



«وفاقیہ»
مفتی زین العابدین صاحبزادہ
محمد امجد علی خان



ریاضی و آمار ۱

پایہ دہم

رشتہ علوم انسانی

مؤلف

مہندس امیر زرا ندوز

فرمولہ بیسٹ

فرمول پایان

۴
نمونه
امتحانی

۳۴۰
پرسش
تشریحی

۵۰
صفحه
درسنامه



+۴

ساعت
فیلم
آموزشی
ویژه
شب
امتحان



تهران، میدان انقلاب
نیش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

با سلام خدمت شما بچه‌های خوب رشته انسانی

چون ما، یعنی شخص خودم و مجموعه گاج، بچه‌های انسانی رو خیلی خیلی دوست داریم همیشه سعی می‌کنیم کتابای خوب و به درد بخور براتون بنویسیم. نمونش همین کتابیه که الان دستتونه.

اولاً: تمام مطالب کتابی درسی رو پوشش دادیم و کلی سؤال مشابه مسائل، مثال‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی براتون شبیه‌سازی کردیم؛ یعنی محاله سؤالی در امتحان مطرح بشه که در این کتاب خودش رو یا شبیهش رو ندیده باشین.

ثانیاً: حجم کتاب رو الکی زیاد نکردیم.

ثالثاً: چند دوره امتحان نهایی و تألیفی در آخر کتاب براتون آوردیم که بتونید سؤالاً رو به صورت ترکیبی و یک‌جا ببینید.

ویژگی مهم و خیلی باحال این کتاب اینه که فیلم‌های آموزشی مخصوص امتحانات تشریحی بهش اضافه شده؛ یعنی شما دیگه لازم نیست هزینه‌ای بابت معلم خصوصی پرداخت کنید.

پس حالا که من و گاج این همه زحمت کشیدیم و یک کتاب خاص براتون گردآوری کردیم، شما هم سعی کنید با خوب خوندن این کتاب و گرفتن نمره کامل ما رو خوشحال کنید. ضمناً اگه اشتباه یا خطایی در کتاب دیدین لطفاً با اینجانب در فضای مجازی مطرح کنید.

@Amir_Zarandooz_2

به امید رسیدن شما به هرچی آرزوی خوبه

امیر زاراندوز

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سوالات
110 min	۷۰	۲۵ تا ۶
72 min	۷۸	۴۳ تا ۲۶
45 min	۸۷	۵۷ تا ۴۴
18 min	۹۲	۶۸ تا ۵۸

فصل اول: معادله درجه دوم

فصل دوم: تابع

فصل سوم: کار با داده‌های آماری

فصل چهارم: نمایش داده‌ها

بارم‌بندی درس ریاضی و آمار ۱

نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل	
۵	۱۰	اول	
۶	۱۰	تا صفحه ۶۲	دوم
	-	صفحه ۶۲ به بعد	
۵	-	سوم	
۴	-	چهارم	

امتحان نهایی



۹۸	آزمون ۱
۹۹	آزمون ۲
۱۰۰	آزمون ۳
۱۰۲	آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۳
۱۰۴	پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۴

فصل اول

معادله درجه دوم

فصل اول ریاضی و آمار ۱، در امتحان نوبت اول، ۱۰ نمره و در نوبت دوم ۳/۵ نمره و در شهریور ۵ نمره دارد. در این فصل مباحثی چون معادله درجه اول، معادله درجه دوم، معادلات شامل عبارتهای گویا و کاربردهای آنها در حل مسائل توصیفی مطرح شده است.

بسته ۴

بسته ۳

بسته ۲

بسته ۱

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

یادآوری (اتحادها، تجزیه، عبارتهای گویا)

بسته صفر



الف اتحادهای جبری

- اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- اتحاد مزدوج $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- اتحاد جمله مشترک $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

یادآوری بجه‌های عزیز، اتحادها و تجزیه عبارتهای جبری را در سال‌های قبل خوانده‌اید، ولی چون در بعضی از قسمت‌ها به آنها نیاز داریم مجدداً آنها را یادآوری می‌کنیم.

سؤال حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

۴ $(10x + 1)(10x + 6)$

۳ $(x - 3)(x + 8)$

۲ $(\frac{\sqrt{y}}{2} - 4)(\frac{\sqrt{y}}{2} + 4)$

۱ $(\sqrt{5x} - \frac{3}{\sqrt{5}}y)^2$

۱ پاسخ $(\sqrt{5x} - \frac{3}{\sqrt{5}}y)^2 = (\sqrt{5x})^2 - 2(\sqrt{5x})(\frac{3}{\sqrt{5}}y) + (\frac{3}{\sqrt{5}}y)^2 = 5x^2 - 6xy + \frac{9}{5}y^2$

۲ $(\frac{\sqrt{y}}{2} - 4)(\frac{\sqrt{y}}{2} + 4) = (\frac{\sqrt{y}}{2})^2 - 4^2 = \frac{y}{4} - 16 = \frac{-5y}{4}$

۳ $(x - 3)(x + 8) = x^2 + (-3 + 8)x + (-3)(8) = x^2 + 5x - 24$

۴ $(10x + 1)(10x + 6) = (10x)^2 + (1 + 6)(10x) + (1)(6) = 100x^2 + 70x + 6$

$$A = (x^2 - 3x)^2 - (x^2 + 3x)^2$$

سؤال حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

پاسخ حاصل تک تک پرانتزها را به کمک اتحادهای مربع دو جمله حساب کرده و سپس جوابها را از هم کم می‌کنیم:

$$(x^2 - 3x)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(3x) + (3x)^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2$$

$$(x^2 + 3x)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(3x) + (3x)^2 = x^4 + 6x^3 + 9x^2$$

$$\Rightarrow A = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) - (x^4 + 6x^3 + 9x^2) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - x^4 - 6x^3 - 9x^2 = -12x^3$$

ب تجزیه عبارت‌های جبری

مفهوم تجزیه: منظور از تجزیه یک عبارت جبری این است که آن عبارت را به حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر با درجه کم‌تر تبدیل کنیم. این کار را به کمک فاکتورگیری، اتحادها و ... انجام می‌دهیم. به هر یک از جملات حاصل از تجزیه، یک عامل یا مقسوم‌علیه عبارت اصلی می‌گوییم. مثلاً وقتی می‌نویسیم $x^2 - 5x = x(x - 5)$ به x و $x - 5$ عوامل (مقسوم‌علیه‌های) $x^2 - 5x$ می‌گوییم. یعنی $(x^2 - 5x)$ هم بر x و هم بر $x - 5$ بخش پذیر است. به کمک روش‌های زیر، عبارت‌های جبری را تجزیه می‌کنیم:

روش فاکتورگیری

اگر دو یا چند جمله که بین آن‌ها علامت جمع یا تفریق وجود دارد دارای عامل مشترکی باشند، آن عامل را از دل آن جملات بیرون می‌کشیم. به مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال ۱ $fab^5 - 18a^2b = 2ab(2b^4 - 9a)$

$$\frac{fab^5}{2ab} = 2b^4 \quad \frac{18a^2b}{2ab} = 9a$$

عامل مشترک

مثال ۲ $(x - 6y)^2 - 7(x - 6y) = (x - 6y)[(x - 6y) - 7]$

عامل مشترک

مثال ۳ $12x^4(x^2 - 5)^2 + 3x^3(x^2 - 5)^2 = 3x^3(x^2 - 5)^2[4x + (x^2 - 5)]$

عامل مشترک

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

اگر بین دو جمله (که معمولاً مربع کامل هستند) علامت منفی وجود داشته باشد، از رابطه $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ برای تجزیه عبارت استفاده می‌کنیم:

مثال ۱ $x^2 - 100 = (x - 10)(x + 10)$

جذر x جذر 10

مثال ۲ $25x^2 - 3 = (\Delta x - \sqrt{3})(\Delta x + \sqrt{3})$

جذر $5x$ جذر $\sqrt{3}$

مثال ۳ $(x - 3)^2 - 64 = [(x - 3) - 8][(x - 3) + 8] = (x - 11)(x + 5)$

جذر $x - 3$ جذر 8

سؤال عبارت $x^5 - 81x$ به کدام عبارت زیر بخش پذیر نیست؟

۴ $x^2 - 3$

۳ $x - 3$

۲ $x^2 + 9$

۱ x

پاسخ گزینه «۴». عبارت $(x^5 - 81x)$ را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که عبارت موجود در کدام گزینه، در تجزیه شده آن مشاهده نمی‌شود.

$$x^5 - 81x = x(x^4 - 81) = x(x^2 - 9)(x^2 + 9) = x(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

فاکتور از x اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج

پس از بین عبارت‌های داده شده، جواب مورد نظر، عبارت $(x^2 - 3)$ است، چون در عوامل تجزیه $(x^5 - 81x)$ عامل $(x^2 - 3)$ مشاهده نمی‌شود.

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

از این اتحاد وقتی استفاده می‌کنیم که ۳ جمله داشته باشیم و حداقل یکی از آن‌ها مربع کامل باشد. این اتحاد به صورت زیر است:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

شکل کلی‌تر این اتحاد $\rightarrow (b + \text{جمله مشترک})(a + \text{جمله مشترک}) + a \times b = (\text{جمله مشترک})^2 + (a+b) \times (\text{جمله مشترک})$

به عنوان مثال می‌خواهیم $(x^2 + 2x - 35)$ را تجزیه کنیم. جمله مشترک x است چون x و x^2 وجود دارد. اکنون به دنبال دو عدد a و b می‌گردیم به طوری که ضربشان ۳۵ و جمع یا تفریقشان ۲ شود (فعلاً به علامت‌ها فکر نکنید)، دو عدد مورد نظر عبارتند از ۷ و ۵ چون ضربشان ۳۵ و تفریقشان ۲ می‌شود:

$$x^2 + 2x - 35 = (x+7)(x-5)$$

جمله مشترک ← ← ← جمله مشترک

نکته همیشه حواستان باشد که عدد بزرگ‌تر را در پرانتز اول قرار دهید.

هر پرانتز، خودش اتحاد مزدوج است $\rightarrow (x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4)$

مثال ۱ $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = (x^2-4)(x^2-1)$

جمله مشترک x^2 است، چون x^2 و x^4 وجود دارد.

مثال ۲ $x^3 - 10x^2 + 24x = x(x^2 - 10x + 24) = x(x-6)(x-4)$

تجزیه با جمله مشترک فاکتور از x

نکته گاهی اوقات یک سه‌جمله‌ای به ما داده می‌شود که در آن ضریب x^2 عددی مربع کامل است (به جز ۱). در این موارد برای تجزیه این سه‌جمله‌ای، کافی است از جمله شامل x^2 جذر گرفته تا جمله مشترک معلوم شود، سپس این جمله مشترک را از درون جمله دیگر که شامل x است، بیرون می‌کشیم. به عنوان مثال می‌خواهیم عبارت $9x^2 + 18x + 8$ را تجزیه کنیم؛ ۹ مربع کامل است، حال می‌گوییم جذر $9x^2$ می‌شود $3x$ ، پس $3x$ جمله مشترک است و باید $18x$ را نیز طوری بنویسیم که در آن $3x$ مشاهده شود، یعنی $18x = 6(3x)$ ، حالا به کمک اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت:

$$9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6(3x) + 8 = (3x+4)(3x+2)$$

جمله مشترک

سؤال عبارت $25x^2 + 30x - 7$ را تجزیه کنید.

پاسخ ضریب x^2 یعنی ۲۵ مربع کامل است پس $25x^2$ را به صورت $(5x)^2$ می‌نویسیم، و متوجه می‌شویم $5x$ باید جمله مشترک باشد، لذا $30x$ را به صورت $6(5x)$ می‌نویسیم تا $5x$ را دوباره تکرار کرده باشیم:

$$25x^2 + 30x - 7 = (5x)^2 + 6(5x) - 7 = (5x+7)(5x-1)$$

ملاحظه می‌کنید که ضرب $+7$ و -1 می‌شود -7 و جمع $+7$ و -1 می‌شود 6 .

تجزیه به کمک اتحادهای مربع دو جمله‌ای

اگر سه جمله‌ای ما به شکل $a^2 + 2ab + b^2$ یا $a^2 - 2ab + b^2$ باشد، تجزیه شده‌اش برابر با $(a+b)^2$ و اگر به شکل $a^2 - 2ab + b^2$ بود، تجزیه شده‌اش به صورت $(a-b)^2$ خواهد بود. به عبارت دیگر اگر سه جمله داشتیم که دو تای آن‌ها مربع کامل بودند و سومی، ۲ برابر ضرب جذرهای دو جمله مربع کامل بود، از اتحادهای مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$10x = 2 \times x \times 5 = (x \times 5)$ (جذر آخری) (جذر اولی) $\times 2$

مثال $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

جذر x جذر 5

$12tz = 2(2t)(3z) = (2t+3z)^2$ (جذر آخری) (جذر اولی) $\times 2$

مثال ۲ $4t^2 + 12tz + 9z^2 = (2t+3z)^2$

جذر $2t$ جذر $3z$

سؤال عبارت $9x^4 - 6x^3 + x^2$ پس از تجزیه به شکل $x^k(mx-n)^f$ تبدیل شده است، مقادیر m ، n ، f و k را به دست آورید.

$$9x^4 - 6x^3 + x^2 = x^2(9x^2 - 6x + 1) = x^2(3x-1)^2 = x^k(mx-n)^f \Rightarrow k=2, m=3, n=1, f=2$$

پاسخ

دو طرف را مقایسه می کنیم: تجزیه با اتحاد مربع دو جمله ای
تک تک اجزاء باید با هم مساوی باشند. فاکتور از x^2

محاسبه ک.م.م عبارتهای جبری

برای این منظور ابتدا عبارتهای $x^4 + 2x^3 - 3x^2$ و $x^4 + 8x^2 + 15x$ را به دست آوریم: غیرمشترک. به عنوان مثال می خواهیم ک.م.م عبارتهای $x^4 + 2x^3 - 3x^2$ و $x^4 + 8x^2 + 15x$ را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 3x^2 &= x^2(x^2 + 2x - 3) = x^2(x+3)(x-1) \\ x^4 + 8x^2 + 15x &= x(x^3 + 8x + 15) = x(x+5)(x+3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = x^2(x+3)(x-1)(x+5)$$

تجزیه جمله مشترک
عوامل مشترک با توان بزرگتر
عوامل غیر مشترک

سؤال ک.م.م دو عبارت $20x^4(x^2-25)$ و $x^4 - 7x^3 + 10x^2$ را به دست آورید.

پاسخ همان طور که گفتیم ابتدا دو عبارت را تا حد امکان تجزیه می کنیم، سپس عوامل مشترک با توان بزرگتر را در عوامل غیرمشترک ضرب می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} x^4 - 7x^3 + 10x^2 &= x^2(x^2 - 7x + 10) = x^2(x-5)(x-2) \\ 20x^4(x^2-25) &= 20x^4(x-5)(x+5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = 20x^4(x-5)(x+5)(x-2)$$

عبارتهای گویا

تعریف هر کسری که صورت و مخرج آن دو چندجمله ای باشد، عبارت گویا نام دارد. مانند عبارتهای $\frac{2}{x}$ ، $\frac{5x^2-3x}{x+6}$ ، $\frac{\sqrt{3}x+1}{2x}$ و $\frac{x^2+6x+3}{5}$ ولی عبارتهای \sqrt{x} ، $\frac{3\sqrt{x}}{y-2t}$ ، $\frac{|x-1|}{x^2+5}$ و $\frac{x+2}{\sqrt{y-t}}$ گویا نیستند. چون در آن ها متغیر، زیر رادیکال یا داخل قدرمطلق قرار دارد.

بامعنی یا بی معنی بودن عبارت گویا

می دانید اگر مخرج یک کسر صفر باشد، حاصل آن کسر، تعریف نشده است. مثلاً کسر $\frac{x-1}{x-2}$ به ازای $x=2$ تعریف نشده است چون عدد ۲ باعث صفر شدن مخرج می شود. پس برای یافتن نقاطی که باعث می شوند یک عبارت گویا، بی معنی باشد کافی است مخرج آن را مساوی صفر قرار داده و مقدار یا مقادیر متغیر را به دست آوریم.

سؤال عبارتهای گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده اند؟

۳ $\frac{k^2-7}{k^2-25}$

۲ $\frac{10x^4-3x^2+1}{5\sqrt{2}}$

۱ $\frac{5t-1}{3t-2}$

۵ $\frac{x^2-7}{(x-1)(x-2)}$

۴ $\frac{x-1}{x^2+4}$

پاسخ ۱ $\text{مخرج} = 0 \Rightarrow 3t-2=0 \Rightarrow 3t=2 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$

۲ مخرج اصلاً متغیری ندارد. پس کسر مورد نظر، همیشه تعریف شده است.

۳ $\text{مخرج} = 0 \Rightarrow k^2-25=0 \Rightarrow k^2=25 \xrightarrow{\text{جذر}} k=\pm 5$ (یادتون نره) $k=\pm 5$ می گیرید علامتهای \pm یادتون نره

۴ $\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow$ کسر داده شده، همواره تعریف شده است.

این معادله جواب ندارد، چون حاصل x^2 نمی تواند منفی شود. (یا همیشه گفت از عدد -4 همیشه بزرگتره)

۵ $\text{مخرج} = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$

ساده کردن عبارات گویا

برای این کار، صورت و مخرج را تا حد امکان به کمک فاکتورگیری و یا اتحادها تجزیه کرده، سپس عامل یا عامل‌های مشترک صورت و مخرج را خط می‌زنیم.

سؤال عبارات گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{x^2 - 2x^2 - 35x}{(x^2 - 25)(x^2 - 49)} \quad 3$$

$$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x - 10} \quad 2$$

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - 49} \quad 1$$

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - 49} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)(x+7)} = \frac{x-7}{x+7}$$

تجزیه با اتحاد مزدوج

$$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x - 10} = \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+2)} = \frac{x}{x+2}$$

تجزیه با اتحاد جمله مشترک

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 35x}{(x^2 - 25)(x^2 - 49)} = \frac{x(x^2 - 2x - 35)}{(x-5)(x+5)(x-7)(x+7)} = \frac{x(x-7)(x+5)}{(x-5)(x+5)(x-7)(x+7)} = \frac{x}{(x-5)(x+7)}$$

پاسخ

۱

۲

۳

تذکره دقت کنید وقتی گفته می‌شود یک عبارت گویا به ازای چه مقدار یا مقادیری از متغیر، تعریف نشده است نمی‌توانیم عبارات گویای مشترک صورت و

مخرج را با هم ساده کنیم. مثلاً می‌خواهیم مشخص کنیم عبارت گویای $\frac{x^2 - 36}{x^2 + 7x + 6}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است. اگر صورت و مخرج

این کسر را تجزیه کنیم عامل مشترک $(x+6)$ در آن‌ها مشاهده می‌شود، ولی نباید این عامل را از صورت و مخرج خط بزنیم بلکه فقط باید مخرج را

مساوی صفر قرار دهیم یعنی:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + 7x + 6}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow (x+6)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -1 \end{cases}$$

ضرب و تقسیم عبارات گویا

برای انجام ضرب یا تقسیم عبارات گویا، ابتدا تمام صورت و مخرج‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم، سپس عامل یا عامل‌های مشترک را از صورت و

مخرج‌ها ساده می‌کنیم، ضمناً همیشه عمل تقسیم را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$$

مثال ۱ $\frac{x^2 - 16}{3x + 6} \times \frac{x^2 + x - 2}{x - 4} = \frac{(x-4)(x+4)}{3(x+2)} \times \frac{(x+2)(x-1)}{x-4} = \frac{(x+4)(x-1)}{3}$

مثال ۲ $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} \div \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 4x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)} \times \frac{2x(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 2$

تجزیه با اتحاد جمله مشترک
تجزیه با اتحاد جمله مشترک
فاکتور از x
فاکتور از $2x$

مثال ۳ $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \times \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} \times \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$

جمع و تفریق عبارت های گویا

برای این منظور، ابتدا در صورت امکان هر کسر را جداگانه ساده می‌کنیم (همه صورت و مخرج‌ها را تجزیه کرده، عامل یا عوامل مشترک را در هر کسر، جداگانه ساده می‌کنیم)، سپس بین تمام کسرها مخرج مشترک می‌گیریم (مخرج مشترک همان ک.م.م است).

$$\text{مثال ۱} \quad \frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+7}{x^2+10x+21} = \frac{\cancel{x-3}}{(x-\cancel{3})(x+3)} + \frac{\cancel{x+7}}{(\cancel{x+7})(x+3)} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+3}$$

$$\text{مثال ۲} \quad \frac{x-2}{x-3} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2) - (x+1)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x^2-4 - (x^2-2x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x^2-4-x^2+2x+3}{(x-3)(x+2)} = \frac{2x-1}{(x-3)(x+2)}$$

$$\text{مثال ۳} \quad \frac{4}{x^2+x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{4(x-1) + x \cdot x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{4x-4+x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+4x-4}{x(x-1)(x+1)}$$

سؤال کدام عبارت گویا را از $\frac{2}{x-2}$ کم کنیم تا حاصل برابر با $\frac{2x}{x^2-4}$ شود؟

پاسخ اگر عبارت خواسته شده را A بنامیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} - A &= \frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = A \Rightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{2x}{(x-2)(x+2)} = A \\ \Rightarrow \frac{2(x+2) - 2x}{(x-2)(x+2)} &= A \Rightarrow A = \frac{4}{(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

سؤال حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین شکل به دست آورید.

$$A = \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x}}$$

پاسخ یک خط کسری بزرگ مشاهده می‌کنیم که در صورت و مخرج آن، کسرها کوچک‌تری وجود دارند که بین آن‌ها جمع و تفریق می‌بینیم پس اول این جمع و تفریق‌ها را حساب کرده سپس، کسر حاصل را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{\frac{1-x+x(1+x)}{(1+x)(1-x)}}{\frac{1+x-x(1-x)}{(1-x)(1+x)}} = \frac{1-x+x(1+x)}{1+x-x(1-x)} = \frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}+x^2}{1+\cancel{x}-\cancel{x}+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$$

معادله درجه اول و کاربرد آن در مسائل توصیفی

صفحه ۱۰ تا ۱۸ کتاب درسی

بسته اول

الف معادله درجه اول

تعریف هر معادله که پس از ساده شدن به شکل $ax + b = 0$ تبدیل شود، یک معادله درجه اول نام دارد. جواب این معادله از رابطه $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید (a و b دو عدد حقیقی اند و $a \neq 0$ است). مثلاً معادلات $7x - 3 = 0$ و $\frac{2x-1}{5} = x+2$ درجه اول هستند. ولی معادله $\frac{1}{x} - 3 = 2x$ درجه اول نیست چون x در مخرج وجود دارد. با حل معادله درجه اول، در سال‌های قبل آشنا شده‌اید پس فقط به ذکر چند مثال می‌پردازیم:

$$\text{مثال ۱} \quad (x-3)(x+2) = x^2 - 8x + 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - 8x + 6 \Rightarrow -x + 8x = 6 + 6 \Rightarrow 7x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{7}$$

$$\text{مثال ۲} \quad \frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} = 5 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک در سمت چپ}} \frac{2x - 3(x+1)}{6} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 3x - 3}{6} = 5 \Rightarrow \frac{-x - 3}{6} = 5 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -x - 3 = 30 \Rightarrow -x = 30 + 3 \Rightarrow -x = 33 \Rightarrow x = -33$$

ب کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی

در بسیاری از مواقع، معادله درجه اول به صورت ریاضی به ما داده نمی‌شود بلکه توضیحی فارسی در مورد مجهول داده می‌شود که باید یک معادله درجه اول مناسب برای آن نوشته و حل کنیم. فقط پس از حل معادله باید ببینیم آیا جواب به دست آمده، در شرایط اولیه مسئله صدق می‌کند یا خیر. مثلاً اگر در متن سؤال گفته شود عدد مطلوب، طبیعی است و جواب معادله $x = -5$ به دست آید، نباید آن را قبول کنیم.

سؤال عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد ۴ برابر با سه برابر همان عدد منهای ۵ باشد. **مشابه فعالیت کتاب درسی**

پاسخ عدد مورد نظر را x فرض کرده با توجه به توضیحات مسئله، خواهیم نوشت:

$$2x + 4 = 3x - 5 \Rightarrow 2x - 3x = -5 - 4 \Rightarrow -x = -9 \Rightarrow x = 9$$

سؤال در یک کفه ترازو ۴ کالای هم وزن قرار می‌دهیم، در کفه دیگری ۱۸ کیلویی می‌گذاریم. مشاهده می‌کنیم که کفه قسمت ۱۸ کیلویی پایین می‌آید، حال یک وزنه ۳ کیلویی را در کنار آن ۴ کالا قرار می‌دهیم، تعادل کفه‌ها برقرار می‌شود و روبه روی هم می‌ایستند. وزن هر کالا چقدر است؟ **مشابه فعالیت کتاب درسی**

پاسخ اگر وزن هر یک از ۴ کالا را x فرض کنیم، می‌توانیم معادله زیر را تشکیل دهیم:

$$4x + 3 = 18 \Rightarrow 4x = 18 - 3 \Rightarrow 4x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{4}$$

تعادل کفه‌ها یعنی علامت (=)

نکته اگر ریشه یک معادله درجه اول داده شود، آن را به جای متغیر معادله قرار می‌دهیم تا مجهول خواسته شده به دست آید. در این گونه مسائل، اصطلاحاً می‌گوییم ریشه هر معادله، در خود معادله صدق می‌کند. (البته این نکته برای تمام معادلات دیگر، از جمله معادلات درجه دوم و معادلات گویا هم درست است.)

سؤال به ازای چه مقدار از k معادله $kx = \frac{x-1}{3} + \frac{2k}{5}$ دارای جواب ۴ است؟

پاسخ کافی است هر جا x دیدیم به جایش عدد ۴ را قرار دهیم:

$$\frac{4-1}{3} + \frac{2k}{5} = k(4) \Rightarrow 1 + \frac{2k}{5} = 4k \Rightarrow \frac{5+2k}{5} = 4k$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 20k = 5 + 2k \Rightarrow 18k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{18}$$

معادله درجه اول و کاربرد آن در مسائل توصیفی

پرسش‌های تشریحی

بسته
۱

● معادلات زیر را حل کنید.

۱. $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-5}{2} = \frac{x}{4}$

۲. $\frac{5}{2} - 2 = 3x - 2(10x - 28)$

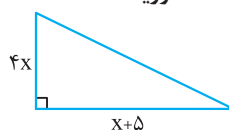
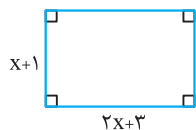
۳. $(3x-1)(3x+7) = (3x-2)^2$

۴. اگر به پنج برابر عددی ۱ واحد اضافه شود و از نصف حاصل، همان عدد کم شود، باقی مانده ۲ می‌شود. آن عدد را پیدا کنید.

۵. گروهی از افراد با دوستانشان مواجه می‌شوند. این فرد از یکی از افراد گروه می‌پرسد که: شما چند نفر هستید؟ و این طور پاسخ می‌شنود که «ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم.» با تشکیل یک معادله مناسب، تعداد افراد گروه را به دست آورید. (کار در کلاس کتاب درسی)

۶. در یک کارخانه، حقوق یک مهندس ۴ برابر یک کارگر و $\frac{2}{5}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۵ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ کارگر دارد. اگر برای این قسمت ماهانه ۱۰۰ میلیون تومان پرداخت شود، حقوق یک کارگر در ماه چقدر است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۷. مساحت مستطیل و مثلث مقابل با هم برابر است. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.



۸. یک کارخانه فولادسازی، از روز شنبه، شروع به کار کرده و از روز یکشنبه، تولید هر روز خود را نسبت به روز قبل ۲ برابر کرده است. در پایان روز پنجشنبه، مقدار فولاد تولید شده به ۳۲۰ تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این ۶ روز چقدر بوده است؟ اختلاف تولید فولاد در پایان روز سهشنبه با تولید فولاد در پایان روز پنجشنبه چقدر است؟
(مشابه تمرین کتاب درسی)

۹. مجموع سه عدد زوج متوالی ۴۲ است. بزرگترین این اعداد را به دست آورید.

۱۰. از معادله $38 - 3x^2 = (2x - 3)^2 - (x + 5)^2$ مقدار x را به دست آورید.

۱۱. در مثلثی، طول بزرگترین ضلع از ۴ برابر طول کوچکترین ضلع ۱ واحد بزرگتر است و طول ضلع متوسط، از طول کوچکترین ضلع، ۵ واحد بیش تر است. اگر محیط مثلث ۸۰ سانتی متر باشد، کوچکترین ضلع مثلث چقدر است؟

معادله درجه دوم و روش های حل آن

صفحه ۱۹ تا ۲۹ کتاب درسی

بسته دوم



تعریف هر معادله که پس از ساده شدن به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل شود، معادله درجه دوم نام دارد. a ، b و c اعداد حقیقی اند و $a \neq 0$ است. در این معادله ضریب x^2 ، a ضریب x و c عدد ثابت نام دارد. مثلاً در معادله $-x^2 + 6x - 7 = 0$ ضرایب معادله عبارتند از $a = -1$ ، $b = 6$ و $c = -7$ و یا در معادله $-2x^2 + 3 = 0$ ضرایب معادله عبارتند از $a = -2$ ، $b = 0$ و $c = 3$

روش های حل معادله درجه دوم

۱ روش تجزیه: در این روش معادله را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه می کنیم تا معادله به شکل ضرب دو یا چند عبارت تبدیل شود، سپس تک تک این عبارت ها را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\text{مثال ۱} \quad \frac{x^2 - 8x}{2x} = 0 \Rightarrow 2x(5x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

فاکتور از $2x$

$$\text{مثال ۲} \quad x^2 - 15x + 44 = 0 \Rightarrow (x - 11)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

اتحاد جمله مشترک

$$\text{مثال ۳} \quad 49x^2 - 81 = 0 \Rightarrow (7x - 9)(7x + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 7x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{7} \\ 7x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{7} \end{cases}$$

اتحاد مزدوج

سؤال معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 - 10x + 25 = 0 \quad 16x^2 + 8x - 3 = 0 \quad (x - 3)^2 = 49 \quad (x - 8)(x + 2) = 3x(x - 8)$$

پاسخ ۱ ابتدا عبارت $3x(x - 8)$ را به سمت چپ معادله می بریم سپس فاکتورگیری می کنیم:

$$(x - 8)(x + 2) - 3x(x - 8) = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 2 - 3x) = 0 \Rightarrow (x - 8)(-2x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \\ -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

فاکتور از $(x - 8)$

$$(x - 3)^2 - 49 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد مزدوج}} (x - 3 - 7)(x - 3 + 7) = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{جذر} \\ \downarrow \\ (x - 3) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{جذر} \\ \downarrow \\ 7 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

$$16x^2 + 8x - 3 = 0 \Rightarrow (4x)^2 + 2(4x) - 3 = 0 \Rightarrow (4x + 3)(4x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \\ 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

تجزیه با اتحاد جمله مشترک

$$x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله ای

۲ روش ریشه‌گیری (جذرگیری): از این روش وقتی استفاده می‌کنیم که معادله شامل x^2 و فاقد x باشد. در این روش ابتدا x^2 یا پارانتری که توان ۲ دارد را در یک طرف تساوی، تنها می‌کنیم. (بقیهٔ عملیات رو به سمت راست معادله جذر می‌گیریم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱ $x^2 - 64 = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$

مثال ۲ $4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$

مثال ۳ $(x-1)^2 = 16 \xrightarrow{\text{جذر}} x-1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1=4 \Rightarrow x=5 \\ x-1=-4 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$

مثال ۴ $5x^2 + 125 = 0 \Rightarrow 5x^2 = -125 \Rightarrow x^2 = \frac{-125}{5} \Rightarrow x^2 = -25$

این معادله جواب ندارد چون حاصل x^2 نمی‌تواند با عددی منفی مساوی باشد. (یا همیشه این بوری گفت که از به عدد منفی، نمیشه بزر گرفت.)

۳ روش مربع کامل: مراحل حل معادله به این روش را به همراه یک مثال توضیح می‌دهیم:

حل معادله $2x^2 - 4x - 8 = 0$ به روش مربع کامل	مراحل حل معادله به روش مربع کامل
الآن ضریب x^2 ، ۱ نیست پس تمام جملات را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. $2x^2 - 4x - 8 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x - 4 = 0$	۱) اگر ضریب x^2 ، ۱ نبود تمام جملات معادله را بر آن ضریب تقسیم می‌کنیم.
عدد ثابت (-۴) است، پس آن را به سمت راست می‌بریم: $x^2 - 2x = 4$	۲) عدد ثابت را به سمت راست معادله منتقل می‌کنیم.
ضریب x برابر (-۲) است که نصف آن، برابر می‌شود با (-۱). حالا $(-1)^2$ برابر با ۱ می‌شود پس ۱ را به دو طرف اضافه می‌کنیم: $x^2 - 2x + 1 = 4 + 1$	۳) ضریب x را نصف کرده، به توان ۲ می‌رسانیم و عدد حاصل را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم.
الآن سمت چپ معادله را به کمک اتحاد دوم (مربع تفاضل دوجمله‌ای) تجزیه می‌کنیم، سپس از دو طرف جذر می‌گیریم: $(x-1)^2 = 5 \xrightarrow{\text{جذر}} x-1 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{5} \\ x-1 = -\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} + 1 \\ x = -\sqrt{5} + 1 \end{cases}$	۴) سمت چپ معادله را به کمک اتحاد اول یا دوم تجزیه کرده و از دو طرف معادله، جذر می‌گیریم.

سؤال معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۳ $x^2 + 4x + 9 = 0$

۲ $3x^2 + 12x - 1 = 0$

۱ $x^2 - 2x - 8 = 0$

پاسخ

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 8$

عدد $(\frac{-2}{2})^2 = (-1)^2 = 1$ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم.
تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای $x^2 - 2x + 1 = 8 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 9 \xrightarrow{\text{جذر}} x-1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$

عدد $(\frac{4}{3})^2 = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم.
 $3x^2 + 12x + 1 = 1 \xrightarrow{\div 3} x^2 + 4x = \frac{1}{3}$

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای $x^2 + 4x + 4 = \frac{1}{3} + 4 \Rightarrow (x+2)^2 = \frac{13}{3} \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{\frac{13}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = \sqrt{\frac{13}{3}} \\ x+2 = -\sqrt{\frac{13}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{13}{3}} - 2 \\ x = -\sqrt{\frac{13}{3}} - 2 \end{cases}$

عدد $(\frac{4}{2})^2 = (2)^2 = 4$ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم.
تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای $x^2 + 4x = -9 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 4x + 4 = -9 + 4 \Rightarrow (x+2)^2 = -5$

این معادله جواب ندارد چون حاصل عبارتی با توان زوج، نمی‌تواند برابر با عددی منفی باشد.

۴ روش کلی (روش دلتا): در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به عبارت $\Delta = b^2 - 4ac$ دلتا یا مُبیین معادله می‌گوییم. با توجه به مقدار و علامت Δ سه حالت خواهیم داشت:

- ۱ اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله ۲ ریشه متمایز به صورت $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ خواهد داشت.
 ۲ اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله ۲ ریشه تکرار شونده (۱ ریشه مضاعف) به صورت $x = \frac{-b}{2a}$ خواهد داشت.
 ۳ اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد. (معادله جواب ندارد).

سؤال هریک از معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

۳ $3x^2 + 6x + 8 = 0$

۲ $x^2 - 6x + 9 = 0$

۱ $x^2 - 3x - 4 = 0$

پاسخ

۱ $1x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{3+5}{2} = 4 \\ x'' = \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

۲ $1x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3$

۳ $3x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(3)(8) = 36 - 96 = -60$

معادله جواب ندارد، چون دلتا منفی شده است.

سؤال اگر معادله $mx^2 - 3x + 6 = 0$ دارای دو ریشه متمایز باشد، m چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

$$mx^2 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = m \\ b = -3 \\ c = 6 \end{cases}$$

پاسخ گفته شده معادله ۲ ریشه متمایز دارد، پس دلتا باید مثبت باشد:

$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(m)(6) > 0 \Rightarrow 9 - 24m > 0 \xrightarrow{\text{عدد ۹ را به سمت راست می‌بریم.}} -24m > -9$

$\xrightarrow{\text{عدد معلوم یعنی (-۹) را بر ضریب مجهول یعنی (-۲۴) تقسیم می‌کنیم جهت عوض می‌شود.}} m < \frac{-9}{-24} \Rightarrow m < \frac{9}{24}$

در قسمت آخر، به این نکته توجه کنید که چون عدد پشت m منفی بود، جهت نامعادله تغییر کرده است.

نکته اگر ریشه یک معادله داده شود و پارامتری مثل m ، k و ... خواسته شود باید به جای متغیرهای معادله، ریشه داده شده را قرار دهیم. سپس پارامتر مورد نظر را به دست می‌آوریم.

سؤال به ازای چه مقدار از m ریشه معادله $5x^2 - 10mx - 3 = 0$ برابر با -2 است؟

پاسخ به جای تمام x ها عدد (-2) را قرار می‌دهیم:

$$5x^2 - 10mx - 3 = 0 \xrightarrow{x=-2} 5(-2)^2 - 10m(-2) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 20 + 20m - 3 = 0 \Rightarrow 20m = -17 \Rightarrow m = \frac{-17}{20}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، دلتا مثبت باشد بدون آن‌که معادله را حل کنیم می‌توانیم مجموع و حاصل ضرب ۲ ریشه آن را به صورت زیر پیدا کنیم:

(مجموع ریشه‌ها) $x' + x'' = \frac{-b}{a}$ ، (حاصل ضرب ریشه‌ها) $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$

• دقت کنید که ممکن است در امتحانات، ریشه‌های معادله را با x_1 و x_2 هم نمایش دهند.

• حال شاید بپرسید چرا $x' + x'' = \frac{-b}{a}$ و $x'.x'' = \frac{c}{a}$ می‌شوند؟ اثبات این دو فرمول به صورت زیر است: (این اثبات‌ها در امتحان از شما فواید کمی می‌دهد.)

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x'.x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a}$$

سؤال بدون حل معادله $3x^2 - 2x - 8 = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

پاسخ دلتای معادله بالا مثبت است، (فورتون دلتا رو حساب کنید) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3} \\ x'.x'' = \frac{c}{a} = \frac{-8}{3} \end{cases}$$

سؤال اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $-x^2 + 3x + 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{① } 5x_1 + 5x_2 \quad \text{② } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

پاسخ ① از عدد ۵ فاکتور می‌گیریم:

$$5x_1 + 5x_2 = 5(x_1 + x_2) = 5\left(\frac{-b}{a}\right) = 5\left(\frac{-(-3)}{-1}\right) = 5 \times 3 = 15$$

مجموع ریشه‌ها

② بین دو کسر، علامت جمع وجود دارد، پس مخرج مشترک می‌گیریم:

صورت کسر، مجموع ریشه‌ها و مخرج آن، حاصل ضرب ریشه‌ها است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-3}{-1} = \frac{(-3)(-1)}{(-1)(+2)} = \frac{3}{-2}$$

سؤال در معادله $2mx^2 - (4m+1)x - 8m^2 = 0$ ، اگر مجموع ریشه‌ها ۳ باشد، حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

پاسخ مجموع ریشه‌ها به ما داده شده پس $\frac{-b}{a}$ را با ۳ مساوی قرار می‌دهیم تا m پیدا شود:

$$\frac{2m}{a} x^2 - \frac{(4m+1)}{b} x - \frac{8m^2}{c} = 0$$

$$x' + x'' = 3 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 3 \Rightarrow \frac{4m+1}{2m} = 3 \Rightarrow 4m+1 = 6m \Rightarrow 4m - 6m = -1 \Rightarrow -2m = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$x'.x'' = \frac{c}{a} = \frac{-8m^2}{2m} = -4m = -4\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

ضرب یک عدد در یک معادله

اگر یک معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ را در یک عدد دلخواه مخالف صفر ضرب کنیم، جواب‌های معادله، تغییری نخواهند کرد. مثلاً ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ با ریشه‌های معادله $2x^2 - 10x - 2 = 0$ برابرند و ریشه‌های هر دو برابر با $\frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$ هستند. (جملات معادله اول در عدد ۲ ضرب شدن و معادله دوم به دست آمده.) پس بی‌شمار معادله می‌توان ساخت که جواب‌های همه آن‌ها با هم برابر هستند.

نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش به ما داده شده است

اگر فرض کنیم ریشه‌های یک معادله درجه دوم برابر m و n باشند، خود معادله درجه دوم از رابطه $(x-m)(x-n) = 0$ به دست می‌آید. به عنوان مثال، معادله درجه دومی که ریشه‌هایش -2 و 7 باشد به شکل زیر به دست می‌آید:

$$(x - (-2))(x - 7) = 0 \Rightarrow (x+2)(x-7) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 14 = 0$$

ضرب می‌کنیم

تذکر معادله درجه دومی که دارای ریشه مضاعف m باشد برابر است با $(x-m)^2 = 0$ مثلاً معادله درجه دومی که ریشه مضاعف ۳ داشته باشد، عبارت است از $(x-3)^2 = 0$ البته اگر خواستید می‌توانید این معادله را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $x^2 - 6x + 9 = 0$ نیز بنویسید.

سؤال ۱ معادله درجه دومی بنویسید که:

- ۱ ریشه‌هایش $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3}$ باشند.
- ۲ تنها ریشه‌اش، عدد ۴ باشد.
- ۳ ریشه نداشته باشد.

پاسخ ۱ اگر ریشه‌ها m و n بنامیم، خواهیم داشت:

$$(x-m)(x-n) = 0 \xrightarrow{\substack{m=\frac{1}{3} \\ n=\frac{1}{3}}} (x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3}) = 0 \xrightarrow{\text{پرانتزها را ضرب می‌کنیم.}} x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

۲ ریشه مضاعف را m می‌نامیم: با هم جمع می‌کنیم.

$$(x-m)^2 = 0 \xrightarrow{m=4} (x-4)^2 = 0 \xrightarrow{\text{می‌توانیم اتحاد را باز کنیم.}} x^2 - 8x + 16 = 0$$

۳ هر معادله‌ای شبیه $x^2 = -4$ جواب ندارد چون نمی‌توانیم از عدد منفی، جذر بگیریم.

نکته! در دو حالت می‌توانیم بدون آن‌که معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را حل کنیم خیلی سریع به جواب‌های آن دسترسی پیدا کنیم (فقط در

آزمون‌های آزمایشی از این نکته استفاده کنید).

حالت اول اگر $a + b + c = 0$ باشد ریشه‌ها عبارتند از $x' = 1$ و $x'' = \frac{c}{a}$

حالت دوم اگر $a + c = b$ باشد ریشه‌ها عبارتند از $x' = -1$ و $x'' = \frac{-c}{a}$

در این دو حالت دیگر نیازی نیست دلتا را بررسی کنیم.

سؤال ۱ جواب‌های معادله $250x^2 - 200x - 50 = 0$ برابر و می‌باشند.

۲ جواب‌های معادله $20x^2 - 40x - 60 = 0$ برابر و می‌باشند.

$$250x^2 - 200x - 50 = 0 \Rightarrow a + b + c = 250 - 200 - 50 = 0 \Rightarrow x' = 1 \text{ و } x'' = \frac{c}{a} = \frac{-50}{250} = \frac{-1}{5}$$

$$20x^2 - 40x - 60 = 0 \Rightarrow a + c = 20 - 60 = -40 = b \Rightarrow x' = -1 \text{ و } x'' = \frac{-c}{a} = \frac{-(-60)}{20} = 3$$

معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

پرسش‌های تشریحی

بسته
۲

● معادلات زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید.

۱۳. $2x^2 - 32 = 0$ (تجزیه)

۱۲. $\frac{x^2}{5} = x$ (تجزیه)

۱۵. $9x^2 + 3x - 2 = 0$ (تجزیه)

۱۴. $(x+5)(x-7) = x-7$ (تجزیه)

۱۷. $25x^2 - 20x + 4 = 0$ (تجزیه)

۱۶. $x^2 + 18x - 19 = 0$ (تجزیه)

۱۹. $x^4 - 2x^2 = 0$ (تجزیه)

۱۸. $(x-8)^2 = 25$ (ریشه‌گیری)

۲۱. $-2x^2 - 200 = 0$ (ریشه‌گیری)

۲۰. $5x^2 - 125 = 0$ (ریشه‌گیری)

۲۳. $x^2 - 5x + 6 = 0$ (مربع کامل)

۲۲. $(3x-4)^2 - 16 = 0$ (ریشه‌گیری)

۲۵. $x^2 + \frac{1}{4} = -x$ (مربع کامل)

۲۴. $9x^2 + 3x - 2 = 0$ (مربع کامل)

۲۷. $3x(x-3) = -x^2 - 2$ (روش کلی یا دلتا)

۲۶. $x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$ (روش کلی یا دلتا)

۲۸. دو معادله درجه دوم مثال بنویسید که جواب (ریشه) نداشته باشند.

۲۹. اگر یکی از جواب‌های معادله $0 = 3 - 2Kx - 5x^2$ برابر (-1) باشد، مقدار K و ریشه دیگر معادله را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۰. بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $0 = \frac{3}{8} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}x^2$ را به دست آورید.

۳۱. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $-\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند. آیا این معادله منحصر به فرد است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۲. معادله درجه دومی بنویسید که $x = -8$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

● با توجه به معادله $K = (x - 3)^2$ به چهار پرسش زیر پاسخ دهید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۳. جواب‌های این معادله را در صورت وجود به ازای $K = 1$ ، $K = 2$ ، $K = 0$ ، $K = -16$ به دست آورید.

۳۴. به ازای چه مقادیری از K معادله ریشه مضاعف دارد؟

۳۵. به ازای چه مقادیری از K معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد؟

۳۶. به ازای چه مقادیری از K معادله ریشه حقیقی ندارد؟

۳۷. کدام یک از معادلات زیر، به ازای هر مقدار K همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف $x^2 + Kx - 3 = 0$

ب $x^2 - 2x + K = 0$

● معادلات زیر را به روش دلخواه حل کنید:

۳۸. $(x - 1)^2 = (3x + 2)^2$

۳۹. $x(2x + 1) = -3$

۴۰. $(3x + 2)(2x - 1) = x(3x + 6)$

۴۱. $25(x - 2)^2 = 9$

۴۲. با توجه به معادله $0 = mx^2 - 4x + 1$ مقدار m را طوری تعیین کنید که:

الف معادله دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز باشد.

ب معادله دارای ۱ ریشه مضاعف (۲ ریشه یکسان) باشد.

پ معادله ریشه حقیقی نداشته باشد.

۴۳. اگر یکی از ریشه‌های معادله $0 = x - 2 + \frac{(m-1)}{3}x^2$ برابر ۲ باشد، مقدار m و ریشه دیگر معادله را به دست آورید.

۴۴. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $1/6$ و $-2/3$ باشند. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

۴۵. مقدار m را طوری تعیین کنید که مجموع ریشه‌های معادله $0 = mx^2 - 1 + (m-8)x$ برابر $1/4$ باشد؟

۴۶. به ازای چه مقدار از k در معادله $0 = 4kx^2 - (k+3)x + 8k$ مجموع ریشه‌ها با حاصل ضرب ریشه‌ها برابر می‌باشد؟

۴۷. بدون حل معادله $0 = x^2 - 3x - 1$ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید: $(x' \text{ و } x'')$ ریشه‌های معادله داده شده هستند.

الف $x' + x''$

ب $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$

ت $4x' + 4x''$

۴۸. حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $0 = 2x^2 - 7x + m - 2$ برابر ۳ است. ریشه‌های این معادله را به دست آورید.

۴۹. اگر ریشه‌های معادله $0 = 2x^2 - 5x + m$ عکس یکدیگر باشند، مقدار m و ریشه‌ها را به دست آورید. (مخصوص علاقمندان)

۵۰. در معادله درجه دوم $0 = x^2 - (m-2)x + 2m$ مجموع ریشه‌ها برابر ۱۰ است، ریشه بزرگ‌تر معادله را به دست آورید.

۵۱. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $0 = x^2 - 5x - 15$ باشند، حاصل عبارت‌های $x'^2x'' + x'x''^2$ و $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$ را به دست آورید. (مخصوص علاقمندان)

مساحت مثلث = مساحت مستطیل

۷

$$\Rightarrow (x+1)(2x+3) = \frac{(\cancel{x})(x+5)}{x}$$

$$2x^2 + 3x + 2x + 3 = 2x^2 + 10x \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{عرض مستطیل} = x+1 = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5} \\ \text{طول مستطیل} = 2x+3 = 2\left(\frac{3}{5}\right) + 3 = \frac{21}{5} \end{cases}$$

۸ مقدار تولید فولاد در روز شنبه را x فرض می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & \xrightarrow{\times 2} & 2x & \xrightarrow{\times 2} & 4x & \xrightarrow{\times 2} & 8x & \xrightarrow{\times 2} & 16x & \xrightarrow{\times 2} & 32x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{شنبه} & & \text{یکشنبه} & & \text{دوشنبه} & & \text{سه‌شنبه} & & \text{چهارشنبه} & & \text{پنج‌شنبه} \end{array}$$

$$\text{فولاد تولیدی در پایان روز پنج‌شنبه} = 32x = 320$$

$$\Rightarrow x = \frac{320}{32} = 10 \text{ تُن}$$

$$\text{مجموع کل فولاد تولیدی در یک هفته} = x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x$$

$$= 63x = 63 \times 10 = 630 \text{ تُن}$$

$$\text{اختلاف فولاد تولیدی روزهای سه‌شنبه و پنج‌شنبه} = 32x - 8x$$

$$= 24x = 24 \times 10 = 240 \text{ تُن}$$

۹ اگر این سه عدد زوج متوالی را x ، $x+2$ و $x+4$ فرض کنیم،

خواهیم داشت:

$$x + x + 2 + x + 4 = 42 \Rightarrow 3x + 6 = 42 \Rightarrow 3x = 36$$

$$\Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$$

$$\Rightarrow \text{بزرگ‌ترین عدد} = x + 4 = 12 + 4 = 16$$

$$(x+5)^2 - (2x-3)^2 = 38 - 3x^2$$

اتحاد مربع اتحاد مربع
دو جمله‌ای دو جمله‌ای

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 - (4x^2 - 12x + 9) = 38 - 3x^2$$

$$\Rightarrow \underline{x^2 + 10x + 25} - \underline{4x^2 - 12x + 9} = 38 - 3x^2$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 22x = 38 - 3x^2 - 16 \Rightarrow x = \frac{22}{22} = 1$$

۱۱ طول کوچک‌ترین ضلع را x فرض می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$x + 5 = \text{طول ضلع متوسط و } 4x + 1 = \text{طول بزرگ‌ترین ضلع}$$

$$\text{محیط مثلث} = 80 \Rightarrow x + (x+5) + (4x+1) = 80$$

$$\Rightarrow 6x + 6 = 80 \Rightarrow 6x = 74 \Rightarrow x = \frac{74}{6}$$

$$\frac{x^2}{5} = x \Rightarrow x^2 = 5x$$

۱۲

$$\Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5$$

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-5}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{2(2x+1) - 3(x-5)}{6} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{4x+2-3x+15}{6} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x+17}{6} = \frac{x}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$4x+68=6x \Rightarrow 6x-4x=68 \Rightarrow 2x=68 \Rightarrow x=34$$

$$\frac{5}{y}(10x-28) = 3x-2 \Rightarrow 25x-70 = 3x-2$$

$$\Rightarrow 25x-3x = 70-2 \Rightarrow 22x = 68 \Rightarrow x = \frac{68}{22} = \frac{34}{11}$$

$$(3x-1)(3x+7) = (3x-2)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 21x - 3x - 7 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$\Rightarrow 18x + 12x = 4 + 7 \Rightarrow 30x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{30}$$

$$\frac{5x+1}{2} - x = 2 \Rightarrow \frac{5x+1-2x}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 3x+1=4 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$$

۵ اگر تعداد افراد گروه را x فرض کنیم خواهیم نوشت:

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ x & + & x & + & \frac{x}{2} & + & \frac{x}{2} + 1 = 100 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{ما} & & \text{ما} & & \text{(نصف ما)} & & \text{(نصف ما) نفر} \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 99 \Rightarrow \frac{8x + 2x + x}{4} = 99$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 11x = 396 \Rightarrow x = \frac{396}{11} = 36$$

۶ حقوق کارگر را x فرض کرده و خواهیم نوشت:

$$\text{حقوق کارگر} = 4x \quad \text{حقوق مهندس} = 4 \times \text{حقوق کارگر}$$

$$\text{حقوق مدیر بخش} = \frac{2}{5} \times \text{حقوق مهندس}$$

$$\Rightarrow 4x = \frac{2}{5} \times \text{حقوق مدیر بخش}$$

$$\Rightarrow \text{حقوق مدیر بخش} = 4x \times \frac{5}{2} = 10x$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض سوال}} \text{حقوق ۱۲ کارگر} + \text{حقوق ۸ مهندس} + \text{حقوق ۵ مدیر}$$

$$= 100$$

$$\Rightarrow 5(10x) + 8(4x) + 12(x) = 100$$

$$\Rightarrow 50x + 32x + 12x = 100 \Rightarrow 94x = 100$$

$$\Rightarrow x = \frac{100}{94} = 1/06$$

یعنی حقوق یک کارگر در ماه تقریباً ۱ میلیون تومان می‌باشد.

$$x^2 - 5x = -6 \xrightarrow{\text{افزودن } (\frac{-5}{2})^2 = \frac{25}{4}} x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4}$$

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\Rightarrow (x - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 \\ x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\div 9} x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0 \quad 23$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9} \xrightarrow{\text{افزودن } (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36}} x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36}$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \Rightarrow (x + \frac{1}{6})^2 = \frac{9}{36}$$

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{6})^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} x + \frac{1}{6} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ x + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x \Rightarrow x^2 + 1x = \frac{-1}{4} \quad 24$$

$$\xrightarrow{\text{افزودن } (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}} x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 0$$

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$1x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \quad 25$$

$$= (\sqrt{3})^2 - 4(1)(-2) = 3 + 8 = 11$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{2(1)} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2} \\ x'' = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

$$3x(x-2) = -x^2 - 2 \Rightarrow 3x^2 - 9x + x^2 + 2 = 0 \quad 26$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(4)(2) = 81 - 32 = 49$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2(4)} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{9+7}{8} = 2 \\ x'' = \frac{9-7}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2x^2 - 32 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 16 = 0 \quad 13$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow x = -4, x = 4$$

$$(x+5)(x-7) - (x-7) = 0 \Rightarrow (x-7)(x+5-1) = 0 \quad 14$$

فکتور از (x-7)

$$\Rightarrow (x-7)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 7, x = -4$$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0 \quad 15$$

تجزیه با اتحاد جمله مشترک

$$\Rightarrow (3x+2)(3x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+2=0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ 3x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x^2 + 18x - 19 = 0 \Rightarrow (x+19)(x-1) = 0 \quad 16$$

تجزیه با اتحاد جمله مشترک

$$\Rightarrow \begin{cases} x+19=0 \Rightarrow x = -19 \\ x-1=0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$25x^2 - 20x + 4 = 0 \Rightarrow (\Delta x - 2)^2 = 0 \quad 17$$

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \Delta x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\Delta}$$

$$(x-8)^2 = 25 \xrightarrow{\text{جذر}} x - 8 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 5 \Rightarrow x = 13 \\ x - 8 = -5 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \quad 18$$

$$x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \quad 19$$

فکتور از x^2

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$5x^2 - 125 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 125 \quad 20$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{125}{5} = 25 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

$$-2x^2 - 200 = 0 \Rightarrow -2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = -100 \quad 21$$

این معادله جواب ندارد چون از -100 نمی‌توان جذر گرفت.

$$(3x-4)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (3x-4)^2 = 16 \quad 22$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} 3x-4 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} 3x-4 = 4 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \\ 3x-4 = -4 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

۳۳ $(x-3)^2 = K \xrightarrow{K=1} (x-3)^2 = 1$

جذر $\rightarrow x-3 = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x-3=1 \Rightarrow x=4 \\ x-3=-1 \Rightarrow x=2 \end{cases}$

۳۴ $(x-3)^2 = K \xrightarrow{K=2} (x-3)^2 = 2$

جذر $\rightarrow x-3 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x-3=\sqrt{2} \Rightarrow x=3+\sqrt{2} \\ x-3=-\sqrt{2} \Rightarrow x=3-\sqrt{2} \end{cases}$

۳۵ $(x-3)^2 = K \xrightarrow{K=0} (x-3)^2 = 0$

جذر $\rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x=3$ ریشه مضاعف

۳۶ $(x-3)^2 = K \xrightarrow{K=-16} (x-3)^2 = -16$
معادله بالا جواب ندارد چون نمی‌توانیم از -۱۶ جذر بگیریم.

۳۴ اگر $K=0$ باشد، معادله داده شده ریشه مضاعف دارد (طبق سؤال قبل)

۳۵ اگر $K > 0$ باشد، معادله داده شده ۲ ریشه حقیقی متمایز دارد. (در سؤال ۳۳ هم دیدید که به ازای $K=1$ و $K=2$ معادله ۲ ریشه متمایز داشت.)

۳۶ اگر $K < 0$ باشد، سمت راست معادله $(x-3)^2 = K$ منفی خواهد شد و می‌دانیم اعداد منفی جذر ندارند پس معادله هم جواب نخواهد داشت.

۳۷ $1x^2 + Kx - 3 = 0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = K^2 - 4(1)(-3) = K^2 + 12$

K^2 همواره نامنفی است (چون توانش زوج است) پس K هر چه باشد حاصل $(K^2 + 12)$ همیشه عددی مثبت خواهد شد لذا معادله داده شده همواره ۲ ریشه حقیقی و متمایز دارد.

۳۸ $1x^2 - 2x + K = 0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(K) = 4 - 4K$

حاصل $(4 - 4K)$ همیشه مثبت نیست پس نمی‌توان گفت معادله داده شده همواره ۲ ریشه حقیقی دارد.

۳۸ جذر از طرفین $(x-1)^2 = (3x+2)^2 \rightarrow x-1 = \pm(3x+2)$

$\begin{cases} x-1 = +(3x+2) \Rightarrow x-3x = 2+1 \Rightarrow -2x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \\ x-1 = -(3x+2) \Rightarrow x-1 = -3x-2 \Rightarrow x+3x = -2+1 \\ \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{cases}$

۳۹ $x(2x+1) = -3 \Rightarrow 2x^2 + x + 3 = 0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23$

معادله جواب ندارد چون دلتا عددی منفی شده است.

۲۸ $x^2 = -36$ (نمی‌توان از عدد منفی جذر گرفت.)

دلتای این معادله منفی می‌شود. $x^2 + x + 1 = 0$

۲۹ $-5x^2 - 2Kx + 3 = 0 \xrightarrow{x=-1} -5(-1)^2 - 2K(-1) + 3 = 0$

$\Rightarrow -5 + 2K + 3 = 0 \Rightarrow 2K = 2 \Rightarrow K = 1$

$-5x^2 - 2Kx + 3 = 0 \xrightarrow{K=1} -5x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 60 = 64$

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2(-5)} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{2+8}{-10} = -1 \\ x'' = \frac{2-8}{-10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{cases}$

۳۰ $-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{3}{8}$

مجموع ریشه‌ها $x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{-(-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{2} = -2$

حاصل ضرب ریشه‌ها $x'.x'' = \frac{c}{a} = \frac{\frac{3}{8}}{-\frac{1}{4}} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$

۳۱ اگر m و n ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، خود معادله برابر

است با $(x-m)(x-n) = 0$ لذا معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $-\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشد عبارت است از:

$(x - (-\frac{1}{3}))(x - \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3}) = 0$
ضرب می‌کنیم

$\Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$

در درسنامه گفتیم که اگر یک معادله رادری عدد دلخواه به جز صفر ضرب کنیم ریشه‌های معادله حاصل، همان ریشه‌های معادله اولیه هستند پس بی‌نهایت معادله می‌توان تشکیل داد که ریشه‌های همه آن‌ها $-\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

۳۲ اگر عدد K ریشه مضاعف یک معادله درجه دوم باشد، خود

معادله برابر است با $(x-K)^2 = 0$ بنابراین معادله خواسته شده برابر است با $(x-(-8))^2 = 0$ یا $(x+8)^2 = 0$ البته اگر دوست داشتید می‌توانید به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای چنین بنویسید:

$(x+8)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 16x + 64 = 0$

ضمناً طبق مطالب درسنامه، این معادله منحصر به فرد نیست.

وَدَّاسِدْ دَدَر
مَنْظَرِ امْرِئِ طَلَو
«عَلَّامِ»

گاج



پاسخ
نمونه‌های
کتاب
درسی

ریاضی و آمار ۱

فرمول
پیدا



فرمول پست

در این کتابچه،
«تمرین‌های» کتاب درسی
را به طور کامل پاسخ
داده‌ایم.
از آن جایی که تقریباً
بیش از نیمی از سؤالات
امتحانات نهایی مشابه
تمرینات کتاب درسی
طراحی می‌شوند مرور
مطالب این کتابچه در
شب امتحان به شما کمک
می‌کند تا با آمادگی کامل
سر جلسه امتحان
حاضر شوید.

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com

فهرست

فصل اول ۳ معادلهٔ درجهٔ دوم

فصل دوم ۲۲ تابع

فصل سوم ۴۷ کار با داده‌های آماری

فصل چهارم ۶۳ نمایش داده‌ها

فصل

معادله درجه دوم

درس ۱ | معادله و مسائل توصیفی

پیش‌متن | ص ۱۱ کتاب درسی

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می‌نامند. تنها جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (چرا؟)

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \xrightarrow{a \neq 0} \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

کاردکلاس | ص ۱۱ کتاب درسی

یک حواصیل خاکستری دسته‌ای از حواصیل‌های سفید را در جنگل حرا در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می‌دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟ یکی از آنها پاسخ داد: اگر دمی زبیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد: «ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم». لطفاً به پرنده کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را x فرض کنیم:

$$100 = 1 + \text{نصف نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما} + \text{ما}$$

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 = 100 \Rightarrow 2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

$$\xrightarrow{\times 4} 8x + 2x + x + 4 = 400 \Rightarrow 11x = 400 - 4$$

$$\Rightarrow 11x = 396 \Rightarrow x = \frac{396}{11} = 36$$

آیا معادله به دست آمده، درجه اول است؟ چرا؟ بله، زیرا به معادله‌ای به فرم $ax + b = 0$ رسیدیم.

$$11x - 396 = 0 \Rightarrow a = 11, b = -396$$

ضرایب a و b کدام‌اند؟

کاردکلاس | ص ۱۴ کتاب درسی

نیما از پسر عمویش کیان، سه سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسر عمومی کوچک‌تر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر $x - 3$ است. بنابراین:

$$x \times (x - 3) = 40$$

آیا می‌توانید جواب‌های معادله فوق را حدس بزنید؟ بله، جواب‌ها ۸ و -۵ هستند. این معادله از درجه چند است؟ درجه دوم

این معادله چند جواب دارد؟ دو جواب آیا عدد منفی هم در معادله صدق می‌کند؟ بله این جواب در این سؤال معنی دارد؟
 خیر، زیرا سن افراد منفی نمی‌شود. پس سن نیما $x = 8$ سال و سن کیان $8 - 3 = 5 - 3 = x - 3$ سال است.

تمرین | ص ۱۴ تا ۱۷ کتاب درسی

۱ هر کدام از عبارتهای زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن، به علاوه دو مساوی با سه برابر آن عدد، منهای دو باشد.
 $5x + 2 = 3x - 2$

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.
 $x^2 = x + 1$

۲ در یک کارخانه، حقوق یک مهندس دو برابر یک فن‌ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیرعامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

حقوق یک فن‌ورز را x فرض کرده و حقوق یک مهندس و یک مدیر را برحسب آن طبق فرض مسئله به دست می‌آوریم. حقوق مهندس، دو برابر حقوق یک فن‌ورز یعنی $2x$ است. از طرفی حقوق یک مهندس، $\frac{2}{3}$ حقوق مدیر خودش است. پس حقوق مدیر به شکل زیر به دست می‌آید:

$$(\text{حقوق مدیر}) = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x = \frac{2}{3} (\text{حقوق مدیر}) = \frac{2}{3} (\text{حقوق مهندس})$$

$$\Rightarrow \text{حقوق مدیر} = \frac{2x \times 3}{2} = 3x$$

از طرفی طبق فرض داریم: $55/5 = (\text{حقوق فن‌ورز}) + (\text{حقوق مهندس}) + (\text{حقوق مدیر})$

$$\Rightarrow 3(3x) + 8(2x) + 12x = 55/5 \Rightarrow 9x + 16x + 12x = 55/5$$

$$\Rightarrow 37x = 55/5 \Rightarrow x = \frac{55/5}{37} = 1/5$$

میلیون تومان $1/5$

۳ با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

اگر تولید کارخانه در روز شنبه x هزار تن باشد، تولید این کارخانه تا روز چهارشنبه به قرار زیر است:

روز	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه
تولید	x	$2x$	$4x$	$8x$	$16x$

کارخانه در پایان روز چهارشنبه ۶۴ هزار تن فولاد تولید کرده است، بنابراین داریم:

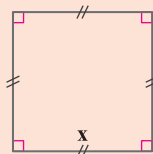
$$16x = 64 \Rightarrow x = 4$$

هزار تن $x = 4$ $\implies 31x = 31(4) = 124$ \implies مجموع تولید در ۵ روز

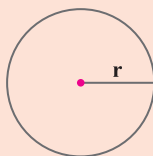
اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

هزار تن $x = 4$ $\implies 15x - x = 14x = 14(4) = 56$ \implies اختلاف تولید فولاد در روزهای شنبه و چهارشنبه

ت۴ اگر مجموع مساحت‌های دو شکل زیر برابر ۶ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



شکل (۱)



$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

شکل (۲)

مساحت شکل (۱) $= x^2$

مساحت شکل (۲) $= \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\right)^2 = \pi \left(\frac{x^2}{2\pi}\right) = \frac{x^2}{2}$

مجموع مساحت‌ها $= 6 \implies x^2 + \frac{x^2}{2} = 6 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + x^2 = 12 \implies 3x^2 = 12$

$$\implies x^2 = 4 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

۵ حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر حرف

بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می‌شود. حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص

شده‌اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف

«ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت

$4x^2$ مشخص می‌شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ($a = 4$) و دارای دو نقطه است ($n = 2$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

$$\begin{array}{cccc} \text{ه} & + & \text{چ} & + & \text{ن} & + & \text{غ} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 31 & & 7x^3 & & 29x & + & 22x \end{array}$$

معادل ریاضی $\rightarrow 22x + 29x + 7x^3 + 31$ غنچه

حال با توجه به توضیح فوق:

الف) جدول زیر را کامل کنید:

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
$1+2x$	آب: آب + آ + ب
$3x^3+1$	پا
$11x+12+4x^2$	ذرت: ذ + ر + ت

ب) الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.

$$3x^3 + 32x^2 + 1 + 28 + 2x + 12 + 12 + 8 + 28 + 4x^2$$

پ) آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟ بله به عنوان مثال معادل ریاضی

امید رستگاری به صورت زیر است: $1+28+32x^2+10+12+15+4x^2+26+1+12+32$

ت) با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

$$7x^3 + 19 + 30 + 12 + 32$$

چطوری

اگر در یک قالی با ابعاد $2/10m \times 2/80m$ (که عموماً 2×3 نامیده می‌شود) تعداد گره‌های

قالی $5/880/000$ عدد باشد:

الف) این قالی چند رج است؟

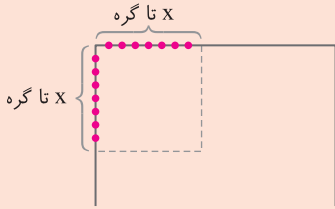
تعداد گره‌های موجود در یک ضلع مربع

$$7cm \times 7cm \text{ را رج قالی می‌نامند، پس کافی}$$

است ابتدا تعداد مربع‌های $7cm \times 7cm$

موجود در قالی را به دست آوریم و تعداد

گره‌های موجود در هر مربع را محاسبه کنیم.



$$\text{تعداد مربع‌های } 7cm \times 7cm \text{ موجود} = \frac{\text{مساحت قالی}}{\text{مساحت یک مربع } 7cm \times 7cm} = \frac{280cm \times 210cm}{7cm \times 7cm}$$

$$= 1200$$

$$7cm \times 7cm \text{ در هر مربع موجود} = \frac{5880000}{1200} = 4900$$

$$\Rightarrow x^2 = 4900 \Rightarrow x = \sqrt{4900} = 70$$

پس این قالی 70 رج است.