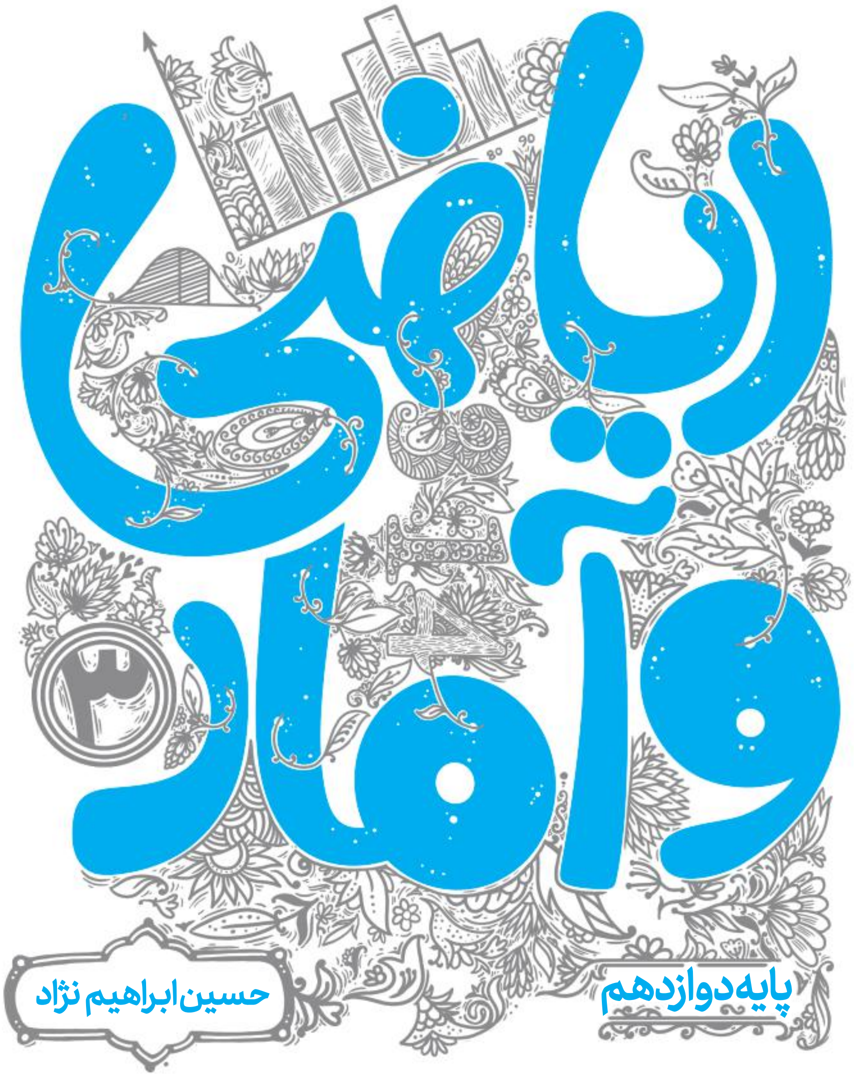
خدا
دانش
آگاهی



ریاضی و آمار ۳

پایه دوازدهم

حسین ابراهیم نژاد

گروه انتشاراتی کاگو

بیسترس

دوز ۴۰٪

سرشناسه: ابراهیم‌نژاد، حسین
عنوان: بیسترس ریاضی و آمار دوازدهم (دوز ۴۰٪)
مشخصات نشر: تهران، انتشارات کاگو
فروست: از مجموعه کتاب‌های مرجع کنکور کاگو
شابک: ۴-۵۴۴-۴۵۰-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپای مختصر
شماره کتابشناسی ملی: ۹۰۲۰۱۸۲

ناشر: گروه انتشاراتی کاگو
برندنشر: مرجع کنکور
گروه محصول: بیسترس
عنوان: بیسترس ریاضی و آمار دوازدهم (دوز ۴۰٪)
مؤلف: حسین ابراهیم‌نژاد
ناظر علمی تألیف: محمد مقصودی - الیاس سیفی
مسئول پروژه تألیف: پرستو منفرد
دستیار علمی تألیف: یاسمین میرزائی
ویراستاران علمی: زهرا انیشه - الهام جعفری - مینا جعفری - ندا صالح‌پور
طراحی جلد: قاسم بیرانوند
گرافیست متن: بهار قربانی
چاپخانه: واژه‌پرداز اندیشه
صحافی: واژه‌پرداز اندیشه
نوبت چاپ: اول
شمارگان: ۷۰۰
شابک: ۴-۵۴۴-۴۵۰-۶۰۰-۹۷۸
قیمت: ۸۱۰۰۰ تومان

این محصول معاف از مالیات می‌باشد.

فروشگاه: تهران، خیابان انقلاب، خیابان ۱۲فروردین، کوچه نوروز، پلاک ۳۸، ساختمان کاگو
تلفن: ۵۳۸۸۵-۰۲۱ پیامک: ۱۰۰۰۵۳۸۸۵ صندوق پستی: ۱۳۱۴۶۹۳۱۷۱
کاگو؛ توسعه و انتشار محتوای ناب ☎ 021-53885 KGOO.IR KGOOPUB

مقدمه ناشر

مأموریت کاگو

افزایش سطح دسترسی به محتوای ناب، معتبر و ارزشمند از طریق روش‌های روزآمد و خلاقانهٔ توسعهٔ محتوا برای تجربهٔ متفاوت خواندن، مطالعه و یادگیری مخاطبان

دانش‌آموزان عزیز، معلمان و مشاوران دل‌سوز و صدالبته اساتید و دانشمندان آیندهٔ سرزمینمان!

نزدیک به سی سال است که کاگو، با تمرکز بر تألیف و انتشار کتاب‌های آموزشی، برای شما جویندگان و آموزندگان دانش در ایران می‌کوشد. اکنون، که افتخار این را داشته‌ایم که هم‌گام با مخاطبانمان رشد کنیم و بلوغی نسبی را تجربه کنیم، بر آن شده‌ایم اندوخته‌هایمان را در این زمینه برای ارائهٔ خدمتی تازه روی دایره بریزیم!

ما در این راه، نخست وظایف خود را در جایگاه ناشر بازخوانی کردیم و یقین یافتیم «مدیریت نشر» مهم‌ترین شاخصهٔ هر انتشاراتی‌ست و ساده‌انگارانه است اگر از مدیریت علمی و آکادمیک نشر چشم بپوشیم. از این‌رو برای کشف، خلق و توسعهٔ بهترین رویکردها و شیوه‌های مدیریتی از بهترین و دست اول‌ترین منابع و کارآزموده‌ترین اساتید و مشاوران بهره گرفتیم.

سپس مهم‌ترین رسالتمان را پیش چشم آوردیم: **«تولید محتوای ناب»!**

همه می‌دانیم مؤلفان کتاب‌های کمک‌درسی و ناشران آموزشی سال‌هاست کتاب‌هایشان را با ساختاری ساده، معطوف و برگرفته از کتاب‌های درسی، منتشر می‌کنند و خوش‌بینیم اگر تصور کنیم در این راه به محتوای تولیدی همکارانشان حداقل نیم‌نگاهی نداشته‌اند. ثابت بودن محتوای کمک‌درسی و سختی طراحی درسنامه‌ها و آزمون‌های متنوع از یک‌سو و ایجاد تغییرات ماهیتی در نحوهٔ ورود به دانشگاه‌ها از سویی دیگر، اخیراً کتاب‌های آموزشی را مهجور و بی‌جان کرده بود.

با همهٔ این اوصاف، تجربه نشان داد در دوران همه‌گیری کرونا و پس از آن، کتاب در دسترس‌ترین، ارزان‌ترین و سهل‌ترین ابزار آموزش و توسعهٔ دانش بوده و هست. از این رو، ما بر آن شدیم به سیاق دیگر ناشران کمک‌آموزشی عمل نکنیم و طرحی نو دراندازیم. بنابراین، محتوای تولیدی‌مان را بازتعریف کردیم و کوشیدیم این پادشاه بزرگ[1] را ناب بیافرینم و آن را توسعه بخشیم. ما در این راه هر آن‌چه با تقلید از آثار و ایده‌های دیگران به رشتهٔ تحریر درآمد را محتوا ندانستیم، اما گاه نقطه‌ای سیاه بر صفحه‌ای سفید را بسیار غنی و سرشار از معنا یافتیم!

سال‌ها همراه با شما امتحانات و حتی گاه کنکورهای دشواری را از سرگذراندیم تا توانستیم «ناب‌بودن» را در جایگاه صفتی شایسته، در کنار ارزشمند بودن و اعتبار در مأموریت اصلی کاگو و به تَبع آن در محتوای نشرمان بگنجانیم.

منظور ما از کلیدواژهٔ ناب، توسعهٔ دائمی جریان محتوای با ارزش، خالص و کمال‌یافته است و عبارتِ معتبر به انتخاب و پردازش محتوای درست و استاندارد اشاره می‌کند و کلیدواژهٔ ارزشمند به معنی کاربردی و ارزش‌آفرین بودن برای مخاطب است.

اکنون افتخار می‌کنیم که توشهٔ سالیانمان و حاصل رنج سی‌ساله‌مان را ناب، ارزشمند و معتبر در قالب محصولی نو برای شما به ارمغان آوردیم و برای به بار نشاندن این صعود، تجربهٔ گذشته و نوآوری را در کوله‌بارمان گذاشته‌ایم.

شعار فعلی ما این است که متخصص تولید محتوای ناب، معتبر و ارزشمند هستیم!

محمدرضا سالکی
مدیر مسئول سازمان انتشاراتی کاگو

---

[1] ۱- اشاره به عبارت مشهور “Content is the king”

ویژگی‌های کتاب

مفاهیم کلیدی (TBC)

تمام محتوای کلیدی طبقه‌بندی‌شده هر درس، منطبق با کتاب‌های درسی ، در قالب فهرستی آورده شده است. هر TBC یک کد یکتا و سریالی درکتاب های دهم، یازدهم و دوازدهم دارد. محتوای کتاب حاضر بر اساس توالی این کدها آورده شده است. در بخش درسنامه و سوالات کتاب به صورت **۱۳۳** و در بخش پاسخنامه به صورت [ ] نشان داده شده است.

TBC پرتکرار

بسته به تکرار شدن یک TBC در امتحانات نهایی ۴ سال اخیر، TBC هایی با علامت (**+۱۳۳**) مشخص شده‌اند که دلالت بر اهمیت آن TBC در امتحانات نهایی دارد.

آزمون تشخیصی (ورودی)

برای هر فصل /درس، یک آزمون تشخیصی به عنوان ورودی فصل طراحی شده است. در آزمون تشخیصی به ازای هر TBC ، یک تا سه سوال طراحی شده است که کلیت TBC را پوشش می‌دهد. در این آزمون شماره هر سوال، با شماره TBC متناظر آن یکسان است. پاسخ‌گویی صحیح به این سوالات نشان‌دهنده آشنایی با کلیات مفهومی مطالب آن TBC است.

علامت بلد بودم /نبودم

درمقابل هر سوال آزمون تشخیصی دو مستطیل (بلد بودم ☐ بلد نبودم ☐) قرار داده شده است. شما می‌توانید وضعیت درستی پاسخگویی به هر سوال را علامت بزنید که بتوانید در زمان مطالعه صرفه‌جویی و نقاط ضعف خود را براساس tbc مشخص نمایید.

زمان مطالعه

برای درسنامه و تمرین های امتحانی و آزمون های هر بخش (با توجه به حجم دشواری آن بخش) "حداکثر" زمان مطالعه آورده شده است. همچنین بعد از مطالعه زمان فعالیت شما در مستطیل کناری ثبت می‌شود تا تفاوت حداکثر زمان قابل انجام و زمان خودتان را متوجه شوید.

بدفهمی رایج

اشکالات آموزشی پرتکرار و رایج برای دانش‌آموزان در کلاس درس، در قالب بدفهمی رایج در درسنامه ارائه شده‌اند.

سوالات ستاره‌دار

درکنار بعضی سوال‌ها علامت ⭑ وجود دارد. این علامت نشان‌دهنده اهمیت یا تکرار بیشتر در امتحانات نهایی اخیر است.

سوال های ویژه امتحان برای کنکور

در انتهای تمرین های هر فصل / درس سوالات تشریحی مفهومی تر و دشوارتر از امتحانات نهایی و تستی آورده شده است که دانش آموز تا حدودی با سوالات دشوارتر امتحانات نهایی پیش رو و سوالات کنکور آشنا شود.

جدول نشانگر TBC

در انتهای تمرین های امتحانی و سوال های ویژه امتحان، جدولی آورده شده است که نشانگر کدهای TBC مربوط به هر سوال است تا در صورت عدم پاسخگویی صحیح به هر سوال، به راحتی بتوانید شماره TBC مربوطه را بیابید.

جدول بودجه‌بندی امتحانات و پیام مشاوره

پیش از آغاز آزمون های دی و خرداد، جدول بودجه بندی آموزش و پرورش در امتحانات دی ، خرداد و شهریور به همراه پیام مشاوره‌ای برای نحوهٔ مطالعه و پاسخگویی به سؤالات امتحانات نهایی آورده شده است.

امتحانات دی و خرداد

در بخش آزمون ها، ۲ آزمون دی ماه (نوبت اول) از مدارس معتبر و ۴ آزمون خرداد یا شهریور ماه (نوبت دوم) از آخرین امتحانات نهایی برگزار شده و کاملا در قالب امتحانات نهایی هر درس قرار داده شده است. دانش آموز از این طریق بیشتر و بهتر با سوالات امتحانات نهایی و شرایط برگه امتحان آشنا می شود.

فلش کارت

در انتهای کتاب، فلش کارتی قرار داده شده است که حاوی مهمترین و پرتکرارترین مطالب امتحان های نهایی است ، به گونه ای که دانش آموز بتواند ۴ تا ۵ ساعت پیش از امتحان کل کتاب را به خوبی مرورکند.

بوک استوری

در انتهای کتاب بخشی به صورت تصویری / نموداری از کلیات مفاهیم TBC و در قالب ۴ صفحه چهاررنگ آورده شده است تا دانش آموز بتواند به راحتی مهم ترین مطالب کتاب را با صرف کمترین زمان ممکن، مرورکند.

کیوآرکد محتوای بیشتر

در فهرست و بوک استوری، کیوآرکدی جهت بارگذاری محتوا و آزمون هایی متناسب با آخرین تغییرات امتحانات نهایی و محتوای اضافه تر از کتاب قرار داده شده است که در طول سال به روز رسانی خواهد شد.

شماره ایندکس (جاانگشتی)

در لبه کتاب، جا انگشتی های چاپی قرار داده شده است که با آن ها کدهای tbc را سریع تر بیابید.

جدول ارزش محتوایی کتاب

این جدول برای اولین بار برای نمایش ارزش محتواهای داخل کتاب برای مخاطبان، معلمان و مشاوران طراحی و ارائه شده است. از این طریق مخاطب با حقایق محتوای ارائه شده مواجه شده و راحت تر برنامه ریزی می کند.

جدول حقایق ارزش محتوایی کتاب

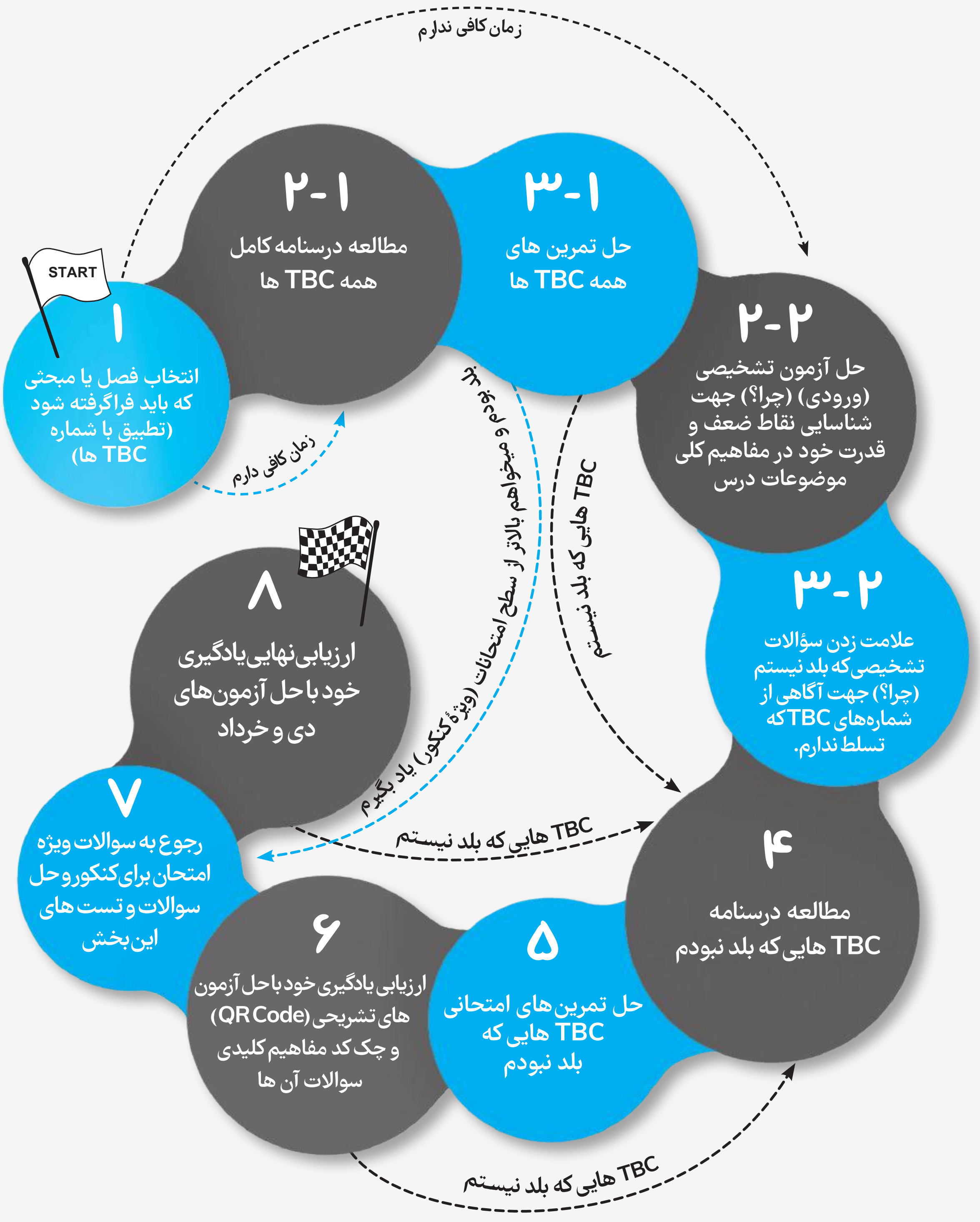
Content Facts

تعداد صفحه کتاب	۱۰۹
تعداد کل TBC ها	۲۳
تعداد TBC های پرتکرار	۱۵
تعداد کل سوالات	۲۹۳
تعداد سوالات امتحان نهایی	۷۹
تعداد تیپ سوالات پرتکرار	۱۷
کل زمان مورد نیاز برای مطالعه	**۲۵ ساعت و ۳۰ دقیقه**

یک دانش‌آموز متوسط باید چگونه باشد؟

تعداد ساعت مطالعه در هفته	۳
تعداد سؤال مورد نیاز در هفته	۱۰

نحوه استفاده از کتاب



زمان کافی ندارم

START

۱
انتخاب فصل یا مبحثی که باید فراگرفته شود (تطبیق با شماره TBC ها)

زمان کافی دارم

۱-۲
مطالعه درسنامه کامل همه TBC ها

۱-۳
حل تمرین های همه TBC ها

۲-۲
حل آزمون تشخیصی (ورودی) (چرا؟) جهت شناسایی نقاط ضعف و قدرت خود در مفاهیم کلی موضوعات درس

۲-۳
علامت زدن سؤالات تشخیصی که بلد نیستم (چرا؟) جهت آگاهی از شماره‌های TBC که تسلط ندارم.

TBC هایی که بلد نیستم

بلد بودم و میخواهم بالاتر از سطح امتحانات (ویژهٔ کنکور) یاد بگیرم

TBC هایی که بلد نیستم

۴
مطالعه درسنامه TBC هایی که بلد نبودم

۵
حل تمرین های امتحانی TBC هایی که بلد نبودم

TBC هایی که بلد نیستم

۶
ارزیابی یادگیری خود با حل آزمون های تشریحی (QR Code) و چک کد مفاهیم کلیدی سوالات آن ها

۷
رجوع به سوالات ویژه امتحان برای کنکور و حل سوالات و تست های این بخش

۸
ارزیابی نهایی یادگیری خود با حل آزمون‌های دی و خرداد

فهرست مطالب

فصل اول آمار و احتمال

پیام مشاوره‌ای

این فصل شامل دو بحث مستقل از هم (شمارش، احتمال – چرخهٔ آمار) است. برای فهم بهتر شمارش و احتمال از مثال‌های ساده‌ای که در ابتدای بحث آورده شده است شروع کنید. با مطالعهٔ چرخه آمار می‌آموزید که برای حل یک مسئله یا موضوع اجتماعی چگونه برنامه‌ریزی کنید و چه مراحل یا گام‌هایی را در پیش بگیرید.

تمرین‌های زیر را از کتاب درسی مطالعه کنید:

کار در کلاس صفحهٔ ۴، کار در کلاس صفحهٔ ۶، مثال صفحهٔ ۸، کار در کلاس صفحهٔ ۹، تمرین‌های ۲ تا ۸ صفحهٔ ۱۱، سؤال‌های ۱ تا ۳ کار در کلاس صفحهٔ ۱۸، فعالیت صفحهٔ ۱۹، سؤال ۲ و ۳ کار در کلاس صفحهٔ ۲۰، فعالیت صفحهٔ ۲۲، کار در کلاس صفحه‌های ۲۳ و ۲۴، تمرین‌های ۲ تا ۸ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶، تمرین‌های ۱۲ و ۱۳ صفحهٔ ۲۷، تمام تمرین‌های صفحه‌های ۳۹ تا ۴۴.

مفاهیم کلیدی

- آمار و احتمال
  - درس ۱: شمارش
    - + ۴۹ اصل جمع و اصل ضرب
    - ۵۰ نماد فاکتوریل
    - + ۵۱ جایگشت n شیء
    - ۵۲ تبدیل r شیء از n شیء
    - + ۵۳ ترکیب r شیء از n شیء
  - درس ۲: احتمال
    - + ۵۴ آزمایش تصادفی و فضای نمونه
    - ۵۵ پیشامد
    - + ۵۶ اعمال روی پیشامدها
    - + ۵۷ احتمال یک پیشامد (ساده، جایگشت، تاریخ تولد، احتمال اعمال روی پیشامد)
  - درس ۳: چرخهٔ آمار در حل مسائل
    - ۵۸ ۵ گام چرخهٔ آمار (نمودار میانگین- انحراف معیار)

آزمون تشخیصی مفاهیم کلیدی

بلدبودم بلدنبودم

☐ ☐ **۴۹.۱** به چند طریق می‌توان فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین ۵ خودکار با رنگ‌های متفاوت و ۶ مداد با رنگ‌ها متفاوت و ۴ روان‌نویس با رنگ‌های متفاوت انتخاب کرد؟

☐ ☐ **۴۹.۲** به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی با حروف «پ، ج، د، ح» ساخت؟ (بدون تکرار حروف)

☐ ☐ **۵۰** مقدار هر یک از عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۵!+۶!}{۳!}=$

ب) $۰!+۰!+۱!+۱!=$

☐ ☐ **۵۱** با ارقام ۱، ۰ و ۳ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

☐ ☐ **۵۲** حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $P(۵,۲)=$

ب) $P(۴,۱)=$

☐ ☐ **۵۳** تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به‌دست آورید.

☐ ☐ **۵۴.۱** فضای نمونه‌ای حاصل از انداختن یک هرم چهار وجهی با وجه‌های مساوی (منتظم) و دو سکه، چند عضو دارد؟

☐ ☐ **۵۴.۲** درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) از ۳ مداد و ۵ خودکار در یک جعبه به طور تصادفی یکی خارج می‌کنیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی مجموعه دو عضوی {خودکار، مداد} است.

ب) مشاهده دو مهره قرمز، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن فقط ۷ مهره قرمز وجود دارد یک پدیده تصادفی است.

☐ ☐ **۵۵** دو تاس را پرتاب می‌کنیم پیشامد اینکه مجموع اعداد آمده ۷ باشد، چند عضو دارد؟

☐ ☐ **۵۶** دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آنکه مجموع عددهای روشده برابر ۴ باشد یا دو عدد یکسان رو شوند را مشخص کنید.

۵۷.۱ خانواده‌ای سه فرزند دارد. احتمال اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشد، را به‌دست آورید.

۵۷.۲ احتمال اینکه در طول مسافرت ماشین خراب شود $\frac{۲}{۷}$ است. احتمال اینکه تا انتهای سفر ماشین سالم باشد را به‌دست آورید.

۵۷.۳ از بین ۳ دانش‌آموز دختر و ۴ دانش‌آموز پسر ۲ دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر دو دانش‌آموز از یک جنسیت باشند، محاسبه کنید.

۵۸.۱ نقد و بررسی و ایده‌های جدید مربوط به کدام گام چرخه آمار است؟

۵۸.۲ نمودار جعبه‌ای داده‌های مقابل را رسم کنید. ۱,۹,۵,۱۵,۴,۷,۱۲,۸,۱۷,۲۱,۳۰

۵۸.۳ اگر در یک بررسی آماری مقدار میانگین داده‌ها ۸ و انحراف معیار داده‌ها ۰/۷۵ باشد، نمودار میانگین انحراف معیار داده‌ها را رسم کنید.

پاسخ

[۴۹.۱] ۱۵=تعداد انتخاب‌ها

[۴۹.۲] ۲۴=اصل ضرب

[۵۰] الف) ۳۵، ب) ۴

[۵۱] ۴

[۵۲] الف) ۲۰، ب) ۴

[۵۳] $\begin{pmatrix}۶\\۴\end{pmatrix}=۱۵$

[۵۴.۱] $n(S)=۴\times۲\times۲=۱۶$

[۵۴.۲] الف) نادرست، ب) نادرست

[۵۵] $n(A)=۶$

[۵۶] $\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶),(۱,۳),(۳,۱)\}$

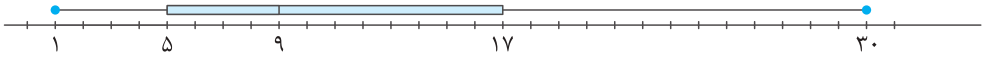
[۵۷.۱] $n(S)=۲\times۲\times۲=۸\ ,\ n(A)=۳\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۸}$

[۵۷.۲] $P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$

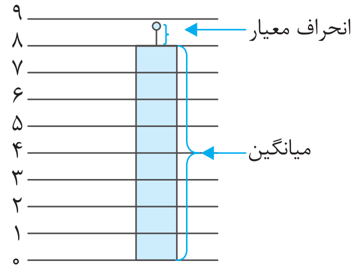
[۵۷.۳] $P(A)=\frac{۳}{۷}$

[۵۸.۱] گام پنجم (بحث و نتیجه‌گیری)

[۵۸.۲]



[۵۸.۳]



درس اول: شمارش

مفاهیم آموزشی [حداکثر زمان مطالعه: ۱۴۰ دقیقه] زمان شما:

۴۹ اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m+n$ طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

سؤال اگر فردی در یک رستوران بتواند فقط یک نوع خورشت را از بین ۵ نوع خورشت یا یک نوع کباب را از بین سه نوع کباب متفاوت انتخاب کند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

پاسخ با توجه به اصل جمع خواهیم داشت:

$m=۵\ ,\ n=۳$

تعداد حالت‌های انتخاب$=m+n=۵+۳=۸$

نکته ۱- هرگاه در صورت سؤال از واژهٔ «یا» استفاده شده باشد، از اصل جمع می‌توانیم استفاده کنیم.

۲- اصل جمع را می‌توان به بیش از دو عمل تعمیم داد. یعنی اگر کاری را بتوان به چند روش مختلف انجام داد و در روش اول $n_۱$ انتخاب، در روش دوم $n_۲$ انتخاب، ... و در روش kام n_k انتخاب وجود داشته باشد و این روش‌ها با هم انجام نشوند، کار موردنظر به $(n_۱+n_۲+...+n_k)$ روش انجام می‌شود.

سؤال پارسا از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند، یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟

پاسخ با توجه به متن سؤال پارسا این کتاب را باید از بین کتاب‌های ریاضی، یا از بین کتاب‌های عربی و یا از بین کتاب‌های ادبیات انتخاب کند، پس با توجه به:

$m=۳\ ,\ n=۲\ ,\ r=۴$

تعداد حالت‌های ممکن $=m+n+r=۳+۲+۴=۹$

● **اصل ضرب**

اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام پذیرد، به طوری که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل، آن عمل از $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است.

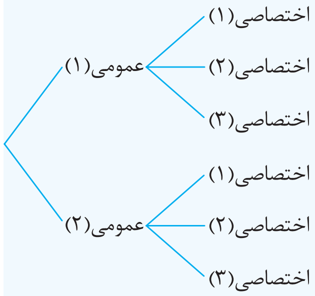
سوال کوروش دانشجوی سال دوم است که از بین دو درس عمومی، یک درس و از میان سه درس اختصاصی، یک درس باید انتخاب کند، او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

پاسخ با توجه به متن سؤال به کمک اصل ضرب می‌توان به جواب رسید:

$m = ۳ \ , \ n = ۲$

تعداد حالت‌های ممکن $= m \times n = ۳ \times ۲ = ۶$

نمودار حالت‌های ممکن:



نکته ۱- هنگامی که در صورت سؤال از واژهٔ «و» استفاده شده باشد، برای حل سؤال از اصل ضرب استفاده کنید.

۲- اصل ضرب برای بیشتر از دو عمل هم قابل تعمیم است و به کار برده می‌شود. یعنی اگر عملی از چند بخش مجزا تشکیل شده باشد و بخش اول به $n_۱$ روش، بخش دوم به $n_۲$ روش و... بخش kام به n_k روش قابل انجام باشد، این عمل به $n_۱ \times n_۲ \times \ldots \times n_k$ روش قابل انجام است.

۳- برای حل برخی از سؤالات نیاز است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

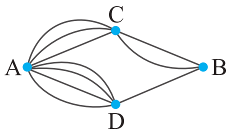
سوال نیما از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند، یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟

پاسخ با توجه به اصل ضرب خواهیم داشت:

$m = ۳ \ , \ n = ۲ \ , \ r = ۴$

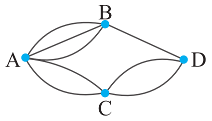
تعداد حالت‌های ممکن $= m \times n \times r = ۳ \times ۲ \times ۴ = ۲۴$

سوال بین شهرهای A، B، C و D مطابق شکل مقابل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟



پاسخ با توجه به صورت سؤال، نباید از شهر B عبور کرد. پس تنها یک مسیر $C \rightarrow A \rightarrow D$ وجود دارد بنابراین: تعداد راه‌ها $= ۳ \times ۴ = ۱۲$

سوال با توجه به نمودار مقابل به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟



پاسخ به دو روش می‌توان از A به D سفر کرد. مسیر $A \rightarrow B \rightarrow D$ یا مسیر $A \rightarrow C \rightarrow D$. بنابراین در این مثال از اصل جمع و ضرب هر دو استفاده کرده‌ایم:

$$\text{تعداد کل راه‌ها} = \underset{A\rightarrow B\rightarrow D}{\underset{\uparrow}{(۳ \overset{\text{و}}{\times} ۱)}} \overset{\text{یا}}{+} \underset{A\rightarrow C\rightarrow D}{\underset{\uparrow}{(۲ \overset{\text{و}}{\times} ۲)}} = ۳ + ۴ = ۷$$

۵۰ نماد فاکتوریل

از نماد فاکتوریل که به صورت ! است، برای نمایش ضرب اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش استفاده می‌کنیم؛ به عبارتی $n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times n$

$n!$ (n فاکتوریل) یعنی ضرب همهٔ اعداد طبیعی از عدد ۱ تا عدد n.

مثلاً: $۳! = ۱ \times ۲ \times ۳$ ، $۴! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$

قرارداد: صفر فاکتوریل و ۱ فاکتوریل را برابر عدد ۱ درنظر می‌گیریم: $۰! = ۱ \ , \ ۱! = ۱$

سـوال حاصل هر یک از موارد زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $۴!+۳!+۰!$

ب) $\frac{۵!}{۳!}$

ج) $۳\times۴!+۳!$

پاسـخ

الف) $۴!+۳!+۰!=(۱\times۲\times۳\times۴)+(۱\times۲\times۳)+۱=۲۴+۶+۱=۳۱$

ب) $\frac{۵!}{۳!}=\frac{\cancel{۱}\times\cancel{۲}\times\cancel{۳}\times۴\times۵}{\cancel{۱}\times\cancel{۲}\times\cancel{۳}}=\frac{۴\times۵}{۱}=\frac{۲۰}{۱}=۲۰$

ج) $۳\times۴!+۳!=۳(۱\times۲\times۳\times۴)+(۱\times۲\times۳)=۳(۲۴)+۶=۷۸$

نکته گاهی ممکن است لازم نباشد فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم. در این حالت به عدد موردنظرمان که رسیدیم جلوی آن علامت فاکتوریل گذاشته و دیگر ادامه نمی‌دهیم این شرایط معمولاً در ساده کردن کسرها اتفاق می‌افتد.

$$۶!=۶\times\underbrace{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}_{۵!}=۶\times۵!$$

مثلاً:

$$۶!=۶\times۵\times\underbrace{۴\times۳\times۲\times۱}_{۴!}=۶\times۵\times۴!$$

با توجه به نمونهٔ گفته‌شده در حالت کلی $n!$ را می‌توان به‌صورت زیر نیز نمایش داد.

$$\vdots$$

$$n!=n\times\underbrace{(n-۱)\times(n-۲)\times\ldots\times۳\times۲\times۱}_{(n-۱)!}=n\times(n-۱)!$$

$$n!=n\times(n-۱)\times\underbrace{(n-۲)\times(n-۳)\ldots\times۳\times۲\times۱}_{(n-۲)!}=n\times(n-۱)\times(n-۲)!$$

$$\vdots$$

سـوال حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{۷!}{۳!}$

ب) $\frac{۵!-۴!}{۴!}$

ج) $\frac{n!}{(n-۱)!}$

د) $\frac{(n+۱)!}{n!}$

پاسـخ

الف) $\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴}{۱}=\frac{۸۴۰}{۱}=۸۴۰$

ب) $\frac{۵!-۴!}{۴!}=\frac{۵\times۴!-۴!}{۴!}$

از $۴!$ (عامل مشترک) در صورت کسر فاکتور می‌گیریم:

$=\frac{۴!(۵-۱)}{۴!}=\frac{۵-۱}{۱}=۴$

ج) $\frac{n!}{(n-۱)!}=\frac{\cancel{(n-۱)!}\times n}{\cancel{(n-۱)!}}=\frac{n}{۱}=n$

د) $\frac{(n+۱)!}{n!}=\frac{\cancel{n!}\times(n+۱)}{\cancel{n!}}=\frac{n+۱}{۱}=n+۱$

سـوال حاصل $\frac{۶!}{۳!}$ کدام است؟

۱) ۲۰

۲) ۳۰

۳) ۱۲۰

۴) ۳۵

پاسـخ گزینهٔ «۳»

$$\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=\frac{۶\times۵\times۴}{۱}=\frac{۱۲۰}{۱}=۱۲۰$$

سـوال درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل $\frac{۸!}{۴!}$ برابر $۲!$ است.

ب) $۲\times۳!+۳!$ برابر $۷!$ است.

پاسـخ الف) نادرست

در صورتی که $۲!$ برابر ۲ است.

$$\frac{۸!}{۴!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵}{۱}=۱۶۸۰$$

ب) نادرست

در صورتی که:

$$۲\times۳!+۳!=۲(۳\times۲\times۱)+(۳\times۲\times۱)=۱۲+۶=۱۸$$

$$۷!=۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵۰۴۰$$

۵۱ + جایگشت n شیء

هر یک از حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌گویند.

مثلاً: تمام جایگشت‌های سه حرفی A, B, C عبارت‌اند از: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

بنابراین حروف A، B و C به ۶ طریق می‌توانند کنار هم قرار بگیرند.

در بسیاری از مواقع نوشتن تمامی جایگشت‌ها کاری وقت‌گیر و همراه با اشتباه است. ولی می‌توان به کمک اصل جمع و ضرب تعداد آنها را به صورت زیر به دست آورد.

حل مثال بالا: در خانهٔ اول هر یک از حروف A یا B یا C می‌تواند قرار گیرد. پس به سه حالت ممکن است پُر شود. یکی از حروف در خانهٔ اول قرار می‌گیرد و برای خانهٔ دوم دو حالت باقی می‌ماند. یکی از دو حرف در خانهٔ دوم قرار می‌گیرد و در نهایت برای خانهٔ سوم تنها یک حالت باقی می‌ماند.

خانهٔ اول	خانهٔ دوم	خانهٔ سوم	
۳	۲	۱	تعداد حالات
AیاBیاC	یکی از ۲حرف باقی‌مانده	یک‌حرف باقی‌مانده	

کاردرکلاس [صفحهٔ ۴ کتاب درسی] با اعداد ۹,۲,۶,۷,۸ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسـخ با توجه به خانه‌های خالی زیر خواهیم داشت:

در خانهٔ اول هر یک از ۵ عدد داده شده می‌توانند قرار گیرند، یک رقم در این خانه قرار می‌گیرد و برای خانهٔ دوم هر یک از چهار رقم باقی مانده می‌توانند قرار گیرند. به همین ترتیب بقیه خانه‌ها را پر کرده و داریم:

خانهٔ اول	خانهٔ دوم	خانهٔ سوم	خانهٔ چهارم	خانهٔ پنجم
۵	۴	۳	۲	۱
۸یا۷یا۶یا۲یا۹				

تعداد مطلوب $=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵!$

با توجه به مثال‌های بالا نکته زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

نکته تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء برابر است با $n!$؛ مثلاً تعداد کلمات ۴ حرفی که با حروف کلمه «کتاب» می‌توان نوشت برابر است با $۴!$

سـوال با اعداد ۷,۹,۸,۶,۴,۲,۱ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسـخ در خانهٔ اول (صدگان) یکی از ۷ رقم می‌توانند قرار گیرند. یک رقم در این جایگاه قرار می‌گیرد. برای خانهٔ دوم (دهگان) هر یک از شش رقم باقی‌مانده می‌توانند قرار گیرند، یک رقم در این جایگاه قرار می‌گیرد. برای خانهٔ سوم (یکان)، پنج رقم برای انتخاب شدن باقی می‌ماند.

اول	دوم	سوم	
۷	۶	۵	تعداد حالت‌ها
۱یا۲یا۴یا۶یا ۸یا۹یا۷			

تعداد مطلوب $=۷\times۶\times۵=۲۱۰$

سوال با اعداد ۲,۵,۶,۷ چند عدد سه‌رقمی باتکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ چون در صورت سؤال با تکرار قید شده است، هر بار که یک عدد استفاده شد و در یک جایگاه قرار گرفت، بار دیگر هم دوباره می‌تواند استفاده شود. پس خواهیم داشت:

۴	۴	۴	←تعداد حالت‌ها
۷یا۶یا۵یا۲	۷یا۶یا۵یا۲	۷یا۶یا۵یا۲	

تعداد مطلوب = ۴ × ۴ × ۴ = ۶۴

سوال با اعداد ۷,۸,۵,۶,۰ چند عدد ۳رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ توجه داشته باشید که در ارقام داده شده عدد صفر نمی‌تواند در سمت چپ اعداد قرار گیرد زیرا خوانده نمی‌شود، پس:

سوم	دوم	اول	
۳	۴	۴	←تعداد حالت‌ها
		۶یا۵یا۷یا۸	

⇐ ۴ × ۴ × ۳ = ۴۸

همان‌طور که می‌بینید در خانهٔ دوم (دهگان) هر یک از ۳ عدد باقی‌مانده یا عدد صفر می‌توانند قرار گیرند، پس باز هم از بین ۴ عدد باقی مانده که می‌تواند در خانهٔ دوم قرار گیرد یکی را قرار می‌دهیم.

سوال با ارقام ۱,۲,۴,۷,۹ چند عدد ۳رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ [*نهایی* - دی ۹۹]

پاسخ برای آنکه عدد موردنظر فرد باشد، باید رقم یکانش فرد باشد. رقم یکان می‌تواند یکی از سه رقم ۱، ۷ یا ۹ باشد (۳ حالت). فقط یکی از این ارقام را در خانهٔ یکان قرار می‌دهیم. برای خانهٔ صدگان ۴ رقم باقی می‌ماند که یکی از ارقام در آن قرار می‌گیرد. در پایان ۳ رقم برای خانهٔ دهگان می‌ماند.

یکان	دهگان	صدگان	
۳	۳	۴	←تعداد حالت‌ها
۹یا۷یا۱			

⇐ ۴ × ۳ × ۳ = ۳۶

سوال با اعداد ۳,۱,۴,۶,۷ چند عدد سه رقمی زوج با تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ چون عدد موردنظر زوج است، پس رقم یکان باید یکی از اعداد زوج ۶ یا ۴ باشد و چون تکرار مجاز است، داریم:

۲	۵	۵
۶یا۴		

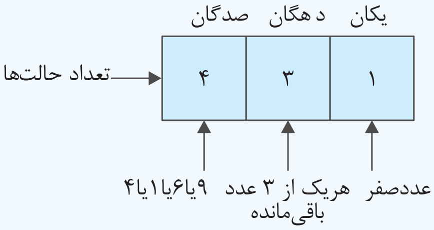
تعداد عددهای زوج = ۵ × ۵ × ۲ = ۵۰

نکته اگر برای ساختن اعداد زوج یا مضرب ۵ صفر جزء ارقام باشد و تکرار ارقام هم مجاز نباشد، آنگاه برای به دست آوردن تعداد کل حالت‌های ممکن یکبار صفر را در یکان قرار می‌دهیم و تعداد حالت‌های آن را به دست می‌آوریم و بار دیگر تعداد حالت‌هایی که یکان صفر نباشد را به دست می‌آوریم سپس تعداد هر دو حالت را با هم جمع می‌کنیم.

سوال چه تعداد اعداد زوج ۳ رقمی بدون تکرار با ارقام ۴،۱،۶،۰،۹ می‌توان نوشت؟

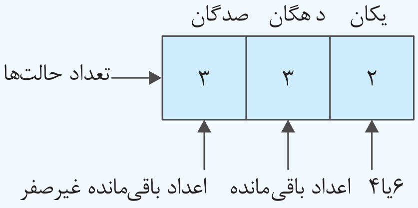
پاسخ با توجه به نکته تعداد اعداد زوجی که رقم یکان آنها صفر است را جداگانه بررسی می‌کنیم:

حالت اول: تعداد اعداد زوجی که رقم یکان آنها صفر است:



$\Rightarrow ۴\times۳\times۱=۱۲$

حالت دوم: تعداد اعداد زوجی که رقم یکان آنها صفر نباشد (۶ یا ۴ باشد):



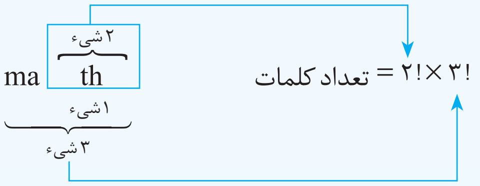
$\Rightarrow ۳\times۳\times۲=۱۸$

جمع دو حالت ← ۳۰ = ۱۸ + ۱۲ = تعداد ۳رقمی‌های زوج

نکته اگر بخواهیم تعداد جایگشت‌هایی که در آن قرار است چند شیء خاص کنار هم باشند را به دست آوریم، باید آنها را در یک بسته قرار دهیم و آن را یک شیء جدید درنظر بگیریم. سپس جایگشت‌های این شیء با بقیه اشیاء و همچنین جایگشت‌های اشیاء داخل بسته را حساب و در هم ضرب می‌کنیم.

سوال با حروف کلمهٔ math چند کلمهٔ چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که حروف t و h کنار هم باشند؟

پاسخ



تعداد کلمات = ۲!×۳!

۵۲ تبدیل r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنیم:

(r کوچک‌تر یا مساوی n است ($r \leq n$))

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

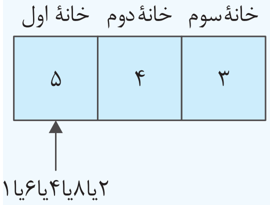
مثلاً حالت‌های مختلف ساخت اعداد که با تغییر جای ارقام اعداد جدید ساخته می‌شود یا حالت‌های مختلف ساخت کلمات که با تغییر جای حروف کلمات جدید ایجاد می‌گردد.

سوال با ارقام ۱،۶،۴،۸،۲ چند عدد ۳رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ روش اول: $n=۵\ ,\ r=۳$

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times\cancel{۲!}}{\cancel{۲!}}=\frac{۵\times۴\times۳}{۱}=۶۰$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب حل می‌کنیم:



$\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} ۵\times۴\times۳=۶۰$

سوال ۱۲ نفر در مسابقات دو شرکت می‌کنند. به چند حالت ممکن است نفرات اول تا سوم مشخص شوند؟

پاسخ چون ترتیب انتخاب مهم است پس، از فرمول ترتیب استفاده می‌کنیم.

$n=۱۲\ ,\ r=۳$

$$P(۱۲,۳)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times\cancel{۹!}}{\cancel{۹!}}=۱۳۲۰$$

نکته در تبدیل $P(n,r)$ اگر $r=n$ باشد، داریم:

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{۰!}=n!$$

+ ۵۳ ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء را که جابه‌جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدیدی تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n=\binom{n}{r}$ نمایش داده می‌شود و با دستور مقابل محاسبه می‌شود:

$$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(r کوچک‌تر یا مساوی n است $r\le n$)

مثلاً برای انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر برای تشکیل یک گروه ۳ نفره که ترتیب انتخاب اهمیت ندارد، بلکه کافی است فقط سه نفر انتخاب شوند.

کاردرکلاس [صفحهٔ ۸ کتاب درسی] تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی که با حروف A, B, C, M, F, S می‌توان ساخت را به دست آورید.

پاسخ با توجه به اینکه جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ایجاد نمی‌کند پس می‌توان از فرمول ترکیب استفاده کرد:

$n=۶\ ,\ r=۳$

$$C_۳^۶=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!(۶-۳)!}=\frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{۳!\times\cancel{۳!}}=\frac{\cancel{۶}\times۵\times۴}{\cancel{۳\times۲}\times۱}=۲۰$$

نکته برای انتخاب r شیء از n شیء متمایز روابط مقابل برقرار است:

۱) $\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!\times۰!}=۱\Rightarrow\binom{n}{n}=۱$

۲) $\binom{n}{۱}=\frac{n!}{۱!(n-۱)!}=\frac{n(n-۱)!}{۱!(n-۱)!}=\frac{n}{۱!}=n\Rightarrow\binom{n}{۱}=n$

۳) $\binom{n}{n-۱}=\frac{n!}{(n-۱)!(n-(n-۱))!}=\frac{n!}{(n-۱)!\times۱!}=\frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!}=n\Rightarrow\binom{n}{n-۱}=n$

۴) $\binom{n}{۰}=\frac{n!}{(n-۰)!۰!}=\frac{n!}{n!}=۱$

سوال در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۶ مهره سفید وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره از این جعبه خارج کنیم؟

پاسخ در انتخاب مهره‌های رنگی ترتیب انتخاب مهم نیست. در کل $۶+۴=۱۰$ مهره داخل جعبه قرار دارد که باید ۳ تا از بین آنها انتخاب شوند که به کمک فرمول ترکیب می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

$n=۱۰\ ,\ r=۳$

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰!}{۳!\times۷!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{۳!\times\cancel{۷!}}=\frac{\overset{۵}{\cancel{۱۰}}\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times۸}{\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times۱}=۵\times۳\times۸=۱۵\times۸=۱۲۰$$

سوال روی محیط یک دایره ۸ نقطه قرار دارد:

الف) چند مثلث با این نقاط می‌توان ساخت؟

ب) چند وتر از این نقاط می‌توان رسم نمود؟

پاسخ الف) با اتصال هر سه نقطه از این نقاط به هم یک مثلث ایجاد می‌شود و چون ترتیب اهمیتی ندارد، پس:

$n=۸\ ,\ r=۳$

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!(۸-۳)!}=\frac{۸!}{۳!\times۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{۳!\times\cancel{۵!}}=\frac{۸\times۷\times\cancel{۶}}{\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times۱}=۵۶$$

ب) با اتصال هر دو نقطه روی محیط یک دایره یک وتر از دایره ایجاد می‌شود.

$n=۸\ ,\ r=۲$

$$\binom{۸}{۲}=\frac{۸!}{۲!(۸-۲)!}=\frac{۸!}{۲!\times۶!}=\frac{۸\times۷\times\cancel{۶!}}{۲!\times\cancel{۶!}}=\frac{\overset{۴}{\cancel{۸}}\times۷}{\cancel{۲}\times۱}=۲۸$$

سوال به چند طریق می‌توان ۳ کتاب متمایز را از بین ۵ کتاب متمایز جهت هدیه دادن انتخاب کرد؟

پاسخ با توجه به اینکه ترتیب انتخاب کتاب برای هدیه دادن اهمیت ندارد پس:

$n=۵\ ,\ \ r=۳$

$$C^{۵}_{۳}=\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!(۵-۲)!}=\frac{۵!}{۳!\times ۲!}=\frac{۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times ۲!}=\frac{۲۰}{۲\times ۱}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$$

سوال به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر یک تیم والیبال ۶نفره تشکیل داد؟

پاسخ در تشکیل تیم با جابه‌جایی ترتیب انتخاب افراد، تیم جدیدی ایجاد نمی‌شود، پس:

$$\text{تعداد تیم‌های ۶نفره}=\binom{۱۰}{۶}=\frac{۱۰!}{۶!(۱۰-۶)!}=\frac{۱۰!}{۶!\times ۴!}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷\times \cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}=۵\times ۳\times ۲\times ۷=۲۱۰$$

سوال در لیست مسافران یک هواپیما ۶ جای خالی موجود است. به چند طریق ۹ نفر را می‌توان در این لیست جای داد؟

پاسخ

$n=۹\ ,\ r=۶$

$$\binom{۹}{۶}=\frac{۹!}{۶!(۹-۶)!}=\frac{۹!}{۶!\times ۳!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times \cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times ۳!}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}\times \overset{۴}{\cancel{۸}}\times ۷}{\underset{۱}{\cancel{۳}}\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times ۱}=۳\times ۴\times ۷=۸۴$$

سوال اگر در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ سفید وجود داشته باشد به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره انتخاب کنیم که ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید باشد؟

پاسخ

$$\text{تعداد حالت}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{انتخاب ۲مهرهٔ قرمز}}}{\binom{۵}{۲}}\times \underset{\substack{\uparrow\\ \text{انتخاب ۱ مهرهٔ سفید}}}{\binom{۴}{۱}}$$

$$=\frac{۵!}{۲!(۵-۲)!}\times ۴=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}\times ۴=\frac{۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{۲!\times \cancel{۳!}}\times ۴=\frac{\overset{۱۰}{\cancel{۲۰}}}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}\times ۴=۴۰$$

سوال از ۴ مهره سفید و ۳ مهره آبی به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد که ۲ مهره هم‌رنگ باشند؟

پاسخ از ۳ مهره انتخابی باید دو مهره هم‌رنگ باشند. پس یا دو مهره سفید و ۱ مهره آبی است یا دو مهره آبی و ۱ مهره سفید است. بنابراین:

$$\text{تعداد حالات}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{۲تا سفید}}}{\binom{۴}{۲}}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{و}}}{\times}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{یکی آبی}}}{\binom{۳}{۱}}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{یا}}}{+}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{یکی سفید}}}{\binom{۴}{۱}}\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{و}}}{\times}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{۲تا آبی}}}{\binom{۳}{۲}}$$

$$=\frac{۴!}{۲!(۴-۲)!}\times ۳+۴\times \frac{۳!}{۲!(۳-۲)!}=\frac{۴!}{۲!\times ۲!}\times ۳+۴\times \frac{۳!}{۲!\times ۱!}$$

$$=\frac{۴\times ۳\times \cancel{۲!}}{۲!\times \cancel{۲!}}\times ۳+۴\times \frac{۳\times \cancel{۲!}}{\cancel{۲!}\times ۱}=(\frac{۱۲}{۲}\times \frac{۳}{۱})+(\frac{۴}{۱}\times \frac{۳}{۱})=۱۸+۱۲=۳۰$$

سـوال از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره قرمز به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد که حداقل دو مهره سفید باشد؟

پاسخ حداقل دو مهره سفید باشد یعنی اینکه یا ۲ مهره سفید و یک مهره قرمز است یا هر ۳ مهره سفید است، پس:

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۳}=$$ تعداد حالات

۳تا سفید یا یکی قرمز و ۲تا سفید

$$\frac{۴!}{۲!(۴-۲)!}\times ۳+۱=\frac{۴!}{۲!\times ۲!}\times ۳+۱=\frac{۴\times ۳\times \cancel{۲!}}{۲!\times \cancel{۲!}}\times ۳+۱$$

$$=(\frac{۱۲}{۲}\times\frac{۳}{۱})+۱=(۶\times ۳)+۱=۱۸+۱=۱۹$$

تمرین‌های امتحانی

الف) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

	درست	نادرست
۱.تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر $n!$ است.	☐	☐
۲.تعداد راه‌هایی که بتوان از ۳ نوع بستنی و ۴ نوع آب‌میوه یک نوع را انتخاب کرد ۱۲ حالت است.	☐	☐
۳.تساوی $\frac{۸!}{۲!}=۴!$ همواره برقرار است.	☐	☐

ب) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۴.اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و نتوان دو عمل را با هم انجام داد، آنگاه به .... طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

۵.حاصل عبارت $P(۳,۳)$ برابر .... است.

۶.مقدار $۰!\times(۱!+۴!)$ برابر .... است.

ج) گزینهٔ درست را با علامت ✓ مشخص کنید.

۷.حروف کلمهٔ severe را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که eها یکی در میان باشند؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

د) به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

* ۸. در یک لباس‌فروشی ۳ نوع کت و ۴ نوع شلوار وجود دارد. این کار به چند طریق امکان دارد: [هرمزگان - نمونه‌دولتی عترت- دی ۱۴۰۰ / ۲ بار تکرار]

الف) اگر بخواهیم فقط یک نوع (کت یا شلوار) بخریم.

ب) اگر بخواهیم هم کت و هم شلوار بخریم.

ج) در حالت اول از اصل .... و در حالت دوم از اصل .... استفاده می‌کنیم.

۹.حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $۴!+۳!$ [تهران - مدرسهٔ ماندگار البرز - دی ۱۴۰۰]

ب) $\frac{۷!\times ۱!}{۲!\times ۵!\times ۰!}$ [تهران - مدرسهٔ ماندگار البرز - دی ۱۴۰۰]

ج) $۵!+۱!+۰!$

د) $\frac{۸!\times ۵!}{۲!\times ۷!}$

۱۰.با حروف کلمه (داریوش) بدون تکرار حروف (با معنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمهٔ ۶حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۳حرفی که به (د) ختم شود می‌توان نوشت؟

ج) چند کلمهٔ ۴حرفی که با (و) شروع و به (ش) ختم شود می‌توان نوشت؟

د) چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان نوشت که حروف (ی، ش) کنار هم باشند.

۱۱.ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر است با $n!$.

۱۲.در یک آزمون تستی با ۱۰ تست چهارگزینه‌ای به چند طریق می‌توان به همهٔ سؤالات پاسخ داد؟

۱۳.با ارقام ۷, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ چند عدد پنج رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ [زنجان - مدرسهٔ دخترانهٔ سما- دی ۹۹]

۱۴.با ارقام ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ چند عدد چهار رقمی کوچک‌تر از ۳۰۰۰ با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟ [خراسان رضوی - نمونه‌دولتی اسلامیه - خرداد ۱۴۰۰]

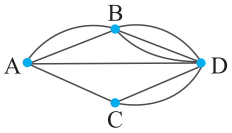
۱۵. در یک کیسه ۵ مهرهٔ سبز، ۴ مهرهٔ آبی، ۳ مهرهٔ قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد، به طوری که هر ۳ مهره یک رنگ باشند؟
[قم - نمونه‌دولتی مهدیه - دی ۱۴۰۰ - با اندکی تغییر]

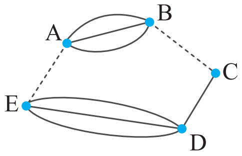
۱۶. با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ و بدون تکرار رقم‌ها چند عدد ۴ رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟ [تهران - نمونه‌دولتی اوحدی - دی ۱۴۰۰]

۱۷. الف) در شکل زیر به چند روش می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟ در چند مورد از شهر C عبور نمی‌کنیم؟ [تهران - نمونه‌دولتی اوحدی - دی ۱۴۰۰]

ب) به چند طریق می‌توان از شهر A و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟ (همهٔ راه‌ها دوطرفه‌اند.)

ج) تعداد راه‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۷ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.





۱۸. تساوی $P(n-۱,۲)=C(n,۳)$ برقرار است. مقدار $C(n,۶)$ را به‌دست آورید.

سؤال تمرین	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
کد مفاهیم کلیدی	۵۱	۴۹	۵۰	۴۹	۵۲	۵۰	۵۱	۴۹	۵۰	۵۱	۵۱	۴۹	۴۹ ۵۱	۴۹ ۵۱	۵۳	۴۹ ۵۱	۴۹	۵۱ ۵۲

درس دوم: احتمال

مفاهیم آموزشی

[حداکثر زمان مطالعه: ۱۸۰ دقیقه] زمان شما:

۵۴ آزمایش تصادفی و فضای نمونه

آزمایش تصادفی

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجهٔ آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند.

در پدیده‌های تصادفی از همهٔ نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. مثلاً وقتی سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم دو حالت دارد، یا رو یا پشت می‌آید، ولی نمی‌دانیم کدام حالت اتفاق می‌افتد.

سوال کدام مورد زیر یک پدیدهٔ تصادفی است؟

الف) ماندگاری بنزین داخل ظرف درباز در هوای آزاد

ب) انتخاب شمارهٔ یکی از دانش‌آموزان در یک کلاس ۲۰ نفره توسط معلم

ج) انتخاب ۱۰ نفر از بین ۱۰۰ دانش‌آموز، برای شرکت در مسابقات دومیدانی استانی با توجه به رکوردهای دانش‌آموزان.

پاسخ الف) آزمایش تصادفی نیست. چون نتیجه مشخص است بنزین در هوای آزاد تبخیر می‌شود.

ب) پدیده تصادفی است. چون مشخص نیست چه شماره‌ای انتخاب خواهد شد.

ج) پدیده تصادفی نیست. چون رکوردها و امتیازات مشخص است.

برآمد: به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گویند.

سوال در آزمایش پرتاب یک تاس با ۶ وجه برآمدها را مشخص کنید.

پاسخ در پرتاب یک تاس هر کدام از اعداد ۱ تا ۶ ممکن است ظاهر شود، پس ۶ برآمد دارد.

آزمایش‌های قطعی: به آزمایش‌هایی که نتیجهٔ آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش‌ها یا پدیده‌های قطعی می‌گویند.
مثلاً پدیدهٔ سوختن کاغذی که داخل آتش افتاده باشد یا پدیدهٔ خیس شدن سنگی که داخل آب افتاده باشد.

سوال کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟

الف) بررسی نتایج بازی‌های یک تیم والیبال قبل از بازی

ب) وجود دانش‌آموزی در کلاس دوازدهم که سن او بیشتر از ده سال باشد.

ج) آمدن عدد ۶ در پرتاب یک تاس.

پاسخ الف) پدیدهٔ تصادفی، چون قبل از بازی‌ها به طور قطع نمی‌توان گفت چه نتایجی به دست می‌آید.

ب) پدیدهٔ قطعی، چون همهٔ دانش‌آموزان کلاس دوازدهم سن بالاتر از ده سال دارند.

ج) پدیدهٔ تصادفی، چون قبل از پرتاب مشخص نیست که عدد ۶ رو می‌شود یا نه.

● فضای نمونه

مجموعهٔ همهٔ برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه می‌گویند و آن را با حرف S معرفی می‌کنند و تعداد عضوهای فضای نمونهٔ S را با $n(S)$ نشان می‌دهند.

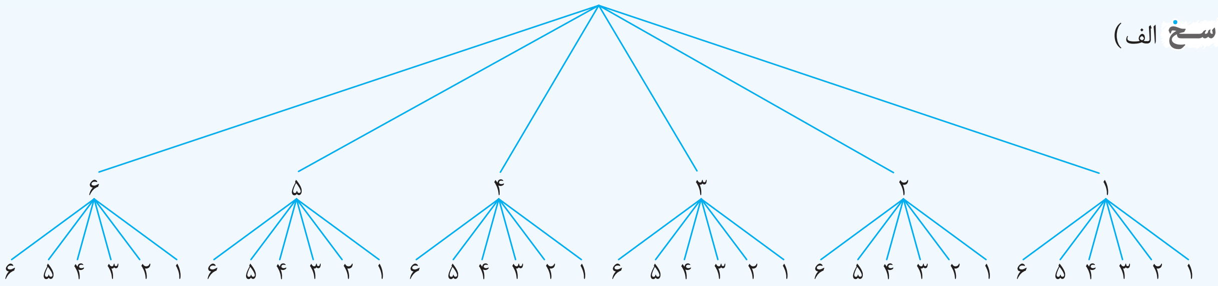
مثلاً فضای نمونه‌ای یک تاس ۶ حالت دارد. $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \quad n(S) = ۶$

مثلاً فضای نمونه‌ای انداختن یک سکه ۲ حالت دارد: $S = \{\text{ر}, \text{پ}\} \quad n(S) = ۲$

سؤال با رسم جدول یا نمودار فضای نمونهٔ هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

الف) پرتاب دو تاس
ب) پرتاب یک تاس و یک سکه
ج) پرتاب ۳ سکه (یک سکه ۳ بار پرتاب شود)

پاسخ الف)



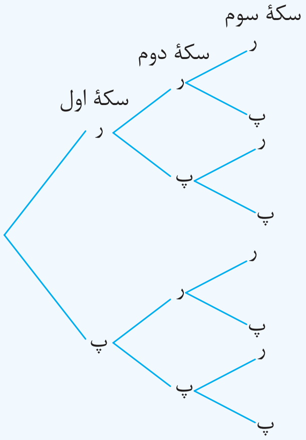
$$\Rightarrow S = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),\ldots,(۱,۶),(۲,۱),\ldots,(۲,۶),(۳,۱),\ldots,(۳,۶),(۴,۱),\ldots,(۴,۶),(۵,۱),\ldots,(۵,۶),(۶,۱),\ldots,(۶,۶)\}$$

ب)

۶	۵	۴	۳	۲	۱	تاس سکه
(۶,ر)	(۵,ر)	(۴,ر)	(۳,ر)	(۲,ر)	(۱,ر)	ر
(۶,پ)	(۵,پ)	(۴,پ)	(۳,پ)	(۲,پ)	(۱,پ)	پ

$$S = \{(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),(\text{ر},۳),(\text{ر},۴),(\text{ر},۵),(\text{ر},۶),(\text{پ},۱),(\text{پ},۲),(\text{پ},۳),(\text{پ},۴),(\text{پ},۵),(\text{پ},۶)\}$$

ج)



$$S = \{(\text{ر},\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{ر},\text{پ}),(\text{ر},\text{پ},\text{ر}),(\text{ر},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر},\text{ر}),(\text{پ},\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{ر}),(\text{پ},\text{پ},\text{پ})\}$$

نکته برای تعیین تعداد عضوهای فضای نمونه می‌توان طبق اصل ضرب تعداد عضوهای فضای نمونه تک‌تک آزمایش‌ها را در هم ضرب کرد.

مثلاً: تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای در پرتاب ۳ سکه طبق اصل ضرب برابر است با:

هر سکه ۲ حالت دارد (پ، ر): سکهٔ اول ۲ حالت و سکهٔ دوم ۲ حالت و سکهٔ سوم ۲ حالت. پس با توجه به اصل ضرب خواهیم داشت:

$$n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$

سؤال ۳ دوست می‌خواهند به‌طور تصادفی کنار هم روی ۳ صندلی بنشینند. فضای نمونه‌ای حاصل از این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

پاسخ باید تعداد حالت‌های پُر شدن ۳ جای خالی را پیدا کنیم. پس با توجه به اصل ضرب خواهیم داشت:

۱	۲	۳

$$\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ \Rightarrow n(S) = ۶$$

سـؤال در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سفید وجود دارد. به طور تصادفی ۳ مهره را یک جا از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد عضوهای فضای نمونه را به‌دست آورید.

پاسـخ در واقع انتخاب ۳ مهره از کل مهره‌ها یعنی از ۱۴ مهره است، پس:

$$n(S)=\binom{۱۴}{۳}=\frac{۱۴!}{۳!(۱۴-۳)!}=\frac{۱۴\times ۱۳\times ۱۲\times \cancel{۱۱!}}{۳!\times \cancel{۱۱!}}=\frac{۱۴\times ۱۳\times ۱۲}{۳\times ۲\times ۱}=۷\times ۱۳\times ۴=۳۶۴$$

۵۵ پیشامد

یادآوری زیرمجموعه: مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B می‌گویند. هرگاه هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B باشد و به صورت $B \supseteq A$ نمایش داده می‌شود.

سـؤال برای مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ ، ۳ زیرمجموعهٔ ۲عضوی و ۲ زیرمجموعهٔ ۳عضوی بنویسید.

پاسـخ $B=\{۱,۵\}$, $F=\{۲,۴\}$, $H=\{۳,۲\}$, $R=\{۳,۴,۵\}$, $G=\{۲,۱,۴\}$

نکته هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است. مثلاً اگر A یک مجموعهٔ دلخواه باشد، آنگاه: $A \subseteq A$ است.

مجموعهٔ تهی ($\varnothing$ یا $\{\}$): مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعهٔ تهی می‌نامند. مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است.

- پیشامد

در یک آزمایش تصادفی به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای S یک پیشامد می‌گویند.

سـؤال در پرتاب یک تاس پیشامدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) پیشامد آمدن اعداد زوج
ب) پیشامد آمدن اعداد کوچک‌تر از ۵
ج) پیشامد آمدن اعداد بزرگ‌تر از ۶

پاسـخ الف) $B=\{۲,۴,۶\}$
ب) $H=\{۱,۲,۳,۴\}$
ج) $\varnothing$ یا $F=\{\}$

پیشامد نشدنی یا غیرممکن: از آنجا که $\varnothing \subseteq S$ ، پس $\varnothing$ یک پیشامد روی S است. به پیشامد $\varnothing$ ، پیشامد غیرممکن یا نشدنی می‌گویند.

پیشامد حتمی: می‌دانیم $S \subseteq S$ ، پس فضای نمونه‌ای S نیز یک پیشامد است که به آن پیشامد حتمی می‌گویند.

سـؤال نتایج گُل‌های یک تیم در دو بازی که منجر به بُرد این تیم خواهد شد را با فضای نمونه‌ای $S=\{۱,۲\}$ در نظر می‌گیریم. تمامی پیشامدهای ممکن این فضای نمونه‌ای را بنویسید.

پاسـخ $\varnothing$ یا $\{\}$, $\{۱,۲\}$, $\{۲\}$, $\{۱\}$

نکته برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی رخ دهد.

مثلاً اگر در پرتاب یک تاس عدد ۳ آمده باشد، هر یک از پیشامدهای $\{۳\}$ یا $\{۴,۳,۵\}$ یا $\{۶,۳\}$ می‌تواند رخ دهد.

سـؤال دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد روشده در هر دو تاس فرد باشند.
ب) حاصل‌ضرب اعداد روشده در هر دو تاس ۱۲ باشد.
ج) مجموع اعداد رو شده ۱۰ باشد.
د) هر دو عدد رو شده در دو تاس با هم برابر باشند.

پاسـخ

الف) $\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\}$

ب) $\{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

ج) $\{(۵,۵),(۶,۴),(۴,۶)\}$

د) $\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$

سوال دریک گل‌فروشی از ۵ شاخه گل رُز، ۶ شاخه گل میخک و ۷ شاخه گل گلایل، باید ۳ شاخه گل انتخاب شود. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) از هر نوع گل یک شاخه باشد. ب) ۲ شاخه گل رز باشد. ج) حداقل ۲ شاخه گل میخک باشد.

پاسخ روش اول: الف) از ۳ گل انتخابی یکی رز، یکی میخک و دیگری گلایل است:

$$\overset{\text{گل رز}}{\binom{۵}{۱}}\times\overset{\text{گل میخک}}{\binom{۶}{۱}}\times\overset{\text{گل گلایل}}{\binom{۷}{۱}}=۵\times۶\times۷=۲۱۰$$

ب) دو شاخه گل رز از ۵ شاخه گل رز باید انتخاب شود و یک شاخه گل از ۱۳ گل دیگر پس:

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۱۳}{۱}=۱۰\times۱۳=۱۳۰$$

ج) حداقل دو شاخه گل میخک، یعنی یا ۲ تا میخک و یکی رز یا ۲ تا میخک و یکی گلایل یا هر سه میخک باشد:

$$\overset{\text{میخک}}{\binom{۶}{۲}}\times\overset{\text{رز}}{\binom{۵}{۱}}+\overset{\text{میخک}}{\binom{۶}{۲}}\times\overset{\text{گلایل}}{\binom{۷}{۱}}+\overset{\text{هر سه میخک}}{\binom{۶}{۳}}$$

$$=\frac{۶!}{۲!(۶-۲)!}\times\overset{۵}{\cancel{\frac{۵!}{۱!(۵-۱)!}}}+\frac{۶!}{۲!(۶-۲)!}\times\overset{۷}{\cancel{\frac{۷!}{۱!(۷-۱)!}}}+\frac{۶!}{۳!(۶-۳)!}=(۱۵\times۵)+(۱۵\times۷)+۲۰=۷۵+۱۰۵+۲۰=۲۰۰$$

روش دوم: (هر سه میخک) یا (یکی از بقیه) و (دو تا میخک) ⇐ حداقل ۲ گل میخک

$$\binom{۶}{۲}\times\binom{۱۲}{۱}+\binom{۶}{۳}=۱۵\times۱۲+۲۰=۲۰۰$$

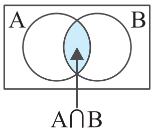
۵۶+ اعمال روی پیشامدها

چون هر پیشامد یک مجموعه است، پس همهٔ خاصیت‌های مجموعه‌ها را دارد. یعنی اعمالی که روی مجموعه‌ها قابل انجام است روی پیشامدها نیز انجام‌پذیر است.

● اشتراک دو پیشامد

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد اشتراک A و B $(A\cap B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A و B رخ دهد.

$$A\cap B=\{x\in S\mid x\in A\underset{\text{و}}{\wedge}x\in B\}$$



سوال دو تاس را پرتاب می‌کنیم، پیشامد اینکه یکی از تاس‌ها عدد ۳ و حاصل‌ضرب اعداد روشده ۶ باشد، را به دست آورید.

پاسخ پیشامد A را حالت‌هایی درنظر می‌گیریم که یکی از تاس‌ها ۳ باشد:

$$A=\{(۳,۱),(۱,۳),(۳,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۳),(۳,۵),(۵,۳),(۶,۳),(۳,۶)\}$$

پیشامد B را حالت‌هایی در نظر می‌گیریم که حاصل‌ضرب اعداد برآمده ۶ باشد:

$$B=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

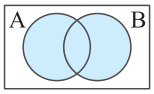
اشتراک دو پیشامد A و B:

$$A\cap B=\{(۳,۲),(۲,۳)\}$$

● اجتماع دو پیشامد

زمانی دو پیشامد A و B $(A\cup B)$ رخ می‌دهد که A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهد.

$$A\cup B=\{x\in S\mid x\in A\underset{\text{یا}}{\vee}x\in B\}$$



سوال تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. پیشامد اینکه سکه رو یا تاس کمتر از ۳ باشد را به‌دست آورید.

پاسخ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد:

$$S=\{(۱,\text{ر}),(۲,\text{ر}),(۳,\text{ر}),(۴,\text{ر}),(۵,\text{ر}),(۶,\text{ر}),(۱,\text{پ}),(۲,\text{پ}),\ldots,(۶,\text{پ})\}$$

پیشامد اینکه سکه رو باشد:

$$A=\{(۱,\text{ر}),(۲,\text{ر}),(۳,\text{ر}),(۴,\text{ر}),(۵,\text{ر}),(۶,\text{ر})\}$$

پیشامد اینکه تاس کمتر از ۳ باشد:

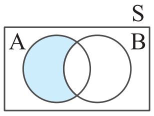
$$B=\{(۲,\text{ر}),(۲,\text{پ}),(۱,\text{ر}),(۱,\text{پ})\}$$

$$A\cup B=\{(۱,\text{ر}),(۲,\text{ر}),(۳,\text{ر}),(۴,\text{ر}),(۵,\text{ر}),(۶,\text{ر}),(۲,\text{پ}),(۱,\text{پ})\}$$

● تفاضل دو پیشامد

پیشامد تفاضل B از A را که با نماد $(A - B)$ نشان می‌دهیم، وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد.

$$A - B = \{x \in S \mid x \in A , x \notin B\}$$



نکته برای نوشتن اعضای تفاضل دو مجموعه ابتدا عضوهای مجموعهٔ اول را مشخص می‌کنیم. سپس از داخل آن عضوهای مشترک را حذف می‌کنیم.

مفاهیم کلیدی
۵۶

سوال پیشامدهای A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای انداختن دو تاس هستند، پیشامدهای $A - B$ و $B - A$ را به‌دست آورید.

$A = \{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۶),(۵,۱),(۴,۲)\}$ $\quad B = \{(۳,۴),(۲,۳),(۱,۶)\}$

پاسخ ابتدا عضوهای مشترک A و B را مشخص می‌کنیم: $(۳,۴)$

برای نوشتن پیشامد $A - B$ عضوهای مشترک A و B را از مجموعهٔ A حذف می‌کنیم: $A - B = \{(۱,۲),(۵,۶),(۵,۱),(۴,۲)\}$

برای نوشتن پیشامد $B - A$ عضوهای مشترک A و B را از مجموعهٔ B حذف می‌کنیم: $B - A = \{(۲,۳),(۱,۶)\}$

مثال [صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی] هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونهٔ S باشند، به طوری که $A - B = A$ و $B - A = B$ ، در این صورت پیشامد $A \cap B$ را محاسبه کنید.

پاسخ از $A - B = A$ با توجه به تعریف تفاضل دو پیشامد نتیجه می‌شود که هیچ عضوی از A در B نیست. همچنین از $B - A = B$ نتیجه می‌شود که هیچ عضوی از B در A نیست. پس دو پیشامد A و B اشتراک ندارند: $A \cap B = \varnothing$

سوال با توجه به دو پیشامد A و B از فضای نمونهٔ S، $A - B$ و $B - A$ را به‌دست آورید. $A = \{۲,۴,۶\} \, , \, B = \{۱,۳,۵\}$

پاسخ $B - A = \{۱,۳,۵\} = B$ $\quad A - B = \{۲,۴,۶\} = A$

مشاهده می‌شود که $A \cap B = \varnothing$ است.

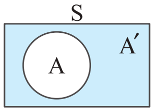
● دو پیشامد ناسازگار

هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند به طوری که $A \cap B = \varnothing$ باشد، در این صورت پیشامد A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌گویند.

● متمم پیشامد A

متمم پیشامد A را که با A' نشان می‌دهیم، هنگامی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

$$A' = S - A = \{x \in S \mid x \notin A\}$$



پیشامد A' شامل عضوهایی از مجموعهٔ S است که آن عضوها در پیشامد A نباشند. درواقع برای نوشتن اعضای A' کافی است اعضای A را در S خط بزنیم.

سوال پیشامد $A = \{۱,۴,۵,۶\}$ از فضای نمونه‌ای انداختن یک تاس را داریم:

الف) پیشامد A' را به‌دست آورید.

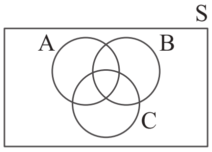
ب) $A \cup A'$ را به‌دست آورید.

پاسخ الف) فضای نمونه انداختن یک تاس: $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \, , \, A = \{۱,۴,۵,۶\} \Rightarrow A' = \{۲,۳\}$

ب) $A \cup A' = \{۱,۴,۵,۶\} \cup \{۲,۳\} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} = S$

نکته همواره اجتماع هر پیشامدی مانند A با متمم آن یعنی A' برابر فضای نمونه‌ای خواهد بود: $A \cup A' = S$

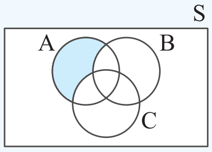
سـوال فرض کنید A و B و C، ۳ پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند. به کمک نمودار ون موارد زیر را مشخص کنید و عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر یک را بنویسید.



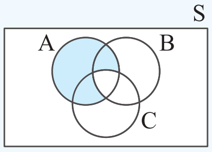
الف) پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.
ب) پیشامد A رخ دهد و پیشامد B و C همزمان رخ ندهد.
ج) پیشامد A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.
د) پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

پاسـخ

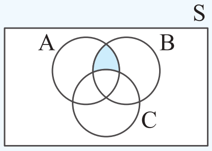
الف) $A-(B\cup C)$



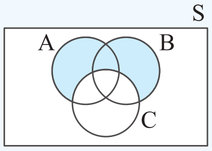
ب) $A-(B\cap C)$



ج) $(A\cap B)-C$



د) $(A\cup B)-C$



سـوال خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) همهٔ فرزندان خانواده از یک جنسیت باشند.
ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشد.
ج) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.
د) از پیشامدهای A و B و C کدام‌یک با یکدیگر ناسازگار هستند.

پاسـخ فضای نمونه‌ای این آزمایش ۸ عضو دارد و به‌صورت مقابل است:

n(S) = ۲ × ۲ × ۲ = ۸

S = {(د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, د), (د, پ, پ), (پ, د, پ), (پ, پ, د), (پ, پ, پ)}

الف) A = {(د, د, د), (پ, پ, پ)}

ب) B = {(پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ)}

ج) C = {(د, د, د), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, پ)}

د) $A\cap B=\varnothing$ ناسازگارند و $C\cap B=\varnothing$ ناسازگارند

سـوال یک تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.
ب) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.
ج) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد و اول نباشد.
د) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد و زوج نباشد.
ه) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

پاسـخ

فضای نمونه S = {۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶}

الف) A = {۲}

ب) اعداد زوج A = {۲, ۴, ۶}

اعداد اول B = {۲, ۳, ۵}

⇐ اعداد زوج یا اول A ∪ B = {۲, ۳, ۴, ۵, ۶}

ج) C = {۴, ۶}

د) M = {۳, ۵}

ه) N = {۱, ۴, ۶}

+۵۷ احتمال یک پیشامد (ساده، جایگشت، تاریخ تولد، احتمال اعمال روی پیشامد)

فرض کنید $S\neq\varnothing$ فضای نمونهٔ متناهی یک آزمایش تصادفی باشد. اگر S، n برآمد برای وقوع داشته باشد و A یک پیشامد دلخواه در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با نماد P(A) نمایش می‌دهیم و مقدار آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{احتمال وقوع پیشامد A}=\frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد A}}{\text{تعداد عضوهای فضای S}}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

سؤال در پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد روآمده زوج باشد، چقدر است؟

پاسخ

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(S)=۶$ و $A=\{۲,۴,۶\} \Rightarrow n(A)=۳$

احتمال آمدن اعداد زوج: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{۳}{۶}=\dfrac{۱}{۲}$

نکته ۱- برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد باید تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای و پیشامد را مشخص کنیم.

۲- اگر A یک پیشامد نشدنی باشد (یعنی A هیچ عضوی نداشته باشد) آنگاه $A=\varnothing$؛ در این صورت $n(A)=۰$. بنابراین احتمال وقوع پیشامد A برابر صفر است.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۰}{n(S)}=۰$$

سؤال احتمال اینکه در پرتاب یک تاس عدد ۷ ظاهر شود را محاسبه کنید.

پاسخ تاس ۶ وجه دارد و عدد ۷ نمی‌تواند ظاهر شود. پس:

$$A=\varnothing\ ,\ n(A)=۰ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۰}{۶}=۰$$

نکته ۱- اگر A یک پیشامد قطعی باشد (یعنی پیشامد A با فضای نمونهٔ S برابر باشد)؛ در این صورت $n(A)=n(S)$، بنابراین احتمال وقوع A برابر ۱ است:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{n(S)}{n(S)}=۱$$

۲- در بحث احتمال کمترین احتمال برای پیشامد نشدنی است که مقدار آن صفر است و بیشترین احتمال برای پیشامد قطعی است که مقدار آن یک است و مقدار احتمال سایر پیشامدها همواره عددی بین صفر و یک است. یعنی اگر پیشامد B یک پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشد خواهیم داشت:

$$۰ \le P(B) \le ۱$$

سؤال سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید یک تاس را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه را مشخص کنید.

ب) احتمال اینکه عدد تاس مضرب ۳ باشد، چقدر است؟

پاسخ

الف) $S=\{(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),(\text{ر},۳),(\text{ر},۴),(\text{ر},۵),(\text{ر},۶),(\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ})\} \Rightarrow n(S)=۸$

ب) پیشامد مطلوب این است که عدد تاس مضرب ۳ باشد. پس:

$A=\{(\text{ر},۳),(\text{ر},۶)\} \Rightarrow n(A)=۲$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

نکته اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند $(A\cap B=\varnothing)$، در این صورت طبق اصل جمع خواهیم داشت: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

سؤال یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد اول بزرگ‌تر از ۲ یا عددی زوج باشد، چقدر است؟

پاسخ

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(S)=۶$

عدد اول بزرگ‌تر از ۲: $A=\{۳,۵\} \Rightarrow n(A)=۲$

عدد زوج: $B=\{۲,۴,۶\} \Rightarrow n(B)=۳$

$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B) \Rightarrow P(A\cup B)=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}+\frac{۳}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

سـوال در یک جشن ۶ نفر حضور دارند. احتمال‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) هر شش نفرآنها در ماه خرداد متولد شده باشند. ب) هر شش نفرآنها در یک ماه متولد شده باشند. ج) تولد هیچ دوتایی ازآنها در یک ماه نباشد.

پاسـخ ابتدا تعداد کل حالاتی که این شش نفر می‌توانند در ۱۲ ماه از سال متولد شده باشند (فضای نمونه‌ای) را به‌دست می‌آوریم، برای هر فرد ۱۲ حالت وجود دارد و با توجه به اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالات: $$n(S)=\underset{\text{نفر اول}}{\underset{\uparrow}{۱۲}}\times\underset{\text{نفر دوم}}{\underset{\uparrow}{۱۲}}\times\underset{\text{نفر سوم}}{\underset{\uparrow}{۱۲}}\times\underset{......}{\underset{\uparrow}{۱۲}}\times ۱۲\times\underset{\text{نفر ششم}}{\underset{\uparrow}{۱۲}}=۱۲^۶$$

الف) برای محاسبهٔ پیشامد اینکه همگی در ماه خرداد متولد شده باشند، همگی فقط یک انتخاب دارند.

$$n(A)=\underset{\text{نفر اول}}{\overset{۱}{\uparrow}}\times\underset{\text{نفر دوم}}{\overset{۱}{\uparrow}}\times\dots\times\underset{\text{نفر ششم}}{\overset{۱}{\uparrow}}=۱ \qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۲^۶}$$

ب) در این حالت چون قرار است ماه تولد هر ۶ نفر یکسان باشد، اگر آنها را یک بسته در نظر بگیریم در هر یک از ۱۲ ماه سال می‌توانند متولد شده باشند پس ۱۲ حق انتخاب دارند، به عبارتی:

$$n(B)=۱۲\ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۱۲^۶}=\frac{۱}{۱۲^۵}$$

ج) ماه تولد هیچ دو نفری در یک ماه نباشد، به عبارتی ماه تولد همهٔ این افراد متفاوت باشد، پس نفر اول ۱۲ حق انتخاب دارد. نفر دوم ۱۱ حق انتخاب دارد ... و نفر ششم ۷ حق انتخاب دارد، پس:

تعداد حالات پیشامد: $n(A)=۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹\times ۸\times ۷$

$$P(A)=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹\times ۸\times ۷}{۱۲^۶}=\frac{۱۱\times \overset{۵}{\cancel{۱۰}}\times \overset{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\cancel{۹}}\times \overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۸}}\times ۷}{۱۲^۳\times \underset{۱}{\cancel{۱۲}}\times \underset{۱}{\cancel{۱۲}}}=\frac{۳۸۵}{۱۲^۳}$$

تمـرین [صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی] در یک بازی ۱۱ نفره به هر شخص یکی از اعداد ۲, ۳, ... ,۱۲ را نسبت می‌دهیم، سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها نفر برنده مشخص می‌شود.

الف) احتمال برنده شدن تمامی شماره‌ها را مشخص کنید.

ب) بیشترین و کمترین احتمال‌های برنده شدن مربوط به کدام شماره‌ها است؟

ج) کسی که کمترین احتمال برنده شدن را دارد، آیا ممکن است برنده شود؟ چرا؟

پاسـخ پس از پرتاب دو تاس فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S)=۳۶$

الف) پیشامد اینکه جمع اعداد آمده از دو تاس ۲ شود (نفری که شمارهٔ آن ۲ است برنده می‌شود.)

$$A=\{(۱,۱)\}\ ,\ n(A)=۱\ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

یعنی احتمال اینکه کسی که شمارهٔ آن ۲ است برنده شود $\frac{۱}{۳۶}$ است.

- پیشامد اینکه جمع اعداد آمده از دو تاس ۳ باشد. (نفری که شمارهٔ آن ۳ است.)

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱)\}\ ,\ n(A)=۲\ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۳۶}$$

- پیشامد اینکه جمع اعداد آمده از دو تاس ۴ باشد.

$$A=\{(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲)\}\ ,\ n(A)=۳\ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}$$

- پیشامد اینکه جمع اعداد آمده از دو تاس ۵ باشد.

$$A=\{(۲,۳),(۳,۲),(۱,۴),(۴,۱)\}\ ,\ n(A)=۴\ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}$$

- پیشامد اینکه جمع اعداد آمده از دو تاس ۶ باشد.

$$A=\{(۳,۳),(۲,۴),(۴,۲),(۱,۵),(۵,۱)\},n(A)=۵\ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۶}$$

- پیشامد اینکه جمع اعداد آمده از دو تاس ۷ باشد.

$$A=\{(۳,۴),(۴,۳),(۲,۵),(۵,۲),(۱,۶),(۶,۱)\},n(A)=۶\ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}$$

- پیشامد اینکه جمع اعداد آمده از دو تاس ۸ باشد.

$$A=\{(۳,۵),(۵,۳),(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴)\}\ ,\ n(A)=۵\ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۶}$$

$$\vdots$$

- پیشامد اینکه جمع اعداد آمده از دو تاس ۱۲ باشد.

$$A=\{(۶,۶)\}\ ,\ n(A)=۱\ \Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۳۶}$$

ب) کسی که شمارهٔ ۷ را دارد بیشترین احتمال برنده شدن را دارد و کسانی که اعداد ۲ و ۱۲ را دارند کمترین احتمال برنده شدن را دارند.

ج) بله؛ چون مقدار احتمال کم است ولی صفر نیست پس ممکن است برنده شود.