

کاج



ریاض دهتم

۲۴۰۰ تست با پاسخ + درس نامه های آموزشی

مؤلف: مهندس آرشد عمید

مقدمه

تقدیم به روح بلند پدرم که
تمام زندگی‌اش درس انسانیت
برای من بود ...

اهمیت کتاب ریاضی (۱) برای دانش‌آموزان رشته‌های ریاضی و تجربی چه از نظر مباحث پایه‌ای که ادامه آن‌ها را در سال‌های بعد خواهند دید و چه از نظر تعداد سؤالات آن در کنکور بر کسی پوشیده نیست. از طرفی رویکرد طراحان کنکور به سمت مفهومی شدن سؤالات، باعث شده است منابعی که سال‌های زیادی از تألیف آن‌ها گذشته و تغییرات آن فقط در حد تغییر رنگ جلد کتاب‌ها و اضافه کردن سؤالات کنکورهای جدید در لابه‌لای تست‌ها می‌باشد کارایی کافی نداشته باشند. به این سبب تصمیم گرفتم کتابی جدید با توجه به سبک و سیاق کنکورهای جدید تألیف کنم و تمام سعی خود را کردم کتابی خاص آماده شود که بتواند به تمام نیازهای دانش‌آموزان کشور پاسخ دهد.

کتابی که پیش روی شماست با در نظر گرفتن تمامی موارد فوق آماده شده است که ویژگی‌های کلی کتاب به صورت زیر است:

۱ درسمه‌های جامع، روان و مهندسی شده که خط به خط کتاب درسی را به‌طور کامل مدنظر قرار داده و تمام تمرین‌های کتاب در آن بررسی شده است تا شما خط فکری طراحان و چگونگی استخراج تست‌های کنکور از کتاب درسی را بفهمید و یاد بگیرید که طراحان چگونه، تمرینات و مفاهیم کتاب را عمیق‌تر و پیچیده‌تر در تست‌های کنکور به کار می‌گیرند.

۲ تست‌های کتاب با چینش آسان به سخت و توجه به کنکورهای سراسری در نظام جدید که با هر سطح علمی می‌توانید از این کتاب به‌عنوان منبع اول و آخر استفاده کنید و قدم به قدم خود را به سطح ایده‌آل برسانید.

۳ پاسخ‌های واقعاً تشریحی، دقیق و آموزش‌محور که علاوه بر ارائه راه‌حل، مسیر استدلال و تفکر را نیز به شما آموزش می‌دهد.

۴ درجه‌بندی سؤالات به این صورت که حل سؤالات با **شماره‌های آبی واجب**، با **شماره‌های نارنجی برای تسلط بیشتر** و سؤالات با عنوان **IQ** برای آماده‌سازی دانش‌آموز برای شرکت در هر سطح از آزمون می‌باشد. دقت کنید تست‌ها با شماره‌های نارنجی و با عنوان **IQ** به هیچ‌وجه خارج از فضای کتاب درسی و حال و هوای کنکور نیست.

در انتها تشکر ویژه می‌کنم از تمامی همکارانم در انتشارات بین‌المللی گاج که بدون کمک آن‌ها آماده کردن این کتاب امکان‌پذیر نبود. با بنده می‌توانید از طریق آیدی تلگرام **@ar_amid** در ارتباط باشید.

موفق باشید.

آرش عمید

 **@ArashAmid**

 **ar.Amid**

فهرست

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

۳۹

درس ۳
الگو و
دنباله

۲۴

درس ۲
متمم
یک مجموعه

۱۰

درس ۱
مجموعه‌های
متناهی و نامتناهی

فصل ۲ مثلثات

۱۲۹

درس ۳
روابط بین
نسبت‌های مثلثاتی

۱۰۹

درس ۲
دایره
مثلثاتی

۸۰

درس ۱
نسبت‌های
مثلثاتی

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارتهای جبری

۱۶۶

درس ۴
عبارتهای
جبری

۱۶۰

درس ۳
توان‌های
گویا

۱۵۱

درس ۲
ریشه
مn

۱۴۲

درس ۱
ریشه و
توان

فصل ۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها

۲۳۲

درس ۳
تعیین
علامت

۲۱۴

درس ۲
سهمی

۱۹۲

درس ۱
معادله درجه ۲ و
روش‌های مختلف حل آن

فهرست

فصل ————— تابع

۲۹۶

درس ۳
انواع
تابع

۲۶۸

درس ۲
دامنه و
برد توابع

۲۶۲

درس ۱
مفهوم تابع و
بازنمایی های آن

فصل ————— شمارش، بدون شماردن

۳۴۸

درس ۳
ترکیب

۳۳۳

درس ۲
جایگشت

۳۲۲

درس ۱
شمارش

فصل ————— آمار و احتمال

۴۰۵

درس ۳
متغیر
و انواع آن

۴۰۱

درس ۲
مقدمه ای بر
علم آمار، ...

۳۶۴

درس ۱
احتمال یا
اندازه گیری شانس

پاسخنامه
تشریحی

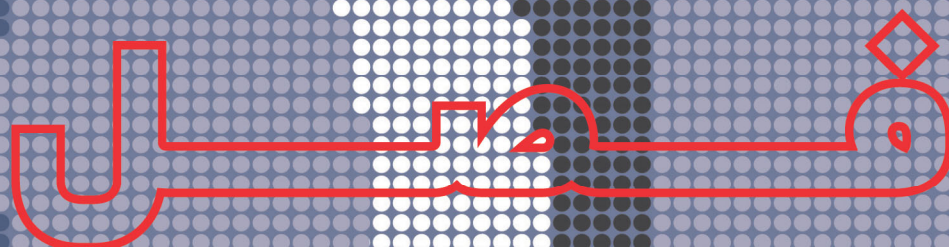
۴۰۹

پاسخنامه
تشریحی

دعا ای قبال از م طالعه

اللَّهُمَّ
أَخْرِجْنِي
مِنْ ظُلُمَاتِ الْوَهْمِ
وَ أَكْرِمْنِي
بِنُورِ الْفَهْمِ
اللَّهُمَّ افْتَحْ عَلَيْنَا
أَبْوَابَ رَحْمَتِكَ
وَأَنْشُرْ عَلَيْنَا
خَزَائِنَ عُلُومِكَ
بِرَحْمَتِكَ
يَا أَرْحَمَ الرَّاحِمِينَ

خدایا
مرا
بیرون آور
از تاریکی های وهم
و به نور فهم
گرامی ام بدار
خدایا درهای رحمت را
بر ما بگشای
و گنجینه های دانشت را
بر ما
بگستران
به مهربانی ات
ای مهربان ترین
مهربانان



مجموعه، الگو و دنباله



درس ۳
الگو
و
دنباله



درس ۲
متمم یک
مجموعه



درس ۱
مجموعه‌های
متناهی و
نامتناهی



تذکر



یادآوری



مثال

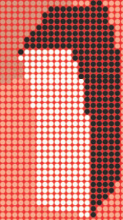


نتیجه



تمرین
کتاب
درسی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی



درسی

بعد از مطالعه این قسمت به سؤالات زیر مراجعه کنید.

سؤالات: ۱ تا ۸۷

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

قبل از ورود به بحث بازه‌ها و مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، مطالبی که در سال‌های قبل خوانده‌اید را یادآوری می‌کنیم.

مقدمات مجموعه

مجموعه: به دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز، به طوری که عضویت اشیا در آن دسته کاملاً مشخص باشد، مجموعه می‌گوییم. اعضای مجموعه را داخل دو آگولاد قرار داده و با حروف بزرگ A ، B ، C و... نشان می‌دهیم. مثلاً اعداد فرد یک رقمی، یک مجموعه هستند که به صورت $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ نوشته می‌شوند.

کدام یک از گزینه‌های زیر بیانگر یک مجموعه است؟

(۱) سه شاعر معروف ایران (۲) پنج شهر زیبای ایران (۳) دو عدد اول یک رقمی (۴) اعداد زوج دورقمی

۴ اعداد زوج دورقمی کاملاً مشخص هستند، پس می‌توانند یک مجموعه باشند ولی سه شاعر معروف ایران، پنج شهر زیبای ایران و دو عدد اول یک رقمی دارای اعضای مشخصی نیستند. (آله شما از هند تا دوستانتون پرسین سه شاعر معروف ایران کیا هستن؟ جواب همه یکسان نیست، همین‌طور در مورد پنج شهر زیبای ایران و دو عدد اول یک رقمی پرسین باز هم جواب‌های یکسانی نمی‌گیری، اما آله پرسین اعداد زوج دورقمی چه اعدادی هستن؟ همشون به شما جواب یکسان می‌دن.)

زنگ باش

تغییر ترتیب عضوهای یک مجموعه، اون مجموعه رو تغییر نمیده. مثلاً مجموعه $\{1, 3, 5\}$ با مجموعه $\{5, 3, 1\}$ هیچ فرقی نداره. هم‌چنین تکرار عضوها در یک مجموعه، اون مجموعه رو تغییر نمیده. مثلاً مجموعه $\{1, 2, 3, 3, 3\}$ همون مجموعه $\{1, 2, 3\}$ هستش.

عضویت: اگر x درون مجموعه A باشد، می‌گوییم x عضو A است و می‌نویسیم $x \in A$. اگر x عضو مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $x \notin A$.

(کاردرکلاس ۱ صفحه ۵ کتاب درسی)

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(الف) $-1 \in \{-2, 0\}$ (ب) $-2 \in \{-2, 0\}$

(الف) -1 درون مجموعه $\{-2, 0\}$ قرار ندارد، پس $-1 \in \{-2, 0\}$ نادرست است.

(ب) -2 درون مجموعه $\{-2, 0\}$ قرار دارد، پس $-2 \in \{-2, 0\}$ درست است.

اگر $A = \{1, 2, \{3\}, 4, \{5, 6\}, 7\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

(۱) $5 \in A$ (۲) $6 \in A$ (۳) $3 \in A$ (۴) $7 \in A$

۳ واضح است 5 و 6 درون مجموعه A نیستند؛ پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند، ولی 7 درون مجموعه A قرار دارد، پس $7 \in A$ می‌باشد. (توجه کن که $\{3\}$ عضو مجموعه A هستش نه 3 یا $\{5, 6\}$ یک عضو از مجموعه A هستش نه 5 و نه 6 .)

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی می‌نامیم و با $\{\}$ یا $\emptyset$ نشان می‌دهیم.

تعداد اعضای مجموعه $A = \{\emptyset, \{\}, \{\emptyset, \{\}\}$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

می‌دانیم تکرار اعضا در یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد، پس $\emptyset$ و $\{\}$ یک عضو و هم‌چنین $\{\emptyset, \{\}\}$ نیز یک عضو هستند. لذا مجموعه A را می‌توان به صورت $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ نمایش داد، پس $n(A) = 2$ می‌باشد. (تعداد اعضای مجموعه A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.)

زیرمجموعه: مجموعه B را زیرمجموعه، مجموعه A می‌گوییم؛ اگر هر عضوی از مجموعه B عضو مجموعه A نیز باشد و می‌نویسیم $B \subseteq A$. اگر B زیرمجموعه A نباشد، یعنی حداقل یک عضو در مجموعه B باشد که در مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.

برای تشخیص این‌که مجموعه $\{\}$ زیرمجموعه A هستش یا نه، با توجه به تعریف زیرمجموعه، کافیه بیرونی‌ترین آکولاد رو حذف کنیم، اگه عضو $\emptyset$ در مجموعه A باشه، حتماً مجموعه $\{\}$ زیرمجموعه A هستش.

اگر $A = \{1, \{2\}, \{1, 2\}, 3, 4, \{2, 3\}\}$ باشد، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

$\{3\} \subseteq A$ (۴)

$\{1, 2\} \subseteq A$ (۳)

$\{\{2\}\} \subseteq A$ (۲)

$\{1, 3\} \subseteq A$ (۱)

در گزینه (۱)، اگر آکولاد را حذف کنیم، ۱ و ۳ باقی می‌مانند که هر دو در مجموعه A هستند، پس $\{1, 3\} \subseteq A$ است. در گزینه (۲) با حذف بیرونی‌ترین آکولاد، $\{2\}$ باقی می‌ماند که عضو مجموعه A هست، پس $\{\{2\}\} \subseteq A$ می‌باشد. در گزینه (۳) با حذف آکولاد، ۱ و ۲ باقی می‌مانند که ۲ عضو مجموعه A نیست، پس $\{1, 2\} \subseteq A$ نمی‌باشد. در گزینه (۴) هم واضح است چون $3 \in A$ است، پس $\{3\} \subseteq A$ می‌باشد.

نمایش‌های مختلف مجموعه: مجموعه‌ها را می‌توان به صورت‌های زیر نمایش داد:

۳ نمودار ون

۲ نمایش با نمادهای ریاضی

۱ نمایش تفصیلی

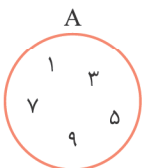
نمایش تفصیلی: در این نمایش، اعضای مجموعه را درون یک آکولاد نمایش می‌دهند. مثلاً اعداد فرد یک‌رقمی در این نمایش به صورت $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ می‌باشد.

نمایش با نمادهای ریاضی: در این نمایش به جای نوشتن تک‌تک اعضاء ویژگی مشترک آن‌ها را بیان می‌کنیم. مثلاً اعداد فرد یک‌رقمی در این نوع نمایش به صورت $A = \{2k-1 | k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 5\}$ نشان داده می‌شود.

اگه مجموعه‌ای با نمادهای ریاضی معرفی شده باشه، دارای دو قسمت به صورت زیر هستش. سمت چپ علامت به قسمی که (علامت $\{ \}$)، «به قسمی که» خونده می‌شه، خروجی مجموعه و سمت راست علامت به قسمی که، ورودی مجموعه هستن.

$A = \{\text{ورودی} | \text{خروجی}\}$

مثلاً مجموعه $A = \{x | x-1 > 0, x = -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ یعنی اعداد $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ رو به x میدیم و مقدار $x-1$ رو به دست میاریم. اگه مثبت شد، عدد حاصل عضو مجموعه A هستش، پس مجموعه A به صورت $A = \{2, 5, 8\}$ میشه.



نمودار ون: در این نمایش، اعضای مجموعه را درون منحنی‌هایی با خط‌های شکسته بسته نمایش می‌دهند. مثلاً

نمودار ون مجموعه $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ به صورت مقابل است:

تساوی دو مجموعه: دو مجموعه A و B را مساوی می‌گویند، اگر و تنها اگر اعضای آن‌ها یکسان باشد و می‌نویسیم $A = B$.

اگه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشه، اونوقت $A = B$ هستش و بالعکس.

$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

اگر $A = \{0, 1\}$ ، $B = \{3x^2 - 5x + 2, x\}$ ، $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشند، آنگاه تعداد اعضای مجموعه $C = \{3x - 2, 1, x^2, 2x\}$ کدام است؟

۱ (۴

۲ (۳

۳ (۲

۴ (۱

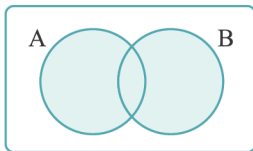
چون $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ پس $A = B$ است. با توجه به اعضای A و B واضح است که یا $x = 0$ است و یا $x = 1$. حال بررسی می‌کنیم به ازای کدام مقدار x ، عبارت $3x^2 - 5x + 2$ برابر عضو دیگر مجموعه A می‌شود:

$$x = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 3(0)^2 - 5(0) + 2 = 2 \neq 1$$

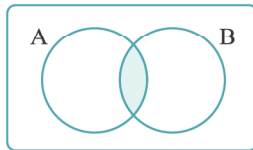
$$x = 1 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 3(1)^2 - 5(1) + 2 = 0$$

بنابراین $x = 1$ می‌باشد و مجموعه C به صورت $C = \{1, 1, 1, 2\} = \{1, 2\}$ خواهد شد، پس مجموعه C دارای ۲ عضو است.

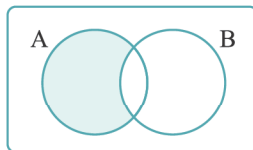
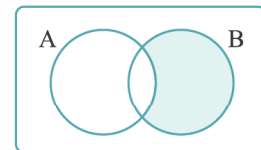
اعمال روی مجموعه‌ها: اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شوند:


 $A \cup B$

۱ اجتماع دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B می‌باشند. اجتماع دو مجموعه A و B را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم و نمودار آن به صورت مقابل است که ناحیهٔ رنگی، $A \cup B$ را نشان می‌دهد.


 $A \cap B$

۲ اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B هستند. اشتراک دو مجموعه A و B را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم و نمودار آن به صورت مقابل است که ناحیهٔ رنگی، $A \cap B$ را نشان می‌دهد.


 $A - B$

 $B - A$

۳ تفاضل دو مجموعه A و B یعنی $A - B$ ، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای که عضو مجموعه A هستند ولی عضو مجموعه B نیستند. به همین ترتیب $B - A$ مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای که عضو مجموعه B هستند ولی عضو مجموعه A نیستند. نمودارهای آن را ببینید:

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$ باشند، مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

(کاردرکلاس ۶ صفحه ۹ کتاب درسی)

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A - B = \{1, 3\}$$

$A \cup B$ شامل همهٔ عضوهای است که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B هستند، پس:

$A \cap B$ شامل همهٔ عضوهای است که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B هستند، پس:

$A - B$ شامل همهٔ عضوهای است که عضو مجموعه A هستند، ولی عضو مجموعه B نیستند، پس:

به بیان ساده‌تر، برای به دست آوردن اعضای $A - B$ ، هر عضو B که تو هستش رو از A ببری داریم و هر چی که بی‌مونه تو A میشه $A - B$.

کتاب
درسی

صفحه ۹

اگر مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ به ترتیب A و B باشند، مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $B - A$ را با اعضا مشخص کنید.

(فعالیت ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$$

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

$$B - A = \{29, 30\}$$

مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم:

حال $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $B - A$ را به دست می‌آوریم:

کتاب
درسی

صفحه ۱۱

مجموعه‌های معروف اعداد: مجموعه‌های معروف اعداد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۱ مجموعه اعداد طبیعی که با $\mathbb{N}$ نشان داده می‌شود و اعضای آن به صورت مقابل است:

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۲ مجموعه اعداد حسابی که با $\mathbb{W}$ نشان داده می‌شود و اعضای آن به صورت مقابل است:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

۳ مجموعه اعداد صحیح که با $\mathbb{Z}$ نشان داده می‌شود و اعضای آن به صورت مقابل است:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

۴ مجموعه اعداد گویا که با $\mathbb{Q}$ نشان داده می‌شود و اعضای آن به صورت مقابل به دست می‌آیند:

اینجوری هم ببین $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ می‌گه هر m و n صحیح که n حتماً صفر نیست رو به صورت $\frac{m}{n}$ بنویسی، حتماً عضو مجموعه $\mathbb{Q}$ هستش، مثل $\frac{1}{2}$ ، $-\frac{5}{3}$ ، $\frac{9}{10}$ و حتی 2 یا 5 یا $\dots$ چون این اعداد هم به صورت $\frac{2}{1}$ ، $\frac{5}{1}$ و $\frac{5}{1}$ هستن، پس میشه گفت اعداد طبیعی، حسابی و صحیح زیرمجموعه مجموعه اعداد گویا هستن.

۵ مجموعه اعداد گنگ که با $\mathbb{Q}'$ نشان داده می‌شود و شامل اعدادی است که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. **اینجوری هم ببین** در واقع هر عددی رو که نشه به صورت نسبت دو عدد صحیح نشون داد، عضو مجموعه $\mathbb{Q}'$ هستش مثل π ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{2}$ و $\dots$.

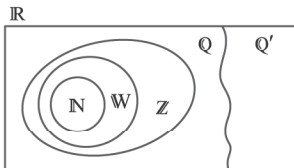
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

۶ مجموعه اعداد حقیقی که با $\mathbb{R}$ نشان داده می‌شود و شامل تمام اعدادی که می‌شناسیم، می‌باشد.

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$$

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$$

اینجوری هم ببین از اونجایی که $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$ و $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ هستش، پس میشه گفت:



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$$

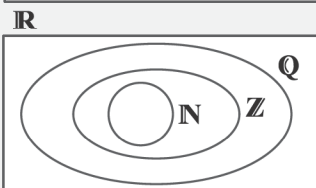
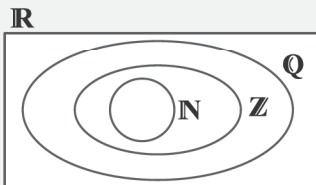
رابطه زیرمجموعه بودن در مجموعه‌های معروف اعداد به صورت زیر است:

(کار در کلاس ۱ صفحه ۲ کتاب درسی)

الف) مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل زیر هاشور بزنید.

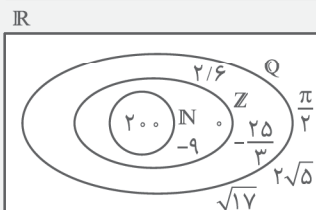
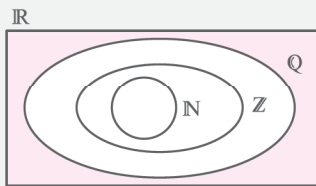
کتاب درسی

صفحه ۲



(ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند.

(پ) اعداد $-\frac{25}{3}$ ، $-\frac{2\sqrt{5}}{3}$ ، $\frac{2}{6}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، 200 و $\sqrt{17}$ را روی شکل زیر و در محل مناسب بنویسید.



(ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با اعضا بنویسید.

(ث) مجموعه $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ چند عضو دارد؟

الف) مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ، مجموعه $\mathbb{Q}'$ است که به آن مجموعه اعداد گنگ می‌گوییم که در شکل مقابل رنگ شده است.

(ب) اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{5}{4}$ گویا هستند ولی صحیح نیستند.

(پ) اعداد را در نمودار مقابل ببینید:

$$\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

(ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی به صورت مقابل است:

$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$$

(ث) مجموعه $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ شامل یک عضو است:

با توجه به نماد مجموعه‌های معروف اعداد، کدام رابطه درست است؟

$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \emptyset \quad (۴) \quad (\mathbb{W} \cap \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N} \quad (۳) \quad (\mathbb{W} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}' \quad (۲) \quad (\mathbb{Q} \cap \mathbb{W}) \subseteq \mathbb{N} \quad (۱)$$

می‌دانیم $\mathbb{Q} \cap \mathbb{W} = \mathbb{W}$ بوده و در نتیجه گزینه (۱) به صورت $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{N}$ می‌شود که نادرست است. $\mathbb{W} - \mathbb{Q} = \emptyset$ است و می‌دانیم $\emptyset$ زیرمجموعه هر مجموعه‌ای می‌باشد، پس گزینه (۲) درست است. دلیل نادرستی گزینه‌های (۳) و (۴) را هم ببینیم. می‌دانیم $\mathbb{W} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{W}$ است و $\mathbb{W} \not\subseteq \mathbb{N}$ و هم‌چنین $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ می‌شود که تهی نیست.

اگر $\mathbb{R} = A \cup \mathbb{Q}'$ باشد، کدام گزینه درست است؟

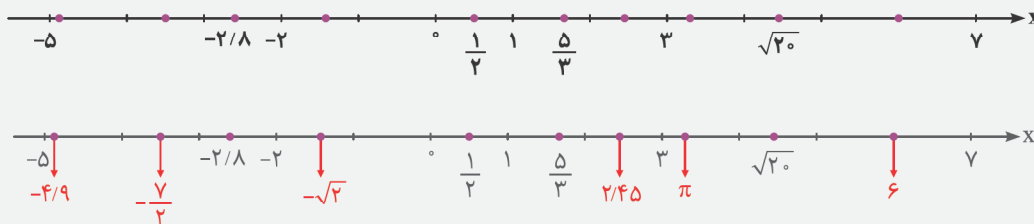
$$\mathbb{Z} \subseteq A \quad (۴) \quad \mathbb{R} - \mathbb{Z} = A \quad (۳) \quad \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}' = A \quad (۲) \quad A \subseteq \mathbb{W} \quad (۱)$$

واضح است که مجموعه A برابر $\mathbb{Q}$ می‌باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است، زیرا $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ است.

نمایش اعداد روی محور اعداد حقیقی: تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند، پس هر عدد دلخواهی، جایی منحصر به فرد روی محور اعداد حقیقی دارد و هم‌چنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد حقیقی مشخص است.

هر یک از اعداد $-\sqrt{2}$ ، π ، $-4/9$ ، 6 ، $2/45$ ، $5/3$ ، $1/2$ ، $-2/8$ ، -5 را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟

(کار در کلاس ۲ صفحه ۳ کتاب درسی)



از بین این شش عدد، اعداد π و $-\sqrt{2}$ گنگ هستند.

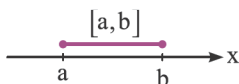
بریم سراغ گونه دیگری از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی ...

بازه یا فاصله

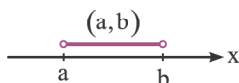
زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی می‌باشند را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. مثلاً هر یک از مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 10\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ یک بازه یا فاصله هستند.

انواع بازه‌ها

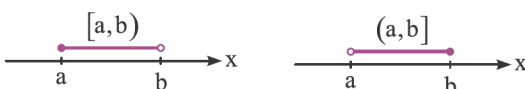
۱ بازه بسته: به بازه‌هایی نظیر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ که شامل هر دو نقطه ابتدایی و انتهایی خود می‌باشند، بازه بسته از a تا b می‌گوییم و با نماد $[a, b]$ نشان می‌دهیم. نمایش هندسی بازه بسته $[a, b]$ روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر است:



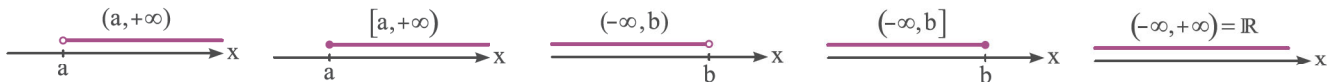
۲ بازه باز: به بازه‌هایی نظیر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ که از حذف نقاط ابتدایی و انتهایی بازه $[a, b]$ به دست می‌آیند، بازه باز بین a و b می‌گوییم و با نماد (a, b) نشان می‌دهیم. نمایش هندسی بازه باز (a, b) روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر است:



۳ بازه نیم باز: به بازه‌هایی نظیر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ یا $B = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ که فقط شامل یکی از نقاط ابتدایی یا انتهایی خود هستند، بازه‌های نیم باز می‌گوییم. بازه A را با نماد $[a, b)$ و بازه B را با نماد $(a, b]$ نشان می‌دهیم. نمایش هندسی آن‌ها به صورت زیر است:



اینجوری هم ببین ممکنه به بازه، نقطه ابتدایی یا انتهایی و یا هر دو رو نداشته باشه.



اگه همه اعداد حقیقی بزرگتر از a یا کوچکتر از a یا همه اعداد حقیقی مدنظر باشن و بخوایم اونارو با بازه نشون بدیم، از نماد $+\infty$ (بهترین مثبت بی‌نهایت) یا نماد $-\infty$ (بهترین منفی بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. توجه کن $+\infty$ و $-\infty$ دو نماد هستن و اعداد حقیقی نیستن. کران بالا و کران پایین بازه: در هر یک از بازه‌های (a, b) ، $[a, b)$ ، $(a, b]$ ، $[a, b]$ و $(a, +\infty)$ و $(-\infty, b)$ به a کران پایین بازه می‌گوییم. هم چنین در هر یک از بازه‌های $(-\infty, b)$ ، $(-\infty, b]$ ، (a, b) ، $[a, b)$ ، $(a, b]$ ، $[a, b]$ به b کران بالای بازه می‌گوییم. طول بازه: در بازه‌هایی که کران بالا و پایین آن‌ها اعداد حقیقی هستن، نظیر (a, b) ، $[a, b)$ ، $(a, b]$ و $[a, b]$ به $b - a$ طول بازه می‌گوییم. مثلاً طول هر یک از بازه‌های $(2, 5)$ ، $[2, 5)$ ، $(2, 5]$ و $[2, 5]$ برابر $5 - 2 = 3$ می‌باشد.

(کار در کلاس ۱ صفحه ۵ کتاب درسی)

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

کتاب درسی صفحه ۵

پ) $0 \in (-2, 0]$

ب) $-2 \in (-2, 0]$

الف) $\frac{4}{3} \in [-\frac{1}{2}, 2]$

ج) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$

ث) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2]$

ت) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2]$

ح) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

چ) $[2, 5) = (2, 5]$

الف) درست؛ می‌دانیم بازه $[-\frac{1}{2}, 2]$ شامل اعداد حقیقی مانند x است، به طوری که $\frac{1}{2} \leq x < 2$ می‌باشد، پس $\frac{4}{3}$ عضو این بازه هست.

ب) نادرست؛ بازه نیم باز $(-2, 0]$ شامل عدد -2 نیست، پس $-2 \notin (-2, 0]$.

پ) درست؛ بازه نیم باز $[-2, 0]$ شامل صفر می‌باشد، پس $0 \in (-2, 0]$.

ت) نادرست؛ بازه بسته $[-1, 2]$ شامل اعداد -1 و 2 است، ولی در بازه $(-1, 2]$ اعداد -1 و 2 حضور ندارند، پس $[-1, 2] \not\subseteq (-1, 2]$ زیرمجموعه $(-1, 2]$ نیست. *هواست باشه آگه درستی یا نادرستی $[-1, 2] \subseteq (-1, 2]$ رو می‌پرسید، قطعاً می‌گفتیم درسته.*

ث) درست؛ اعداد صفر و 1 هر دو عضو بازه نیم باز $(-1, 2]$ هستند، پس $\{0, 1\} \subseteq (-1, 2]$ می‌باشد.

ج) درست؛ می‌دانیم تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

چ) نادرست؛ عدد 2 عضو بازه $[2, 5)$ هست، در حالی که عضو بازه $(2, 5]$ نیست، پس این دو مجموعه برابر نیستند. (همین حرف می‌تونستیم در مورد عدد 5 هم بزنیم که عضو یکی از بازه‌ها هست ولی عضو اون یکی نیست.)

ح) نادرست؛ $\sqrt{2}$ تقریباً برابر $1/4$ است، پس $\sqrt{2}$ عضو بازه $(0, 1)$ نیست. (با $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ در دوره دوم دبیرستان خیلی کار داریم. فقط کنید که $\sqrt{2}$ تقریباً برابر $1/4$ و $\sqrt{3}$ تقریباً برابر $1/2$ هستن.)

اعمال روی بازه‌ها: اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل روی بازه‌ها مانند مجموعه‌ها که قبلاً دیدیم تعریف می‌شوند (بازه‌ها به نوع خاص از مجموعه‌ها هستن، دگه)؛ فقط در این جا می‌تونیم از نمایش هندسی بازه‌ها روی یک محور استفاده کرده و به کمک آن اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها را راحت تر به دست آوریم.

(کار در کلاس ۳ صفحه ۵ کتاب درسی)

اگر $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ باشند، حاصل عبارت‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را به دست آورید.

کتاب درسی صفحه ۵



نمایش هندسی بازه‌های A و B را روی یک محور رسم می‌کنیم و داریم:

$$A \cup B = (-4, 3] \quad , \quad A \cap B = (-1, 2] \quad , \quad A - B = (-4, -1] \quad , \quad B - A = (2, 3]$$

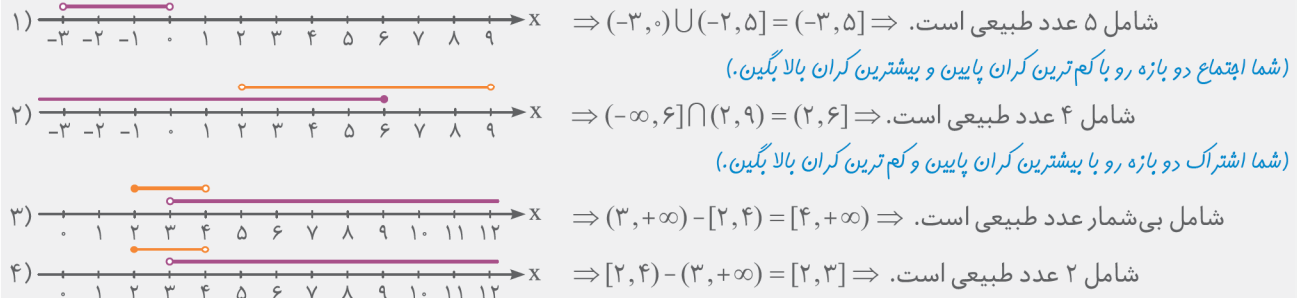
اگه بخوایم اشتراک دو بازه یا حتی چند بازه رو به دست بیاریم، در بین کران‌های پایین بازه‌ها، بزرگترین عدد و در بین کران‌های بالای بازه‌ها، کوچکترین عدد رو در بازه جواب می‌نویسیم. مثلاً اشتراک دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ این طوری به دست میاد که از بین -4 و -1 بزرگترین عدد یعنی -1 رو در کران پایین بازه جواب و از بین 2 و 3 کوچکترین عدد یعنی 2 رو در کران بالای بازه جواب می‌نویسیم. یعنی $A \cap B$ برابر $(-1, 2]$ میشه. در مورد اجتماع بازه‌ها هم کافیه کوچکترین کران پایین بازه‌ها و بزرگترین کران بالای بازه‌ها رو به ترتیب در کران پایین و بالای بازه جواب بنویسیم. مثلاً $A \cup B$ میشه $(-4, 3]$ ، چون -4 کوچکترین کران پایین و 3 بزرگترین کران بالا هستن. پس برای به دست آوردن اجتماع و اشتراک بازه‌ها دیگه نیازی نیست نمایش هندسی اونارو روی محور اعداد حقیقی بکشیم.



کدام مجموعه زیر شامل تعداد اعداد طبیعی کم‌تری است؟

$(1) (-3, 0) \cup (-2, 5)$
 $(2) (-\infty, 6] \cap (2, 9)$
 $(3) (3, +\infty) - [2, 4)$
 $(4) [2, 4) - (3, +\infty)$

✓ حاصل تک‌تک گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:



نوشتن اجتماع دو بازه برحسب $\mathbb{R}$ و بالعکس

اجتماع دو بازه که کران پایین یکی $-\infty$ و کران بالای دیگری $+\infty$ و اشتراک آن‌ها تهی است، مطابق جدول زیر می‌باشد:

اجتماع دو بازه	نمایش هندسی	نمایش برحسب $\mathbb{R}$
$(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$		$\mathbb{R} - [a, b]$
$(-\infty, a] \cup (b, +\infty)$		$\mathbb{R} - (a, b]$
$(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$		$\mathbb{R} - [a, b)$
$(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$		$\mathbb{R} - (a, b)$
$(-\infty, c) \cup (c, +\infty)$		$\mathbb{R} - \{c\}$

واضح است که اجتماع بازه‌های $(-\infty, c) \cup (c, d) \cup (d, +\infty)$ را می‌توان به صورت $\mathbb{R} - \{c, d\}$ نمایش داد و این موضوع قابل تعمیم است.

(تمرین ۵ صفحه ۷ کتاب درسی)

مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

نمایش مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ به صورت زیر است و داریم:

$\Rightarrow \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

کتاب
درسی
صفحه ۷

اگر $\mathbb{R} - \{b\}$ را به صورت اجتماع بازه‌های $(-\infty, 2a-1)$ و $(-a+5, +\infty)$ بنویسیم، مقدار $a+2b$ کدام است؟

$(1) 4$
 $(2) 3$
 $(3) 8$
 $(4) 5$

✓ برای آن‌که $\mathbb{R} - \{b\}$ را به صورت $(-\infty, 2a-1) \cup (-a+5, +\infty)$ نشان دهیم، باید $2a-1 = -a+5 = b$ باشد، پس:

$2a-1 = -a+5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{b=-a+5} b = -2+5 = 3$

بنابراین $a+2b$ برابر $2+6=8$ است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد، مجموعه متناهی می‌نامیم و مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه نامتناهی می‌گوییم. در واقع در مجموعه‌های نامتناهی، نمی‌توان تعداد اعضای آن‌ها را با یک عدد بیان کرد و تعداد اعضای آن‌ها از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

تعداد اعضای مجموعه‌های متناهی ممکنه خیلی بزرگ باشه، ولی بزرگ بودن تعداد اعضای اونا باعث نمیشه که نامتناهی محسوب بشن.

کتاب
درسی

صفحه ۶

(کاردرکلاس | صفحه ۶ کتاب درسی)

متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

مجموعه	نامتناهی	متناهی
مجموعه اعداد اول یک‌رقمی		✓
مجموعه انسان‌های روی زمین		✓
مجموعه اعداد طبیعی فرد	✓	
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان		✓
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	✓	
مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما		✓
مجموعه اعداد طبیعی ده‌رقمی		✓
مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون		✓
مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک	✓	
مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	✓	
بازه $(۰, ۱)$	✓	
مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب		✓

چند نتیجه مهم در مورد مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

- مجموعه‌های معروف اعداد یعنی $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ ، نامتناهی هستند.
- بازه‌های اعداد حقیقی، نامتناهی هستند و اعداد گویا و گنگ موجود در هر بازه‌ای نامتناهی است.
- مجموعه مضرب‌های طبیعی و صحیح هر عدد، نامتناهی است.
- مجموعه شماره‌های طبیعی یا صحیح هر عدد صحیح، متناهی است.
- مجموعه تهی، یک مجموعه متناهی است. (تعداد اعضای مجموعه تهی برابر صفره و صفر هم یک عدد حسابیه.)
- اگر $A \subseteq B$ باشد، در صورتی که A نامتناهی باشد، حتماً مجموعه B نیز نامتناهی است و در صورتی که B متناهی باشد، حتماً مجموعه A نیز متناهی می‌باشد. به جز این دو مورد وقتی $A \subseteq B$ است، با دانستن متناهی یا نامتناهی بودن هر کدام، متناهی یا نامتناهی بودن دیگری را نمی‌توان تعیین کرد. مثلاً اگر مجموعه B نامتناهی باشد، مجموعه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.



درستی یا نادرستی جملات زیر را با ذکر مثال مشخص کنید.

الف) اشتراک دو مجموعه نامتناهی می‌تواند متناهی باشد.

ب) اجتماع یک مجموعه متناهی و یک مجموعه نامتناهی، مجموعه ای نامتناهی است.

پ) تفاضل دو مجموعه نامتناهی می‌تواند نامتناهی باشد.

الف) درست؛ مثلاً مجموعه‌های $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \dots\}$ و $\{۰, -۱, -۲, -۳, \dots\}$ نامتناهی هستند. اما اشتراک آن‌ها یعنی مجموعه $\{۰\}$ متناهی است.
 ب) درست؛ مثلاً مجموعه $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \dots\}$ نامتناهی و مجموعه $\{۰\}$ یک مجموعه متناهی است و اجتماع آن‌ها مجموعه $\mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$ مجموعه ای نامتناهی است.
 پ) درست؛ مجموعه‌های $\mathbb{Z} = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\}$ و $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \dots\}$ نامتناهی هستند و تفاضل آن‌ها یعنی $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ برابر مجموعه $\{۰, -۱, -۲, \dots\}$ می‌شود که نامتناهی می‌باشد.

کدام مجموعه زیر متناهی است؟

- (۱) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ (۲) $\mathbb{W} \cap \mathbb{N}$ (۳) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ (۴) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

باید ببینیم در کدام گزینه تعداد اعضای مجموعه، یک عدد حسابی است:

- ۱) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0\}$ نامتناهی است. $\Rightarrow$
 ۲) $\mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cap \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \Rightarrow$ نامتناهی است.
 ۳) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\} \Rightarrow$ متناهی است.
 ۴) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \Rightarrow$ نامتناهی است.

 اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، کدام مجموعه زیر همواره نامتناهی است؟

- (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۳) $A - B$ (۴) هر سه

 اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، مجموعه $A \cup B$ همواره نامتناهی است. در مورد گزینه‌های (۱) و (۳) به مثال‌های زیر دقت کنید:

- ۱) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\} \Rightarrow A \cap B = \{3\} \Rightarrow$ اما $A \cap B$ متناهی است.
 ۳) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\} \Rightarrow A - B = \{1, 3\} \Rightarrow$ اما $A - B$ متناهی است.

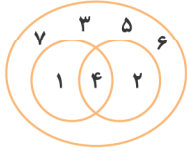
مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. مقدمات مجموعه
 ۲. مجموعه اعداد معروف
 ۳. بازه
 ۴. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مقدمات مجموعه

کمی مطالب مربوط به مجموعه رو با هم مرور کنیم ...

- مجموعه $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, 3, \{2, 1\}\}$ دارای چند عضو است؟
 (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲
- تعداد اعضای مجموعه $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱
- اگر $A = \{a, b, \{a, b\}, \{c\}\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) $a \in A$ (۲) $\{a, b\} \subseteq A$ (۳) $\{c\} \subseteq A$ (۴) $\{b, a\} \in A$
- اگر $A = \{2\}$, $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ باشد، کدام رابطه نادرست است؟
 (۱) $B \subseteq C$ (۲) $A \subseteq B$ (۳) $A \in B$ (۴) $B \in C$
- اگر $A = \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}, \emptyset, \{1, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{1, \{\emptyset\}\}\}$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟
 (۱) $\{\emptyset\} \in A$ (۲) $\{\{\emptyset\}, 1\} \in A$ (۳) $\{\{\emptyset\}\} \in A$ (۴) $\{\{\emptyset\}\} \in A$
- اگر مجموعه‌های $A = \{2, x - 3\}$ و $B = \{x, y\}$ برابر باشند، مقدار $x + y$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲
- اگر دو مجموعه $A = \{4, \{a\}, \{b - 1, c + 2\}\}$ و $B = \{\{7, 3\}, \{b - 1\}, a - 3\}$ مساوی باشند، حاصل $a + b + c$ کدام است؟
 (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰
- مجموعه $A = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 5\}$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳



۹. مجموعه $A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$ با کدام مجموعه مساوی است؟

(۱) $\{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$ (۲) $\{\frac{n-2}{n+1} | n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ (۳) $\{\frac{n-1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ (۴) $\{\frac{n-1}{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$

۱۰. اگر $A = \{a, b, \{a, b\}\}$ و $B = \{x \in A | x \subseteq A\}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\{a\} \in B$ (۲) $\{b, a\} \in B$ (۳) $\{a\} \subseteq B$ (۴) $\{a, b\} \subseteq B$

۱۱. اگر نمایش با نمودار ون مجموعه A به صورت مقابل باشد، نمایش مجموعه A با اعضا کدام است؟

(۱) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (۲) $\{\{1, 2, 4\}, 3, 5, 6, 7\}$
(۳) $\{\{\{4\}\}, \{1, 2\}, 3, 5, 6, 7\}$ (۴) $\{\{1, 4\}, 3, 5, 6, 7, \{2, 4\}\}$

۱۲. اگر $A = \{x | -1 < x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{y | -4 \leq y < 4, y \in \mathbb{N}\}$ باشند، مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۳. اگر مجموعه A_n مجموعه شماره‌های طبیعی عدد n باشد، مجموعه $A_{12} \cup A_{18}$ چند عضو دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۴. اگر $A = \{(1, 2), 2, \{1\}, \{2, 1\}, 3\}$ و $B = \{\{1, 2\}, 1, 3, \{3\}\}$ باشند، مجموعه $A - B$ کدام است؟

(۱) $\{1, 2, \{1\}\}$ (۲) $\{(1, 2), 2, \{1\}\}$ (۳) $\{(1, 2), 2, \{1, 2\}\}$ (۴) $\{(1, 2), \{1\}, 2\}$

۱۵. اگر $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$ و $B = \{1, 3, 4, \{5\}\}$ باشند، مجموعه $A - B$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۶. اگر $A = \{1, 2, 3, \{3, 4\}\}$ ، $B = \{\{2\}, 3, 4, 5\}$ و $C = \{1, 3, 7\}$ باشند، مجموعه $(A \cap B) \cup C$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۷. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ باشند، مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۸. اگر $A = \{-4, -2, 3, 5\}$ و $(A - B) \cup (B - A) = \{-3, -2, 1, 3, 7\}$ باشند، مجموع اعضای مجموعه B کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۹. مجموعه $A = \{\frac{18}{x} \in \mathbb{N} | \frac{24}{x} \in \mathbb{Z}\}$ مفروض است. اگر B مجموعه اعداد طبیعی و یک‌رقمی باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۴

۲۰. اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ باشند، مجموعه B حداکثر چند عضو دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۲۱. اگر A و B دو مجموعه، $A \cap B \neq \emptyset$ ، $A \cup B = \{a, d, e, 3, 8, 10\}$ و $B - A = \{e, 3, 10\}$ باشند، مجموعه $A - B$ حداکثر چند عضو دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مجموعه اعداد معروف

۲۲. با توجه به مجموعه اعداد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

(۱) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}'$ (۲) $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (۳) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (۴) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

۲۳. با توجه به نام‌گذاری مجموعه اعداد، اگر $\mathbb{Q}' \cup A = \mathbb{R}$ باشد، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

(۱) $\frac{2}{3} \in A$ (۲) $\sqrt{3} \in A$ (۳) $\sqrt{1/21} \in A$ (۴) $-5 \in A$

۲۴. با توجه به نام‌گذاری مجموعه اعداد، کدام تساوی نادرست است؟

(۱) $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (۲) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ (۳) $\mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \{0\}$ (۴) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{Z}$

۲۵. با توجه به نام‌گذاری مجموعه اعداد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه $(\mathbb{Z} - \mathbb{W}) \cup (\mathbb{W} - \mathbb{N})$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) صفر

۲۶. با توجه به نام‌گذاری مجموعه اعداد، حاصل $[(\mathbb{Q} - \mathbb{N}) - \mathbb{Q}'] \cup \mathbb{W}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{Q}$ (۳) $\mathbb{Q} - \mathbb{N}$ (۴) $\mathbb{Q} - \{0\}$

۲۷. با توجه به نام‌گذاری مجموعه‌های اعداد، کدام گزینه درست است؟

$$\begin{array}{ll} (1) (Z - N) \subseteq (Q' - Q) & (2) (W \cap Q) - (N \cap Q') = N \\ (3) (Z \cap W) - N = \emptyset & (4) IR = Q' \cup A \Rightarrow Z \subseteq A \end{array}$$

۲۸. با توجه به نام‌گذاری مجموعه‌های اعداد، کدام تساوی درست نیست؟

$$(1) W - N = \{0\} \quad (2) Z \cap Q = Z \quad (3) Q - IR = \emptyset \quad (4) Q' - Z = \emptyset$$

بازه

از اون بحث‌های مهم و پر کاربرد توی ریاضیه ...

۲۹. نمایش بازه‌ای مجموعه $A = \{x \in IR \mid -1 < x \leq 5\}$ کدام است؟

$$(1) (-1, 5) \quad (2) (-1, 5] \quad (3) [-1, 5] \quad (4) [-1, 5)$$

۳۰. کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2) \quad (2) 0 \in (-2, 0] \quad (3) -1 \in \{-2, 0\} \quad (4) -\frac{5}{4} \in (-\infty, -1)$$

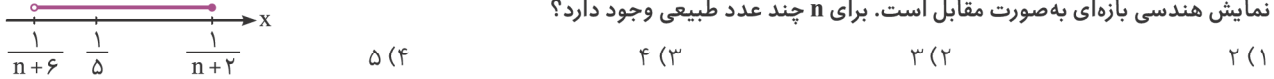
۳۱. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

$$(1) (3, 5) \subseteq [3, 5) \quad (2) \frac{\sqrt{12}}{3} \in (0, 1) \quad (3) (-1, 4) \subseteq IR - \{-2\} \quad (4) -3/5 \in [-\infty, -3)$$

۳۲. اگر $a \in [2a-1, a+2]$ باشد، مقادیر a کدام است؟

$$(1) [-1, 2] \quad (2) [1, 3] \quad (3) \{3\} \quad (4) \emptyset$$

۳۳. نمایش هندسی بازه‌ای به صورت مقابل است. برای n چند عدد طبیعی وجود دارد؟



۳۴. اگر a و b اعداد صحیح و $(-1, 3) \subseteq (a+4, b-3)$ باشد، کمترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$$(1) 10 \quad (2) 11 \quad (3) 12 \quad (4) 13$$

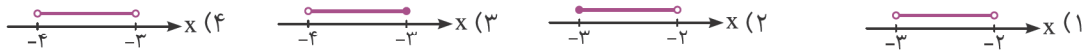
۳۵. بازه $(n-2, 3n+2)$ زیرمجموعه مجموعه $\{1\} - [-3, 3]$ است. نمایش هندسی مجموعه مقادیر n کدام است؟



۳۶. اگر عدد ۲، عضو بازه $[n-1, 3n-7]$ باشد، نمایش هندسی مجموعه مقادیر n کدام است؟



۳۷. اگر مجموعه $(-3, a+5) \cap Z$ دارای ۴ عضو باشد، نمایش هندسی مجموعه مقادیر a کدام است؟



۳۸. اگر بازه $[a-1, -3]$ شامل ۵ عدد صحیح باشد، حدود a کدام است؟

$$(1) [-7, -6) \quad (2) (-8, -6] \quad (3) (-7, -6] \quad (4) [-8, -6)$$

۳۹. مجموعه $\{3\} \cup (2a-1, a+3)$ یک بازه باز است. نمایش هندسی مقادیر a کدام است؟



۴۰. مجموعه $\{3\} \cup (a-3, 2a+4)$ یک بازه نیم باز است. مجموع مقادیر a کدام است؟

$$(1) 7 \quad (2) 6 \quad (3) \frac{11}{3} \quad (4) \frac{13}{3}$$

۴۱. اگر مجموعه $\{4a\} \cup (1, 3a+3)$ یک بازه نیم باز باشد، a عضو کدام یک از بازه‌های زیر است؟

$$(1) [0, 3] \quad (2) (-2, 2) \quad (3) (1, 5) \quad (4) (-1, 3]$$

(تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

۴۲. برای چند عدد طبیعی n ، بازه $(\frac{3-n}{2}, \frac{n+3}{n})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۳. اگر طول بازه $(-2a-3, a+1)$ برابر ۱۲ باشد، طول بازه $[a-2, 5+4a]$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴)

۴۴. اگر طول بازه $(3a-2, 3b+4)$ برابر ۱۲ باشد، طول بازه $[a-2, b+5]$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۴۵. اگر $A = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ و $B = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ باشند، حاصل $A \cup B$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ (۲) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (۳) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (۴) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$

۴۶. اگر $A = [-2, 3]$ و $B = (-4, 1]$ باشند، طول بازه $A \cup B$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۴۷. اگر $\mathbb{R} = (-\infty, 3] \cup (3a-2, +\infty)$ باشد، نمایش هندسی a کدام است؟



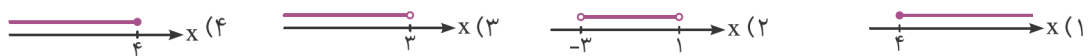
۴۸. اگر $A = [-\frac{3}{4}, \sqrt{5}]$ و $B = [\sqrt{3}, \frac{16}{3}]$ باشند، مجموعه $(A \cup B) \cap \mathbb{Z}$ چند عضو دارد؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۴۹. اگر $A = [-m+2, 4]$ ، $B = [-1, 2n-6]$ و $A \cup B = [-2, 8]$ باشد، بازه $[m, n]$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۵۰. اگر $(-5, 3) \cup (a-2b, b) = (-5, 2)$ باشد، نمایش هندسی مقادیر $a+b$ کدام است؟



۵۱. اگر $\mathbb{R} - \{x_0\} = (-\infty, 2a-3) \cup (a+1, +\infty)$ باشد، مقدار $a+x_0$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۵۲. اگر $A = [-1, 8] \cap [-5, 4]$ باشد، مجموعه $A \cap \mathbb{W}$ چند عضو دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۵۳. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 6\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 \leq x < 11\}$ باشند، مجموعه $A \cap B$ کدام است؟

- (۱) $(5, 6)$ (۲) $[5, 6]$ (۳) $[5, 6)$ (۴) $\{5, 6\}$

۵۴. اگر $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، بازه $A_4 \cap A_5 \cap A_6$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$ (۲) $(-\frac{1}{3}, \frac{3}{5})$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$ (۴) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

۵۵. اگر $A = (-\frac{5}{4}, 1]$ ، $B = [-1, 3]$ و $C = (\frac{1}{4}, 5)$ باشند، مجموعه $(A \cap B) \cup C$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 5]$ (۲) $(0, 5)$ (۳) $(-\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$ (۴) $[-1, 3)$

۵۶. اگر $A_n = [1-n, \frac{3+n}{4}]$ باشد، آنگاه $A_4 \cup (A_3 \cap A_5)$ به کدام صورت است؟

- (۱) $[-2, 4]$ (۲) $[-4, 4]$ (۳) $[-2, 3]$ (۴) $[-4, 3]$

۵۷. اگر $A \cap B = [0, 2]$ ، $A \cup B = (-3, 4]$ ، $A = [0, 4]$ و $B = (a, b)$ باشند، مقدار $2a+3b$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 4 (۳) 2 (۴) صفر

۵۸. کدام تساوی نادرست است؟

$$\begin{array}{ll} [n, 8] \cap [-6, m] = [3, 5] & (۲) \\ [n, 8] \cap [-6, m] = \{5\} & (۱) \\ [n, 8] \cap [-6, m] = [-7, 7] & (۴) \\ [n, 8] \cap [-6, m] = [-6, 8] & (۳) \end{array}$$

۵۹. اگر اشتراک دو بازه $(-3, 3)$ و $[n-2, 5]$ یک بازه نیم باز باشد، مجموعه مقادیر n ، کدام بازه است؟

$$\begin{array}{llll} (-1, +\infty) & (۱) & (-1, 5) & (۲) \\ (-\infty, 7) & (۳) & [-1, 5] & (۴) \end{array}$$

۶۰. اگر اشتراک بازه‌های $[m+2, 5)$ و $(-3, 2m-1]$ یک بازه بسته باشد، نمایش هندسی مقادیر m کدام است؟



۶۱. اگر $\{x_0\} = [-3, 4] \cap [2a, 2a+3]$ باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $a+x_0$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 6 & (۱) & 4 & (۲) \\ -4 & (۳) & -6 & (۴) \end{array}$$

۶۲. اگر $A = (-2, 5]$ و $B = [0, 8)$ باشند، کدام تساوی نادرست است؟

$$\begin{array}{llll} A \cup B = (-2, 8) & (۱) & A - B = (-2, 0) & (۲) \\ B - A = (5, 8) & (۳) & A \cap B = [0, 5) & (۴) \end{array}$$

۶۳. مجموعه $[-2, 1] - [-3, 7]$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$\begin{array}{llll} 5 & (۱) & 6 & (۲) \\ 7 & (۳) & 8 & (۴) \end{array}$$

۶۴. حاصل کدام یک از گزینه‌های زیر، بازه نیم باز است؟

$$\begin{array}{llll} (-2, 1] - (-1, 5) & (۱) & (1, 9) - [-2, 3] & (۲) \\ [4, 10) - [-2, 5) & (۳) & [1, 12) - (3, 15) & (۴) \end{array}$$

۶۵. اگر $A = (-3, 1) - (0, 1)$ باشد، مجموع اعضای مجموعه $A \cap \mathbb{Z}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -6 & (۱) & -5 & (۲) \\ -4 & (۳) & -3 & (۴) \end{array}$$

۶۶. اگر بازه $A = [-1, 4) - (2 - n, +\infty)$ شامل فقط دو عدد صحیح باشد، بازه مقادیر n کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1, 3] & (۱) & [0, 1) & (۲) \\ (1, 2] & (۳) & (-1, 2] & (۴) \end{array}$$

۶۷. اگر $A = [-2, 6)$ ، $B = (1, 10]$ و $C = (4, +\infty)$ باشند، مجموعه $(A \cap B) - C$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} [-2, 4) & (۱) & (1, 6) & (۲) \\ (-2, 4) & (۳) & (1, 4] & (۴) \end{array}$$

۶۸. اگر $A = (2, 10]$ ، $B = (-3, 5]$ و $C = (-11, 11)$ باشند، $C - (A \cap B)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (-11, 2] \cup (10, 11) & (۱) & (-11, 2) \cup [10, 11) & (۲) \\ (-11, 2] \cup (5, 11) & (۳) & (-5, 3) \cup [5, 10) & (۴) \end{array}$$

۶۹. اگر $A_n = [-n, 2 - n]$ باشد، حاصل $(A_1 \cup A_2) - A_1$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} [-2, 0] & (۱) & [-2, -1) & (۲) \\ [-1, 1] & (۳) & [-1, 0) & (۴) \end{array}$$

۷۰. اگر $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعه $A_3 - (A_3 \cup A_6)$ برابر کدام بازه است؟

$$\begin{array}{llll} (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & (۱) & [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] & (۲) \\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & (۳) & [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & (۴) \end{array}$$

۷۱. اگر $A_n = [-n, \frac{9-n}{4}]$ به صورت بازه باشد، آن‌گاه مجموعه $(A_1 \cap A_5) - (A_3 \cap A_6)$ به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{llll} [-2, -1) \cup (1, 2] & (۱) & [-2, -1] \cup [1, 2] & (۲) \\ [-1, 1] & (۳) & \emptyset & (۴) \end{array}$$

۷۲. اگر $A = (-2, 7]$ ، $B = [-5, 3]$ و $C = [3, 9]$ باشد، حاصل کدام عبارت برابر $[3, 7]$ است؟

$$\begin{array}{llll} (B \cup C) - A & (۱) & A - (B \cap C) & (۲) \\ (A \cup B) \cap C & (۳) & (A \cap B) \cup C & (۴) \end{array}$$

۷۳. اگر x_0 عضو فقط یکی از بازه‌های $A = (-2, 4)$ و $B = (1, 6)$ باشد، نمایش هندسی مقادیر x_0 کدام است؟



۷۴. اگر A و B بازه‌هایی از اعداد حقیقی، $A \cap B = (1, 4)$ و $A - B = [-5, 1]$ باشند، بازه A شامل چند عدد صحیح است؟

$$\begin{array}{llll} 9 & (۱) & 10 & (۲) \\ 11 & (۳) & 12 & (۴) \end{array}$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۷۵. کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱) بازه $[0, 4]$ (۲) مجموعه اعداد اول سه‌رقمی
(۳) مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ (۴) مجموعه مستطیل‌ها با مساحت ۱۲

۷۶. کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱) مجموعه اعداد گویای بازه $(1, 5)$ (۲) مجموعه اعداد گنگ بازه $(1, 5)$
(۳) مجموعه اعداد صحیح بازه $(1, 5)$ (۴) مجموعه اعداد گویای غیرصحیح بازه $(1, 5)$

۷۷. کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱) $Q' - Q$ (۲) $Z - IN$ (۳) $IN - W$ (۴) $Q - Z$

۷۸. کدام یک از مجموعه‌های زیر، متناهی نیست؟

- (۱) $Z - Q$ (۲) $IN - W$ (۳) $Z - W$ (۴) $(Q - Z) - IR$

۷۹. اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدرمطلق کم‌تر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱) $A - B$ (۲) $Z - A$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۸۰. اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد و B مجموعه اعداد اول باشد، کدام مجموعه متناهی و ناتنی است؟

- (۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A - (A \cup B)$

۸۱. اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟

- (۱) $A \cap B$ (۲) $A - B$ (۳) $(A - B) \cup (B - A)$ (۴) $A \cup B$

۸۲. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، $A \cap B$ حتماً متناهی است.
(۲) اگر $A - B$ نامتناهی باشد، مجموعه A حتماً نامتناهی است.
(۳) اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، $A \cup B$ حتماً نامتناهی است.
(۴) اگر $A - B$ متناهی باشد، مجموعه A حتماً متناهی است.

۸۳. اگر A و B دو مجموعه و $A \subseteq B$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) اگر A متناهی باشد، B نیز متناهی است.
(۲) اگر B نامتناهی باشد، A نیز نامتناهی است.
(۳) اگر A نامتناهی باشد، B می‌تواند متناهی باشد.
(۴) اگر B متناهی باشد، A نیز متناهی است.

۸۴. کدام عبارت همواره درست است؟

- (۱) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعه $A \cap B$ نامتناهی است.
(۲) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای متناهی باشد، مجموعه $A \cup B$ متناهی است.
(۳) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، مجموعه $A \cap B$ متناهی است.
(۴) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، مجموعه $A \cup B$ می‌تواند نامتناهی باشد.

۸۵. برای چند مقدار طبیعی m ، اشتراک دو بازه $A = (-\infty, 3 - m]$ و $B = [4 - 2m, +\infty)$ یک مجموعه متناهی است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۶. به ازای چند مقدار صحیح n ، اشتراک دو بازه $[3n, 6n + 1]$ و $[-5, 3]$ مجموعه‌ای متناهی و ناتنی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۷. اگر $A = [-3, 2]$ و $B = (2 - n, n + 3)$ باشند، به‌ازای کدام مقدار n مجموعه $A - B$ متناهی و ناتنی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

درس ۱

متمم یک مجموعه

۱ مجموعه مرجع - متمم یک مجموعه

۲ تعداد اعضای مجموعه ها

متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع - متمم یک مجموعه

بعد از مطالعه این قسمت به سؤالات زیر مراجعه کنید.
سؤالات: ۸۸ تا ۱۴۱

مجموعه مرجع و متمم مجموعه

مجموعه مرجع: در هر بحث، مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند را مجموعه مرجع می‌نامیم. معمولاً مجموعه مرجع را با U نمایش می‌دهیم. مثلاً وقتی صحبت از اعداد طبیعی دورقمی است، می‌توانیم هر یک از مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد حسابی، اعداد صحیح و اعداد گویا را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم.

U



متمم مجموعه: اگر U مجموعه مرجع و $A \subseteq U$ باشد، آن‌گاه مجموعه $U - A$ را متمم مجموعه A می‌گوییم و با A' نشان می‌دهیم.

اینجوری هم بین A' شامل عضوهایی از U هستش که در A نیستن.

اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد صحیح و $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$ باشد، مجموعه A' را با اعضا مشخص کنید.

(فعالیت (پ) صفحه ۸ کتاب درسی)

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ می‌باشد، پس A' که برابر $\mathbb{Z} - A$ است، به صورت زیر می‌باشد:

$A' = \{\dots, -4, -3, 3, 4, 5, \dots\}$

کتاب درسی

صفحه ۸

اگر $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع و $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$ باشد، نمایش هندسی A' را رسم کنید.

مجموعه A ، بازه $(-3, 2]$ است؛ پس A' برابر $\mathbb{R} - (-3, 2]$ می‌باشد که نمایش هندسی آن به صورت زیر است:

U

$A' \cap B = \{c, d\}$

با توجه به نمودار و شکل مقابل، مجموعه $A' \cap B$ کدام است؟

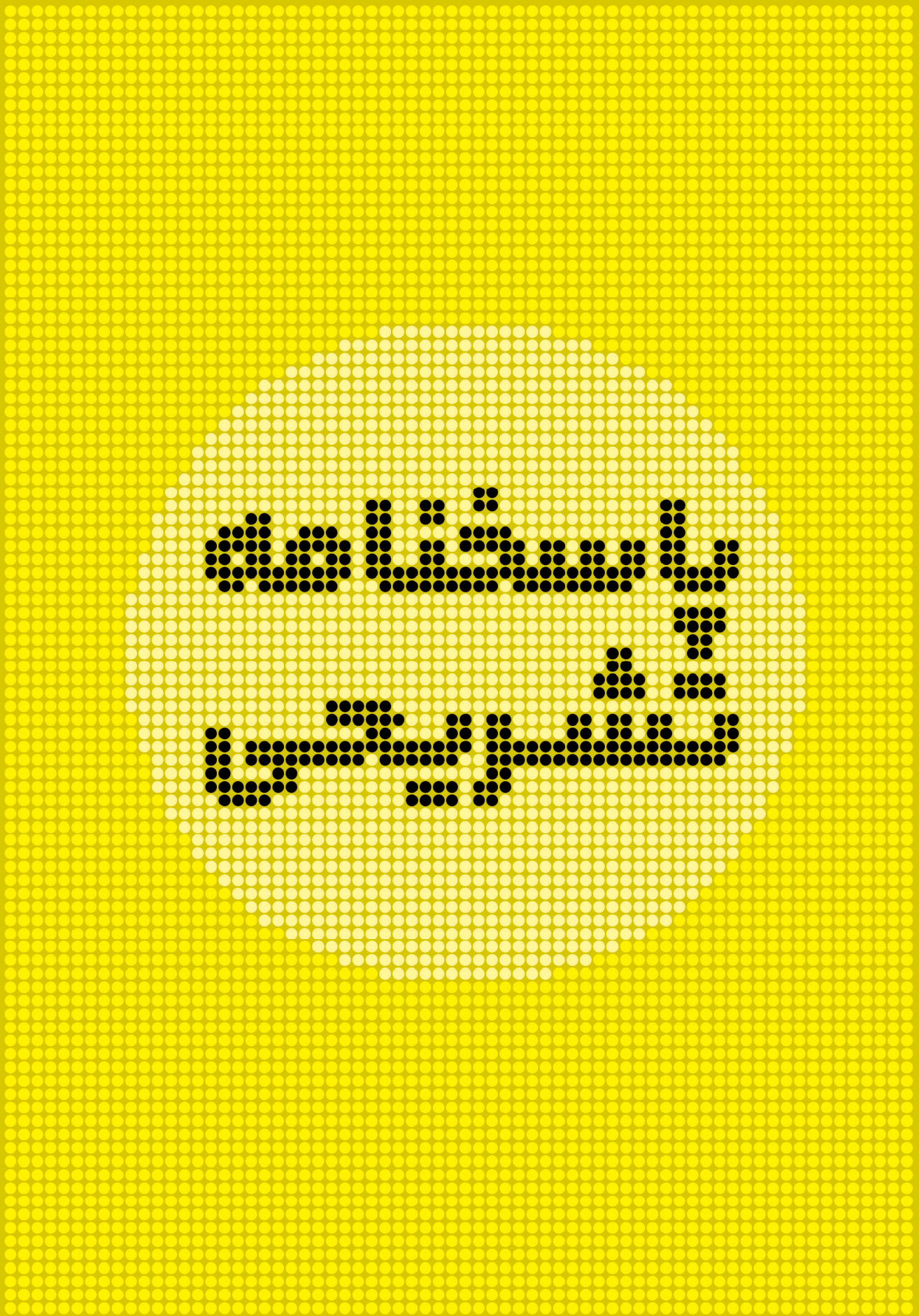
$\{c, d\}$ (۲)

$\{b\}$ (۴)

$\{a, e\}$ (۱)

$\{a, b\}$ (۳)

با توجه به نمودار، $A' = \{c, d, e\}$ و $B = \{b, c, d\}$ است، پس:



فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

۱ ۲

می‌دانیم تغییر ترتیب اعضای مجموعه آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد، پس $A = \{1, 2\} = \{2, 1\}$ بوده و مجموعه A را می‌توان به صورت $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, 3\}$ در نظر گرفت که دارای ۴ عضو می‌باشد.

۲ ۳

می‌دانیم تکرار اعضا در یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد، یعنی $\emptyset$ و $\{\emptyset\}$ و $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ نیز یک عضو هستند، بنابراین مجموعه A را می‌توان به صورت $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ نمایش داد که دارای ۲ عضو است.

۳ ۳

$\{c\}$ زیرمجموعه A نیست، بلکه عضو مجموعه A می‌باشد.

۱ ۴

ابتدا سرخ‌گزینه‌های (۳) و (۴) می‌رویم:
چون $\{2\} \in B$ پس $A \in B$ و چون $\{2, \{2\}\} \in C$ پس $B \in C$ است. حال برای این‌که بفهمیم $B \subset C$ هست یا خیر، کافی است بیرونی‌ترین آکولاد B را برداریم و بررسی کنیم که آیا ۲ و $\{2\}$ عضو C هستند یا خیر؛ چون $2 \in C$ ، پس $B \subseteq C$ است. اما در مورد گزینه (۲) اگر بیرونی‌ترین آکولاد A را برداریم، ۲ می‌ماند و چون $2 \in B$ ، پس $\{2\}$ یعنی A زیرمجموعه B است.

۳ ۵

$\{1\}$ عضو A نیست، پس گزینه «۱» نادرست است. در گزینه «۲»، $\{\emptyset, 1\}$ عضو A نیست، بلکه $\{\emptyset, 1\}$ عضو A می‌باشد. پس گزینه «۲» نادرست است. در گزینه «۳» می‌دانیم $\{\{\}\}$ همان $\{\emptyset\}$ است، پس عضو مجموعه A می‌باشد. در گزینه «۴» هم $\{\{\emptyset\}\}$ عضو مجموعه A نیست.

۲ ۶

چون $A = B$ ، پس اعضای مجموعه‌های A و B باید برابر باشند. واضح است که x با $x - 3$ برابر نیست، پس $x = 2$ و $x - 3 = y$ است. بنابراین داریم:

$$x - 3 = y \xrightarrow{x=2} 2 - 3 = y \Rightarrow y = -1$$

بنابراین $x + y$ برابر $1 + (-1) = 0$ می‌باشد.

۲ ۷

چون $A = B$ است، پس:

$$\begin{cases} A = \{4, \{7\}, \{b-1, c+2\}\} \\ B = \{\{7, 3\}, \{b-1\}, 4\} \end{cases} \xrightarrow{A=B} b-1=7 \Rightarrow b=8$$

پس مجموعه‌های A و B به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} A = \{4, \{7\}, \{7, c+2\}\} \\ B = \{\{7, 3\}, \{7\}, 4\} \end{cases} \Rightarrow c+2=3 \Rightarrow c=1$$

بنابراین $a + b + c$ برابر $16 + 8 + 1 = 25$ است.

۲ ۸

چون k عددی طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۵ است، پس ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در $2k-1$ جای‌گذاری می‌کنیم، حاصل اعضای مجموعه A هستند. پس:

$$A = \{2(1)-1, 2(2)-1, 2(3)-1, 2(4)-1, 2(5)-1\}$$

$$\Rightarrow A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

۳ ۹

اگر صفر را به صورت $\frac{0}{n}$ در نظر بگیریم، واضح است که اعضای مجموعه به صورت $\frac{n-1}{n}$ هستند که n عدد طبیعی است.

۲ ۱۰

مجموعه B شامل زیرمجموعه‌های A که عضو A نیز هستند، می‌باشد. پس $B = \{\{a, b\}\}$ می‌باشد. بنابراین گزینه (۲) درست است.

۴ ۱۱

مجموعه A به صورت $\{\{1, 4\}, 3, 5, 6, 7, \{2, 4\}\}$ است.

۲ ۱۲

مجموعه‌های A و B را با اعضا مشخص می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} A = \{0, 1, 2\} \\ B = \{1, 2, 3\} \end{cases} \Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$$

همان‌طور که می‌بینید مجموعه $A \cup B$ دارای ۴ عضو است.

۲ ۱۳

مجموعه‌های A_{12} و A_{18} را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} A_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \\ A_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \end{cases} \Rightarrow A_{12} \cup A_{18} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$$

$$\Rightarrow n(A_{12} \cup A_{18}) = 8$$

۴ ۱۴

اعضای مجموعه B را از مجموعه A برمی‌داریم:

$$A - B = \{(1, 2), 2, \{1\}, \{2, 1\}, 3\} - \{\{1, 2\}, 1, 3, \{3\}\}$$

$$= \{(1, 2), 2, \{1\}\}$$

۲ ۱۵

باید اعضای مجموعه B را از مجموعه A برداریم:

$$A - B = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\} - \{1, 3, 4, \{5\}\}$$

$$= \{2, \{3, 4\}, 5\} \Rightarrow n(A - B) = 3$$

۲ ۱۶

ابتدا $A \cap B$ را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$(A \cap B) \cup C = \{1, 3, 7\} \Rightarrow 3 \text{ عضو دارد.}$$

۳ ۱۷

مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B - A = \{5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{7, 8, 9\}$$

بنابراین داریم:

$$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید این مجموعه ۷ عضو دارد.

۲ ۱۸

می‌دانیم $(A - B) \cup (B - A)$ برابر $(A \cup B) - (A \cap B)$ است، با توجه به اعضای A و $(A - B) \cup (B - A)$ داریم:

عضو مشترک A و B بوده

از A تیره از B تیره

$$(A - B) \cup (B - A) = \{-3, -2, 1, 3, 7\}, A = \{-4, -2, 3, 5\}$$

از B تیره از A تیره

عضو مشترک A و B بوده

بنابراین $B = \{-3, 1, 7, -4, 5\}$ بوده که مجموع اعضای آن برابر ۶ است.

۲۸ ۴

می دانیم $Q \subseteq Z$ و $Q \cap Q' = \emptyset$ است، پس $Q' - Z = Q'$ می باشد.

۲۹ ۲

واضح است که نمایش بازه ای مجموعه A به صورت $[-1, 5]$ است.

۳۰ ۳

چون $\frac{4}{3} < 2 \leq \frac{4}{3}$ ، پس $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2]$ می باشد. پس گزینه «۱» درست است. هم چنین چون $0 \leq -2 < 0$ می باشد، پس $0 \in (-2, 0]$ است و در گزینه «۴»، چون $-1 < -\frac{5}{4}$ است، پس $-\frac{5}{4} \in (-\infty, -1)$ می باشد. دقت کنید در گزینه «۳»، $\{0, -2\}$ بازه نیست و فقط شامل دو عضو -2 و صفر است، پس $\{0, -2\} \neq -1$ می باشد.

۳۱ ۲

۱. $\frac{\sqrt{12}}{3} > 1$ است (دقت کن $\sqrt{9} = 3$ و $\sqrt{16} = 4$ هستن، پس $\sqrt{12}$ از ۳ بزرگ تر و از ۴ کوچک تره، پس $\frac{\sqrt{12}}{3}$ از ۱ بزرگ تر میشه)، پس $\frac{\sqrt{12}}{3} \notin (0, 1)$.

۳۲ ۴

چون $5 \in [2a-1, a+2]$ است، پس $2a-1 \leq 5 < a+2$ است و داریم:

$$\begin{cases} 2a-1 \leq 5 \Rightarrow 2a \leq 6 \Rightarrow a \leq 3 \\ a+2 > 5 \Rightarrow a > 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$$

۳۳ ۲

نمایش هندسی داده شده، نمایش بازه $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+6})$ است. چون بازه شامل $\frac{1}{5}$ است، پس:

$$\begin{cases} \frac{1}{n+6} < \frac{1}{5} \Rightarrow n+6 > 5 \Rightarrow n > -1 \\ \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow n+2 \leq 5 \Rightarrow n \leq 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < n \leq 3$$

بنابراین سه عدد طبیعی برای n وجود دارد.

۳۴ ۲

برای آن که $(-1, 3)$ زیرمجموعه $(a+4, b-3)$ باشد، باید $a+4 \leq -1$ و

$$\begin{cases} a+4 \leq -1 \Rightarrow a \leq -5 \\ b-3 \geq 3 \Rightarrow b \geq 6 \end{cases}$$

چون کمترین مقدار $b-a$ را می خواهیم باید کمترین مقدار b و بیشترین مقدار a را در نظر بگیریم، پس:

$$b-a = 6 - (-5) = 11$$

۳۵ ۱

مجموعه $\{1\} - [-3, 3]$ را می توان به صورت اجتماع دو بازه $(-3, 1)$ و $(1, 3]$ نوشت، پس برای آن که بازه $(n-2, 3n+2)$ زیرمجموعه آن ها باشد، باید داشته باشیم:

$$(n-2, 3n+2) \subseteq [-3, 1] \quad \text{حالت اول}$$

$$\begin{cases} n-2 \geq -3 \Rightarrow n \geq -1 \\ 3n+2 \leq 1 \Rightarrow 3n \leq -1 \Rightarrow n \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$$

$$(n-2, 3n+2) \subseteq (1, 3] \quad \text{حالت دوم}$$

$$\begin{cases} n-2 \geq 1 \Rightarrow n \geq 3 \\ 3n+2 \leq 3 \Rightarrow n \leq \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$$

۱۹ ۱

چون می خواهیم $\frac{18}{x} \in \mathbb{N}$ باشد، پس حتماً x عددی طبیعی است. از آن جایی که ورودی های مجموعه، $\frac{24}{x}$ هایی هستند که صحیح می باشند پس x می تواند ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ باشد که به ازای x های ۱، ۲، ۳ و ۶، حاصل $\frac{18}{x}$ طبیعی می شود. پس: $A = \{18, 9, 6, 3\}$
 $B = \{1, 2, \dots, 9\} \Rightarrow B - A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \Rightarrow n(B - A) = 6$

۲۰ ۳

با توجه به این که اعضای مجموعه A و اعضای مجموعه B در مجموعه $A \cup B$ هستند و تکرار عضوها در مجموعه تأثیری ندارد؛ پس مجموعه B با حداکثر عضو می تواند به صورت $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ باشد که دارای ۷ عضو است.

۲۱ ۲

برای آن که مجموعه $A - B$ حداکثر عضو را داشته باشد، باید $A \cap B$ با توجه به ناهمی بودن آن حداقل عضو یعنی یک عضو داشته باشد. از آن جایی که $A - B = \{e, 3, 1\}$ است پس e و ۳ و ۱ عضو B هستند ولی عضو A نیستند، پس حتماً A باید عضوهای d و a را داشته باشد. از آن جایی که $A \cap B \neq \emptyset$ است؛ پس حتماً $A \cap B$ حداقل یک عضو دارد، پس $A - B$ دارای حداکثر ۲ عضو است.

۲۲ ۳

در گزینه «۱»، $Q \not\subseteq Q'$ ، در گزینه «۲»، $W \not\subseteq \mathbb{N}$ و در گزینه «۴»، $Q' \not\subseteq \mathbb{R}$ و هم چنین $Q' \not\subseteq W$ و $\mathbb{N}$ ، پس گزینه «۳» درست است.

۲۳ ۲

چون $Q' \cup A = Q$ برابر مجموعه اعداد حقیقی شده است، پس $A = Q$ می باشد. واضح است که $\sqrt{3}$ عددی گنگ است، پس $\sqrt{3} \notin A$.

۲۴ ۴

می دانیم $Q \subseteq Z$ و چون $Q \cap Q' = \emptyset$ ، پس حتماً $Z \cap Q' = \emptyset$ است.

۲۵ ۴

مجموعه $Z - W$ شامل اعداد صحیح منفی و $\{0\} = W - \mathbb{N}$ می باشد. پس اجتماع آن ها مجموعه $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ است که بزرگ ترین عضو آن صفر می باشد.

۲۶ ۲

مجموعه $Q - \mathbb{N}$ شامل اعداد گویای غیرطبیعی است و چون با اعداد گنگ اشتراکی ندارد، پس $(Q - \mathbb{N}) - Q' = (Q - \mathbb{N})$ برابر $Q - \mathbb{N}$ است. از طرفی اجتماع $Q - \mathbb{N}$ و W باعث می شود که مجموعه حاصل دوباره اعداد طبیعی را داشته باشد، پس حاصل برابر Q می شود.

۲۷ ۴

تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

در گزینه «۱»، $Q' - Q = Q'$ می باشد، پس $Z - \mathbb{N}$ زیرمجموعه Q' نیست. در گزینه «۲»، $W \cap Q = W$ و $\mathbb{N} \cap Q' = \emptyset$ است، پس $(W \cap Q) - (\mathbb{N} \cap Q')$ برابر $W - \emptyset$ و در نتیجه برابر W است. در گزینه «۳»، $Z \cap W = W$ و $(Z \cap W) - \mathbb{N}$ برابر $W - \mathbb{N}$ می شود که برابر $\{0\}$ می باشد. اما گزینه «۴» درست است، چون از $\mathbb{R} = Q' \cup A$ نتیجه می گیریم $A = Q$ بوده و در نتیجه $Z \subseteq Q$ می باشد.

شامل دو عدد صحیح صفر و ۱ است. $n = 5 \Rightarrow (-1, \frac{1}{5}) \Rightarrow$

شامل سه عدد صحیح -۱، صفر و ۱ است. $n = 6 \Rightarrow (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \Rightarrow$

توجه کنید هرچه n بزرگ‌تر شود، کران پایین بازه یعنی $\frac{3-n}{4}$ ، کوچک‌تر و کران بالای بازه یعنی $\frac{n+3}{4}$ ، بین دو عدد ۱ و ۲ می‌ماند، پس با افزایش n ، تعداد اعداد صحیح بازه بیشتر می‌شود؛ پس فقط به ازای یک مقدار طبیعی n ، بازه شامل فقط یک عدد صحیح است.

چون طول بازه $(-2a-3, a+1)$ برابر ۱۲ است، پس:

$$(a+1) - (-2a-3) = 12 \Rightarrow 3a+4 = 12$$

$$\Rightarrow 3a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$$

حال طول بازه $(a-2, 5+4a)$ برابر است با:

$$(5+4a) - (a-2) = 7+3a = 7+3(\frac{8}{3}) = 7+8 = 15$$

با توجه به این که طول بازه $(3a-2, 3b+4)$ برابر ۱۲ است، داریم:

$$(3b+4) - (3a-2) = 12 \Rightarrow 3b-3a+6 = 12$$

$$\Rightarrow 3b-3a = 6 \Rightarrow b-a = 2$$

حال طول بازه $(a-2, b+5)$ برابر است با:

$$(b+5) - (a-2) = b-a+7 = 2+7 = 9$$

اجتماع دو بازه A و B برابر است با:

بزرگ‌ترین کران بالا $\rightarrow$ کوچک‌ترین کران پایین $\leftarrow$

$$A \cup B = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

ابتدا بازه $A \cup B$ را به دست می‌آوریم:

بزرگ‌ترین کران بالا $\rightarrow$ کوچک‌ترین کران پایین $\leftarrow$

$$A \cup B = [-2, 3] \cup (-4, 1] = (-4, 3]$$

بنابراین طول بازه برابر $3 - (-4) = 7$ می‌باشد.

برای آن که اجتماع بازه‌های $(-\infty, 3]$ و $(3a-2, +\infty)$ برابر $\mathbb{R}$ شود، باید $3a-2 \leq 3$ باشد، پس:

$$3a-2 \leq 3 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a \leq \frac{5}{3}$$

ابتدا $A \cup B$ را به دست می‌آوریم:

$$A \cup B = [-\frac{3}{4}, \sqrt{5}] \cup [\sqrt{3}, \frac{16}{3}] = [-\frac{3}{4}, \frac{16}{3}]$$

حال مجموعه $(A \cup B) \cap \mathbb{Z}$ شامل اعداد صحیح موجود در بازه $[-\frac{3}{4}, \frac{16}{3}]$ می‌باشد که برابر تعداد اعداد صحیح موجود در بازه $[-1, 5]$ است، پس:

$$5 - (-1) + 1 = 7$$

چون $2 \in [n-1, 3n-7]$ است، پس:

$$\begin{cases} n-1 \geq 2 \Rightarrow n \geq 3 \\ 3n-7 \geq 2 \Rightarrow 3n \geq 9 \Rightarrow n \geq 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} n \geq 3$$

چون اشتراک بازه $(-3, a+5)$ با مجموعه اعداد صحیح دارای ۴ عضو است یعنی بازه $(-3, a+5)$ دارای ۴ عدد صحیح می‌باشد $(-2, -1, 0, 1)$ باید $a+5$ برابر ۲ باشد، بنابراین $a+5 = 2 \Rightarrow a = -3$ و یا مساوی باشد:

$$\begin{cases} a+5 > 1 \Rightarrow a > -4 \\ a+5 \leq 2 \Rightarrow a \leq -3 \end{cases} \Rightarrow -4 < a \leq -3$$

دقت کنید اگر $a+5$ برابر ۲ باشد، باز هم بازه $(-3, 2)$ شامل ۴ عدد صحیح است.

برای آن که بازه $[a-1, -3]$ شامل ۵ عدد صحیح باشد، با توجه به این که -۳ نقطه انتهایی بازه است، پس باید شامل اعداد صحیح -۳، -۴، -۵، -۶، و -۷ باشد، پس $-7 \leq a-1 < -8$ است:

$$-8 < a-1 \leq -7 \Rightarrow -7 < a \leq -6 \Rightarrow a \in (-7, -6]$$

چون اجتماع بازه $(2a-1, a+3)$ و مجموعه $\{3\}$ یک بازه باز است، پس حتماً $3 \in (2a-1, a+3)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2a-1 < 3 \Rightarrow 2a < 4 \Rightarrow a < 2 \\ a+3 > 3 \Rightarrow a > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 < a < 2$$

برای آن که اجتماع بازه $(a-3, 2a+4)$ و مجموعه $\{3\}$ یک بازه نیم باز باشد، داریم:

$$\begin{cases} a-3 = 3 \Rightarrow a = 6 \\ \text{یا} \\ 2a+4 = 3 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر a برابر $\frac{11}{2} = 5.5$ است.

برای آن که مجموعه $\{4a\} \cup (1, 3a+3)$ یک بازه نیم باز باشد، باید

$$\begin{cases} 3a+3 = 4a \Rightarrow a = 3 \\ \text{یا} \\ 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها فقط بازه $(-1, 3]$ شامل مقادیر a است.

بازه $(\frac{3-n}{4}, \frac{n+3}{4})$ را به ازای مقادیر مختلف n به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow (1, 4) \Rightarrow \text{شامل دو عدد صحیح ۲ و ۳ است.} \\ n=2 &\Rightarrow (\frac{1}{4}, \frac{5}{4}) \Rightarrow \text{شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.} \\ n=3 &\Rightarrow (0, 2) \Rightarrow \text{شامل فقط عدد صحیح ۱ است.} \\ n=4 &\Rightarrow (-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}) \Rightarrow \text{شامل دو عدد صحیح صفر و ۱ است.} \end{aligned}$$

حال $(A \cap B) \cup C$ را معلوم می‌کنیم:

$$(A \cap B) \cup C = [-1, 1] \cup \left(\frac{1}{3}, 5\right] - [-1, 5] = \left(\frac{1}{3}, 5\right]$$

بازه‌های A_2 , A_3 و A_5 را معلوم می‌کنیم:

$$A_2 = [1-2, \frac{3+2}{2}] \Rightarrow A_2 = [-1, \frac{5}{2}]$$

$$A_3 = [1-3, \frac{3+3}{2}] \Rightarrow A_3 = [-2, 3]$$

$$A_5 = [1-5, \frac{3+5}{2}] \Rightarrow A_5 = [-4, 4]$$

حال داریم:

$$A_3 \cap A_5 = [-2, 3] \cap [-4, 4] = [-2, 3]$$

$$A_2 \cup (A_3 \cap A_5) = [-1, \frac{5}{2}] \cup [-2, 3] = [-2, 3]$$

با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$A \cup B = (-3, 4] \Rightarrow [0, 4] \cup (a, b) = (-3, 4] \Rightarrow a = -3$$

$$A \cap B = [0, 2] \Rightarrow [0, 4] \cap (-3, b) = [0, 2] \Rightarrow b = 2$$

بنابراین مقدار $2a + 3b$ برابر $-6 + 6 = 0$ می‌باشد.

چون اشتراک دو بازه $[n, 8]$ و $[-6, m]$ در گزینه‌ها داده شده، کران پایین نباید از -6 کمتر و کران بالا نباید از 8 بیشتر باشد، پس گزینه «۴» نادرست است.

اشتراک دو بازه $(-3, 3)$ و $[n-2, 5]$ حتماً به فرم $(\emptyset, 3)$ یا $(\emptyset, 3)$ است (کوچک‌ترین کران بالاست). از آن جایی که باید بازه نیم‌باز باشد، پس اشتراک دو بازه، $[n-2, 3)$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} n-2 > -3 \Rightarrow n > -1 \\ n-2 < 3 \Rightarrow n < 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < n < 5 \Rightarrow n \in (-1, 5)$$

برای آن که اشتراک بازه‌های $[m+2, 5]$ و $[-3, 2m-1]$ یک بازه بسته باشد، باید اشتراک آن‌ها بازه $[m+2, 2m-1]$ شود، یعنی $m+2$ بزرگ‌ترین کران پایین و $2m-1$ کوچک‌ترین کران بالا است. از طرفی می‌دانیم در بازه‌ها کران پایین از کران بالا کوچک‌تر است، پس:

$$\begin{cases} m+2 > -3 \Rightarrow m > -5 \\ m+2 < 5 \Rightarrow m < 3 \end{cases} \Rightarrow -5 < m < 3$$

$$\begin{cases} 2m-1 < 5 \Rightarrow 2m < 6 \Rightarrow m < 3 \\ 2m-1 > -3 \Rightarrow 2m > -2 \Rightarrow m > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 3$$

از اشتراک حدود به دست آمده برای m داریم:

$$\begin{cases} -5 < m < 3 \\ -1 < m < 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < m < 3$$

۴۹ ۲

با توجه به این که $A \cup B = [-2, 8]$ است، داریم:

$$[-m+2, 4] \cup [-1, 2n-6] = [-2, 8]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m+2 = -2 \Rightarrow m = 4 \\ 2n-6 = 8 \Rightarrow n = 7 \end{cases} \Rightarrow [m, n] = [4, 7]$$

بازه $[4, 7]$ شامل $7-4+1=4$ عدد صحیح است.

۵۰ ۱

چون اجتماع بازه‌های $(-5, 2)$ و $(a-2b, b)$ بازه $(-5, 3)$ است پس -5 کوچک‌ترین کران پایین و 3 بزرگ‌ترین کران بالا است، پس b حتماً برابر 3 بوده و داریم:

$$a-2b \geq -5 \xrightarrow{b=3} a-6 \geq -5 \Rightarrow a \geq 1$$

بنابراین نمایش هندسی مقادیر $a+b$ به صورت زیر است:

$$a \geq 1 \Rightarrow a+b \geq 1+b \xrightarrow{b=3} a+b \geq 4$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{4} \end{array} \xrightarrow{x}$$

۵۱ ۲

باید $2a-3 = a+1 = x$ باشد، پس:

$$2a-3 = a+1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow x = 5$$

بنابراین $a+x$ برابر $4+5=9$ است.

۵۲ ۳

ابتدا مجموعه A را به صورت یک بازه می‌نویسیم:

$$A = [-1, 8] \cap [-5, 4] = [-1, 4]$$

بازه $[-1, 4]$ شامل 5 عدد حسابی صفر، 1 ، 2 ، 3 و 4 است، پس $A \cap W$ دارای 5 عضو می‌باشد.

۵۳ ۴

با توجه به مجموعه‌های داده شده $A = (3, 6]$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ است، پس:

$$A \cap B = (3, 6] \cap \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{5, 6\}$$

۵۴ ۴

بازه‌های A_4 ، A_5 و A_6 را به دست می‌آوریم:

$$A_4 = \left(-\frac{2}{4}, \frac{4-2}{4}\right) \Rightarrow A_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$A_5 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{5-2}{5}\right) \Rightarrow A_5 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) \Rightarrow A_6 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

حال داریم:

$$A_4 \cap A_5 \cap A_6 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

۵۵ ۱

ابتدا $A \cap B$ را به دست می‌آوریم:

$$A \cap B = \left(-\frac{5}{4}, 1\right] \cap [-1, 3] = [-1, 1]$$

$$3) [4, 10) - [-2, 5) = [5, 10)$$



حاصل، یک بازه نیم باز است. بنابراین نیازی به بررسی گزینه «۴» نیست. دقت کنید حاصل گزینه «۴» بازه بسته $[1, 3]$ می باشد.

۲ ۶۵

مجموعه A را به دست می آوریم:

$$A = [-3, 1] - (0, 1) = [-3, 0] \cup \{1\}$$



بنابراین اعداد صحیح مجموعه A ، -3 ، -2 ، -1 ، صفر و ۱ می باشند که مجموع آن ها برابر -5 است.

۳ ۶۶

چون کران بالای بازه $(2-n, +\infty)$ برابر $+\infty$ است، پس وقتی آن را از بازه $[-1, 4)$ کم می کنیم، حاصل $\emptyset$ یا $\{-1\}$ یا $[-1, \infty)$ می شود. از طرفی باید حاصل شامل فقط دو عدد صحیح باشد، پس باید $0 \leq \infty < 1$ باشد. بنابراین داریم:

$$0 \leq 2-n < 1 \Rightarrow -2 \leq -n < -1 \Rightarrow 1 < n \leq 2 \Rightarrow n \in (1, 2]$$

۴ ۶۷

ابتدا $A \cap B$ را به دست می آوریم:

کوچک ترین کران بالا $\rightarrow$ بزرگ ترین کران پایین

$$A \cap B = [-2, 6) \cap (1, 10] = (1, 6)$$

حال $(A \cap B) - C$ را به دست می آوریم:

$$(A \cap B) - C = (1, 6) - (4, +\infty) = (1, 4]$$



۳ ۶۸

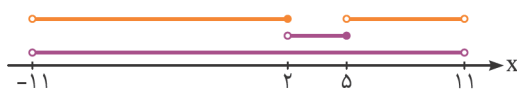
ابتدا $A \cap B$ را به دست می آوریم:

کوچک ترین کران بالا $\rightarrow$ بزرگ ترین کران پایین

$$A \cap B = (2, 10) \cap (-3, 5] = (2, 5]$$

حال $C - (A \cap B)$ را معلوم می کنیم:

$$C - (A \cap B) = (-11, 11) - (2, 5] = (-11, 2] \cup (5, 11)$$



۲ ۶۹

ابتدا بازه های A_1 و A_2 را معلوم می کنیم:

$$A_1 = [-1, 2-1] \Rightarrow A_1 = [-1, 1]$$

$$A_2 = [-2, 2-2] \Rightarrow A_2 = [-2, 0]$$

حال $A_1 \cup A_2$ را به دست می آوریم:

$$A_1 \cup A_2 = [-1, 1] \cup [-2, 0] = [-2, 1]$$

بنابراین $(A_1 \cup A_2) - A_1$ برابر است با:

$$(A_1 \cup A_2) - A_1 = [-2, 1] - [-1, 1] = [-2, -1)$$

۴ ۶۱

در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه $\{x_0\}$ می شود:

حالت اول $2a = 4 \Rightarrow a = 2$

$$[-3, 4] \cap [4, 7] = \{4\} \Rightarrow x_0 = 4$$

بنابراین در این حالت، $a + x_0 = 6$ می شود.

حالت دوم $2a + 3 = -3 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$

$$[-3, 4] \cap [-6, -3] = \{-3\} \Rightarrow x_0 = -3$$

در این حالت $a + x_0 = -6$ می باشد؛ پس کم ترین مقدار -6 است.

۴ ۶۲

تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

بزرگ ترین کران بالا $\rightarrow$ کوچک ترین کران پایین

$$1) A \cup B = (-2, 5] \cup [0, 8) = (-2, 8)$$

$$2) A - B = (-2, 5] - [0, 8) = (-2, 0)$$



$$3) B - A = [0, 8) - (-2, 5] = (5, 8)$$



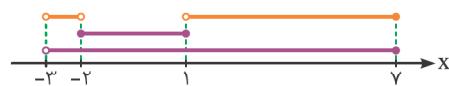
کوچک ترین کران بالا $\rightarrow$ بزرگ ترین کران پایین

$$4) A \cap B = (-2, 5] \cap [0, 8) = [0, 5]$$

بنابراین گزینه «۴» نادرست است.

۲ ۶۳

به کمک نمودار هندسی داریم:



$$(-3, 7) - [-2, 1] = (-3, -2) \cup (1, 7)$$

در بازه $(-3, -2)$ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد، اما در بازه $(1, 7)$ به تعداد $7-1=6$ عدد صحیح وجود دارد.

۳ ۶۴

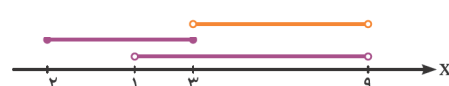
حاصل تک تک گزینه ها را به دست می آوریم:

$$1) (-2, 10) - (-1, 5) = (-2, 1] \cup [5, 10)$$



همان طور که ملاحظه می کنید حاصل، اصلاً بازه نیست.

$$2) (1, 9) - [-2, 3] = (3, 9)$$



حاصل، یک بازه باز است.

$$B - A = (1, 6) - (-2, 4) = [4, 6) \Rightarrow x_0 \in [4, 6)$$



بنابراین نمایش هندسی مقادیر x_0 به صورت زیر است:



۱ ۷۴

چون $A \cap B = (1, 4)$ است، پس حتماً $(1, 4)$ زیرمجموعه بازه A می‌باشد. از طرفی چون $A - B = [-5, 1]$ است، پس $[-5, 1]$ نیز زیرمجموعه A می‌باشد؛ بنابراین بازه A به صورت $[-5, 1] \cup (1, 4)$ می‌باشد، پس $A = [-5, 4)$ بوده و شامل $4 - (-5) = 9$ عدد صحیح است.

۲ ۷۵

بازه‌های اعداد حقیقی نامتناهی هستند، پس بازه $[0, 4]$ نامتناهی است. مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ به صورت $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ می‌باشد که نامتناهی است. از طرفی بی‌شمار مستطیل با مساحت ۱۲ وجود دارد. مثلاً مستطیل به ابعاد ۳ و ۴، ۲ و ۶، ۱ و ۱۲، $\frac{12}{11}$ و $\frac{12}{1}$ و $\frac{12}{21}$ و ... پس مجموعه مستطیل‌ها با مساحت ۱۲ نامتناهی است. اما مجموعه اعداد اول سه‌رقمی، یک مجموعه متناهی است.

۳ ۷۶

مجموعه اعداد صحیح بازه $(1, 5)$ ، مجموعه $\{2, 3, 4\}$ است که متناهی می‌باشد.

۳ ۷۷

مجموعه $\mathbb{N} - \mathbb{W} = \{\}$ می‌باشد، پس متناهی است.

۳ ۷۸

مجموعه‌های $\mathbb{Z} - \mathbb{Q}$ ، $\mathbb{N} - \mathbb{W}$ و $(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) - \mathbb{R}$ تهی هستند، پس متناهی می‌باشند، اما مجموعه $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ برابر $\{..., -3, -2, -1\}$ است که نامتناهی می‌باشد.

۳ ۷۹

مجموعه A یک مجموعه نامتناهی به صورت $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ و مجموعه B یک مجموعه متناهی به صورت $B = \{-99, -98, \dots, 98, 99\}$ است. واضح است که مجموعه $A \cap B$ متناهی است.

۲ ۸۰

مجموعه‌های A و B به صورت زیر هستند:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \quad B = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$$

مجموعه $A - B$ نامتناهی، مجموعه $B - A$ برابر $\{2\}$ ، مجموعه $A \cap B$ نامتناهی و مجموعه $A - (A \cup B) = \{\}$ است. بنابراین $B - A$ متناهی و ناتهی است.

۴ ۸۱

اگر A و B نامتناهی باشند، $A \cup B$ حتماً نامتناهی است. اما $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ ممکن است، متناهی باشند.

مثلاً اگر $A = \mathbb{W}$ و $B = \mathbb{N}$ باشد، $A - B = \{\}$ و $B - A = \{0\}$ می‌شود که متناهی هستند و یا اگر $A = \mathbb{N}$ و $B = \{..., -3, -2, -1\}$ باشند، آن‌گاه $A \cap B = \emptyset$ می‌شود که متناهی است.

۴ ۷۰

ابتدا بازه‌های A_3 و A_6 را مشخص می‌کنیم:

$$A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}\right) \Rightarrow A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

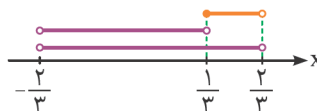
$$A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) \Rightarrow A_6 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

حال داریم:

بزرگ‌ترین کران بالا $\leftarrow$ کوچک‌ترین کران پایین $\rightarrow$

$$A_3 \cup A_6 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$(A_3 \cup A_6) - A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



۱ ۷۱

ابتدا بازه‌های A_1 ، A_2 ، A_5 و A_7 را مشخص می‌کنیم:

$$A_1 = \left[-1, \frac{9-1}{4}\right] \Rightarrow A_1 = [-1, 2]$$

$$A_2 = \left[-2, \frac{9-2}{5}\right] \Rightarrow A_2 = \left[-2, \frac{7}{5}\right]$$

$$A_5 = \left[-5, \frac{9-5}{4}\right] \Rightarrow A_5 = \left[-5, \frac{5}{4}\right]$$

$$A_7 = \left[-7, \frac{9-7}{2}\right] \Rightarrow A_7 = \left[-7, 1\right]$$

حال داریم:

کوچک‌ترین کران بالا $\leftarrow$ بزرگ‌ترین کران پایین $\rightarrow$

$$A_2 \cap A_5 = \left[-2, \frac{7}{5}\right] \cap \left[-5, \frac{5}{4}\right] = \left[-2, \frac{7}{5}\right]$$

$$A_1 \cap A_7 = [-1, 2] \cap [-7, 1] = [-1, 1]$$

$$(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = \left[-2, \frac{7}{5}\right] - [-1, 1] = \left[-2, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, 1\right]$$



۳ ۷۲

ابتدا سراغ گزینه‌های «۳» و «۴» می‌رویم. چون محاسبه اجتماع و اشتراک بازه‌ها نسبت به تفاضل آن‌ها راحت‌تر است، پس:

بزرگ‌ترین کران بالا $\leftarrow$ کوچک‌ترین کران پایین $\rightarrow$

$$A \cup B = (-2, 7) \cup [-5, 3] = [-5, 7]$$

کوچک‌ترین کران بالا $\leftarrow$ بزرگ‌ترین کران پایین $\rightarrow$

$$(A \cup B) \cap C = [-5, 7] \cap [3, 9] = [3, 7]$$

بنابراین گزینه «۳» پاسخ سؤال است.

۳ ۷۳

چون x_0 عضو فقط یکی از بازه‌های $A = (-2, 4)$ و $B = (1, 6)$ است، پس $x_0 \in A - B$ یا $x_0 \in B - A$ است. بنابراین داریم:

$$A - B = (-2, 4) - (1, 6) = (-2, 1] \Rightarrow x_0 \in (-2, 1]$$



۸۲ ۴

ممکن است مجموعه A نامتناهی باشد، اما $A - B$ متناهی شود. مثلاً اگر A مجموعه نامتناهی اعداد حسابی و B مجموعه نامتناهی اعداد طبیعی باشند، $A - B = \{0\}$ می‌شود که متناهی است.

۸۳ ۴

اگر B متناهی باشد، هر زیرمجموعه از آن نیز متناهی است.

۸۴ ۱

در گزینه «۲»، اگر B نامتناهی باشد، $A \cup B$ نامتناهی است. در گزینه «۳»، اگر $A = \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{W}$ باشند، مجموعه $A \cap B = \mathbb{N}$ می‌شود که نامتناهی است. در گزینه «۴» چون B متناهی است، پس A نیز متناهی می‌باشد و اجتماع دو مجموعه متناهی می‌باشد. در مورد گزینه «۱» چون $A \subseteq B$ ، پس $A \cap B = A$ می‌باشد و چون A نامتناهی است، پس $A \cap B$ نیز نامتناهی می‌باشد.

۸۵ ۲

باید $3 - m \leq 4 - 2m$ باشد، پس:

$$3 - m \leq 4 - 2m \Rightarrow -m + 2m \leq 4 - 3 \Rightarrow m \leq 1$$

بنابراین یک مقدار طبیعی برای m وجود دارد.

۸۶ ۲

برای آن‌که اشتراک دو بازه، متناهی و ناتهی باشد، باید یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد:

$$\begin{cases} 3n = 3 \Rightarrow n = 1 \\ \text{یا} \\ 6n + 1 = -5 \Rightarrow 6n = -6 \Rightarrow n = -1 \end{cases}$$

۸۷ ۴

چون $A - B$ باید متناهی و ناتهی باشد، پس باید $A - B = \{-3\}$ شود و این یعنی $2 - n = -3 \Rightarrow n = 5$ می‌باشد.

۸۸ ۳

می‌دانیم A' شامل عضوایی از مجموعه مرجع است که در مجموعه A نیستند، پس: $A' = \{4, 5, 6, 7, 8, 11\}$ بنابراین مجموع اعضای مجموعه A' برابر ۴۱ است.

۸۹ ۴

مجموعه A' را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

واضح است که مجموعه $\{3, 5, 9, 11\}$ زیرمجموعه A' نیست، چون ۱۱ عضو مجموعه A' نیست. (توجه کن!! حتی عضو مجموعه مربع هم نیستش.)

۹۰ ۳

مجموعه مرجع به صورت مقابل است: $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ مجموعه اعداد اول یک رقمی $\{2, 3, 5, 7\}$ می‌باشد، پس متمم آن به صورت زیر است که دارای ۷ عضو می‌باشد: $\{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

۹۱ ۲

مجموعه مرجع و مجموعه A را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$$U = \{-6, -5, -4, \dots, 6, 7\}$$

$$A = \{-5, -3, -1, 1, 3\}$$

بنابراین مجموعه A' به صورت زیر است و داریم:

$$A' = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow 12 = \text{مجموع اعضا}$$

۹۲ ۴

چون W مجموعه مرجع است، پس متمم مجموعه $\mathbb{N}$ برابر $\{0\}$ است. (در واقع متمم $\mathbb{N}$ همون $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ هستش.)

۹۳ ۱

می‌دانیم $W \cap \mathbb{R} = W$ است، پس:

$$((W \cap \mathbb{R}) \cap \mathbb{N})' = (W \cap \mathbb{N})' = \mathbb{N}'$$

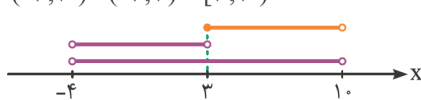
از طرفی $\mathbb{N}' \cap Q' = Q'$ است که متمم آن مجموعه اعداد گویا یعنی Q می‌باشد.

۹۴ ۲

متمم مجموعه A یعنی A' شامل عضوایی از مجموعه مرجع است که عضو مجموعه A نیستند، پس اعداد حسابی موجود در مجموعه A در مجموعه A' نیستند که این اعداد صفر، ۱ و ۲ می‌باشند که تعداد آن‌ها ۳ است.

۹۵ ۳

با توجه به مجموعه مرجع، متمم مجموعه $(-4, 3)$ ، مجموعه $(-4, 10) - (-4, 3) = [3, 10)$ است، پس:



۹۶ ۲

متمم مجموعه $(0, 3]$ ، مجموعه $\mathbb{R} - (0, 3]$ است که می‌توان آن را به صورت $(-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$ نیز نمایش داد.



۹۷ ۲

ابتدا $\mathbb{R} - (-\infty, 4]$ را به دست می‌آوریم: $\mathbb{R} - (-\infty, 4] = (4, +\infty)$



حال داریم: $(-\infty, 2] \cup (\mathbb{R} - (-\infty, 4]) = (-\infty, 2] \cup (4, +\infty)$ متمم مجموعه بالا به صورت $(2, 4]$ می‌باشد.



۹۸ ۲

مجموعه $A' - (B \cap C)$ را به کمک ویژگی‌ها تغییر دهیم، کمکی به ما نمی‌کند و ساده‌تر نمی‌شود، پس:

$$\begin{cases} A' = \{e, f, g, h\} \\ B \cap C = \{c, f\} \end{cases} \Rightarrow A' - (B \cap C) = \{e, f, g, h\} - \{c, f\} = \{e, g, h\}$$

۹۹ ۴

چون A متناهی است، پس اشتراک آن با هر مجموعه‌ای، متناهی خواهد بود.

۱۰۰ ۳

چون مجموعه B نامتناهی است، پس حتماً مجموعه مرجع نیز نامتناهی می‌باشد. حال چون A متناهی است، پس A' نامتناهی می‌باشد. اما در مورد متناهی یا نامتناهی بودن B' نمی‌توان اظهار نظر کرد؛ بنابراین $A' \cup B'$ حتماً نامتناهی است.

دقت کنید اگر B' متناهی باشد، $B' - A'$ و $A' \cap B'$ متناهی هستند. همچنین اگر B' نامتناهی باشد، ممکن است $A' - B'$ متناهی باشد.