پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سوالات و مسائل مسابقـــات ریاضـی هفتـــم 7

از مجموعه مرشد

- ۲۰۰۰ تست (شامل: تیزهوشان، آزمون‌های ورودی مدارسِ برتر کشور، آزمون‌های پیشرفت تحصیلی سمپاد، مسابقات جهانی ریاضی، المپیادها و مسابقات علمی داخلی و خارجی و...)
- ۳۰۰ نکته‌ی کلیدی درس ریاضی اوّل دبیرستان که دانش‌آموزان ممتاز باید فراگیرند.
- پاسخ‌نامه‌ی تشریحی و نکات مهم کتابِ مرشد

وحید اسدی کیا

مرشد: مرجع رشد و شکوفایی دانش‌آموزان

ویژه دانش‌آموزان ممتاز و داوطلبان شرکت در مسابقات
و آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و برتر

بسم
الله
الرحمن
الرحيم

مقدمه

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «**مسابقات ریاضی هفتم**» از مجموعه‌ی «مرشد» را منتشر می‌کنیم. این کتاب که توسط آقای وحید اسدی‌کیا زیر نظر آقای هادی عزیززاده تألیف شده است، دانش‌آموزان کلاس اوّل دبیرستان (دوره‌ی اول متوسطه) را برای شرکت در مسابقات ریاضی و امتحانات و آزمون‌های ورودی مدارس خاص آماده می‌کند.

در تألیف این کتاب از منابع متعددی استفاده شده است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه‌ی تهران و مرکز استان‌های کشور
- آزمون‌های پیشرفت تحصیلیِ سمپاد (سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان)
- آزمون‌های ورودی روبوکاپ
- مسابقات علمی کشوری و بین مدرسه‌ای و المپیادهای داخلی و خارجی
- مسایل مسابقات جهانی ریاضی IMC ، کانگورو و آزمون جهانی تیمز
- مسایل مسابقات خارجی (کشورهای آمریکا، انگلیس، استرالیا، مجارستان، بلژیک، آفریقای جنوبی و...)
- مسایل المپیادهای مبتکران و آزمون‌های نشانه‌ی مبتکران
- آزمون‌های چهارگزینه‌ای داخلی مدارس تیزهوشان تهران

مسایل این آزمون‌ها، براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی هفتم (اول دبیرستان دوره‌ی متوسطه) طبقه‌بندی شده و از آسان به سخت مرتب گردیده‌اند. برخی از آن‌ها بدون راهنمایی و اشاره به نکته کلیدی قابل حل نیستند که با علامت ✉ مشخص شده‌اند تا دانش‌آموزان قبل از اقدام به حل آن‌ها، ابتدا نکته‌ی مورد نظر را مطالعه کنند. (تعداد پاکت‌ها نشان دهنده‌ی تعداد نکته‌های آن سؤال می‌باشد)

گفتنی است کتاب مرشد هفتم در دو جلد تألیف شده است:

- **جلد اوّل:** شامل سؤالات همراه با پاسخ‌نامه‌ی کلیدی آن‌ها
- **جلد دوم:** شامل پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سؤالات و نکات مهم مربوط به آن‌ها

امیدواریم کتاب ریاضی مرشد هفتم، مورد توجه خانواده‌ها، دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر افتد.

در پایان، وظیفه‌ی خود می‌دانیم از مؤلف کتاب آقای وحید اسدی‌کیا و دبیر مجموعه‌ی مرشد آقای هادی عزیززاده و از آقایان فتح‌اله پرباز، اباصلت نوراللهی، ناصر کاهه، پدرام کاشانی، پوریا فیاض‌نکو و علی وحدانی‌نژاد و خانم‌ها مهندس ندا قدسی و مهندس لیلا عباس‌زاد، عطیه وحدانی‌نژاد، فاطمه ستاری مرجانی، مریم مقصودی، فاطمه زرین‌گل، مهدیه مهدی‌زاده، پونه سپاهی که بنا به گزارش مؤلف با وی همکاری علمی داشته‌اند و بخش‌هایی از کتاب را ویرایش کرده‌اند، تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها لیلا مهرعلی‌پور (که زحمت حروف‌چینی، ترسیم شکل‌ها و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشتند) و بهاره خدامی (گرافیست) بسیار ممنونیم و برای همه‌ی این عزیزان آرزوی موفقیت داریم.

انتشارات مبتکران

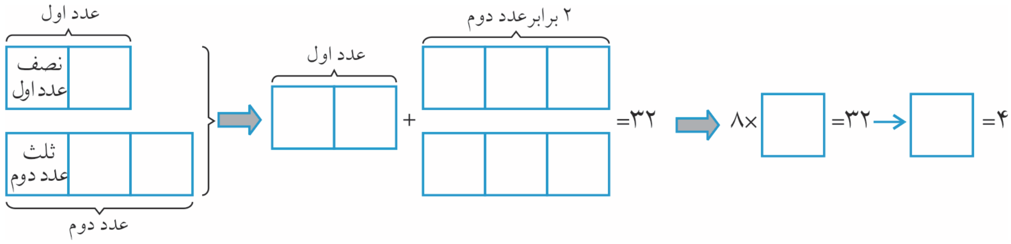
فهرست

فصل ۱

راهبردهای حل مسئله

راهبرد رسم شکل

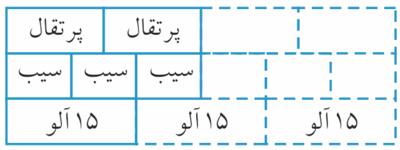
۱. گزینه د



درنتیجه عدد اولی $۸ = ۴ × ۲$ و عدد دومی $۱۲ = ۴ × ۳$ و اختلاف آن‌ها $۴ = ۸ - ۱۲$ است.

۲. گزینه ب راهبرد رسم شکل:

جرم ۴ پرتقال با جرم ۴۵ آلو برابر است.

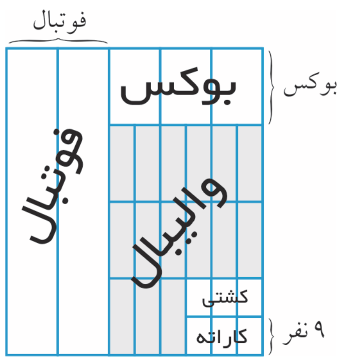


۳. گزینه الف

با توجه به این‌که: $\frac{۱۵}{۱۸} = \frac{۵ × ۳}{۶ × ۳}$

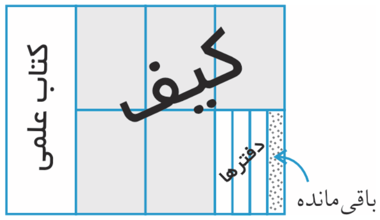
داریم: $۹ ÷ ۳ = ۳$ نفر

والیبال $۳۰ × ۳ = ۹۰$ نفر



۴. گزینه ج

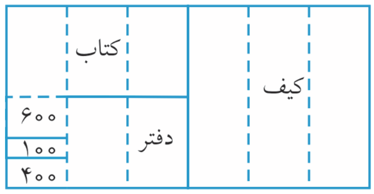
می‌دانیم: $\frac{۱}{۴} = ٪۲۵$ است. طبق شکلِ رسم شده، کل پول، ۳۲ برابر باقی‌مانـده اسـت و ارتباطی به قیمت دفترها ندارد.



۵. گزینه ب می‌دانیم $\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۴}$ است. با راهبرد رسم شکل داریم:

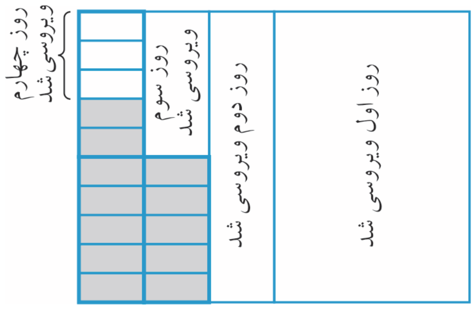
$\frac{۱}{۱۲}$ از پول می‌شود $۶۰۰ + ۱۰۰ + ۴۰۰ = ۱۱۰۰ \Leftarrow$

$\frac{۱}{۱۲} = \frac{۱۱۰۰}{\boxed{۱۳۲۰۰}}$

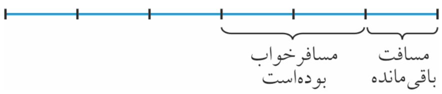


۶. گزینه الف

کسر باقی‌مانده از حافظه: $\frac{۱}{۵} = \frac{۱۲}{۶۰}$



۷. گزینه ب با رسم شکل حل می‌کنیم. کل مسیر را یک خط راست در نظر می‌گیریم و طبق مسأله پیش می‌رویم: از شکل مشخص است $\frac{۲}{۶}$ مسیر یعنی $\frac{۱}{۳}$ مسیر مسافر خواب بوده است.



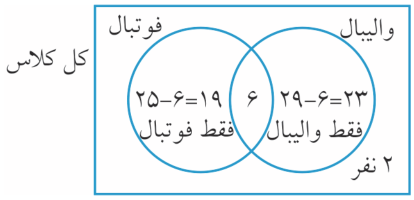
۸. گزینه د

۹. گزینه ب

ورزشی نفر $۵۰-۲=۴۸$

نفر $۲۵+۲۹=۵۴$

مشترک نفر $۵۴-۴۸=۶$



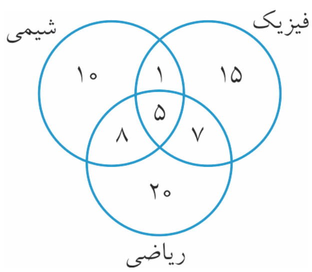
۱۹ نفر فقط عضو فوتبال و ۲۳ نفر فقط عضو والیبال هستند. پس:

فقط عضو یک رشته‌ی ورزشی هستند نفر $۱۹+۲۳=۴۲$

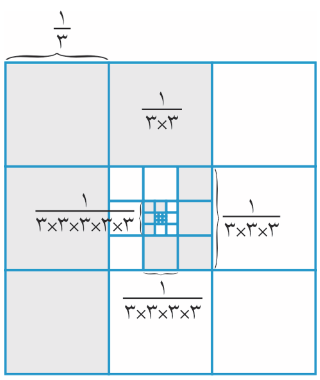
۱۰. گزینه د راهبرد رسم شکل: ابتدا ۴ نفر را از ۷۰ نفر کم می‌کنیم و ۵ نفر را وسط گذاشته سپس نفراتی که مشترک هستند را مشخص می‌کنیم.

با توجه به تعداد نفراتِ هر درس، شکل را کامل می‌کنیم. داریم:

۴۵ نفر فقط در یک درس ثبت نام کرده‌اند. $\Rightarrow ۱۰+۱۵+۲۰=۴۵$



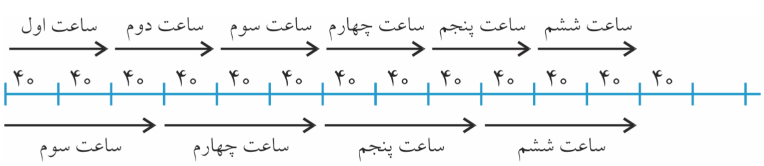
۱۱. گزینه ب طبق شکل زیر مشخص می‌شود که نزدیک به $\frac{۱}{۲}$ شکل رنگ شده است.



توجه: این الگوی رنگ زدن، همواره ادامه دارد.

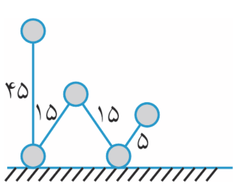
۱۲. گزینه د

اتومبیل پس از $۴=۲-۶$ ساعت از شروع حرکت به اتوبوس می‌سد.



۱۳. گزینه ب با راهبرد رسم شکل داریم:

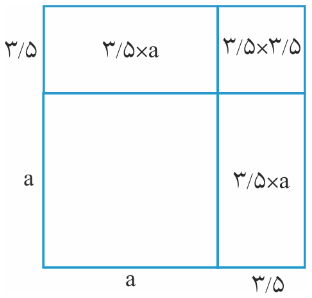
$\rightarrow ۴۵+۱۵+۱۵+۵=۸۰$



۱۴. گزینه ب فرض می‌کنیم جریمه‌ی اولین خطا $\square$ تومان باشد. داریم:

$$\square + \begin{matrix}\square\\\square\end{matrix} + \begin{matrix}\square\\\square\end{matrix}\begin{matrix}\square\\\square\end{matrix} + \begin{matrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{matrix}\begin{matrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{matrix} = ۱۵\times\square = ۲۲۵۰۰ \Rightarrow \square = ۱۵۰۰$$ تومان

۱۵. گزینه ج راهبرد رسم شکل:



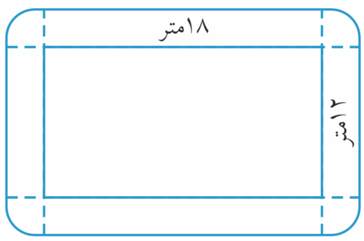
$۳/۵ \times ۳/۵ = ۱۲/۲۵$

$۸۲/۲۵ - ۱۲/۲۵ = ۷۰$

$۷۰ \div ۲ = ۳۵ \rightarrow ۳/۵ \times a = ۳۵ \rightarrow a = ۱۰$ سانتی‌متر

۱۶. گزینه ج در ۱۵ شبانه‌روزِ اول، ۱۵ متر بالا می‌آید و در روز شانزدهم، ۵ متر بالا می‌آید و به بالای گودال می‌رسد و نجات پیدا می‌کند.

۱۷. گزینه د طبق شکل در گوشه‌های استخر کمانی به شعاع ۱ متر زده می‌شود. ۴ کمان با هم یک دایره به شعاع ۱ متر می‌سازند و طول بقیه‌ی نرده بـا محیط اسـتخر برابـر است. پس داریم:

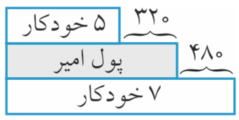


محیط دایره به شعاع ۱ $= ۲ \times ۳/۱۴ = ۶/۲۸$ متر

محیط استخر $= (۱۸ + ۱۲) \times ۲ = ۶۰$ متر

$\Rightarrow ۶۰ + ۶/۲۸ = ۶۶/۲۸$ متر

۱۸. گزینه د

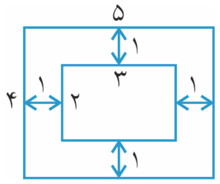


خودکار $۷ - ۵ = ۲$

قیمت ۲ خودکار $۳۲۰ + ۴۸۰ = ۸۰۰$

قیمت هر خودکار $۸۰۰ \div ۲ = ۴۰۰ \Rightarrow$ پول امیر $۵ \times ۴۰۰ + ۳۲۰ = ۲۳۲۰$

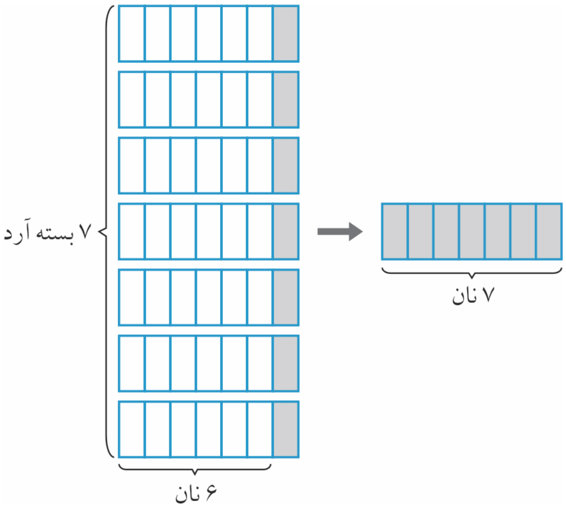
۱۹. گزینه ب با راهبرد رسم شکل مشخص می‌شود:



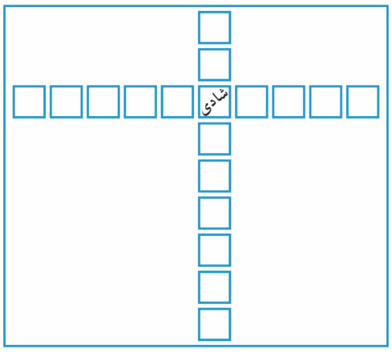
طول اتاق $۳ + ۲ = ۵$ و عرض اتاق $۲ + ۲ = ۴$

مساحت اتاق $\Rightarrow ۴ \times ۵ = ۲۰$ مترمربع

۲۰. گزینه ج با توجه به شکل زیر درمی‌یابیم که از هر بسته آرد، ۷ نان می‌توان درست کرد، پـس بـا ۶۲ بسـته آرد، ۴۳۴ نـان می‌توان درست کرد.



۲۱. گزینه ه

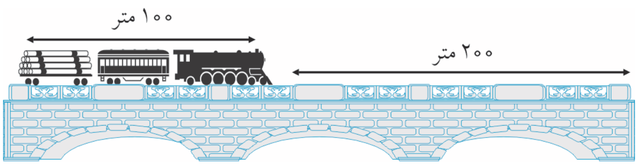


با توجه به شکل، در این سالن، ۹ ردیف صندلی و در هر ردیف، ۱۰ صندلی وجود دارد.

پس:

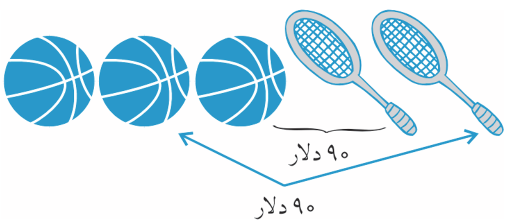
$۹ \times ۱۰ = ۹۰$ صندلی

۲۲. گزینه ج با توجه به شکل، برای آن‌که قطار به طور کامل از روی پل بگذرد، باید مسافتی برابر با مجموع طول پل و طول قطار را طی کند. یعنی ۳۰۰ متر. پس داریم:



$۳۰۰ \div ۱۰ = ۳۰$ ثانیه

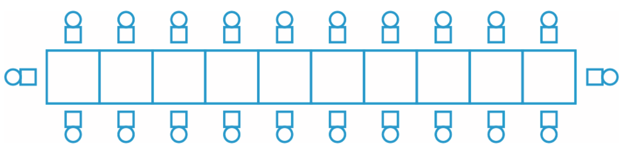
۲۳. گزینه ب با رسم شکل داریم:



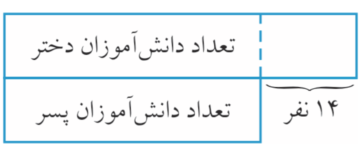
$\Rightarrow ۹۰ + ۹۰ +$  $= ۲۴۰$

$\Rightarrow$  $= ۲۴۰ - ۱۸۰ = ۶۰$ دلار قیمت هر توپ،

۲۴. گزینه د با توجه به شکل رسم شده، در مجموع، ۲۲ صندلی دور این میز قرار می‌گیرد.



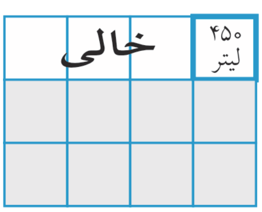
۲۵. گزینه الف



$\Rightarrow ۸۶ - ۱۴ = ۷۲$

$\Rightarrow ۷۲ \div ۲ = ۳۶$ تعداد پسرها

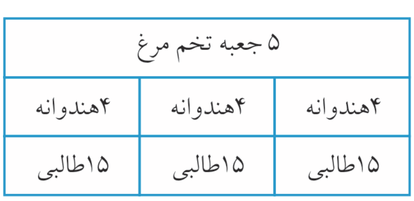
۲۶. گزینه د می‌دانیم ۲۵ درصد یعنی $\frac{۱}{۴}$. اگر بین ۳ و ۴، مخرج مشترکِ ۱۲ را در نظر بگیریم، داریم: $\frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$. بنابر شکل، داریم:

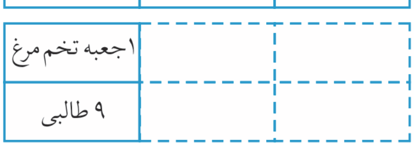


حجم استخر، $\rightarrow ۱۲ \times ۴۵۰ = ۵۴۰۰$ لیتر

حجم استخر، مترمکعب $\rightarrow ۵۴۰۰ \div ۱۰۰۰ = ۵/۴$

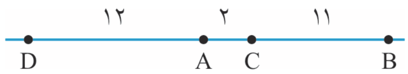
۲۷. گزینه ب طبق شکل مشخص است که جرم ۵ جعبه تخم‌مرغ با جرم $۴۵ = ۱۵ \times ۳$ طالبی برابر است. پس جرم هر جعبه تخم‌مرغ با $۹ = ۵ \div ۴۵$ طالبی برابر است. مجدداً با رسم شکل داریم:





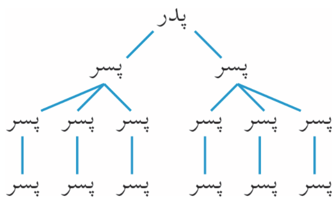
جرم ۳ جعبه تخم‌مرغ با جرم $۲۷ = ۹ \times ۳$ طالبی برابر است.

۲۸. گزینه الف با رسم شکل داریم:

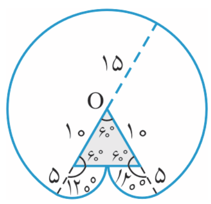


دورترین دو نقطه نسبت به یک‌دیگر، B و D هستند که فاصله‌ی آن‌ها ۲۵ می‌باشد.

۲۹. گزینه ب ۱۵ آقا. به شکل زیر توجه کنید:

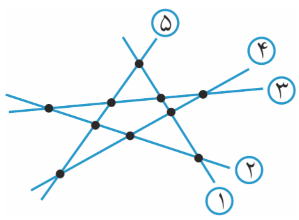


۳۰. گزینه ج در دایره‌ی بزرگ $\frac{5}{6}=\frac{300}{360}$ و در دایره‌ی کوچک: $\frac{1}{3}=\frac{120}{360}$ با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$(\frac{5}{6}\times 15\times 15\times \pi)+(2\times \frac{1}{3}\times 5\times 5\times \pi)=\frac{1125\times \pi}{6}+\frac{50\times \pi}{3}=\frac{1225\times \pi}{6}\simeq 204\times \pi$$

۳۱. گزینه ب با راهبرد رسم شکل، حداقل، ۱۰ شاخه گل لازم داریم.

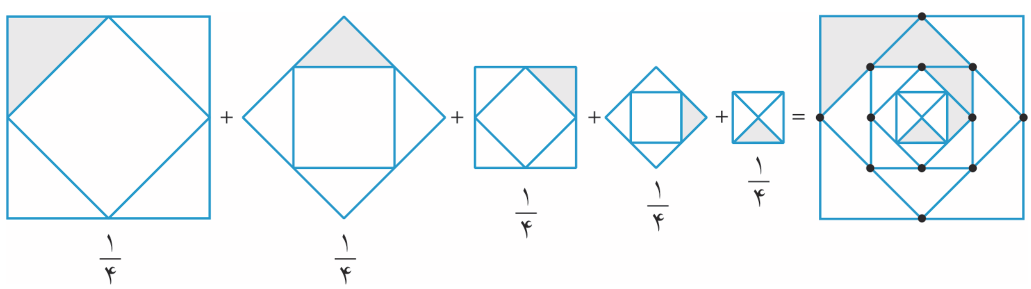


۳۲. گزینه ب

$$\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5})=\frac{58}{120}=\frac{29}{60}$$

۳۳. گزینه ب اگر در شکل دقت کنید، می‌بینید که از هر ۳ قسمتِ مساوی، یک قسمت رنگ شده است. پس $\frac{1}{3}$ از کل شکل رنگ شده است.

۳۴. گزینه ج از هر شکل $\frac{1}{4}$ رنگ شده است، پس $\frac{1}{4}$ از کل شکل رنگی است. مربعِ داخلی هر شکل را در نظر نگیرید.



راهبرد تفکر نظام‌دار یا الگوسازی (جدول نظام‌دار)

۳۵. گزینه د

البته بهتر بود در مسئله عنوان می‌کرد که سوارکارها بر روی اسب‌ها سوار نشده‌اند.

مجموع پاها	تعداد سوارکار	تعداد اسب	
۶۶ = ۲۲ + ۴۴	۱۱	۱۱	
۶۸ = ۲۰ + ۴۸	۱۰	۱۲	
۷۰	۹	۱۳	
۷۲	۸	۱۴	← جواب

۳۶. گزینه ب

عدد طبیعی اولی	۱	۲	۴	۶	۱۲
عدد طبیعی دومی	۱۳۲	۶۶	۳۳	۲۲	۱۱
مجموع	۱۳۳	۶۸	۳۷	۲۸	۲۳

جواب

همه‌ی حالت‌هایی که حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی، ۱۳۲ می‌شود را می‌نویسیم. با توجه به این‌که: $۱۳۲ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۱۱$

۳۷. گزینه د

توجه: دو عدد باید متمایز باشند.

عدد طبیعی اول	۱	۲	۳	۴	۶
عدد طبیعی دوم	۳۶	۱۸	۱۲	۹	۶
حاصل‌جمع	۳۷	۲۰	۱۵	۱۳	۱۲

جواب

غیرقابل قبول

۳۸. گزینه ج

عدد طبیعی اول	۱	۲	۳	...	۱۱	۱۲
عدد طبیعی دوم	۲۳	۲۲	۲۱	...	۱۳	۱۲
حاصل‌ضرب	۲۳	۴۴	۶۳	...	۱۴۳	۱۴۴

جواب

نکته ۱: اگر مجموع دو مقدار، عددی ثابت باشد، حاصل‌ضربشان وقتی بیش‌ترین مقدار را خواهد داشت که دو عدد با هم برابر باشند یا اختلافِ آن دو عدد، کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

۳۹. گزینه الف

عدد اولی	۱	۲	...	۱۳	۱۴	۱۵
عدد دومی	۳۰	۲۹	...	۱۸	۱۷	۱۶
حاصل‌ضرب	۳۰	۵۸	...	۲۳۴	۲۳۸	۲۴۰

جواب

۴۰. گزینه ب اعداد ۳ رقمی با ارقام متمایز ساخته شده از ۳، ۵، ۷ و ۹ را نوشته، سپس عدد ۲ را در یکان قرار می‌دهیم. ۴ حالتِ مشابه پیش می‌آید. پس داریم:

هزارگان	صدگان	دهگان	یکان
۹	۷	۳,۵	۲
۹	۵	۳,۷	۲
۹	۳	۵,۷	۲
۷	۹	۳,۵	۲
⋮	⋮	⋮	⋮

۶ عدد $\Rightarrow ۴ \times ۶ = ۲۴$ عدد

۴۱. گزینه د با استفاده از جدول نظام‌دار و حالت‌بندی مناسب برای تعداد اسکناس‌های ۲۰۰ تومانی داریم:

تعداد اسکناس‌های ۲۰۰ تومانی	تعداد حالات
۵	۱
۴	۳
۳	۵
۲	۷
۱	۹
۰	۱۱

تعداد کل حالات $\Rightarrow ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ = ۳۶$

۴۲. گزینه د ۱۰ حالت:

تعداد سکه‌های ۵ تومانی	۰	۱	۳	۵	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰
تعداد سکه‌های ۱۰ تومانی	۰	۲	۱	۰	۵	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد سکه‌های ۲۵ تومانی	۲	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰

۴۳. گزینه ج راهبرد جدول نظام‌دار:

صدگان	دهگان	یکان	
۱	۲	۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷، ۸ ، ۹	→ ۷ عدد
۱	۳	۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷، ۸ ، ۹	→ ۶ عدد
۱	۴	از ۵ تا ۹	→ ۵ عدد
۱	۵	از ۶ تا ۹	→ ۴ عدد
۱	۶	از ۷ تا ۹	→ ۳ عدد
۱	۷	۸ و ۹	→ ۲ عدد
۱	۸	۹	→ ۱ عدد
۲	۳	از ۴ تا ۹	→ ۶ عدد
۲	۴	از ۵ تا ۹	→ ۵ عدد
۲	۵	از ۶ تا ۹	→ ۴ عدد
۲	۶	از ۷ تا ۹	→ ۳ عدد
۲	۷	۸ و ۹	→ ۲ عدد
۲	۸	۹	→ ۱ عدد
۳	۴	از ۵ تا ۹	→ ۵ عدد
⋮	⋮	⋮	

$$(۷+۶+۵+...+۱)+(۶+۵+۴+...+۱)+(۵+۴+...+۱)+(۴+۳+۲+۱)+(۳+۲+۱)+(۲+۱)+۱$$
$$=\frac{۷\times۸}{۲}+\frac{۶\times۷}{۲}+\frac{۵\times۶}{۲}+\frac{۴\times۵}{۲}+\frac{۳\times۴}{۲}+۳+۱=۸۴$$

۴۴. گزینه ج **روش اول:** انگشتانِ دو دست را از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری می‌کنیم. داریم:

تعداد حالات	شماره‌ی انگشت		
۸	۳,۴,...۱۰	۲	۱
۷	۴,۵,...۱۰	۳	۱
۶	۵,۶,...۱۰	۴	۱
۵	۶,۷,...۱۰	۵	۱
۴	۷,۸,۹,۱۰	۶	۱
۳	۸,۹,۱۰	۷	۱
۲	۹,۱۰	۸	۱
۱	۱۰	۹	۱
۱+۲+...+۸ = ۳۶	تعداد کل حالات		

و

تعداد حالات	شماره‌ی انگشت		
۷	۴,۵,...۱۰	۳	۲
۶	۵,۶,...۱۰	۴	۲
۵	۶,۷,...۱۰	۵	۲
۴	۷,۸,۹,۱۰	۶	۲
۳	۸,۹,۱۰	۷	۲
۲	۹,۱۰	۸	۲
۱	۱۰	۹	۲
۱+۲+...+۷ = ۲۸	تعداد کل حالات		

و .... و

تعداد حالات	شماره‌ی انگشت		
۱	۱۰	۹	۸
۱	تعداد حالات		

$$\Rightarrow (۱+۲+۳+...+۸)+(۱+۲+۳+...+۷)+(۱+۲+۳+...+۶)+...+(۱+۲)+(۱)=۳۶+۲۸+۲۱+۱۵+۱۰+۶+۳+۱=۱۲۰$$ حالت

روش دوم: برای حل این‌گونه سؤال‌ها می‌توان از نکته‌ی زیر استفاده کرد:

نکته ۲: تعریف فاکتوریل:

$$n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times(n-۳)\times\cdots\times۱$$

مثال:

$$۳!=۳\times۲\times۱=۶$$

$$۵!=۵\times۴!=۵\times۴\times۳!=۵\times۴\times۳\times۲!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$$

توجه: $۱!=۰!=۱$

انتخاب r شیء از بین n شیء از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین ۵ شیء، ۲ شیء را انتخاب کرد؟

جواب: $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\times 3!}=\frac{5\times 4\times 3!}{2\times 1\times 3!}=\frac{20}{2}=10$

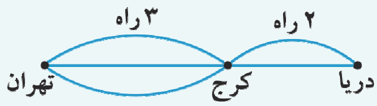
با توجه به نکته‌ی (۲) داریم: $\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\times(10-3)!}=\frac{10!}{3\times 2\times 1\times 7!}=\frac{10\times 9\times 8\times \cancel{7!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{7!}}=120$

راهبرد اصل ضرب

۴۵. گزینه ب

نکته ۳: اصلِ ضرب: هرگاه برای انجام عمل اول، a انتخاب و برای انجامِ عمـل دوم، b انتخـاب و بـرای انجام عمل سوم، c انتخاب و... داشته باشیم، آن‌گاه: برای انجام عملِ کل، $a\times b\times c\times ...$ انتخاب خواهیم داشت.

مثال: در شکل زیر برای رفتن از تهران به دریا، چند مسیر مختلف داریم؟ (به شرط گذر از کرج)



$3\times 2=6$

توجه کنید؛ رقمی که برای دهگان انتخاب می‌کنید، نباید برای یکان انتخاب کنید زیرا باید رقم‌ها مختلف باشند. به طـور مثـال اگـر در دهگان رقم ۷ را گذاشتید، در یکان نباید رقم ۷ قرار دهید.

تعدادِ انتخاب‌ها ← $\boxed{5}\times\boxed{4}=20$

دهگان	یکان
۱	۱
۳	۳
۵	۵
۷	۹
۹	

۴۶. گزینه ب

تعدادِ انتخاب‌ها ← $\boxed{4}\times\boxed{5}=20$

دهگان	یکان
۲	۱
۴	۳
۶	۵
۸	۷
	۹

۴۷. گزینه الف اگر بخواهیم اعداد دو رقمی بزرگ‌تر از ۵۰ بنویسیم، پس دهگان حداقل باید از ۵ شروع شود. داریم:

تعدادِ انتخاب‌ها ← $\boxed{2}\times\boxed{5}=10$

۵	۱
۷	۲
	۳
	۵
	۷

۴۸. گزینه د تعدادِ انتخاب‌ها ← $\boxed{9}\times\boxed{9}\times\boxed{8}=648$

دقت کنید که رقم صفر را نمی‌توان در صدگان عدد قرار داد. درضمن رقمی را کـه بـرای صـدگان انتخـاب کـردیم، نبایـد در دهگـان استفاده کنیم و رقمی که در دهگان یا صدگان انتخاب کردیم، نباید در یکان به‌کار بریم.

۴۹. گزینه د بـرای رفـتن از A بـه C، $3\times 5=15$ راه و در برگشـت، $(3-1)\times(5-1)=8$ راه وجـود دارد کـه در کـل $15\times 8=120$ حالت امکان‌پذیر است.

۵۰. گزینه ج $4\times 3\times 2=24$

۵۱. گزینه ب

نکته ۴: اگر عددی را از راست به چپ بخوانیم و از چپ به راست بنویسیم، به عدد به دست آمده، مقلوبِ آن عدد می‌گوییم.

مثال: $۲۰۰۱ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۱۰۰۲$, $۷۲۳ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۳۲۷$

بعضی اعداد مقلوبشان با خودشان برابر است.

مثال: $۲۵۳۵۲ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۲۵۳۵۲$, $۱۸۱ \xrightarrow{\text{مقلوب}} ۱۸۱$

توجه کنید؛ برای این‌که مقلوب عدد ۵ رقمی با خودش برابر باشد، هر چه در دهگان هزار قرار دهیم، همان رقم را باید در یکان و هر چه در یکانِ هزار قرار دهیم، همان رقم را باید در دهگان قرار دهیم. پس داریم:

$$\underset{\text{دهگان هزار}}{۹} \times \underset{\text{یکان هزار}}{۱۰} \times \underset{\text{صدگان}}{۱۰} \times \underset{\text{دهگان}}{۱} \times \underset{\text{یکان}}{۱} = ۹۰۰$$

۵۲. گزینه ج $۳\times۳\times۳=۲۷$

۵۳. گزینه الف $۳\times۲\times۱=۶$

۵۴. گزینه الف آن دو کتابِ مشخص را به هم می‌چسبانیم، یک کتاب می‌شود که در این صورت مانند این‌است که بگوییم، ۳ کتاب داریم. پس: $۳\times۲\times۱=۶$

امّا همان دو کتاب را که به هم چسبانده‌ایم، می‌توانند جایشان را با هم عوض کنند. یعنی ۲ حالت دارد.

پس داریم: $۶\times۲=۱۲$ حالت

۵۵. گزینه د در این سؤال، در یکان باید رقم‌های زوج را به کار برد. پس داریم:

$$\underset{\text{صدگان}}{۱} \times \underset{\text{دهگان}}{۵} \times \underset{\text{یکان}}{۵} = ۲۵$$

۵۶. گزینه ب **روش اول:** اعداد را بنویسید. **روش دوم:** از رابطه‌ی زیر می‌توان تعداد را بــه دســت آورد. (! علامــتِ فاکتوریــل است. به طور مثال $۳!=۳\times۲\times۱$ و $۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ است.) تعداد کل اعداد داده شده، ۵ تا است که ۳ بار رقم ۲ و ۲ بار رقم ۷ تکرار شده است. داریم:

$$\frac{۵!}{۲!\times۳!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱\times۳\times۲\times۱}=۱۰$$

۵۷. گزینه هـ ۱۹۹۱,۱۹۱۹,۹۱۹۱,۹۹۱۱,۱۱۹۹,۹۱۱۹

۵۸. گزینه الف

نکته ۵: اگر عددی، دو رقمِ سمتِ راستش، ۰۰ یا ۲۵ یا ۵۰ یا ۷۵ باشد، بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

$$\boxed{۴}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱}+\boxed{۴}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱}+\boxed{۴}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱}+\boxed{۴}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱}=۴+۴+۴+۴=۱۶$$

۲	۲	۵	۲	۵	۰	۲	۷	۵	۲	۰	۰
۳			۳			۳			۳		
۵			۵			۵			۵		
۷			۷			۷			۷		

۵۹. گزینه هـ

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹=۴۵$$

۱۰	۲۰	۳۰		۹۰
	۲۱	۳۱	← به همین ترتیب →	۹۱
		۳۲		⋮
				۹۸

۶۰. گزینه ج حالت‌ها را بنویسید، داریم: ۹۳۳, ۳۹۳, ۳۳۹

۶۱. گزینه د هر یک از ۵ نقطه‌ی بالایی را می‌توان به هر یک از ۶ نقطه‌ی پایینی وصل کرد.

تعدادِ پاره‌خط‌ها $۵\times۶=۳۰$

۶۲. گزینه الف

$\boxed{۳}\times\boxed{۶}\times\boxed{۶}=۱۰۸$

۵
۷
۸

۶۳. گزینه هـ سطر اول را به $۱\times۲\times۳$ حالت یعنی ۶ حالت می‌توان رنگ زد. در سطر دوم اگر رنگ یکی از خانه‌ها معلوم باشد، رنگ دو خانه‌ی دیگر اجباراً معلوم می‌شود. یعنی سطر دوم را فقط به ۲ حالت می‌توانیم رنگ بزنیم. سطر سوم اجباراً معلوم می‌شود. به این ترتیب تعداد حالت‌ها برابر است با: $۶\times۲\times۱=۱۲$ است.

۶۴. گزینه ج عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹، عددی ۹ رقمی است که تمامِ رقم‌های آن به صورت صعودی قرار گرفته‌اند. حال با حذف هر رقم، عددی ۸ رقمی باقی می‌ماند که باز هم رقم‌های آن به صورت صعودی قرار دارد. در ضمن به هیچ عنوان در این عدد صفر به کار نمی‌رود!

۶۵. گزینه ب فرض می‌کنیم عارف و فاطمه کنار هم باشند، تعداد حالات را حساب کرده و از تعداد کل حالات کم می‌کنیم. عارف و فاطمه را یک نفر حساب می‌کنیم. داریم: $۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$. از طرفی عارف و فاطمه می‌توانند به ۲ حالت کنار هم قرار گیرند. پس تعدادِ کل حالاتی که عارف و فاطمه می‌توانند کنار هم باشند: $۲۴\times۲=۴۸$ است.

از طرفی تعدادِ کل حالات (چه در کنار هم باشند و چه نباشند)، $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$ حالت است. بنابراین تعداد حالاتی که عارف و فاطمه کنار هم نباشند، می‌شود:

$۱۲۰-۴۸=۷۲$ حالت

۶۶. گزینه ج در هر حالت، حجم باید ۲۴ شود. همه‌ی حالت‌ها را می‌نویسیم. پس داریم:

$(۲\times۶\times۲)$, $(۲\times۳\times۴)$, $(۱\times۴\times۶)$, $(۱\times۳\times۸)$, $(۱\times۲\times۱۲)$, $(۱\times۱\times۲۴)$

۶۷. گزینه ب عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد. در این سؤال مجموع رقم‌های (۷,۵,۳)، ۱۵ می‌شود که با آن‌ها می‌شود $۳\times۲\times۱=۶$ عدد مختلف ساخت از طرفی مجموع رقم‌های (۷,۵,صفر) نیز ۱۲ می‌شود که بر ۳ بخش‌پذیر است و با آن‌ها ۴ عدد می‌توان ساخت. پس در مجموع $۶+۴=۱۰$ عدد می‌توان ساخت.

۶۸. گزینه الف طبق اصلِ ضرب، تعدادِ رمزهای ۴ رقمی، $۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰=۱۰۰۰۰$ است.

در نتیجه: $۱۰۰۰۰\times۵=۵۰۰۰۰$ ثانیه $\rightarrow ۵۰۰۰۰\div۳۶۰۰=۱۳/۸۸\simeq۱۴$ ساعت

۶۹. گزینه ج

نکته ۶: تعداد دست دادن‌ها در یک گروه، مانندِ تعدادِ پاره‌خط‌ها با چند نقطه می‌باشد. یعنی اگر n نفر با هم دست داده باشند، تعداد عمل دست دادن از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید: $\dfrac{n\times(n-۱)}{۲}$

برعکس عمل می‌کنیم:

$۲۸\times۲=۵۶ \xrightarrow{\text{می‌دانیم}} ۸\times۷=۵۶ \rightarrow \boxed{n=۸}$

۷۰. گزینه د یکان باید عددی زوج باشد (۵ حالت)، دو رقم دیگر یا باید هر دو فرد باشند (۲۵ حالت) یا باید هر دو زوج باشند (۲۰ حالت) بنابراین عدد ۲ رقمی سمت چپ را می‌توان به ۴۵ حالت نوشت و یکان را به ۵ حالت. طبق اصل ضرب:

کل حالات $۴۵\times۵=۲۲۵$

راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

۷۱. گزینه الف ابتدا به کمک جدول نظام‌دار، همه‌ی حالت‌هایی که مجموع سن دو نفر ۲۰ می‌شود را نوشته و حالت‌های نامطلوب را حذف می‌کنیم تا به جواب برسیم:

عدد اول	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
عدد دوم	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰
حاصل‌ضرب	۱۹	۳۶	۵۱	۶۴	۷۵	۸۴	۹۱	۹۶	۹۹	۱۰۰

در نتیجه اختلاف آن‌ها: $۱۲-۸=۴$ سال می‌شود.

۷۲. گزینه ب ابتدا به کمک جدول نظام‌دار، همه‌ی حالت‌هایی که ضرب دو عدد طبیعی، ۳۰ می‌شود را نوشته و حالت‌های نامطلوب را حذف می‌کنیم تا به جواب برسیم:

عدد اول	۱	۲	۳	۵
عدد دوم	۳۰	۱۵	۱۰	۶
تفاضل	۲۹	۱۳	۷	۱

$\rightarrow ۳+۱۰=۱۳$

۷۳. گزینه د

عدد اول	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۴	۱	۱	۱
عدد دوم	۲	۳	۳	۴	۴	۵	۷	۳	۴	۶
عدد سوم	۱۰	۸	۷	۶	۵	۷	۲	۹	۸	۶
حاصل‌ضرب	۲۰	۴۸	۶۳	۷۲	۸۰	۳۵	۵۶	۲۷	۳۲	۳۲

$\rightarrow ۶-۳=۳$

توجه: غیر از حالات نوشته شده، حالت‌های دیگری هم وجود دارد.

۷۴. گزینه ج ابتدا همه‌ی حالت‌های ممکن را با جدول نظام‌دار می‌نویسیم و سپس جواب را پیدا می‌کنیم:

طول	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹
عرض	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

مساحت مستطیل $\Rightarrow ۱۲\times ۶=۷۲$ سانتی‌متر مربع

۷۵. گزینه ب

نکته ۷: اگر a تعداد سکه‌های اولیه باشد، آن‌گاه حداقل با n بار وزن کردن توسط ترازوی دو کفه‌ای می‌توان سکه‌ی تقلبی را یافت که n از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$\underbrace{۳\times ۳\times \cdots \times ۳}_{\text{n-۱ بار}} < a \le \underbrace{۳\times ۳\times \cdots \times ۳}_{\text{n بار}}$$

۸۰ سکه را بار اول به دو دسته‌ی ۲۷ تایی و یک دسته‌ی ۲۶ تایی تقسیم می‌کنیم. با یک‌بار وزن کردن می‌توان دسته‌ای را که شامل سکه‌ی تقلبی است مشخص کرد. بار اول دو دسته‌ی ۲۷ تایی را روی دو کفه می‌گذاریم. اگر با هم مساوی شوند، سکه‌ی تقلبی در دسته‌ی ۲۶ تایی است که در این صورت ۲۶ تا را به دو دسته‌ی ۹ تایی و یک دسته‌ی ۸ تایی تقسیم می‌کنیم. اگر ۲ دسته‌ی ۹ تایی با هم مساوی شوند، سکه‌ی تقلبی در دسته‌ی ۸ تایی است که آن را به دو دسته‌ی ۳ تایی و یک دسته‌ی ۲ تایی تقسیم می‌کنیم.

اگر دو دسته‌ی ۳ تایی باهم برابر شدند، سکه‌ی تقلبی در دسته‌ی ۲ تایی است که به‌راحتی با وزن‌کردن مشخص می‌شود و اگر سکه‌ی تقلبی در یکی از دسته‌های ۳ تایی باشد، با یک‌بار وزن کردن می‌توان سکه‌ی تقلبی را پیدا کرد. در نتیجه در کُل با حداقل ۴ بار وزن کردن می‌توان سکه‌ی تقلبی را یافت.

$$۲۷=۳\times ۳\times ۳<۸۰\le \underbrace{۳\times ۳\times ۳\times ۳}_{\text{۴ بار}}=۸۱$$

۷۶. گزینه الف طبق نکته‌ی (۷) داریم:

$$۲۱۸۷ = \underbrace{۳\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳}_{\text{۷ بار}} \geq ۱۳۸۶ > ۳\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳ = ۷۲۹$$

۷۷. گزینه ج

نکته ۸: اگر تعداد کلِ اعدادِ مورد بحث را a درنظر بگیریم، با جواب بله یا خیر، با طرح n سؤال می‌توان عددِ مفروض (فرض شده) را به دست آورد که n از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\underbrace{۲\times۲\times\cdots\times۲}_{n-۱\ \text{تا}} < a \leq \underbrace{۲\times۲\times\cdots\times۲}_{n\ \text{تا}}$$

روش اول: هر رمز سه رقمی را، یک عدد فرض می‌کنیم. به طور مثال ۴ = (۰۰۴) یا ۶۷ = (۰۶۷) بنابراین دنبالِ عددی سه رقمی از صفر (۰۰۰) تا ۹۹۹ می‌گردیم. به طور مثال در بداقبال‌ترین شرایط داریم:

سؤال ۱: آیا رمز مورد نظر فرد است؟ خیر

سؤال ۲: از ۵۰۰ بیش‌تر است؟ خیر

سؤال ۳: از ۲۵۰ بیش‌تر است؟ خیر

سؤال ۴: از ۱۲۵ بیش‌تر است؟ خیر

سؤال ۵: از ۶۲ بیش‌تر است؟ خیر

سؤال ۶: از ۳۱ بیش‌تر است؟ خیر

سؤال ۷: از ۱۵ بیش‌تر است؟ خیر

سؤال ۸: از ۷ بیش‌تر است؟ خیر

سؤال ۹: از ۳ بیش‌تر است؟ خیر

یعنی یا عدد مورد نظر ۰۰۲ یا ۰۰۰ است.

سؤال ۱۰: رمز ۰۰۲ است؟ خیر

پس نتیجه می‌گیریم رمز (۰۰۰) است.

روش دوم: استفاده از نکته‌ی (۸):

$$۱۰۲۴ = \underbrace{۲\times۲\times۲\times\cdots\times۲}_{\text{۱۰ تا}} \geq \underbrace{۱۰۰۰}_{\text{تعداد رمزهای ۳ رقمی}} > \underbrace{۲\times۲\times۲\times\cdots\times۲}_{\text{۹ تا}} = ۵۱۲$$

۷۸. گزینه ب

نکته ۹: سری حسابی یا تصاعد عددی: هرگاه اعدادی داشته باشیم که با اضافه شدن مقداری ثابت به عددِ قبلی به دست آیند، برای محاسبه‌ی تعداد و مجموع آن‌ها، از رابطه‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد} = \frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{\text{فاصله‌ی دو عدد پشت سر هم}} + ۱$$

به طور مثال تعدادِ اعداد ۹۹۵ ,... ,۵,۱۰,۱۵,۲۰ برابر است با:

$$\frac{۹۰۵-۵}{۵}+۱ = ۱۹۸+۱ = ۱۹۹$$

$$\text{مجموع} = \frac{\text{تعداد}\times(\text{عدد اول}+\text{عدد آخر})}{۲}$$

نکته ۱۰: تعداد مضرب‌های طبیعیِ عدد a از عدد ۱ تا عددِ n، برابراست با خارج‌قسمتِ طبیعی تقسیمِ عدد n بر a.

ابتدا تعدادِ مضرب‌های طبیعی عدد ۵ کم‌تر از ۱۰۰۰ یا کم‌تر یا مساوی ۹۹۹ را پیدا می‌کنیم:

$$۹۹۹ \div ۵ \rightarrow ۱۹۹$$

تعداد مضرب‌ها ۱۹۹

طبق نکته‌ی (۸) داریم:

$$۲۵۶ = \underbrace{۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲}_{\text{۸ تا}} \geq ۱۹۹ > \underbrace{۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲}_{\text{۷ تا}} = ۱۲۸$$

بنابراین، حداقل ۸ سؤال لازم است.

۷۹. گزینه ب عدد روی هر تاس با ۳ سؤال مشخص می‌شود، بنابراین $۳+۳+۳=۹$ سؤال لازم است.

۸۰. گزینه د عدد روی تاس با ۳ سؤال مشخص می‌شود و اگر ۳۲ حرف الفبای فارسی را به دو دسته‌ی ۱۶ تایی تقسیم کنیم، می‌توان با سؤال‌هایی از قبیل: «آیا حرف مورد نظر عضوِ ۱۶ تای اول است؟» و... با طرح ۵ سؤال آن را مشخص کرد. بنابراین در مجموع با $۳+۵=۸$ سؤال می‌توان آن‌ها را مشخص کرد.

۸۱. گزینه د روش اول: اگر درون دایره، به ترتیب گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) را قرار دهید، تساوی برقرار نمی‌شود، بنابراین جواب، عدد ۲۱۶ خواهد بود.

روش دوم: در بین گزینه‌ها، فقط عدد ۲۱۶ به همه‌ی مخرج‌ها تقسیم می‌شود.

راهبرد الگویابی

۸۲. گزینه ب

$$۱ \xrightarrow{+۰/۵} ۱/۵ \xrightarrow{+۰/۲۵} ۱/۷۵ \xrightarrow{+۰/۱۲۵} ۱/۸۷۵$$

۸۳. گزینه الف دو جمله‌ی قبل با هم جمع می‌شوند تا جمله‌ی بعدی به دست آید. (دنباله‌ی فیبوناتچی)

۸۴. گزینه ج

$$۳۰ \xrightarrow{-۲} ۲۸ \xrightarrow{-۴} ۲۴ \xrightarrow{-۶} ۱۸ \xrightarrow{-۸} ۱۰$$

۸۵. گزینه ج از عدد دوم به بعد، هر عدد برابر است با سه برابرِ عدد قبل منهای یک. $(۳\times۳)-۱=۸$

$(۳\times۸)-۱=۲۳\ ,\ (۳\times۲۳)-۱=۶۸\ ,\ (۳\times۶۸)-۱=\boxed{۲۰۳}$

۸۶. گزینه د $۱\div۲=۰/۵\rightarrow۱+۰/۵=۱/۵\ ,\ ۱/۵\div۲=۰/۷۵\rightarrow۱/۵+۰/۷۵=۲/۲۵$

$\rightarrow۲/۲۵\div۲=۱/۱۲۵\rightarrow۲/۲۵+۱/۱۲۵=۳/۳۷۵\rightarrow۳/۳۷۵\div۲=۱/۶۸۷۵\rightarrow۳/۳۷۵+۱/۶۸۷۵=۵/۰۶۲۵$

۸۷. گزینه ب $۷۷\rightarrow۷\times۷=۴۹\rightarrow۴\times۹=۳۶\rightarrow۳\times۶=۱۸\rightarrow۱\times۸=۸$

۸۸. گزینه ب اختلاف دو عدد را نصف کرده و از عدد کوچک‌تر کم می‌کنیم.

$$۶۴ \xrightarrow{-۲۴\div۲=-۱۲} ۴۰ \xrightarrow{-۱۲} ۲۸ \xrightarrow{-۶} ۲۲ \xrightarrow{-۳} ۱۹\ ,\ ...$$

۸۹. گزینه د $۱\times۱\times۱=۱\ ,\ ۲\times۲\times۲=۸\ ,\ ۳\times۳\times۳=۲۷\ ,\ ...\ ,\ ۱۰\times۱۰\times۱۰=۱۰۰۰$

۹۰. گزینه ج اگر جمع اعداد ۱ تا ۹ را به دست آوریم، ۴۵ می‌شود. یعنی تعداد ۴۵ عدد نوشته‌ایم تا به عدد ۱۰ برسیم. حال ۱۰ تا ۱۰ می‌نویسیم، یعنی از جمله‌ی چهل و ششم تا جمله‌ی پنجاه و پنجم، عدد ۱۰ را نوشته‌ایم. بنابراین جمله‌ی پنجاه و ششم، عدد ۱۱ است.

۹۱. گزینه الف $۱\times۲=۲\ ,\ ۲\times۳=۶\ ,\ ۳\times۴=۱۲\ ,\ ۴\times۵=۲۰\ ,\ ۵\times۶=۳۰\ ,\ ۶\times۷=۴۲\ ,\ ۷\times۸=۵۶$

$\rightarrow۵۶-۳۰=۲۶$

۹۲. گزینه ب $(۱\times۱\times۱)-۱=۰\ ,\ (۲\times۲\times۲)-۱=۷\ ,\ (۳\times۳\times۳)-۱=۲۶$

$\rightarrow(۱۰\times۱۰\times۱۰)-۱=۱۰۰۰-۱=۹۹۹$

۹۳. گزینه هـ با نوشتن چند جمله از این دنباله، می‌بینیم اعداد، ۶ تا ۶ تا تکرار می‌شوند: $۳,۴,\frac{۴}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴},۳,۴,...$

پس جمله‌های سی و دوم و هفتاد و دوم را به روش زیر به دست آورده و از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۳۲ & ۶ \\ \hline -۳۰ & ۵ \\ ۲ & \end{array} \xrightarrow{\text{دومین رقم}} ۴ \qquad \begin{array}{r|l} ۷۲ & ۶ \\ \hline -۷۲ & ۱۲ \\ ۰ & \end{array} \xrightarrow{\text{ششمین رقم}} \frac{۳}{۴}$$

اختلاف $\Rightarrow ۴-\frac{۳}{۴}=\frac{۱۳}{۴}$