \sqrt{144} = 12$$

پس $f(f(-144))$ به شکل $f(12)$ درمی‌آید که برابر است با:

$$f(x) = \sqrt{x+2|x|} \Rightarrow f(12) = \sqrt{12+24} = \sqrt{36} = 6$$

۳۷. ۲ راه اول: تساوی $f(f(a)) = \frac{5}{3}$ را به شکل $f(b) = \frac{5}{3}$ می‌نویسیم.

b را پیدا می‌کنیم:

$$f(b) = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{b+3}{b+1} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3b+9 = 5b+5 \Rightarrow b=2$$

حالا جای b همان $f(a)$ را می‌نویسیم:

$$b=2 \Rightarrow f(a)=2$$

الان باید a را پیدا کنیم:

$$f(a)=2 \Rightarrow \frac{a+3}{a+1} = 2 \Rightarrow 2a+2 = a+3 \Rightarrow a=1$$

راه دوم: $f(f(a))$ را در دو مرحله، تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \Rightarrow f(a) = \frac{a+3}{a+1}$$

مرحله اول:

مرحله دوم: حالا در $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ ، جای x ها، $\frac{a+3}{a+1}$ را می‌نویسیم:

$$f(f(a)) = \frac{f(a)+3}{f(a)+1} = \frac{\frac{a+3}{a+1}+3}{\frac{a+3}{a+1}+1} = \frac{\frac{a+3+3a+3}{a+1}}{\frac{a+3+a+1}{a+1}} = \frac{4a+6}{2a+4}$$

کسر بالا را برابر با $\frac{5}{3}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{4a+6}{2a+4} = \frac{5}{3} \Rightarrow 12a+18 = 10a+20 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$$

۳۸. ۱ برای به دست آوردن تقاطع f با محور y ها، $x=0$ را به تابع می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{x^2-2x-24}{x^2+3} \xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{-24}{3} = -8 \xrightarrow{\text{نقطه}} A(0, -8)$$

برای به دست آوردن تقاطع f با محور x ها، $y=0$ را به تابع می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{x^2-2x-24}{x^2+3} \Rightarrow 0 = \frac{x^2-2x-24}{x^2+3} \Rightarrow x^2-2x-24=0 \Rightarrow (x-6)(x+4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=6 \Rightarrow B(6, 0) \\ x=-4 \Rightarrow C(-4, 0) \end{cases}$$

نقاط A ، B و C را به هم وصل و مساحت مثلث ABC را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{8 \times 10}{2} = 40$$

۳۹. ۳ دوتا اطلاعات داریم:

(۱) تابع $y = x^2 + ax + b$ ، محور y ها را در -4 قطع می‌کند، یعنی از نقطه $(0, -4)$ می‌گذرد:

$$-4 = (0)^2 + a(0) + b \Rightarrow b = -4$$

(۲) تابع $y = x^2 + ax + b$ و خط $y = 2x + 2$ در $x = 2$ متقاطع‌اند، پس:

$$2^2 + 2a + b = 2(2) + 2 \Rightarrow 2a + b = 2$$

$b = -4$ را در معادله بالا قرار می‌دهیم:

$$2a + (-4) = 2 \Rightarrow a = 3$$

پس:

$$a + b = 3 + (-4) = -1$$

۴۰. ۴ مختصات نقطه‌ای به طول ۳ روی محور x ها، به صورت $(3, 0)$ است.

این نقطه باید روی هر دو تابع داده‌شده باشد:

$$1) y = x^2 + bx + a \xrightarrow{(3,0)} 27 + 3b + a = 0$$

$$2) y = x + b \xrightarrow{(3,0)} 0 = 3 + b \Rightarrow b = -3$$

$b = -3$ را در معادله اولی قرار می‌دهیم:

$$27 + 3b + a = 0 \Rightarrow 27 - 9 + a = 0 \Rightarrow a = -18$$

$$a - b = -18 - (-3) = -15$$

در نتیجه:

۴۱. ۳ مختصات نقطه A روی نیمساز ناحیه اول به صورت (a, a) است. A .

روی تابع $f(x) = x^2 - 2x$ است، پس:

$$f(a) = a \Rightarrow a^2 - 2a = a \Rightarrow a^2 - 3a = 0$$

$$\Rightarrow a(a^2 - 3) = 0 \Rightarrow a = 0, a = \pm\sqrt{3}$$

در ناحیه اول طول مثبت است، پس فقط $a = \sqrt{3}$ قبول است: $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

مختصات نقطه B روی نیمساز ناحیه چهارم به صورت $(a, -a)$ است.

B روی تابع $f(x) = x^2 - 2x$ است، پس:

$$f(a) = -a \Rightarrow a^2 - 2a = -a \Rightarrow a^2 - a = 0$$

$$\Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = \pm 1$$

در ناحیه چهارم طول مثبت است، پس فقط $a = 1$ قبول است: $B(1, -1)$

فاصله $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ از $B(1, -1)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{(4-2\sqrt{3}) + (4+2\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۴۲. ۳ برای محاسبه $f(x^2)$ ، در $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، جای تمام x ها، x^2

$$f(x^2) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

می‌نویسیم:

ضابطه تابع خواسته‌شده را می‌نویسیم:

$$f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - 2\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1$$

$$= \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{x^2 - 2x(x+1) + (x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 - 1 + x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-(2x+1)}{x^2-1} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

۴۳. ۴ با داشتن $f(x) = 2^x$ ، ضابطه‌های $f(x+2)$ و $f(x-1)$

$$f(x+2) = 2^{x+2} = 2^x \times 2^2 = 4(2^x) = 4f(x)$$

می‌نویسیم:

$$f(x-1) = 2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$$

حاصل $f(x+2) - 2f(x-1)$ برابر است با:

$$f(x+2) - 2f(x-1) = 4f(x) - 2\left(\frac{f(x)}{2}\right) = 3f(x)$$

۴۴. ۳ باید به x عددی بدهیم که $2x+1$ بشود ۳:

$$2x+1=3 \Rightarrow x=1$$

پس در تساوی $f(2x+1) = x^2 - 3x + 5$ ، جای تمام x ها، ۱ قرار می‌دهیم:

$$f(3) = 1 - 3 + 5 = 3$$

۴۵. ۴ راه اول: عبارت داخل پرانتز یعنی $2x-1$ را t می‌گیریم:

$$2x-1=t$$

$$2x=t+1 \Rightarrow x=\frac{t+1}{2}$$

x را تنها می‌کنیم:





$$t = x + \frac{y}{x} \Rightarrow t^3 = x^3 + \frac{\lambda}{x^3} + 3(x)\left(\frac{y}{x}\right)\left(x + \frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow t^3 = x^3 + \frac{\lambda}{x^3} + 6t$$

$$x^3 + \frac{\lambda}{x^3} = t^3 - 6t \quad \text{از تساوی بالا، } x^3 + \frac{\lambda}{x^3} \text{ را برحسب } t \text{ می‌نویسیم:}$$

$$f(t) = t^3 - 6t = t(t^2 - 6) \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}(2 - 6) = -4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times (-4\sqrt{2}) = -8 \quad \text{در نتیجه:}$$

۵۱. **۴ راه اول:** با فرض $t = \sin x$ ، داریم:

$$t^2 = \sin^2 x \Rightarrow t^2 = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - t^2$$

$$f(\sin x) = 2 + \cos^2 x \Rightarrow f(t) = 3 - t^2 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{26}{9} \quad \text{پس:}$$

راه دوم: ما $f\left(\frac{1}{3}\right)$ را می‌خواهیم. پس $\sin x$ را مساوی $\frac{1}{3}$ قرار می‌دهیم و اندازه $\cos x$ (یا $\cos^2 x$) را درمی‌آوریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

در نتیجه به ازای $\sin x = \frac{1}{3}$ داریم $\cos^2 x = \frac{8}{9}$ ، پس:

$$f(\sin x) = 2 + \cos^2 x \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$$

۵۲. **۴** باید بین $\tan x$ و $\cos^2 x$ یک رابطه پیدا کنیم.

با فرض $t = \tan x$ ، باید $\cos^2 x$ را برحسب t بنویسیم:

$$t = \tan x \Rightarrow t^2 = \tan^2 x \xrightarrow{+1} t^2 + 1 = 1 + \tan^2 x$$

$$\text{حالا از اتحاد } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ کمک می‌گیریم:}$$

$$t^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{معکوس}} \cos^2 x = \frac{1}{t^2 + 1} \xrightarrow{\text{توان } 2} \cos^2 x = \left(\frac{1}{t^2 + 1}\right)^2$$

$$f(t) = \left(\frac{1}{t^2 + 1}\right)^2 \quad \text{پس:}$$

حالا جای t می‌نویسیم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^2$$

۵۳. **۴** یک بار $x = 0$ را در تساوی جای گذاری می‌کنیم:

$$xf\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 2 \xrightarrow{x=0} -f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = -2$$

حالا اگر $x = 1$ بدهیم، از $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ ساخته می‌شود:

$$xf\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 2 \xrightarrow{x=1} f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$$

۵۴. **۱** باید به x عددی بدهیم که $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ برابر با $\frac{1}{9}$ شود. حدس

عددش سخت است؛ پس معادله حل می‌کنیم تا به x مورد نظر برسیم:

$$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{9} \Rightarrow 9\sqrt{x} = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow 8\sqrt{x} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{64}$$

در تساوی $f(2x-1) = 4x^2 - 1$ ، جای تمام x ها، $\frac{t+1}{2}$ می‌نویسیم:

$$f(t) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 1 = (t+1)^2 - 1 = t^2 + 2t$$

الان بازی با حروف انجام می‌دهیم! در تساوی $f(t) = t^2 + 2t$ ، جای x

$$f(x) = x^2 + 2x$$

می‌نویسیم:

راه دوم: در تساوی $f(2x-1) = 4x^2 - 1$ ، $x = 1$ را قرار می‌دهیم:

$$f(1) = 4 - 1 = 3$$

در بین گزینه‌ها دنبال تابعی می‌گردیم که در رابطه $f(1) = 3$ صدق کند. فقط تابع **۴** این ویژگی را دارد.

۴۶. **۳** ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x-1)^2 + 2$$

مقادیر $f(1+\sqrt{2})$ و $f(1-\sqrt{2})$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow f(1+\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$f(x) = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow f(1-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$= (-\sqrt{2})^2 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$f(1+\sqrt{2}) + f(1-\sqrt{2}) = 4 + 4 = 8$$

پس:

۴۷. **۱** عبارت $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ را باید زیاد دیده باشید.

سه جمله اول از اتحاد مکعب: $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

پس در تساوی داده‌شده، عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 \Rightarrow f(x+1) = (x+1)^3 - 1$$

در تساوی بالا به جای $x+1$ ها، t می‌نویسیم:

$$f(t) = t^3 - 1$$

و حالا $t = \sqrt[3]{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$f(\sqrt[3]{2}) = (\sqrt[3]{2})^3 - 1 = 2 - 1 = 1$$

۴۸. **۱** ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-1)^2 + 3x} = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1 + 3x} = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = x-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1 \quad \text{مخرج کسر را گویا می‌کنیم:}$$

پس:

$$f(x) = x-1 \xrightarrow{x=\sqrt{2}+1} f(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}+1-1 = \sqrt{2}$$

۴۹. **۱** $x - \frac{1}{x}$ را مساوی t می‌گیریم و t را حساب می‌کنیم:

$$x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2 \quad \text{از تساوی قبل، } x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ را برحسب } t \text{ می‌نویسیم:}$$

پس تساوی داده‌شده را می‌توانیم به این شکل بنویسیم:

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \Rightarrow f(t) = t^2 + 8$$

$$f(x) = x^2 + 8$$

در نتیجه:

۵۰. **۳** $x + \frac{y}{x}$ را مساوی t می‌گیریم و t را حساب می‌کنیم.

اتحاد مکعب را این شکلی هم می‌توانیم بنویسیم:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$\begin{aligned} \bullet f(x) &= 2x^2 - 2f(1) - f(3) \xrightarrow{x=2} \\ f(3) &= 18 - 2f(1) - f(3) \Rightarrow 2f(1) + 2f(3) = 18 \\ \xrightarrow{\div 2} f(1) + f(3) &= 9 \\ f(3) &= \frac{25}{2}, f(1) = \frac{-7}{2} \end{aligned}$$

از حل دو معادله بالا، داریم:

$$f(x) = 2x^2 - 2f(1) - f(3) \xrightarrow{f(1) = \frac{-7}{2}, f(3) = \frac{25}{2}}$$

$$f(x) = 2x^2 + 7 - \frac{25}{2} \Rightarrow f(x) = 2x^2 - \frac{11}{2}$$

$$f(2) = 2(2)^2 - \frac{11}{2} = 8 - \frac{11}{2} = \frac{5}{2}$$

پس:

۶۰. ۳ در تساوی $f(x) + xf(-x) = x^2 + x^3$ ، یک بار $x = 2$ و یک بار هم $x = -2$ را قرار می‌دهیم:

$$1) f(2) + 2f(-2) = 2^2 + 2^3 \Rightarrow f(2) + 2f(-2) = 24$$

$$2) f(-2) - 2f(2) = (-2)^2 + (-2)^3 \Rightarrow f(-2) - 2f(2) = 8$$

طرفین تساوی (۲) را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(2) + 2f(-2) &= 24 \\ -2f(-2) + 4f(2) &= -16 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} \Delta f(2) = 8 \Rightarrow f(2) = \frac{8}{\Delta} = 1/6$$

۶۱. ۳ در تساوی $f(x) - 2f(\frac{1}{x}) = 4x^2$ ، یک بار $x = 2$ و یک بار هم $x = \frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$1) x = 2: f(2) - 2f(\frac{1}{2}) = 16 \quad 2) x = \frac{1}{2}: f(\frac{1}{2}) - 2f(2) = 1$$

$$2f(2) - 4f(\frac{1}{2}) = 32$$

طرفین تساوی اول را در ۲ ضرب می‌کنیم:

تساوی بالا را با تساوی (۲) جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} 2f(2) - 4f(\frac{1}{2}) &= 32 \\ f(\frac{1}{2}) - 2f(2) &= 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} -3f(\frac{1}{2}) = 33 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = -11$$

با جای‌گذاری $f(\frac{1}{2}) = -11$ در $f(\frac{1}{2}) - 2f(2) = 1$ داریم:

$$-11 - 2f(2) = 1 \Rightarrow f(2) = -6$$

معادله را حل می‌کنیم:

$$f(\frac{1}{2}) - 7 = af(2) \Rightarrow -11 - 7 = a(-6) \Rightarrow -6a = -18 \Rightarrow a = 3$$

۶۲. ۱ چون $x - 2$ و $x - 2$ قرینه هم هستند، یکی را t و دیگری را $-t$ می‌گیریم.

$$x - 2 = t \Rightarrow x = t + 2$$

x را هم برحسب t می‌نویسیم:

$$\text{تساوی } f(x - 2) + 3f(2 - x) = 2x^2 + 4x \text{ می‌نویسیم:}$$

$$f(t) + 3f(-t) = 2(t + 2)^2 + 4(t + 2)$$

$$\Rightarrow f(t) + 3f(-t) = 2t^2 + 12t + 16$$

در تساوی بالا، جای تمام t ها، $-t$ قرار می‌دهیم:

$$f(-t) + 3f(t) = 2t^2 - 12t + 16$$

معادله قبل و این معادله را در یک دستگاه می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f(t) + 3f(-t) = 2t^2 + 12t + 16 \\ f(-t) + 3f(t) = 2t^2 - 12t + 16 \end{cases}$$

$$\text{حالا در کل تساوی، } x = \frac{1}{\Delta} \text{ را قرار می‌دهیم: } f\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x = \frac{1}{\Delta}} f(0/1) = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = 2/25$$

۵۵. ۴ اگر x ای پیدا کنیم که به ازای آن، $f(x^2 - 3x)$ و $f(x - 4)$ ،

هر دو برابر با $f(-2)$ شوند، عالی‌ه! پیداکردنش هم کار سختی نیست. اگر $x - 4 = -2$ باشد، $x = 2$ می‌شود که به ازای آن $f(x^2 - 3x)$ و $f(x - 4)$ تبدیل می‌شود.

$$\frac{f(x^2 - 3x) - x}{1 - f(x - 4)} = x^2 \xrightarrow{x=2} \frac{f(-2) - 2}{1 - f(-2)} = 4$$

$$\Rightarrow f(-2) - 2 = 4 - 4f(-2) \Rightarrow 5f(-2) = 6$$

$$\Rightarrow f(-2) = \frac{6}{5} = 1/2$$

۵۶. ۳ باید به x عددی بدهیم که $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ برابر با $0/5$ شود:

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2x^2 + 4x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 4x = 1$$

اگر کمی دقت کنید $x^2 + 4x$ با $x^2 + 2x$ رابطه دارد (دومی، نصف اولیه). پس ما حق داریم جای $x^2 + 4x$ ، 1 بنویسیم (البته طبق تساوی اول، جای $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ هم $0/5$ می‌داریم).

$$f\left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 3 \Rightarrow f\left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1}\right) = \frac{x^2 + 4x}{2} + 3$$

$$\xrightarrow{\text{طبق بالا!}} f(0/5) = \frac{1}{5} + 3 = 3/5$$

۵۷. ۱ $x + 1$ و $x + 2$ ، دو عدد متوالی‌اند و $f(4)$ ، $f(1)$ ، ورودی‌هایشان ۳ تا فاصله دارند.

در تساوی داده‌شده، $x = 1$ ، $x = 0$ و $x = 2$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x + 2) - f(x + 1) = x^2 - 2x \xrightarrow{x=0} f(2) - f(1) = 0$$

$$f(x + 2) - f(x + 1) = x^2 - 2x \xrightarrow{x=1} f(3) - f(2) = -1$$

$$f(x + 2) - f(x + 1) = x^2 - 2x \xrightarrow{x=2} f(4) - f(3) = 12$$

طرفین سه تساوی را با هم جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(2) - f(1) &= 0 \\ f(3) - f(2) &= -1 \\ f(4) - f(3) &= 12 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} f(4) - f(1) = 11$$

۵۸. ۲ اول باید $f(1)$ را حساب کنیم.

جای تمام x ها، 1 قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 5x^2 + 2f(1) \xrightarrow{x=1} f(1) = 5 + 2f(1) \Rightarrow f(1) = -5$$

اتفاق خوب افتاد! جای $f(1)$ می‌نویسیم -5 :

$$f(x) = 5x^2 + 2f(1) \Rightarrow f(x) = 5x^2 - 10$$

حالا جای x ها، 2 می‌نویسیم:

$$f(x) = 5x^2 - 10 \Rightarrow f(2) = 5(2)^2 - 10 = 20 - 10 = 10$$

۵۹. ۱ ضابطه ما، دوتا مجهول دارد.

یک بار جای x ها 1 و یک بار هم 3 قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \bullet f(x) &= 2x^2 - 2f(1) - f(3) \xrightarrow{x=1} f(1) = 2 - 2f(1) - f(3) \\ \Rightarrow 3f(1) + f(3) &= 2 \end{aligned}$$

فصل اول

تابع

به فصل تابع خوش آمدید.

فصل تابع مهم‌ترین فصل کتاب شماست! این فصل تقریباً در تمام فصل‌های بعد به کارتان می‌آید. معمولاً در کنکور ۳ یا ۴ تست دارد اما علاوه بر این تست‌ها از مفاهیم مختلفش در سؤال‌های فصل‌های دیگر هم استفاده می‌شود.

مباحث مهم و پرسؤال انتقال نمودارها، تابع مرکب، تابع وارون و تقسیم چندجمله‌ای‌ها

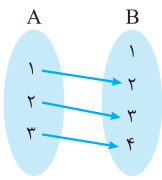
مباحث پیش‌نیاز معادله درجه ۲، تعیین علامت، قدرمطلق و جزء صحیح

فصل‌های مرتبط با کتاب درسی فصل ۵ ریاضی دهم، فصل ۲ حسابان یازدهم و فصل ۱

حسابان دوازدهم

حرف آخر حتماً نمودار توابع مهم را بلد باشید. خیلی وقت‌ها مشکل گشا هستند!

درس ۱: رابطه و بازنمایی‌های یک رابطه



رابطه بین دو مجموعه مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید. رابطه از A به B یعنی به بعضی از اعضای A ، بعضی از اعضای B را نسبت دهیم. مثل روبه‌رو:

رابطه بالا را به روش‌های مختلفی می‌توانیم نشان دهیم:

نمایش پیکانی	نمایش زوج مرتبی	نمایش جدولی	نمایش نموداری	نمایش توصیفی	نمایش ضابطه‌ای								
	$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$	<table border="1" data-bbox="813 555 948 586"><tr><td>x</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>y</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr></table>	x	۱	۲	۳	y	۲	۳	۴		رابطه‌ای که به هر عضو A، یک واحد بیشترش را نسبت می‌دهد.	$y = x + ۱$
x	۱	۲	۳										
y	۲	۳	۴										

تست: اگر $A = \{2, 3, 4, 5\}$ باشد، رابطه $R = \{(x, y) \mid 2x + y > 11, x, y \in A\}$ چند عضو دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ ۳: رابطه R ، x و y هایش را از A می‌گیرد. باید x و y هایی را پیدا کنیم که در رابطه $2x + y > 11$ صدق می‌کنند:

- نداریم $y > 7 \Rightarrow 4 + y > 11 \Rightarrow x = 2$ باشد
- نداریم $y > 5 \Rightarrow 6 + y > 11 \Rightarrow x = 3$ باشد
- $y = 4, 5 \Rightarrow (4, 4), (4, 5)$ اگر $x = 4$ باشد
- $y = 2, 3, 4, 5 \Rightarrow (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)$ اگر $x = 5$ باشد

این رابطه، ۶ تا زوج مرتب دارد، پس ۶ عضو دارد.

نکته: تعداد اعضای یک رابطه = تعداد زوج مرتب‌هایش

روش‌های نمایش یک تابع

در ابتدا یک تعریف کلی از تابع ببینید: تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد. روش‌های مختلف نمایش یک تابع را در جدول زیر می‌بینید:

روش نمایش	شرط تابع بودن	مثال								
۱ پیکانی	از هر عضو مجموعه مبدأ، باید دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.	A B ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ تابع است A B ۱ ۲ ۴ ۵ تابع نیست								
۲ زوج مرتبی	مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها نباید برابر باشد. اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد.	$\{(1, 4), (2, 6), (-1, 6)\} \Rightarrow$ تابع است. $\{(1, 4), (2, 5), (1, 8)\} \Rightarrow$ تابع نیست.								
۳ جدولی	مؤلفه‌های سطر مربوط به x ها نباید یکسان باشد. اگر مؤلفه‌های x یکسان داشتیم، مؤلفه‌های y شان هم باید یکسان باشد.	<table><tr><td>x</td><td>۲</td><td>۴</td><td>۵</td></tr><tr><td>y</td><td>-۱</td><td>۸</td><td>۶</td></tr></table> تابع نیست.	x	۲	۴	۵	y	-۱	۸	۶
x	۲	۴	۵							
y	-۱	۸	۶							
۴ نموداری	اگر خطی موازی محور y ها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار مربوط به یک تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، تابع است.	تابع نیست.								

روش نمایش	شرط تابع بودن	مثال
۵ توصیفی	با توجه به جمله توصیفی، اگر به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی داشته باشیم، آن رابطه، تابع است.	رابطه‌ای که به هر فرد، کتاب‌هایش را نسبت می‌دهد. $\left. \begin{array}{l} \text{ورودی: انسان‌ها} \\ \text{خروجی: کتاب‌ها} \end{array} \right\}$ چون هر شخص می‌تواند، بیش از یک کتاب داشته باشد، پس تابع نیست.
۶ ضابطه‌ای	اگر به ازای هر x ، فقط یک خروجی داشته باشیم، تابع است. روابطی که در آن‌ها y تنها می‌شود، حتماً تابع هستند؛ مثل $y = \sqrt{x} + \sin x$ تنها	$ y = x + 2$ اگر $x = 1$ را بدهیم، 2 تا خروجی می‌دهد. تابع نیست $ y = 3 \Rightarrow y = \pm 3 \Rightarrow$

برای تثبیت چیزهایی که در جدول یاد گرفتید، ۲ تا تست هم بزنید.

تست: اگر رابطه $f = \{(1, 12), (-2, 3), (1, m^2 - 4m), (m, 6)\}$ تابع باشد، m کدام است؟

۱) -2 یا 6 ۲) فقط -2 ۳) فقط 6 ۴) $\emptyset$

پاسخ ۳: در رابطه داده‌شده، مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(1, 12)$ و $(1, m^2 - 4m)$ برابرند، پس مؤلفه‌های دومشان نیز باید برابر باشند:

$$m^2 - 4m = 12 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (m - 6)(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \checkmark \\ m = -2 \times \end{cases}$$

به ازای $m = -2$ ، دو زوج مرتب $(-2, 3)$ و $(-2, 6)$ داریم که باعث می‌شود رابطه، تابع نباشد. پس فقط $m = 6$ قابل قبول است.

تست: اگر جدول مقابل مربوط به یک تابع باشد، مقدار $a^4 + b^4$ کدام است؟

x	-1	-3	-1	5	-3	6
y	ab	4	2	a	$a - b$	b

۱) 372 ۲) 382 ۳) 392 ۴) 402

پاسخ ۳: با توجه به جدول، باید $ab = 2$ و $a - b = 4$ باشد:

x	-1	-3	-1	5	-3	6
y	ab	4	2	a	$a - b$	b

$ab = 2$ ، $a - b = 4$

ابتدا طرفین تساوی $a - b = 4$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^2 + b^2 - 2ab = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 - 4 = 16 \Rightarrow a^2 + b^2 = 20$$

حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(a^2 + b^2)^2 = 20^2 \Rightarrow a^4 + b^4 + 2(ab)^2 = 400 \Rightarrow a^4 + b^4 + 8 = 400 \Rightarrow a^4 + b^4 = 392$$

از نمایش توصیفی هم یک تست ببینید:

تست: کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع است؟

۱) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولدش را در هفته نسبت می‌دهد. ۲) رابطه‌ای که به هر فرد، شمارهٔ موبایلش را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به هر کشور، شهرهای توریستی‌اش را نسبت می‌دهد. ۴) رابطه‌ای که به هر انتشارات، اسم نویسنده‌هایش را نسبت می‌دهد.

پاسخ ۱: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ روز تولد هر کسی فقط می‌تواند یکی از روزهای هفته باشد، پس به ازای هر فرد، فقط یک روز تولد در هفته داریم و در نتیجه این رابطه تابع است.

۲ اگر به دور و بر خودتان خوب نگاه کنید، آدم چند سیم‌کارته کم نیست!

پس هر کسی ممکن است بیش از یک سیم‌کارت داشته باشد (مثل خودتان!) و در نتیجه این رابطه تابع نیست.

۳ شهرهای توریستی هر کشور می‌تواند بیشتر از یک شهر باشد، پس به هر کشور ممکن است بیش از یک شهر توریستی نسبت داده شود مثل ایران که شهرهای توریستی زیادی مثل اصفهان، شیراز و ... دارد. در نتیجه این رابطه، تابع نیست.

۴ هر انتشارات، تعداد زیادی نویسنده دارد، مثلاً همین خیلی سبز خودمان! پس به هر انتشارات ممکن است بیش از یک نویسنده نسبت داده شود و در نتیجه این رابطه تابع نیست.

نمایش ضابطه‌ای: در نمایش ضابطه‌ای باید حرفه‌ای باشید! مثال‌های زیر را ببینید

۱ روابطی که در آن‌ها، y تنها شده، حتماً تابع هستند:

$$y = 2|x^2 - 2x| + \frac{\cos \sqrt{x}}{\log x}$$

تنها

۲ اگر y ، توان زوج داشت یا داخل قدرمطلق بود، سعی کنید x ‌ای پیدا کنید که به ازای آن دوتا y به شما بدهد و شما بگویید آن رابطه تابع نیست:

$$|y - 1| + x + 3 = 0 \Rightarrow |y - 1| = -x - 3 \xrightarrow{x = -5} |y - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3 \\ y - 1 = -2 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

۳) آمادگی مربع کامل کردن را داشته باشید. یادتان هم باشد که از $A^2 + B^2 = 0$ ، نتیجه می‌گیریم $A = B = 0$:

$$x^2 + y^2 + 4 = 4x \Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطه}} (2,0) \Rightarrow \text{تابع است.}$$

۴) بعضی وقت‌ها لازم است نشان دهیم وارون این رابطه، یک‌به‌یک است، پس خودش تابع است. مثلاً در رابطه $y^3 + y = x$ ، اول جای x و y را عوض می‌کنیم تا به وارون برسیم: $y = x^3 + x$ حالا باید یک‌به‌یک بودن $y = x^3 + x$ را بررسی کنیم. باز هم نیاز به یک حرکت خاص داریم. x^3 و x هر کدام تابعی اکیداً صعودی هستند، پس مجموعه‌شان هم تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی هر تابع اکید یکنوایی، تابعی یک‌به‌یک است. پس تابع $y = x^3 + x$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارونش یعنی $x = y^3 + y$ ، تابع است.

تست: در کدام گزینه، y تابعی از x است؟

۴) $\sqrt{y} - |y| = x$

۳) $y^3 - 4y = x$

۲) $|x-1| + y^2 = 6y - 9$

۱) $x = \sin y$

پاسخ ۲: همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر $x = 0$ را بدهیم، آن وقت داریم:

یعنی به ازای ورودی $x = 0$ ، چند خروجی داریم، پس تابع نیست.

۲) عبارت‌های بر حسب y را مربع کامل می‌کنیم:

مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر دو صفر باشند:

$$|x-1| + y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow |x-1| + (y-3)^2 = 0$$

$$\underbrace{|x-1|}_{\text{نامنفی}} + \underbrace{(y-3)^2}_{\text{نامنفی}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ y-3=0 \Rightarrow y=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطه}} (1,3) \Rightarrow \text{تابع است.}$$

$$y^3 - 4y = x \xrightarrow{x=0} y^3 - 4y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 4) = 0 \Rightarrow y = 0, \pm 2$$

۳) جای x ، صفر قرار می‌دهیم:

یعنی به ازای ورودی $x = 0$ ، ۳ خروجی داریم، پس تابع نیست.

۴) با وجود $\sqrt{y}$ ، باید $y \geq 0$ باشد. پس $|y|$ همان y می‌شود:

به ازای $x = 0$ ، دو مقدار برای y داریم، ($y = 1$ و $y = 0$)، پس این رابطه تابع نیست.

$$\sqrt{y} - y = x$$

تعداد توابع: مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 5\}$ را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم تابعی بنویسیم که دامنه‌اش A و بردش را از B بگیرد، این شکلی می‌شود:

$$\{(1, O), (2, O), (3, O)\}$$

$$\{(1, \downarrow), (2, \downarrow), (3, \downarrow)\}$$

$$3^3 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 8$$

در هر کدام از جاهای خالی، می‌توانیم دو عدد (۴ یا ۵) را قرار دهیم:

یعنی در کل ۸ تا تابع از A به B می‌توانیم بنویسیم.

نکته: تعداد توابع از مجموعه A به مجموعه B برابر است با: $(\text{تعداد اعضای } A)^{(\text{تعداد اعضای } B)}$

حالا ممکن است شرط و شروط هم برایمان بگذارند. این سؤال‌ها را با اصل ضرب حل می‌کنیم. یک مثال ببینید:

تست: از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ چند تابع می‌توان نوشت به طوری که شامل زوج مرتب $(1, 8)$ باشد ولی شامل زوج مرتب‌های $(2, 7)$ و $(3, 9)$ نباشد؟

۴) ۱۲۰

۳) ۸۰

۲) ۹۶

۱) ۶۴

$$\{(1,), (2,), (3,), (4,)\}$$

پاسخ ۳: اگر تابع را زوج مرتبی ببینیم، مؤلفه‌های اولش را از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ می‌گیرد:

$$\{(1, \uparrow), (2, \text{نباشد}), (3, \text{نباشد}), (4, \text{همه چی})\}$$

۳ تا شرط داریم. شامل $(1, 8)$ باشد و شامل $(2, 7)$ و $(3, 9)$ نباشد:

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{حالت } 1 \times \text{حالت } 4 \times \text{حالت } 4 \times \text{حالت } 5$$

پس تعداد توابع $80 = 4 \times 4 \times 4 \times 5$ تا است.

نوشتن ضابطه جبری یک تابع

می‌دانیم مساحت مربعی به ضلع x ، برابر با x^2 است.

جمله بالا را به زبان تابع این‌جوری بیان می‌کنیم: تابع مساحت مربع بر حسب ضلعش، به صورت $f(x) = x^2$ است. یعنی یک تابع بنویسید که اگر ورودی آن ضلع مربع باشد، خروجی‌اش مساحت آن باشد.

مثلاً اگر بخواهیم مساحت دایره را به عنوان تابعی از شعاعش بنویسیم، می‌شود:

$$f(r) = \pi r^2$$

یا اگر مساحت دایره را به عنوان تابعی از قطرش بنویسیم، باید جای r ، $\frac{d}{2}$ بنویسیم:

$$f(d) = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

وقتی می‌گوییم مساحت، تابعی از قطر، یعنی یک طرف تساوی باید (قطر) f و طرف دیگر یک عبارت جبری با تک متغیر «قطر یا همان d » باشد. مثال اولی آسان است:

تست: در کدام گزینه محیط مربع به عنوان تابعی از قطرش بیان شده است؟

$$f(x) = 2\sqrt{2}x \quad (۴)$$

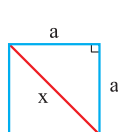
$$f(x) = 4\sqrt{2}x \quad (۳)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \quad (۲)$$

$$f(x) = 4\sqrt{2}x^2 \quad (۱)$$

پاسخ ۴: ما باید محیط برحسب قطر بنویسیم. دو مرحله داریم:

اول ضلع را برحسب قطر بنویسیم:



$$a^2 + a^2 = x^2 \Rightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{محیط} = 4 \times \text{ضلع} = 4 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2}x$$

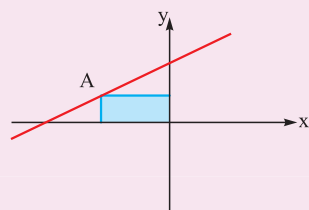
می‌دانیم محیط مربع، ۴ برابر طول هر ضلعش است، پس:

در نتیجه تابع محیط برحسب قطر به شکل $f(x) = 2\sqrt{2}x$ است.

یک مثال مختصاتی هم حل کنیم. در این سؤال باید معادله خط یا منحنی را داشته باشید و با توجه به آن، طول را برحسب عرض (یا برعکس) بنویسید.

تست: نقطه A روی خط $2y - 4x = 3$ در ناحیه دوم قرار دارد. تابع مساحت مستطیل رنگی برحسب عرض

نقطه A به کدام صورت است؟



$$S(y) = \frac{-y^2}{2} + \frac{3}{4}y \quad (۲)$$

$$S(y) = \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4}y \quad (۱)$$

$$S(y) = 2y^2 - \frac{3}{4}y \quad (۴)$$

$$S(y) = 2y^2 + \frac{3}{4}y \quad (۳)$$

پاسخ ۲: چون قرار است مساحت را برحسب عرض نقطه A بنویسیم پس در معادله خط، x را برحسب y می‌نویسیم:

$$2y - 4x = 3 \Rightarrow 4x = 2y - 3 \Rightarrow x = \frac{y}{2} - \frac{3}{4}$$

مختصات A را به شکل (x, y) یا $A(\frac{y}{2} - \frac{3}{4}, y)$ می‌توانیم بنویسیم.

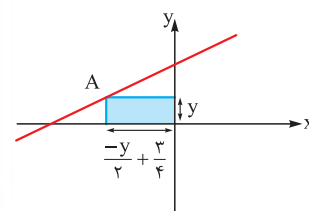
این اطلاعات را روی شکل هم وارد می‌کنیم. فقط دقت کنید چون x نقطه A منفی است (ناحیه دوم)، پس ضلع پایینی مستطیل $|\frac{y}{2} - \frac{3}{4}|$ ، یعنی قرینه $\frac{y}{2} - \frac{3}{4}$ می‌شود.

مساحت مستطیل را می‌نویسیم:

$$S = y \left(\frac{-y}{2} + \frac{3}{4} \right) = \frac{-y^2}{2} + \frac{3}{4}y$$

$$S(y) = \frac{-y^2}{2} + \frac{3}{4}y$$

پس تابع مساحت برحسب y به صورت مقابل است:



مقدار تابع در یک نقطه

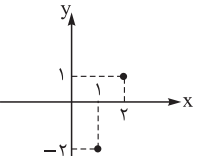
وقتی می‌نویسیم $y = f(x)$ ، یعنی تابعی به اسم f ، ورودی x را می‌گیرد و خروجی y را می‌دهد. مثلاً اگر رابطه بین x و y به صورت $y = 2x^2 - x$ باشد، می‌توانیم بنویسیم $f(x) = 2x^2 - x$. یعنی اگر $x = 5$ باشد، باید در رابطه $f(x) = 2x^2 - x$ جای تمام x ها، ۵ قرار دهیم:

$$f(5) = 2(5)^2 - 5 = 50 - 5 = 45$$

پس این تابع، ورودی ۵ را می‌گیرد و خروجی ۴۵ را می‌دهد:

$$\begin{array}{c} \text{اسم تابع} \\ \uparrow \\ f(5) = 45 \\ \downarrow \\ \text{خروجی ورودی} \end{array}$$

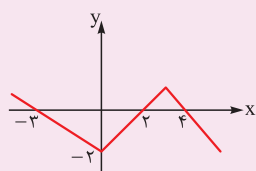
در جدول زیر، مقدار تابع را در $x = 1$ در نمایش‌های مختلف یک تابع آورده‌ایم:

ضابطه‌ای	توصیفی	نموداری	جدولی	زوج مرتبی	پیکانی	روش نمایش							
$f(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{x^2+x}$	f تابعی است که به ازای هر عدد، سه برابرش را بیرون می‌دهد.		<table><tr><td>x</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۵</td></tr><tr><td>y</td><td>-۳</td><td>۶</td><td>۱</td></tr></table>	x	۱		۲	۵	y	-۳	۶	۱	$f = \{(1, 8), (4, 1)\}$
x	۱	۲	۵										
y	-۳	۶	۱										
$f(1) = \frac{\sqrt{9}}{1^2} = \frac{3}{1}$	$f(1) = 3$	$f(1) = -2$	$f(1) = -3$	$f(1) = 8$	$f(1) = 4$	مقدار در $x = 1$							

یک تست از نمایش زوج مرتبی و نموداری ببینید:

تست: اگر $f = \{(3, 2), (0, 1), (2, 3), (-1, 4)\}$ و نمودار تابع g به صورت مقابل باشد، مجموع مقادیر ممکن a در

تساوی $g(f(a)) = 0$ کدام است؟



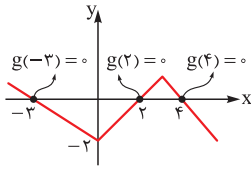
$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$g(\text{cloud}) = 0$$



$$\begin{aligned} \text{cloud} = 4 &\Rightarrow f(a) = 4 \xrightarrow{\text{با توجه به زوج مرتب } (-1, 4)} a = -1 \\ \text{cloud} = 2 &\Rightarrow f(a) = 2 \xrightarrow{\text{با توجه به زوج مرتب } (3, 2)} a = 3 \\ \text{cloud} = -3 &\Rightarrow f(a) = -3 \xrightarrow{\text{زوج مرتبی به شکل } (a, -3) \text{ نداریم}} \text{بی جواب} \end{aligned}$$

پس سه تا معادله داریم:

یک تست هم از نمایش ضابطه‌ای حل می‌کنیم:

تست: اگر $f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{x}$ و $f(a) + f(2a) = 4$ باشد، مقدار $[3f(4a)]$ کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ ۲: برای $f(a)$ و $f(2a)$ باید در $f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{x}$ به ترتیب جای x ها، a و $2a$ را بنویسیم:

$$f(a) + f(2a) = 4 \Rightarrow (\sqrt{2a} - \sqrt{a}) + (\sqrt{4a} - \sqrt{2a}) = 4 \Rightarrow -\sqrt{a} + \sqrt{4a} = 4 \Rightarrow -\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 4 \Rightarrow \sqrt{a} = 4 \Rightarrow a = 16$$

$$f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{x} \Rightarrow f(64) = \sqrt{128} - \sqrt{64} = 8\sqrt{2} - 8 = 8(\sqrt{2} - 1) = 3/2$$

$$[3f(64)] = [3 \times 3/2] = [9/2] = 9$$

پس:

نقاط مهم برخورد یک تابع

۱ نقطه برخورد تابع با محور y ها: برای پیدا کردن نقطه برخورد تابع f با محور y ها، باید $x = 0$ را در ضابطه قرار دهیم. مختصات این نقطه به صورت $A(0, f(0))$ است و هر تابع حداکثر یک نقطه برخورد با محور y ها دارد. مثلاً در تابع $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ، اگر $x = 0$ را به تابع بدهیم به $f(0) = 3$ می‌رسیم، پس نقطه $A(0, 3)$ ، نقطه برخورد این تابع با محور y ها است.

۲ نقطه یا نقاط برخورد تابع با محور x ها: برای به دست آوردن نقطه برخورد تابع f با محور x ها باید جای y ، صفر قرار دهیم. به معنای دیگر باید معادله $f(x) = 0$ یا $y = 0$ را حل کنیم و مختصات نقطه یا نقاط برخورد با محور x ها به صورت $(?, 0)$ است. مثلاً در تابع $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ، برای به دست آوردن نقاط برخورد با محور x ها باید معادله $0 = x - 4\sqrt{x} + 3$ را حل کنیم:

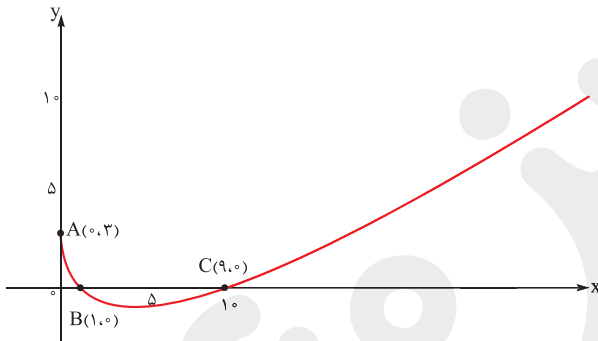
جواب معادله $f(x) = 0$

$$x - 4\sqrt{x} + 3 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 9 \end{cases}$$

پس نقاط برخورد f با محور x ها به صورت $B(1, 0)$ و $C(9, 0)$ است.

یک بار هم نمودار تابع $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ و سه نقطه بالا را روی آن ببینید:

راستی نمودار روبه‌رو، شما رو یاد چی می‌ندازه؟ آدیداس، نایک یا ریبک؟



تست: تابع $f(x) = |2x - 3| - 5$ ، محورهای مختصات را در نقاط A ، B و C قطع می‌کند. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۵ (۴)

۵ (۳)

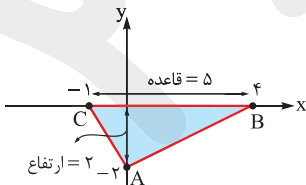
۴ (۲)

۴ (۱)

$$f(0) = |-3| - 5 = 3 - 5 = -2 \xrightarrow{\text{نقطه}} A(0, -2)$$

پاسخ ۳: ابتدا $x = 0$ را قرار می‌دهیم:

حالا نوبت $y = 0$ است:



$$0 = |2x - 3| - 5 \Rightarrow |2x - 3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 4 \xrightarrow{\text{نقطه}} B(4, 0) \\ 2x - 3 = -5 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{\text{نقطه}} C(-1, 0) \end{cases}$$

$$S = \frac{5 \times 2}{2} = 5$$

نقاط A ، B و C را به هم وصل و مساحت مثلث ABC را حساب می‌کنیم:

۳ نقطه یا نقاط برخورد دو تابع: برای به دست آوردن طول نقطه برخورد دو تابع f و g ، باید معادله $f(x) = g(x)$ را حل کنیم. جواب‌های این معادله، طول نقاط برخورد دو تابع f و g هستند. بعد x های به دست آمده از حل معادله را در یکی از ضابطه‌ها (f یا g) قرار می‌دهیم تا عرض نقطه یا نقاط برخورد هم به دست آید. مثلاً دو تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید.

برای به دست آوردن نقطه تقاطع f و g ، ابتدا معادله روبه‌رو را حل می‌کنیم:

$$x + \sqrt{x} = x + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$g(x) = x + 2 \Rightarrow g(4) = 4 + 2 = 6$$

با جای گذاری $x = 4$ در یکی از ضابطه‌ها (فرقی ندارد)، مثلاً g ، داریم:

پس مختصات نقطه برخورد دو تابع، $A(4, 6)$ است.

تست: نمودارهای دو تابع $f(x) = x^3 + x + a$ و $g(x) = bx - 8$ ، در نقطه‌ای به طول ۲ روی نیمساز ناحیه چهارم متقاطع اند. مقدار $g(a)$ کدام است؟

- (۱) -۴۰ (۲) -۴۲ (۳) -۴۴ (۴) -۴۶

پاسخ ۳: مختصات نقطه‌ای به طول ۲ روی نیمساز ناحیه چهارم، به صورت $A(2, -2)$ است.

این نقطه روی هر دو تابع f و g باید باشد:

$$f(x) = x^3 + x + a \xrightarrow{(2, -2)} -2 = 2^3 + 2 + a \Rightarrow a = -12$$

$$g(x) = bx - 8 \xrightarrow{(2, -2)} -2 = 2b - 8 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$g(x) = 3x - 8 \Rightarrow g(a) = g(-12) = 3(-12) - 8 = -44$$

پس:

محاسبه $f(\text{cloud})$: در این قسمت دو مدل سؤال داریم:

۱) $f(x) = \dots$ را به ما بدهند و $f(\text{cloud})$ را بخواهند: در این صورت جای تمام x ها، cloud قرار می‌دهیم. مثلاً اگر $f(x) = 2x^2 - 3x$ باشد و ما $f(4x-1)$ را

بخواهیم، باید جای x ها در $f(x) = 2x^2 - 3x$ ، عبارت $4x-1$ را قرار دهیم: $f(\text{cloud}) = 2(\text{cloud})^2 - 3(\text{cloud}) \Rightarrow f(4x-1) = 2(4x-1)^2 - 3(4x-1)$

تست: اگر $f(x) = x^2 - 8x + 6$ باشد، $f(x+2) - f(x-1)$ کدام است؟

- (۱) $14x + 29$ (۲) $14x - 21$ (۳) $6x + 29$ (۴) $6x - 21$

پاسخ ۴: اول ضابطه f را با مربع کامل سازی، ساده‌تر می‌کنیم. باید جای x ، از $10 - 16$ استفاده کنیم:

$$f(x) = x^2 - 8x + 6 = x^2 - 8x + 16 - 10 = (x-4)^2 - 10$$

حالا جای x ، $x+2$ و $x-1$ قرار می‌دهیم تا به $f(x+2)$ و $f(x-1)$ برسیم:

$$f(x) = (x-4)^2 - 10 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ ها } x+2} f(x+2) = (x+2-4)^2 - 10 = (x-2)^2 - 10$$

$$f(x) = (x-4)^2 - 10 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ ها } x-1} f(x-1) = (x-1-4)^2 - 10 = (x-5)^2 - 10$$

$$f(x+2) - f(x-1) = ((x-2)^2 - 10) - ((x-5)^2 - 10) = (x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 10x + 25) = 6x - 21$$

پس:

۲) $f(\text{cloud}) = \dots$ را بدهند و $f(x)$ را بخواهند: در این صورت cloud را مساوی t قرار می‌دهیم. بعد x را برحسب t حساب می‌کنیم و در رابطه جای تمام x ها،

قرار می‌دهیم. مثلاً اگر $f(2x+1) = 4x^2 + 2$ باشد و $f(x)$ را بخواهند، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) عبارت داخل پرانتز را t می‌گیریم:

$$t = 2x + 1$$

$$x = \frac{t-1}{2}$$

۲) x را برحسب t می‌نویسیم:

$$f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 2 = (t-1)^2 + 2$$

۳) در $f(2x+1) = 4x^2 + 2$ ، جای تمام x ها، $\frac{t-1}{2}$ قرار می‌دهیم:

۴) در آخر سر هم یک بازی با حروف انجام می‌دهیم! در رابطه بالا، جای t ها، x می‌نویسیم و تمام!

$$f(t) = (t-1)^2 + 2 \xrightarrow{\text{تجای } x} f(x) = (x-1)^2 + 2$$

تست: اگر $f(2x - \frac{1}{x}) = 4x^2 + \frac{1}{x^2} + 6$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

پاسخ ۳: عبارت داخل پرانتز را t می‌گیریم:

$$t = 2x - \frac{1}{x}$$

$$t^2 = \left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$$

با توجه به عبارت $4x^2 + \frac{1}{x^2}$ باید t^2 را حساب کنیم:

$$t^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \Rightarrow 4x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 4$$

در تساوی بالا، $4x^2 + \frac{1}{x^2}$ را برحسب t می‌نویسیم:

$$f\left(2x - \frac{1}{x}\right) = 4x^2 + \frac{1}{x^2} + 6 \Rightarrow f(t) = t^2 + 4 + 6 = t^2 + 10 \xrightarrow{t=\sqrt{2}} f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 10 = 12$$

پس:

تست: اگر $f\left(\frac{x^2-4x}{x^2+2}\right) = x^2 - 6x + 4$ باشد، حاصل $f\left(\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۵ (۴) ۵/۵

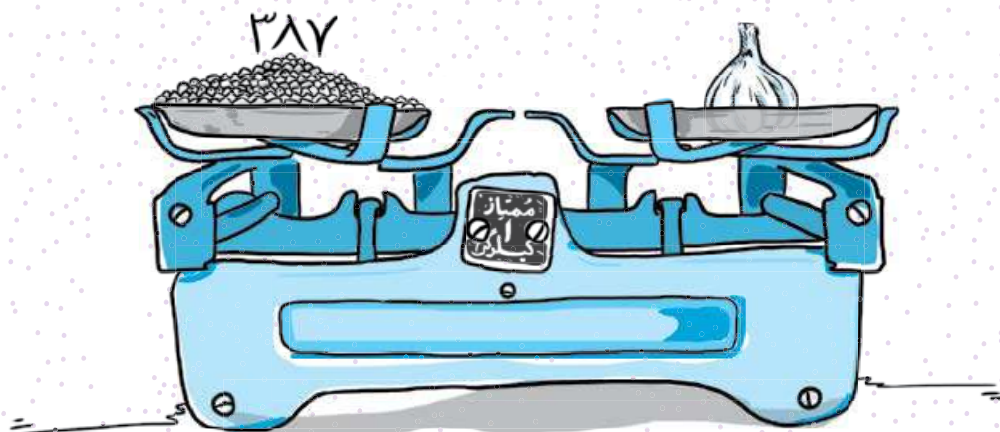
پاسخ ۳: باید به x عددی بدهیم که $\frac{x^2-4x}{x^2+2}$ برابر با $\frac{1}{3}$ شود: $\frac{x^2-4x}{x^2+2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x^2 - 12x = x^2 + 2 \Rightarrow 2x^2 - 12x = 2 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 6x = 1$

پس ما حق داریم جای $x^2 - 6x$ ، ۱ بنویسیم (البته طبق تساوی اول، جای $\frac{x^2-4x}{x^2+2}$ هم $\frac{1}{3}$ می‌ذاریم).

$$f\left(\frac{x^2-4x}{x^2+2}\right) = x^2 - 6x + 4 \Rightarrow f\left(\frac{x^2-4x}{x^2+2}\right) = \underbrace{\frac{x^2-4x}{x^2+2}}_{\frac{1}{3}} + 4 \xrightarrow{\text{طبق بالا!}} f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 4 = 5$$

فصل اول

فصل اول
فیزیک دهم



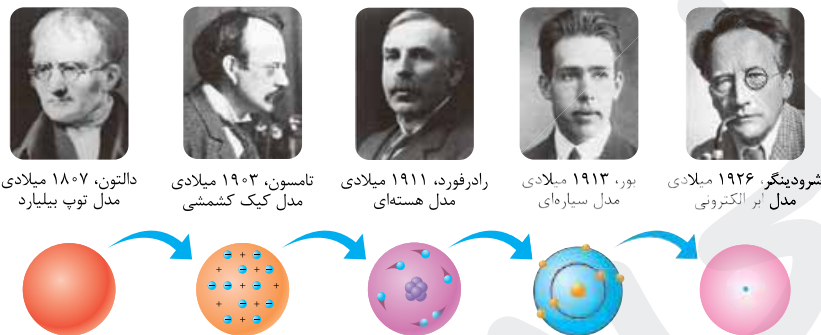
فیزیک و اندازه گیری

صفحه	شناسه فصل
۶	بخش ۱: اندازه گیری
۲۱	بخش ۲: چگالی

بخش ۱ اندازه‌گیری

درس ۱: فیزیک، علمی تجربی و آزمون‌پذیر

هر اتفاقی که در طبیعت می‌افتد (مثل افتادن یک برگ) یک پدیده فیزیکی است. کار دانشمندان فیزیک این است که ۱ پدیده‌ها را مشاهده کنند و ۲ الگوها و نظم‌های خاصی را در آن‌ها کشف کنند. آن‌ها این الگوها را به صورت **نظریه‌ها، مدل‌ها و قانون‌های فیزیکی** بیان می‌کنند. اما این پایان کار نیست. از آنجایی که فیزیک علمی **تجربی** است، قانون‌ها، مدل‌ها و نظریه‌ها باید با **آزمایش‌های مختلف و متعدد** تأیید شوند. چه‌بسا نتیجه آزمایش‌ها، اعتبار یک مدل یا نظریه فیزیکی را زیر سؤال ببرد و دانشمندان آن را اصلاح و یا مدل یا نظریه جدیدی را جایگزین آن کنند. تغییر مدل اتمی در طول زمان مثال خوبی از تغییر مدل‌ها و نظریه‌های فیزیکی است. (شکل زیر)



عوامل مؤثر در پیشرفت دانش و تکامل علم فیزیک

(الف) تفکر نقادانه و اندیشه‌ورزی فعال فیزیکدانان نسبت به پدیده‌هایی که با آن روبه‌رو می‌شوند: یعنی فیزیکدانان پدیده‌ها را خیلی دقیق می‌بینند و در موردشون فکر می‌کنند و همین‌پوری راحت از کنارشون نمی‌گذرن.

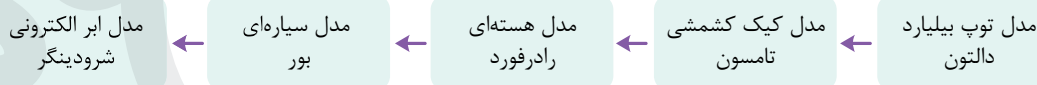
(ب) آزمایش و مشاهده: شکل‌گیری علم فیزیک مدیون آزمایش و مشاهده دانشمندان.

(پ) آزمون‌پذیری و اصلاح نظریه‌های فیزیکی: یعنی باید نظریه‌ها و قانون‌های فیزیک رو آزمایش کرد و آنگاه به وقت تویه آزمایشی فلاف اون مشاهده شد، باید اصلاح بشن؛ این باعث می‌شه که نظریه‌ها بهتر و دقیق‌تر بشن. به قول کتاب درسی «ویژگی آزمون‌پذیری و اصلاح و تغییر نظریه‌های فیزیکی، نه تنها ضعف نیست، بلکه نقطه قوت دانش فیزیک است.»

نکته: مؤثرترین عامل در پیشبرد و تکامل علم فیزیک، **تفکر نقادانه و اندیشه‌ورزی فعال فیزیکدانان** است (مثلاً نظریه نسبیت، نتیجه اندیشه‌ورزی فعال آلبرت اینشتین است).

پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۱ تغییر مدل اتمی در طول زمان مطابق طرح‌واره زیر است:



هر مدل فیزیکی اغلب نتیجه بازنگری در مدل قبل از آن است؛ بنابراین براساس طرح‌واره بالا مدل سیاره‌ای بور نتیجه بازنگری در مدل اتمی قبل از آن یعنی **مدل هسته‌ای** رادرفورد است. (به همت پیکان‌ها دقت کنید.) هم‌چنین با بازنگری در مدل سیاره‌ای بور، **مدل ابر الکترونی** شرودینگر که به مراتب دقیق‌تر و کامل‌تر بود، ارائه شد.

درس ۲: مدل‌سازی در فیزیک

پدیده‌های فیزیکی (مثل پرتاب توپ، بالا رفتن بالون، روشن شدن یک لامپ، بارش برف و ...) حتی اگر ساده و ابتدایی هم به نظر بیایند، پیچیدگی‌هایی دارند؛ به همین دلیل تحلیل و بررسی این پدیده‌ها سخت و گاهی هم غیرممکن است. مثلاً یک پدیده ساده مانند حرکت پرتابی یک توپ بسکتبال، به عامل‌های زیر بستگی دارد:

- شکل توپ یک کره کامل نیست (سطح توپ برجستگی‌ها و درزهایی دارد).
- توپ در حال حرکت، به دور خود می‌چرخد.
- مقاومت هوا و باد روی حرکت توپ اثر می‌گذارند.
- وزن توپ با تغییر ارتفاع توپ تغییر می‌کند.
- سرعت اولیه و جهت پرتاب در مسیر حرکت توپ مؤثر است.

حالا اگر بخواهیم همین حرکت ساده را با در نظر گرفتن همه عوامل، تحلیل و بررسی کنیم، کارمان خیلی سخت می‌شود. برای همین، این پدیده را آن‌قدر ساده و آرمانی می‌کنیم تا بتوانیم به طور ساده آن را تحلیل و بررسی کنیم. به این عمل در فیزیک، **مدل‌سازی** می‌گوییم.

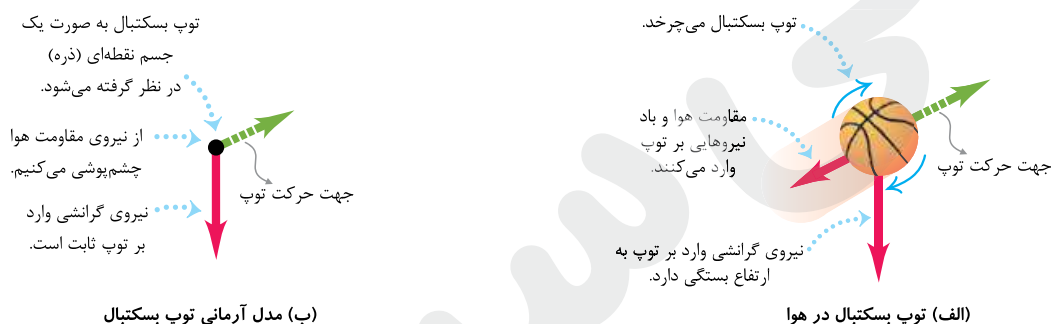
تعریف مدل سازی

به فرایندی که طی آن یک پدیده فیزیکی را تا حد ممکن ساده و آرمانی می کنیم تا بررسی و تحلیل آن امکان پذیر شود، مدل سازی می گوئیم.

حواستون باشه: در مدل سازی یک پدیده فیزیکی از عوامل جزئی تر چشم پوشی می کنیم. منظورمان از عوامل جزئی تر عواملی است که تأثیر کمتری بر آن پدیده فیزیکی دارند؛ ولی باید مواظب باشیم که عوامل اصلی را نادیده نگیریم. مثلاً در جدول زیر حرکت پرتابی توپ بسکتبال را با مدل سازی به یک حرکت آرمانی تبدیل کرده ایم.

عواملی که کم یا زیاد در حرکت توپ بسکتبال مؤثرند.	آیا از این عامل می توانیم چشم پوشی کنیم؟	توضیح
توپ یک کره کامل نیست و برجستگی ها و درزهایی دارد.	بله	توپ را به صورت یک جسم نقطه ای فرض می کنیم.
توپ در طول مسیر به دور خود می چرخد.	بله	اثر چرخش توپ در حرکت توپ چندان زیاد نیست.
هوا در برابر حرکت توپ مقاومت می کند. (نیروی مقاومت هوا)	بله	فرض می کنیم توپ در شرایط خلأ پرتاب شده است.
وزن توپ، نیرویی است که کره زمین در تمام مسیر بر توپ وارد می کند.	نه!	وزن عامل مهمی در مسیر حرکت توپ است. اگر وزن را نادیده بگیریم، توپ به جای مسیر منحنی باید بر مسیر مستقیم حرکت کند.
وزن توپ در طول مسیر تغییر می کند.	بله	این تغییرات خیلی کم و نامحسوس است.

در شکل (الف) وضعیت واقعی توپ بسکتبال در هوا را نشان داده ایم و در شکل (ب) مدل آرمانی (مدل سازی شده) آن را می بینید.



(ب) مدل آرمانی توپ بسکتبال

(الف) توپ بسکتبال در هوا

تست: فرض کنید خودرویی در حال حرکت است. خودرو با دیدن یک مانع ترمز می کند و پس از طی مسافتی می ایستد. برای مدل سازی فیزیکی این حرکت، برخی از عوامل را نادیده می گیریم. نادیده گرفتن کدام موارد زیر باعث می شود نتیجه بررسی مدل با واقعیت تفاوت آشکاری داشته باشد؟



(الف) ابعاد خودرو

(ب) اصطکاک لاستیک های خودرو با سطح زمین

(پ) چرخش چرخ ها

(ت) جرم خودرو و سرنشینان آن

(۱) (پ) و (ت) (۲) (الف) و (پ) (۳) (الف) و (ب) (۴) (ب) و (ت)

پاسخ ۴: اگر از اصطکاک خودرو با زمین صرف نظر کنیم، خودرو هرگز متوقف نمی شود! نادیده گرفتن جرم هم باعث می شود همه نیروهای وارد بر خودرو از جمله اصطکاک حذف شوند. پس نباید پی فیال موارد (ب) و (ت) شویم. دو مورد دیگر قابل چشم پوشی هستند.

مقاومت هوا! بودن یا نبودن! مقاومت هوا از عواملی است که گاهی می توانیم از آن چشم پوشی کنیم و گاهی هم نمی توانیم. مثلاً در حرکت گلوله یا توپ در هوا می توانیم آن را در نظر نگیریم ولی در حرکت برگ یا پر یا چتربازی که در هوا چتر خود را باز کرده، نمی توانیم آن را نادیده بگیریم.

پاسخنامه تشریحی

۲- گزینه ۳ در مدل سازی آرمانی حرکت پرتابی توپ بسکتبال از یک عامل اصلی و به شدت تأثیرگذار نمی توانیم چشم پوشی کنیم:

نیروی گرانشی وارد بر توپ: چون اگر این عامل را حذف کنیم، توپ بسکتبال هرگز به سمت زمین بر نمی گردد و روی یک خط راست از کره زمین دور می شود. از تمامی موارد دیگر می توانیم چشم پوشی کنیم، چون تأثیر آن ها چشم گیر نیست.

(الف) برای سادگی فرض می کنیم توپ در خلأ حرکت می کند و از مقاومت هوا و اثر وزش باد خبری نیست.

(پ) تغییر فاصله توپ از مرکز زمین (تغییر ارتفاع توپ) در مقایسه با شعاع کره زمین خیلی ناچیز است. برای همین با خیال راحت بی خیال آن می شویم.

(ت) چرخش توپ به دور خودش چندان مسیر توپ را جابه جا نمی کند. پس می توانیم آن را نادیده بگیریم.

(ث) از اندازه و شکل توپ و ناهمواری های روی سطح توپ (درزه ها و برجستگی ها) چشم پوشی می کنیم و آن را به صورت یک جسم نقطه ای در نظر می گیریم تا با بی نهایت ذره در حال حرکت طرف نباشیم و محاسباتمان ساده تر باشد.

۳- گزینه ۳: در حرکت سقوط برگ، مقاومت هوا نسبتاً زیاد است و نمی‌توانیم از آن چشم‌پوشی کنیم (رد (۴)). اما با توجه به نوع حرکت که تندی‌شونده و به طرف پایین است، نتیجه می‌گیریم اندازه نیروی وزن ($\vec{W}$) باید بزرگ‌تر از اندازه نیروی مقاومت هوا ($\vec{F}_d$) باشد. (رد (۱) و (۲))

حواستون باشه: کوچک بودن نیروی وزن برگ و پهن بودن برگ باعث می‌شه که ما نتوانیم نیروی مقاومت هوا رو نادیده بگیریم. برای مثال آگه می‌فواستیم حرکت یک گلوله کوچک رو که از بالای ساقتمون ۳ طبقه سقوط می‌کنه، مدل سازی کنیم، می‌تونستیم از نیروی مقاومت هوا صرف نظر کنیم.

هم‌نین برگ در یک مسیر مستقیم سقوط نمی‌کنه و به خاطر شکلی که داره، متناوباً به طرف چپ و راست هم حرکت می‌کنه (اصطلاحاً رقص داره) که در مدل سازی حرکتش از نیروهایی که به طرف چپ و راست پهنش وارد می‌شه، صرف نظر می‌کنیم.

درس ۳: کمیت و یکا

گفتیم «فیزیک، علمی تجربی است» یعنی فیزیک علمی است که پدیده‌های طبیعت را با تجربه و آزمایش، تحلیل و بررسی می‌کند. تجربه و آزمایش هم بدون اندازه‌گیری غیرممکن است. برای همین است که حتی بعضی‌ها معتقدند فیزیک علم اندازه‌گیری است.

برای این‌که بفهمیم اندازه‌گیری دقیقاً یعنی چه، باید مفهوم «کمیت» و «یکا» را بدانیم.

الف) کمیت هر چیزی را که بتوانیم اندازه بگیریم و مقدار آن را با یک عدد بیان کنیم، کمیت است. مثلاً طول، جرم و زمان کمیت هستند؛ اما بعضی چیزها قابل اندازه‌گیری نیستند و نمی‌توانیم مقدار آن‌ها را با عدد بیان کنیم؛ مثل زیبایی، دوست داشتن و احساس گرمی و سردی. (کلاً احساس‌ها رو نمی‌شه اندازه گرفت و با عدد بیان کرد).

ب) یکا برای آن‌که بتوانیم اندازه یک کمیت را با عدد بیان کنیم، نیاز به یک مقدار معین و قراردادی از همان کمیت داریم. به این مقدار «یکا» یا «واحد» آن کمیت می‌گوییم. مثلاً طول مشخصی را قرارداد می‌کنیم و اسمش را «متر» می‌گذاریم و وقتی می‌گوییم طول جسمی ۵ m است؛ منظورمان این است که طول این جسم ۵ برابر یکای متری است که ما قرارداد کرده‌ایم.

نکته: معمولاً عدد به تنهایی ماهیت فیزیکی ندارد. مقدار فیزیکی، عددی است که با یک یکای مناسب بیان می‌شود.

ویژگی‌های یکای استاندارد: یکایی قابل قبول همگان است که دو ویژگی داشته باشد: ۱ تغییرناپذیر باشد. ۲ در مکان‌های مختلف قابلیت بازتولید داشته باشد.

تست: کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند یکای دقیق‌تر و مناسب‌تری برای اندازه‌گیری طول باشد؟

۱) فاصله نوک انگشت کوچک تا نوک انگشت شست هنگامی که انگشتان دست کاملاً باز هستند (وجب).

۲) یک دهمیلیونیم فاصله استوا تا قطب شمال بر روی نصف‌النهار مبدأ

۳) شعاع مدار چرخش ماه به دور زمین $\frac{1}{384000000}$

۴) مسافتی که نور در مدت زمان 5×10^{-8} در یک محیط شفاف می‌پیماید.

پاسخ ۲: گفتیم یک یکای مناسب باید تغییرناپذیر باشد و در مکان‌های مختلف قابلیت بازتولید داشته باشد. حالا گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

- ۱) وجب دست آدم‌ها با هم فرق می‌کند، پس قابلیت بازتولید در مکان‌های مختلف وجود ندارد؛ یعنی اگر به یک کودک بگویید ۵ وجب سیم بخرد، او نمی‌تواند ۵ وجب شما را با وجب خودش بازآفرینی کند، هم‌چنین شرط اول (تغییرناپذیری) هم وجود ندارد. وجب یک نفر در طول زمان از کودکی تا کهنسالی تغییر می‌کند.
- ۲) فاصله استوا تا قطب شمال بر روی یک نصف‌النهار در بازه‌های زمانی خیلی طولانی ممکن است تغییر کند، اما برای بازه‌های زمانی مورد نظر ما با تقریب خوبی تغییرناپذیر است و برای همه آدم‌های روی کره زمین یک مقدار را تداعی می‌کند (یعنی قابلیت بازآفرینی هم دارد)؛ پس این گزینه می‌تواند درست باشد.
- ۳) مدار چرخش ماه به دور کره زمین بیضی است؛ پس شعاع چرخش ماه ثابت نیست و تغییر می‌کند.
- ۴) این تعریف برای آن‌که دقیق‌ترین یکا برای طول باشد، یک اشتباه دارد. سرعت نور در محیط‌های مختلف متفاوت است؛ بنابراین باید گفته شود «مسافتی که نور

در مدت زمان 5×10^{-8} در خلأ می‌پیماید» تا ما برای انتخاب این گزینه قانع شویم.

دسته‌بندی کمیت‌ها (از نظر ماهیت)

کمیت‌ها یا نرده‌ای (اسکالر) اند یا برداری. می‌دانید که همه کمیت‌ها اندازه دارند، ولی تفاوت این دو نوع کمیت، در داشتن یا نداشتن جهت است. حالا هر کدامشان را کمی دقیق‌تر بررسی می‌کنیم:

یکا	عدد	
kg	۷۴	جرم
cm ^۳	۲۴۰۰۰	حجم
s	۱۶۸	زمان

الف) کمیت‌های نرده‌ای (اسکالر) این کمیت‌ها اندازه دارند، ولی جهت ندارند. کمیت‌هایی مثل زمان، جرم، طول، حجم، چگالی و انرژی نرده‌ای‌اند. همه این کمیت‌ها با یک عدد و یکای مخصوص به خودشان بیان می‌شوند و مشخص کردن جهت برای آن‌ها بی‌معنی است. مثلاً وقتی می‌گوییم جسمی به جرم ۷۴ kg و حجم ۲۴۰۰۰ cm^۳، کسی نمی‌پرسد که فُپ پس هوشان چی؟ در جدول مقابل چند کمیت نرده‌ای را به عنوان نمونه آورده‌ایم:

حواستون باشه: برای بیان مقدار یک کمیت، عدد بدون یکای معنیه!

۱- اسکالر (Scaler) از واژه Scale به معنای اندازه و مقدار گرفته شده است.

عدد	یکا	جهت	جابه جایی
۱۳۴۹	m	(به طرف شمال)	
۱۳۷	km/h	(به طرف غرب)	سرعت
۴۲۰	N	(به طرف پایین)	نیرو

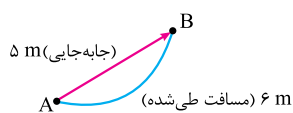
(ب) کمیت‌های برداری این کمیت‌ها علاوه بر اندازه، جهت هم دارند. در واقع برای بیان یک کمیت برداری باید عدد، یکا و جهت آن را بگوییم. مثلاً برای بیان یک جابه جایی (که کمیتی برداری است) باید بگوییم جابه جایی ۱۳۴۹ m به طرف شمال است. در جدول مقابل چند نمونه از کمیت‌های برداری را بیان کرده ایم:

چند نکته: ۱) کمیت‌های برداری را با یک بردار نشان می‌دهند. همان‌طور که می‌دانید «بردار یک پاره‌خط جهت‌دار است» که طول این پاره‌خط بیانگر مقدار کمیت و راستا و سوی آن نشانه جهتش است. مثلاً شکل مقابل بردار نیرویی را نشان می‌دهد که اندازه اش ۳ N و جهتش در امتداد قائم و رو به بالاست.

۲) برای این‌که مشخص کنیم یک کمیت برداری است، بر روی نماد آن کمیت، یک پیکان کوچک قرار می‌دهیم؛ مثلاً کمیت نیرو را به صورت $\vec{F}$ و کمیت سرعت را به صورت $\vec{v}$ نشان می‌دهیم. حالا اگر پیکان را از بالای نماد برداریم یعنی اندازه آن کمیت؛ مثلاً $F = 5\text{ N}$ یا $v = 20\text{ m/s}$. **حواستون باشه:** $\vec{F} = 5\text{ N}$ یا $\vec{v} = 20\text{ m/s}$ غلطه! چون کمیت $\vec{F}$ یا $\vec{v}$ فقط مقدار نیستند که اون‌ها مساوی 5 N یا 20 m/s قرار بدیم. درستش اینه که مثلاً بنویسیم $\vec{F} = (5\text{ N})\hat{j}$ یا $\vec{v} = (20\text{ m/s})\hat{i}$.

۳) کمیت‌های برداری که شما برای کنکور باید بلد باشید این‌ها هستند: **جابه جایی، سرعت، شتاب، نیرو، گشتاور، تکانه، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی**. بنابراین در حد کنکور هر کمیتی به جز مواردی که در بالا گفتیم، نردهای هستند!

نمونه‌هایی از کمیت‌های نردهای و برداری با یکاهای یکسان



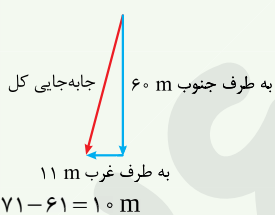
(۱) جابه جایی و مسافت طی شده: جابه جایی یک کمیت برداری است که به مسیر حرکت وابسته نیست و در واقع برداری است که ابتدای مسیر را به انتهای مسیر وصل می‌کند، اما مسافت طی شده کمیتی نردهای است که بیان می‌کند متحرک کلاً چند متر پیموده است؛ مثلاً در شکل مقابل جسم از مسیر منحنی از A تا B، ۶ m راه رفته، ولی مقدار جابه جایی آن ۵ m است.

(۲) سرعت و تندی: سرعت، یک کمیت برداری است و باید آن را با جهتش معرفی کنیم، ولی تندی که اندازه سرعت است، یک کمیت نردهای است؛ مثلاً وقتی می‌گوییم « 137 km/h به سمت غرب»، سرعت جسم را گفته ایم و وقتی فقط می‌گوییم « 137 km/h » تندی آن را بیان کرده ایم.

(۴) جمع و تفریق کمیت‌های برداری، معمولی (جبری) نیست؛ بلکه جمع و تفاضل آن‌ها برداری است که در ریاضیات خوانده‌اید. (یادتون که هست به جمع برداری می‌گفتین براین‌دگیری؟)

با تست زیر منظورمان را بهتر متوجه می‌شوید.

تست: متحرکی ابتدا ۶۰ m به طرف جنوب و سپس ۱۱ m به طرف غرب جابه جا می‌شود. اندازه جابه جایی متحرک چند متر کم‌تر از مسافتی است که متحرک پیموده است؟



پاسخ: در این‌جا مثل شکل روبه‌رو دو جابه جایی عمود بر هم داریم که جابه جایی کل از جمع (یا برابند) این دو حساب می‌شود؛ پس باید از رابطه فیثاغورس اندازه جابه جایی کل را حساب کنیم: $\sqrt{60^2 + 11^2} = \sqrt{3721} = 61\text{ m}$ اندازه جابه جایی کل یعنی حاصل جمع (برابند) دو جابه جایی ۶۰ متری و ۱۱ متری در این‌جا برابر با ۶۱ متر شد، اما مسافت طی شده برابر است با: $60 + 11 = 71\text{ m}$ پس اندازه جابه جایی ۱۰ m از مسافت طی شده کم‌تر است: $71 - 61 = 10\text{ m}$ تو همین تست تفاوت یک کمیت برداری (جابه جایی) و یک کمیت نردهای (مسافت طی شده) رو دارید می‌بینید.

حواستون باشه: کمیت‌های کار، فشار و جریان الکتریکی از قواعد جمع و تفریق معمولی (جبری) پیروی می‌کنند. برای همین این سه کمیت نردهای هستند.

دسته‌بندی قراردادی کمیت‌ها (کمیت‌های اصلی و فرعی)

کمیت‌های اصلی و یکاهای آن		
نماد یکا	نام یکا	کمیت
m	متر	طول
kg	کیلوگرم	جرم
s	ثانیه	زمان
K	کلوین	دما
mol	مول	مقدار ماده
A	آمپر	جریان الکتریکی
cd	کندلا (شمع)	شدت روشنایی

کمیت‌های اصلی مجمع بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها هفت کمیت را به عنوان کمیت‌های اصلی و یکای این کمیت‌ها را به عنوان یکاهای اصلی انتخاب کرده است. در جدول روبه‌رو این هفت کمیت را با یکاهای SI^۱ آورده ایم.

۱- به مجموعه یکاهایی که مورد توافق مجمع بین‌المللی اوزان و مقیاس است، دستگاه بین‌المللی (System International) SI می‌گوییم.

نکته: ویژگی یکاهای اصلی این است که تعریف و نام مستقل دارند. مثلاً کیلوگرم که یکای جرم در SI است، از روی یکاهای دیگر تعریف نمی‌شود و برای خودش یک تعریف مستقل دارد. (کمی پلوتر تعریف یعنی از این یکاها رو آوردیم.)

کمیت‌های فرعی هر کمیتی به جز این هفت کمیت اصلی، کمیت فرعی هستند و به یکاهای آن‌ها هم یکاهای فرعی می‌گوییم. تکلیف یکاهای اصلی SI که هم تعریف مستقل دارند و هم نام مستقل، معلوم است. اما یکاهای فرعی تعریف مستقل ندارند و از طریق فرمول‌های فیزیکی و به کمک یکاهای دیگر ساخته می‌شوند. به عنوان مثال با توجه به فرمول تندى متوسط $(s_{av} = \frac{l}{\Delta t})$ ، یکای تندى، متر بر ثانیه (m/s) به دست می‌آید که یک یکای فرعی است:

$$\frac{m}{s} = \frac{\text{یکای مسافت}}{\text{یکای زمان}}$$

نکته: بعضی از یکاهای پرکاربرد فرعی در SI نام مستقل و مخصوص دارند. مثلاً یکای فرعی نیرو، $\frac{kg \cdot m}{s^2}$ است که در SI آن را با نیوتون (N) هم معرفی می‌کنند.

یکای کمیت‌های فرعی را چه طور به دست آوریم؟

- فرمول فیزیکی مناسب را که کمیت مورد نظر در آن هست، می‌نویسیم.
- فرمول را طوری مرتب می‌کنیم که نماد کمیت مجهول در یک طرف تساوی و بقیه نمادها در طرف دیگر تساوی باشند.
- به جای کمیت‌های معلوم، واحد آن‌ها را جای‌گذاری و تا حد ممکن ساده می‌کنیم. در این صورت، یکای کمیت مورد نظر برحسب یکای سایر کمیت‌ها به دست می‌آید. به تست زیر توجه کنید:

تست: معادل نیوتون (یکای نیرو) برحسب یکای کمیت‌های اصلی در کدام گزینه به درستی بیان شده است؟

$\frac{kg \cdot m}{s^2}$ (۱)
 $\frac{kg \cdot m}{s}$ (۲)
 $\frac{kg \cdot s}{m}$ (۳)
 $\frac{kg \cdot s^2}{m}$ (۴)

پاسخ ۱ کام: ابتدا فرمول مناسبی برای نیرو می‌نویسیم. سال نهم یاد گرفتید که: $F = ma$. در این فرمول می‌خواهیم یکای F را پیدا کنیم و خوشبختانه نماد آن در یک طرف تساوی قرار دارد و لازم نیست ما کار اضافه بکنیم.

کام ۲: به جای کمیت‌های m و a ، یکای آن‌ها را قرار می‌دهیم. یکای جرم kg و یکای شتاب m/s^2 است، پس:

$$kg \times \frac{m}{s^2} = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

در جدول زیر چند کمیت و یکای فرعی را که در SI نام مخصوص دارند، آورده‌ایم. برای هر کدام فرمولی را هم که یکای فرعی از آن به دست می‌آید، آورده‌ایم.

کمیت فرعی	فرمول مناسب	یکای فرعی برحسب یکاهای اصلی	نام مخصوص در SI
نیرو	$F = ma$	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$	نیوتون (N)
فشار	$P = \frac{F}{A}$	$\frac{kg}{m \cdot s^2}$	پاسکال (Pa)
کار و انرژی	$W = Fd$	$\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	ژول (J)
توان	$P = \frac{W}{t}$	$\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$	وات (W)
گرمای ویژه	$c = \frac{Q}{m\Delta T}$	$\frac{m^2}{s^2 \cdot K}$	$\frac{J}{kg \cdot K}$
گرمای نهان ذوب	$L_F = \frac{Q}{m}$	$\frac{m^2}{s^2}$	$\frac{J}{kg}$
بار الکتریکی	$q = It$	A.s	کولن (C)
اختلاف پتانسیل الکتریکی	$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$	$\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$	ولت (V)
مقاومت الکتریکی	$R = \frac{V}{I}$	$\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3}$	اُهم (Ω)

نام مخصوص در SI	یکای فرعی برحسب یکاهای اصلی	فرمول مناسب	کمیت فرعی
فاراد (F)	$\frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$	$C = \frac{q}{V}$	ظرفیت خازن
$\frac{V}{m}$ یا $\frac{N}{C}$	$\frac{kg \cdot m}{A \cdot s^2}$	$E = \frac{F}{q}$	میدان الکتریکی
تسلا (T)	$\frac{kg}{A \cdot s^2}$	$B = \frac{F}{I \ell}$	میدان مغناطیسی

هر کدام از این کمیت‌ها و یکاهای فرعی آن‌ها را در بحث مربوط به خودشان دوباره بررسی می‌کنیم. کتاب درسی از بین کمیت‌های اصلی سه کمیت طول، جرم و زمان را زیر ذره‌بین قرار داده و برخی یکاهای غیر SI آن‌ها را معرفی کرده است. ما هم یک بار این سه کمیت را مرور می‌کنیم.

الف) برخی یکاهای طول می‌دانید که یکای استاندارد طول در SI، متر (m) است. سه تعریف برای متر در کتاب درسی آمده است^۱:

- تعریف قدیمی‌تر:** یک ده‌میلیونیم فاصله استوا تا قطب شمال، معادل یک متر است. این تعریف دیگر اعتبار ندارد، چون در طول زمان این فاصله تغییر می‌کند.
- تعریف عام:** دانشمندان در نزدیکی دو سر میله‌ای از جنس آلیاژ پلاتین - ایریدیوم در دمای $0^\circ C$ دو خط نازک حک کردند و فاصله میان این دو خط را برابر یک متر تعریف کردند. این میله، شاخص استاندارد همه خط‌کش‌های امروزی است.
- تعریف تخصصی و دقیق:** یک متر برابر مسافتی است که نور در مدت‌زمان $\frac{1}{299792458}$ s در خلأ می‌پیماید. این تعریف برای اندازه‌گیری‌های بسیار دقیق به کار می‌رود.

برخی یکاهای غیر SI طول: به جز متر یکاهای دیگری هم برای طول وجود دارد که خوب است آن‌ها را هم بدانید:

سال نوری (ly): یک سال نوری مسافتی است که نور در مدت یک سال در خلأ می‌پیماید (این تعریف مهم است و باید بلد باشید).

هر سال نوری برابر است با: زمان یک سال (برحسب ثانیه) $\times$ تندی نور در خلأ (برحسب m/s) $1 ly =$

حواستون باشه: سال نوری یکای زمان نیست، یکای طول!

یکای نجومی (AU): میانگین فاصله زمین تا خورشید برابر یک یکای نجومی است. ($1 AU = 1.5 \times 10^{11} m$) (این تعریف رو هم بهتره حفظ باشید).

نکته: ذرع، فرسنگ، فوت یا پا (ft)، اینچ (in)، یارد (yd) و مایل (mi) از یکاهای دیگر طول هستند که لازم نیست ضرایب تبدیلیشان را حفظ باشید، چون اگر در سؤال مطرح شود، ضریب تبدیل آن را به یکاهایی که شما بلد هستید می‌دهند؛ فقط در مورد مایل، بد نیست این را بدانید که مایل در خشکی و دریا یکسان نیست.

ب) برخی یکاهای جرم یکای جرم در SI، کیلوگرم (kg) است. دانشمندان جرم یک استوانه از جنس آلیاژ پلاتین - ایریدیوم را به عنوان یکای استاندارد جرم انتخاب کردند و آن را معادل 1 kg نامیدند.

نکته: خروار، من تبریز، سیر، مثقال، نخود، گندم و قیراط از یکاهای قدیمی و ایرانی جرم هستند. نگران نباشید! اگر در مسئله‌ای این یکاها را بدهند، ضریب تبدیل آن‌ها به یکاهای استاندارد را هم می‌دهند.

پ) برخی یکاهای زمان می‌دانید که ثانیه یکای استاندارد زمان است. دو تعریف برای ثانیه در کتاب درسی آمده است.

- تعریف عام و قدیمی:** 1 s برابر با $\frac{1}{86400}$ میانگین روز خورشیدی است. روز خورشیدی مدت‌زمان بین دو بار متوالی است که خورشید در بالاترین نقطه آسمان قرار می‌گیرد. (در واقع همون شبانه‌روز فودمونه)
- تعریف تخصصی و دقیق:** براساس تعداد معینی از نوسان‌های اتم سزیم در ساعت‌های اتمی تعریف می‌شود. (ساعت‌های اتمی بسیار دقیق‌اند و پس از چندین میلیون سال فقط 1 s جلو یا عقب می‌افتند).

نکته: دقیقه، ساعت، شبانه‌روز، هفته، ماه، سال و قرن هم یکاهای دیگر زمان هستند.

بازه زمانی (Δt): به مدت‌زمان بین آغاز و پایان یک رویداد، بازه زمانی می‌گویند. اگر آغاز رویداد در لحظه t_1 و پایان آن در لحظه t_2 اتفاق بیفتد، بازه زمانی این رویداد برابر است با:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

چهار عمل اصلی ریاضی و کمیت‌ها

الف) جمع و تفریق: شما فقط حق دارید کمیت‌های هم‌جنس با یکاهای یکسان را با هم جمع یا تفریق کنید. مثلاً سرعت را نمی‌شود با نیرو جمع کرد یا دو طول با واحدهای متفاوت (مثل فرسنگ و مایل دریایی) را هم همین‌طور! در فرمول‌های فیزیک، اگر علامت جمع یا منهای دیدید، مطمئن باشید که کمیت‌هایی که در آن فرمول با هم جمع یا منهای شده‌اند، هم‌جنس و هم‌واحدند؛ پس وقتی فرمولی مثل $E = K + U$ می‌بینیم، می‌فهمیم که E، K و U هر سه یک نوع کمیت‌اند و یکای آن‌ها هم یکسان است.

۱- کتاب درسی تأکید کرده نیازی به حفظ کردن این تعاریف‌ها نیست. اما بعضی وقت‌ها طراحان کنکور نظر متفاوتی دارند!

(ب) ضرب و تقسیم: شما می‌توانید دو یا چند کمیت هم‌جنس یا غیرهم‌جنس را در هم ضرب یا تقسیم کنید، ولی باید بدانید که هر وقت دو یا چند کمیت را در هم ضرب و تقسیم می‌کنید، یک کمیت جدید به دست می‌آید. مثلاً اگر جرم (m) را در شتاب (a) ضرب کنید، حاصل این ضرب نه از جنس جرم است و نه از جنس شتاب؛ بلکه از جنس کمیت دیگری به نام نیرو (F) است.

تست: در فرمول $P = mgh + P$ ، یکای P پاسکال و یکای h متر است. یکای pg کدام است؟

(۱) پاسکال
متر

(۲) متر
پاسکال

(۳) پاسکال

(۴) متر × پاسکال

پاسخ ۱: pg با هم جمع شده‌اند، پس با توجه به آنچه گفتیم P، P و mgh این سه، هم‌جنس‌اند و یکای آن‌ها پاسکال است؛ پس داریم:

$$pg \text{ یکای } = \frac{pg \text{ یکای}}{h \text{ یکای}} = \frac{\text{پاسکال}}{\text{متر}}$$

تست: در رابطه $\Delta x = \frac{1}{3}At^3 + \frac{1}{2}Bt^2 + Ct$ ، اگر یکای C، متر بر ثانیه و یکای t ثانیه باشد، یکای A و یکای B به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(مضارب $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ در رابطه یکا ندارند.)

(۱) متر
ثانیه و $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}^2}$

(۲) $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}^3}$ و $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}^2}$

(۳) $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}^3}$ و $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}^2}$

(۴) $\left(\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}\right)^3$ و $\left(\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}\right)^2$

پاسخ ۲: ضرب‌های $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ تأثیری در یکای کمیت‌ها ندارند، پس آن‌ها را نادیده می‌گیریم.

کام ۱: از آنجایی که ما فقط اجازه داریم کمیت‌های هم‌جنس را جمع یا تفریق کنیم، می‌توانیم ادعا کنیم که یکای Ct، Bt^2 و At^3 یکسان است:

$$Ct \text{ یکای} = Bt^2 \text{ یکای} = At^3 \text{ یکای}$$

کام ۲: یکای C و t را داریم، پس یکای B و A را هم می‌توانیم پیدا کنیم:

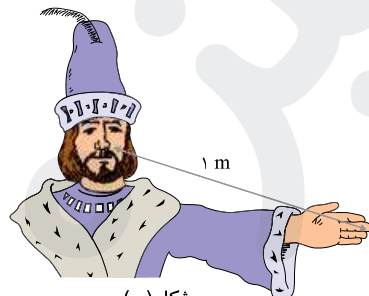
$$C \text{ یکای} \times t \text{ یکای} = A \text{ یکای} \times (t \text{ یکای})^3 \Rightarrow \frac{m}{s} \times s = A \text{ یکای} \times (s)^3 \Rightarrow A \text{ یکای} = \frac{m}{s^3}$$

$$C \text{ یکای} \times t \text{ یکای} = B \text{ یکای} \times (t \text{ یکای})^2 \Rightarrow \frac{m}{s} \times s = B \text{ یکای} \times (s)^2 \Rightarrow B \text{ یکای} = \frac{m}{s^2}$$

پاسخنامه تشریحی



شکل (الف)



شکل (ب)

۴- گزینه ۱: یکایی خوب است که قابلیت بازتولید داشته باشد (در دسترس همگان باشد) ولی تغییر نکند. یکاهایی مثل وجب و فاصله نوک بینی تا نوک انگشتان دست کشیده‌شده (شکل‌های الف و ب) در دسترس همگان هستند و به راحتی می‌شود آن‌ها را بازتولید کرد. (از کرامات شیخ ما چه عجب - پنجه را وا نمود و گفت و هب!) اما این ایراد را دارد که تغییرپذیر است؛ یعنی از دستی به دست دیگر تغییر می‌کند.

۵- گزینه ۴: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) دما کمیت اصلی و نیرو و فشار کمیت فرعی‌اند. ✗

(۲) زمان کمیت اصلی و فشار و سرعت کمیت فرعی‌اند. ✗

(۳) جریان الکتریکی و جرم کمیت اصلی و نیرو کمیت فرعی است. ✗

(۴) هر سه کمیت دما، جریان الکتریکی و جرم، اصلی‌اند. ✓

۶- گزینه ۲: ژول و کولن به ترتیب یکاهای مربوط به کمیت‌های فرعی انرژی (کار) و بار الکتریکی‌اند. بقیه یکاها مربوط به کمیت‌های اصلی‌اند. در جدول زیر، ۷ کمیت اصلی و یکاهای SI مربوط به آن‌ها آورده شده است:

کمیت	طول	جرم	زمان	دما	مقدار ماده	جریان الکتریکی	شدت روشنایی
یکا	متر	کیلوگرم	ثانیه	کلوین	مول	آمپر	کندلا (شمع)

۷- گزینه ۲: اصلی یا فرعی بودن کمیت‌های بیان‌شده در گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) جرم و زمان اصلی و فشار فرعی است. ✗

(۲) همه کمیت‌ها فرعی‌اند. ✓

(۳) چگالی و حجم فرعی و جریان الکتریکی اصلی است. ✗

(۴) همه کمیت‌ها اصلی‌اند. ✗

۸- گزینه ۴: اول این‌که می‌دانید کمیت‌های اصلی این‌ها هستند: طول، جرم، زمان، جریان الکتریکی، دما، مقدار ماده و شدت روشنایی. دوم این‌که کمیت‌های برداری که شما باید بلد باشید هم عبارت‌اند از:

جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، تکانه، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و گشتاور.

حالا شما باید گزینه‌ای را انتخاب کنید که کمیت‌هایش نه اصلی باشد و نه برداری؛ یعنی (۴).

۹- گزینه ۴ گزینه‌ای که حداقل یک کمیت اصلی یا یک کمیت برداری داشته باشد، قبول نیست. در واقع باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که همه کمیت‌های فرعی و نرده‌ای باشند. پس گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

(۱) در این گزینه جریان الکتریکی و زمان کمیت اصلی‌اند. (همین برای غلط بودن کافیست). در ضمن شتاب گرانشی و سرعت هم کمیت برداری‌اند. ✗

(۲) در این گزینه میدان الکتریکی کمیت برداری است، پس این گزینه را هم خط می‌زنیم. ✗

(۳) شدت روشنایی کمیت اصلی است. ✗

(۴) در این گزینه همه کمیت‌ها فرعی و نرده‌ای‌اند. ✓

حواستون باشه: نیروی محرکه الکتریکی از پتانسیل پتانسیله، گول کلمه نیرو رو که اولش اومده نفورین.

۱۰- گزینه ۲ فشار از رابطه $P = \frac{F}{A}$ به دست می‌آید، اما ابتدا لازم است یکای نیرو را برحسب یکاهای اصلی به دست بیاوریم. همان‌طور که در تست‌های قبل هم گفتیم، برای این کار از رابطه $F = ma$ استفاده می‌کنیم.

$$F = ma \Rightarrow F \text{ یکای } = \text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow P \text{ یکای } = \frac{\text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$$

توجه: مبنای کنکور سراسری، کتاب درسی است و ما هم باید کاملاً به کتاب درسی مقید باشیم. با توجه به جدولی که در صفحه ۷ کتاب درسی آمده است، برخی کمیت‌های فرعی، یکایی با نام مخصوص (که نام یک دانشمند است) دارند. طبق گفته کتاب درسی این یکا، یکای SI و یکایی که برحسب یکاهای اصلی بیان شده است، یکای فرعی نامیده می‌شود. برای مثال پاسکال (Pa) یکای SI فشار و $\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}$ یکای فرعی فشار است یا ژول (J) یکای SI انرژی و $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$ یکای فرعی انرژی است. پس اگر در تست‌های کنکور یکای فرعی یک کمیت را خواستند، باید به دنبال آن یکایی از کمیت باشید که برحسب یکاهای اصلی است.

۱۱- گزینه ۲ به کمک رابطه انرژی جنبشی $K = \frac{1}{2}mv^2$ می‌توان نوشت:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K \text{ یکای } = m \text{ یکای} \times (v \text{ یکای})^2 = \text{kg} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow \text{یکای انرژی} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

بدون یکا

۱۲- گزینه ۱ یکای کمیت‌های داده شده در گزینه‌ها را برحسب یکاهای اصلی می‌نویسیم:

$$(۱) \text{ میدان مغناطیسی: } B = \frac{F}{Il} \Rightarrow B \text{ یکای } = \frac{F \text{ یکای}}{(I \text{ یکای}) \times (l \text{ یکای})} = \frac{(m \text{ یکای}) \times (a \text{ یکای})}{(I \text{ یکای}) \times (l \text{ یکای})} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} \quad \checkmark$$

همین جا جواب تست مشخص شد، ولی ما این کار را برای گزینه‌های دیگر هم انجام می‌دهیم.

$$(۲) \text{ شار مغناطیسی: } \Phi = AB \Rightarrow \Phi \text{ یکای } = (A \text{ یکای}) \times (B \text{ یکای}) = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} \quad \times$$

در رابطه بالا، یکای B را با توجه به آن چه در (۱) به دست آوردیم، جای گذاری کردیم.

$$(۳) \text{ میدان الکتریکی: } E = \frac{F}{q} \Rightarrow E \text{ یکای } = \frac{F \text{ یکای}}{q \text{ یکای}} = \frac{F \text{ یکای}}{(I \text{ یکای}) \times (t \text{ یکای})} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{A} \times \text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} \quad \times$$

$$(۴) \text{ نیروی محرکه القایی: } \varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon \text{ یکای } = \frac{\Phi \text{ یکای}}{t \text{ یکای}} = \frac{\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2}}{\text{s}} = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^3} \quad \times$$

در رابطه بالا یکای Φ را با توجه به آن چه در (۲) به دست آوردیم، جای گذاری کردیم.

توجه: براساس مبنایی که جدول صفحه ۷ کتاب درسی برای ما و شما تعیین کرده است، یکای SI میدان مغناطیسی (یعنی یکا با نام مخصوص)، تسلا (T) است. البته میدان مغناطیسی یکای دیگری با نام مخصوص دارد که گاوس (G) نامیده می‌شود، ولی یکای SI میدان مغناطیسی نیست.

۱۳- گزینه ۴ برای این که بتوانیم یکای کمیت A را محاسبه کنیم، باید به این نکته توجه کنیم که در صورتی کمیت $\frac{1}{2}A$ با کمیت mgx قابل جمع است که هر دو کمیت هم جنس باشند و یکای معادل داشته باشند؛ پس برای پیدا کردن یکای کمیت A کافی است یکای mgx را به دست آوریم. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} m \text{ یکای} = \text{kg} \\ g \text{ یکای} = \text{m/s}^2 \\ x \text{ یکای} = \text{m} \end{array} \right\} \Rightarrow mgx \text{ یکای} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

۱۴- گزینه ۲ در گزینه‌ها فقط دو کمیت انرژی و توان داریم؛ پس یکای آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{یکای انرژی} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \quad \text{یکای توان} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

بنابراین mgx و کمیت A از جنس انرژی‌اند.

تیزبازی: می‌دانید که mgx یا mgh فرمول انرژی پتانسیل گرانشی است، پس کمیت A از جنس انرژی است.

درس ۴: تبدیل یکا و نمادگذاری علمی

در این درس‌نامه سه موضوع مهم تبدیل یکای زنجیره‌ای، کاربرد پیشوندهای SI و نمادگذاری علمی را می‌خوانید.

الف) تبدیل یکای زنجیره‌ای اساس تبدیل یکای زنجیره‌ای، برابر قراردادن دو یکای متفاوت از یک نوع کمیت است؛ مثلاً اینچ و سانتی‌متر هر دو

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$$

یکای طول‌اند و اگر بخواهیم آن‌ها را برابر قرار دهیم، باید بنویسیم:

مراحل این روش تبدیل یکا را با یک مثال و گام‌به‌گام برایتان می‌گوییم:

فرض کنید می‌خواهیم بینیم 22 in معادل چند سانتی‌متر است.

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$$

گام ۱: تساوی‌ای را که بین دو یکا برقرار است، می‌نویسیم. هر اینچ برابر 2.54 cm است، یعنی:

گام ۲: تساوی‌ای را که در گام اول نوشتیم، به صورت یک کسر که برابر ۱ است درمی‌آوریم (اسم این کسر را می‌گذاریم کسر تبدیل).

$$\frac{1 \text{ in}}{2.54 \text{ cm}} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} = 1$$

نکته: یکایی را که می‌خواهیم، کمیت را برحسب آن بنویسیم، در صورت و یکایی را که قرار است حذف (تبدیل) شود، در مخرج می‌نویسیم.

مثلاً در این‌جا می‌خواهیم اینچ را به سانتی‌متر تبدیل کنیم، پس باید سانتی‌متر در صورت و اینچ در مخرج باشد (یعنی $1 = \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}}$).

گام ۳: مقدار داده‌شده را در کسر تبدیل مناسب (به گونه‌ای که در گام دوم گفتیم) ضرب می‌کنیم و به این ترتیب کمیت از یک یکا به یکای دیگر تبدیل می‌شود:

$$22 \text{ in} = 22 \cancel{\text{ in}} \times \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \cancel{\text{ in}}} = 22 \times 2.54 \text{ cm} = 55.88 \text{ cm}$$

بیشتر وقت‌ها کار تبدیل یکا به کمی سفت‌تره.

مثلاً برای این‌که بتوانیم یکای A را به D تبدیل کنیم، اول باید A را به B و بعد به C و در نهایت به D تبدیل کنیم. برای این کار باید چند کسر تبدیل را در هم ضرب کنیم. تست زیر را ببینید تا منظورمان را بفهمید:

تست: ۵ سیر معادل چند گرم است؟ (یک سیر ۱۶ مثقال و هر مثقال $4/6 \text{ g}$ است).

$$368 \text{ (۴)}$$

$$36/8 \text{ (۳)}$$

$$184 \text{ (۲)}$$

$$18/4 \text{ (۱)}$$

پاسخ ۴: براساس داده‌های سؤال نمی‌توانیم مستقیماً سیر را به گرم تبدیل کنیم، بلکه باید سیر را به مثقال، سپس مثقال را به گرم تبدیل کنیم، پس طبق

دستورالعملی که گفتیم، کسرهایی را که لازم داریم، می‌نویسیم:

$$1 \text{ مثقال} = \frac{4/6 \text{ g}}{1 \text{ مثقال}} \rightarrow \text{می‌خواهیم مثقال حذف شود، پس مثقال را در مخرج می‌نویسیم.}$$

$$16 \text{ مثقال} = 1 \text{ سیر} \rightarrow \text{می‌خواهیم سیر حذف شود، پس سیر را در مخرج می‌نویسیم.}$$

حالا به صورت زنجیره‌ای ۵ سیر را به گرم تبدیل می‌کنیم:

$$5 \text{ سیر} = 5 \times \frac{16 \text{ مثقال}}{1 \text{ سیر}} \times \frac{4/6 \text{ g}}{1 \text{ مثقال}} = 5 \times 16 \times 4/6 \text{ g} = 368 \text{ g}$$

حالا سعی کنید تست بعدی را اول خودتان حل کنید و بعد پاسخ آن را بخوانید. **هواستون به صورت و مفرج کسر تبدیل‌ها باشه!**

تست: یک فوت برابر ۱۲ اینچ و یک یارد برابر ۳ فوت است. ۴۵ اینچ برابر چند یارد است؟

$$12/5 \text{ (۴)}$$

$$37/5 \text{ (۳)}$$

$$1/25 \text{ (۲)}$$

$$3/75 \text{ (۱)}$$

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in} , \quad 1 \text{ ya} = 3 \text{ ft}$$

↓
یارد

پاسخ ۲: از کسرهایی تبدیل زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. به انتخاب کسرها دقت کنید.

$$45 \text{ in} = 45 \cancel{\text{ in}} \times \frac{1 \cancel{\text{ ft}}}{12 \cancel{\text{ in}}} \times \frac{1 \text{ ya}}{3 \cancel{\text{ ft}}} = 45 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} = 1.25 \text{ ya}$$

۱- کتاب درسی هم در درس‌نامه و هم در تمرین‌های آخر فصل، حساسی به تبدیل یکای زنجیره‌ای پرداخته است و از این طریق، پیام خودش را به طراحان کنکور داده است که به این موضوع به طور ویژه توجه کنند.

ب) استفاده از پیشوندهای SI

جدول مقابل را ببینید. در این جدول پیشوندهای کوچک کننده و بزرگ کننده استاندارد را با ضریب تبدیلیشان آورده ایم.

هر کدام از این پیشوندها، نماد یک عدد از مرتبه 10^n (یا همان 10^n) است که به آن **ضریب تبدیل** می گوئیم. هر وقت ضریب تبدیل، ابتدای یک یکا قرار بگیرد، اندازه یکا را به همان میزان بزرگ یا کوچک می کند؛ مثلاً کیلو یعنی 10^3 و وقتی ابتدای یکایی مثل متر قرار می گیرد، می شود km که هر ۱ km معادل 10^3 m است. پیشوندهایی را که در این جدول رنگی کردیم حتماً حفظ باشید. یکاهای پیشونددار را می توانید در دو مرحله به یکای دیگر تبدیل کنید. این دو مرحله را با یک مثال ساده توضیح می دهیم: فرض کنید قرار است بگوییم ۷ mg چند kg است.

گام ۱: برداشتن پیشوند اولیه و جایگزین کردن ضریب تبدیلیش به جای آن؛ میلی را برمی داریم و به جای آن 10^{-3} قرار می دهیم. $7 \text{ mg} = 7 \times 10^{-3} \text{ g}$

گام ۲: گذاشتن پیشوند جدید با ضرب کسر ضریب تبدیل پیشوند جدید / نماد پیشوند جدید در یکا. در این مثال پیشوند جدید کیلو است. پس مقداری را که در گام اول به دست آوردیم، در $\frac{k}{10^3}$ ضرب می کنیم. برای تمرین تست زیر را حل کنید:

تست: $4/9 \text{ hm}$ چند μm است؟

۱) $4/9 \times 10^{-6}$

۲) $4/9 \times 10^6$

۳) $4/9 \times 10^{-8}$

۴) $4/9 \times 10^8$

پاسخ ۴) h را برمی داریم و به جایش 10^2 قرار می دهیم و حاصل را در $\frac{\mu}{10^{-6}}$ ضرب می کنیم:

$$4/9 \times 10^2 \text{ m} \times \frac{\mu}{10^{-6}} = 4/9 \times 10^8 \mu\text{m}$$

نکته: اگر واحد یک کمیت، توان دار باشد (مثل m^2)، توان آن را در تبدیل یکا هم در نظر می گیریم؛ مثلاً مساحت 4 m^2 برحسب سانتی متر مربع برابر است با:

$$4 \text{ m}^2 \times \left(\frac{\text{cm}}{10^{-2}}\right)^2 = 4 \times 10^4 \text{ cm}^2$$

تست: 4000 mm^3 معادل چند سانتی متر مکعب است؟

۱) 4×10^2

۲) 4×10^1

۳) ۴

۴) 4×10^{-1}

پاسخ ۳) در mm^3 ، «میلی» را برمی داریم و به جای آن 10^{-3} می گذاریم؛ یعنی $(10^{-3} \text{ m})^3$ و حاصل را در $\left(\frac{\text{cm}}{10^{-2}}\right)^3$ ضرب می کنیم:

$$4000 \times (10^{-3} \text{ m})^3 \times \left(\frac{\text{cm}}{10^{-2}}\right)^3 = 4000 \times \frac{10^{-9}}{10^{-6}} \text{ cm}^3 = 4000 \times 10^{-3} \text{ cm}^3 = 4 \text{ cm}^3$$

یکاهای غیر SI معروف

نکته: یکاهای غیر SI (اما معروف) دیگری هستند که باید معادلشان را با یکاهای SI بدانیم. در جدول زیر، این یکاها را معرفی کرده ایم و در فصل خودشان از آنها استفاده خواهیم کرد.

نام کمیت	یکای غیر SI	معادل یکا در SI
حجم	L (لیتر)	10^{-3} m^3
فشار	atm (اتمسفر)	10^5 Pa
فشار	cmHg (سانتی متر جیوه)	1360 Pa^*

نام کمیت	یکای غیر SI	معادل یکا در SI
بزرگی میدان مغناطیسی	G (گاوس)	10^{-4} T
انرژی	cal (کالری)	$4/2 \text{ J}$
زمان	ساعت	3600 s
زمان	دقیقه	60 s
چگالی	g/cm^3 (گرم بر سانتی متر مکعب)	10^3 kg/m^3
چگالی	g/L (گرم بر لیتر)	1 kg/m^3
تندی	km/h (کیلومتر بر ساعت)	$\frac{1}{3/6} \text{ m/s}$
زاویه	درجه	$\frac{\pi}{180} \text{ rad}$

* یکای سانتی متر جیوه در صورتی که چگالی جیوه $13/6 \text{ g/cm}^3$ و $g = 10 \text{ N/kg}$ معرفی شود، معادل 1360 Pa است.

تست: 360 km/h ، چند متر بر ثانیه است؟

(۱) $0/36$

(۲) $0/1$

(۳) $129/6$

(۴) 100

پاسخ (۴) داریم:

$$360 \frac{\text{km}}{\text{h}} / \text{h} = 360 \times \frac{10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 100 \text{ m/s}$$

نکته: برای تبدیل یکاهای متر بر ثانیه و کیلومتر بر ساعت می‌توانید از الگوی روبه‌رو استفاده کنید:

$$(\text{km/h}) \xrightarrow[\times 3/6]{\times 1} (\text{m/s})$$

مثلاً اگر در تست قبل بخواهیم km/h را به m/s تبدیل کنیم، باید 360 km/h را در $3/6$ ضرب کنیم:

$$360 \times \frac{1}{3/6} = 100 \text{ m/s}$$

تست: $\frac{2\pi}{9} \text{ rad/s}$ ، معادل چند درجه بر دقیقه است؟

(۱) 2400

(۲) 4800

(۳) 40

(۴) 80

$$1 \text{ درجه} = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \Rightarrow \frac{180 \text{ درجه}}{\pi \text{ rad}} = 1$$

$$60 \text{ s} = 1 \text{ min} \Rightarrow \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 1$$

$$\frac{2\pi}{9} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times \frac{180 \text{ درجه}}{\pi \text{ rad}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 2400 \frac{\text{درجه}}{\text{min}}$$

پاسخ (۱) کسر تبدیل‌های مناسب برای این تبدیل یکا، این‌ها هستند:

کام روش زنجیره‌ای، تبدیل یکا را انجام می‌دهیم:

ب) استفاده از نمادگذاری علمی

تندی نور در خلأ 300000000 m/s است. حالا اگر بخواهیم این عدد بزرگ را به توان ۲ برسانیم (مثلاً در فرمول $E = mc^2$) باید یک ۹ بنویسیم و ۱۶ تا صفر جلوش بگذاریم. ما در فیزیک با این عددهای خیلی بزرگ و یا خیلی کوچک زیاد سروکار داریم. تکنیک نمادگذاری علمی ما را از شر این صفرهای مزاحم خلاص می‌کند. طبق این روش باید عدد A را به صورت $a \times 10^n$ بنویسیم، به طوری که $1 \leq a < 10$ و n یک عدد صحیح باشد؛ مثلاً برای تندی نور می‌نویسیم $3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

$$0/00052 \text{ kg} \xrightarrow{\text{رقم ممیز را به جلو می‌کشیم.}} 5/2 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

$$39200000 \text{ m} \xrightarrow{\text{رقم ممیز را عقب می‌بریم.}} 3/92 \times 10^7 \text{ m}$$

همین‌طور که می‌بینید، n برابر تعداد ارقامی است که ممیز را جابه‌جا می‌کنیم. البته هر وقت ممیز را به سمت چپ جابه‌جا کنیم، n مثبت و هر وقت ممیز را به سمت راست جابه‌جا کنیم، n منفی است.

تست: حجم بنزین مصرفی در ایران، در یک سال 26000000000 L است. این مقدار حجم برحسب نمادگذاری علمی، چند لیتر است؟

(تجربیه نوبت دوم خارج ۱۴۰۲)

- (۱) $2/60 \times 10^{10}$ (۲) $2/60 \times 10^{11}$ (۳) $2/6 \times 10^9$ (۴) $2/6 \times 10^{11}$

پاسخ ۱: برای این که این عدد به صورت نمادگذاری علمی دربیاید، باید آن را به صورت $2/6 \times 10^n$ بنویسیم:

$$26000000000 \xrightarrow{\text{۱۰ رقم ممیز را عقب می‌بریم}} 2/6 \times 10^{10} \text{ L}$$

رقم ۱۰

مقداری که به دست آوردیم از نظر ریاضی همان ۱ است.

تست: کدام گزینه $4650 \mu\text{m}$ را برحسب کیلومتر به صورت نمادگذاری علمی نشان می‌دهد؟

- (۱) $4/650 \times 10^{-6}$ (۲) 465×10^{-8} (۳) 4650×10^{-9} (۴) $4/65 \times 10^{-12}$

پاسخ ۱: کسر تبدیل‌های مناسب برای تبدیل یکا را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} \Rightarrow \frac{10^{-6} \text{ m}}{1 \mu\text{m}} = 1 \\ 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \Rightarrow \frac{1 \text{ km}}{10^3 \text{ m}} = 1 \end{cases}$$

$$4650 \mu\text{m} \times \frac{10^{-6} \text{ m}}{1 \mu\text{m}} \times \frac{1 \text{ km}}{10^3 \text{ m}} = 4650 \times 10^{-9} \text{ km}$$

گام ۲: با روش زنجیره‌ای تبدیل یکا را انجام می‌دهیم:

$$4650 \times 10^{-9} \text{ km} = 4/650 \times 10^{-6} \text{ km}$$

گام ۳: حالا مقدار به دست آمده را به صورت نمادگذاری علمی می‌نویسیم:

حواستون باشه: ۲ و ۳ مقدارهای درستی‌اند، اما به صورت نمادگذاری علمی نوشته نشده‌اند.

پاسخنامه تشریحی

۱۴- گزینه ۲: ضریب تبدیل‌های لازم را به دست می‌آوریم:

$$1 \text{ ذرع} = 10^4 \text{ cm} \Rightarrow \frac{10^4 \text{ cm}}{1 \text{ ذرع}} = 1, \quad 1 \text{ فرسنگ} = 6000 \text{ ذرع} \Rightarrow \frac{6000 \text{ ذرع}}{1 \text{ فرسنگ}} = 1$$

گام ۱: به کمک ضریب تبدیل‌های به دست آمده در گام اول و با استفاده از روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$48 \text{ فرسنگ} \times \frac{6000 \text{ ذرع}}{1 \text{ فرسنگ}} \times \frac{10^4 \text{ cm}}{10^4 \text{ cm}} = 30 \times 10^6 \text{ cm}$$

۱۵- گزینه ۲: ضریب تبدیل‌ها را به دست می‌آوریم:

$$1 \text{ سیر} = 10 \text{ چارک} \Rightarrow \frac{10 \text{ سیر}}{1 \text{ چارک}} = 1, \quad 1 \text{ چارک} = 4 \text{ چارک} \Rightarrow \frac{4 \text{ چارک}}{1 \text{ من تبریز}} = 1, \quad 100 \text{ من تبریز} = 1 \text{ خروار} \Rightarrow \frac{100 \text{ من تبریز}}{1 \text{ خروار}} = 1$$

$$1 \text{ سیر} = 16 \text{ مثقال} \Rightarrow \frac{16 \text{ مثقال}}{1 \text{ سیر}} = 1$$

گام ۲: باز هم می‌ریم سراغ روش تبدیل زنجیره‌ای:

$$3/5 \text{ خروار} \times \frac{100 \text{ من تبریز}}{1 \text{ خروار}} \times \frac{4 \text{ چارک}}{1 \text{ من تبریز}} \times \frac{10 \text{ سیر}}{1 \text{ چارک}} \times \frac{16 \text{ مثقال}}{1 \text{ سیر}} = 3/5 \times 100 \times 4 \times 10 \times 16 \text{ مثقال} = 2/24 \times 10^5 \text{ مثقال}$$

۱۶- گزینه ۲: دیگه لازم نیست نه ما و نه شما ضریب تبدیل‌ها رو به صورت جداگانه به دست بیاریم. یاد بگیرید که توی تبدیل زنجیره‌ای، ضریب تبدیل‌های لازم رو بنویسید.

$$10^{-4} \text{ kg} = 10^{-4} \text{ kg} \times \frac{10^3 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \times \frac{10^3 \text{ mg}}{1 \text{ g}} = 10^2 \text{ mg}$$

جرم گیره کاغذ برحسب میلی گرم به صورت مقابل به دست می‌آید:

تیزبازی: توی لنگور برای حل تست‌ها باید سرعت عمل داشته باشیم. به همین دلیل برای تبدیل یکاها، مخصوصاً یکاهای پیشونددار می‌توانید به جای نوشتن

کامل مراحل تبدیل زنجیره‌ای، این کار را به فرم زیر انجام دهید:

$$10^{-4} \text{ kg} \xrightarrow{\text{تبدیل به g}} 10^{-1} \text{ g} \xrightarrow{\text{تبدیل به mg}} 10^2 \text{ mg}$$

۱۷- گزینه ۲: حل این سؤال از روش تبدیل زنجیره‌ای بسیار راحت است:

$$P = 20 \text{ kPa} \times \frac{10^3 \text{ Pa}}{1 \text{ kPa}} \times \frac{1 \text{ cmHg}}{1360 \text{ Pa}} = 14/7 \text{ cmHg}$$

۱۸- گزینه ۴ یکای جرم در SI کیلوگرم است؛ بنابراین با استفاده از روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$۱۸۲ \text{ قیراط} = ۱۸۲ \times \frac{۲۰۰ \text{ mg}}{۱ \text{ قیراط}} \times \frac{۱۰^{-۳} \text{ g}}{۱ \text{ mg}} \times \frac{۱۰^{-۳} \text{ kg}}{۱ \text{ g}} = ۳۶۴۰۰ \times ۱۰^{-۶} \text{ kg} = ۳/۶۴ \times ۱۰^{-۲} \text{ kg}$$

۱۹- گزینه ۳ کام به کمک روش تبدیل زنجیره‌ای، ارتفاع هواپیما از سطح دریا را برحسب متر به دست می‌آوریم:

$$۳۰۰۰۰ \text{ پا} = ۳۰۰۰۰ \times \frac{۱۲ \text{ اینچ}}{۱ \text{ پا}} \times \frac{۲/۵ \text{ cm}}{۱ \text{ اینچ}} \times \frac{۱۰^{-۲} \text{ m}}{۱ \text{ cm}} = ۹۰۰۰ \text{ m}$$

$$۳۰۰۰۰ \text{ پا} = ۳۰۰۰۰ \times \frac{۱ \text{ یارد}}{۳ \text{ پا}} = ۱۰۰۰۰ \text{ یارد}$$

۲۰- گزینه ۳ کام، باز هم روش تبدیل زنجیره‌ای:

$$۲۱۶ \frac{\text{km}}{\text{h}} = ۲۱۶ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{۱۰^{-۳} \text{ m}}{۱ \text{ km}} \times \frac{۱ \text{ mi}}{۱۸۰۰ \text{ m}} \times \frac{۱ \text{ h}}{۶۰ \text{ min}} = ۲ \frac{\text{mi}}{\text{min}}$$

۲۱- گزینه ۱ روش تبدیل زنجیره‌ای:

$$۱۲۰ \text{ km} = ۱۲۰ \text{ km} \times \frac{۱۰^{-۳} \text{ m}}{۱ \text{ km}} \times \frac{۱۰^{-۲} \text{ cm}}{۱ \text{ m}} \times \frac{۱ \text{ درج}}{۱۰۴ \text{ cm}} \times \frac{۱ \text{ فرسنگ}}{۶۰۰۰ \text{ درج}} = ۱۹ \text{ فرسنگ}$$

۲۲- گزینه ۲ کام تندی کشتی برحسب کیلومتر بر ساعت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۱۸ \text{ گره} = ۱۸ \times \frac{۱۸۵۲ \text{ m}}{۱ \text{ گره}} \times \frac{۱ \text{ km}}{۱۰۰۰ \text{ m}} \times \frac{۱ \text{ h}}{۳۶۰۰ \text{ s}} = ۳۲/۴ \text{ km/h}$$

۲۳- گزینه ۲ کام تندی کشتی برحسب مایل بر ساعت برابر است با:

$$۳۲/۴ \frac{\text{km}}{\text{h}} = ۳۲/۴ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{۱ \text{ mi}}{۱/۸ \text{ km}} = ۱۸ \text{ mi/h}$$

۲۴- گزینه ۲ یکای نجومی همان میانگین فاصله زمین تا خورشید است؛ پس $۱ \text{ AU} = ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} \text{ m}$ است. حالا از روش تبدیل زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$۱/۲ \text{ Tm} = ۱/۲ \text{ Tm} \times \frac{۱۰^{۱۲} \text{ m}}{۱ \text{ Tm}} \times \frac{۱ \text{ AU}}{۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} \text{ m}} = ۸ \text{ AU}$$

۲۵- گزینه ۱ گفتیم که یکای نجومی برابر میانگین فاصله زمین تا خورشید است. به کمک روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$v = ۳۰ \frac{\text{km}}{\text{s}} \times \frac{۱۰^{-۳} \text{ m}}{۱ \text{ km}} \times \frac{۱ \text{ AU}}{۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} \text{ m}} \times \frac{۶۰ \text{ s}}{۱ \text{ min}} = ۱۲ \times ۱۰^{-۶} \text{ AU/min}$$

۲۶- گزینه ۳ می‌دانیم ژول یکای SI انرژی است؛ بنابراین برای تبدیل kW.h به ژول باید kW.h را به یکای SI تبدیل کنیم. برای این کار kW (کیلووات) و h (ساعت) باید به یکاهای SI یعنی W (وات) و s (ثانیه) تبدیل شوند:

$$\begin{cases} ۱ \text{ kW} = ۱۰۰۰ \text{ W} \\ ۱ \text{ h} = ۳۶۰۰ \text{ s} \end{cases} \Rightarrow ۱ \text{ kW.h} = ۱ \times ۱۰۰۰ \text{ W} \times ۳۶۰۰ \text{ s} = ۳/۶ \times ۱۰^۶ \text{ W.s} \xrightarrow{۱ \text{ W.s} = ۱ \text{ J}} ۱ \text{ kW.h} = ۳/۶ \times ۱۰^۶ \text{ J}$$

۲۷- گزینه ۳ به کمک روش تبدیل زنجیره‌ای، تبدیل یکای هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(۱) \frac{\text{g}}{\text{cm}^۳} = \frac{\text{g}}{\text{cm}^۳} \times \frac{۱ \text{ kg}}{۱۰^۳ \text{ g}} \times \frac{۱۰^۶ \text{ cm}^۳}{۱ \text{ m}^۳} = ۱۰^۰ \text{ kg/m}^۳ \quad (۲) \frac{\text{N}}{\text{m}^۲} = \frac{\text{N}}{\text{m}^۲} \times \frac{۱ \text{ m}^۲}{۱۰^۴ \text{ cm}^۲} = ۱۰^{-۴} \text{ N/cm}^۲$$

$$(۳) \frac{\text{m}}{\text{s}^۲} = \frac{\text{m}}{\text{s}^۲} \times \frac{۱ \text{ km}}{۱۰^۳ \text{ m}} \times \frac{(۶۰ \text{ s})^۲}{۱ \text{ min}^۲} = ۳۶ \text{ km/min}^۲ \quad (۴) \frac{\text{cm}^۳}{\text{s}} = \frac{\text{cm}^۳}{\text{s}} \times \frac{۱ \text{ m}^۳}{۱۰^۶ \text{ cm}^۳} \times \frac{۱۰^۳ \text{ L}}{۱ \text{ m}^۳} \times \frac{۶۰ \text{ s}}{۱ \text{ min}} = ۷/۵ \text{ L/min}$$

۲۸- گزینه ۲ کام مساحت کره از رابطه $A = ۴\pi r^۲$ به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$۵ \times ۱۰^{۱۴} \text{ m}^۲ = ۵ \times ۱۰^{۱۴} \text{ m}^۲ \times \frac{۱ \text{ هکتار}}{۱۰۰۰۰ \text{ m}^۲} = ۵ \times ۱۰^{۱۰} \text{ هکتار}$$

۲۹- گزینه ۴ کام به کمک روش تبدیل زنجیره‌ای، مساحت را برحسب هکتار به دست می‌آوریم:

۳۰- گزینه ۴ کام مدت زمان حرکت کشتی برحسب ثانیه خواسته شده است؛ بنابراین ابتدا یکای تندی (s) را به متر بر ثانیه و یکای مسافت (l) را به متر تبدیل می‌کنیم:

$$s = ۱۲۰ \times \frac{۱۸۵۲ \text{ m}}{۱ \text{ گره}} \times \frac{۱ \text{ h}}{۳۶۰۰ \text{ s}} = ۶۰ \text{ m/s}$$

$$l = ۴۰۰۰ \text{ mi} \times \frac{۱۸۰۰ \text{ m}}{۱ \text{ mi}} = ۷۲ \times ۱۰^۵ \text{ m}$$

۳۱- گزینه ۴ کام حالا از رابطه $s = \frac{l}{\Delta t}$ مدت زمان پیمودن این مسافت را به دست می‌آوریم:

۳۲- گزینه ۴ کام ابتدا با برداشتن پیشوند میکرو و جایگزین کردن معادلش، میکروکولن را به کولن تبدیل می‌کنیم:

$$q = ۱۶۰ \times ۱۰^{-۱۰} \mu\text{C} \xrightarrow{\mu=۱۰^{-۶}} q = ۱۶۰ \times ۱۰^{-۱۰} \times ۱۰^{-۶} \text{ C} = ۱۶۰ \times ۱۰^{-۱۶} \text{ C}$$

۳۳- گزینه ۴ کام به جای ۱۶۰ معادلش را به صورت نمادگذاری علمی ($۱/۶ \times ۱۰^۲$) قرار می‌دهیم:

$$q = (۱/۶ \times ۱۰^۲) \times ۱۰^{-۱۶} = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۴} \text{ C}$$

۳۰- گزینه ۴ کام: ابتدا جرم زنبور عسل را به کیلوگرم تبدیل کرده و سپس به صورت نمادگذاری علمی می‌نویسیم:

$$0.15 \text{ g} = 0.15 \text{ g} \times \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} = 0.15 \times 10^{-3} \text{ kg} \xrightarrow{\text{به صورت نمادگذاری علمی}} 1.5 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

$$7 \times 10^{-3} \text{ mm} = 7 \times 10^{-3} \text{ mm} \times \frac{10^6 \text{ nm}}{1 \text{ mm}} = 7 \times 10^3 \text{ nm}$$

کام: قطر یک گلبول قرمز به صورت نمادگذاری علمی به صورت مقابل است:

مقدار به دست آمده به صورت نمادگذاری علمی و نیازی نیست که کار دیگه‌ای انجام بدهیم!

۳۱- گزینه ۴ کام: می‌دانیم که حجم آب برابر حجم استوانه است. حجم استوانه از رابطه «ارتفاع × مساحت قاعده» به دست می‌آید. مساحت قاعده و ارتفاع برابر

$$\text{مساحت قاعده} = \pi r^2 = 3.14 \times (10)^2 = 314 \text{ cm}^2, \text{ ارتفاع} = 400 \text{ mm} \times \frac{1 \text{ cm}}{10 \text{ mm}} = 40 \text{ cm}$$

است با:

$$\text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = 314 \times 40 = 1256 \times 10 \text{ cm}^3$$

کام: حالا حجم استوانه را به دست می‌آوریم:

کام: عهله نکنید! هنوز به جواب نرسیدیم. مهم آب رو بر حسب لیتر و به صورت نمادگذاری علمی فواسته:

$$\text{حجم آب} = 1256 \times 10 \text{ cm}^3 \times \frac{1 \text{ L}}{10^3 \text{ cm}^3} = 1256 \times 10^{-2} \text{ L} = 12.56 \times 10^{-1} \text{ L}$$

تیزبازی: می‌توانید π را ۳ در نظر بگیرید و نزدیک‌ترین جواب را انتخاب کنید.

۳۲- گزینه ۱ آهنگ (زمانی) هر کمیت برابر با نسبت تغییرات آن کمیت به مدت زمان تغییر است (یعنی $\frac{\Delta \text{کمیت}}{\Delta t}$)، بنابراین در این تست، آهنگ رشد گیاه برابر با

$$\frac{3/7 \text{ m}}{14 \text{ day}} = \frac{3/7 \text{ m}}{14 \text{ day}} \times \frac{10^6 \text{ } \mu\text{m}}{1 \text{ m}} \times \frac{1 \text{ day}}{86400 \text{ s}} = 3.06 \text{ } \mu\text{m/s}$$

۳۳- گزینه ۲ کام: با استفاده از روش تبدیل زنجیره‌ای، آهنگ خروج آب را بر حسب لیتر بر دقیقه به دست می‌آوریم:

$$125 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 125 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \times \frac{1 \text{ L}}{10^3 \text{ cm}^3} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 7.5 \text{ L/min}$$

کام: آهنگ خروج آب بر حسب لیتر بر دقیقه را داریم. ابتدا حجم آب خروجی از شیلنگ در مدت ۱ ساعت را بر حسب لیتر به دست می‌آوریم:

$$\text{حجم آب خروجی} = \text{زمان} \times \text{آهنگ خروج آب} = 7.5 \frac{\text{L}}{\text{min}} \times 60 \text{ min} = 450 \text{ L}$$

$$450 \text{ L} = 450 \text{ L} \times \frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ L}} = 0.45 \text{ m}^3$$

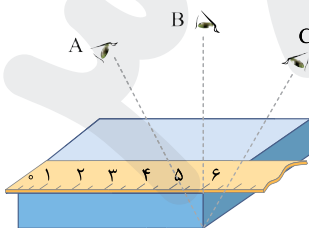
حالا حجم آب خروجی را بر حسب متر مکعب به دست می‌آوریم:

درس ۵: دقت وسیله‌های اندازه‌گیری

یک اندازه‌گیری هر قدر هم دقیق باشد، قطعی و بدون خطا نیست (اینو بهوش می‌کن عدم قطعیت در اندازه‌گیری). سه عامل در میزان دقیق بودن یک اندازه‌گیری مؤثر است:

۱ مهارت کسی که اندازه می‌گیرد. ۲ تعداد دفعاتی که اندازه‌گیری تکرار می‌شود. ۳ میزان دقت وسیله‌ای که با آن اندازه‌گیری می‌کنیم.

حالا این عوامل را یکی یکی بررسی می‌کنیم:



۱) مهارت کسی که اندازه می‌گیرد: هر چه قدر شخص آزمایشگر ماهرتر و با تکنیک‌تر باشد، دقیق‌تر

اندازه‌گیری می‌کند. مثلاً یکی از تکنیک‌های اندازه‌گیری با ابزار مدرج این است که خط دید عمود بر محل خواندن

اندازه باشد. در شکل مقابل، خط دید شخص B عمود است و او دقیق‌ترین مقدار طول را می‌بیند و اندازه‌گیری

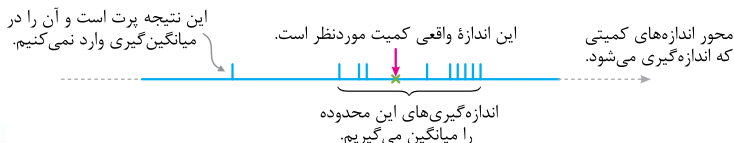
می‌کند. شخص A به طرف مقدار کمتر و شخص C به طرف مقدار بیشتر، خطا دارد.

۲) تعداد دفعاتی که اندازه‌گیری تکرار می‌شود: برای آن که خطای یک اندازه‌گیری را کم کنیم، چند بار اندازه‌گیری می‌کنیم و در نهایت

میانگین اندازه‌های به دست آمده را به عنوان نتیجه اندازه‌گیری می‌پذیریم. فقط در اعلام نتیجه اندازه‌گیری باید دو چیز را در نظر داشته باشیم:

اول این که اگر یک یا دو عدد با بقیه عددها اختلاف زیادی داشتند (یعنی پرت بودن) در محاسبه میانگین وارد نمی‌کنیم. (در شکل زیر، نتایج اندازه‌گیری یک

کمیت را با خط‌های نازک بر روی محور مشخص کرده‌ایم.)



دوم این که اگر تعداد رقم‌های عدد میانگین از رقم‌های هر یک از عددهای گزارش بیشتر باشد، آن را طوری گرد می‌کنیم که تعداد رقم‌هایشان برابر شود.

تست: طول یک جسم را شش بار اندازه گرفته‌ایم و مقادیرهای ۱۲/۷، ۱۲/۳، ۱۲/۵، ۱۲/۸، ۱۳/۹ و ۱۲/۶ (همگی برحسب سانتی‌متر) به دست آمده

است. مقداری را که باید گزارش کنیم، برحسب سانتی‌متر کدام است؟

- ۱۲/۵۸ (۱) ۱۲/۴۸ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۱۲/۶ (۴)

پاسخ (۴) همه مقادیر به جز ۱۳/۹ cm به هم نزدیک‌اند؛ بنابراین ۱۳/۹ cm را به عنوان گزارش پرت حذف می‌کنیم و میانگین بقیه را می‌گیریم:

$$\text{میانگین} = \frac{۱۲/۷ + ۱۲/۳ + ۱۲/۵ + ۱۲/۸ + ۱۲/۶}{۵} = ۱۲/۵۸ \text{ cm}$$

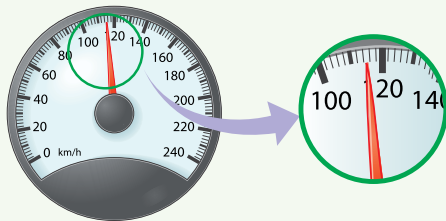
همین‌طور که می‌بینید حاصل میانگین چهار رقم دارد، در حالی که همه گزارش‌های اولیه سه‌رقمی‌اند؛ پس باید ۱۲/۵۸ را به سمت بالا گرد کنیم:

$$۱۲/۶ \text{ cm} = \text{طولی که باید گزارش کنیم}$$

(۳) میزان دقت وسیله‌ای که با آن اندازه‌گیری می‌کنیم: ابزارهای اندازه‌گیری اغلب یا مدرج‌اند یا دیجیتال (رقمی).

(الف) دقت وسایل اندازه‌گیری مدرج: خط‌کش معمولی، دماسنج جیوه‌ای، کولیس معمولی، ریزسنج معمولی و ... ابزارهای اندازه‌گیری مدرج هستند. در این وسایل دقت اندازه‌گیری برابر کمینه درجه‌بندی آن وسیله است. به عنوان نمونه، دقت اندازه‌گیری خط‌کشی که برحسب میلی‌متر درجه‌بندی شده برابر ۱ mm است.

(ب) دقت وسایل اندازه‌گیری دیجیتال: میزان دقت اندازه‌گیری ابزارهای دیجیتال برابر با کم‌ترین ارزش مکانی عددی است که نشان می‌دهند. مثلاً اگر مقداری که نمایشگر یک دماسنج دیجیتال نشان می‌دهد، $۳۷/۴^{\circ}\text{C}$ باشد، کم‌ترین ارزش مکانی این گزارش $۰/۱$ است؛ پس دقت این ابزار برابر $۰/۱^{\circ}\text{C}$ است.



تست: شکل مقابل، صفحه تندی‌سنج یک خودرو را نشان می‌دهد. دقت این تندی‌سنج

(برگرفته از کتاب درسی)

چند کیلومتر بر ساعت است؟

- ۰/۱ (۱)
۰/۲ (۲)
۱ (۳)
۲ (۴)

پاسخ (۴) همین‌طور که در شکل می‌بینید، بین ۱۰۰ km/h تا ۱۲۰ km/h به ۱۰ قسمت یکسان تقسیم شده است، پس کمینه تقسیم‌بندی تندی‌سنج یا همان

$$\text{دقت تندی‌سنج} = \frac{۱۲۰ - ۱۰۰}{۱۰} = ۲ \text{ km/h}$$

دقت وسیله برابر می‌شود با:

پاسخنامه تشریحی

۳۴- گزینه ۲ با توجه به متن کتاب درسی موارد الف، ب و ث (۳ مورد) نقش مهمی در افزایش دقت اندازه‌گیری دارند.

انتخاب پکاهای کوچک‌تر برای بیان نتیجه اندازه‌گیری تأثیری روی افزایش دقت اندازه‌گیری ندارد. هم‌چنین استفاده از ابزار اندازه‌گیری دیجیتال به جای ابزار مدرج الزاماً باعث افزایش دقت اندازه‌گیری نمی‌شود.

یعنی ممکنه یک خط‌کش مدرج، طول یک جسم رو تا مرتبه mm و یک خط‌کش دیجیتال طول همون جسم رو تا مرتبه cm گزارش کنه که به معنی اینه که خط‌کش مدرج دقیق‌تر از خط‌کش دیجیتاله.

۳۵- گزینه ۴ در خط‌کش (الف)، هر ۱ cm به ۲ قسمت مساوی و در خط‌کش (ب)، هر ۱ cm به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است؛ بنابراین کمینه درجه‌بندی خط‌کش‌ها که همان دقت اندازه‌گیری آن‌ها است، برابر است با:

$$\frac{۱ \text{ cm}}{۲} = ۰/۵ \text{ cm} \Rightarrow \text{دقت اندازه‌گیری خط‌کش (الف)} = ۰/۵ \text{ cm} = \frac{۱ \text{ cm}}{۲} = \text{کمینه درجه‌بندی خط‌کش (الف)}$$

$$\frac{۱ \text{ cm}}{۱۰} = ۰/۱ \text{ cm} = ۱ \text{ mm} \Rightarrow \text{دقت اندازه‌گیری خط‌کش (ب)} = ۱ \text{ mm} = \frac{۱ \text{ cm}}{۱۰} = \text{کمینه درجه‌بندی خط‌کش (ب)}$$

درجه‌بندی برحسب کیلومتر بر ساعت



درجه‌بندی برحسب مایل بر ساعت

۳۶- گزینه ۲ قسمت‌های درجه‌بندی شده صفحه تندی‌سنج برحسب کیلومتر بر ساعت (km/h)

و مایل بر ساعت (mi/h یا mph) را در شکل مقابل نشان داده‌ایم.

با توجه به شکل مقابل، در قسمت km/h، هر ۲۰ km/h به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است؛ بنابراین:

$$\frac{۲۰ \text{ km/h}}{۱۰} = ۲ \text{ km/h} \Rightarrow \text{دقت اندازه‌گیری تندی‌سنج} = ۲ \text{ km/h} = \text{کمینه درجه‌بندی برحسب km/h}$$

تست، دقت اندازه‌گیری را برحسب متر بر ثانیه می‌خواهد. با توجه به این که هر ۱ km/h معادل $\frac{۱}{۳/۶} \text{ m/s}$

است، داریم:

$$\frac{۲ \text{ km/h}}{۳/۶} = \frac{۲}{۳/۶} \text{ m/s} \Rightarrow \text{دقت اندازه‌گیری تندی‌سنج} = \frac{۲}{۳/۶} \text{ m/s}$$

هم‌چنین در قسمت mph (mi/h)، هر ۲۰ mph به ۲ قسمت مساوی تقسیم شده است؛ بنابراین:

$$\frac{۲۰ \text{ mph}}{۲} = ۱۰ \text{ mph} \Rightarrow \text{دقت اندازه‌گیری تندی‌سنج} = ۱۰ \text{ mph (mi/h)} = \frac{۲۰}{۲} = \text{کمینه درجه‌بندی برحسب mph}$$

۳۷- گزینه ۱ شکل‌های (الف) و (ب) به ترتیب یک ریزسنج و یک کولیس رقمی را نشان می‌دهد.

۳۸- گزینه ۳ دقت اندازه‌گیری ریزسنج رقمی برابر یک واحد از آخرین رقمی است که دستگاه می‌خواند که در واقع همان کم‌ترین ارزش مکانی عدد گزارش شده توسط ریزسنج است.

$$۰/۰۰۱ \text{ mm} = ۰/۰۰۱ \text{ mm} \Rightarrow \text{دقت اندازه‌گیری} = ۰/۰۰۱ \text{ mm}$$

۳۹- گزینه ۳ دقت ریزسنج را برحسب میکرومتر خواسته است، پس به کمک تبدیل یکای زنجیره‌ای آن را به میکرومتر تبدیل می‌کنیم:

$$۱ \text{ mm} = ۱۰^۳ \mu\text{m} \xrightarrow{\text{دقت را در مخرج می‌گذاریم تا حذف شود}} \frac{۱۰^۳ \mu\text{m}}{۱ \text{ mm}} = ۱$$

$$۰/۰۰۱ \text{ mm} \times \frac{۱۰^۳ \mu\text{m}}{۱ \text{ mm}} = ۱ \mu\text{m}$$

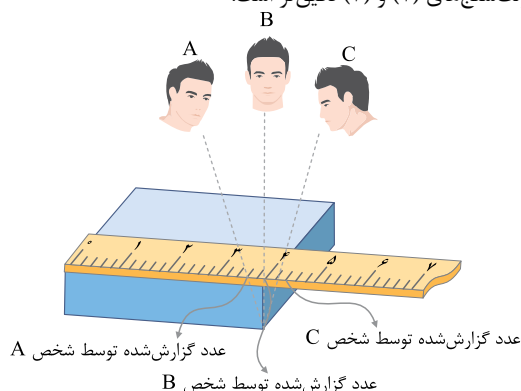
۳۸- گزینه ۳ هر چه مقدار عددی دقت اندازه‌گیری ولت‌سنج کوچک‌تر باشد، آن ولت‌سنج دقیق‌تر است. دقت اندازه‌گیری هر یک از ولت‌سنج‌ها را برحسب میلی‌ولت به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$(۱) \text{ دقت اندازه‌گیری ولت‌سنج } = ۰/۰۰۱ \text{ V} = ۱ \text{ mV} \quad (۲) \text{ دقت اندازه‌گیری ولت‌سنج } = ۱ \text{ mV} \quad (۳) \text{ دقت اندازه‌گیری ولت‌سنج } = ۰/۲ \text{ mV}$$

مقدار عددی دقت اندازه‌گیری ولت‌سنج (۳) از دو ولت‌سنج دیگر کم‌تر است؛ بنابراین ولت‌سنج (۳) از ولت‌سنج‌های (۱) و (۲) دقیق‌تر است.

۳۹- گزینه ۳ در شکل مقابل، خط‌چین‌ها امتداد نگاه اشخاص را نشان می‌دهند. اگر به محل برخورد خط‌چین‌ها و خط‌کش نگاه کنید، متوجه می‌شوید که عددی که **شخص B** می‌خواند دقیق‌تر از عدد خوانده شده توسط دو شخص دیگر است؛ چون امتداد نگاه شخص B تقریباً عمود بر انتهای جسم است. در این حالت **شخص C** طول جسم را بیشتر از مقدار واقعی و **شخص A** طول جسم را کم‌تر از مقدار واقعی گزارش می‌کند.

همه این توضیحات رو در شکل مقابل نشون دادیم.



عدد گزارش شده توسط شخص A
عدد گزارش شده توسط شخص B
عدد گزارش شده توسط شخص C

۴۰- گزینه ۲ برای این که نتیجه این اندازه‌گیری را محاسبه کنیم، باید میانگین عددهای گزارش شده را به دست آوریم. ولی با نگاه به جدول صورت سؤال متوجه می‌شویم که گزارش‌های شماره ۲ و ۵ با بقیه اختلاف زیادی دارند و خیلی پرت‌اند؛ پس آن‌ها را از میانگین‌گیری حذف می‌کنیم و میانگین بقیه را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{۱۳۲+۱۳۰+۱۲۹+۱۳۱+۱۳۰+۱۳۲+۱۳۱+۱۳۳}{۸} = ۱۳۱ \text{ km/h}$$

بخش ۲ چگالی

درس ۶: چگالی

چگالی نه جرم است و نه حجم! بلکه **چگالی**، نسبت جرم به حجم است. اگر چوب (با هر جرمی) بر روی آب شناور می‌ماند، دلیلش این است که «نسبت جرم به حجم» چوب از «نسبت جرم به حجم» آب کم‌تر است و اگر سکه مسی در آب فرو می‌رود و ته‌نشین می‌شود، دلیلش این است که «نسبت جرم به حجم» مس از «نسبت جرم به حجم» آب بیشتر است.

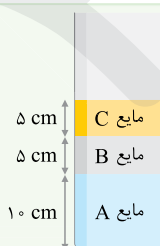
تست: در شکل روبه‌رو نسبت حجم به جرم کدام مایع بیشتر است؟

(۱) A

(۲) B

(۳) C

(۴) بستگی به جرم مایع‌ها دارد.



$$\frac{m_A}{V_A} > \frac{m_B}{V_B} > \frac{m_C}{V_C}$$

$$\frac{V_A}{m_A} < \frac{V_B}{m_B} < \frac{V_C}{m_C}$$

پاسخ ۳ مایعی که نسبت جرم به حجم آن بیشتر است، پایین‌تر قرار می‌گیرد؛ پس داریم:

۴۱- گزینه ۳ دقت کنید که صورت سؤال بیشترین نسبت حجم به جرم یعنی $(\frac{V}{m})$ را خواسته است، پس داریم: