



وہداسد حدر
مطبقو
«ووزاد عار»



ریاضی و آمار ۲

پایہ یازدهم
رشته علوم انسانی

مؤلف

مهندس امیر زراندوز

فرمول بیسٹ

فرمول پایان

۹

نمونه
امتحانی

۴۰۰

پرسش
تشریحی

۴۰

صفحه
درسنامه



+۶

ساعت
فیلم
آموزشی
ویژه
شب
امتحان



تهران، میدان انقلاب
نیش بازار چه کتاب
www.gajmarket.com

پیشگفتار

با سلام خدمت شما بچه‌های خوب رشته انسانی

چون ما، یعنی شخص خودم و مجموعه گاج، بچه‌های انسانی رو خیلی خیلی دوست داریم همیشه سعی می‌کنیم کتابای خوب و به درد بخور براتون بنویسیم. نمونش همین کتابیه که الان دستتونه.

اولاً: تمام مطالب کتاب درسی رو پوشش دادیم و کلی سؤال مشابه مسائل، مثال‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی براتون شبیه‌سازی کردیم؛ یعنی محاله سؤالی در امتحان مطرح بشه که در این کتاب خودش رو یا شبیهش رو ندیده باشین.

ثانیاً: حجم کتاب رو الکی زیاد نکردیم.

ثالثاً: چند دوره امتحان نهایی با پاسخ تشریحی در آخر کتاب براتون آوردیم تا برای امتحان پایان سال آماده باشید.

ویژگی مهم و خیلی باحال این کتاب اینه که فیلم‌های آموزشی مخصوص امتحانات تشریحی بهش اضافه شده؛ یعنی شما دیگه لازم نیست هزینه‌ای بابت معلم خصوصی پرداخت کنید.

پس حالا که من و گاج این همه زحمت کشیدیم و یک کتاب خاص براتون گردآوری کردیم، شما هم سعی کنید با خوب خوندن این کتاب و گرفتن نمره کامل ما رو خوشحال کنید. ضمناً اگه اشتباه یا خطایی در کتاب دیدین لطفاً با اینجانب در فضای مجازی مطرح کنید.

@Amir_Zarandooz_2

به امید رسیدن شما به هرچی آرزوی خوبه

امیر زاراندوز

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سوالات
81 min	۶۸	۶ تا ۲۴
254 min	۷۷	۲۵ تا ۵۲
35 min	۹۰	۵۳ تا ۶۶

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل دوم: تابع

فصل سوم: آمار

امتحان نهایی



بارم‌بندی درس ریاضی و آمار ۲		
نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل
۶	۱۳	اول
۸	۷	تا صفحه ۴۴
	-	صفحه ۴۵ به بعد
۶	-	سوم
۲۰	۲۰	جمع

۱۰۰	آزمون ۱ (فصل اول)
۱۰۱	آزمون ۲ (فصل دوم)
۱۰۱	آزمون ۳ (فصل سوم)
۱۰۲	آزمون ۴ : خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)
۱۰۴	آزمون ۵ : خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)
۱۰۵	آزمون ۶ : خرداد ۱۴۰۲ (غایبین موجه)
۱۰۶	آزمون ۷ : شهریور ۱۴۰۲
۱۰۸	آزمون ۸ : شهریور ۱۴۰۲ (غایبین موجه)
۱۱۰	آزمون ۹ : خرداد ۱۴۰۳
۱۱۲	پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۹

۱

بخش



درستامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

ریاضی و آمار یازدهم

فیلم
شب
امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

بسته ۴

بسته ۳

بسته ۲

بسته ۱

منطق ریاضی و گزاره‌ها

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

بسته اول



منطق ریاضی و گزاره‌ها

تعریف منطق ریاضی: از نظر دانشمندان علم منطق، منطق در واقع مجموعه‌ای از روش‌ها و قانون‌های درست فکر کردن و درست استدلال کردن می‌باشد و اولین دانشمند این علم، ارسطو بوده است. منطق ریاضی، شاخه‌ای از علم منطق است که به کمک یک سری از قانون‌ها و نمادها روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را نشان می‌دهد؛ ضمناً به کمک منطق ریاضی، ارزش گزاره‌ها را نیز تعیین می‌کنیم.

تعریف گزاره: گزاره جمله‌ای خبری است که ارزش آن، می‌تواند درست یا نادرست باشد. مثلاً جمله «۳ عددی اول است.» یک گزاره با ارزش درست است؛ چون می‌دانیم عدد ۳ اول است. توجه کنید که گزاره، لزوماً جمله‌ای فارسی نیست بلکه می‌تواند با نمادهای ریاضی بیان شود مانند: $\sqrt{3} < \sqrt{2}$ یا $4 \in \mathbb{Z}$.
تذکر مهم جملات امری مانند «از عدد ۷۳ جذر بگیر.»، جملات پرسشی مثل «آیا عدد ۲ اول است؟» و جملات عاطفی مثل «چه دانشمند بزرگی!»، گزاره محسوب نمی‌شوند؛ ضمناً جملات خبری که نتوانیم اصلاً درستی یا نادرستی آن‌ها را بررسی کنیم هم، گزاره نیستند مانند جمله خبری «۱۰۰۰ عدد بزرگی است.» چون قانونی برای بزرگ یا کوچک بودن اعداد در ریاضی نداریم و امری سلیقه‌ای است.

سؤال مشخص کنید کدام یک از قسمت‌های زیر، گزاره هستند؟ سپس ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

- | | |
|------------------------------|--|
| ۱ عدد ۳/۵۶ عددی گنگ نیست. | ۲ خودروهای فرانسوی زیباتر از خودروهای آمریکایی هستند. |
| ۳ آیا ۱۲۰ بر ۳ بخش پذیر است؟ | ۴ عدد $(-5)^{2n}$ عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$) |
| ۵ $5 + 2^3 > 4^2 - 3$ | ۶ کوچک‌ترین عدد طبیعی ۳ رقمی که مربع کامل باشد، عدد ۱۰۰ است. |

پاسخ ۱ گزاره است و ارزش آن درست است.

۲ گزاره نیست چون یک موضوع سلیقه‌ای است.

۳ گزاره نیست چون جمله پرسشی است.

۴ گزاره است و ارزش آن نادرست است، چون به جای n هر عدد طبیعی که قرار دهیم حاصل $(-5)^{2n}$ عددی مثبت می‌شود.

۵ گزاره است و ارزش آن نادرست است، زیرا $5 + 2^3 = 13$ و $4^2 - 3 = 13$ پس گزاره $13 > 13$ نادرست است.

۶ گزاره است و ارزش آن درست است، چون ۱۰۰ مربع کامل است و ضمناً کوچک‌ترین عدد ۳ رقمی و طبیعی است که مربع کامل است

جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها)

معمولاً گزاره‌ها را با یکی از حروف لاتین کوچک مثل p, q, r, s و... نمایش می‌دهند. به کمک جبر گزاره‌ها می‌توانیم گزاره‌های مرکبی بسازیم که از دو یا چند گزاره ساده تشکیل شده‌اند و سپس ارزش این گزاره‌های مرکب را نیز تعیین می‌کنیم. برای تعیین ارزش یک گزاره مرکب، باید نحوه قرار دادن گزاره‌های ساده تشکیل دهنده آن را در جدول ارزش‌گذاری بلد باشیم. به جدول‌های زیر دقت کنید:

در جدول‌های زیر، ارزش درست یک گزاره را با «د» و ارزش نادرست را با «ن» نمایش داده‌ایم. (البته به جای «د» می‌توانیم از T و به جای «ن» می‌توانیم از F استفاده کنیم)

p	p	q	p	q	r
د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	ن
	ن	د	د	ن	د
	ن	ن	د	ن	ن
			ن	د	د
			ن	د	ن
			ن	ن	د
			ن	ن	ن

تعداد گزاره‌ها = ۱
تعداد ردیف‌های جدول = $2 = 2^1$

تعداد گزاره‌ها = ۲
تعداد ردیف‌های جدول = $4 = 2^2$

تعداد گزاره‌ها = ۳
تعداد ردیف‌های جدول = $8 = 2^3$

تذکره در جدول‌های بالا، به هر یک از ردیف‌های جدول، یک حالت ارزشی هم گفته می‌شود.

از جدول‌های قبل نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی اگر n گزاره داشته باشیم تعداد ردیف‌های برابر 2^n خواهد بود. مثلاً اگر ۵ گزاره داشته باشیم، در جدول ارزش‌گذاری آن‌ها به تعداد $32 = 2^5$ ردیف وجود خواهد داشت.

سؤال یک جدول ارزش‌گذاری دارای ۶۴ ردیف می‌باشد. در این جدول، چند گزاره ساده وجود دارد؟

پاسخ اگر n تعداد گزاره‌های ساده باشد خواهیم داشت:
 $n = 6 \Rightarrow 2^n = 2^6 = 64$ را تجزیه می‌کنیم $\rightarrow 64 = 2^n \Rightarrow 64 = 2^6 \Rightarrow n = 6$ تعداد ردیف‌ها

سؤال در یک جدول مربوط به n گزاره ساده اگر به تعداد گزاره‌های ساده ۲ تا اضافه شود تعداد ردیف‌های جدول ۶۴ شده است مقدار n را به دست آورید.

پاسخ
 $2^n = 2^n$ تعداد ردیف‌های اولیه
 $2^n + 2$ تعداد ردیف‌های جدید
 $2^n + 2 = 64 \rightarrow 2^n = 62$ $\rightarrow 2^n = 64$ را تجزیه می‌کنیم $\rightarrow 2^n + 2 = 64$ طبق فرض سوال داریم
 پایه‌ها مساوی هستند $\rightarrow n + 2 = 6 \Rightarrow n = 6 - 2 \Rightarrow n = 4$ پس توان‌ها نیز باید مساوی باشند

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره‌ای مثل p ، گزاره‌ای است که ارزش آن، دقیقاً مخالف ارزش p باشد. نقیض p را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم. برای ساختن نقیض گزاره‌های فارسی، کافی است فعل جمله را نفی کنیم؛ یعنی مثلاً اگر فعل جمله «است» بود به «نیست» تبدیل می‌شود یا اگر فعل جمله «نیست» بود به «است» تبدیل خواهد شد. روش دیگر این است که عبارت «چنین نیست که» را به ابتدای گزاره اضافه کنیم.

سؤال نقیض گزاره «۱۲ بر ۳ بخش پذیر است»، را بنویسید.

پاسخ نقیض این گزاره را به دو حالت می‌توان نوشت:

حالت اول ۱۲ بر ۳ بخش پذیر نیست.

حالت دوم چنین نیست که ۱۲ بر ۳ بخش پذیر باشد.

تذکره مهم اگر گزاره داده شده، شامل یک نماد ریاضی باشد، برای نقیض کردن آن به شکل زیر عمل می‌کنیم:

- ۱ نمادهای $<$ و \geq نقیض هم هستند. **مثال** گزاره‌های $x < y$ و $x \geq y$ نقیض هم هستند.
- ۲ نمادهای $>$ و \leq نقیض هم هستند. **مثال** گزاره‌های $5 > 7$ و $5 \leq 7$ نقیض هم هستند.
- ۳ نمادهای $=$ و \neq نقیض هم هستند. **مثال** گزاره‌های $(-1)^3 = 1$ و $(-1)^3 \neq 1$ نقیض هم هستند.
- ۴ نمادهای \in و \notin نقیض هم هستند. **مثال** گزاره‌های $2 \in \mathbb{N}$ و $2 \notin \mathbb{N}$ نقیض هم هستند.
- ۵ نمادهای \subseteq و $\not\subseteq$ نقیض هم هستند. **مثال** گزاره‌های $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}$ نقیض هم هستند.

سؤال نقیض عبارات و گزاره‌های زیر را نوشته و سپس ارزش هر گزاره و ارزش نقیضش را مشخص کنید.

- ۱ عددی مربع کامل است. **۲** $3^0 + 2^1 + 3^2 \neq 4^2$
- ۳ هر عدد صحیح x ، منفی است. **۴** $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

پاسخ ۱ عددی مربع کامل است. (نادرست) — نقیض — ۳ عددی مربع کامل نیست. (درست)

۲ می‌دانیم که $3^0 = 1$, $2^1 = 2$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$. در نتیجه $3^0 + 2^1 + 3^2 = 1 + 2 + 9 = 12$ و چون $12 \neq 16$ ، گزاره $3^0 + 2^1 + 3^2 \neq 4^2$ گزاره درست است.

نادرست) $3^0 + 2^1 + 3^2 = 4^2$ — نقیض — (درست) $3^0 + 2^1 + 3^2 \neq 4^2$

۳ هر عدد صحیح x ، منفی است. (نادرست) — نقیض — چنین نیست که هر عدد صحیح x ، منفی باشد. (درست)

تذکره مهم اگر کسی بگوید نقیض جمله «هر عدد صحیح x منفی است.» می‌شود «هر عدد صحیح x مثبت است.» اشتباه کرده؛ چون اگر x منفی نباشد ممکن است صفر یا مثبت باشد پس نمی‌توانیم بگوییم حتماً مثبت است.

نادرست) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$ — نقیض — (درست) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

جدول نقیض

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

اگر گزاره‌ای دلخواه p و $\sim p$ نقیض آن باشد، آن‌گاه جدول مربوط به این دو گزاره به شکل مقابل است:

دو گزاره هم‌ارز: دو گزاره p و q را در صورتی هم‌ارز می‌گوییم که ارزش یکسان داشته باشند (هم‌ارزش باشند) یعنی هر دو «درست» یا هر دو «نادرست» باشند. نماد هم‌ارزی به شکل \equiv می‌باشد، پس هم‌ارزی p و q را به صورت $p \equiv q$ نشان می‌دهیم. مثلاً گزاره‌های «همه اعداد منفی، از صفر کوچک‌ترند.» و «۲۵ مربع کامل است.» هم‌ارزند، چون هر دو ارزش درست دارند.

سؤال هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه حل شده، کامل کنید.

- ۱ $\sim(\frac{1}{p} < \frac{1}{q}) \equiv ?$
- ۲ $\sim(\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}) \equiv ?$
- ۳ $\sim(W \subseteq Q) \equiv ?$

پاسخ ۱ $\sim(\frac{1}{p} < \frac{1}{q}) \equiv (\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q})$

۲ $\sim(\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}) \equiv (\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5})$

۳ $\sim(W \subseteq Q) \equiv (W \not\subseteq Q)$

تذکر اگر از یک گزاره، دو بار نقیض بگیریم، خود آن گزاره به دست می‌آید؛ یعنی: $\sim(\sim p) \equiv p$

مثال $\sim[\sim(3 \in \mathbb{N})] \equiv (3 \in \mathbb{N})$

مثال $\sim[\sim(5 > 3)] \equiv (5 > 3)$

• درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱. جمله «سیب قرمز، از سیب زرد خوش مزه‌تر است» یک گزاره است.

۲. عبارت «عدد ۱۲ یک عدد اول است.» یک گزاره می‌باشد.

۳. نقیض گزاره « $3 < -\frac{1}{p}$ » برابر است با « $3 > -\frac{1}{p}$ »

● جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۴. نقیض گزاره $P \sim$ گزاره می باشد. (شهریور ۱۴۰۲)
۵. تعداد حالت های ارزشی سه گزاره برابر است. (شهریور ۱۴۰۲)
۶. اگر گزاره داشته باشیم تعداد حالت ها در جدول ارزشی حالت است. (خرداد ۱۴۰۲)

● گزینه درست را انتخاب کنید.

۷. اگر تعداد حالت ها در جدول ارزشی برابر ۳۲ حالت باشد، تعداد گزاره ها برابر است با: (خرداد ۱۴۰۲)

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۸. کدام یک از جملات زیر، گزاره است؟ (خرداد ۱۴۰۳)

۱) لطفاً در را باز کن. ۲) چه هوای سردی ۳) شما اهل کجایی؟ ۴) عدد ۷ عددی اول است.

۹. گزاره «۱۶۰ عددی اول نیست» با کدام گزاره، هم ارز است؟

۱) معادله $x^2 - 3 = 0$ دو ریشه گویا دارد. ۲) وزن افراد، متغیر کمی فاصله ای است.
۳) نمودار حبابی، ۲ متغیر کمی را نمایش می دهد. ۴) عبارت $9 + 10x - x^2$ به کمک اتحاد جمله مشترک، قابل تجزیه است.

۱۰. نقیض گزاره « $x + y = 1$ » کدام نیست؟ (x و y اعداد حقیقی هستند.)

۱) حاصل جمع x و y برابر ۱ نیست. ۲) چنین نیست که مجموع x و y برابر با ۱ باشد.
۳) $x + y \neq 1$ ۴) $x + y < 1$

۱۱. جدول زیر را کامل کنید. (کتاب درسی)

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
$25 \times 2^8 = 2^{12}$			
		$-1200 \geq +120$	
میانۀ داده های ۱، ۲، ۳، ۴ عدد $2/5$ است.			
		مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد، کوچک تر است.	
معادله $0 = x^2 - 3x - 5$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.			
		$2^2 \times (\frac{3}{5})^0 = 0$	

- کدام یک از جملات یا عبارت های زیر گزاره محسوب می شوند؟ ارزش هر گزاره را مشخص کنید. (کتاب درسی)

۱۲. کسر $\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}}$ عبارتی گویا است. ($x > 0$)
۱۳. هر عدد طبیعی از هر عدد صحیح بزرگتر است.
۱۴. رشته مورد علاقه شما در دانشگاه چیست؟
۱۵. دامنه تابع $f = \{(1, 5), (6, 2), (3, 10)\}$ برابر است با $D_f = \{1, 3, 6\}$
۱۶. کوچک ترین عدد اول طبیعی عدد ۱ است.
۱۷. تعداد دندان های خراب هر فرد، متغیر کمی نسبی است.
۱۸. رابطه $f = \{(5, 6), (7, 8), (9, 10)\}$ تابع است.
۱۹. عدد $(-2)^n$ همیشه عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)
۲۰. روزی ۲ ساعت ریاضی بخوان.
۲۱. عدد 2^8 عدد بسیار بزرگی است.
۲۲. $-\frac{3}{5} > -\frac{1}{2}$
۲۳. رابطه $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ همواره درست است. ($a, b \in \mathbb{R}$)

۲۴. نمودار خط $y = 2x - 1$ از نواحی اول و سوم نمی گذرد. نمودار x بیانگر یک تابع است.

۲۵. ارزش گزاره «عدد ۹ مربع کامل است» را مشخص کرده، سپس نقیض آن را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۳)

هم ارزی های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

۲۸. $\sim(\sqrt{25+9} \neq 5+3) \equiv ?$

۳۰. $\sim(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}) \equiv ?$

۲۷. $24 \equiv ?$ (عدد مرکب است).

۲۹. $\sim(-12 \leq -8) \equiv ?$

۳۱. $\sim[\sim(2^4 \leq 4^2)] \equiv ?$

۳۲. جدول ارزش گذاری مربوط به ۷ گزاره، دارای چند ردیف (حالت ارزشی) می باشد؟

۳۳. یک جدول ارزش گذاری، دارای ۵۱۲ ردیف (حالت ارزشی) می باشد، این جدول، شامل چند گزاره است؟

ترکیب گزاره ها

صفحه ۴ تا ۶ کتاب درسی

بسته دوم



گزاره های عطفی و فصلی

گزاره های مرکب (ترکیب گزاره ها با هم): به کمک منطق ریاضی و جبر گزاره ها، دو یا چند گزاره ساده را به ۴ حالت می توانیم با هم ترکیب کنیم تا گزاره های مرکب ساخته شوند. دو حالت از این ۴ حالت را در این بسته و ۲ حالت دیگر را در بسته بعدی بررسی می کنیم.

ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	p ∧ q
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

اگر دو گزاره ساده p و q را با حرف ربط «و» به هم اتصال دهیم، گزاره مرکب p ∧ q حاصل می شود که آن را «p و q» می خوانیم. البته دقت کنید که گزاره های p و q ممکن است هیچ ارتباطی با هم نداشته باشند. به عنوان مثال گزاره «۲ عددی اول است و تهران پایتخت ایران است» یک ترکیب عطفی است. واضح

است که ترکیب عطفی p ∧ q فقط وقتی درست است که هم p درست باشد و هم q. پس گزاره بالا درست است، چون می دانیم ۲ عددی اول است و تهران پایتخت ایران است. جدول ارزش گذاری p ∧ q در حالت کلی به شکل مقابل است:

ملاحظه می کنید که اگر حتی یکی از گزاره های p یا q نادرست باشد، p ∧ q نادرست خواهد بود.

نتیجه بسیار مهم از جدول: اگر T گزاره ای همیشه درست و F گزاره ای همیشه نادرست باشد و p گزاره ای دلخواه باشد، آن گاه خواهیم داشت:

$(p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p$

$(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$

$(p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \wedge p) \equiv F$

تذکر مهم توجه کنید که به جای p و q در تمام مباحث این کتاب، می تواند هر گزاره دیگری هم استفاده شود مثلاً:

$$\begin{cases} (\sim r \wedge T) \equiv \sim r \\ (S \wedge F) \equiv F \\ (r \wedge \sim r) \equiv F \end{cases}$$

سؤال ارزش گزاره های عطفی زیر را تعیین کنید.

۱. $\frac{1}{3}$ عددی گویا است و انحراف معیار، جذر واریانس است.

۲. $[-3 \notin \mathbb{Z}] \wedge [\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} > (-\frac{1}{2})^2]$

۳. a^2 عددی نامنفی است و ۱۲۱ عددی مربع کامل است. (a عدد حقیقی است)

۴. $(\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}) \wedge (\sqrt{2} \in \mathbb{Z})$

پاسخ ۱. $\frac{1}{3}$ عددی گویا است و انحراف معیار، جذر واریانس است.

درست ← درست → درست

۲. ابتدا حاصل $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ و $(-\frac{1}{2})^2$ را به دست می آوریم و سپس آن ها را مقایسه می کنیم:

$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$, $(-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

می دانیم $\frac{2}{15}$ از $\frac{1}{4}$ بزرگ تر است، لذا گزاره $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} > (-\frac{1}{2})^2$ درست است.

$[-3 \notin \mathbb{Z}] \wedge [\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} > (-\frac{1}{2})^2]$

درست ← نادرست → نادرست

۳. a^2 عددی نامنفی است و ۱۲۱ عددی مربع کامل است. (a هر عدد حقیقی که باشد حاصل a^2 صفر یا مثبت است پس نامنفی است).

$(\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}) \wedge (\sqrt{2} \in \mathbb{Z})$

نادرست → درست → نادرست

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزاره ساده p و q را با حرف ربط «یا» به هم اتصال دهیم، گزاره مرکب $p \vee q$ حاصل می‌شود که آن را « p یا q » می‌خوانیم.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثلاً گزاره « $\frac{3}{5}$ عددی طبیعی است یا 5^5 مضرب 5 است.» یک ترکیب فصلی است.

واضح است که اگر هم p نادرست باشد و هم q ، گزاره $p \vee q$ نادرست است و در بقیه حالت‌ها درست است. پس گزاره اخیر درست است؛ چون p نادرست است ($\frac{3}{5}$ عدد طبیعی نیست) ولی q درست است. (5^5 بر 5 بخش پذیر است.)
جدول ارزش‌گذاری $p \vee q$ به شکل روبه‌رو است:

نتیجه مهم از جدول: اگر T گزاره‌ای همیشه درست و F گزاره‌ای همیشه نادرست و p گزاره‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$(p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T$$

$$(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$$

$$(p \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$$

سؤال ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (در قسمت‌های ۳ و ۴ متغیر x عدد طبیعی است.)

۱ ۱۲۵ عددی فرد یا مربع کامل است.

۲ (۱۰۰ مضرب ۵ است.) $(-3 \geq -10)$

۳ $[(a-b)(a+b) = a^2 - b^2] \vee (x^2 \geq x)$

۴ معادله $x^2 - 4 = 0$ ریشه ندارد یا حاصل $(x-1)^3$ همواره منفی است.

۱ ۱۲۵ عددی فرد است یا ۱۲۵ عددی مربع کامل است.

درست / نادرست

۲ (۱۰۰ مضرب ۵ است.) $(-3 \geq -10)$

درست / درست / درست

۳ $[(a-b)(a+b) = a^2 - b^2] \vee (x^2 \geq x)$

درست (اتحاد مزدوج) / درست / درست

۴ معادله $x^2 - 4 = 0$ ریشه ندارد یا حاصل $(x-1)^3$ منفی است.

نادرست / نادرست / نادرست

چندر می‌گیریم x طبیعی است $x = 2$ $(x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4)$

نکته! گاهی لازم است نقیض یک گزاره عطفی یا فصلی را تعیین کنیم. برای این منظور از قوانین دمورگان به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

قانون (۱) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

قانون (۲) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

یعنی برای پیدا کردن نقیض $p \vee q$ تک‌تک گزاره‌های p و q را نقیض می‌کنیم و علامت « \vee » به « \wedge » تبدیل می‌شود. به طریق مشابه می‌توان گفت برای نقیض کردن $p \wedge q$ تک‌تک گزاره‌های p و q را نقیض کرده و علامت « \wedge » را به « \vee » تبدیل می‌کنیم یعنی حرف «و» به «یا» و حرف «یا» به «و» تبدیل می‌شود. مثلاً درستی قانون (۱) را به کمک رسم جدول، اثبات می‌کنیم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

سؤال نقیض گزاره‌های زیر را به دست آورید:

$$\left(\frac{1}{\delta} < \frac{1}{\gamma}\right) \vee (\sqrt{3} > \sqrt{2})$$

$$(3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})$$

۴ ۵ مقسوم‌علیه ۱۰۰ نیست یا درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی است.

۳ ۳ عددی اول است و ۶۳ مضرب ۲ است.

پاسخ ۱ از قانون ۲ دمورگان استفاده می‌کنیم: $\sim[(3 \notin \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})] \equiv [\sim(3 \notin \mathbb{Z}) \vee \sim(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})] \equiv (3 \in \mathbb{Z}) \vee (\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{W})$

۲ از قانون ۱ دمورگان استفاده می‌کنیم: $\sim\left[\left(\frac{1}{\delta} < \frac{1}{\gamma}\right) \vee (\sqrt{3} > \sqrt{2})\right] \equiv \sim\left(\frac{1}{\delta} < \frac{1}{\gamma}\right) \wedge \sim(\sqrt{3} > \sqrt{2}) \equiv \left(\frac{1}{\delta} \geq \frac{1}{\gamma}\right) \wedge (\sqrt{3} \leq \sqrt{2})$

۳ ۳ عددی اول نیست یا ۶۳ مضرب ۲ نیست. (حرف «و» به «یا» تبدیل می‌شود و تک تک گزاره‌ها نقیض می‌شوند)

۴ ۵ مقسوم‌علیه ۱۰۰ است و درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی نیست. (حرف «یا» به «و» تبدیل می‌شود و تک تک گزاره‌ها نقیض می‌شوند)

سؤال ۱ اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، جدول ارزش‌گذاری گزاره $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$ را رسم کنید.

۲ اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره $(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)$ را بدون رسم جدول تعیین کنید.

پاسخ ۱

p	q	~p	~q	p ∨ ~q	(p ∨ ~q) ∧ ~p
د	د	ن	ن	د	ن
د	ن	ن	د	د	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p) \equiv (\sim T \wedge \sim F) \vee (r \wedge T) \equiv \underbrace{(F \wedge T)}_F \vee \underbrace{(r \wedge T)}_r \equiv r$$

ترکیب گزاره‌ها

پرسش‌های تشریحی

بسته ۲

• درست‌ی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۳۴. گزاره فصلی $p \vee \sim p$ همواره درست است.

۳۵. گزاره $p \wedge \sim p$ همواره نادرست است.

۳۶. گزاره $(p \wedge T) \vee (q \vee F)$ هم‌ارز با گزاره $(p \wedge q)$ است.

• جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۳۷. نقیض گزاره $p \vee \sim q$ گزاره می‌باشد.

۳۸. اگر حداقل ارزش یکی از دو گزاره درست باشد، در این صورت ارزش ترکیب آن‌ها درست است.

۳۹. ارزش گزاره $p \vee \sim p$ همواره است.

• گزینه درست را انتخاب کنید.

۴۰. اگر p و q دو گزاره و دلخواه باشند، در چه صورت ارزش گزاره مرکب $p \wedge q$ درست است؟

(۱) p درست و q نادرست

(۲) p و q هر دو درست

(۳) p و q هر دو نادرست

(۴) گزینه (۱) و (۳)

(۱) و (۲) - و (۳) - یا (۴) - یا

۴۱. برای ترکیب فصلی دو گزاره p و q از حرف ربط استفاده شده و آن را با نماد q نمایش می‌دهند.

(۱) و (۲) - و (۳) - یا (۴) - یا

۴۲. در جای خالی کدام گزاره باید قرار بگیرد؟

(۱) ضرب دو عدد گنگ، همواره گنگ است.

(۲) مجموع دو عدد گنگ، ممکن است گویا باشد.

(۳) تقسیم دو عدد گنگ، همواره گویا است.

(۴) ضرب یک عدد گویا (به جز صفر) در یک عدد گنگ، ممکن است گویا باشد.

۴۳. هم‌ارز گزاره $(p \wedge q) \sim$ کدام گزاره است؟

(۱) $(p \vee q) \sim$ (۲) $p \vee \sim q$ (۳) $\sim p \vee \sim q$ (۴) $p \wedge \sim q$

(خرداد ۱۴۰۳)

(خرداد ۱۴۰۲)

(خرداد ۱۴۰۲)

(شهریور ۱۴۰۲)

(شهریور ۱۴۰۲)

(خرداد ۱۴۰۲)

(شهریور ۱۴۰۲)

(خرداد ۱۴۰۲)

(خرداد ۱۴۰۳)

۴۴. جدول زیر را کامل کنید.

(شهریور ۱۴۰۲)

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته ۷ روز دارد و	✓	
۲ یا ۵ عددی زوج است.		✓

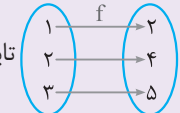
۴۵. جدول زیر را کامل کنید.

(کتاب درسی)

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	در تابع $f(x) = x^2 - 5x$ متغیر مستقل برابر $f(x)$ است و درآمد افراد، متغیر کمی نسبتی است.		
۲	حاصل $(-5)^4$ عددی منفی نیست و رنگ پیراهن افراد، متغیر کیفی اسمی نیست.		
۳	۱۸ مضرب ۹ است و		✓
۴ و شیب هر خط عمودی (موازی محور عرض ها) تعریف نشده است.	✓	
۵	طول رأس سهمی $y = x^2 - 4x + 1$ برابر ۲- است و $\mathbb{Z} \not\subseteq \{0, 1, 2\}$		
۶	مقسوم علیه های طبیعی عدد ۱۰ عبارتند از ۱، ۲، ۵، ۱۰ و میانه یک سری از داده ها همان چارک دوم است.		
۷	$(\sqrt{100 - 25} = 10 - 5) \wedge \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \neq \left(\frac{3}{2}\right)^4\right)$		
۸	مربع هر عدد حقیقی منفی، از خود آن عدد کوچک تر است و مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.		

۴۶. جدول زیر را کامل کنید.

(کتاب درسی)

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	عدد ۲۳ زوج یا اول است.		
۲	عدد ۵۸ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.		
۳	کسر $\frac{x^2}{ x -1}$ عبارتی گویا است یا ۸ عددی مرکب	✓	
۴	$(\sqrt{3} \in \mathbb{Z}) \vee ((-2)^4 \geq (-4)^2)$		
۵	اندازه قد افراد، متغیر کمی فاصله ای است یا ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست.		
۶	نمودارون  تابع نیست یا	✓	
۷	تجزیه شده عبارت $4x^2 - 4x + 1$ به صورت $(2x - 1)^2$ است یا	✓	
۸	معکوس هر عدد حقیقی مثبت، کوچک تر از خود آن عدد است یا مجموع هر عدد طبیعی زوج با هر عدد طبیعی فرد، عددی فرد است.		

● با استفاده از جدول ارزش گذاری، درستی یا نادرستی هم‌ارزی های زیر را بررسی کنید:

(کتاب درسی)

$(p \vee \sim p) \equiv F$. ۴۸

$(p \wedge \sim p) \equiv F$. ۴۷

(خرداد ۱۴۰۲)

$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$. ۵۰

$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$. ۴۹

$[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$. ۵۲ (شهریور ۱۴۰۲)

$[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$. ۵۱

$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$. ۵۴

$[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$. ۵۳

$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$. ۵۶

$[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$. ۵۵

$[p \wedge (\sim p \wedge \sim q)] \equiv F$. ۵۸

$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$. ۵۷

$[\sim(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)] \equiv p$. ۵۹

● بدون رسم جدول ارزش‌گذاری، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید.

۶۰. $\sim(\sim p) \vee \sim(\sim T) \equiv ?$

۶۱. $(\sim p \vee T) \wedge (F \wedge \sim p) \equiv ?$

۶۲. $\sim(p \vee \sim p) \wedge \sim(q \wedge \sim q) \equiv ?$

۶۳. اگر فرض کنیم که گزاره $p \wedge q$ گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره $p \vee (q \wedge r)$ را تعیین کنید.

۶۴. بدون رسم جدول، طرف دیگر هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید. (T گزاره همواره درست و F گزاره همواره نادرست است.)

$\sim p \wedge \sim F \equiv ?$ [i] $(p \wedge \sim p) \vee (q \vee T) \equiv ?$ [b]

۶۵. اگر ارزش گزاره $p \vee q$ نادرست و ارزش $\sim r$ درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p \wedge q) \vee r$ را تعیین کنید.

۶۶. اگر گزاره $p \vee (\sim q \vee p)$ نادرست باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$\sim p \vee (q \wedge r) \equiv ?$ [i] $\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r) \equiv ?$ [b]

● نقیض گزاره‌های زیر را به دست آورید سپس ارزش آن‌ها را تعیین کنید:

۶۷. ۱۳ مضرَب ۲ نیست و میانهٔ یک سری از داده‌ها همان چارک اول است.

۶۸. ۴ عدد مرکب است یا مسکو پایتخت روسیه نیست.

۶۹. $(-6 < -10) \wedge (\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subseteq \mathbb{R})$

۷۰. $(\frac{1}{8} \notin \mathbb{Z}) \vee (\sqrt{5} \neq 1)$

ترکیب شرطی و دو شرطی گزاره‌ها

صفحه ۶ تا ۱۱ کتاب درسی

بسته سوم



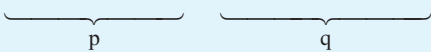
الف ترکیب شرطی

همان‌طور که از نام این گزاره برمی‌آید منظور از ترکیب شرطی دو گزاره p و q این است که از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم و این موضوع را به شکل $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دهیم. به p مقدم و به q تالی می‌گوییم. دقت کنید که به چند حالت مختلف، می‌توان گزاره $p \Rightarrow q$ را بیان کرد:

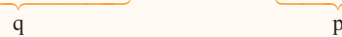
۱) نتیجه می‌دهد q را ۲) اگر p آن‌گاه q ۳) شرط کافی است برای q ۴) شرط لازم است برای p

سؤال گزاره شرطی مقابل را به حالت‌های مختلف، بیان کنید.

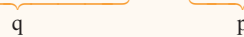
آن عدد بر ۲ بخش پذیر است. \Rightarrow اگر عددی، زوج باشد.



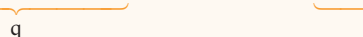
پاسخ ۱- زوج بودن هر عدد نتیجه می‌دهد بخش پذیر بودن آن عدد بر ۲ را.



۲- اگر عددی زوج باشد آن‌گاه آن عدد بر ۲ بخش پذیر است.



۳- زوج بودن هر عدد، شرط کافی است برای بخش پذیر بودن آن عدد بر ۲.



۴- بخش پذیر بودن هر عدد بر ۲ شرط لازم است برای زوج بودن آن عدد.



p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

جدول ارزش‌گذاری گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت روبه‌رو است:

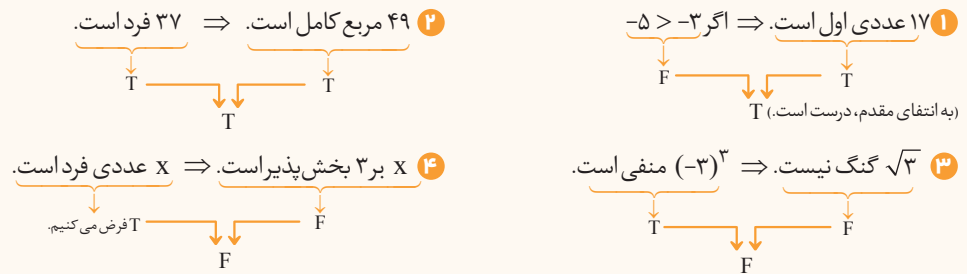
از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که $p \Rightarrow q$ فقط وقتی نادرست است که مقدم (p) درست و تالی (q) نادرست باشد. ضمناً در دو ردیف آخر جدول، می‌بینید با آن‌که مقدم (p) نادرست است، ارزش $p \Rightarrow q$ درست است. در این دو حالت اصطلاحاً می‌گوییم گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است.

یعنی در این دو حالت چون ارزش p نادرست است، ارزش q هر چه باشد مهم نیست و ارزش $p \Rightarrow q$ درست خواهد بود.

سؤال ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

- ۱ اگر $-3 > -5$ آن‌گاه ۱۷ عددی اول است.
- ۲ فرد بودن عدد ۳۷ نتیجه می‌دهد مربع کامل بودن عدد ۴۹ را.
- ۳ منفی بودن عدد $(-3)^3$ شرط کافی است برای گنگ نبودن عدد $\sqrt{3}$.
- ۴ بخش‌پذیر بودن x بر عدد ۳ شرط لازم است برای فرد بودن x (x عددی طبیعی است).

پاسخ برای راحتی کار، همه گزاره‌ها را به شکل $p \Rightarrow q$ می‌نویسیم و بررسی می‌کنیم:



تذکره دقت کنید در گزاره‌های شرطی، اگر مقدم و تالی به هم وابستگی داشته باشند، مقدم را درست فرض می‌کنیم و فقط درستی یا نادرستی تالی را بررسی می‌کنیم. در این سؤال، x هم در مقدم است و هم در تالی، پس « x عددی فرد است.» را درست فرض کردیم. حالا اگر x فرد باشد آیا x حتماً بر ۳ بخش‌پذیر است؟ جواب منفی است چون مثلاً ۵ بر ۳ بخش‌پذیر نیست. پس تالی نادرست است. پس کل گزاره هم نادرست خواهد بود.

نکته ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ با ارزش گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ برابر است. ضمناً به گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ می‌گوییم. حالا درستی

هم‌ارزی $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ را اثبات می‌کنیم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

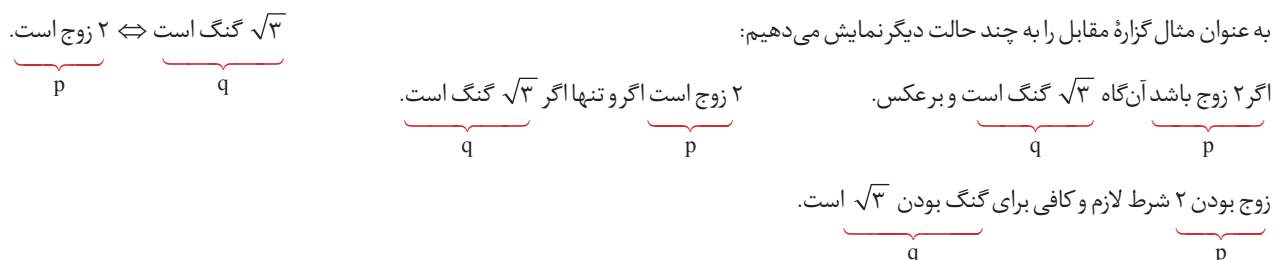
این دو ستون، یکسان شدند. پس هم‌ارزی، درست است.

ب ترکیب دو شرطی

اگر بخواهیم هم از p به q برسیم و هم از q به p ، یک ترکیب دو شرطی به صورت $p \Leftrightarrow q$ ایجاد می‌شود. در واقع می‌توان گفت گزاره $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز است با گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به چند حالت می‌توان بیان کرد که عبارتند از:

- ۱ اگر p آن‌گاه q و اگر q آن‌گاه p
- ۲ p اگر و تنها اگر q
- ۳ اگر p آن‌گاه q و برعکس.
- ۴ p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را.
- ۵ p شرط لازم و کافی است برای q
- ۶ q شرط لازم و کافی است برای p

به عنوان مثال گزاره مقابل را به چند حالت دیگر نمایش می‌دهیم:



جدول ارزش درستی گزاره $p \Leftrightarrow q$ و به صورت زیر است (در واقع $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را ارزش گذاری می‌کنیم):

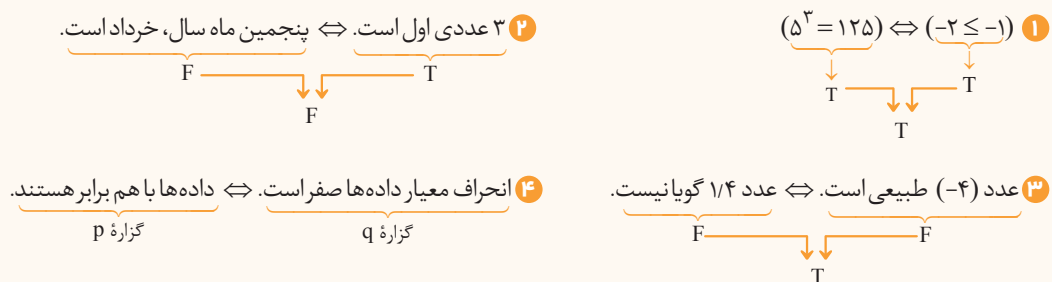
p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

نتیجه جدول ارزش گذاری: اگر p و q هم ارزش باشند (هر دو درست یا هر دو نادرست باشند) گزاره $p \Leftrightarrow q$ درست است.

سؤال درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

- $(-2 \leq -1) \Leftrightarrow (5^3 = 125)$
- اگر پنجمین ماه سال، خرداد باشد، آن‌گاه ۳ عددی اول است و بر عکس.
- گویا نبودن عدد $1/4$ شرط لازم و کافی است برای طبیعی بودن عدد -4 .
- اگر داده‌ها با هم مساوی باشند، آن‌گاه انحراف معیار آن‌ها صفر است و بر عکس.
- اگر دو عدد فرد باشند، آن‌گاه مجموع آن‌ها زوج است و بر عکس.

پاسخ برای راحتی حل، همه گزاره‌ها را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم. توجه کنید که $p \Leftrightarrow q$ وقتی درست است که p و q هم ارزش باشند:



الان دو گزاره p و q به هم وابسته هستند. چون گزاره، دو شرطی است باید ۲ حالت جداگانه برای بررسی ارزش آن، در نظر بگیریم و در هر حالت، مقدم را درست فرض می‌کنیم:

انحراف معیار آن‌ها صفر است. \Rightarrow اگر داده‌ها برابر باشند. **حالت اول**

T T

داده‌ها برابرند. \Rightarrow اگر انحراف معیار صفر باشد. **حالت دوم**

T T

ملاحظه می‌کنید که در هر دو حالت ۱ و ۲، تالی‌ها درست هستند پس کل گزاره $p \Leftrightarrow q$ درست است.

۵ باز هم دو گزاره p و q در $p \Leftrightarrow q$ به هم وابسته هستند، لذا مانند قسمت قبل عمل می‌کنیم:

مجموعشان زوج است. \Rightarrow اگر دو عدد فرد باشند **حالت اول**

T T

آن دو عدد فرد هستند. \Rightarrow اگر مجموع دو عدد زوج باشد **حالت دوم**

T F

در هر ۲ حالت، مقدم‌ها را درست فرض کرده و فقط تالی‌ها را بررسی کرده‌ایم. یکی از تالی‌ها نادرست شد پس کل گزاره $p \Leftrightarrow q$ نادرست است. دقت دارید که ممکن است مجموع دو عدد زوج باشد، ولی آن دو عدد فرد نباشند؛ مثلاً مجموع دو عدد ۲ و ۴ زوج است، ولی خود ۲ و ۴ فرد نیستند.

سؤال ۱ اگر گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست باشد و گزاره $r \wedge s$ درست باشد، ارزش گزاره $(\sim r \Leftrightarrow p) \wedge (\sim q \Rightarrow s)$ را بدون رسم جدول تعیین کنید.

۲ جدول ارزش درستی گزاره مقابل را رسم کنید. $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow p)$

پاسخ ۱ چون ارزش $p \Rightarrow q$ نادرست است، پس p درست و q نادرست است، از طرفی ارزش $r \wedge s$ درست است، پس هم r درست است و هم s ، لذا:

$$[(\sim r \Leftrightarrow p) \wedge (\sim q \Rightarrow s)] \equiv [(\sim T \Leftrightarrow T) \wedge (\sim F \Rightarrow T)] \equiv [(F \Leftrightarrow T) \wedge (T \Rightarrow T)] \equiv F$$

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim q \Leftrightarrow p$	$(p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow p)$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د

ترکیب شرطی و دوشروطی گزاره‌ها

پریش‌های تشریحی

بسته
۳

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۷۱. ارزش گزاره «اگر ۳ عددی اول باشد، آن‌گاه ۸ عددی فرد است» نادرست می‌باشد. (شهریور ۱۴۰۲)

۷۲. گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که گزاره p درست و گزاره q نادرست باشد.

۷۳. ارزش گزاره «اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد، آن‌گاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس» نادرست است. (خرداد ۱۴۰۲)

۷۴. ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است. (خرداد ۱۴۰۳)

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۷۵. در ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » اگر p نادرست باشد، گزاره شرطی دارای ارزش درست است.

۷۶. اگر گزاره « $p \Rightarrow q$ » را به گزاره فصلی تبدیل کنیم با گزاره هم‌ارز خواهد بود.

۷۷. ارزش گزاره « $p \Rightarrow T$ » همواره می‌باشد.

۷۸. گزاره‌ای که به صورت «اگر p آن‌گاه q و برعکس» بیان می‌شود دارای ترکیب است. (خرداد ۱۴۰۳)

گزینه درست را انتخاب کنید.

۷۹. برای آن‌که گزاره « $T \Rightarrow P$ » ارزش درست داشته باشد، گزاره P کدام می‌تواند باشد؟ (T یعنی درست)

(۱) ۳ عددی اول نیست. (۲) $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{R}$ (۳) ۱۱۰ مربع کامل است. (۴) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Z}$

۸۰. نقیض گزاره « $p \Rightarrow q$ » کدام است؟

(۱) $p \wedge \sim q$ (۲) $p \wedge q$ (۳) $\sim p \Rightarrow \sim q$ (۴) $\sim q \Rightarrow \sim p$

۸۱. اگر گزاره دو شرطی « $\sim p \Leftrightarrow q$ » درست باشد، می‌توان گفت:

(۱) p و q هر دو درست هستند. (۲) p و q هر دو نادرست هستند.

(۳) p و q هم‌ارز نیستند. (۴) p درست و q نادرست است.

۸۲. جدول هم‌ارزی زیر را کامل کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$

۸۳. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره زیر را مشخص کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

$(q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۸۴. اگر گزاره « $p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ » نادرست باشد، ارزش گزاره « $\sim p \vee q$ » را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

(خرداد ۱۴۰۲)

۸۵. درستی هم‌ارزی زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید.

$$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$

(خرداد ۱۴۰۲)

۸۶. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزاره مرکب زیر را مشخص کنید.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

(خرداد ۱۴۰۳)

۸۷. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$ را مشخص کنید.

(خرداد ۱۴۰۳)

۸۸. با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هم‌ارزی $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ را نشان دهید.

(کتاب درسی)

۸۹. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	اگر ۶۳ مضرب ۷ باشد، آن‌گاه ۱ عددی اول است.		
۲	اگر ۸۰ مربع کامل باشد، آن‌گاه $\frac{2}{3} > \frac{5}{6}$ و برعکس.		
۳	اگر x عددی فرد باشد، آن‌گاه x^2 هم عددی فرد است.		
۴	اگر $f = \{(1, 3x), (5, 2), (1, 9)\}$ تابع باشد، آن‌گاه مقدار x برابر ۴ است.		
۵	$[(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}) \vee (\emptyset \not\subseteq \mathbb{N})] \Leftrightarrow \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$		
۶	اول بودن عدد ۵۰ شرط لازم و کافی است برای گویا بودن عدد $2/5$		
۷	طبیعی بودن عدد ۱۰ شرط لازم است برای بخش‌پذیری ۱۲۳ بر عدد ۳		
۸	اگر a عددی زوج باشد، آن‌گاه $(a+1)$ عددی فرد است و برعکس.		
۹	اگر عبارت $\frac{5x^2}{3x-1}$ گویا باشد و ۲۵ مربع کامل باشد، آن‌گاه مدت زمان صحبت با تلفن، متغیر کمتی فاصله‌ای است.		
۱۰	اگر ۲ مقسوم‌علیه ۱۸ آن‌گاه حافظ، فیزیک‌دان است.	✓	
۱۱	۳۳ $5^2 \Rightarrow$ اگر $\sqrt{100}$ مربع کامل نباشد		✓
۱۲	اگر دو عدد، اول باشند آن‌گاه مجموع آن‌ها نیز عددی اول است و برعکس.		
۱۳	اگر عدد ۱۲۰ مرکب آن‌گاه نمودار خط $y = 2$ افقی است و برعکس.	✓	
۱۴	اگر  تابع باشد، آن‌گاه $(\sqrt{5})^2$ عددی گنگ و برعکس.		✓

(کتاب درسی)

● با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، درستی یا نادرستی هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید.

$$(p \Rightarrow q) \vee (\sim q \wedge p) \equiv T \quad . ۹۱$$

$$(p \Rightarrow \sim p) \equiv F \quad . ۹۰$$

$$(\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow q) \quad . ۹۳$$

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \quad . ۹۲$$

$$[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim p)] \equiv F \quad . ۹۵$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow q \equiv F \quad . ۹۴$$

(ویژه علاقه‌مندان)

۹۶. اگر p، q و r سه گزاره دلخواه باشند، جدول ارزش‌گذاری گزاره‌های زیر را رسم کنید.

$$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r \quad \boxed{1}$$

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [r \vee (q \Rightarrow r)] \quad \boxed{2}$$

۹۷. اگر ارزش $p \Rightarrow q$ نادرست باشد و ارزش $r \vee \sim s$ هم نادرست باشد، ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \sim$ را بدون رسم جدول تعیین کنید.

۹۸. اگر گزاره q نادرست باشد و گزاره $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee r)$ درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow$ را تعیین کنید. (بدون رسم جدول)

۹۹. اگر گزاره $(p \wedge r) \Rightarrow q$ نادرست باشد، ارزش گزاره $(\sim r \Rightarrow p) \wedge (\sim p \vee q) \sim$ را تعیین کنید. (بدون رسم جدول)

● اگر p گزاره‌ای نادرست، q گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، بدون رسم جدول، جواب هم‌ارزی‌های زیر را بنویسید.

$$r \wedge (p \Leftrightarrow q) \equiv ? \quad ۱۰۰$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p) \equiv ? \quad ۱۰۲$$

$$\sim(p \vee r) \Leftrightarrow (\sim q \wedge r) \equiv ? \quad ۱۰۴$$

$$(\sim p \vee q) \Rightarrow r \equiv ? \quad ۱۰۷$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv ? \quad ۱۰۶$$

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow q \equiv ? \quad ۱۰۸$$

● اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را بنویسید.

(کتاب درسی)

استدلال‌های ریاضی

صفحه ۱۲ تا ۲۰ کتاب درسی

بسته چهارم



الف استدلال‌های ریاضی

در این بخش می‌خواهیم با چند استدلال معروف در ریاضی آشنا شویم. قبل از آن‌که وارد این بحث شویم باید نحوه تبدیل گزاره فارسی به یک نماد ریاضی را یاد بگیریم. البته در سال گذشته و در مبحث معادلات و کاربرد آن‌ها تا حدودی با این کار آشنا شده‌اید. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم گزاره فارسی «اگر عددی طبیعی باشد آن‌گاه مربع آن، مثبت است.» را به شکل ریاضی بنویسیم. آن عدد را مثلاً x می‌نامیم و این‌طور می‌نویسیم:

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^2 > 0$$

دقت کنید که در این بخش، هدف، ارزش‌گذاری گزاره‌ها نیست بلکه می‌خواهیم روش‌های درست استدلال کردن را یاد بگیریم.

سؤال عبارتهای فارسی زیر را به نمادهای ریاضی تبدیل کنید.

۱ نصف عددی صحیح برابر است با ۴ برابر مکعب آن عدد.

۲ درصد قیمت فروش کتاب، برابر با سود حاصل از فروش است.

۳ معکوس مجموع دو عدد حقیقی، بزرگ‌تر از مجموع معکوس تک‌تک آن اعداد است.

پاسخ ۱ آن عدد را x فرض می‌کنیم، نصف آن، برابر می‌شود با $\frac{x}{2}$ و چهار برابر مکعب آن، برابر می‌شود با $4x^3$ ، لذا:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x}{2} = 4x^3$$

۲ قیمت خرید و قیمت فروش را به ترتیب x و y می‌نامیم. از سال قبل می‌دانید که $(y - x)$ سود است، لذا:

$$y - x = \frac{2}{100} y$$

۳ دو عدد مورد نظر را x و y می‌نامیم معکوس تک‌تک آن‌ها برابر می‌شوند با $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ ، پس مجموع معکوس تک‌تک آن‌ها برابر می‌شود با $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ، از

طرفی معکوس مجموع آن‌ها برابر با $\frac{1}{x+y}$ است، لذا:

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{x+y} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

ب استدلال استثنایی

یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین استدلال‌ها است و نام دیگر آن، قیاس استثنایی می‌باشد. این استدلال را به شکل‌های زیر می‌توان نمایش داد که همگی یکسان هستند و هیچ فرقی با هم ندارند.

مقدمه ۱: $p \Rightarrow q$

مقدمه ۲: p

$\therefore q$

مقدمه ۱: اگر p آن‌گاه q

مقدمه ۲: p

$\therefore q$

(. .) به معنای نتیجه است و کار فلش را انجام می‌دهد.

ضمناً خلاصه شده استدلال استثنایی به صورت $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ می باشد. این روش استدلال، همیشه درست است. اگر جدول ارزش درستی این

نتیجه نهایی مقدمه ۲ مقدمه ۱

گزاره را رسم کنیم، در ستون آخر جدول، فقط T مشاهده می کنیم، پس نتیجه این استدلال، همواره درست است. (به تمرینات مراجعه کنید).
به عنوان مثال استدلال زیر، استثنایی است:

مقدمه ۱: اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آن گاه ماه کامل است.
 $\underbrace{\hspace{10em}}_p$ $\underbrace{\hspace{10em}}_q$
 مقدمه ۲: امشب، شب چهاردهم ماه است.
 $\underbrace{\hspace{10em}}_p$
 نتیجه: امشب، ماه کامل است.
 $\underbrace{\hspace{10em}}_q$

سؤال با توجه به این که استدلال مقابل، استثنایی است، جای خالی را پر کنید.

$(n^2 + 3)$ فرد است \Rightarrow اگر n^2 زوج باشد.

4^2 زوج است.

∴

پاسخ طبق استدلال استثنایی، نتیجه همان q است پس در جای خالی باید گزاره $(4^2 + 3)$ فرد است را قرار دهیم.
۱۹

ج مغالطه یا سفسطه

شکل کلی این استدلال به صورت مقابل است:

مقدمه (۱) $p \Rightarrow q$

مقدمه (۲) q

∴ p

این روش استدلال، به طور کلی نادرست است؛ البته نتیجه حاصل از مغالطه، گاهی درست است ولی کتاب درسی، این روش استدلال کردن را نادرست دانسته است. به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۱ مقدمه (۱): اگر به تمام سؤالات امتحان پاسخ درست داده شود، آن گاه نمره آن امتحان ۲۰ می باشد.

مقدمه (۲): نمره علی در درس فارسی ۲۰ شده است.

∴ علی به تمام سؤالات فارسی، درست جواب داده است.

مثال ۲ مقدمه (۱): اگر راننده موقع رانندگی خوابش ببرد، آن گاه تصادف می کند.

مقدمه (۲): راننده اتوبوس تصادف کرد.

∴ راننده اتوبوس موقع رانندگی خوابش برده است.

به نظر شما فرق دو مثال (۱) و (۲) چیست؟ در مثال (۱)، نتیجه نهایی درست است، ولی در مثال (۲) نمی توان گفت نتیجه، حتماً درست است. چون ممکن است علت تصادف، سرعت یا سبقت غیر مجاز یا ... باشد ولی احتمال درست بودن نتیجه هم وجود دارد پس روش به کار رفته در مغالطه نادرست است، ولی نتیجه آن باید بررسی شود.

سؤال آیا روش به کار رفته در استدلال زیر درست است؟ نتیجه آن چطور؟

مقدمه ۱: اگر تولید میوه کاهش یابد، آن گاه میوه گران می شود.

مقدمه ۲: میوه گران شد.

∴ تولید میوه کاهش یافته است.

پاسخ استدلال، مغالطه است پس روش آن نادرست است. ولی نتیجه آن باید بررسی شود. گرانی میوه شاید علت دیگری به جز کاهش تولید هم داشته باشد، پس نمی توان گفت که نتیجه حتماً درست است.

د عکس نقیض یک گزاره شرطی

در ریاضی، گاهی اثبات گزاره $p \Rightarrow q$ دشوار است. در این گونه مواقع کافی است گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ را اثبات کنیم که عکس نقیض $p \Rightarrow q$ است. علت این است که این دو گزاره، هم‌ارز هستند و ارزش یکسانی دارند. البته در امتحانات مدرسه، در صورت سؤال گفته می‌شود که از روش عکس نقیض استفاده کنید.

سؤال گزاره مقابل را به کمک عکس نقیض، اثبات کنید. $(n \in \mathbb{Z})$ n زوج است. \Rightarrow n^2 زوج است. **مثال ۳ صفحه ۱۶ کتاب درسی**

پاسخ اگر بخواهیم از زوج بودن n^2 ، به زوج بودن n برسیم کاری بسیار دشوار است، پس عکس نقیض این گزاره را اثبات می‌کنیم:

$\sim q \Rightarrow \sim p$
 n^2 فرد است. \Rightarrow n فرد است.
 می‌دانیم در ریاضی اعداد زوج را با $2k$ و اعداد فرد را با $2k-1$ یا $2k+1$ نمایش می‌دهیم ($k \in \mathbb{Z}$) لذا:
 $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$
 پس ثابت کردیم که n^2 عددی فرد است. (m نیز عدد صحیح است). همیشه داخل پرانتز را m بنامید همیشه از ۲ فاکتور بگیرید

ه پیدا کردن خطا در محاسبات و اصلاح آن‌ها

برای پیدا کردن خطا در یک مسئله، باید به چند نکته توجه داشت:

نکته ۱ دو طرف یک معادله را نمی‌توانیم در یک مجهول ضرب یا بر یک مجهول تقسیم کنیم، مگر آن‌که بدانیم آن مجهول، صفر نیست. مثلاً دو طرف معادله $x(x-1) = x$ را نمی‌توان بر x تقسیم کرد، چون ممکن است x صفر باشد. پس معادله ذکر شده را به صورت مقابل حل می‌کنیم:

$$x(x-1) = x \xrightarrow{\text{را به سمت چپ می‌بریم}} x(x-1) - x = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از } x \text{ فاکتور می‌گیریم}} x(x-1-1) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

نکته ۲ اگر دو طرف یک نامعادله را در یک عدد مثبت ضرب یا بر یک عدد مثبت تقسیم کنیم، جهت نامعادله عوض نمی‌شود؛ ولی اگر در یک عدد منفی ضرب یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامعادله عوض می‌شود. مثلاً:

$$\begin{cases} a < b \xrightarrow{\times 3} 3a < 3b \\ a < b \xrightarrow{\times (-3)} -3a > -3b \end{cases}$$

ولی رابطه مقابل، نادرست است: $a < b \Rightarrow ka < kb$ چون در مورد علامت k چیزی گفته نشده است.

نکته ۳ اگر در صورت و مخرج یک کسر، اعداد جمع و تفریق شده باشند، نمی‌توانیم قسمتی از آن‌ها را با هم ساده کنیم. مثلاً در کسر $\frac{x+y}{3x}$ نمی‌توانیم x ها را از صورت و مخرج ساده کنیم و به $\frac{y}{3}$ برسیم.

سؤال ۱ دانش‌آموزی با راه حل زیر، ادعا می‌کند که معادله $x^2 - 5x = 0$ فقط دارای یک ریشه است و آن ریشه $x = 5$ است. اشتباه او کجاست؟

مشابه مثال ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی

معادله اصلی: $x^2 - 5x = 0$
 مرحله ۱: $x(x-5) = 0$: فاکتورگیری از x
 مرحله ۲: $\frac{x(x-5)}{x} = \frac{0}{x}$: تقسیم دو طرف بر x و ساده‌سازی:
 مرحله ۳: $x - 5 = 0$: رسیدن به معادله ساده‌تر:
 مرحله ۴: $x = 5$: جواب معادله:
 دانش‌آموزی گزاره « $a < b \Rightarrow ac < bc$ » را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی‌اند، به صورت زیر ثابت کرده. ایراد این استدلال را پیدا کنید.

مثال ۲ صفحه ۱۶ کتاب درسی

فرض سؤال: $a < b$
 مرحله ۱: $a + c < b + c$: جمع دو طرف با c
 مرحله ۲: $c(a+c) < c(b+c)$: ضرب دو طرف در c
 مرحله ۳: $ac + c^2 < bc + c^2$: حذف c^2 از دو طرف:
 مرحله ۴: $ac < bc$: ضرب c در پرانتزها:

پاسخ ۱ او در مرحله دوم اشتباه کرده، چون نمی‌توانیم دو طرف یک تساوی را بر مجهول تقسیم کنیم. مگر این‌که در فرض سؤال، گفته شود که $x \neq 0$ است.
نکته ۲ اشتباه او در مرحله دوم است، چون علامت c را نمی‌دانیم پس نمی‌توانیم دو طرف نامعادله را در c ضرب کنیم. (اگر در فرض سؤال گفته می‌شد $c > 0$ است، استدلال او کاملاً درست بود.)

● **درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.**

۱۱۰. نتیجه استدلال مغالطه، همیشه نادرست است.

۱۱۱. نتیجه استدلال استثنایی، همیشه درست است.

۱۱۲. روش به کاررفته در مغالطه، درست است.

● **جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.**

۱۱۵. عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ برابر با می باشد.

۱۱۶. عدد $\sqrt{2}$ را از صورت و مخرج کسر $\frac{100 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ساده کرد. (می توان - نمی توان)

۱۱۷. گزاره مربوط به استدلال استثنایی برابر با می باشد.

۱۱۸. گزاره مربوط به استدلال مغالطه برابر با می باشد.

● **گزینه درست را انتخاب کنید.**

۱۱۹. کدام گزاره هم‌ارز گزاره $p \Rightarrow q$ است؟

۱) $\sim p \Rightarrow \sim q$ ۲) $p \Leftrightarrow \sim q$ ۳) $\sim q \Rightarrow \sim p$ ۴) $p \Leftrightarrow q$

(خرداد ۱۴۰۲)

۱۲۰. نماد ریاضی عبارت «دو برابر تفاضل دو عدد از ۱۵ بزرگتر است» کدام است؟

۱) $2(x - y) < 15$ ۲) $2x - y < 15$ ۳) $2(x - y) > 15$ ۴) $2x - y > 15$

(شهریور ۱۴۰۲)

۱۲۱. نتیجه استدلال مقابل چگونه است؟

$x > y \Rightarrow x^5 > y^5$
 $\frac{(-8)^5 > (-10)^5}{\therefore -8 > -10}$

۱) همواره درست
۲) همواره نادرست
۳) ممکن است درست باشد.
۴) قابل ارزش‌گذاری نیست.

(شهریور ۱۴۰۲)

۱۲۲. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

Ⓐ عبارت «مجموع معکوس‌های دو عدد، بزرگتر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.» را با نماد ریاضی بازنویسی کنید.
Ⓑ عکس نقیض گزاره «اگر دو خط موازی نباشند، آن‌گاه همدیگر را قطع می‌کنند» را به فارسی بنویسید.

۱۲۳. استدلال زیر در کدام مرحله **نادرست** است؟ دلیل نادرستی آن را بنویسید.

۱) $x^2 - x = 0$ ۲) $x(x - 1) = 0$ ۳) $\frac{x(x - 1)}{x} = \frac{0}{x}$ ۴) $x - 1 = 0$ ۵) $x = 1$

(خرداد ۱۴۰۲)

۱۲۴. نام استدلال زیر چیست؟ درستی یا نادرستی آن را بررسی کنید.

آرش معتقد است که «هرکسی مرا دوست دارد عیوب مرا به من می‌گوید. از طرفی سعید عیوب مرا به من گفته است، پس سعید مرا دوست دارد»

(خرداد ۱۴۰۲)

۱۲۵. عکس و نقیض گزاره زیر را بنویسید و آن را ثابت کنید.

«اگر n^2 زوج باشد، آن‌گاه n زوج است. ($n \in \mathbb{Z}$)»

(شهریور ۱۴۰۲)

۱۲۶. با استدلال قیاس استثنایی، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

مقدمه ۱: اگر شخصی در آزمون سطح یک زبان، نمره بالاتر از ۶۰ بگیرد، آن‌گاه در کلاس سطح ۲ زبان می‌تواند ثبت نام کند.
مقدمه ۲: علی در آزمون سطح یک زبان نمره بالای ۶۰ گرفته است.

نتیجه:

۱۲۷. استدلال زیر در کدام مرحله **نادرست** است؟ دلیل نادرستی آن را بنویسید.

۱) $\frac{3x + 4}{3x + 2} = 2x$ ۲) $\frac{4}{2} = 2x$ ۳) $4x = 4$ ۴) $x = 1$

(شهریور ۱۴۰۲)

● **گزاره‌های فارسی زیر را به صورت نماد ریاضی بنویسید.**

۱۲۸. سه برابر جذر عددی برابر خود آن عدد است.

(مشابه خرداد ۱۴۰۲)

۱۲۹. مکعب یک عدد، کوچک‌تر از ده برابر آن عدد، به علاوه چهار است.

۱۳۰. مجموع معکوس‌های دو عدد طبیعی، کوچک‌تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

(خرداد ۱۴۰۲)

۱۳۱. مجموع مکعبات دو عدد حقیقی، بزرگ‌تر یا مساوی با مکعب مجموع آن دو عدد است.

(خرداد ۱۴۰۲)

۱۳۲. هر عدد حقیقی ناصفری (غیر صفری) از معکوس خود، بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

۱۳۳. نصف مربع عددی از $\frac{1}{9}$ آن عدد، پنج واحد بیش‌تر است.

۱۳۴. مربع مجموع دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی مجموع مربعات آن دو عدد است.

۱۳۵. حاصل ضرب عددی در نصف خودش، به علاوه سه، بزرگ‌تر از خود آن عدد منهای یک است.

۱۳۶. حاصل ضرب عددی در نصف خودش به علاوه سه، بزرگ‌تر از خود آن عدد منهای یک است.

۴
بخش



پاسخنامه

گزاره p	ارزش p	گزاره ~p	ارزش ~p
مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک تر نیست.	د	مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک تر است.	ن
معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ دوریشه حقیقی متمایز دارد.	د چون دلتای معادله مثبت است.	معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ دوریشه حقیقی متمایز ندارد.	ن
$2^2 \times (\frac{3}{5})^\circ \neq 0$	د دقت کنید که $(\frac{3}{5})^\circ$ برابر با ۱ می شود	$2^2 \times (\frac{3}{5})^\circ = 0$	ن

۱۲ گزاره است و ارزش نادرست دارد؛ چون x زیر رادیکال است و لذا عبارت مذکور، گویا محسوب نمی شود.

۱۳ گزاره است و ارزش آن نادرست است، مثلاً عدد طبیعی ۲ از عدد صحیح ۳ کوچک تر است.

۱۴ گزاره نیست (جمله پرسشی است).

۱۵ گزاره درست است؛ زیرا می دانیم دامنه تابع، شامل عضوهای اول زوج مرتب ها می باشد.

۱۶ گزاره نادرست است کوچک ترین عدد اول طبیعی، عدد ۲ است نه ۱.

۱۷ گزاره درست است (نسبت تعداد دندان های خراب هر دوفرد، با معنی است).

۱۸ گزاره درست است (عضوهای اول زوج مرتب ها متفاوت اند، پس تابع است).

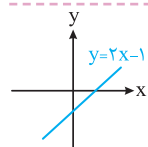
۱۹ گزاره نادرست است؛ چون اگر n زوج باشد حاصل $(-2)^n$ عددی مثبت می شود. مثلاً $(-2)^2 = +4$

۲۰ گزاره نیست (جمله امری است).

۲۱ گزاره نیست (جمله خبری است، ولی قابل ارزش گذاری نیست).

۲۲ گزاره نادرست است؛ زیرا می دانیم که $-\frac{1}{4} < -\frac{3}{5}$ است.

۲۳ گزاره درست است (اتحاد مربع دوجمله ای است).



۲۴ گزاره نادرست است؛ زیرا نمودار این خط از نواحی اول، سوم و چهارم می گذرد؛ پس فقط از ناحیه دوم نمی گذرد. (مطابق شکل)

۲۵ گزاره درست است؛ چون هر خط عمودی دلخواه، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

۱ نادرست؛ چون جمله داده شده، سلیقه ای است و قابل ارزش گذاری نیست.

۲ درست؛ جمله داده شده، قابل ارزش گذاری است، یعنی بالآخره ۱۲ یا اول هست یا نیست.

۳ نادرست؛ نقیض گزاره « $3 < \frac{1}{4}$ » برابر است با « $3 \geq \frac{1}{4}$ » البته جواب « $3 < \frac{1}{4}$ » هم قابل قبول است.

۴ P

۵؛ زیرا تعداد حالت های ارزشی n گزاره برابر 2^n است لذا: $2^3 = 8$

۶؛ زیرا داریم: $2^n = 2^4 = 16$

۷ گزینه «۳» زیرا: $2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5$

۸ گزینه «۴»؛ جملات مطرح شده در سایر گزینه ها قابل ارزش گذاری نیستند پس گزاره محسوب نمی شوند.

۹ گزینه «۴»؛ معادله $x^2 - 3 = 0$ دو ریشه گنگ دارد:

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

وزن افراد، متغیر کمی نسبتی است. نمودار حبابی، ۳ متغیر کمی اصلی را نشان می دهد. عبارت $x^2 - 10x + 9$ به کمک اتحاد جمله مشترک قابل تجزیه است: $x^2 - 10x + 9 = (x - 9)(x - 1)$

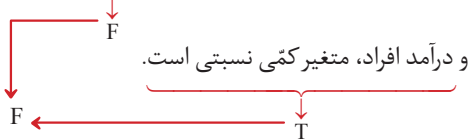
۱۰ گزینه «۴»؛ گزاره داده شده به زبان فارسی برابر است با: «مجموع اعداد حقیقی x و y برابر با ۱ است.» برای نقیض کردن آن، چند روش وجود دارد، یکی این که کلمه «است» در جمله فارسی داده شده را به «نیست» تبدیل کنیم پس گزینه (۱) مشکلی ندارد، یا می توانیم به ابتدای گزاره داده شده، عبارت «چنین نیست که» اضافه کنیم پس عبارت گزینه (۲) هم به درستی نوشته شده است. ضمناً نقیض « $=$ » برابر با « \neq » است پس عبارت (۳) هم مشکلی ندارد.

۱۱

گزاره p	ارزش p	گزاره ~p	ارزش ~p
$2^5 \times 2^8 = 2^{12}$	ن چون $2^5 \times 2^8 = 2^{13}$	$2^5 \times 2^8 \neq 2^{12}$	د
$120 < -1200$	ن	$+120 \geq -1200$	د
میانۀ داده های ۱, ۲, ۳, ۴	د	میانۀ داده های ۱, ۲, ۳, ۴	ن
$\frac{2}{5}$ است.	د	$\frac{2}{5}$ نیست.	ن

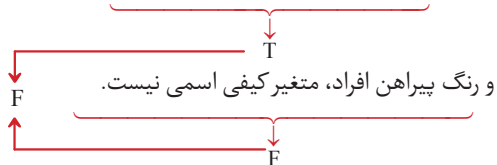
۴۴ | گزاره عطفی ردیف ۱ درست است. پس در جای خالی باید یک گزاره درست دلخواه قرار دهیم مثل این گزاره: «هر سال ۴ فصل دارد» گزاره فصلی ردیف ۲ نادرست است پس در جای خالی باید یک گزاره نادرست دلخواه قرار دهیم مثل این گزاره: « $\sqrt{2}$ عددی گویا است.»

۴۵ | ردیف ۱: در تابع $f(x) = x^2 - 5x$ متغیر مستقل $f(x)$ است



توجه کنید که در تابع ذکر شده، x متغیر مستقل و $f(x)$ متغیر وابسته است.

ردیف ۲: حاصل $(-5)^4$ عددی منفی نیست



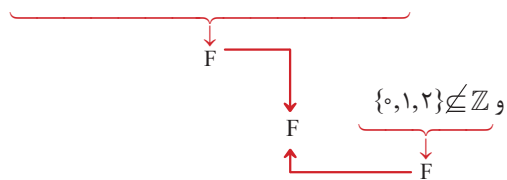
ردیف ۳: ۱۸ مضرب ۹ است و ۲ عددی فرد است.



ردیف ۴: ۲ عددی اول است و شیب هر خط عمودی، تعریف نشده است.



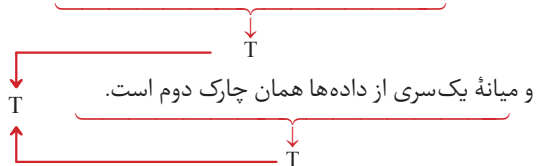
ردیف ۵: طول رأس سهمی $y = x^2 - 4x + 1$ برابر ۲- است



یادآوری | طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ است.

بنابراین داریم: $x = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$

ردیف ۶: مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۰ عبارتند از ۱، ۲، ۵، ۱۰



ردیف ۷: $(\sqrt{100} - 25 = 10 - 5) \wedge \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \neq \left(\frac{3}{2}\right)^4 \right)$



۲۶ | می‌دانیم ۹ جذر کامل دارد ($\sqrt{9} = 3$) پس ارزش گزاره داده شده، درست است و نقیض این گزاره هم برابر است با: «عدد ۹ مربع کامل نیست.»

۲۷ | (۲۴ عددی مرکب نیست.) \equiv (۲۴ عددی مرکب است.) ~

۲۸ | $\sim(\sqrt{25+9} \neq 5+3) \equiv (\sqrt{25+9} = 5+3)$

۲۹ | $\sim(-12 \leq -8) \equiv (-12 > -8)$

۳۰ | $\sim(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}) \equiv (\sqrt{3} \in \mathbb{Q})$

۳۱ | $\sim[\sim(2^4 \leq 4^2)] \equiv (2^4 \leq 4^2)$

۳۲ | تعداد ردیف‌های جدول $2^n = 2^7 = 128$

۳۳ | اگر n تعداد گزاره‌ها باشد، خواهیم داشت:

۵۱۲ را تجزیه می‌کنیم $2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$

درست ۳۴

درست ۳۵

۳۶ | نادرست؛ زیرا: $[(p \wedge T) \vee (q \vee F)] \equiv p \vee q$

۳۷ | $p \wedge q \sim$ زیرا طبق خاصیت دموگن داریم:

$\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge q$

فصلی ۳۸

درست ۳۹

گزینه «۲» ۴۰

گزینه «۳» ۴۱

گزینه «۲» ۴۲

ارزش کل گزاره عطفی درست است. پس باید در جای خالی هم گزاره‌ای با ارزش درست قرار دهیم. مجموع دو عدد گنگ ممکن است گویا باشد مثلاً:

$(1 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 3) = 4$
گنگ گنگ گویا

۴۳ | گزینه ۳؛ حاصل $\sim(p \wedge q)$ طبق قانون دموگن برابر با $(\sim p \vee \sim q)$ می‌شود و نیازی به رسم جدول نیست (مگر اینکه فرمول دموگن رو حفظ نباشین که در این صورت میبورد هستین برای تک تک گزینه‌ها جدول رسم کنید).

۴۷ | هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

p	~p	p ∧ ~p
د	ن	ن
ن	د	ن

۴۸ | هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

p	~p	p ∨ ~p
د	ن	د
ن	د	د

۴۹ | سمت راست هم‌ارزی
سمت چپ هم‌ارزی

p	q	~p	~q	p ∨ q	~(p ∨ q)	~p ∧ ~q
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

پس هم‌ارزی داده‌شده درست است. ضمناً به این هم‌ارزی، قانون دمورگان می‌گوییم.

۵۰ | سمت راست هم‌ارزی
سمت چپ هم‌ارزی

p	q	~p	~q	p ∧ q	~(p ∧ q)	~p ∨ ~q
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د

پس هم‌ارزی داده‌شده درست است. به این هم‌ارزی هم، دمورگان می‌گوییم.

۵۱

p	q	p ∨ q	p ∧ (p ∨ q)
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

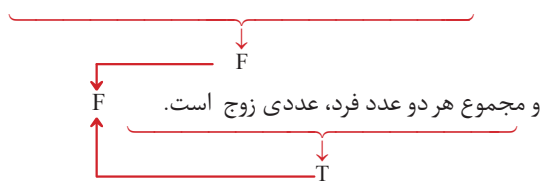
این دو ستون، یکسان هستند پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

۵۲ | سمت راست هم‌ارزی
سمت چپ هم‌ارزی

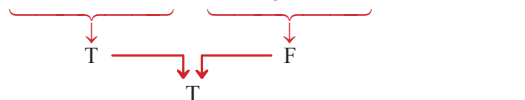
p	q	~p	~p ∧ q	p ∨ (~p ∧ q)	p ∨ q
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	ن

هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

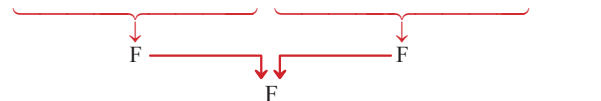
ردیف ۸: مربع هر عدد منفی، از خود آن عدد کوچک‌تر است



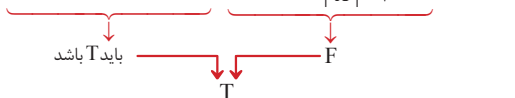
۴۶ | ردیف ۱: عدد ۲۳ زوج است یا ۲۳ عدد اول است.



ردیف ۲: عدد ۵۸ بر ۳ بخش پذیر است یا عدد ۵۸ بر ۵ بخش پذیر است.



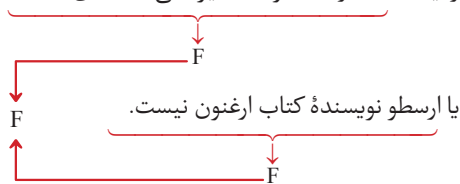
ردیف ۳: کسر $\frac{x^2}{|x|-1}$ گویا است یا ۸۰ عددی مرکب است.



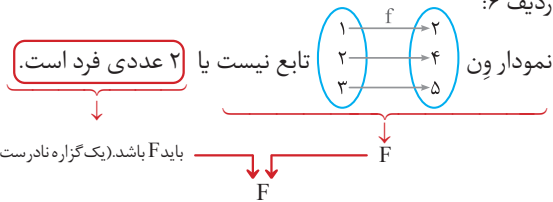
ردیف ۴: $(\sqrt{3} \in \mathbb{Z}) \vee ((-2)^4 \geq (-4)^2)$



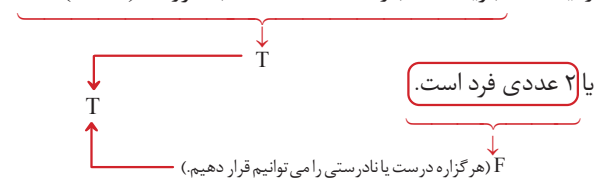
ردیف ۵: اندازه قد افراد، متغیر کمی فاصله‌ای است



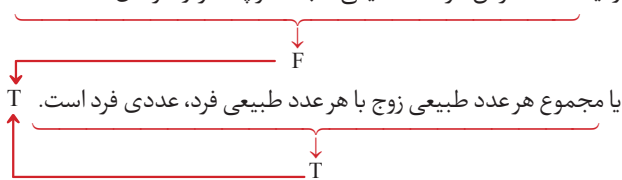
ردیف ۶:



ردیف ۷: تجزیه شده عبارت $4x^2 - 4x + 1$ به صورت $(2x-1)^2$ است



ردیف ۸: معکوس هر عدد حقیقی مثبت، کوچک‌تر از خود آن عدد است



دقت کنید که معکوس عدد $\frac{1}{5}$ می‌شود ۵ که از خود $\frac{1}{5}$ بزرگ‌تر است، پس گزاره اول نادرست است.

وحدان و عددها
و «موضوعات»
و «موضوعات»
و «موضوعات»

گاج

ه

پاسخ
نمونه‌های
کتاب
درسی

ریاضی و آمار ۲

فرمول
بیست

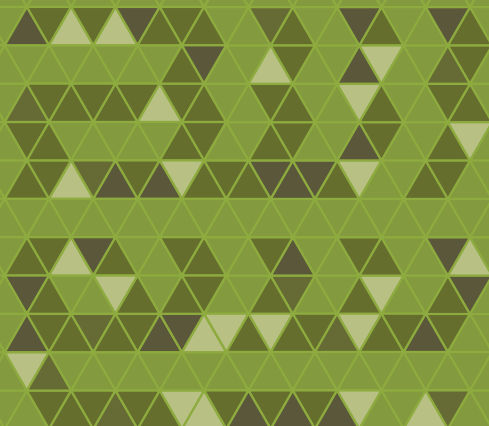
مادیه
رایگان

فرمول پست

در این کتابچه،
«تمرین‌های» کتاب درسی
را به طور کامل پاسخ
داده‌ایم.
از آن جایی که تقریباً
بیش از نیمی از سؤالات
امتحانات نهایی مشابه
تمرینات کتاب درسی
طراحی می‌شوند مرور
مطالب این کتابچه در
شب امتحان به شما کمک
می‌کند تا با آمادگی کامل
سر جلسه امتحان
حاضر شوید.

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com



فهرست

آشنایی با منطق و
استدلال ریاضی

۳

فصل اول

تابع

۱۹

فصل دوم

آمار

۴۸

فصل سوم

فصل

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

پرسش متن | ص ۳ کتاب درسی

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r یا ... نمایش می‌دهیم. در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است.

p	p	q	p	q	r
د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	ن
$۲ = ۲$	ن	د	د	ن	د
	ن	ن	د	ن	ن
حالت‌های ارزشی دو گزاره $۲^۲ = ۴ =$ تعداد			ن	د	د
			ن	د	ن
			ن	ن	د
			ن	ن	ن
$۲^۳ = ۸ =$ تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره					

شما جدولی را برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

p	د	د	د	د	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
q	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن	د	د	د	د	ن	ن	ن	ن
r	د	د	ن	ن	د	د	ن	ن	د	د	ن	ن	د	د	ن	ن
s	د	ن	د	ن	د	ن	د	ن	د	ن	د	ن	د	ن	د	ن

$۲^۴ = ۱۶ =$ تعداد حالت‌های ارزشی چهار گزاره \Rightarrow

در هر یک از حالت‌های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

نقیض گزاره p را با $(\sim p)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می‌خوانیم برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم.

نکته

(الف) عدد ۵ زوج است. نقیض گزاره: عدد ۵ زوج نیست. ← یک گزاره درست است.

(ب) تساوی « $۴ = ۲ \times ۲$ » برقرار است. نقیض گزاره: تساوی « $۴ = ۲ \times ۲$ » برقرار نیست. ← یک گزاره نادرست است.

(پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است. نقیض گزاره: عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر نیست. ← یک گزاره نادرست است.

(ت) ارسطو شاگرد افلاطون است. نقیض گزاره: ارسطو شاگرد افلاطون نیست. ← یک گزاره نادرست است.

(ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد. نقیض گزاره: ایران در منطقه غرب آسیا قرار ندارد. ← یک گزاره نادرست است.

(ج) « $(۳ \times ۷) > (۵ \times ۴)$ » نقیض گزاره: « $(۳ \times ۷) \leq (۵ \times ۴)$ » ← یک گزاره درست است.

نقیض « $<$ » می‌شود « \geq » و نقیض « \leq » می‌شود « $>$ ». به عبارت دیگر نقیض «کوچک‌تر است» می‌شود «کوچک‌تر نیست» و یا «بزرگ‌تر یا مساوی است». و نقیض «کوچک‌تر یا مساوی» می‌شود «کوچک‌تر یا مساوی نیست» و یا «بزرگ‌تر است».

نکته

نقیض « $>$ » می‌شود « \leq » و نقیض « \geq » می‌شود « $<$ »، به عبارت دیگر نقیض «بزرگ‌تر است» می‌شود «بزرگ‌تر نیست» یا «کوچک‌تر یا مساوی است» و نقیض «بزرگ‌تر یا مساوی است» می‌شود «بزرگ‌تر یا مساوی نیست» یعنی «کوچک‌تر است».

نتیجه: a مثبت است $\xrightarrow{\text{نقیض}}$ a مثبت نیست (a کوچک‌تر یا مساوی صفر است).

a منفی است $\xrightarrow{\text{نقیض}}$ a منفی نیست (a بزرگ‌تر یا مساوی صفر است).

توجه کنید که نقیض « a مثبت است» نمی‌شود « a منفی است» و بالعکس.

پرسش متن | ص ۴ کتاب درسی

گزاره «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است» را در نظر بگیرید. چه استنباطی نسبت به درستی یا نادرستی این گزاره دارید؟

با توجه به اینکه ارزش هر دو گزاره «عدد ۳ فرد است.» و «۷ عددی اول است.» درست است، پس ارزش گزاره ترکیبی (ترکیب عطفی) درست است.

نسبت به صدق و کذب گزاره «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است»، چه استنباطی دارید؟

با توجه به اینکه ارزش گزاره «افلاطون شاگرد ارسطو است.» نادرست است، بدون توجه به درستی یا نادرستی ارزش گزاره «عدد ۴ زوج است.»، می‌توان گفت ارزش گزاره ترکیبی (ترکیب عطفی) نادرست است.

یک گزاره مرکب که از ترکیب عطفی دو گزاره ساده p و q با لفظ یا حرف ربط «و» تشکیل شده است $(p \wedge q)$ ، زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره درست باشد.

نکته

پرسش متن | ص ۵ کتاب درسی

اگر شخصی به شما بگوید: «آن حیوان، پرنده است یا مهره‌دار است»؛ صدق گفته او را در چه صورتی تأیید می‌کنید؟

در صورتی که حداقل ارزش یکی از گزاره‌ها درست باشد، ارزش کل این گزاره ترکیبی درست است.

اگر پس از بررسی معلوم شود که حیوان مورد نظر نه پرنده بوده است و نه از تیره مهره‌داران بوده است، آیا گزاره مذکور دارای ارزش درست بوده است؟ خیر

یک گزاره مرکب که از ترکیب فصلی دو گزاره ساده p ، q یا حرف ربط «یا» تشکیل شده است، زمانی درست است که حداقل ارزش یکی از گزاره‌ها درست باشد، در واقع این گزاره فصلی، تنها زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

نکته

کاردرکلاس | ص ۷ کتاب درسی

اگر گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$

(ارزش گزاره $(q \Rightarrow p)$ به انتفای مقدم درست بوده و لذا ارزش گزاره $(q \Rightarrow p) \wedge r$ به ارزش

گزاره r بستگی دارد.) $(p \vee q) \vee r$ ۲)

p گزاره‌ای درست است، بنابراین با توجه به اینکه ترکیب فصلی یک گزاره درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است، ارزش گزاره $p \vee q$ و در نتیجه ارزش گزاره $(p \vee q) \vee r$ ، درست است.

۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست است، در نتیجه ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست و ترکیب عطفی آن با هر گزاره دیگری نادرست است. بنابراین ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge r$ نادرست است.

۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$

p گزاره‌ای درست است، بنابراین ارزش گزاره شرطی $r \Rightarrow p$ ، همواره درست است. پس ارزش گزاره $(r \Rightarrow p) \vee q$ نیز درست است.

۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$

p گزاره‌ای درست است در نتیجه ارزش گزاره $r \Rightarrow p$ درست است و چون q گزاره‌ای نادرست می‌باشد، بنابراین ارزش گزاره $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$ نادرست خواهد بود.

۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست است در نتیجه ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست است، بنابراین گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ به انتفای مقدم، دارای ارزش درست است.

۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست است، بنابراین ارزش گزاره عطفی $p \wedge q$ نادرست است و گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

کاردرکلاس | ص ۹ کتاب درسی

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

- ۱- ارزش گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ تنها در صورتی درست است که دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند؛ یعنی $p \equiv q$. (ارزش هر دو گزاره درست یا نادرست باشد).
- ۲- گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.
- ۳- گزاره فصلی $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که هم p و هم q نادرست باشند.
- ۴- گزاره عطفی $p \wedge q$ تنها زمانی درست است که هم p و هم q درست باشند.

یادآوری

$$۱) (p \Leftrightarrow q) \wedge r$$

گزاره‌های p و q هم‌ارزش نیستند ($p \equiv T, q \equiv F$)، بنابراین ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ نادرست است و در نتیجه ترکیب عطفی آن با هر گزاره دیگری دارای ارزش نادرست است؛ پس ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$ نادرست است.

$$۲) (\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$$

چون $\sim p \equiv q \equiv F$ پس $(\sim p \Leftrightarrow q) \equiv T$ و لذا ترکیب فصلی یک گزاره درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.

$$۳) (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$p \equiv T$ و $q \equiv F$ بنابراین $(p \Leftrightarrow q) \equiv F$ ، همچنین ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ نیز نادرست است؛ یعنی $(p \Rightarrow q) \equiv F$. بنابراین با توجه به اینکه $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \equiv F$ ، ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ درست است.

$$۴) (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$\sim p \equiv q \equiv F$ بنابراین $(\sim p \vee q) \equiv F$. از طرفی $(p \Rightarrow q) \equiv F$ و در نتیجه ارزش گزاره $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ درست است، زیرا هر دو طرف آن هم‌ارزش هستند.

$$۵) (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$$

ارزش $(p \vee q)$ درست است پس ارزش $(\sim p \vee \sim q)$ نادرست خواهد بود. ضمناً ارزش $(\sim p \vee \sim q)$ درست است؛ لذا ارزش کل گزاره داده شده نادرست است، چون دو طرف « \Leftrightarrow » هم‌ارزش نیستند.

$$۶) (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$$

$q \equiv F$ بنابراین ترکیب عطفی آن با هر گزاره دیگری دارای ارزش نادرست است؛ یعنی $(p \wedge q) \equiv F$. از طرفی ارزش گزاره $r \Leftrightarrow p$ در صورتی درست است که $r \equiv p$. بنابراین اگر ارزش گزاره r درست باشد ($r \equiv T$)، ارزش گزاره $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست خواهد بود و اگر ارزش گزاره r نادرست باشد ($r \equiv F$)، با توجه به اینکه $(r \Leftrightarrow p) \equiv F$ ، ارزش گزاره شرطی $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$ به انتفای مقدم درست خواهد بود. پس ارزش کل گزاره داده شده، هم‌ارز با گزاره $\sim r$ است.

$$۷) (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$$

با توجه به درستی گزاره p و نادرستی گزاره q ، $(p \vee q) \equiv T$ و $(p \wedge q) \equiv F$. بنابراین با توجه به اینکه دو گزاره ارزش یکسانی ندارند، ارزش گزاره $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ نادرست است.

مثال با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

با توجه به دو ستون آخر، هم‌ارزی داده‌شده درست است.

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ را عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ می‌نامیم. این دو گزاره، هم‌ارز هستند.

نکته

پ) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

این قانون یا هم‌ارزی، یعنی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و مشابه آن؛ یعنی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ به قوانین دمورگان معروف‌اند.

نکته

ت) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

قانون یا هم‌ارزی بالا یعنی $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ یا $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ به قوانین جذب معروف‌اند.

نکته

ث) $(p \vee \sim p) \equiv T$, $(p \wedge \sim p) \equiv F$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

را گزاره همواره درست و $(p \wedge \sim p)$ را گزاره همواره نادرست می‌گویند.

نکته

تمرین | ص ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر عددی فرد است آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است. (چون تالی نادرست است برای درست بودن ترکیب شرطی باید مقدم نادرست باشد).	✓	

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۳	اگر تهران پایتخت ایران است، آنگاه استان تهران بزرگترین استان ایران است. ترکیب شرطی، نادرست است پس مقدم درست و تالی باید نادرست باشد.		✓
۴	$4^2 > 2^3 \Rightarrow 8^2 > 4^3$		✓
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.	✓	
۶	اگر عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		✓
۸	امام خمینی (ره) در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.	✓	
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و حضرت علی (ع) اولین امام شیعیان است.	✓	
۱۰	اگر $2 > 5$ آنگاه ۵ عددی فرد است و برعکس.	✓	

۲ اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$

p گزاره‌ای درست است، بنابراین $p \vee r$ گزاره‌ای درست است؛ در نتیجه ارزش گزاره $(p \vee r) \Rightarrow p$ درست است.

$$\text{ب) } (q \wedge r) \Rightarrow r$$

q گزاره‌ای نادرست است، بنابراین $q \wedge r$ گزاره‌ای نادرست و $(q \wedge r) \Rightarrow r$ به انتفای مقدم درست است.

$$\text{پ) } (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$$

$\sim p \equiv q \equiv F$ ، بنابراین هر دو گزاره $(p \wedge q)$ و $(\sim p \wedge r)$ نادرست هستند. با توجه به اینکه ارزش دو طرف رابطه دوشرطی یکسان است، پس گزاره دوشرطی درست است.

$$\text{ت) } (\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$$

p و q هم‌ارزش نیستند، بنابراین $(p \Leftrightarrow q) \equiv F$. از طرفی چون $\sim q$ و p گزاره‌هایی با ارزش درست هستند، $(\sim q \Rightarrow p) \equiv T$ ؛ بنابراین با توجه به اینکه دو طرف رابطه دوشرطی هم‌ارزش نیستند، پس ارزش گزاره نادرست است.

$$\text{ث) } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$(p \Rightarrow q)$ و $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ هر دو گزاره‌هایی نادرست هستند. با توجه به اینکه دو طرف رابطه دوشرطی هم‌ارزش هستند، ارزش گزاره درست است. (در واقع دو گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ ، $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ عکس نقیض یکدیگر می‌باشند.)

$$\text{ج) } (q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$$

p گزاره درستی است، بنابراین $r \Rightarrow p$ همواره درست است؛ در نتیجه ارزش گزاره $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ نیز همواره درست است. توجه کنید که در گزاره شرطی اگر تالی درست باشد صرف نظر از ارزش مقدم این گزاره شرطی همواره درست است.)

$$\text{چ) } (\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$$

$\sim q \equiv T$ ، پس ارزش گزاره $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$ (فارغ از ارزش $(\sim p \Rightarrow r)$) همواره درست خواهد بود.

$$\text{ح) } (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$$

$(\sim q \Rightarrow \sim p)$ یک گزاره نادرست است، بنابراین ترکیب عطفی $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$ نیز یک گزاره نادرست است.

$$\text{خ) } (r \Rightarrow p) \wedge p$$

p گزاره‌ای درست است؛ بنابراین $r \Rightarrow p$ یک گزاره درست است، در نتیجه $(r \Rightarrow p) \wedge p$ نیز گزاره‌ای درست است.

۳۳ درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

الف) قانون دمورگان $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

ب) توزیع‌پذیری $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

پ) قانون جذب $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

p	$p \Rightarrow p$
T	T
F	T