مقدمه مؤلفان

ویژگی‌های این کتاب و شیوهٔ استفاده از آن:

۱ پاسخ سؤال‌ها در هر فصل با توجه به یک روند آموزشی نوشته شده است. معمولاً در سؤال‌های اول، راه‌حل‌ها تشریحی‌تر و با توضیح بیشتر است و هر چه که جلوتر می‌روید راه‌حل‌ها حرفه‌ای‌تر، سریع‌تر و با توضیح کم‌تر می‌شوند.

۲ در پاسخ تست‌ها، آیکن‌های زیر را می‌بینید:

نماد آیکن	توضیح
نکته:	یه مفهوم، مطلب، رابطه، فرمول یا ... است که باید بدانید تا بتوانید سؤال را سریع‌تر و بهتر حل کنید.
اشاره:	مثل یک تلنگر است که به شکل درست و مفهومی به سؤال نگاه کنید. گاهی وقت‌ها هم در اشاره: سؤالی پرسیده‌ایم که باعث می‌شود بیشتر با مفاهیم سؤال درگیر شوید.
خاطره:	همان‌طور که از اسمش پیداست یک یادآوری سریع در مورد مفهوم، فرمول، رابطه یا ... آن مبحث درسی است.
راه اول: راه دوم: عددگذاری:	اگر سؤالی دو راه حل داشته، سعی کردیم هر دو راه (حتی بیشتر!) را بیاوریم. بعضی وقت‌ها هم یکی از راه‌های حلمان، عددگذاری بوده است. البته حواسمان بوده که در استفاده از این روش، افراط نکنیم.

۳ توصیه می‌کنیم برای حل تست‌ها:

الف تعداد معینی سؤال (مثلاً ۳۰تا ۴۰تا) برای یک نشست انتخاب کنید.

ب با توجه به زمانی که برای این تست در نظر گرفته‌اید تست‌ها را حل کنید.

پ به پاسخ‌نامهٔ کلیدی که در جلد درس‌نامه و سؤال آمده است مراجعه کنید و تست‌هایی را که نزده‌اید یا جواب نادرست داده‌اید مشخص کنید.

ت برگردید و سعی کنید اولاً تست‌هایی را که حل نکرده‌اید حل کنید و ثانیاً تست‌هایی را پاسخ نادرست داده‌اید دوباره بررسی کنید و ببینید آیا می‌توانید به پاسخ درست برسید.

ث حالا بیایید سراغ پاسخ‌نامه، پاسخ همه تست‌ها را حتی آن‌هایی را که درست پاسخ داده‌اید بررسی کنید. به نکته: ها، اشاره: ها، راه اول: و راه دوم: توجه کنید تا هر چه را که لازم است درست یاد بگیرید.

۴ گاهی وقت‌ها ممکن است با دیدن راه‌حل یک تست که به نظر طولانی می‌رسد تعجب کنید یا ناامید شوید. حواستان باشد که در این کتاب بعضی از راه‌حل‌ها به علت این‌که لازم بوده همه چیز را خوب توضیح دهیم طولانی شده است و در عمل، هنگام حل سؤال لازم نیست این همه بنویسید.

۵ در بعضی از سؤال‌ها، از روش عددگذاری: استفاده کرده‌ایم. سعی‌مان این بوده که در تست‌هایی از این روش استفاده کنیم که مناسب بوده و در عین حال تست و مفاهیم این ویژگی را داشته باشند که در موارد مشابه از همین شیوه استفاده کنیم. به همین علت سعی کرده‌ایم در استفاده از عددگذاری: زیاده‌روی و افراط نکنیم.

- کل پاسخ‌ها چند بار بررسی و ویرایش شده‌اند. سعی‌مان این بوده که کتاب بدون اشتباه باشد. اما حتماً طبق قوانین طبیعت ممکن است باز هم اشتباهاتی رخ داده باشد. اگر اشتباه، نقص یا نکته‌ای در کتاب دیدید لطفاً برایمان بنویسید و بفرستید. به ما در بهترشدن این کتاب بسیار کمک می‌کنید. در هر مورد دیگر هم هر پیشنهادی داشتید خوشحال می‌شویم که بشنویم.
- هم‌چنین همکاران عزیز دیگری نیز با ارائهٔ نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در بازنویسی کتاب کمک کرده‌اند، از این دوستان، آقایان معین کرمی، حسین نادری، مصطفی کرمی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی، عباس موسوی و فرزاد فتاحی نیز کمال تشکر را داریم.
- از تمام معلمان گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنند نیز درخواست می‌کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.

خوب و شاد و پیروز باشید.

@Shahraabiali

@mathmohsenimanesh

فهرست

۵۱۲. **۲** برای محاسبهٔ $f^{-1}(1)$ باید در f دنبال زوج مرتبی باشیم که مؤلفهٔ دومش ۱ باشد: $(4,1)$ پس $f(4)=1$ و در نتیجه $f^{-1}(1)=4$.

برای محاسبهٔ $g^{-1}(-1)$ باید دنبال پیکانی باشیم که انتهایش ۱- باشد:

$$2 \to -1$$

پس $g(2)=-1$ و در نتیجه $g^{-1}(-1)=2$.

بنابراین: $g^{-1}(-1)+f^{-1}(1)=2+4=6$

۵۱۳. **۴** وقتی وارون f از نقطهٔ $(12,5)$ می‌گذرد، خود تابع f باید از نقطهٔ $(5,12)$ عبور کند، پس:

$$f(x)=\frac{ax+1}{x-2} \xrightarrow{f(5)=12} 12=\frac{5a+1}{5-2} \Rightarrow 5a+1=36 \Rightarrow a=7$$

ضابطهٔ f به شکل $f(x)=\frac{7x+1}{x-2}$ درمی‌آید و مقدار $f(a)$ یعنی $f(7)$ برابر است با: $f(7)=\frac{7(7)+1}{7-2}=\frac{50}{5}=10$

۵۱۴. **۱** از $f^{-1}(۶)=۱$ و $f^{-1}(۲۱)=۴$ به ترتیب $f(۱)=۶$ و $f(۴)=۲۱$ را نتیجه می‌گیریم.

دو نقطه از خط را داریم: $A(۱,۶)$ و $B(۴,۲۱)$

شیب خط را پیدا می‌کنیم: $m=\frac{۲۱-۶}{۴-۱}=۵$

معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۶=۵(x-۱) \Rightarrow y=۵x+۱$$

پس: $f(x)=\underset{a}{۵}x+\underset{b}{۱}$

۵۱۵. **۲** برای پیداکردن نقطهٔ برخورد f^{-1} با محور xها، باید در f^{-1}، $y=۰$ را قرار دهیم. پس الان که f^{-1} را نداریم باید در f، $x=۰$ را قرار دهیم:

$$y=x^۳+۲x-۳ \xrightarrow{x=۰} y=-۳ \xrightarrow{\text{نقطه}} (۰,-۳)$$

پس تک‌نقطهٔ برخورد f^{-1} با محور xها، نقطهٔ $(-۳,۰)$ است.

۵۱۶. **۲** اگر نقطهٔ (a,b) روی f باشد، نقطهٔ (b,a) روی f^{-1} است.
پس در تمام گزینه‌ها جای x و y نقاط را عوض می‌کنیم. بعد نقطهٔ جدید را در $f(x)=x+\sqrt[۳]{۲x}+۱$ صدق می‌دهیم. اگر تساوی برقرار بود، جواب است.
در بین گزینه‌ها فقط **۲** این ویژگی را دارد.
چون نقطهٔ $(۴,۷)$ روی $f(x)=x+\sqrt[۳]{۲x}+۱$ قرار دارد، پس $(۷,۴)$ روی f^{-1} است.

۵۱۷. **۲** برای نوشتن وارون تابع $y=x^۳-x+۱$، جای x و y را عوض می‌کنیم: $x=y^۳-y+۱$

حالا تک‌تک گزینه‌ها را چک می‌کنیم. هر کدام در رابطهٔ بالا صدق کرد، جواب است:

۱ $(-۱,-۲) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} -۱\overset{?}{=}(-۲)^۳-(-۲)+۱$

$\Rightarrow -۱\overset{?}{=}-۵$ ×

۲ $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} \frac{۵}{۸}\overset{?}{=}(\frac{۱}{۲})^۳-\frac{۱}{۲}+۱$

$\Rightarrow \frac{۵}{۸}\overset{?}{=}\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۲}+۱ \Rightarrow \frac{۵}{۸}\overset{?}{=}\frac{۱-۴+۸}{۸} \Rightarrow \frac{۵}{۸}=\frac{۵}{۸}$ ✓

پس جواب **۲** است.

۵۱۸. **۲** نقطهٔ $(۰,k)$ روی f^{-1} است، پس نقطهٔ $(k,۰)$ روی f است:

$$f(x)=\frac{۸}{x}-\sqrt{x} \Rightarrow ۰=\frac{۸}{k}-\sqrt{k} \Rightarrow \frac{۸}{k}=\sqrt{k}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۶۴}{k^۲}=k \Rightarrow k^۳=۶۴ \Rightarrow k=۴$$

نقطهٔ $(m,\frac{۱۶}{۹})$ روی f^{-1} است، پس نقطهٔ $(\frac{۱۶}{۹},m)$ روی f است:

$$f(x)=\frac{۸}{x}-\sqrt{x} \Rightarrow m=\frac{۸}{\frac{۱۶}{۹}}-\sqrt{\frac{۱۶}{۹}} \Rightarrow m=\frac{۹}{۲}-\frac{۴}{۳}=\frac{۱۹}{۶}$$

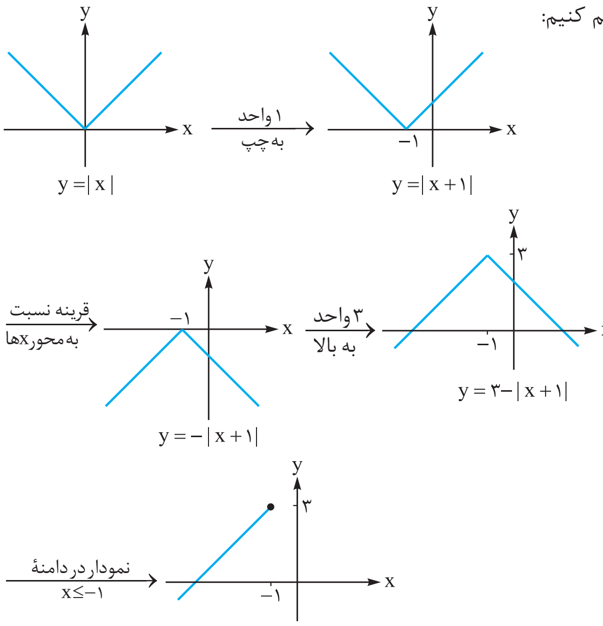
پس: $۳mk=۳(\frac{۱۹}{۶})(۴)=۳۸$

۵۱۹. **۲** **راه اول:** می‌دانیم دامنهٔ f^{-1} برابر برد f است. پس برای پیداکردن دامنهٔ تابع معکوس تابع $f(x)=۳-|x+۱|$ باید برد تابع f را پیدا کنیم.
می‌دانیم حاصل یک قدرمطلق همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، حاصل $|x+۱|$ هم به ازای $x\le -۱$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس:

$$|x+۱|\ge ۰ \Rightarrow -|x+۱|\le ۰ \Rightarrow ۳-|x+۱|\le ۳ \Rightarrow f(x)\le ۳$$

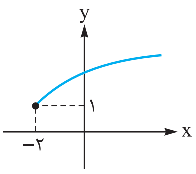
پس برد f برابر بازهٔ $(-\infty,۳]$ و در نتیجه دامنهٔ f^{-1} هم برابر بازهٔ $(-\infty,۳]$ است.

راه دوم: برای پیداکردن $D_{f^{-1}}$ یا همان برد f، می‌توانیم نمودار تابع f را هم رسم کنیم:



حالا طبق نمودار، برد تابع f (یا همان دامنهٔ تابع f^{-1}) برابر است با $(-\infty,۳]$.

۵۲۰. **۴** برای رسم تابع $g(x)=\sqrt{x+۲}+۱$، باید تابع $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا ببریم:



با توجه به شکل، دامنه و برد g را می‌نویسیم:

$D_g=[-۲,+\infty)$

$R_g=[۱,+\infty)$

برای تابع g^{-1}، باید جای دامنه و برد g را عوض کنیم:

$D_{g^{-1}}=R_g=[۱,+\infty)$

$R_{g^{-1}}=D_g=[-۲,+\infty)$

عضوهای صحیح غیرمشترک دو مجموعهٔ بالا، اعداد ۲−، ۱− و ۰ هستند.

۵۲۱. **۳** برد f^{-1}، همان دامنهٔ f است. برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲x+۵}-\sqrt{۴-x}$، باید اشتراک دامنهٔ دو عبارت رادیکالی را بگیریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲x+۵\ge ۰\Rightarrow x\ge -\frac{۵}{۲} \\ ۴-x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۴\end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} D_f=[-\frac{۵}{۲},۴]$$

پس برد f^{-1} هم همان $[\underset{a}{-\frac{۵}{۲}},\underset{b}{۴}]$ است و در نتیجه: $b-۲a=۴-۲(-\frac{۵}{۲})=۹$

۵۲۲. **۴** برای محاسبهٔ $f(۴)$ باید جای xها ۴ قرار دهیم:

$$f(x)=\sqrt{۲x+۱}-۱ \Rightarrow f(۴)=\sqrt{۹}-۱=۲$$

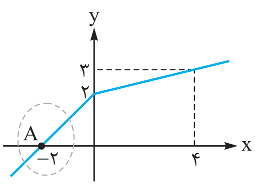
برای محاسبهٔ $f^{-1}(۴)$ باید جای y، ۴ قرار دهیم:

$$y=\sqrt{۲x+۱}-۱ \Rightarrow ۴=\sqrt{۲x+۱}-۱ \Rightarrow \sqrt{۲x+۱}=۵$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲x+۱=۲۵ \Rightarrow x=۱۲ \Rightarrow f^{-1}(۴)=۱۲$$

پس: $f(۴)+f^{-1}(۴)=۲+۱۲=۱۴$

۵۲۳. **۲** برای محاسبهٔ $f^{-1}(۰)$ باید دنبال نقطه‌ای روی f باشیم که yاش صفر باشد:



$A=(-۲,۰) \Rightarrow f^{-1}(۰)=-۲$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۵)$ باید دنبال نقطه‌ای روی f باشیم که yاش ۵ باشد. این نقطه قطعاً روی خطی است که در سمت راست محور yهاست. دو نقطه از این خط را داریم: $(۴,۳)$, $(۰,۲)$

شیب خط را حساب می‌کنیم: $m=\frac{۳-۲}{۴-۰}=\frac{۱}{۴}$

با داشتن شیب و عرض از مبدأ، معادله‌اش را می‌نویسیم: $y=\frac{۱}{۴}x+۲$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۵)$ باید جای y، ۵ قرار دهیم:

$$۵=\frac{۱}{۴}x+۲ \Rightarrow \frac{۱}{۴}x=۳ \Rightarrow x=۱۲ \xrightarrow{\text{پس}} f^{-1}(۵)=۱۲$$

در نتیجه: $f^{-1}(۵)+f^{-1}(۰)=۱۲+(-۲)=۱۰$

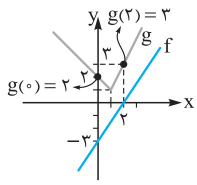
۵۲۴. **۳** در تابع $f(x)=\begin{cases}۴x+۳ & x\ge ۳\\ x+۱ & x<۳\end{cases}$ فرض می‌کنیم $f^{-1}(-۵)=a$ باشد، در این صورت باید $f(a)=-۵$ باشد. پس هر کدام از ضابطه‌ها را برابر ۵- قرار می‌دهیم. مقدار به دست آمده برای a در صورتی قابل قبول است که در محدودهٔ تعریف ضابطه باشد:

$x\ge۳ \Rightarrow ۴a+۳=-۵ \Rightarrow a=-۲$ ✗

$x<۳ \Rightarrow a+۱=-۵ \Rightarrow a=-۶$ ✓

پس $f^{-1}(-۵)=a=-۶$.

۵۲۵. **۲** برای محاسبهٔ $g(g(۰))$، از نمودار g کمک می‌گیریم.



با توجه به نمودار $g(۰)=۲$ می‌شود، پس $g(\underbrace{g(۰)}_{۲})$ به شکل $g(۲)$ درمی‌آید که برابر با ۳ است.

برای محاسبهٔ $f^{-1}(-۲)$ باید ضابطهٔ f را پیدا کنیم. عرض از مبدأ تابع خطی f، عدد ۳- است، پس معادلهٔ آن به شکل $y=mx-۳$ است. این خط از نقطهٔ $(۲,۰)$ می‌گذرد، پس:

$۰=۲m-۳ \Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$

پس $f(x)=\frac{۳}{۲}x-۳$ است. برای محاسبهٔ $f^{-1}(-۲)$، باید معادلهٔ $f(x)=-۲$ را حل کنیم:

$\frac{۳}{۲}x-۳=-۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$

در نتیجه $f^{-1}(-۲)=\frac{۲}{۳}$، پس عبارت $g(f^{-1}(-۲))$ به شکل $g(\frac{۲}{۳})$ درمی‌آید.

برای محاسبهٔ $g(\frac{۲}{۳})$ باید ضابطهٔ g به ازای $x\le۱$ را بنویسیم که یک خط با عرض از مبدأ ۲ می‌باشد، پس معادله‌اش به صورت $y=mx+۲$ است. از نقطهٔ $(۱,۱)$ می‌گذرد، پس: $۱=m+۲ \Rightarrow m=-۱$

بنابراین به ازای $x\le۱$، ضابطهٔ آن به شکل $g(x)=-x+۲$ است و داریم:

$g(\frac{۲}{۳})=\frac{-۲}{۳}+۲=\frac{۴}{۳}$

پس: $g(\underbrace{f^{-1}(-۲)}_{\frac{۲}{۳}})\times g(\underbrace{g(۰)}_{۲})=g(\frac{۲}{۳})\times g(۲)=\frac{۴}{۳}\times۳=۴$

۵۲۶. **۲** اول ضابطهٔ f و g را می‌نویسیم. f در $x\ge۰$، خطی است که از دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(۲,۰)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به صورت $y=-x+۲$ است. در $x\le۰$، f از دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(-۱,۴)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به صورت $y=-۲x+۲$ است. بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x\ge۰\\-۲x+۲ & x\le۰\end{cases}$$

برای پیداکردن $f^{-1}(-۲)$، کافی است معادلهٔ $f(x)=-۲$ را حل کنیم. با توجه به نمودار f، واضح است که جواب معادلهٔ $f(x)=-۲$، در شاخهٔ $x\ge۰$ است:

$f(x)=-۲ \Rightarrow -x+۲=-۲ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow f^{-1}(-۲)=۴$

g نیز تابعی خطی است که از دو نقطهٔ $(۰,-۲)$ و $(-۱,۰)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به صورت $g(x)=-۲x-۲$ است؛ بنابراین $g(۴)=-۲\times۴-۲=-۱۰$ می‌شود.

از طرفی برای پیداکردن $f(-۲)$، باید سراغ شاخهٔ $x\le۰$ برویم:

$f(-۲)=-۲(-۲)+۲=۶$

و برای پیداکردن $f(۶)$ سراغ شاخهٔ $x>۰$ برویم: $\Rightarrow f(۶)=-۶+۲=-۴$

بنابراین:

$$g(\underbrace{f^{-1}(-۲)}_{۴})+f(\underbrace{f(-۲)}_{۶})=\underbrace{g(۴)}_{-۱۰}+\underbrace{f(۶)}_{\text{ضابطهٔ بالا}}=-۱۰+(-۶+۲)=-۱۴$$

۵۲۷. **۳** می‌دانیم $f(f^{-1}(k))=k$ است.

در ضابطهٔ $f(x)=f^{-1}(۳)+۲x-۱$، جای تمام xها، $f^{-1}(۳)$ قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(f^{-1}(۳))}_{۳}=f^{-1}(۳)+۲f^{-1}(۳)-۱ \Rightarrow ۳=۳f^{-1}(۳)-۱$$

$$\Rightarrow f^{-1}(۳)=\frac{۴}{۳}$$

با جای‌گذاری $f^{-1}(۳)=\frac{۴}{۳}$، ضابطهٔ f این‌شکلی می‌شود:

$$f(x)=\underbrace{f^{-1}(۳)}_{\frac{۴}{۳}}+۲x-۱ \Rightarrow f(x)=۲x+\frac{۱}{۳}$$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(\frac{۲۵}{۳})$ باید جای y، $\frac{۲۵}{۳}$ قرار دهیم:

$$f(x)=۲x+\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۲۵}{۳}=۲x+\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۲x=۸ \Rightarrow x=۴$$

پس: $f^{-1}(\frac{۲۵}{۳})=۴$

۵۲۸. **۳** g وارون f است، پس: $g(۶)+g(۱۲)=f^{-1}(۶)+f^{-1}(۱۲)$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۶)$ باید در ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{x}$ جای y، ۶ قرار دهیم:

$x+\sqrt{x}=۶ \xrightarrow{\text{حدس}} x=۴ \Rightarrow f^{-1}(۶)=۴$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۱۲)$ باید در ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{x}$ جای y، ۱۲ قرار دهیم:

$x+\sqrt{x}=۱۲ \xrightarrow{\text{حدس}} x=۹ \Rightarrow f^{-1}(۱۲)=۹$

در نتیجه: $f^{-1}(۶)+f^{-1}(۱۲)=۴+۹=۱۳$

۵۲۹. **۳** g وارون f است، پس: $g(۳)+g(۱۵)=f^{-1}(۳)+f^{-1}(۱۵)$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۳)$ باید در ضابطهٔ $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ جای y، ۳ قرار دهیم:

$x+۲\sqrt{x}=۳ \xrightarrow{\text{حدس}} x=۱ \Rightarrow f^{-1}(۳)=۱$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۱۵)$ باید در ضابطهٔ $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ جای y، ۱۵ قرار دهیم:

$x+۲\sqrt{x}=۱۵ \xrightarrow{\text{حدس}} x=۹ \Rightarrow f^{-1}(۱۵)=۹$

در نتیجه: $f^{-1}(۳)+f^{-1}(۱۵)=۱+۹=۱۰$

۵۳۰. **۳** ضابطهٔ f را به کمک اتحاد مربع ساده می‌کنیم:

$f(x)=x-۲\sqrt{x}+۱=(\sqrt{x}-۱)^۲$

اگر $x\ge۱$ باشد، برد f یا همان $D_{f^{-1}}$، بازهٔ $[۰,+\infty)$ می‌شود.

چون g وارون f است، پس $g(g(۱))$ همان $f^{-1}(f^{-1}(۱))$ است.

محاسبهٔ $f^{-1}(f^{-1}(۱))$ دو مرحله دارد:

اول $f^{-1}(۱)$: کافی است معادلهٔ $f(x)=۱$ را حل کنیم:

$$f(x)=۱ \Rightarrow (\sqrt{x}-۱)^۲=۱ \Rightarrow |\underbrace{\overbrace{\sqrt{x}-۱}^{+}}_{x\ge۱}|=۱ \Rightarrow \sqrt{x}-۱=۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=۲ \Rightarrow x=۴$$

تا این‌جا، $f^{-۱}(f^{-۱}(۱))$ به $f^{-۱}(۴)$ تبدیل شد.

حالا باید $f^{-۱}(۴)$ را حساب کنیم، کافی است معادلهٔ $f(x)=۴$ را حل کنیم:

$$f(x)=۴ \Rightarrow (\sqrt{x}-۱)^۲=۴ \Rightarrow |\sqrt{x}-۱|=۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-۱=۲ \Rightarrow \sqrt{x}=۳ \Rightarrow x=۹ \\ \sqrt{x}-۱=-۲ \Rightarrow \sqrt{x}=-۱ \times\end{cases}$$

پس:

$$f^{-۱}(f^{-۱}(۱))=۹$$

۵۳۱. **۱** برای محاسبهٔ $g(-\frac{۳}{۷})$ یا همان $f^{-۱}(-\frac{۳}{۷})$، معادلهٔ $f(x)=-\frac{۳}{۷}$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{۱+|x|}=-\frac{۳}{۷}$$

مخرج کسر $\frac{x}{۱+|x|}$، همواره مثبت است، پس برای این‌که حاصل کسر منفی شود، x باید منفی باشد، پس جای $|x|$، $-x$ می‌نویسیم:

$$\frac{x}{۱+|x|}=-\frac{۳}{۷} \Rightarrow \frac{x}{۱-x}=-\frac{۳}{۷}$$

$$\Rightarrow ۷x=-۳+۳x \Rightarrow ۴x=-۳ \Rightarrow x=\frac{-۳}{۴}$$

برای محاسبهٔ $g(\frac{۵}{۹})$ یا همان $f^{-۱}(\frac{۵}{۹})$، معادلهٔ $f(x)=\frac{۵}{۹}$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{۱+|x|}=\frac{۵}{۹}$$

مخرج کسر $\frac{x}{۱+|x|}$، همواره مثبت است، پس برای این‌که حاصل کسر مثبت شود، x نیز باید مثبت باشد، پس جای $|x|$، x می‌نویسیم:

$$\frac{x}{۱+|x|}=\frac{۵}{۹} \Rightarrow \frac{x}{۱+x}=\frac{۵}{۹} \Rightarrow ۹x=۵+۵x \Rightarrow ۴x=۵$$

$$\Rightarrow x=\frac{۵}{۴}$$

جواب برابر $g(-\frac{۳}{۷})+g(\frac{۵}{۹})=\frac{-۳}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

۵۳۲. **۲** g، قرینهٔ f نسبت به خط $y=x$ است، پس g، وارون f است.

برای محاسبهٔ $g(۴۸)$ و $g(۱۵)$ یا همان $f^{-۱}(۴۸)$ و $f^{-۱}(۱۵)$، باید به ترتیب معادله‌های $f(x)=۴۸$ و $f(x)=۱۵$ را حل کنیم.

$$f(x)=۴۸ \Rightarrow ۴^x+۲^{x+۱}=۴۸$$

$$\Rightarrow (۲^x)^۲+۲(۲^x)-۴۸=۰ \Rightarrow (۲^x+۸)(۲^x-۶)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲^x=-۸ \times \\ ۲^x=۶ \Rightarrow x=\log_۲ ۶ \Rightarrow g(۴۸)=\log_۲ ۶\end{cases}$$

$$f(x)=۱۵ \Rightarrow ۴^x+۲^{x+۱}=۱۵ \Rightarrow (۲^x)^۲+۲(۲^x)-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow (۲^x+۵)(۲^x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲^x=-۵ \\ ۲^x=۳ \Rightarrow x=\log_۲ ۳ \Rightarrow g(۱۵)=\log_۲ ۳\end{cases}$$

حالا از خاصیت $\log_c a+\log_c b=\log_c(ab)$ استفاده می‌کنیم:

$$g(۴۸)+g(۱۵)=\log_۲ ۶+\log_۲ ۳=\log_۲ ۱۸$$

۵۳۳. **۴** برای به دست آوردن $f^{-۱}(۲)$ باید در ضابطهٔ اصلی، جای y، ۲ قرار دهیم:

$$f(x)=\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲} \Rightarrow ۲=\frac{۲^x+\frac{۱}{۲^x}}{۲} \Rightarrow ۲^x+\frac{۱}{۲^x}=۴$$

با فرض $t=۲^x$، معادله را حل می‌کنیم:

$$t+\frac{۱}{t}=۴ \xrightarrow{\times t} t^۲-۴t+۱=۰$$

$$\xrightarrow{+۳} t^۲-۴t+۴=۳ \Rightarrow (t-۲)^۲=۳$$

$$\Rightarrow t-۲=\pm\sqrt{۳} \Rightarrow t=۲\pm\sqrt{۳}$$

حالا جای t، ۲^x قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:

- $t=۲+\sqrt{۳} \Rightarrow ۲^x=۲+\sqrt{۳}$

$$\xrightarrow{\text{نمایش لگاریتمی}} x=\log_۲(۲+\sqrt{۳})$$

- $t=۲-\sqrt{۳} \Rightarrow ۲^x=۲-\sqrt{۳}$

$$\xrightarrow{\text{نمایش لگاریتمی}} x=\log_۲(۲-\sqrt{۳})$$

دامنهٔ f، همان برد $f^{-۱}$ است: $R_{f^{-۱}}=D_f=[۰,+\infty)$

پس بین دو مقدار به دست آمده $\log_۲(۲-\sqrt{۳})$ قبول نیست، چون عددی منفی است و فقط جواب اول قبول است:

$$x=\log_۲(۲+\sqrt{۳}) \Rightarrow f^{-۱}(۲)=\log_۲(۲+\sqrt{۳})$$

خاطره: تساوی $A^B=C$ را می‌توانیم به شکل $\log_A C=B$ بنویسیم.

۵۳۴. **۳** برای به دست آوردن $f^{-۱}(۲)$ باید در ضابطهٔ اصلی، جای y، ۲ قرار دهیم:

$$f(x)=\frac{۲^x-(\frac{۱}{۲})^x}{۲} \Rightarrow ۲=\frac{۲^x-\frac{۱}{۲^x}}{۲} \Rightarrow ۲^x-\frac{۱}{۲^x}=۴$$

با فرض $t=۲^x$، معادله را حل می‌کنیم:

$$t-\frac{۱}{t}=۴ \xrightarrow{\times t} t^۲-۴t-۱=۰ \xrightarrow{+۵} t^۲-۴t+۴=۵$$

$$\Rightarrow (t-۲)^۲=۵ \Rightarrow t-۲=\pm\sqrt{۵} \Rightarrow t=۲\pm\sqrt{۵}$$

عدد $۲-\sqrt{۵}$، عددی منفی است و نمی‌تواند با ۲^x برابر باشد.

پس فقط $t=۲+\sqrt{۵}$ قبول است:

$$۲^x=t \Rightarrow ۲^x=۲+\sqrt{۵} \xrightarrow{\text{نمایش لگاریتمی}} x=\log_۲(۲+\sqrt{۵})$$

۵۳۵. **۴** فرض کنیم مختصات نقطهٔ برخورد $f^{-۱}$ و نیمساز ناحیهٔ دوم به صورت $A(a,-a)$ است.

دقت کنید چون در ناحیهٔ دوم، xها منفی هستند، پس باید $a<۰$ باشد.

پس نقطهٔ $A(a,-a)$ روی $f^{-۱}$ است و در نتیجه نقطهٔ $A'(-a,a)$ روی f است:

$$f(x)=x-\frac{۱}{۲x} \xrightarrow{(-a,a)} a=-a-\frac{۱}{۲(-a)}$$

$$\Rightarrow ۲a=\frac{۱}{۲a} \Rightarrow ۴a^۲=۱ \Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{a<۰} a=-\frac{۱}{۲}$$

طول نقطهٔ A، همان a بود: $x_A=-\frac{۱}{۲}$

۵۳۶. **۲** فرض کنیم مختصات نقطهٔ برخورد $f^{-۱}$ و نیمساز ناحیهٔ چهارم به صورت $A(a,-a)$ است.

دقت کنید چون در ناحیهٔ چهارم، xها مثبت هستند، پس باید $a>۰$ باشد.

پس نقطهٔ $A(a,-a)$ روی $f^{-۱}$ است و در نتیجه نقطهٔ $A'(-a,a)$ روی f است:

$$f(x)=x-\frac{۲}{x} \xrightarrow{(-a,a)} a=-a-\frac{۲}{-a}$$

$$\Rightarrow ۲a=\frac{۲}{a} \Rightarrow a^۲=۱ \xrightarrow{a>۰} a=۱$$

طول نقطهٔ A، همان a بود: $x_A=۱$

۵۳۷. **۴** هر دو رابطهٔ $f^{-1}(۵)=۳$ و $g^{-1}(a)=۱$ را به حالت نرمال می‌نویسیم:

$f^{-1}(۵)=۳ \Rightarrow f(۳)=۵$

$g^{-1}(a)=۱ \Rightarrow g(۱)=a$

حالا در تساوی $g(x)=۲f(۲x+۱)+۱$، $x=۱$ را قرار می‌دهیم:

$g(۱)=۲f(۳)+۱ \Rightarrow a=۲(۵)+۱ \Rightarrow a=۱۱$

۵۳۸. **۴** از $f^{-1}(۲)=۰$ نتیجه می‌گیریم $f(۰)=۲$. برای آن‌که $f(\frac{۱}{۲}x-۱)$، بتواند $f(۰)$ را تولید کند باید $\frac{۱}{۲}x-۱$، صفر باشد:

$\frac{۱}{۲}x-۱=۰ \Rightarrow x=۲$

پس در رابطهٔ $f(\frac{۱}{۲}x-۱)=g(۲x)-x$، جای تمام xها، ۲ قرار می‌دهیم:

$\underbrace{f(۰)}_{۲}=g(۴)-۲ \Rightarrow g(۴)=۴$

۵۳۹. **۴** وقتی وارون تابع $y=۱+۲f(x+۳)$ از نقطهٔ $(\frac{۵}{۲},-\frac{۵}{۲})$ می‌گذرد، پس خودش از نقطهٔ $(-\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲})$ می‌گذرد:

$\frac{۵}{۲}=۱+۲f(-\frac{۵}{۲}+۳) \Rightarrow \frac{۳}{۲}=۲f(\frac{۱}{۲}) \Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}$

برای پیداکردن نقطهٔ برخورد تابع $y=۱-۲f^{-1}(x-۳)$ با محور xها باید y را صفر بدهیم:

$۰=۱-۲f^{-1}(x-۳) \Rightarrow f^{-1}(x-۳)=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=x-۳$

از طرفی می‌دانیم $f(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}$ است، پس: $x-۳=\frac{۳}{۴} \Rightarrow x=۳/۷۵$

۵۴۰. **۴** فرض می‌کنیم $g^{-1}(۱۶)=b$، پس $g(b)=۱۶$. حالا در $g(x)=f(۳x-۴)$، $x=b$ را قرار می‌دهیم:

$g(b)=f(۳b-۴) \Rightarrow ۱۶=f(۳b-۴)$

از $f(۳b-۴)=۱۶$ به $f^{-1}(۱۶)=۳b-۴$ می‌رسیم.

به کمک $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$، داریم: $f^{-1}(۱۶)=۱۶+\sqrt{۱۶}=۲۰$

پس: $\underbrace{f^{-1}(۱۶)}_{۲۰}=۳b-۴ \Rightarrow ۳b-۴=۲۰ \Rightarrow b=۸$

ما دنبال b یا همان $g^{-1}(۱۶)$ بودیم: $g^{-1}(۱۶)=۸$

۵۴۱. **۲** فرض می‌کنیم $g^{-1}(۶)=b$، پس $g(b)=۶$. حالا در $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$، $x=b$ را قرار می‌دهیم:

$g(b)=f(b)+\sqrt{f(b)} \Rightarrow ۶=f(b)+\sqrt{f(b)} \xrightarrow{\text{حدس}} f(b)=۴$

از $f(b)=۴$ به $f^{-1}(۴)=b$ می‌رسیم.

به کمک $f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۲x}$، داریم: $b=f^{-1}(۴)=\sqrt[۳]{۲(۴)}=۲$

ما دنبال b یا همان $g^{-1}(۶)$ بودیم: $g^{-1}(۶)=۲$

۵۴۲. **۴** طول نقطه‌ای به عرض ۱۰ را روی خط $y=۱۲-x$ پیدا می‌کنیم:

$۱۰=۱۲-x \Rightarrow x=۲$

پس f^{-1} از نقطهٔ $A(۲,۱۰)$ می‌گذرد، در نتیجه f از نقطهٔ $(۱۰,۲)$ می‌گذرد:

$f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}} \xrightarrow{f(۱۰)=۲} ۲=\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴=۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱} \Rightarrow \sqrt{۱۰m-۱}=۳$

$\Rightarrow ۱۰m-۱=۹ \Rightarrow m=۱$

بنابراین ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}$ می‌شود. مقدار $f(\underbrace{m+۴}_{۵})$ را می‌خواهیم:

$f(۵)=\sqrt{۵-۲\sqrt{۴}}=\sqrt{۵-۴}=۱$

۵۴۳. **۲** طول نقطه‌ای به عرض ۷/۲ روی خط $۵y-۱۰x=۱۲$ را پیدا می‌کنیم:

$\underbrace{۵(۷/۲)}_{۳۶}-۱۰x=۱۲ \Rightarrow ۱۰x=۲۴ \Rightarrow x=۲/۴$

پس f^{-1} از نقطهٔ $A(۲/۴,۷/۲)$ می‌گذرد، در نتیجه f از نقطهٔ $(۷/۲,۲/۴)$ می‌گذرد:

$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-۱}$

$\xrightarrow{f(۷/۲)=۲/۴} ۲/۴=\sqrt{۷/۲}\times\sqrt{۷/۲m-۱}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancelto{۱}{۲/۴}\times\cancelto{۰/۸}{۲/۴}=\cancelto{\cancelto{۱}{۳}}{۷/۲}\times(۷/۲m-۱)$

$\Rightarrow ۰/۸=۷/۲m-۱ \Rightarrow ۷/۲m=۱/۸ \Rightarrow m=\frac{۱}{۴}$

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{\frac{۱}{۴}x-۱}$ می‌شود. مقدار $f(\frac{۴}{m})$ را می‌خواهیم:

$f(\frac{۴}{m})=f(\frac{۴}{\frac{۱}{۴}})=f(۱۶)=\sqrt{۱۶}\times\sqrt{\frac{۱}{۴}(۱۶)-۱}=۴\sqrt{۳}$

۵۴۴. **۴** مختصات پارامتری هر نقطه‌ای روی خط $y=x-۸$، به صورت $A(a,a-۸)$ است. این نقطه باید روی f^{-1} باشد، پس نقطهٔ $(a-۸,a)$ باید روی f باشد.

$f(x)=x^۳+x \xrightarrow{(a-۸,a)} \cancel{a}=(a-۸)^۳+\cancel{a}-۸$

$\Rightarrow ۸=(a-۸)^۳ \xrightarrow{\text{فرجه ۳}} ۲=a-۸ \Rightarrow a=۱۰$

با جای‌گذاری $a=۱۰$، مختصات A به صورت $(۱۰,۲)$ درمی‌آید، پس:

$\frac{x_A}{y_A}=\frac{۱۰}{۲}=۵$

۵۴۵. **۲** g تابعی اکیداً صعودی با برد $\mathbb{R}$ است، پس معادلهٔ $g(x)=۰$ دقیقاً یک ریشه دارد.

فرض کنید ریشهٔ این معادله α باشد، پس $g(\alpha)=۰$ که نتیجه می‌دهد $g^{-1}(۰)=\alpha$.

حالا دقت کنید چون معادلهٔ $g(x)=۰$ فقط یک ریشه (آن هم α) دارد، پس اگر $g(\bigcirc)=۰$ باشد، $\bigcirc=\alpha$ می‌شود، بنابراین:

$g(f(g(x)))=۰ \Rightarrow f(g(x))=\alpha \ (*)$

معادلهٔ $g(f(g(x)))=۰$ فقط یک جواب دارد، پس معادلهٔ $f(g(x))=\alpha$ هم فقط دارای یک جواب است.

از طرفی $f(x)=x^۲-۶x+۲$ است، پس $f(g(x))=g^۲(x)-۶g(x)+۲$ می‌شود. با جای‌گذاری در (*) داریم: $g^۲(x)-۶g(x)+۲=\alpha$

$\Rightarrow \overset{a}{۱}g^۲(x)\overset{b}{-۶}g(x)+(\overset{c}{۲-\alpha})=۰$

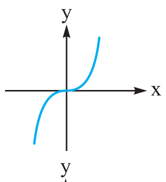
این معادله فقط یک جواب دارد، پس دلتای آن برابر صفر است:

$\Delta=(-۶)^۲-۴\times۱\times(۲-\alpha)=۰ \Rightarrow ۳۶-۸+۴\alpha=۰$

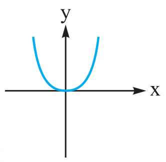
$\Rightarrow ۴\alpha=-۲۸ \Rightarrow \alpha=-۷$

بنابراین $g^{-1}(۰)=\alpha=-۷$ می‌شود.

۵۴۶. **۳** تابع $y=x^۳$ را می‌کشیم:



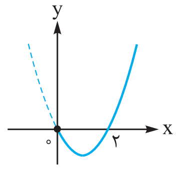
برای رسم $y=|x^۳|$، کافی‌است قسمت‌های زیر محور xها را بالا بیاوریم:



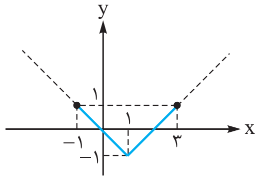
واضح است که تابع یک‌به‌یک نیست پس وارون‌پذیر نیست.

۵۴۷. **۴** وقتی می‌نویسیم $f:A\to B$، یعنی دامنهٔ تابع f، مجموعهٔ A است. هر ۴ تابع داده‌شده را در دامنه‌شان رسم می‌کنیم:

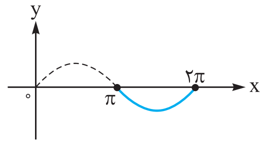
۱ $y=x^{۲}-۲x=x(x-۲)\xrightarrow{x\geq ۰}$



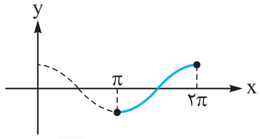
۲ $y=|x-۱|-۱\xrightarrow{-۱\leq x\leq ۳}$



۳ $y=\sin x\xrightarrow{\pi\leq x\leq ۲\pi}$



۴ $y=\cos x\xrightarrow{\pi\leq x\leq ۲\pi}$



در بین ۴ نمودار رسم‌شده، فقط **۴** یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

۵۴۸. **۲** دوتا تابع خطی داریم که وارونش خودش می‌شود:

$۱)\ y=x$ و $۲)\ y=-x+h$

چون سؤال گفته f غیرهمانی است، پس حالت (۲) قبول است: $f(x)=-x+h$

تابع $f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-x+h$$

طول رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲(\frac{۱}{۲})}=۱$$

پس $f+g$ در بازه‌های $[۱,+\infty)$ یا $(-\infty,۱]$ یک‌به‌یک (وارون‌پذیر) است.

۵۴۹. **۴** اگر از $\sqrt{x}$ فاکتور بگیریم، ضابطه این‌شکلی می‌شود:

$$f(x)=a^{۲}\sqrt{x}-x=\sqrt{x}(a^{۲}-\sqrt{x})$$

ریشه‌های f را حساب می‌کنیم:

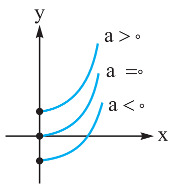
$$\sqrt{x}(a^{۲}-\sqrt{x})=۰\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=۰\Rightarrow x=۰\\ \sqrt{x}=a^{۲}\Rightarrow x=a^{۴}\end{cases}$$

تابعی که بیش از یک ریشه داشته باشد، قطعاً یک‌به‌یک نیست (وارون‌پذیر نیست)، پس در این‌جا باید صفر و $a^{۴}$ برابر باشند: $a^{۴}=۰\Rightarrow a=۰$

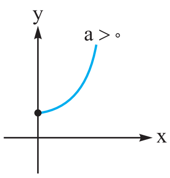
با جای‌گذاری $a=۰$، ضابطهٔ $f(x)=a^{۲}\sqrt{x}-x$ به شکل $f(x)=-x$ درمی‌آید که وارونش هم خودش می‌شود: $f^{-۱}(x)=-x$

پس: $f^{-۱}(۲)=-۲$

۵۵۰. **۱** با توجه به علامت a، نمودار ضابطهٔ $y=x^{۲}+a$ با دامنهٔ $x\geq ۰$ به یکی از سه شکل روبه‌رو است:



ضابطهٔ دوم خط $y=ax+b$ است. اگر شیب خط منفی باشد $(a<۰)$، تابع قطعاً یک‌به‌یک نیست، چون خطی موازی محور xها پیدا می‌شود که ضابطهٔ اول و این خط را در ۲ نقطه قطع کند. از طرفی a نباید صفر باشد، چون ضابطهٔ دوم خطی افقی می‌شود. پس باید $a>۰$ باشد. در نتیجه تکلیف ضابطهٔ اول هم معلوم شد.

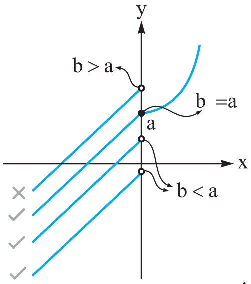


برای رسم ضابطهٔ دوم، باید حواسمان به b (یعنی عرض از مبدأ خط) باشد.

با توجه به مثبت‌بودن a (شیب خط)، برای b (عرض از مبدأ) چند حالت داریم:

در حالت $b=a$ یا $b<a$، تابع یک‌به‌یک می‌شود.

پس برای وارون‌پذیربودن (یا همان یک‌به‌یک‌بودن)، نمودار f فقط از ناحیهٔ ۴ نمی‌گذرد. در نتیجه $f^{-۱}$ فقط از ناحیهٔ ۲ نمی‌گذرد.



۵۵۱. **۱** ابتدا محدودهٔ دامنه‌ها را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}۲x-۵\geq ۰\Rightarrow ۲x\geq ۵\Rightarrow x\geq\frac{۵}{۲}\\ ۲x-۵<۰\Rightarrow ۲x<۵\Rightarrow x<\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

پس می‌توانیم ضابطهٔ f را به صورت زیر بنویسیم:

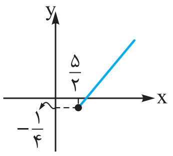
$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} & x\geq\frac{۵}{۲}\\ -۲x^{۲}+ax-۲۱ & x<\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

سهمی $y=-۲x^{۲}+ax-۲۱$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است که طول رأس در آن بازه نباشد. طول رأس این سهمی $-\frac{b}{۲a}=-\frac{a}{-۴}=\frac{a}{۴}$ است.

سهمی در بازهٔ $x<\frac{۵}{۲}$ وارون‌پذیر است اگر $\frac{a}{۴}$ در این بازه نباشد. به عبارت دیگر $\frac{a}{۴}$ نباید عضو بازهٔ $(-\infty,\frac{۵}{۲})$ باشد، پس $\frac{a}{۴}$ عضو بازهٔ $[\frac{۵}{۲},+\infty)$ می‌شود:

$$\frac{a}{۴}\geq\frac{۵}{۲}\Rightarrow a\geq ۱۰$$

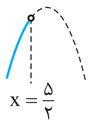
خط $y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ با شرط $x\geq\frac{۵}{۲}$ را رسم می‌کنیم:



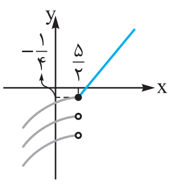
پس حداقل مقدار ضابطهٔ $\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$، برابر $-\frac{۱}{۴}$ است.

حالا علاوه بر این‌که طول رأس سهمی نباید در بازهٔ $x<\frac{۵}{۲}$ باشد، برای این‌که f وارون‌پذیر شود، حداکثر مقدار $-۲x^{۲}+ax-۲۱$، باید کوچک‌تر مساوی حداقل مقدار $\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ باشد، رأس سهمی در بازهٔ $x<\frac{۵}{۲}$ نیست. پس حداکثر مقدار $-۲x^{۲}+ax-۲۱$ به ازای $x=\frac{۵}{۲}$ رخ می‌دهد.

(دلیلشم اینه که توی بازهٔ $x\geq\frac{۵}{۲}$ که یه‌دونه خط داریم و رسمش کردیم، حالا ضریب $x^{۲}$ سهمی منفیه پس سهمی رو به پایین  *می‌شه ولی ما نمودار سهمی رو توی $x<\frac{۵}{۲}$ می‌خواهیم. از طرفی دیدیم که رأس سهمی نباید توی $x<\frac{۵}{۲}$ باشه، پس طبیعتاً نمودار سهمی توی $x<\frac{۵}{۲}$ به شکل روبه‌رو می‌شه:*



پس بیشترین مقدار سهمی رو توی $x=\frac{۵}{۲}$ داریم. حالا برای این‌که f یک‌به‌یک بشه، این بیشترین مقدار، باید از کم‌ترین مقدار ضابطهٔ $\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ کم‌تر یا مساوی بشه که شکل نمودار به یکی از شکل‌های مقابل باشه تا f وارون‌پذیر بشه: (باید یکی از سهمی‌های سمت چپ رو داشته باشیم.)



مقدار سهمی در $x=\frac{۵}{۲}$ را حساب می‌کنیم: $y=-۲x^{۲}+ax-۲۱$

$$\xrightarrow{x=\frac{۵}{۲}} y=-\frac{۲۵}{۲}+\frac{۵a}{۲}-۲۱=\frac{۵a}{۲}-\frac{۶۷}{۲}$$

این مقدار باید کوچک‌تر یا مساوی $-\frac{۱}{۴}$، یعنی حداقل مقدار $\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ باشد:

$$\frac{۵a}{۲}-\frac{۶۷}{۲}\le -\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۵a}{۲}\le\frac{۶۷}{۲}-\frac{۱}{۴}\Rightarrow \frac{۵a}{۲}\le\frac{۱۳۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{۲}{۵}} a\le \frac{۱۳۳}{\cancel{۴}_{۲}}\times\frac{\cancel{۲}^{۱}}{۵}=\frac{۱۳۳}{۱۰}=۱۳/۳$$

از $a\ge ۱۰$ و $a\le ۱۳/۳$، نتیجه می‌گیریم بزرگ‌ترین مقدار صحیح a برابر ۱۳ است و ضابطهٔ f به شکل زیر می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} & x\ge\frac{۵}{۲}\\ -۲x^۲+۱۳x-۲۱ & x<\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

$f^{-۱}(-۳)$ را می‌خواهیم، پس کافی است معادلهٔ $f(x)=-۳$ را حل کنیم.

واضح است که $\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ نمی‌تواند برابر ۳− باشد (با توجه به نمودار آن‌که رسم شده، مقادیرش از $\frac{-۱}{۴}$ به بالا بود)، پس $-۲x^۲+۱۳x-۲۱$ باید برابر ۳− شود:

$$-۲x^۲+۱۳x-۲۱=-۳ \Rightarrow ۲x^۲-۱۳x+۱۸=۰$$

معادلهٔ بالا را با روش روسی حل می‌کنیم:

ضرب

$$۲x^۲-۱۳x+۱۸=۰ \Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰$$

$$\Rightarrow (x-۹)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۴\\ x=۹\end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-۱۳x+۱۸=۰$، $x=\frac{۴}{۲}=۲$ و $x=\frac{۹}{۲}$ است.

حالا جواب $\frac{۹}{۲}$ قابل قبول نیست (چون شرط $x<\frac{۵}{۲}$ را داریم)، پس $f^{-۱}(-۳)=۲$ می‌شود.

۵۵۲. **۱** ابتدا محدودهٔ دامنه‌ها را ساده‌تر می‌نویسیم:

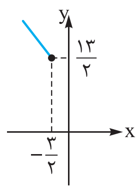
$$\begin{cases}۲x+۳\le ۰ \Rightarrow ۲x\le -۳ \Rightarrow x\le -\frac{۳}{۲}\\ ۲x+۳>۰ \Rightarrow ۲x>-۳ \Rightarrow x>-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

پس می‌توانیم ضابطهٔ f را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲-۳x & x\le-\frac{۳}{۲}\\ ۲+۲mx-x^۲ & x>-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

سهمی $۲+۲mx-x^۲$ (یا همان $-x^۲+۲mx+۲$) در بازه‌ای وارون‌پذیر است که طول رأس سهمی در آن بازه نباشد. طول رأس این سهمی $m=\frac{-۲m}{-۲}=-\frac{b}{۲a}$ است. سهمی در بازهٔ $x>-\frac{۳}{۲}$ وارون‌پذیر است. اگر m در این بازه نباشد، m نباید عضو بازهٔ $(-\frac{۳}{۲},+\infty)$ باشد، پس m عضو بازهٔ $(-\infty,-\frac{۳}{۲}]$ می‌شود؛ یعنی: $m\le-\frac{۳}{۲}$

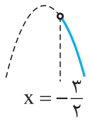
خط $۲-۳x$ با شرط $x\le-\frac{۳}{۲}$ را رسم می‌کنیم:



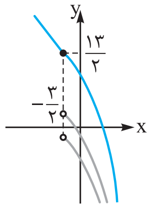
پس حداقل مقدار ضابطهٔ $۲-۳x$ برابر $\frac{۱۳}{۲}$ است.
حالا علاوه بر این‌که طول رأس سهمی نباید در بازهٔ $x>-\frac{۳}{۲}$ باشد، برای این‌که f وارون‌پذیر شود، حداکثر مقدار $۲+۲mx-x^۲$، باید کوچک‌تر مساوی حداقل مقدار $۲-۳x$ باشد.

رأس سهمی در بازهٔ $x>-\frac{۳}{۲}$ نیست، پس حداکثر مقدار $۲+۲mx-x^۲$ به ازای $x=-\frac{۳}{۲}$ رخ می‌دهد.

دلیلشم اینه که توی بازهٔ $x\le-\frac{۳}{۲}$ که یه‌دونه خط داریم و رسمش کردیم، حالا ضریب $x^۲$ سهمی منفیه پس سهمی رو به پایین می‌شه ولی ما نمودار سهمی رو توی $x>-\frac{۳}{۲}$ می‌خواهیم. از طرفی دیدیم رأس سهمی نباید توی $x>-\frac{۳}{۲}$ باشه. پس طبیعتاً نمودار سهمی توی $x>-\frac{۳}{۲}$ به شکل روبه‌رو می‌شه:



پس بیشترین مقدار سهمی رو توی $x=-\frac{۳}{۲}$ داریم. برای این‌که f یک‌به‌یک بشه، این بیشترین مقدار، باید از کم‌ترین مقدار ضابطهٔ $۲-۳x$ کم‌تر یا مساویش بشه که شکل نمودار به یکی از شکل‌های مقابل بشه تا f وارون‌پذیر باشه: (باید یکی از سهمی‌های سمت راست رو داشته باشیم.)



$$۲+۲mx-x^۲ \xrightarrow{x=-\frac{۳}{۲}} ۲-۳m-\frac{۹}{۴}=-۳m-\frac{۱}{۴}$$

این مقدار باید کوچک‌تر از $\frac{۱۳}{۲}$، یعنی حداقل مقدار $۲-۳x$ باشد:

$$-۳m-\frac{۱}{۴}\le\frac{۱۳}{۲} \xrightarrow{\times(-۱)} ۳m+\frac{۱}{۴}\ge-\frac{۱۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳m\ge-\frac{۱۳}{۲}-\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۳m\ge-\frac{۲۷}{۴} \Rightarrow m\ge-\frac{۹}{۴}$$

با توجه به $m\le-\frac{۳}{۲}$ و $m\ge-\frac{۹}{۴}$ نتیجه می‌گیریم $-\frac{۹}{۴}\le m\le-\frac{۳}{۲}$ یا $-۲/۲۵\le m\le-۱/۵$ است. پس تنها مقدار صحیح m برابر ۲− است که به ازای آن، ضابطهٔ f به شکل زیر می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}۲-۳x & x\le-\frac{۳}{۲}\\ ۲-۴x-x^۲ & x>-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

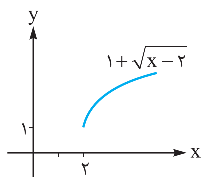
$f^{-۱}(-۱۹)$ را می‌خواهیم، پس کافی است معادلهٔ $f(x)=-۱۹$ را حل کنیم.
واضح است که $۲-۳x$ نمی‌تواند برابر ۱۹− باشد (با توجه به نمودار آن)، پس $۲-۴x-x^۲$ باید برابر ۱۹− شود:

$$۲-۴x-x^۲=-۱۹ \Rightarrow x^۲+۴x-۲۱=۰$$

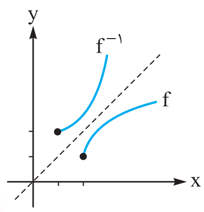
$$\Rightarrow (x+۷)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۳ \ \checkmark\\ x=-۷ \ \times\end{cases}$$

دامنهٔ این ضابطه $x>-\frac{۳}{۲}$ است، پس فقط ۳ قبول است و در نتیجه:
$f^{-۱}(-۱۹)=۳$

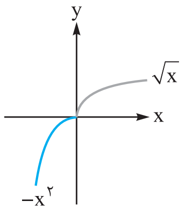
۵۵۳. **۱** اول باید تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}+۱$ را رسم کنیم.
باید نمودار $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا ببریم:



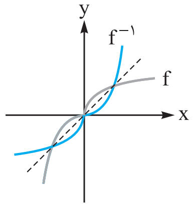
الان کافی است نمودار بالا را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم تا به نمودار $f^{-۱}$ برسیم:



۵۵۴. **۳** اول نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ را رسم می‌کنیم.



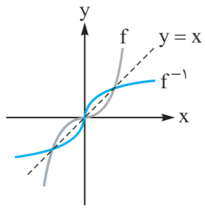
حالا نمودار بالا را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار $f^{-۱}$ به دست آید:



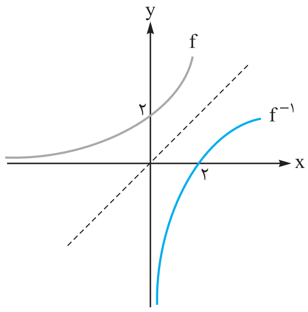
۵۵۵. **۳** تابع f را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$$

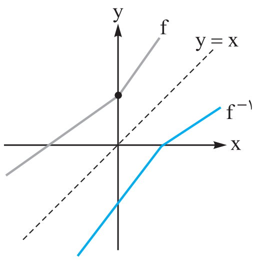
ابتدا f را رسم می‌کنیم. بعد نمودارش را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم تا $f^{-۱}$ به دست آید:



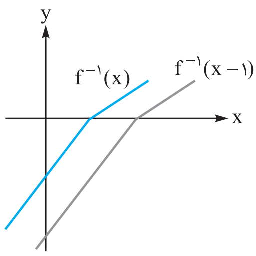
۵۵۶. **۴** نمودار تابع $f(x)$ را داریم. نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است، حالا دامنهٔ تابع $\sqrt{f^{-۱}(x)}$ برابر بازه‌ای است که در آن $f^{-۱}(x)\ge ۰$ باشد (یعنی $f^{-۱}$ بالای محور xها باشد) که می‌شود $x\ge ۲$.



۵۵۷. **۲** برای رسم $f^{-۱}(x)$ باید $f(x)$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه کنیم:



حالا آن را ۱ واحد به راست می‌بریم تا به $f^{-۱}(x-۱)$ برسیم:

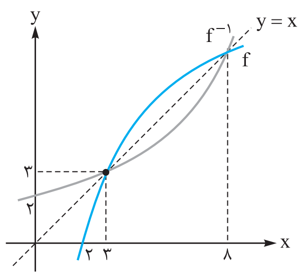


نمودار نهایی از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.

۵۵۸. **۴** عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر می‌گذاریم:

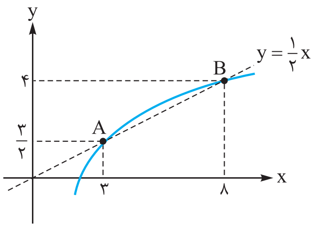
$$x-f^{-۱}(x)\ge ۰ \Rightarrow x\ge f^{-۱}(x)$$

نمودار $f^{-۱}$ را می‌کشیم:



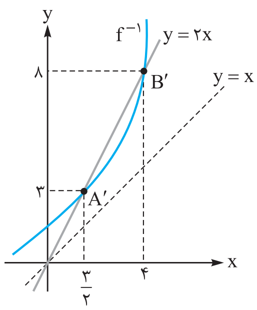
نامعادلهٔ $x\ge f^{-۱}(x)$، یعنی کجاها، تابع $y=x$ بالاتر از $y=f^{-۱}(x)$ است؟ روی نمودار به‌ازای $۳\le x\le ۸$، نیمساز ربع اول و سوم بالاتر از $f^{-۱}$ است، پس جواب همین است: $[۳,۸]$

۵۵۹. **۲** با توجه به این‌که طول نقاط تقاطع $f(x)$ و $y=\frac{۱}{۲}x$ را داریم $(x=۸\,,\,x=۳)$، با کمک خط $y=\frac{۱}{۲}x$، عرضشان را هم می‌توانیم پیدا کنیم (به ترتیب $\frac{۳}{۲}$, ۴).



ضابطهٔ وارون خط $y=\frac{۱}{۲}x$ به شکل $y=۲x$ است.

پس اگر خط $y=\frac{۱}{۲}x$ و تابع f که در شکل رسم شده‌اند را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه کنیم به خط $y=۲x$ و تابع $f^{-۱}$ می‌رسیم:



تابع $g(x)=\sqrt{۲x-f^{-۱}(x)}$، یک تابع رادیکالی است. برای دامنه‌اش باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$۲x-f^{-۱}(x)\ge ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x)\le ۲x$$

جواب نامعادلهٔ $f^{-۱}(x)\le ۲x$، بازه‌هایی است که $y=۲x$ بالاتر از $y=f^{-۱}(x)$ است که طبق شکل، بازهٔ $[\frac{۳}{۲},۴]$ می‌باشد.

۵۶۰. **۳** **راه اول:** برای پیداکردن تابع معکوس تابع $f(x)=۲x+۴$ با دامنهٔ $[-۱,۳]$ اولاً در مورد ضابطه مثل همان چیزی که قبلاً گفتیم، داریم:

$$y=۲x+۴ \Rightarrow ۲x=y-۴ \Rightarrow x=\frac{y-۴}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن x و y}} y=\frac{x-۴}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲}$$

و ثانیاً در مورد دامنهٔ $f^{-۱}$ هم می‌دانیم که دامنهٔ $f^{-۱}$ همان برد f است، پس باید برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲x+۴$ و دامنهٔ $[-۱,۳]$ را پیدا کنیم:

$$-۱\le x\le ۳ \Rightarrow -۲\le ۲x\le ۶ \Rightarrow ۲\le ۲x+۴\le ۱۰ \Rightarrow ۲\le f(x)\le ۱۰$$

پس برد f برابر بازهٔ $[۲,۱۰]$ و در نتیجه دامنهٔ $f^{-۱}$ هم برابر بازهٔ $[۲,۱۰]$ است.

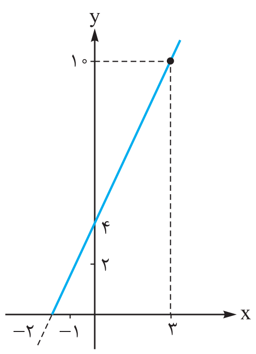
پس تابع معکوس f می‌شود: $f^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲}\,,\,۲\le x\le ۱۰$

راه دوم: بعد از پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون یعنی $f^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲}$ برای پیداکردن دامنهٔ $f^{-۱}$ می‌توانیم نمودار تابع f را رسم و برد f را تعیین کنیم:

$$f(x)=۲x+۴\,,\,x\in[-۱,۳]$$

$$x=-۱ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow (-۱,۲)$$

$$x=۳ \Rightarrow y=۱۰ \Rightarrow (۳,۱۰)$$



حالا با توجه به نمودار، برد تابع f برابر است با $[۲,۱۰]$، پس دامنهٔ $f^{-۱}$ هم می‌شود $۲\le x\le ۱۰$.

۵۶۱. **۱** وقتی سؤال می‌گوید تابعی را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ قرینه کنید یعنی وارونش را می‌خواهد.

در ضابطهٔ $۳y-۲x=۴$، جای x و y را عوض می‌کنیم: $۳x-۲y=۴$

بعد y را برحسب x می‌نویسیم: $۲y=۳x-۴ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x\underbrace{-۲}_{\text{عرض از مبدأ}}$

۵۶۲. ۲ **راه اول:** در درس‌نامه داشتیم اگر f یک تابع خطی باشد، f و وارون f در دو صورت بر هم منطبق‌اند:

الف) $f(x)=x$ باشد.

ب) $f(x)=-x+b$ باشد (چون خط $y=-x+b$ بر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم عمود است و قرینه‌اش به نیمساز می‌شود خودش). پس حالا که داریم $f(x)=ax+۱$ باید $a=-۱$ باشد.

راه دوم: وارون تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$y=ax+۱ \Rightarrow ax=y-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{a}y-\frac{۱}{a}$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } y,x} y=\frac{۱}{a}x-\frac{۱}{a}$$

حالا دو خط $y=ax+۱$ و $y=\frac{۱}{a}x-\frac{۱}{a}$ باید بر هم منطبق باشند، پس باید:

$$\begin{cases}\frac{۱}{a}=a\\ -\frac{۱}{a}=۱\end{cases}\Rightarrow a=-۱$$

۵۶۳. ۲ ضابطهٔ اول را استاندارد می‌نویسیم:

$$ax+by=۸ \Rightarrow by=-ax+۸ \xrightarrow{\div b} y=-\frac{a}{b}x+\frac{۸}{b}$$

چون دو خط نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول متقارن‌اند، پس یکی از آن‌ها وارون دیگری است.

وارون خط دوم یعنی $۲x-۳y=b$ را پیدا می‌کنیم و با خط بالا برابر قرار می‌دهیم:

$$۲x=۳y+b \xrightarrow{\div ۲} x=\frac{۳}{۲}y+\frac{b}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{عوض کردن } y,x} y=\frac{۳}{۲}x+\frac{b}{۲}$$

دو ضابطه را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{-a}{b}x+\frac{۸}{b}=\frac{۳}{۲}x+\frac{b}{۲} \Rightarrow \begin{cases}\frac{۸}{b}=\frac{b}{۲}\Rightarrow b^۲=۱۶\Rightarrow b=\pm ۴\\ \frac{-a}{b}=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

به ازای هر دو مقدار b، a را حساب می‌کنیم:

۱) $\frac{-a}{b}=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{b=۴} a=-۶ \Rightarrow a+b=-۲$

۲) $\frac{-a}{b}=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{b=-۴} a=۶ \Rightarrow a+b=۲$

پس: $a+b=\pm ۲$

۵۶۴. ۲ نقطهٔ $A(۴-a,a)$ روی f و $f^{-۱}$ است.

از این‌که $A(۴-a,a)$ روی $f^{-۱}$ است، پس $A'(a,۴-a)$ روی f است.

دو نقطه از f را داریم: $A'(a,۴-a)\,,\,A(۴-a,a)$

شیب خط را حساب می‌کنیم: $m_{AA'}=\frac{a-(۴-a)}{(۴-a)-a}=-۱$

پس ضابطه به شکل $y=-x+b$ است. نقطهٔ $A(۴-a,a)$ روی آن است:

$a=-۴+a+b \Rightarrow b=۴$

در نتیجه ضابطهٔ f به شکل $y=-x+۴$ است.

خطی که شیبش ۱- است، وارونش خودش می‌شود: $f^{-۱}: y=-x+۴$

معادلهٔ خط را به فرم کلی می‌نویسیم: $x+y-۴=۰$

فاصلهٔ $(۰,۰)$ از خط بالا برابر است با: $\frac{|۰+۰-۴|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$

۵۶۵. ۲ ضابطهٔ وارون تابع خطی $f(x)=ax+b$ را می‌نویسیم:

$$y=ax+b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \xrightarrow[y,x]{\text{عوض کردن جای}} y=\frac{x-b}{a}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$$

دو تساوی داده‌شده را با f و $f^{-۱}$ به دست آمده می‌نویسیم (از $f(۰)\neq ۰$، نتیجه می‌گیریم $b\neq ۰$).

- $f^{-۱}(۰)=f(۰) \Rightarrow -\frac{b}{a}=b \xrightarrow{\times\frac{۱}{b}} -\frac{۱}{a}=۱ \Rightarrow a=-۱$

تا این‌جا داریم: $f^{-۱}(x)=-x+b$

- $f^{-۱}(۲)=۷ \Rightarrow -۲+b=۷ \Rightarrow b=۹$

پس: $f(x)=-x+۹ \Rightarrow f(۴)=-۴+۹=۵$

۵۶۶. ۴ ابتدا ضابطهٔ وارون f را به دست می‌آوریم.

در ضابطهٔ $y=\frac{x-۳}{۲}$، x را تنها می‌کنیم: $۲y=x-۳ \Rightarrow x=۲y+۳$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=۲x+۳$

پس ضابطهٔ وارون به صورت $y=۲x+۳$ شد.

اگر این تابع را ۶ واحد به سمت پایین انتقال دهیم، تابع $y=۲x+۳-۶=۲x-۳$ حاصل می‌شود. طول نقطهٔ تلاقی منحنی حاصل (یعنی $y=۲x-۳$) با نمودار f (یعنی $f(x)=\frac{x-۳}{۲}$) را به دست می‌آوریم:

$$۲x-۳=\frac{x-۳}{۲}\Rightarrow ۴x-۶=x-۳\Rightarrow ۳x=۳\Rightarrow x=۱$$

برای به دست آوردن عرض نقطهٔ تقاطع، کافی است $x=۱$ را در یکی از منحنی‌ها (مثلاً f) جای‌گذاری کنیم:

$$f(x)=\frac{x-۳}{۲}\xrightarrow{x=۱} y=\frac{۱-۳}{۲}=-۱$$

بنابراین مختصات نقطهٔ تقاطع به صورت $A(۱,-۱)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{(۱-۰)^۲+(-۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}$$

۵۶۷. ۴ ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{(x-۳)(۲x-۱)}{x-۳} \Rightarrow f(x)=۲x-۱\,,\,x\neq ۳$$

ضابطهٔ ساده‌شدهٔ f به ازای $x=۳$، عدد ۵ را تولید می‌کند، پس برد f نباید شامل عدد ۵ باشد: $R_f=\mathbb{R}-\{۵\}$

ضابطهٔ وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y=۲x-۱ \Rightarrow x=\frac{y+۱}{۲} \xrightarrow[y,x]{\text{عوض کردن جای}} y=\frac{x+۱}{۲}$$

از آن‌جایی که دامنهٔ $f^{-۱}$ همان برد f است، پس دامنهٔ $f^{-۱}$ هم نباید شامل عدد ۵ باشد، پس $x-۵$ را در صورت و مخرج آن ضرب می‌کنیم:

$$f^{-۱}(x)=\frac{(x+۱)(x-۵)}{۲(x-۵)}=\frac{x^۲-۴x-۵}{۲x-۱۰}$$

پس: $b+c+d=-۴+(-۵)+(-۱۰)=-۱۹$

۵۶۸. ۴ **راه اول:** مثل همیشه برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{x-۱}\Rightarrow xy-y=۱\Rightarrow xy=y+۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{y+۱}{y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{x}$$

و چون $\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{x}+\frac{۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}$ پس $f^{-۱}(x)=۱+\frac{۱}{x}$.

راه دوم: در درس‌نامه دیدیم وارون تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است، پس:

$$f(x)=\frac{\overset{a}{۰}x+\overset{b}{۱}}{\underset{c}{۱}x\underset{d}{-۱}} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{\overset{-d}{۱}x+\overset{b}{۱}}{\underset{c}{۱}x\underset{-a}{-۰}}=\frac{x+۱}{x}$$

۵۶۹. [۲] از درس‌نامه یادمان هست که تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به شرطی وارون خودش است که $a=-d$، در تابع $f(x)=\frac{۲x+۳}{x+b}$ باید $b=-۲$ باشد، پس $f(x)=\frac{۲x+۳}{x-۲}$ است و در نتیجه $f(۰)=-\frac{۳}{۲}$.

۵۷۰. [۲] برای وارون تابع هموگرافیک فرمول گفتیم:

$$f(x)=\frac{۱x+۴}{۱x-۲}\xrightarrow[\text{و قرینه می‌کنیم}]{\text{جای ۱ و ۲- عوض}} f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۴}{۱x-۱}=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

حالا f را با $f^{-۱}$ برابر می‌گذاریم:

$$f(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow \frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

$$\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۲x^۲-۸\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow x=-۱,۴$$

۵۷۱. [۱] ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به‌صورت $f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

$$f(x)=\frac{۲x+۳}{x+k}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-kx+۳}{x-۲}$$

حالا f و $f^{-۱}$ را قطع می‌دهیم:

$$f(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow\frac{۲x+۳}{x+k}=\frac{-kx+۳}{x-۲}$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۴x+۳x-۶=-kx^۲+۳x-k^۲x+۳k$$

$$\Rightarrow (k+۲)x^۲+(k^۲-۴)x+(-۶-۳k)=۰$$

حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ به دست آمده، ۱ است:

$$S=۱\Rightarrow -\frac{b}{a}=۱\Rightarrow b=-a\Rightarrow k^۲-۴=-k-۲$$

$$\Rightarrow k^۲+k-۲=۰\Rightarrow \begin{cases}k=۱ \checkmark\\ k=-۲ \times\end{cases}$$

در حالت $k=-۲$، f و $f^{-۱}$ بر هم منطبق می‌شوند.

۵۷۲. [۲] تغییرات را مرحله‌به‌مرحله روی f انجام می‌دهیم:

$$y=\frac{۲x+۳}{x-۴}\xrightarrow[x\to x-a]{\text{a واحد راست}} y=\frac{۲(x-a)+۳}{(x-a)-۴}=\frac{۲x-۲a+۳}{x-a-۴}$$

$$\xrightarrow{\text{۲a واحد بالا}} y=\frac{۲x-۲a+۳}{x-a-۴}+۲a=\frac{۲x-۲a+۳+۲ax-۲a^۲-۸a}{x-a-۴}$$

$$=\frac{(۲+۲a)x+(-۲a^۲-۱۰a+۳)}{x+(-a-۴)}$$

ضابطهٔ g به صورت زیر شد:

$$g(x)=\frac{\overbrace{(۲+۲a)}^{A}x+(-۲a^۲-۱۰a+۳)}{x+\underbrace{(-a-۴)}_{D}}$$

برای آن‌که g و $g^{-۱}$ یکسان باشند باید A و D قرینهٔ هم باشند:

$$A=-D\Rightarrow ۲+۲a=a+۴\Rightarrow a=۲$$

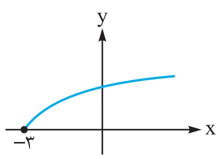
۵۷۳. [۲] **راه اول:** برد $\sqrt{x+۳}$ شامل اعداد بیشتر یا مساوی صفر است، پس دامنهٔ $f^{-۱}$ باید $x\ge ۰$ باشد. به ازای $x=۱$ داریم $y=۲$. پس در وارون آن نقطهٔ (۲,۱) صدق می‌کند و جواب می‌شود [۲].

راه دوم: ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$f^{-۱}\ \text{ضابطهٔ}: y=\sqrt{x+۳}\Rightarrow y^۲=x+۳$$

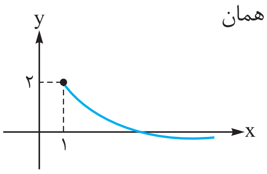
$$\Rightarrow x=y^۲-۳\xrightarrow{\text{عوض کردن } y,x} y=x^۲-۳$$

برای به دست آوردن $D_{f^{-۱}}$، برد $f(x)=\sqrt{x+۳}$ را از روی نمودارش حساب می‌کنیم:



$$\Rightarrow D_{f^{-۱}}=R_f=[۰,+\infty)$$

۵۷۴. [۱] **راه اول:** اول برد تابع اولیه که همان دامنهٔ تابع وارون است را حساب می‌کنیم:
با توجه به نمودار داریم:



$$R_f=D_{f^{-۱}}=(-\infty,۲]$$

حالا می‌رویم سراغ ضابطه، x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow\sqrt{x-۱}=۲-y\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$x-۱=y^۲-۴y+۴\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵$$

جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=x^۲-۴x+۵$

پس ضابطهٔ وارون $y=x^۲-۴x+۵$ و دامنه‌اش $(-\infty,۲]$ است.

راه دوم: نقطهٔ $A(۵,۰)$ روی f است، پس باید دنبال گزینه‌ای باشیم که نقطهٔ $A'(۰,۵)$ روی آن است. تنها گزینه‌ای که A' در آن صدق می‌کند، [۱] است. دقت کنید در [۳]، $x=۰$ در دامنه نیست.

۵۷۵. [۳] مرحله‌به‌مرحله، کارهای خواسته‌شده را انجام می‌دهیم.

۱) قرینهٔ یک تابع نسبت به خط $y=x$، تابع وارون آن می‌شود.
برای به دست آوردن وارون تابع $y=\sqrt{x-۱}+۲$، ابتدا x را تنها می‌کنیم، بعد جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$\sqrt{x-۱}=y-۲\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۱=(y-۲)^۲$$

$$\Rightarrow x=(y-۲)^۲+۱\xrightarrow{\text{عوض کردن } y,x} y=(x-۲)^۲+۱$$

۲) نمودار به دست آمده را ۲ واحد به راست می‌بریم. باید جای xها، $x-۲$ قرار دهیم:

$$y=(x-۲-۲)^۲+۱\Rightarrow y=(x-۴)^۲+۱$$

۳) در آخر تابع را ۳ واحد به پایین می‌بریم:

$$y=(x-۴)^۲+۱-۳\Rightarrow y=(x-۴)^۲-۲$$

مقدار تابع به دست آمده را به ازای $x=۴$، حساب می‌کنیم:

$$g(x)=(x-۴)^۲-۲\Rightarrow g(۴)=۰-۲=-۲$$

۵۷۶. [۳] احتمالاً طراح منظورش k واحد به بالا و $k-۲$ واحد به راست بوده! چون اگر این موضوع را ندانیم، در ۴ حالت مختلف باید سؤال را حل کنیم!

$$y=\sqrt{۴-x}\xrightarrow{\text{k واحد بالا}} y=\sqrt{۴-x}+k$$

$$\xrightarrow[\text{به راست}]{\text{k-۲ واحد}} y=\sqrt{۴-(x-(k-۲))}+k=\sqrt{-x+k+۲}+k$$

این تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. مختصات این نقطه (۱,۱) است که باید در ضابطه صدق کند.

$$y=\sqrt{-x+k+۲}+k\xrightarrow{(۱,۱)} ۱=\sqrt{k+۱}+k$$

$$\Rightarrow ۱-k=\sqrt{k+۱}\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$۱-۲k+k^۲=k+۱\Rightarrow k^۲-۳k=۰\Rightarrow k(k-۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=۰ \checkmark\\ k=۳ \times\end{cases}$$

با جای‌گذاری $k=۰$، ضابطه به صورت $y=\sqrt{-x+۲}$ درمی‌آید.

این ضابطه را ۱ واحد به پایین می‌آوریم: $y=\sqrt{-x+۲}-۱$

منحنی به دست آمده را با محور xها قطع می‌دهیم (y را صفر می‌دهیم).

$$y=\sqrt{-x+۲}-۱\Rightarrow ۰=\sqrt{-x+۲}-۱\Rightarrow ۱=\sqrt{-x+۲}\Rightarrow x=۱$$

۵۷۷. [۳] نمودار تابع $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}$ را k واحد در راستای عمودی حرکت می‌دهیم. ضابطه‌اش به صورت $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}+k$ درمی‌آید.

چون این تابع، صعودی اکید است، پس وارونش را حتماً روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع می‌کند.

سؤال عرض نقطهٔ تقاطع y و y^{-1} را ۱ داده، پس مختصات این نقطه به صورت (۱,۱) است.

تابع $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}+k$ از نقطهٔ (۱,۱) می‌گذرد:

$$۱=\sqrt{\sqrt{۱}+۳}+k \Rightarrow k=-۱$$

تا این‌جا، ضابطه به شکل $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}-۱$ شد.

کارهایی که سؤال گفته را روی آن انجام می‌دهیم:

$$y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}-۱ \xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-\sqrt{\sqrt{x}+۳}+۱$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به چپ}} y=-\sqrt{\sqrt{x+۴}+۳}+۱$$

از بین نقاط داده‌شده، نقطهٔ $(۰,-\sqrt{۵}+۱)$ روی این منحنی قرار دارد.

۵۷۸. ۱ **عددگذاری:** f از (۲,۱) می‌گذرد پس باید (۱,۲) در وارونش هم صدق کند که فقط به ۱ می‌خورد.

راه دوم: تابع را مربع کامل می‌نویسیم:

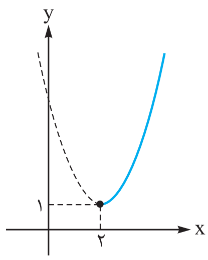
$$y=x^۲-۴x+۵ \xrightarrow{۵=۴+۱} y=x^۲-۴x+۴+۱$$

$$\Rightarrow y=(x-۲)^۲+۱ \Rightarrow (x-۲)^۲=y-۱$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲|=\sqrt{y-۱} \xrightarrow{x\ge ۲} x-۲=\sqrt{y-۱}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{y-۱}+۲ \xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=\sqrt{x-۱}+۲$$

برای دامنهٔ وارون، باید برد تابع اصلی را پیدا کنیم. سهمی $y=(x-۲)^۲+۱$ با دامنهٔ $x\ge ۲$ را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow D_{f^{-1}}=R_f=[۱,+\infty)$$

۵۷۹. ۱ باید تابع را مربع کامل بنویسیم:

$$y=-x^۲+۶x-۵ \Rightarrow y=-(x^۲-۶x+۵)$$

داخل پرانتز، عدد ۹ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$y=-(x^۲-۶x+۹-۹+۵)=-(x^۲-۶x+۹)+۴$$

$$\Rightarrow y=-(x-۳)^۲+۴$$

حالا x را برحسب y می‌نویسیم:

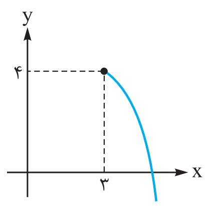
$$(x-۳)^۲=۴-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۳|=\sqrt{۴-y}$$

با دامنهٔ $x\ge ۳$، داخل قدرمطلق مثبت است، پس خودش بیرون می‌آید:

$$x-۳=\sqrt{۴-y} \Rightarrow x=\sqrt{۴-y}+۳$$

جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=\sqrt{۴-x}+۳$

رسیدیم به جای مهم داستان، یعنی دامنهٔ f^{-1}. به جای $D_{f^{-1}}$ باید R_f را حساب کنیم. نمودار $y=-(x-۳)^۲+۴$ با دامنهٔ $x\ge ۳$ را می‌کشیم:



$$\Rightarrow D_{f^{-1}}=R_f=(-\infty,۴]$$

۵۸۰. ۴ در ضابطه از ۲- فاکتور می‌گیریم:

$$y=-۲x^۲+۶x+۱۰=-۲(x^۲-۳x-۵)$$

برای مربع کامل نوشتن، مربع نصف ضریب x (یعنی $\frac{۹}{۴}$) را اضافه و کم می‌کنیم:

$$y=-۲(\underbrace{x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}}_{\text{مربع کامل}}-\frac{۹}{۴}-۵)=-۲((x-\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۲۹}{۴})$$

$$\Rightarrow y=-۲(x-\frac{۳}{۲})^۲+\frac{۲۹}{۲}$$

حالا x را تنها می‌کنیم. حواستان به دامنه هم باشد که در ضابطه به صورت $x\le\frac{۳}{۲}$ داده شده است.

$$y=-۲(x-\frac{۳}{۲})^۲+\frac{۲۹}{۲} \Rightarrow ۲(x-\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۲۹}{۲}-y$$

$$\xrightarrow{\div ۲} (x-\frac{۳}{۲})^۲=-\frac{y}{۲}+\frac{۲۹}{۴} \xrightarrow{\text{جذر}} |x-\frac{۳}{۲}|=\sqrt{\frac{-y}{۲}+\frac{۲۹}{۴}}$$

$$\xrightarrow{x\le\frac{۳}{۲}} -x+\frac{۳}{۲}=\sqrt{\frac{-y}{۲}+\frac{۲۹}{۴}} \Rightarrow x=-\sqrt{\frac{-۱}{۲}y+\frac{۲۹}{۴}}+\frac{۳}{۲}$$

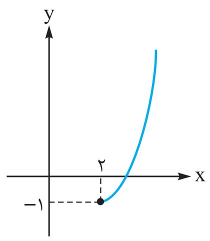
$$\xrightarrow{\text{عوض کردن x و y}} y=-\sqrt{\underset{\substack{\downarrow\\ a}}{\frac{-۱}{۲}}x+\underset{\substack{\downarrow\\ b}}{\frac{۲۹}{۴}}}+\underset{\substack{\downarrow\\ c}}{\frac{۳}{۲}}$$

پس:

$$a+۲b+c=-\frac{۱}{۲}+۲(\frac{۲۹}{۴})+\frac{۳}{۲}=\frac{۳۱}{۲}=۱۵/۵$$

۵۸۱. ۱ (۱) ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=x^۲-۲x+۱-۱=(x-۱)^۲-۱$$

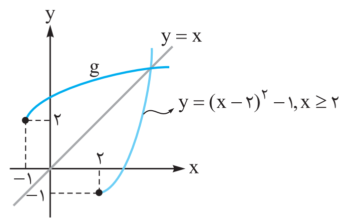


(۲) نمودار بالا را ۱ واحد به راست می‌بریم. باید جای xها، $x-۱$ قرار دهیم:

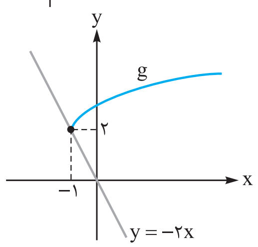
$$y=(x-۱-۱)^۲-۱=(x-۲)^۲-۱$$

دامنهٔ تابع اولیه $x\ge ۱$ بود. الان که ۱ واحد به راست بردیم، دامنه $x\ge ۲$ می‌شود.

(۳) باید نمودار مرحلهٔ قبل را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم تا به g برسیم. دقت کنید نیازی به پیداکردن ضابطه نیست.



(۴) حالا نمودار g و خط $y=-۲x$ را در یک دستگاه می‌کشیم:



دو نمودار فقط در یک نقطه به طول $x=-۱$ متقاطع‌اند.

۵۸۲. ۴ با تابع درجه دو طرفیم، پس باید آن را مربع کامل بنویسیم.

$$y=x^۲-۲x-۳ \Rightarrow y=\underbrace{x^۲-۲x+۱}_{(x-۱)^۲}-۱-۳ \Rightarrow y=(x-۱)^۲-۴$$

حالا x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y+۴=(x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y+۴}=|x-۱|$$

چون دامنه $x\ge ۱$ است پس جای $|x-۱|$، $x-۱$ می‌گذاریم:

$$\sqrt{y+۴}=x-۱ \Rightarrow x=\sqrt{y+۴}+۱$$

جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=\sqrt{x+۴}+۱$

حالا f^{-1} را با g برابر می‌گذاریم:

$$f^{-1}(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}$$

وقتی گزینه‌ها را داریم، برای چی خودمان را درگیر حل معادله کنیم؟! بین ۱۲، ۱۵، ۱۸ و ۲۱، فقط به ازای $x=۱۲$ و $x=۲۱$، رادیکال عددی رُند بیرون می‌دهد، پس جواب یکی از این دوتاست. تساوی فقط به ازای $x=۲۱$ برقرار می‌شود.

۵۸۳. ۲ **عددگذاری:** در تابع فرض می‌کنیم $x=-\frac{۱}{۲}$:

$$x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=\frac{۱}{۱۶}-۲(\frac{۱}{۴})+۱=\frac{۹}{۱۶}$$

پس در تابع وارون باید داشته باشیم $y=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{9}{16}$ که فقط در ۲ صدق می‌کند.

راه دوم: در تابع $y=x^4-2x^2+1$، x را برحسب y، با توجه به $-1<x<0$ پیدا می‌کنیم:

$$y=(x^2-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y}=|x^2-1|$$

$$\xrightarrow{-1<x<0} \sqrt{y}=-x^2+1 \Rightarrow x^2=1-\sqrt{y}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{1-\sqrt{y}} \xrightarrow{-1<x<0} -x=\sqrt{1-\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{1-\sqrt{y}} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

پس تابع وارون $y=-\sqrt{1-\sqrt{x}}$ است.

۵۸۴. **۳** با اضافه و کم کردن یک، می‌توانیم f را به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$f(x)=\underbrace{x+2\sqrt{x}+1}_{\text{مربع کامل}}-1=(\sqrt{x}+1)^2-1$$

حالا وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$y=(\sqrt{x}+1)^2-1 \Rightarrow y+1=(\sqrt{x}+1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y+1}=|\sqrt{x}+1|$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x}+1>0} \sqrt{y+1}=\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y+1}-1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x=(\sqrt{y+1}-1)^2$$

$$\Rightarrow x=y+1-2\sqrt{y+1}+1 \Rightarrow x=y+2-2\sqrt{y+1}$$

$$\xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=x+2-2\sqrt{x+1}$$

پس: $f^{-1}(x)=\underset{a}{1}\,x+\underset{b}{2}-2\sqrt{x+1}$

برای به دست آوردن دامنهٔ f^{-1}، باید برد f را پیدا کنیم. برای پیداکردن محدودهٔ (برد) f، از $\sqrt{x}\ge 0$ شروع می‌کنیم:

$$\sqrt{x}\ge0 \xrightarrow{+1} \sqrt{x}+1\ge1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\sqrt{x}+1)^2\ge1$$

$$\xrightarrow{-1} (\sqrt{x}+1)^2-1\ge0 \Rightarrow f(x)\ge0$$

پس برد f، بازهٔ $[0,+\infty)$ و در نتیجه: $D_{f^{-1}}: x\ge \underset{c}{0}$

بنابراین: $a+b+c=1+2+0=3$

۵۸۵. **۳** **عددگذاری:** در خود تابع نقطهٔ $(1,9)$ را داریم پس در گزینهٔ درست باید $(9,1)$ بخورد.

راه دوم: x را برحسب y پیدا می‌کنیم و جای x و y را عوض می‌کنیم. اگر جای ۲، بنویسیم ۱+۱، اتحاد مکعب درست می‌شود:

$$y=x^3+3x^2+3x+2 \Rightarrow y=\underbrace{x^3+3x^2+3x+1}_{\text{اتحاد مکعب}}+1$$

$$\Rightarrow y=(x+1)^3+1 \Rightarrow (x+1)^3=y-1$$

$$\Rightarrow x+1=\sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}-1$$

$$\xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=\sqrt[3]{x-1}-1$$

۵۸۶. **۱** f و g را ساده می‌کنیم:

$f(x)=x^2(x-6)=x^3-6x^2$ $\quad$ $g(x)=4(3x-2)=12x-8$

$f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$$

وارون تابع به دست آمده را تشکیل می‌دهیم:

$$y=(x-2)^3 \xrightarrow{\text{فرجه ۳}} \sqrt[3]{y}=x-2 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y}+2$$

$$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض‌کردن}} y=\sqrt[3]{x}+2$$

۵۸۷. **۲** وقتی در تابع f، $\sqrt[3]{x}$ و در g، x^3 داریم؛ یعنی قطعاً پای وارون‌شدن در میان است.

خب از $f(x)=x^3-1$ باید به $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ برسیم.

۱) اول وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$y=x^3-1 \Rightarrow x^3=y+1 \xrightarrow{\text{فرجه ۳}} x=\sqrt[3]{y+1}$$

$$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض‌کردن}} y=\sqrt[3]{x+1}$$

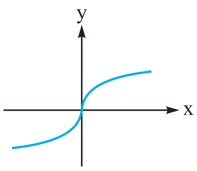
۲) شانسمان گرفت! الان کافی است در ضابطهٔ به دست آمده، جای xها، $x-2$ قرار دهیم (یعنی ۲ واحد به راست برویم):

$$y=\sqrt[3]{x+1} \xrightarrow{x\to x-2} y=\sqrt[3]{(x-2)+1}=\sqrt[3]{x-1}$$

پس مراحل این‌جوری شد:

$$y=x^3-1 \xrightarrow{\text{وارون}} y=\sqrt[3]{x+1} \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{۲واحد}} y=\sqrt[3]{x-1}$$

۵۸۸. **۲** وقتی تابعی یک‌به‌یک باشد، انتقال‌هایش هم یک‌به‌یک است. تابع $y=\sqrt[3]{x}$ یک‌به‌یک است:



تابع ۲، چندتا ریشه دارد، پس یک‌به‌یک نیست:

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-x \xrightarrow{y=0} \frac{1}{3}x^3-x^2-x=0 \xrightarrow{\times3}$$

$$x(\underbrace{x^2-3x-3}_{\Delta>0})=0 \Rightarrow \text{۳تا ریشه}$$

جواب ۲ است ولی گزینه‌های دیگر را ببینید:

۱ $y=\underbrace{\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(x^3-3x^2+3x-1)+\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{3}$

۳ $y=\frac{1}{3}x^3+1$ $\quad$ ۴ $y=\frac{1}{3}x^3-1$

هر سه گزینهٔ باقی‌مانده به کمک انتقال، وارون‌کردن، انبساط و انقباض از تابع $y=\sqrt[3]{x}$ به دست می‌آیند، مثلاً ۱، این‌جوری می‌شود:

$$y=\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{وارون}} y=x^3 \xrightarrow{\text{۱واحدراست}} y=(x-1)^3$$

$$\xrightarrow{\text{۱واحدبالا}} y=(x-1)^3+1$$

$$\xrightarrow[(k=\frac{1}{3})]{\text{انقباض عمودی}} y=\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{3}$$

۵۸۹. **۱** ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$y=2\sqrt{x}(4x-6\sqrt{x}+3) \Rightarrow y=8x\sqrt{x}-12x+6\sqrt{x}$$

با اضافه و کم کردن ۱، به یک اتحاد مکعب می‌رسیم:

$$y=\underbrace{8x\sqrt{x}-12x+6\sqrt{x}-1}_{\text{اتحاد مکعب}}+1 \Rightarrow y=(2\sqrt{x}-1)^3+1$$

حالا وارون را پیدا می‌کنیم: $y=(2\sqrt{x}-1)^3+1 \Rightarrow y-1=(2\sqrt{x}-1)^3$

$$\xrightarrow{\text{فرجه ۳}} \sqrt[3]{y-1}=2\sqrt{x}-1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt[3]{y-1}+1 \xrightarrow{\div2} \sqrt{x}=\frac{\sqrt[3]{y-1}}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x=\left(\frac{\sqrt[3]{y-1}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=\left(\frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{2}\right)^2=\frac{(\sqrt[3]{x-1}+1)^2}{4}$$

پس:

$$f^{-1}(x)=\frac{(\sqrt[\overset{n}{\uparrow}3]{x\overset{a}{\underset{\uparrow}{-1}}+\overset{b}{\underset{\uparrow}{1}}})^2}{\underset{\to c}{4}}$$

در نتیجه:

$$\frac{ab+c}{n}=\frac{-1(1)+4}{3}=1$$

۵۹۰. **۱** **عددگذاری:** در $f(x)=2^x-1$ به ازای $x=1$ داریم $y=1$ و نقطهٔ $(1,1)$ فقط در گزینه‌های **۱** و **۳** صدق می‌کند. به ازای $x=3$ داریم $y=7$، پس باید $(7,3)$ در تابع معکوس صدق کند و **۱** صحیح است.

راه دوم: x را برحسب y پیدا می‌کنیم: $y=2^x-1 \Rightarrow 2^x=y+1$

می‌دانیم اگر $A^B=C$، آن‌گاه $\log_A C=B$، پس:

$$2^x=y+1 \Rightarrow \log_2(y+1)=x$$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=\log_2(x+1)$

۵۹۱. **۲** **راه اول:** داریم $f(x)=\log_{10}(x-1)-3$، برای پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=\log_{10}(x-1)-3 \Rightarrow y+3=\log_{10}(x-1)$$

$$\Rightarrow x-1=10^{y+3} \Rightarrow x=10^{y+3}+1$$

$$\xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=10^{x+3}+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=10^{x+3}+1$$

عددگذاری: روی نمودار $f(x)=\log_{10}(x-1)-3$ اگر $x=2$ باشد:

$$y=(\log_{10}1)-3=0-3=-3 \Rightarrow (2,-3)\in f$$

پس نقطهٔ $(-3,2)$ باید روی نمودار f^{-1} قرار داشته باشد که فقط در **۲** یعنی $f^{-1}(x)=10^{x+3}+1$ صدق می‌کند.

۵۹۲. **۱** **راه اول:** در رابطهٔ $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ با طرفین‌وسطین، 2^x را تنها می‌کنیم:

$$y2^x+y=2^x-1 \Rightarrow y2^x-2^x=-y-1$$

$$\Rightarrow 2^x(y-1)=-y-1 \Rightarrow 2^x=\frac{-y-1}{y-1}=\frac{y+1}{1-y}$$

حالا از تبدیل نمایی به لگاریتمی استفاده می‌کنیم:

$$2^x=\frac{y+1}{1-y} \Rightarrow \log_2\frac{y+1}{1-y}=x$$

در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=\log_2\frac{x+1}{1-x}$

عددگذاری: در تابع $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ داریم $f(1)=\frac{1}{3}$، پس در تابع وارون باید $f(\frac{1}{3})=1$ باشد که فقط در **۱** یعنی $y=\log_2\frac{1+x}{1-x}$ صدق می‌کند.

۵۹۳. **۳** **راه اول:** رابطهٔ $A^B=C$ را می‌توانیم به شکل $\log_A C=B$ بنویسیم:

$$\underset{A\leftarrow}{5}^{\overset{B}{\log_x 5}}=\overset{C}{y} \Rightarrow \log_5 y=\log_x 5$$

حالا برعکس کار قبل را می‌کنیم. از $\log_A C=B$ به $A^B=C$ می‌رسیم:

$$\log_{\underset{A}{x}}\overset{C}{5}=\underset{B}{\log_5 y} \Rightarrow x^{(\log_5 y)}=5$$

$\log_5 y$ و $\log_y 5$ معکوس یکدیگرند. دو طرف را به توان $\log_y 5$ می‌رسانیم که توان x، ۱ شود:

$$(x^{(\log_5 y)})^{\log_y 5}=5^{\log_y 5} \Rightarrow x^1=5^{\log_y 5}$$

$$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض‌کردن}} y=5^{\log_x 5}$$

عددگذاری: در $f(x)=5^{\log_x 5}$ به ازای $x=25$ داریم $y=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ پس در تابع وارون باید به ازای $x=\sqrt{5}$ داشته باشیم $y=25$ که فقط در **۳** یعنی $y=5^{\log_x 5}$ صدق می‌کند.

۵۹۴. **۳** وارون هر ضابطه را جداگانه حساب می‌کنیم.

۱) ضابطهٔ بالایی: $y=2x+1 \Rightarrow 2x=y-1 \xrightarrow{\div 2}$

$$x=\frac{y}{2}-\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$$

دامنهٔ وارون، برد تابع اولیه است. از روی دامنه‌اش، برد را پیدا می‌کنیم:

$$x<1 \xrightarrow{\times 2} 2x<2 \xrightarrow{+1} 2x+1<3 \Rightarrow y<3$$

پس وارون ضابطهٔ دوم $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ و دامنه‌اش $x<3$ است.

۲) ضابطهٔ پایینی: $y=4x+1 \Rightarrow 4x=y-1$

$$\xrightarrow{\div 4} x=\frac{y}{4}-\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}$$

دامنهٔ وارون، برد تابع اولیه است. از روی دامنه‌اش، برد را پیدا می‌کنیم:

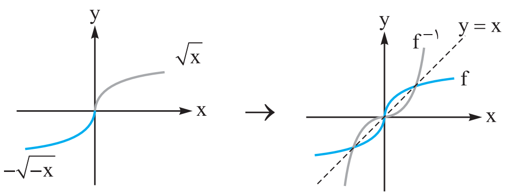
$$x\ge 1 \xrightarrow{\times 4} 4x\ge 4 \xrightarrow{+1} 4x+1\ge 5 \Rightarrow y\ge 5$$

پس وارون ضابطهٔ دوم $y=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}$ و دامنه‌اش $x\ge 5$ است.

در نتیجه:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{1}{2} & x<3\\ \frac{x}{4}-\frac{1}{4} & x\ge 5\end{cases}$$

۵۹۵. **۳** **راه اول:** نمودار f را می‌کشیم، اگر آن را نسبت به $y=x$ قرینه کنیم، نمودار سمت راست به دست می‌آید:



نمودار شکل مربوط به تابع $y=x|x|$ است که چند باری هم در کنکور آمده است.

عددگذاری: نقطهٔ $A(4,2)$ روی f است، پس نقطهٔ $A'(2,4)$ باید روی f^{-1} باشد. گزینه‌های **۱** و **۴** تا این‌جا رد شدند.

نقطهٔ بعدی روی f را $B(-4,-2)$ می‌گیریم. نقطهٔ $B'(-2,-4)$ بین دو گزینهٔ باقی‌مانده فقط روی **۳** می‌باشد، پس جواب است.

۵۹۶. **۲** وارون هر ضابطه را جداگانه حساب می‌کنیم.

۱) ضابطهٔ بالایی:

$$y=x+1 \Rightarrow x=y-1 \xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=x-1$$

دامنهٔ وارون، برد تابع اولیه است. از روی دامنه‌اش، برد را پیدا می‌کنیم:

$$x\ge 4 \xrightarrow{+1} x+1\ge 5 \Rightarrow y\ge 5$$

پس وارون ضابطهٔ اول $y=x-1$ و دامنه‌اش $x\ge 5$ است.

۲) ضابطهٔ پایینی: $y=\frac{1}{2}x-1 \Rightarrow \frac{1}{2}x=y+1 \xrightarrow{\times 2} x=2y+2$

$$\xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=2x+2$$

دامنهٔ وارون، برد تابع اولیه است. از روی دامنه‌اش، برد را پیدا می‌کنیم:

$$x<4 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2}x<2 \xrightarrow{-1} \frac{1}{2}x-1<1 \Rightarrow y<1$$

پس وارون ضابطهٔ دوم $y=2x+2$ و دامنه‌اش $x<1$ است.

در نتیجه:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x\overbrace{-۱}^{a} & x\ge ۵\to c \\ ۲x\underbrace{+۲}_{b} & x<۱\to d\end{cases}$$

پس: $a=-۱$ ، $b=۲$ ، $c=۵$ و $d=۱$.

با توجه به دامنهٔ f^{-1} که $x\ge ۵$ یا $x<۱$ است، $f^{-1}(k)$ به شرطی تعریف می‌شود که k در محدودهٔ $x\ge ۵$ یا $x<۱$ باشد.

۱ $f^{-1}(c+d)=f^{-1}(۶)$ ✓ ۲ $f^{-1}(a+b)=\underbrace{f^{-1}(۱)}_{\text{در } D_{f^{-1}} \text{ نیست}}$ ✗

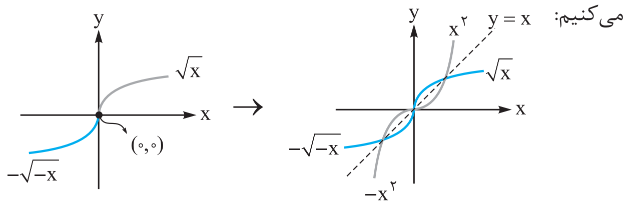
۳ $f^{-1}(a+d)=f^{-1}(۰)$ ✓ ۴ $f^{-1}(b+c)=f^{-1}(۷)$ ✓

۵۹۷. ۴ **عددگذاری:** تابع از نقاط $(۰,۰)$ و $(۴,۲)$ عبور می‌کند پس $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ باید در وارونش صدق کنند که فقط به ۴ می‌خورد.

راه دوم: تابع f را سه‌ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\ne ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}=\begin{cases}\frac{x}{x}\sqrt{x} & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ \frac{-x}{x}\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$$

نمودار f را می‌کشیم و قرینهٔ هر ضابطه را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم رسم می‌کنیم:



نمودار به دست آمده، همان $y=x|x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است.

۵۹۸. ۴ ریشهٔ داخل قدرمطلق $x=۲$ است. تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=۲x-|۴-۲x|=\begin{cases}۲x-(-۴+۲x) & x>۲\\ ۲x-(۴-۲x) & x\le ۲\end{cases}=\begin{cases}۴ & x>۲\\ ۴x-۴ & x\le ۲\end{cases}$$

در محدودهٔ $x>۲$ ، f یک تابع ثابت و در نتیجه غیر یک‌به‌یک است.

پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که f در آن یک‌به‌یک است، $x\le ۲$ می‌باشد و ضابطهٔ تابع در آن به صورت $y=۴x-۴$ است.

$$y=۴x-۴\Rightarrow ۴x=y+۴\xrightarrow{\div ۴}x=\frac{۱}{۴}y+۱$$

$$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض‌کردن}} y=\frac{۱}{۴}x+۱$$

دامنهٔ f^{-1}، همان برد f است. با توجه به دامنهٔ f در این محدوده، بردش را پیدا می‌کنیم: $x\le ۲\xrightarrow{\times ۴}۴x\le ۸\xrightarrow{-۴}۴x-۴\le ۴\Rightarrow y\le ۴$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}}=(-\infty,۴]$$

۵۹۹. ۴ ریشه‌های داخل قدرمطلق، $x=۳$ و $x=-۴$ هستند.

تابع $f(x)=|۲x-۶|-|x+۴|+x$ را سه‌ضابطه‌ای می‌نویسیم:

- $x\ge ۳:(۲x-۶)-(x+۴)+x=۲x-۱۰$ (صعودی)
- $-۴<x<۳:(-۲x+۶)-(x+۴)+x=-۲x+۲$ (نزولی)
- $x\le -۴:(-۲x+۶)-(-x-۴)+x=۱۰$ (ثابت)

پس باید معکوس تابع $y=-۲x+۲$ با دامنهٔ $-۴<x<۳$ را پیدا کنیم:

$$y=-۲x+۲\Rightarrow ۲x=-y+۲\Rightarrow x=\frac{-y}{۲}+۱$$

$$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض‌کردن}} y=\frac{-x}{۲}+۱$$

حالا با توجه به دامنهٔ f در این محدوده، برد f (که همان $D_{f^{-1}}$ است) را حساب می‌کنیم:

$$-۴<x<۳\xrightarrow{\times(-۲)}-۶<-۲x<۸$$

$$\xrightarrow{+۲}-۴<-۲x+۲<۱۰\Rightarrow -۴<y<۱۰$$

پس دامنهٔ f^{-1} در این محدوده، $-۴<x<۱۰$ می‌باشد.

۶۰۰. ۲ ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{(x+۱)^۲}-|۳x-۶|\Rightarrow f(x)=|x\underbrace{+۱}_{\text{ریشه:}-۱}|-|۳x\underbrace{-۶}_{\text{ریشه:}۲}|$$

با توجه به ریشه‌های داخل قدرمطلق، ضابطهٔ f را در سه بازهٔ $x\le -۱$ ، $-۱\le x\le ۲$ و $x\ge ۲$ ، بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$x\le -۱:y=-x-۱-(-۳x+۶)\Rightarrow y=۲x-۷$ (صعودی)

$-۱\le x\le ۲:y=x+۱-(-۳x+۶)\Rightarrow y=۴x-۵$ (صعودی)

$x\ge ۲:y=x+۱-(۳x-۶)\Rightarrow y=-۲x+۷$ (نزولی)

فقط شیب ضابطهٔ سوم عددی منفی شد، پس فقط این ضابطه، نزولی است.

ضابطه و دامنهٔ وارون تابع $y=-۲x+۷$ با دامنهٔ $x\ge ۲$ را حساب می‌کنیم.

۱) ضابطهٔ وارون:

$$y=-۲x+۷\xrightarrow{\text{تنهاکردن x}}۲x=-y+۷\Rightarrow x=\frac{-y}{۲}+\frac{۷}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض‌کردن}} y=\frac{-x}{۲}+\frac{۷}{۲}$$

۲) دامنهٔ وارون:

ساختن برد از روی دامنه: $x\ge ۲\xrightarrow{\times(-۲)}-۲x\le -۴$

$$\xrightarrow{+۷}-۲x+۷\le ۳\Rightarrow y\le ۳$$

برد تابع اصلی با دامنهٔ وارون برابر است، پس ضابطهٔ وارون $\frac{-x}{۲}+\frac{۷}{۲}$ و دامنه‌اش $x\le ۳$ است.

۶۰۱. ۱ رادیکال‌ها را به قدرمطلق تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{(۲x+۵)^۲}-\sqrt{(۵x-۲)^۲}=|۲x+۵|-|۵x-۲|$$

با استفاده از بازه‌بندی، قدرمطلق‌ها را از بین می‌بریم تا به تابعی چندضابطه‌ای برسیم: (ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها $x=-\frac{۵}{۲}$ و $x=\frac{۲}{۵}$ هستند،

پس بازه‌های ما $x\ge\frac{۲}{۵}$ ، $-\frac{۵}{۲}\le x<\frac{۲}{۵}$ و $x<-\frac{۵}{۲}$ می‌شوند.)

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۵-(۵x-۲)=-۳x+۷ & x\ge\frac{۲}{۵}\\ ۲x+۵+(۵x-۲)=۷x+۳ & -\frac{۵}{۲}\le x<\frac{۲}{۵}\\ -۲x-۵+(۵x-۲)=۳x-۷ & x<-\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ f واضح است که f در بازهٔ $x\ge\frac{۲}{۵}$ نزولی می‌شود (چون شیبش منفی است). ضابطهٔ f در این بازه $y=-۳x+۷$ است، حالا ضابطهٔ وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$y=-۳x+۷\xrightarrow{\text{جای x و y رو عوض کن.}}x=-۳y+۷$$

$$\Rightarrow ۳y=-x+۷\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}\Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}$$

با توجه به گزینه‌ها، ضابطهٔ f^{-1} در ۱ و ۲ درست است، حالا باید دامنهٔ f^{-1} را محاسبه کنیم:

حواستون باشه!!! نکنه یهو الان بگین که خوب دامنهٔ f، $x\ge\frac{۲}{۵}$ بود، پس دامنهٔ f^{-1} هم همینه و ۲ رو بزنید! کاملاً غلطه! چون دامنهٔ f^{-1} برابر دامنهٔ f نمی‌شه، بلکه برابر با برد f می‌شه، پس باید برد f رو پیدا کنید!

دامنهٔ $f^{-۱}$ برابر برد f است، پس باید برد $f(x)=-۳x+۷$ در بازهٔ $x\ge\frac{۲}{۵}$ را پیدا کنیم که کار ساده‌ای است:

$$x\ge\frac{۲}{۵}\xrightarrow{\times(-۳)}-۳x\le-\frac{۶}{۵}\xrightarrow{+۷}-۳x+۷\le\frac{۲۹}{۵}$$

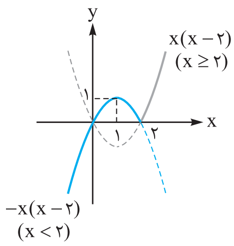
$$\Rightarrow R_f=(-\infty,\frac{۲۹}{۵}]$$

بنابراین دامنهٔ $f^{-۱}$ هم $(-\infty,\frac{۲۹}{۵}]$ می‌شود و جواب ۱ است.

۶۰۲. ۳ اول تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=x|x-۲|=\begin{cases}x(x-۲) & x\ge۲\\ x(-x+۲) & x<۲\end{cases}$$

نمودار را رسم می‌کنیم:



تابع رسم‌شده در بازهٔ (۱,۲) نزولی اکید است. ضابطهٔ آن در این بازه به صورت $y=-x(x-۲)$ است.

برای به دست آوردن وارون، باید آن را مربع کامل بنویسیم:

$$y=-(x^۲-۲x)=-(\underbrace{x^۲-۲x+۱}_{(x-۱)^۲}-۱)=-(x-۱)^۲+۱$$

x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y=-(x-۱)^۲+۱\Rightarrow(x-۱)^۲=۱-y$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}|x-۱|=\sqrt{۱-y}$$

به ازای $۱<x<۲$، داخل قدرمطلق مثبت می‌شود:

$$x-۱=\sqrt{۱-y}\Rightarrow x=\sqrt{۱-y}+۱$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

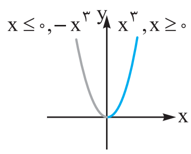
$$y=\sqrt{۱-x}+۱$$

برد تابع f به ازای $۱<x<۲$، بازهٔ (۰,۱) است، پس $D_{f^{-۱}}$ همان (۰,۱) است.

۶۰۳. ۴ ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲\sqrt{x^۲}=x^۲|x|=\begin{cases}x^۳ & x\ge۰\\ -x^۳ & x\le۰\end{cases}$$

نمودار f را می‌کشیم:



با توجه به نمودار f، تابع در $x\le۰$ نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این محدوده را به دست می‌آوریم:

$$x\le۰,y=-x^۳\xrightarrow{\text{تنهاکردن x}}x^۳=-y\Rightarrow x=-\sqrt[۳]{y}$$

$$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض‌کردن}}y=-\sqrt[۳]{x}$$

دامنهٔ $f^{-۱}$، همان برد f است. برد این ضابطه، $y\ge۰$ بود، پس:

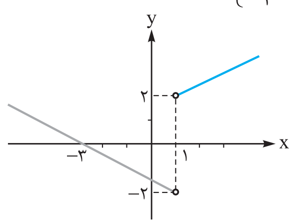
$D_{f^{-۱}}=R_f=[۰,+\infty)$.

در نتیجه ضابطه و دامنهٔ $f^{-۱}$ به ترتیب $-\sqrt[۳]{x}$ و $x\ge۰$ هستند.

۶۰۴. ۱ ضابطهٔ f را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{(x+۳)(x-۱)}{۲|x-۱|}=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲} & x>۱\\ -\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} & x<۱\end{cases}$$

نمودار f را رسم می‌کنیم:



تابع f در محدودهٔ $-۳<x<۱$، زیر محور xها است و در این بازه، از ضابطهٔ $y=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$ پیروی می‌کند. برد آن در این بازه، $(-۲,۰)$ است که همان دامنهٔ $f^{-۱}$ می‌شود:

$$D_{f^{-۱}}=R_f=(-۲,۰)$$

ضابطهٔ وارون را هم حساب می‌کنیم:

$$y=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\times۲}۲y=-x-۳\Rightarrow x=-۲y-۳$$

$$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض‌کردن}}y=-۲x-۳$$

پس:

$$f^{-۱}=-۲x-۳\ ,\ -۲<x<۰$$

۶۰۵. ۲ **عددگذاری:** در خود تابع نقطهٔ $(-۱,-۴)$ را داریم، پس در وارونش باید $(-۴,-۱)$ را داشته باشیم که فقط در ۲ صدق می‌کند.

راه دوم: اول ضابطهٔ تابع را به ازای xهای مثبت و منفی به دست می‌آوریم:

$$y=۳x-|x|$$

$$x\ge۰\Rightarrow y=۳x-x\Rightarrow y=۲x\Rightarrow x=\frac{y}{۲}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\frac{x}{۲}$$

$$x<۰\Rightarrow y=۳x+x\Rightarrow y=۴x\Rightarrow x=\frac{y}{۴}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\frac{x}{۴}$$

پس تابع وارون برابر است با:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲} & x\ge۰\\ \frac{x}{۴} & x<۰\end{cases}$$

حالا اگر گزینه‌ها را به ازای $x\ge۰$ و $x<۰$ ساده کنیم، ۲ برابر $f^{-۱}$ است:

$$y=\frac{۳x+|x|}{۸}=\begin{cases}\frac{۳x+x}{۸}=\frac{x}{۲} & x\ge۰\\ \frac{۳x-x}{۸}=\frac{x}{۴} & x<۰\end{cases}$$

۶۰۶. ۱ **راه اول:** نقطهٔ (۰,۰) روی تابع اصلی است. با جابه‌جایی x و y این نقطه باز هم به همان نقطهٔ (۰,۰) می‌رسیم.

این نقطه باید روی وارون تابع هم باشد. در بین گزینه‌ها، این نقطه فقط در ۱ صدق می‌کند. (دقت کنید $x=۰$ در دامنهٔ ۳ نیست.)

راه دوم: با توجه به ریشهٔ داخل قدرمطلق (یعنی $x=۰$) تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=\frac{x}{۱+|x|}=\begin{cases}\frac{x}{x+۱} & x\ge۰\\ \frac{x}{-x+۱} & x<۰\end{cases}$$

ضابطهٔ وارون هر ضابطه را می‌توانیم به کمک رابطه‌ای که برای وارون تابع هموگرافیک گفتیم، پیدا کنیم. دامنهٔ وارون هر ضابطه، برد تابع اصلی در آن محدوده است.

۱) ضابطهٔ اول:

$$y=\frac{۱x+۰}{۱x+۱}\xrightarrow[\text{و قرینه می‌کنیم}]{\text{جای a و d را عوض}}y^{-۱}=\frac{-۱x+۰}{۱x-۱}=\frac{-x}{x-۱}=\frac{x}{-x+۱}$$

محاسبهٔ برد ضابطهٔ اول:

$$y=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow yx+y=x\Rightarrow yx-x=-y$$

$$\Rightarrow x(y-۱)=-y\Rightarrow x=\frac{y}{۱-y}$$

$$\xrightarrow{x\ge۰}\frac{y}{۱-y}\ge۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۰\le y<۱$$

۲) ضابطهٔ دوم:

$$y=\frac{۱x+۰}{-۱x+۱}\xrightarrow[\text{وقرینه‌می‌کنیم}]{\text{جای a و d را عوض}}y^{-۱}=\frac{-۱x+۰}{-۱x-۱}=\frac{-x}{-x-۱}=\frac{x}{x+۱}$$

محاسبهٔ برد ضابطهٔ دوم:

$$y=\frac{x}{-x+۱}\Rightarrow -yx+y=x\Rightarrow yx+x=y\Rightarrow x(y+۱)=y$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{y+۱}\xrightarrow{x<۰}\frac{y}{y+۱}<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۱<y<۰$$

پس ضابطهٔ وارون به شکل مقابل است:

$$y^{-1}=\begin{cases}\dfrac{x}{-x+1} & 0\le x<1\\[2mm] \dfrac{x}{x+1} & -1<x<0\end{cases}$$

جای x مخرج اولی و جای $-x$ مخرج دومی می‌توانیم $|x|$ قرار دهیم:

$$y^{-1}=\frac{x}{-|x|+1}\ ,\ -1<x<1$$

دامنه هم از اجتماع دامنهٔ ضابطه‌ها به دست می‌آمد.

۶۰۷. **۴** برای تنهاکردن x در رابطهٔ $y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$، اول دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2y=x+\sqrt{x^2+4}$$

بعد رادیکال را تنها می‌کنیم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2y-x=\sqrt{x^2+4}\xrightarrow{\text{توان ۲}}4y^2-4xy+\cancel{x^2}=\cancel{x^2}+4$$

$$\Rightarrow 4y^2-4=4xy\xrightarrow{\div 4}y^2-1=xy\Rightarrow x=\frac{y^2-1}{y}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم: $y=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}$

پس $f^{-1}(x)=x-\frac{1}{x}$

جای xها، $\frac{1}{x}$ می‌گذاریم: $f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-x$

در نتیجه: $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})+(\frac{1}{x}-x)=0$

۶۰۸. **۲** ضابطهٔ تابع به صورت $y=x+\frac{1}{x}$ است. برای آن‌که x را تنها کنیم، باید یک معادلهٔ درجه‌دو حل کنیم:

$$y=x+\frac{1}{x}\xrightarrow{\times x}yx=x^2+1\Rightarrow x^2-yx+1=0$$

دلتا برابر است با: $\Delta=(-y)^2-4(1)(1)=y^2-4$

x برابر است با: $x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$

برای تشخیص درست علامت + یا − در تساوی بالا، یک نقطه روی تابع اولیه انتخاب می‌کنیم:

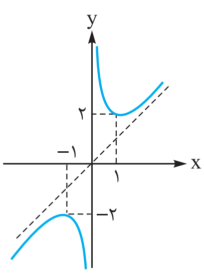
$$y=x+\frac{1}{x}\xrightarrow{0<x<1}A(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$$

در تساوی $x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$، اگر $y_A=\frac{5}{2}$ را قرار دهیم، به ازای علامت −، به $x_A=\frac{1}{2}$ می‌رسیم، پس رابطه باید به شکل $x=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$ باشد.

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}=\frac{1}{2}x\underbrace{-\frac{1}{2}}_{a}\sqrt{x^2-4}$$

در مورد برد تابع $y=x+\frac{1}{x}$، خوب است که به نمودارش نگاهی بیندازید:



به ازای $0<x<1$، مقادیر تابع به صورت $y>2$ درمی‌آیند. پس $D_{f^{-1}}$ در این حالت به صورت $x>2$ می‌باشد و در نتیجه: $b=2$؛

پس: $a+b=-\frac{1}{2}+2=1/5$

۶۰۹. **۴** با توجه به وجود $\sqrt{-x}$، باید $x\le 0$ باشد؛ پس: $|x|=-x$.

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{-x}+1}$ درمی‌آید.

صورت را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

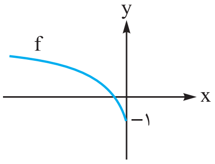
$$f(x)=\frac{(\sqrt{-x})^2-1}{\sqrt{-x}+1}=\frac{(\sqrt{-x}-1)\cancel{(\sqrt{-x}+1)}}{\cancel{\sqrt{-x}+1}}=\sqrt{-x}-1$$

حالا ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt{-x}-1\Rightarrow\sqrt{-x}=y+1\Rightarrow -x=(y+1)^2$$

$$\Rightarrow x=-(y+1)^2\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض‌کردن جای}}y=-(x+1)^2$$

برد تابع $f(x)=\sqrt{-x}-1$، همان $D_{f^{-1}}$ می‌شود:



$$R_f=D_{f^{-1}}=[-1,+\infty)$$

پس: $f^{-1}(x)=-(x+1)^2\ ,\ x\ge -1$

۶۱۰. **۱** نمودار تابع f و تابع وارونش یعنی f^{-1} در نقطهٔ $(1,2)$ متقاطع‌اند، پس $(1,2)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار f^{-1}. در نتیجه نقطهٔ $(2,1)$ هم روی نمودار f است و هم روی نمودار f^{-1}، بنابراین:

$$f(x)=\sqrt{ax+b}$$

$$\begin{cases}(1,2)\Rightarrow 2=\sqrt{a+b}\Rightarrow\\ (2,1)\Rightarrow 1=\sqrt{2a+b}\Rightarrow\end{cases}\quad\begin{cases}a+b=4\\ 2a+b=1\end{cases}$$

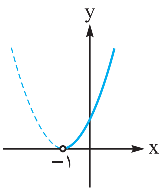
از حل دو معادلهٔ به دست آمده، داریم: $b=7\ ,\ a=-3$

پس: $a-b=-3-7=-10$

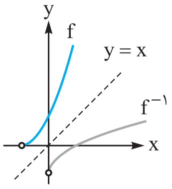
۶۱۱. **۴** **راه اول:** ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

سهمی $y=(x+1)^2$ با دامنهٔ $x>-1$ را می‌کشیم:



قرینهٔ آن را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم رسم می‌کنیم تا f^{-1} به دست آید:

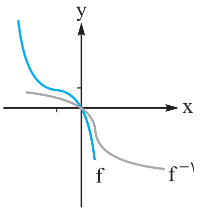


واضح است که f و f^{-1} همدیگر را قطع نمی‌کنند.

راه دوم: سهمی $f(x)=(x+1)^2$ در دامنهٔ $x>-1$، تابعی اکیداً صعودی است. پس برای به دست آوردن نقاط تقاطع f و f^{-1}، کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$(x+1)^2=x\Rightarrow x^2+x+1=0\xrightarrow{\Delta<0}$$ جواب ندارد.

۶۱۲. **۳** نمودار تابع $y=-(x+1)^3+1$ و نمودار تابع معکوسش را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم منحنی تابع و وارونش یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۶۱۳. **۲** **راه اول:** تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ صعودی اکید است، پس تابع وارونش را باید روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع کند؛ یعنی در نقطهٔ (a,a)، پس می‌توانیم گزینه‌ها را امتحان کنیم (هر عددی به x بدهیم y هم باید همان شود.):

۱ $x=-1\Rightarrow y=\sqrt{-1+2}=1$ ✗

۲ $x=2\Rightarrow y=\sqrt{2+2}=2$ ✓

پس جواب **۲** است.

راه دوم: چون سؤال گفته نقطهٔ تلاقی تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ با نمودار معکوس آن و f اکیداً صعودی است، پس کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$\sqrt{x+۲}=x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲=x+۲ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-۱ & ✗ \\ x=۲ & ✓\end{cases}$$

$x=-۱$ در معادلهٔ گنگ اولیه صدق نمی‌کند.

۶۱۴. **۳** می‌دانیم تابع‌های چندجمله‌ای درجهٔ زوج (با دامنهٔ $\mathbb{R}$) هرگز یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیستند.

بنابراین برای این‌که تابع $f(x)=(a+۱)x^۴+(a+۲)x^۳+(a+۴)x^۲+۳x$ وارون‌پذیر باشد، باید جملهٔ $x^۴$ حذف شود یعنی $a=-۱$.

با جای‌گذاری $a=-۱$، ضابطهٔ f به شکل $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$ درمی‌آید.

تابع f را می‌توانیم به شکل $f(x)=(x+۱)^۳-۱$ بنویسیم که تابعی اکیداً صعودی است، پس برای پیداکردن نقاط تقاطع $f^{-۱}$ و نیمساز ربع اول و سوم، می‌توانیم f را با نیمساز ربع اول و سوم قطع دهیم:

$$f^{-۱}(x)=x \xrightarrow[(\text{f اکیداً صعودی})]{\text{معادلهٔ جایگزین}} f(x)=x$$

$$\Rightarrow x^۳+۳x^۲+۳x=x \Rightarrow x^۳+۳x^۲+۲x=۰$$

$$\Rightarrow x(x^۲+۳x+۲)=۰ \Rightarrow x(x+۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\x=-۱\\x=-۲\end{cases}$$

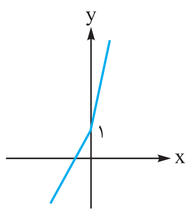
پس $f^{-۱}$ در ۳ نقطه خط $y=x$ را قطع می‌کند.

۶۱۵. **۲**

نکته: اگر f یک تابع اکیداً صعودی باشد، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$ و $f(x)=x$، یکسان است.

تابع f را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=۳x+|x|+۱=\begin{cases}۴x+۱ & x\ge ۰\\ ۲x+۱ & x<۰\end{cases}$$



با توجه به نمودار f، نتیجه می‌گیریم f یک تابع اکیداً صعودی است:

پس برای به دست آوردن تقاطع f و $f^{-۱}$، می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

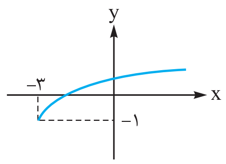
$$f(x)=x \Rightarrow ۳x+|x|+۱=x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge۰: ۴x+۱=x \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} & ✗ \\ x<۰: ۲x+۱=x \Rightarrow x=-۱ \xrightarrow{\text{نقطه}} A(-۱,-۱)\end{cases}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $(-۱,-۱)$ را از خط $y+x=۰$ حساب می‌کنیم:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

۶۱۶. **۲** نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}-۱$ به شکل روبه‌رو است: پس تابع اصلی، تابعی صعودی اکید است.



برای پیداکردن نقاط تقاطع f و $f^{-۱}$، می‌توانیم معادلهٔ تابع اصلی را با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قطع دهیم:

$$f(x)=f^{-۱}(x) \xrightarrow[(\text{f صعودی اکید})]{\text{معادلهٔ جایگزین}} \sqrt{x+۳}-۱=x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+۳}=x+۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$x+۳=x^۲+۲x+۱ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases}x=۱ & ✓\\x=-۲ & ✗\end{cases}$$

$x=-۲$ در معادلهٔ گنگ اولیه صدق نمی‌کند.

مختصات نقطه‌ای به طول ۱ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم به صورت $M(۱,۱)$ است.

فاصلهٔ M تا مبدأ برابر است با: $OM=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$

۶۱۷. **۴** توابع $y=\frac{x-۳}{۲}$ و $y=۲\sqrt{x}$ هر دو اکیداً صعودی‌اند، پس مجموعشان هم اکیداً صعودی است:

$$f(x)=\underbrace{\frac{x-۳}{۲}}_{\text{اکیداً صعودی}}+\underbrace{۲\sqrt{x}}_{\text{اکیداً صعودی}} \quad \text{f اکیداً صعودی}$$

در نتیجه به جای حل $f(x)=f^{-۱}(x)$، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{x-۳}{۲}+۲\sqrt{x}=x \xrightarrow{\times۲} x-۳+۴\sqrt{x}=۲x$$

$$\Rightarrow x-۴\sqrt{x}+۳= \xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}}$$

$$(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\x=۹\end{cases}$$

چون این نقاط روی خط $y=x$ هستند، مختصاتشان $A(۱,۱)$ و $B(۹,۹)$ است.

طول پاره‌خط AB برابر است با: $AB=\sqrt{(۹-۱)^۲+(۹-۱)^۲}=۸\sqrt{۲}$

۶۱۸. **۳** توابع $y=x^۳$ و $y=۳x-۱۲$ هر دو صعودی اکید هستند، پس مجموعشان صعودی اکید است:

$$f(x)=\underbrace{\underbrace{x^۳}_{\text{صعودی اکید}}+\underbrace{۳x-۱۲}_{\text{صعودی اکید}}}_{\text{صعودی اکید}}$$

اگر تابعی صعودی اکید باشد، برای به دست آوردن نقاط تقاطع آن تابع با وارونش، به جای معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$، می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

نقطهٔ تقاطع f و $f^{-۱}$ $\xrightarrow{\text{f صعودی}}$ $f(x)=x$

$$\Rightarrow x^۳+۳x-۱۲=x \Rightarrow x^۳+۲x=۱۲ \xrightarrow{\text{حدس}} x=۲$$

با جای‌گذاری $x=۲$ در f یا در معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، به نقطهٔ $A(۲,۲)$ می‌رسیم.

فاصلهٔ $A(۲,۲)$ از مبدأ برابر است با: $OA=\sqrt{۲^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۲}$

۶۱۹. **۳**

نکته: اگر f و g در نقطهٔ (α,β) متقاطع باشند، توابع $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ در نقطهٔ (β,α) متقاطع‌اند.

در این‌جا وقتی $f^{-۱}$ و خط d در (α,β) متقاطع‌اند، پس f و وارون خط d در (β,α) متقاطع‌اند.

وارون خط d به معادلهٔ $y=x-۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=x-۲ \Rightarrow x=y+۲ \xrightarrow{\text{عوض‌کردن x و y}} y=x+۲$$

پس کافی است f را با خط بالا قطع دهیم:

$$x^۳+\cancel{x}+۱=\cancel{x}+۲ \Rightarrow x^۳=۱ \Rightarrow x=۱$$

با جای‌گذاری $x=۱$ در f، داریم: $f(۱)=۱^۳+۱+۱=۳$

پس نقطهٔ تقاطع کمکی ما $(۱,۳)$ و نقطهٔ تقاطع $f^{-۱}$ با خط d، نقطهٔ $(\underset{\alpha}{۳},\underset{\beta}{۱})$ است. در نتیجه:

$$\alpha+\beta=۳+۱=۴$$

۶۲۰. **۱** گفتیم دامنهٔ تابع $fof^{-۱}$ دامنهٔ تابع داخلی یعنی $f^{-۱}$ است:

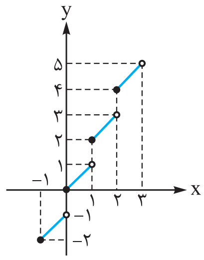
$$D_{fof^{-۱}}=D_{f^{-۱}}=R_f=\{۲,۳\}$$

از طرفی $fof^{-۱}$ همانی است، پس با اعداد دامنه‌اش، زوج مرتب‌هایی می‌نویسیم که مؤلفهٔ اول و دومشان یکسان است: $fof^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳)\}$

۶۲۱. ۲ چون $(fog)(x)=x$ شده، پس f و g وارون هم هستند.
با توجه به $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$، g یعنی f^{-1} به صورت روبه‌رو است:
$g=f^{-1}=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$

۶۲۲. ۳ ماشین $\underbrace{x\to\boxed{f}\to\boxed{g}}_{g(f(x))}\to x$، یعنی $(gof)(x)=x$.
پس g همان f^{-1} است. در نتیجه $g(۰)$ همان $f^{-1}(۰)$ است.
برای محاسبهٔ $f^{-1}(۰)$، ضابطهٔ f را مساوی صفر قرار می‌دهیم:
$f(x)=۲x-۱ \xrightarrow{\text{محاسبه } f^{-1}(۰)} ۰=۲x-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$
پس: $f^{-1}(۰)=\frac{۱}{۲}$.

۶۲۳. ۱ نمودار تابع $f(x)=x+[x]$ به صورت روبه‌رو است:



چون ۴/۵ در برد f قرار دارد، پس در $D_{f^{-1}}$ هم موجود است و ۴ رد می‌شود.
حالا با توجه به رابطهٔ $f(f^{-1}(a))=a$، داریم:
$f(f^{-1}(۴/۵))=۴/۵$

اشاره: در همین سؤال اگر از ما $(fof^{-1})(۳/۵)$ را می‌خواستند، جواب ۴ می‌شد. چون $۳/۵\not\in R_f$ نیست.

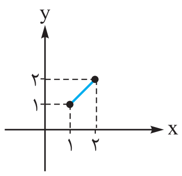
۶۲۴. ۲ می‌دانیم $f(f^{-1}(x))=x$، پس: $f(f^{-1}(-۵))=-۵$
با جای‌گذاری تساوی بالا در معادلهٔ داده‌شده، داریم:
$۳g(f(a))+\underbrace{f(f^{-1}(-۵))}_{-۵}=۱ \Rightarrow ۳g(f(a))=۶$
$\Rightarrow g(f(a))=۲ \xrightarrow{g(x)=\sqrt{۱۰-x}}$
$\sqrt{۱۰-f(a)}=۲ \Rightarrow ۱۰-f(a)=۴$
$\Rightarrow f(a)=۶ \xrightarrow{(۲,۶)\in f} a=۲$

۶۲۵. ۱ **راه اول:** جای $fofof(\sqrt{۲})$ می‌نویسیم $f(f(f(\sqrt{۲})))$ که محاسباتش ۳ مرحله دارد:
$$\underbrace{\overbrace{f(f(\underbrace{f(\sqrt{۲})}_{\text{مرحله ۱}}))}^{\text{مرحله ۲}}}_{\text{مرحله ۳}}$$
مرحله اول: $f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}} \Rightarrow f(\sqrt{۲})=\frac{۲}{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}=\frac{۲}{۲\sqrt{۲}}$
$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
مرحله دوم: $f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}} \Rightarrow f(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{۳(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-\sqrt{۲}}$
$=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$
مرحله سوم: $f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}} \xrightarrow{\text{همان مرحله ۱}} f(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ همان $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است.
راه دوم: در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر a و d قرینه باشند، f^{-1} همان f می‌شود.

در تابع $f(x)=\frac{\overset{a}{\sqrt{۲}}x+۰}{۳x\underset{d}{-\sqrt{۲}}}$، a و d قرینه‌اند، پس f^{-1} همان f است، یعنی جای $fofof(\sqrt{۲})$ می‌توانیم $fof^{-1}of(\sqrt{۲})$ بنویسیم. از طرفی fof^{-1} و $f^{-1}of$ توابعی همانی بودند، پس:
$f(\underbrace{f^{-1}(f(\sqrt{۲}))}_{\sqrt{۲}})=f(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶۲۶. ۱ *محاسبه‌کردن به روش عادی به عهدهٔ خودتون!*
مثل روش دوم سؤال قبل عمل می‌کنیم. در تابع $f(x)=\frac{\overset{a}{۱}x+۲}{۲x\underset{d}{-۱}}$، a و d قرینه‌اند، پس f^{-1} همان f است؛ یعنی به جای $f^{-1}of^{-1}of^{-1}(۴)$ می‌توانیم بنویسیم $fof^{-1}of(۴)$. از طرفی fof^{-1} و $f^{-1}of$ توابع همانی بودند، پس:
$f(\underbrace{f^{-1}(f(۴))}_{۴})=f(۴)=\frac{۴+۲}{۲\times۴-۱}=\frac{۶}{۷}$

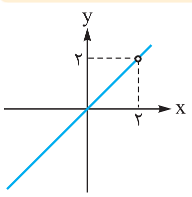
۶۲۷. ۴ دامنهٔ تابع fof^{-1}، دامنهٔ تابع داخلی یعنی f^{-1} است. از طرفی $D_{f^{-1}}$ همان R_f است: $D_{fof^{-1}}=R_f=[۱,۲]$
ضابطهٔ تابع fof^{-1} هم به صورت $y=x$ است.
پس باید نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را در دامنهٔ $[۱,۲]$ رسم کنیم:



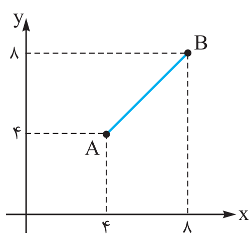
۶۲۸. ۳ تابع fof^{-1} تابع همانی بود، یعنی ضابطه‌اش $y=x$ می‌شد. فقط دامنه‌اش را باید حواسمان باشد. دامنهٔ fof^{-1} می‌شود همان $D_{f^{-1}}$ که آن هم R_f است.

نکته: برد تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، به صورت $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

با توجه به نکتهٔ بالا، برد تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ است، پس دامنهٔ f^{-1} هم $\mathbb{R}-\{۲\}$ است. در نتیجه ما باید $y=x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ را رسم کنیم:

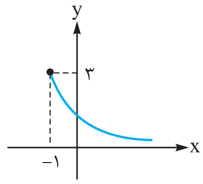


۶۲۹. ۱ ضابطهٔ fof^{-1} به صورت $y=x$ است.
دامنه‌اش هم دامنهٔ تابع داخلی است: $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$
از طرفی تابع اکیداً صعودی و پیوسته است:
$$\underbrace{\underbrace{x^۳}_{\text{اکیداً صعودی}}+\underbrace{\sqrt[۵]{x}+۶}_{\text{اکیداً صعودی}}}_{\text{اکیداً صعودی}}$$
پس بردش با دادن نقطهٔ ابتدا و انتهای دامنه به دست می‌آید:
$f(x)=x^۳+\sqrt[۵]{x}+۶ \xrightarrow[x=-۱]{\text{ابتدای برد}} f(-۱)=-۱-۱+۶=۴$
$f(x)=x^۳+\sqrt[۵]{x}+۶ \xrightarrow[x=۱]{\text{انتهای برد}} f(۱)=۱+۱+۶=۸$
پس برد به صورت $R_f=[۴,۸]$ است.
در نتیجه: $D_{fof^{-1}}=R_f=[۴,۸]$
پس نمودارمان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم در محدودهٔ ۴ تا ۸ است:



طول پاره‌خط AB برابر است با:
$AB=\sqrt{(۸-۴)^۲+(۸-۴)^۲}=\sqrt{۴^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۲}$

۶۳۰. **۳** نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{x+۱}+۳$ به صورت روبه‌رو است:

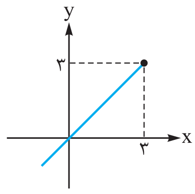


دامنه و برد f را می‌نویسیم:

$R_f=(-\infty,۳]\ \ ,\ \ D_f=[-۱,+\infty)$

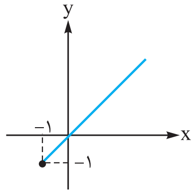
نمودار توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را رسم می‌کنیم:

۱) $(fof^{-۱})(x)=x$



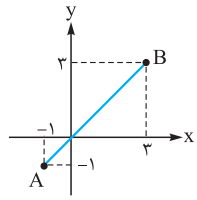
$D_{fof^{-۱}}=D_{f^{-۱}}=R_f=(-\infty,۳]$

۲) $(f^{-۱}of)(x)=x$



$D_{f^{-۱}of}=D_f=[-۱,+\infty)$

قسمت مشترک دو تابع به صورت روبه‌رو است:



طول پاره‌خط AB برابر است با:

$AB=\sqrt{۴^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۲}$

۶۳۱. **۳** برای آن‌که دو تابع با هم برابر باشند، باید اولاً دامنه و ثانیاً ضابطه‌هایشان یکسان باشد.

ضابطهٔ هر دو تابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ برابر با ضابطهٔ تابع همانی است:

$\begin{cases}(fof^{-۱})(x)=x\\(f^{-۱}of)(x)=x\end{cases}$

دامنهٔ توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ به ترتیب $D_{f^{-۱}}$ و D_f است. از طرفی $D_{f^{-۱}}$ همان R_f است، پس برای آن‌که توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ برابر باشند، کافی است $D_f=R_f$.

برد تابع $f(x)=x^۲-۸x+k$ با دامنهٔ $[۴,+\infty)$ را حساب می‌کنیم:

$f(x)=x^۲-۸x+۱۶-۱۶+k=(x-۴)^۲+k-۱۶$

$x\ge ۴ \Rightarrow x-۴\ge ۰ \Rightarrow (x-۴)^۲\ge ۰$

$\Rightarrow (x-۴)^۲+k-۱۶\ge k-۱۶ \Rightarrow f(x)\ge k-۱۶$

پس: $R_f=[k-۱۶,+\infty)$

در نتیجه باید: $k-۱۶=۴ \Rightarrow k=۲۰$

۶۳۲. **۱** برد تابع f را حساب می‌کنیم:

$\sqrt{x-۲}\ge ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} -\sqrt{x-۲}\le ۰ \xrightarrow{+۱} ۱-\sqrt{x-۲}\le ۱ \Rightarrow R_f=(-\infty,۱]$

ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم: $y=۱-\sqrt{x-۲} \Rightarrow \sqrt{x-۲}=۱-y$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۲=۱-۲y+y^۲ \Rightarrow x=y^۲-۲y+۳$

$\xrightarrow[y,x]{\text{عوض کردن}} y=x^۲-۲x+۳$

$\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^۲-۲x+۳\ ,\ D_{f^{-۱}}=R_f=(-\infty,۱]$

برای به دست آوردن ضابطهٔ $f^{-۱}(-x)$، در ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$، جای xها، $-x$ می‌گذاریم: $f^{-۱}(-x)=x^۲+۲x+۳$

دامنهٔ آن هم دقیقاً قرینهٔ دامنهٔ $f^{-۱}(x)$ است: $D_{f^{-۱}(-x)}=[-۱,+\infty)$

پس: $D_g=D_{f^{-۱}(x)}\cap D_{f^{-۱}(-x)}=[-۱,۱]$

ضابطهٔ g را پیدا می‌کنیم:

$g(x)=f^{-۱}(x)-f^{-۱}(-x)=(x^۲-۲x+۳)-(x^۲+۲x+۳)=-۴x$

برد g را حساب می‌کنیم:

$-۱\le x\le ۱ \Rightarrow -۴\le -۴x\le ۴ \Rightarrow R_g=[-۴,۴]$

این بازه، شامل ۹ عدد صحیح است.

۶۳۳. **۲** ابتدا $g^{-۱}$ را می‌نویسیم: $g^{-۱}=\{(۱,-۲),(۳,۴),(-۲,۲)\}$

حالا $g^{-۱}of$ را تشکیل می‌دهیم. xها را از D_f می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱\xrightarrow{f}۲\xrightarrow{g^{-۱}}\times\\ ۳\xrightarrow{f}-۲\xrightarrow{g^{-۱}}۲\\ -۲\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{g^{-۱}}\times\end{array}\right\}\Rightarrow g^{-۱}of=\{(۳,۲)\}$$

برای نوشتن تابع $(g^{-۱}of)+۲f$ ابتدا باید دامنه را پیدا کنیم. دامنه از اشتراک دامنهٔ $g^{-۱}of$ و f به دست می‌آید:

$D_{g^{-۱}of}\cap D_f=\{۳\}\cap\{۱,۳,-۲\}=\{۳\}$

مقدار $g^{-۱}of+۲f$ در $x=۳$، بردش می‌شود:

$(g^{-۱}of)(۳)+۲f(۳)=۲+۲(-۲)=-۲$

۶۳۴. **۴** **راه اول:** جای $g^{-۱}of^{-۱}$ می‌نویسیم $(fog)^{-۱}$.

پس اول fog را پیدا می‌کنیم، بعد وارونش می‌کنیم.

fog، xهایش را از g می‌گیرد.

$$\left.\begin{array}{l}-۱\xrightarrow{g}-۳\xrightarrow{f}\sqrt{۲}\\ ۵\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲}\xrightarrow{g}۰\xrightarrow{f}-۱\\ ۴\xrightarrow{g}۶\xrightarrow{f}\times\end{array}\right\}\Rightarrow fog=\{(-۱,\sqrt{۲}),(۵,\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۲},-۱)\}$$

حالا جای x و y ها را عوض می‌کنیم:

$(fog)^{-۱}=\{(\sqrt{۲},-۱),(\frac{۱}{۲},۵),(-۱,\frac{۱}{۲})\}$

راه دوم: $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را می‌نوشتیم.

۶۳۵. **۲** $(fogof^{-۱})(۴)$ یعنی $f(g(f^{-۱}(۴)))$

سه مرحله دارد:

$\underbrace{f(\underbrace{g(\underbrace{f^{-۱}(۴)}_{(۱)})}_{(۲)})}_{(۳)}$

۱) برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۴)$، باید در f دنبال زوج مرتبی باشیم که yاش ۴ باشد:

$(۳,۴)\in f \Rightarrow (۴,۳)\in f^{-۱} \Rightarrow f^{-۱}(۴)=۳$

۲) حالا شد $f(g(۳))$.

الان نوبت $g(۳)$ است: $(۳,-۳)\in g \Rightarrow g(۳)=-۳$

۳) حالا شد $f(-۳)$: $(-۳,۲)\in f \Rightarrow f(-۳)=۲$

۶۳۶. **۲** برای محاسبهٔ $f(g^{-۱}(۳))$ دو مرحله داریم:

۱) محاسبهٔ $g^{-۱}(۳)$ که باید معادلهٔ $g(x)=۳$ را حل کنیم:

$\frac{۲x+۵}{x-۱}=۳ \Rightarrow ۳x-۳=۲x+۵ \Rightarrow x=۸$

۲) حالا $f(۸)$: $f(x)=x+\sqrt{x+۱} \Rightarrow f(۸)=۸+۳=۱۱$

۶۳۷. **۴** جای $(f^{-۱}og)(a)$ می‌نویسیم $f^{-۱}(g(a))$.

پس: $f^{-۱}(g(a))=۶$

در تابع وارون گفتیم از $f^{-۱}(\bigcirc)=\square$، نتیجه می‌گیریم $f(\square)=\bigcirc$، پس در این‌جا داریم:

$f^{-۱}(\underbrace{g(a)}_{\bigcirc})=\underbrace{۶}_{\square} \Rightarrow f(۶)=g(a)$

مقدار $f(۶)$ را از ضابطه‌اش حساب می‌کنیم: $f(x)=۲x-۵ \Rightarrow f(۶)=۷$

پس تساوی $f(۶)=g(a)$ به شکل $g(a)=۷$ درمی‌آید. با توجه به وجود زوج مرتب $(۴,۷)$ در تابع g، نتیجه می‌گیریم: $a=۴$.

۶۳۸. **۱** از $g^{-1}(f(a))=۳$ نتیجه می‌گیریم $g(۳)=f(a)$.

با توجه به زوج مرتب $(۳,-۲)$ در g، نتیجه می‌گیریم $g(۳)=-۲$، پس: $f(a)=-۲$

با توجه به ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$، برای $f(a)$ از هر دو ضابطه استفاده می‌کنیم:

ضابطهٔ بالا: $f(a)=\sqrt{a} \Rightarrow -۲=\sqrt{a}$ ✗

ضابطهٔ پایین: $f(a)=-\sqrt{-a} \Rightarrow -۲=-\sqrt{-a} \Rightarrow \sqrt{-a}=۲$

$\Rightarrow a=-۴$

۶۳۹. **۳** از تساوی $g^{-1}(f^{-1}(a))=۸$، نتیجه می‌گیریم $g(۸)=f^{-1}(a)$.

$g(۸)$ را از ضابطه‌اش حساب می‌کنیم:

$g(x)=\sqrt{۵x+۹} \Rightarrow g(۸)=\sqrt{۴۹}=۷$

پس تساوی به شکل $۷=f^{-1}(a)$ درمی‌آید و از آن به $f(۷)=a$ می‌رسیم.

با توجه به زوج مرتب $(۷,۳)$، نتیجه می‌گیریم: $a=۳$.

۶۴۰. **۱** محاسبهٔ $g^{-1}(f^{-1}(۲۰))$ دو مرحله دارد:

۱) برای محاسبهٔ $f^{-1}(۲۰)$ باید معادلهٔ $f(x)=۲۰$ را حل کنیم:

$f(x)=x+\sqrt{x} \Rightarrow x+\sqrt{x}=۲۰ \xrightarrow{\text{حدس}} x=۱۶$

۲) حالا باید $g^{-1}(۱۶)$ را محاسبه کنیم: $g(x)=۱۶ \Rightarrow \frac{۹x+۶}{۱-x}=۱۶$

$\Rightarrow ۹x+۶=۱۶-۱۶x \Rightarrow ۲۵x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۲}{۵}$

پس: $g^{-1}(f^{-1}(۲۰))=\frac{۲}{۵}$

۶۴۱. **۴** محاسبهٔ $f^{-1}(g^{-1}(-۹))$ دو مرحله دارد:

۱) برای محاسبهٔ $g^{-1}(-۹)$ باید معادلهٔ $g(x)=-۹$ را حل کنیم:

$g(x)=\frac{۳-x}{۲} \Rightarrow -۹=\frac{۳-x}{۲} \Rightarrow -۱۸=۳-x \Rightarrow x=۲۱$

۲) حالا باید $f^{-1}(۲۱)$ را محاسبه کنیم:

$f(x)=۲۱ \Rightarrow x^{۲}-۴x+۹=۲۱ \Rightarrow x^{۲}-۴x-۱۲=۰$

$\Rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰ \xrightarrow{x\ge ۲} \begin{cases} x=۶ \checkmark \\ x=-۲ \times \end{cases}$

پس: $f^{-1}(g^{-1}(-۹))=۶$

۶۴۲. **۲** می‌دانیم اگر $f^{-1}(a)=b$، آن‌گاه $f(b)=a$.

نقطهٔ $(۰,\alpha)$ روی تابع $y=g^{-1}of^{-1}(x)$ است، پس:

$y=g^{-1}(f^{-1}(x)) \xrightarrow{(۰,\alpha)} \alpha=g^{-1}(f^{-1}(۰))$

$\xrightarrow{\text{طبق نکته}} g(\alpha)=f^{-1}(۰)$

برای به دست آوردن $f^{-1}(۰)$، کافی است معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم:

$\log_{۱۰}(۲x-۵)=۰ \Rightarrow ۲x-۵=۱۰^{۰} \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$

$\xrightarrow{\text{پس}} f^{-1}(۰)=۳$

ادامه می‌دهیم:

$g(\alpha)=\underbrace{f^{-1}(۰)}_{۳} \Rightarrow \alpha+\sqrt{۲\alpha-۴}=۳ \Rightarrow \sqrt{۲\alpha-۴}=\underbrace{۳-\alpha}_{*}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲\alpha-۴=۹-۶\alpha+\alpha^{۲} \Rightarrow \alpha^{۲}-۸\alpha+۱۳=۰$

$\xrightarrow{+۳} \alpha^{۲}-۸\alpha+۱۶=۳ \Rightarrow (\alpha-۴)^{۲}=۳$

$\Rightarrow \alpha-۴=\pm\sqrt{۳} \Rightarrow \alpha=۴\pm\sqrt{۳}$

با توجه به $\underbrace{۳-\alpha}_{*}$ که با یک عبارت رادیکالی برابر شده، پس باید $\alpha\le ۳$ باشد، در نتیجه $\alpha=۴-\sqrt{۳}$ قبول است.

۶۴۳. **۴** **راه اول:** اول $g^{-1}of^{-1}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} g^{-1}(x)=x^{۲}\ ,\ x\ge۰ \\ f^{-1}(x)=۱+\sqrt{x}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(x))=g^{-1}(۱+\sqrt{x})=(۱+\sqrt{x})^{۲}$

حالا باید وارون $g^{-1}of^{-1}$ را حساب کنیم تا به fog برسیم:

$(g^{-1}of^{-1})^{-1}=fog$

$y=(۱+\sqrt{x})^{۲} \xrightarrow{\text{تنها کردن x}} \sqrt{y}=۱+\sqrt{x}$

$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}-۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x=y-۲\sqrt{y}+۱$

$\xrightarrow[\text{y و x}]{\text{عوض کردن}} y=x-۲\sqrt{x}+۱$

راه دوم: با داشتن f^{-1} و g^{-1}، ضابطهٔ f و g را پیدا می‌کنیم و بعد fog را تشکیل می‌دهیم:

ضابطهٔ f^{-1}: $y=۱+\sqrt{x} \xrightarrow{\text{تنها کردن x}} \sqrt{x}=y-۱$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x=(y-۱)^{۲} \xrightarrow{\text{عوض کردن}} y=(x-۱)^{۲}$

ضابطهٔ g^{-1}: $y=x^{۲} \xrightarrow{\text{تنها کردن x}} |x|=\sqrt{y} \xrightarrow{x\ge۰}$

$x=\sqrt{y} \xrightarrow{\text{عوض کردن}} y=\sqrt{x}$

حالا با داشتن $f(x)=(x-۱)^{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}$، ضابطهٔ fog را می‌نویسیم:

$f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x}-۱)^{۲}=x-۲\sqrt{x}+۱$

۶۴۴. **۴** در رابطهٔ $y=f(۳x-۱)$ برای تنها کردن x از قاعدهٔ $f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=a$ استفاده می‌کنیم:

$y=f(۳x-۱) \Rightarrow f^{-1}(y)=۳x-۱$

$\xrightarrow{\text{تنها کردن x}} ۳x=f^{-1}(y)+۱$

$\Rightarrow x=\frac{f^{-1}(y)+۱}{۳} \xrightarrow{\text{عوض کردن x و y}} y=\frac{f^{-1}(x)+۱}{۳}$

۶۴۵. **۴** سعی می‌کنیم $f(-۱)$ را به $g(k)$ تبدیل کنیم تا قسمت بالای آکولاد را ساده کنیم: $f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(f(-۱))})$

در تساوی $g(x)=f(۲x+۵)$ باید $۲x+۵$، برابر ۱- باشد، پس $x=-۳$ را قرار می‌دهیم: $g(x)=f(۲x+۵) \xrightarrow{x=-۳} f(-۱)=g(-۳)$

پس تساوی $f^{-1}(g^{-1}(f(-۱)))$ را می‌توانیم به شکل $f^{-1}(g^{-1}(g(-۳)))$ بنویسیم.

حالا جای $g^{-1}(g(-۳))$ می‌نویسیم ۳-: $f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(g(-۳))}_{-۳})=f^{-1}(-۳)$

ضابطهٔ f^{-1} را هم داریم، پس:

$f^{-1}(x)=\frac{x^{۳}}{۹}+\sqrt[۳]{۹x} \Rightarrow f^{-1}(-۳)=-\frac{۲۷}{۹}+\sqrt[۳]{-۲۷}$

$=-۳-۳=-۶$