

پیشگفتار

به نام خدا

سلام

همکاران گرامی و دانش‌آموزان عزیز

به دنیای پنجره‌های کتاب فیزیک ۳ (ویندوز ۱۲) خوش آمدید.

پس از انتشار کتاب جامع فیزیک پایه (ویندوز ۱۰ و ۱۱) به این نتیجه رسیدیم که کتاب فیزیک ۳ (دوازدهم) را با همان شکل و شمایل تحت عنوان ویندوز ۱۲ ویرایش و منتشر کنیم.

کتاب دو جلدی است. یک جلد شامل درسنامه و تست‌ها و جلد دوم پاسخ‌نامهٔ کاملاً تشریحی

اما حکایت پنجره‌ها چیست؟

هر فصل به پنج پنجره و هر پنجره به زیرموضوع‌هایی به نام «نما» که دارای شماره و عنوان است تقسیم شده است.

در هر پنجره ابتدا درسنامه و سپس تست‌های همان پنجره آورده شده است.

۱) درسنامه: در این کتاب با یک درسنامهٔ کامل و جامع روبه‌رو هستید که در آن تمام نکات درسی در قالب مسئله‌های تشریحی و به همراه تست‌های مربوط به آن نکات به‌صورت طبقه‌بندی شده در نماهای مختلف ارائه شده است.

۲) تست‌ها: تست‌ها بخش مهم کتاب را تشکیل می‌دهند که شامل تست‌های کنکور، تست‌های برگرفته از کتاب درسی و تست‌های تألیفی هستند.

الف- چینش تست‌ها در هر «نما» از ساده به سخت بوده تا بتوانید گام به گام پیش رفته و پله‌پله مهارتتان را بالا ببرید.

ب- معمولاً دانش‌آموزان در ابتدا بدون مطالعه درسنامه به سراغ حل تست‌ها می‌روند. اگر چنین کردید و در تست‌هایی دچار مشکل شدید برای رجوع به درسنامه و یادگیری بهتر کافی است به سراغ همان شماره «نما» در درسنامه بروید.

پ- برای مرور سریع تست‌ها حدود ٪۳۰ آن‌ها را با لوگوی مشخص کرده‌ایم.

ت- در کنار بعضی از تست‌ها لوگوی مشاهده می‌کنید. در پاسخ این تست‌ها، یک تست اضافی تحت عنوان «بازی با سؤال» قرار دارد که شما با حل آن می‌توانید اطمینان پیدا کنید که تست مورد نظر را یاد گرفته‌اید.

ث- پنجرهٔ روبه‌رو (آزمونک) - پنجرهٔ تودرتو (آزمون فصل)

در آزمون‌هایی که شما خواهید دید، تست‌ها طبقه‌بندی ندارند و این شما هستید که باید موضوع تست را تشخیص دهید. به همین دلیل بین هر دو پنجرهٔ پشت سر هم یک بخش به نام پنجرهٔ روبه‌رو و یا آزمونک و در انتهای هر فصل یک بخش به نام پنجرهٔ تودرتو به عنوان آزمون فصل قرار دارد که در آن‌ها خبری از طبقه‌بندی تست‌ها نیست و تست‌ها ترتیب مشخصی ندارند و در واقع شما یک کتاب با تست‌های ریز طبقه‌بندی و یک مینی‌کتاب با تست‌های درهم و برهم در اختیار دارید.

ج- پنجرهٔ رو به گذشته: در این پنجره مسائل ترکیبی دینامیک و حرکت‌شناسی با کار و انرژی جنبشی ارائه شده است.



اما جلد دوم یا جلد پاسخنامه[1]

تمام زحماتی که شما و ما در درسنامه و تست‌ها کشیده‌ایم، در جلد ۲ به سرانجام می‌رسد. به‌قول معروف شاهنامه آخرش خوش است. برای همین سعی کردیم در این قسمت کامل‌ترین و بهترین پاسخ‌ها ارائه شود.

به سراغ ویژگی‌های جلد دوم برویم.

خط فکری: بارها شما از ما سر کلاس پرسیده‌اید که چرا این مسئله از این راه حل شده یا چرا از این فرمول استفاده می‌کنیم؟ برای پاسخ به این نیاز شما، خط فکری ارائه شده تا با خواندن آن شما استراتژی حل مسئله را بدست بیاورید. بنابراین اگر تستی را حل نکرده‌اید، پیشنهاد می‌کنیم که ابتدا خط فکری آن را بخوانید و سعی کنید مسئله را حل کنید. در بیشتر تست‌ها با خواندن خط فکری مشکل شما در حل مسئله برطرف خواهد شد.

نکته: مطالب مهم و مطالبی که باید به آن دقت کنید را تحت عنوان «نکته» آورده‌ایم تا از چشم شما دور نماند.

یادآوری: اگر در حل یک تست نیاز به مطلبی باشد که قبلاً بیان شده، برای راحتی شما آن مطلب را دوباره بیان کرده‌ایم.

یادداشت ریاضی: گاهی در حل تست شما به یک مطلب ریاضی نیاز دارید که ممکن است آن را به خاطر نداشته باشید از این رو آن مطلب و یا اثبات آن را برای شما آورده‌ایم.

میان‌بر: بعد از حل تشریحی و کامل تست در آخر بعضی از تست‌ها برای سرعت بخشیدن به حل تست راه‌حل‌های کوتاه با تکیه بر فیزیک و ریاضی ارائه شده است.

بازی با سؤال: در برخی از تست‌ها، همان تست به نحو دیگری بیان شده تا اگر شما تست مورد نظر را حل نکرده‌اید، بعد از مطالعهٔ پاسخ، بازی با سوال را حل کرده و با پاسخ ارائه شده مقایسه کنید.

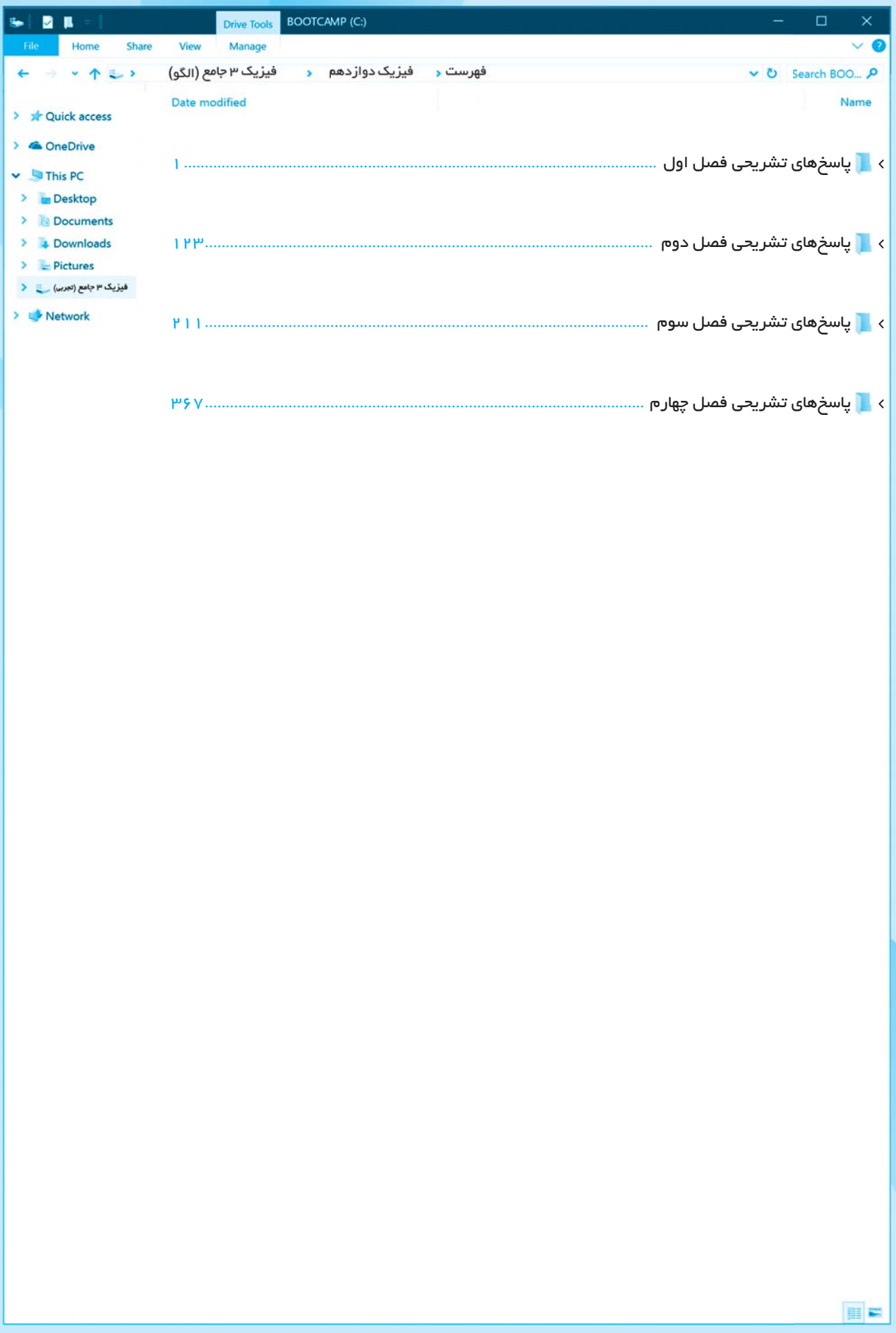
پاسخ پنجره‌های روبه‌رو و تودرتو: در پاسخ این تست‌ها، شمارهٔ «نمای» مربوط به آن تست ارائه شده تا شما متوجه شوید این تست مربوط به چه موضوعی است و در سنامهٔ آن کجاست.

در آخر باید بگوییم که پاسخ همهٔ تست‌ها به‌صورت گام به گام انجام شده تا پله‌پله با هم تست را به طور کامل حل کرده و یاد بگیریم.

در پایان لازم است از تلاش صمیمانهٔ کارکنان نشر الگو سپاسگزاری کنیم، در واحد ویرایش خانم‌ها زهره نوری و زهرا امیدوار و محسن شعبان شمیرانی. همچنین آقای عرفان شاهین‌پور که ویرایش این کتاب بی‌یاری ایشان امکان‌پذیر نبود. در واحد حروف‌چینی از خانم فاضله محسنی و همچنین خانم سکینه مختار مدیر واحد فنی و ویرایش و نیز از همکارانی که نظرات اصلاحی داده‌اند، آقایان علی جیرودی و وحید کرابی قدردانی می‌کنیم.

رضا خالو - امیرعلی میری

۱- با اسکن QR Code یا با مراجعه به سایت نشر الگو به آدرس olgoobooks.ir می‌توانید جلد دوم این کتاب را دانلود کنید.



پاسخ‌های تشریحی فصل اول ۱

پاسخ‌های تشریحی فصل دوم ۱۲۳

پاسخ‌های تشریحی فصل سوم ۲۱۱

پاسخ‌های تشریحی فصل چهارم ۳۶۷

فصل اول

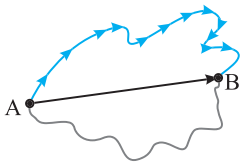
حرکت بر خط راست



پنجره ۱

A ۲ ۱

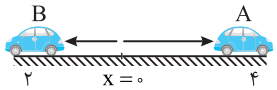
در زندگی روزمره وقتی متحرکی مطابق شکل بر مسیر آبی رنگ از A به B می‌رود، طول مسیر حرکت مهم است که به آن **مسافت** طی شده (l) می‌گویند. اما در فیزیک علاوه بر مسافت



که به مسیر حرکت بستگی دارد، فاصلهٔ مستقیم A تا B نیز اهمیت دارد که این فاصله را توسط یک بردار نمایش می‌دهند و به آن **بردار جابه‌جایی** گویند. بنابراین جابه‌جایی کمیت برداری و مسافت کمیت نرده‌ای است و گزینهٔ (۱) نادرست است. مسافت و جابه‌جایی هر دو برحسب یکای متر در SI بیان می‌شوند و گزینهٔ (۲) درست است. مسافت به مسیر حرکت بستگی دارد. به‌طور مثال، اگر متحرک بر مسیر خاکستری از A به B برود، مسافت آن با مسیر آبی رنگ متفاوت است اما جابه‌جایی در هر دو مورد برابر بردار $\overrightarrow{AB}$ است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

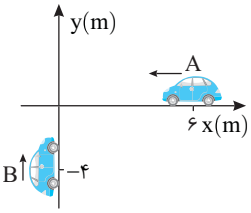
A ۲ ۴

خط فکری ابتدا مفهوم مکان، جهت حرکت را باید در ذهن خود یادآوری کنید.



بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=0)$ یا $(y=0)$ به محل متحرک رسم می‌شود. بنابراین اگر این بردار در جهت مثبت محور باشد، مکان متحرک مثبت است. برای مثال مکان متحرک A $(\vec{x}_A=4\vec{i})$ است و اگر در خلاف جهت محور باشد مکان متحرک منفی است همچنین مکان متحرک B $(x_B=-2\vec{i})$ است. اگر متحرک در جهت مثبت محور حرکت کند، جهت حرکت مثبت و اگر در خلاف جهت محور حرکت کند جهت حرکت منفی است.

A: خودروی A در xهای مثبت و در ۶ متری مبدأ قرار دارد، بنابراین بردار مکان آن $+6\vec{i}$ است و گزارهٔ (الف) نادرست است.



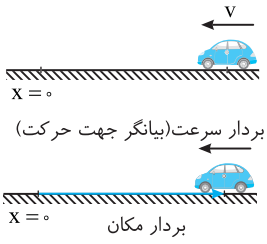
از طرفی خودروی A در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند، بنابراین گزارهٔ (ب) درست است.

B: خودروی B در مکان‌های منفی محور yها است و بردار مکان آن $-4\vec{j}$ است و در جهت مثبت محور yها در حال حرکت است بنابراین بردار مکان B و جهت حرکت آن، خلاف جهت هم هستند. در نتیجه گزارهٔ (پ) نادرست و گزارهٔ (ت) درست است.

بازی با سؤال **کدام گزینه جهت بردار مکان و جهت حرکت متحرک را درست نشان می‌دهد؟**

۱) → و →　　۲) → و ←

۳) ← و ←　　۴) ← و →



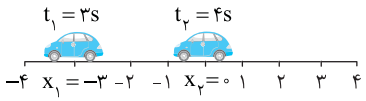
پاسخ خودرو در خلاف جهت محور xها (←) در حرکت است و در لحظهٔ نشان داده شده خودرو در مکان‌های مثبت محور xهاست و بردار مکان آن به سمت راست (→) است.

گزینه ۲

A ۳ ۳

یادآوری معادلهٔ حرکت یا معادلهٔ مکان - زمان به یک رابطهٔ ریاضی بین مکان و زمان گفته می‌شود که به کمک آن می‌توان مکان متحرک را در هر لحظه مشخص کرد. معادلهٔ حرکت به صورت $x=t^2-4t$ است بنابراین کافی است زمان‌های $t_1=3s$ و $t_2=4s$ را در معادله قرار دهیم و مکان‌ها را به‌دست آوریم و روی محور مشخص کنیم.

$$x=t^2-4t \xrightarrow{t_1=3s} x=9-12=-3m$$
$$\xrightarrow{t_2=4s} x=16-16=0$$



A ۲ ۴

خط فکری یک معادلهٔ مکان - زمان (معادلهٔ حرکت) در اختیار داریم که در آن دو مجهول a و b وجود دارد. اما شما در دو لحظهٔ مبدأ زمان یعنی $t_1=0$ و همچنین $t_2=3s$ مکان متحرک را در اختیار دارید و در این دو لحظه متحرک به ترتیب از $x=12m$ و مبدأ مکان یعنی $x=0$ می‌گذرد، بنابراین کافی است شما اعداد زمان را در معادله قرار دهید و یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل کنید.

اعداد را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=t^2+at+b \xrightarrow{t_1=0,\ x=12m} 12=0+0+b \Rightarrow b=12m$$
$$\xrightarrow{t_2=3s,\ x=0} 0=9+3a+b \xrightarrow{b=12}$$
$$0=3a+21 \Rightarrow a=-7m/s$$

نکته اما از کجا یکای a را تشخیص داده‌ایم؟ با توجه به بحث سازگاری یکاها در فیزیک دهم باید یکای at با یکای x یعنی متر یکسان باشد بنابراین:

$$\text{متر}=a(\text{ثانیه}) \Rightarrow [a\ \text{یکای}]=m/s$$

A ۴ ۵

خط فکری به دو عبارت «مبدأ حرکت» و «مبدأ مکان» باید دقت کنید و دو نکته زیر را فرابگیرید.

نکته مبدأ مکان یعنی $x=0$ و مکان متحرک از مبدأ مکان یعنی فاصلهٔ متحرک از $x=0$.

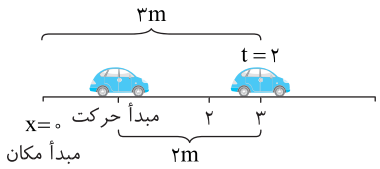
نکته مبدأ حرکت یعنی مکانی که متحرک در لحظهٔ $t=0$ در آن قرار دارد که به آن **مکان اولیه** گویند.

معادلهٔ حرکت به‌صورت $x=t^3-3t+1$ است. در لحظهٔ $t=0s$ متحرک در مکان $x=+1m$ قرار دارد یعنی مکان اولیهٔ متحرک (مبدأ حرکت) $x=+1m$ است.

لحظهٔ $t=2s$ را در معادلهٔ حرکت قرار می‌دهیم و مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^3-3t+1 \xrightarrow{t=2s} x=2^3-(3\times2)+1=8-6+1 \Rightarrow x=+3m$$

بنابراین وقتی متحرک در $x=+3m$ قرار دارد فاصلهٔ آن از مبدأ حرکت $(x=+1m)$ برابر $3-1=2m$ و از مبدأ مکان $(x=0)$ برابر $3m$ است.



B ۱ ۶

یادداشت ریاضی برای تعیین علامت یک تابع درجه ۲ به صورت $y=ax^2+bx+c$ ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم و سپس با رسم یک جدول معادله را تعیین علامت می‌کنیم، بین دو ریشه مخالف علامت a (ضریب x^2) و بیرون دو ریشه موافق علامت a.

خط فکری وقتی مسئله به شما می‌گوید بردار مکان منفی باشد یعنی x باید منفی باشد بنابراین شما باید این معادله را تعیین علامت کنید.

۱ ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^2+t-12=0 \Rightarrow (t+4)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=3s \\ t=-4s \end{cases}$$

۲ ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم و معادله را تعیین علامت می‌کنیم.

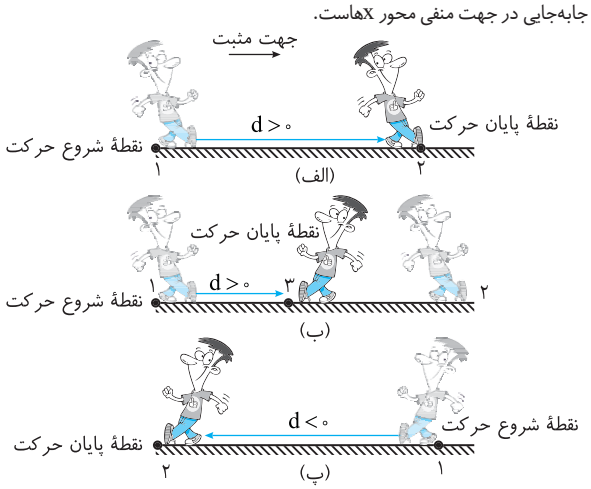
t	$-\infty$		-4		0		3		$+\infty$
x		+		−		−		+	

۳ اما زمان منفی در فیزیک دبیرستان تعریف نمی‌شود بنابراین قسمت $t<0$ را هاشور زده‌ایم بنابراین در بازهٔ $t=0$ تا $t=3s$ مکان منفی است در نتیجه در بازهٔ $t=2s$ تا $t=3s$ $(\Delta t=1s)$ مکان منفی و از $t>3$ مکان مثبت است و گزینهٔ (۱) درست است.

B ۲ ۷

نکته هرگاه حرکت روی خط راست و بدون تغییر جهت صورت گیرد مسافت و بزرگی جابه‌جایی با هم برابر است.

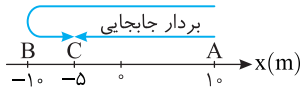
در شکل (الف) و (پ) شخص روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد و جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه هستند. در شکل (الف) جابه‌جایی در جهت مثبت محور xهاست و در شکل (ب) نیز جابه‌جایی در جهت مثبت محور xهاست. در شکل (پ) جابه‌جایی در جهت منفی محور xهاست.



A ۱ ۸

خط فکری طول مسیر حرکت را با رسم شکل به‌دست بیاورید. سپس بردار جابه‌جایی را از ابتدای مسیر یعنی نقطهٔ A به انتهای مسیر یعنی نقطهٔ C رسم کنید و مقدار آن را حساب کنید و مقدارهای به‌دست آمده را بر هم تقسیم کنید.

۱ مسیر حرکت جسم به صورت روبه‌رو است، بردار جابه‌جایی برابر با برداری است که مکان اولیه را به مکان نهایی وصل می‌کند.



$|\vec{d}|=x_C-x_A \Rightarrow |\vec{d}|=|-5-10|=15m$

۲ مسافت طی شده برابر طول مسیر حرکت است یعنی متحرک از $A=10m$ به $B=-10m$ رفته و سپس از $B=-10m$ به $C=-5m$ می‌رود بنابراین مسافت طی شده برابر است با:

$\ell=|d_{AB}|+|d_{BC}|=25m$

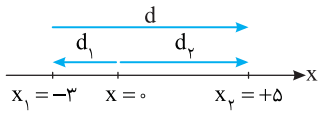
۳ نسبت خواسته شده برابر است با:

$\frac{\ell}{d}=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$

A ۲ ۹

نکته هرگاه متحرک از مبدأ مکان عبور کند، بردار مکان تغییر جهت و تغییر علامت می‌دهد.

شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم، به شکل دقت کنید. ابتدا بردار مکان منفی است و سپس مثبت می‌شود و گزارهٔ (الف) نادرست است.

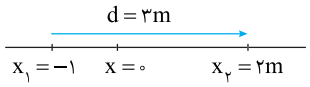


بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ در جهت مثبت و بردار مکان ابتدا منفی $(d_1<0)$ و سپس مثبت $(d_2>0)$ است و بردار جابه‌جایی و بردار مکان در طول مسیر همواره هم‌جهت نیستند و گزارهٔ (ب) نادرست است. مسافت طی‌شده و جابه‌جایی مطابق شکل هم‌اندازه هستند و گزارهٔ (پ) درست است.

A ۳ ۱۰

نکته مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است $(\ell\geq|d|)$.

متحرک از مکان $x_1=-1m$ به مکان $x_2=2m$ رفته است. بنابراین قطعاً جابه‌جایی آن مطابق شکل $3m$ است. اما مسافت طی شده برابر و یا بزرگ‌تر $3m$ است $(\ell\geq3m)$ و تنها گزینهٔ بزرگ‌تر از $3m$ گزینهٔ (۳) است.



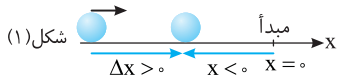
B ۴ ۱۱

یادآوری تغییر جهت بردار مکان هنگام عبور متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ اتفاق می‌افتد.

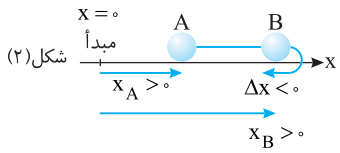
یادآوری تغییر جهت حرکت متحرک یعنی متحرک به یک نقطه برود و از آن برگردد.

برای بررسی گزینه‌های این تست به شکل‌های زیر دقت کنید.

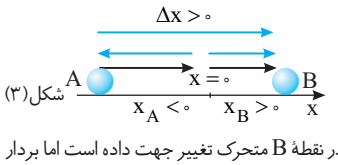
با توجه به شکل (۱) متحرک در جهت مثبت محور جابه‌جا شده اما بردار مکان آن منفی است و گزینهٔ (۱) درست است.



ممکن است مطابق شکل (۲) متحرک در مکان مثبت در جهت مثبت جابه‌جا شده سپس تغییر جهت داده باشد و در جهت منفی جابه‌جا شود اما از مبدأ نگذرد و بردار مکان با آن که تغییر می‌کند اما تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



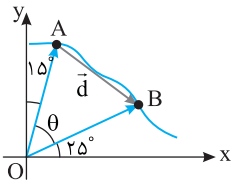
اگر متحرک مطابق شکل (۳) در یک جهت از مبدأ بگذرد بردار مکان تغییر جهت می‌دهد اما جهت حرکت تغییر نمی‌کند و گزینهٔ (۳) درست است. در شکل (۲) در نقطهٔ B متحرک تغییر جهت داده است اما بردار مکان همچنان مثبت است و تغییر جهت نداده است، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست و پاسخ تست است. (نادرستی آن نیز با توجه به شکل دوم کاملاً مشخص است).



A ۱ ۱۲

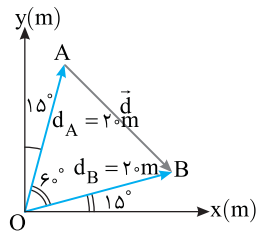
خط فکری بردارهای مکان متحرک را در نقاط A و B از مبدأ مکان رسم کنید. سپس به کمک هندسه زاویهٔ θ را حساب کنید.

زاویهٔ اولیه بردار مکان با محور xها برابر $\theta_1=90-15=75^\circ$ و زاویه نهایی آن $\theta_2=25^\circ$ است یعنی بردار مکان 50° ساعتگرد چرخیده است.



A ۱ ۱۳

بردار جابه‌جایی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B را رسم کنید، مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است زیرا طول بردارهای مکان d_A و d_B یکی است مثلث متساوی‌الساقین است و چون زاویه رأس آن 60° است، پس مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع است و اندازهٔ بردار جابه‌جایی $d=20m$ است.



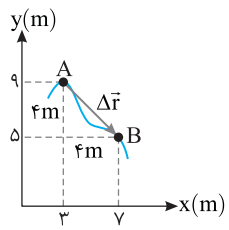
A ۲ ۱۴

یادداشت ریاضی فاصلهٔ دو نقطه در صفحهٔ xoy با مختصات $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

از نقطهٔ A به نقطهٔ B برداری رسم کرده سپس به کمک قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ بردار جابه‌جایی را به‌دست می‌آوریم:

$\Delta r=\sqrt{(7-3)^2+(5-9)^2}=4\sqrt{2}m$



B ۱۵ ۲

خط فکری باید به سراغ ریاضی بروید و فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را در ریاضی از رابطهٔ $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ به‌دست می‌آوریم. بنابراین بردار جابه‌جایی راحت به‌دست می‌آید. اما یادمان باشد که مسافت طی شده (l) همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی است. در نتیجه مسئله به راحتی قابل حل است.

۱ بردار جابه‌جایی خواهد شد:

$$\vec{d}=\vec{d}_2-\vec{d}_1\Rightarrow\vec{d}=(1-4)\vec{i}+(-1-3)\vec{j}\Rightarrow d=-3\vec{i}-4\vec{j}$$

۲ بردار جابه‌جایی بین دو نقطهٔ $\vec{d}_1=4\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{d}_2=\vec{i}-\vec{j}$ خواهد شد:

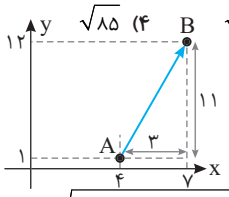
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\Rightarrow d=\sqrt{(1-4)^2+(-1-3)^2}$$
$$\Rightarrow d=\sqrt{9+16}=5m$$

۳ مسافت طی شده باید بزرگ‌تر یا مساوی ۵m بیشتر باشد. بنابراین گزینهٔ (۲) پاسخ مسئله است.

بازی با سوال **متحرکی در صفحهٔ مختصات از نقطهٔ A(۴m ,۱m) به نقطهٔ B(۷m ,۱۲m) می‌رود. جابه‌جایی متحرک چند متر است؟**

۱) $\sqrt{130}$ ۲) $\sqrt{65}$ ۳) $\sqrt{170}$ ۴) $\sqrt{85}$

پاسخ **از A تا B بردار جابه‌جایی را رسم می‌کنیم. اندازهٔ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B همان اندازهٔ جابه‌جایی است. به کمک ریاضی مسئله قابل حل است.**



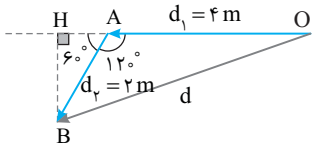
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\Rightarrow d=\sqrt{(7-4)^2+(12-1)^2}$$
$$=\sqrt{3^2+11^2}\Rightarrow d=\sqrt{9+121}=\sqrt{130}m$$

گزینهٔ ۱

B ۱۶ ۴

خط فکری برای حل این نوع مسائل باید ابتدا شکل ساده‌ای از موضوع مسئله مطابق داده‌های مسئله رسم کنید. سپس اعداد مسئله را روی شکل قرار دهید. برای به‌دست آوردن مسافت کافی است، تمام اعداد مسیر از ابتدا تا انتهای مسیر را با هم جمع کنیم. اما برای به‌دست آوردن بردار جابه‌جایی نیاز به محاسبات مثلثاتی و ریاضی خواهیم داشت.

۱ ابتدا یک شکل ساده از مسئله رسم می‌کنیم. جابه‌جایی برداری است که ابتدای مسیر را به انتهای آن وصل می‌کند. مطابق شکل خط عمودی از B بر خط OA رسم می‌کنیم. در مثلث AHB ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است از این رو $AH=\frac{2}{2}=1m$ و ضلع BH خواهد شد:



$$\cos 30^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BH}{2}\Rightarrow BH=\sqrt{3}m$$

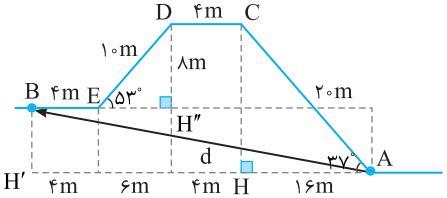
اکنون در مثلث OHB، طول وتر (d) را به دست می‌آوریم.

$$d^2=BH^2+OH^2=(\sqrt{3})^2+(4+1)^2\Rightarrow d^2=3+25=28\Rightarrow d=2\sqrt{7}m$$

۲ مسافت طی‌شده برابر مجموع طول مسیر ۴m و طول مسیر ۲m یعنی ۶m است.

C ۱۷ ۴

خط فکری برای به‌دست آوردن مسافت کافی است اعداد روی شکل را از A تا B با هم جمع کنید اما برای جابه‌جایی باید برداری از A تا B رسم کنید سپس به سراغ هندسه و مثلثات بروید و اندازهٔ جابه‌جایی را حساب کنید.



۱ مسافت طی شده را حساب می‌کنیم. $\ell=20+4+10+4\Rightarrow\ell=38m$

۲ فاصلهٔ CH و AH خواهد شد:

$$\triangle AHC:\cos 37^\circ=\frac{AH}{AC}\Rightarrow 0/8=\frac{AH}{20}\Rightarrow AH=16m$$
$$\sin 37^\circ=\frac{CH}{AC}\Rightarrow 0/6=\frac{CH}{20}\Rightarrow CH=12m$$

۳ DH″ و EH″ را به‌دست می‌آوریم:

$$\triangle DEH'':\cos 53^\circ=\frac{EH''}{DE}\Rightarrow 0/6=\frac{EH''}{10}\Rightarrow EH''=6m$$
$$\sin 53^\circ=\frac{DH''}{DE}\Rightarrow 0/8=\frac{DH''}{10}\Rightarrow DH''=8m$$

۴ جابه‌جایی افقی متحرک برابر است با: $AH'=16+4+6+4\Rightarrow AH'=30m$

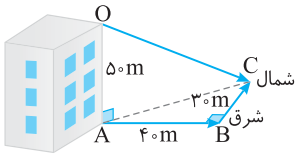
۵ جابه‌جایی قائم متحرک را حساب می‌کنیم: $BH'=CH-DH''=12-8=4m$

۶ اکنون اندازهٔ بردار جابه‌جایی را می‌توان به‌دست آورد.

$$AB=\sqrt{BH'^2+AH'^2}=\sqrt{4^2+30^2}=\sqrt{916}\simeq 30/3m$$

C ۱۸ ۲

خط فکری با یک مسئله سه‌بعدی سر و کار داریم. شما ابتدا باید جابه‌جایی متحرک روی سطح زمین وقتی ابتدا ۴۰m به سمت شرق و سپس ۳۰m به سوی شمال می‌رود را حساب کنید سپس به سراغ جابه‌جایی کل بروید.



۱ شکل مسیر حرکت را رسم می‌کنیم. پرنده از نقطهٔ O به نقطهٔ A روی سطح زمین آمده سپس ۴۰m از A تا B به سمت شرق سپس ۳۰m به سوی شمال رفته است.

۲ جابه‌جایی روی زمین را حساب می‌کنیم.

$$AC^2=AB^2+BC^2=40^2+30^2\Rightarrow AC=50m$$

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC، اندازهٔ وتر OC را حساب می‌کنیم که همان اندازهٔ جابه‌جایی است.

$$OC^2=OA^2+AC^2\Rightarrow OC^2=50^2+50^2\Rightarrow OC=50\sqrt{2}m$$

میانبر هرگاه امتداد سه مسیر بر هم عمود باشد مانند محورهای x، y و z

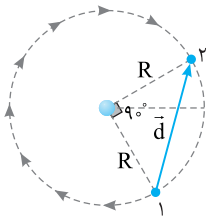
جابه‌جایی کل خواهد شد: $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

بازی با سوال **مسافت طی شده توسط پرنده چندمتر است؟**

پاسخ **کافی است اعداد ۵۰m، ۴۰m و ۳۰m را با هم جمع کنیم**

$$\ell=50+40+30=120m$$

A ۱۹ ۲



دقت کنید که در صورت مسئله بیان شده که ماه در جهت ساعتگرد از مکان (۱) به مکان (۲) می‌رود بنابراین مسیر حرکت مطابق شکل روبه‌روست و ماه، مسافتی که طی کرده است $\frac{3}{4}$ محیط دایرهٔ مسیر حرکت است. $\ell=\frac{3}{4}(2\pi R)\Rightarrow\ell=\frac{3}{2}\pi R$

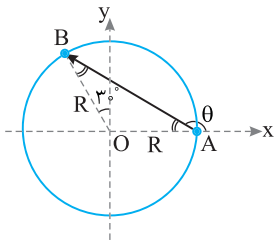
بردار جابه‌جایی از مکان (۱) به مکان (۲) رسم می‌شود و با توجه به شکل و اندازهٔ آن بنا به رابطهٔ فیثاغورس جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. $d=\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2}R$

در این صورت: $\frac{\ell}{d}=\frac{\frac{3}{2}\pi R}{\sqrt{2}R}=\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$

B ۲۰ ۲

یادآوری بردار جابه‌جایی برداری است که از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم می‌شود.

بـردار جابه‌جایـی را از A تـا B رسـم می‌کنیـم. مثلـث OAB یـک مثلـث متساوی‌الساقین اسـت و زاویهٔ رأس آن مطابـق شـکل $\hat{O}=۹۰^\circ+۳۰^\circ=۱۲۰^\circ$ اسـت، بنابراین زاویهٔ دو ساق آن با قاعده (جابه‌جایی) ۳۰° اسـت. یعنی زاویهٔ بین بردار جابه‌جایی و جهت مثبت محور xها خواهد شد:



$\theta=۱۸۰^\circ-۳۰^\circ=۱۵۰^\circ$

بازی با سؤال **در این سؤال اگر شعاع حرکت ۱۵cm باشد، مسافت طی شده توسط متحرک چند سانتی‌متر است؟** $(\pi=۳/۱۴)$

۱) ۳۱/۴ ۲) ۱۵/۷ ۳) ۱/۵۷ ۴) ۳/۱۴

پاسخ **متحـرک از A تا B کمان** ۱۲۰° **یعنی** $\frac{۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۳}$ **محیط دایره را طی می‌کند، بنابراین مسافت خواهد شد:**

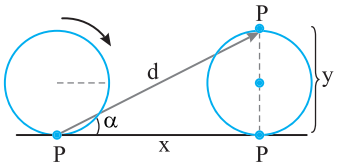
مسافت $\ell=\frac{۱}{۳}(۲\pi R)\Rightarrow \ell=\frac{۱}{۳}\times(۲\times۳/۱۴\times۱۵)\Rightarrow \ell=۳۱/۴cm$

گزینهٔ ۱

B ۲۱ ۲

خط فکری به این فکر کنید که اگر چرخ، نیم‌دور بچرخد نقطهٔ P در چه وضعیتی قرار می‌گیرد تا بتوانید جابه‌جایی افقی و قائم نقطهٔ P را مشخص کرده و بزرگی جابه‌جایی را به‌دست بیاورید.

با چرخش نیم دور مطابق شـکل، نقطهٔ P از سـطح زمین به بالاترین نقطه می‌رود در این حالت نقطهٔ P در امتداد قائم به اندازهٔ قطر لاسـتیک بالا می‌رود $(y=۶۰\,cm)$ و روی سطح افقی به اندازهٔ نصف محیط جابه‌جا می‌شود $x=\frac{۱}{۲}(۲\pi R)$.



$x=\frac{۱}{۲}\pi\times۶۰\Rightarrow x=۳۰\pi\ cm\Rightarrow x=۳۰\times۳=۹۰\ cm$

اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$d=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۹۰^۲+۶۰^۲}\Rightarrow d=۳۰\sqrt{۳^۲+۲^۲}\Rightarrow d=۳۰\sqrt{۱۳}cm$

بازی با سؤال **در ایـن حرکت بردار جابه‌جایی با سـطح افقی زاویهٔ** α **می‌سازد. کدام گزینه درست است؟**

۱) $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ ۲) $\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$ ۳) $\tan\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\tan\alpha=\sqrt{۳}$

پاسخ **با توجه به شکل خواهیم داشت:**

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{۶۰}{۹۰}=\frac{۲}{۳}$

گزینهٔ ۱

A ۲۲ ۳

سـرعت متوسـط بنابه تعریف برابر نسـبت بـردار جابه‌جایـی به زمان جابه‌جایی اسـت $(\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{t})$، بنابرایـن سـرعت متوسـط کمیـت برداری اسـت و همواره بردار سـرعت متوسط هم‌جهت بردار جابه‌جایی است. تندی متوسط بنابه تعریف برابر نسبت مسافت به زمان طی مسـیر است $s_{av}=\frac{\ell}{t}$. تندی متوسـط کمیت نرده‌ای و همواره مثبت بیان می‌شود. در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.

A ۲۳ ۱

سرعت متوسط برابر با $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ بنابراین:

متحرک اول:

$$\begin{cases}x_۱=-۲\\x_۲=۶/۴\end{cases}\Rightarrow \Delta x=x_۲-x_۱=۸/۴m\ ,\ v_{av}=\frac{۸/۴}{۴}=۲/۱\,m/s$$

متحرک دوم: با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$-۲/۸=\frac{\Delta x}{۲}\Rightarrow \Delta x=-۵/۶m\Rightarrow x_۲-x_۱=-۵/۶\Rightarrow -۲/۵-x_۱=-۵/۶$$
$$\Rightarrow \vec{x}_۱=۳/۱\,\vec{i}$$

متحرک سوم: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۳/۳=\frac{۸/۶-۲}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=۲s$

	مکان آغازین	مکان پایانی	زمان	سرعت متوسط
متحرک (۱)	$-۲\vec{i}$	$۶/۴\vec{i}$	۴s	A
متحرک (۲)	B	$-۲/۵\vec{i}$	۲s	$-۲/۸\vec{i}$
متحرک (۳)	$۲\vec{i}$	$۸/۶\vec{i}$	C	$۳/۳\vec{i}$

A ۲۴ ۳

یادآوری هـرگاه مختصـات نقطـهٔ ابتدایـی و انتهایی مسـیر حرکت را داشـته باشـیم می‌توانیم جابه‌جایی متحرک را حسـاب کنیم و اما نمی‌توانیم در مورد مسـافت اظهارنظر کنیم. مگر آنکه مسیر حرکت از ابتدا تا انتهای مسیر مشخص باشد.

۱ متحـرک روی محـور xهـا از مـکان $+۴m$ بـه مـکان $-۶m$ رفته اسـت یعنی جابه‌جایی آن برابر است با: $d=-۶-۴=-۱۰m$

۲ سرعت متوسط متحرک برابر خواهد شد با:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۱۰}{۶-۲}\Rightarrow v_{av}=-۲/۵m/s$$

۳ مسـیر حرکت مشـخص نیسـت یعنی معلوم نیست که متحرک مسـتقیم و بدون تغییـر جهت از مکان $+۴m$ به مکان $-۶m$ رفته اسـت یا نه؟ بنابراین در مورد تندی متوسط نمی‌توان اظهارنظر کرد.

B ۲۵ ۳

خط فکری در بررسـی سرعت متوسط، مهم نیسـت که متحرک چه مسیری را طی کرده است تنها شما باید ببینید متحرک از چه نقطه‌ای به چه نقطه‌ای رفته و فاصلهٔ دو نقطه را حساب کنید و جابه‌جایی را به‌دست آورده تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید.

متحرک در مبدأ زمان یعنی $t=۰$ در مکان $-۴۰m$ و در لحظهٔ آخر یعنی $t_۲=۱۰s$ در مـکان $+۲۰m$ بوده یعنی $d=۲۰-(-۴۰)=۶۰m$ در جهـت مثبت محور xها جابه‌جا شده است، بنابراین سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{t}=\frac{۶۰}{۱۰-۰}\Rightarrow v_{av}=۶m/s$

دقت کردید لحظهٔ $t=۶s$ و مکان $x=۱۰۰m$ در حل این تست تأثیری ندارد.

بازی با سؤال **متحرکـی کـه روی محـور x در حرکـت اسـت، در لحظـهٔ** $t_۱=۲/۴s$ **از مـکان** $x_۱=-۴m$ **و در لحظـهٔ** $t_۲=۴/۴s$ **از مـکان** $x_۲=۲m$ **می‌گذرد و سـپس در لحظهٔ** $t_۳$ **به مکان** $x_۳=۶m$ **می‌رسد. اگر در بازهٔ** $t_۲$ **تا** $t_۳$ **سرعت متوسط** $۲m/s$ **باشد، سرعت متوسط در بازهٔ** $t_۱$ **تا** $t_۳$ **چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ **با توجه به تعریف سرعت متوسط، لحظهٔ** $t_۳$ **را حساب می‌کنیم.**

$$t_۲\to t_۳:v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{۶-۲}{t_۳-۴/۴}\Rightarrow ۲=\frac{۴}{t_۳-۴/۴}\Rightarrow t_۳-۴/۴=۲$$
$$\Rightarrow t_۳=۶/۴s$$

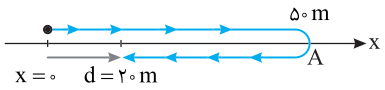
اکنون می‌توانیم سرعت متوسط از $t_۱=۲/۴s$ **تا** $t_۳=۶/۴s$ **را به‌دست بیاوریم:**

$$t_۱\to t_۳:v_{av}=\frac{۶-(-۴)}{۶/۴-۲/۴}=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵m/s$$

گزینهٔ ۱

A ۲۶ ۱

در به‌دست آوردن سرعت متوسط، مسیر حرکت مهم نیست و تنها محل نقطهٔ ابتدایی و محل نقطهٔ انتهایی مسیر مهم است. در این مسئله ذره از مکان $x=0$ شروع کرده و در نهایت به مکان $+20m$ رسیده است بنابراین جابه‌جایی متحرک $d=+20m$ است و سرعت متوسط خواهد شد:



$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{20}{20}\Rightarrow v_{av}=1m/s$$

بازی با سؤال **ذره‌ای در امتداد محور x ها از مبدأ شروع به حرکت می‌کند و در مدت ۲۰ ثانیه ابتدا تا نقطهٔ A به طول ۵۰+ می‌رود و بعد به نقطهٔ ۲۰+ برمی‌گردد. تندی متوسط ذره در این مدت چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) ۳/۵

پاسخ **مسافت طی‌شده برابر است با:** $\ell=50+30=80m$

تندی متوسط خواند شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{80}{20}=4m/s$



گزینهٔ ۲

A ۲۷ ۲

خط فکری چرا در هر گزینه دو مکان برای لحظهٔ $t=4s$ بیان شده است؟ چون که اندازهٔ سرعت متوسط داده شده بنابراین شما باید در فرمول سرعت متوسط یک بار عدد $+3/5m/s$ و بار دیگر عدد $-3/5m/s$ قرار دهید. به همین دلیل دو جواب به‌دست می‌آوریم.

رابطهٔ سرعت متوسط را نوشته و داده‌های مسئله را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{x_1=-1/6m}\begin{cases}v_{av}=\frac{x_2-(-1/6)}{4}\Rightarrow\frac{x_2+1/6}{4}=3/5\Rightarrow x_2=12/4m\\ v_{av}=\frac{x_2-(-1/6)}{4}\Rightarrow\frac{x_2+1/6}{4}=-3/5\Rightarrow x_2=-15/6m\end{cases}$$

B ۲۸ ۳

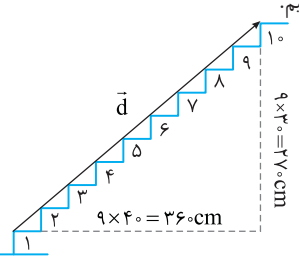
خط فکری اشتباه نکنید فاصلهٔ لبهٔ پلهٔ اول تا لبهٔ پلهٔ دهم، ۱۰ پله نیست، باید شکل رسم کنید و تعداد پله‌ها را بشمرید. سپس از لبهٔ پلهٔ اول تا لبهٔ پلهٔ دهم بردار جابه‌جایی را رسم کرده و اندازهٔ آن را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست بیاورید.

۱ شمردید؟ تعداد پله‌ها، ۹ پله است.

۲ پهنای هر پله $40cm$ است و جابه‌جایی افقی مورچه $9\times40=360cm$ می‌شود.

۳ بلندی هر پله $30cm$ است و جابه‌جایی قائم مورچه $9\times30=270cm$ خواهد شد.

۴ جابه‌جایی مورچه را حساب می‌کنیم.



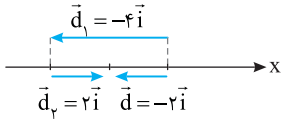
$$|\vec{d}|=\sqrt{(270)^2+(360)^2}$$
$$=\sqrt{9^2\times(30^2+40^2)}$$
$$\Rightarrow|\vec{d}|=450cm=4/5m$$

۵ سرعت متوسط آن را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{4/5}{45}=0/1m/s$$

B ۲۹ ۱

۱ به صورت مسئله دقت کنید. متحرک ابتدا جابه‌جایی $-4\vec{i}$ را انجام داده یعنی در مدت $2s$ در خلاف جهت محور xها، $4m$ جابه‌جا شده و در دو ثانیهٔ دوم جابه‌جایی $2\vec{i}$ را انجام داده است یعنی از $4m$ که در خلاف جهت محور رفته بود، $2m$ را برگشته و در کل جابه‌جایی آن در مدت $4s$، $-2m$ است. بنابراین بردار سرعت متوسط آن در این چهار ثانیه خواهد شد:



$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}\Rightarrow\vec{v}_{av}=\frac{-2\vec{i}}{4}=-\frac{\vec{i}}{2}$$

۲ مسافت طی شده در مدت $4s$ برابر $l=4+2=6m$ و تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{6}{4}=1/5m/s$$

بازی با سؤال **متحرکی روی محور xها در حال حرکت بوده و در بازهٔ زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=4s$ بردار جابه‌جایی آن $5\vec{i}$ و در مدت $t_2=4s$ تا $t_3=5s$ بردار جابه‌جایی آن $-3\vec{i}$ خواهد بود. سرعت متوسط در بازهٔ $t=2s$ تا $t=5s$ چند متر بر ثانیه خواهد بود؟**

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ **جابه‌جایی متحرک در بازهٔ $2s$ تا $4s$، ۵ متر و در جهت مثبت محور xها بوده سپس در مدت $1s$ (بازهٔ $t_2=4s$ تا $t_3=5s$) از این ۵ متر، $3m$ را برمی‌گردد. بنابراین جابه‌جایی آن در کل برابر $5-3=2m$ و در جهت مثبت محور xها بوده و سرعت متوسط متحرک خواهد شد:**

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{2}{5-2}=\frac{2}{3}m/s$$

گزینهٔ ۳

B ۳۰ ۲

خط فکری فاصلهٔ مستقیم تهران تا اصفهان مشخص نیست بنابراین سرعت متوسط قابل محاسبه نیست. بنابراین شما باید تنها به سراغ تندی متوسط یعنی گزینه‌های (۲) و (۳) بروید.

۱ مدت زمان حرکت از تهران تا قم $t_1=1/5h$ و مدت زمان حرکت از قم تا اصفهان ۸۰٪ بیشتر از $1/5h$ است. بنابراین زمان حرکت قم تا اصفهان خواهد شد:

$$t_2=t_1+\frac{80}{100}t_1\Rightarrow t_2=1/5+\frac{4}{5}(1/5)\Rightarrow t_2=2/7h$$

۲ کل زمان حرکت از تهران تا اصفهان را به‌دست می‌آوریم.

$$t_{کل}=t_1+t_2=1/5+2/7=4/2h$$

۳ مسافت طی شده خودرو را حساب می‌کنیم. $\ell=125+274\Rightarrow\ell=399km$

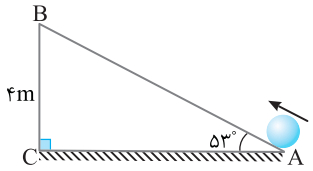
۴ تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{399}{4/2}\Rightarrow s_{av}=95km/h$$

A ۳۱ ۲

نکته هرگاه در یک مسیر متحرک به مکان اولیه‌اش بازگردد، جابه‌جایی متحرک صفر و در نتیجه سرعت متوسط متحرک صفر می‌شود.

۱ مسیر حرکت A تا B را حساب می‌کنیم.



$$\sin53^\circ=\frac{BC}{AB}$$
$$\Rightarrow0/8=\frac{4}{AB}\Rightarrow AB=5m$$

۲ مسافت طی شده در کل مسیر رفت و برگشت خواهد شد: $\ell=5+5=10m$

۳ مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم.

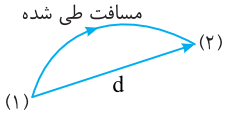
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=3+5}s_{av}=\frac{10}{8}\Rightarrow s_{av}=1/25m/s$$

A ۳۲ ۳

یادآوری تندی متوسط برابر مسافت پیموده شده تقسیم بر زمانِ طی این مسافت و کمیتی نرده‌ای است. (مسافت طی‌شده در یکای زمان) $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$

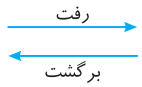
یادآوری سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر یکای زمان و کمیتی برداری است. $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$

در حرکت بر خط راست بدون تغییر جهت مسافت طی‌شده و اندازهٔ جابه‌جایی برابر بوده و تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. در مسیرهای خمیده مثل شکل روبه‌رو همواره مسافت طی‌شده از اندازهٔ جابه‌جایی بزرگ‌تر است. از این‌رو: $s_{av}>|\vec{v}_{av}|$



بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) در حالت‌های خاصی درست هستند و عبارت قطعاً نادرست در مورد آن‌ها صدق نمی‌کند. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک همواره کوچک‌تر یا برابر مسافت طی شده است $(d\le\ell)$ بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا برابر تندی متوسط بوده و هرگز اندازهٔ سرعت متوسط نمی‌تواند از تندی متوسط بیشتر شود و قطعاً گزینهٔ (۳) نادرست است.

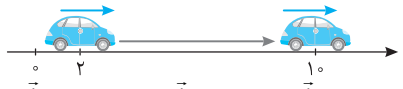
در یک مسیر بسته مثلاً در یک مسیر رفت و برگشت به محل شروع حرکت، جابه‌جایی صفر و سرعت متوسط صفر است. هرچند تندی متوسط صفر نیست و گزینهٔ (۴) درست است.



A ۳۳ ۴

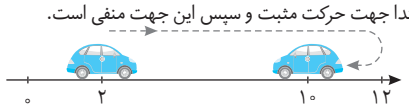
برای بررسی گزینه‌های این تست از یک مثال عددی استفاده می‌کنیم. فرض کنید متحرک در مدت ۲s از مکان $2\vec{i}$ به مکان $10\vec{i}$ رفته حال حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

۱ در این حالت مانند گزینهٔ (۱) جهت حرکت متحرک در طول مسیر مثبت بوده است.



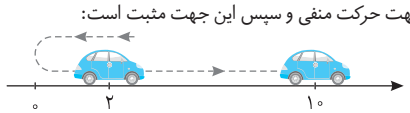
$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4m/s$

۲ فرض کنید در مدت ۲s از مکان $2\vec{i}$ ابتدا به مکان $12\vec{i}$ رفته و سپس از $12\vec{i}$ به $10\vec{i}$ بازگشته بنابراین ابتدا جهت حرکت مثبت و سپس این جهت منفی است.



$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4m/s$

۳ فرض کنید در مدت ۲s از مکان $2\vec{i}$ ابتدا به مبدأ مکان رفته و سپس از مبدأ به $10\vec{i}$ برود، بنابراین ابتدا جهت حرکت منفی و سپس این جهت مثبت است:



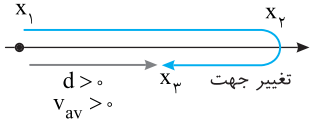
$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{8}{2}=4m/s$

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند حرکت ما را شامل شود و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۳۴ ۳

نکته جهت بردار سرعت چگونگی مسیر حرکت را مشخص نمی‌کند.

اگر جهت حرکت مثبت باشد جهت جابه‌جایی و سرعت متوسط نیز مثبت خواهد بود اما عکس این جمله نادرست است یعنی اگر سرعت متوسط متحرک مثبت باشد ممکن است متحرک ابتدا در جهت منفی و سپس در جهت مثبت حرکت کرده باشد و یا ابتدا در جهت مثبت محور جابه‌جا شده و سپس مقدار کمتری در جهت منفی حرکت کرده است، به طوری که جابه‌جایی کل مثبت بوده و سرعت متوسط مثبت باشد اما متحرک همواره در جهت مثبت حرکت نکرده باشد. بنابراین گزارهٔ (الف) درست است. در شکل زیر مشخص است که سرعت متوسط مثبت اما متحرک مدتی در خلاف جهت محور حرکت کرده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

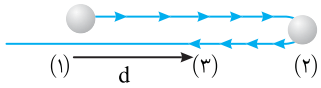


با توجه به رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ جهت سرعت و جابه‌جایی یکسان است بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

B ۳۵ ۳

۱ مسافت طی شده دو برابر اندازهٔ جابه‌جایی است. $\ell=2d$

۲ سرعت متوسط در این حرکت قطعاً از تندی متوسط کوچک‌تر است از این رو بنابه فرض مسئله خواهیم داشت:



$s_{av}-v_{av}=2\ \ (II)$

۳ در رابطهٔ (II) به جای v_{av} و s_{av} مقدار آن‌ها را براساس فرمول آن‌ها قرار می‌دهیم.

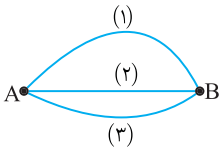
$s_{av}=\frac{\ell}{t},v_{av}=\frac{d}{t}\xrightarrow{(II)}\frac{\ell}{t}-\frac{d}{t}=2\xrightarrow{L=2d,\ t=4s}$

$\frac{2d}{4}-\frac{d}{4}=2\Rightarrow\frac{d}{4}=2\Rightarrow d=8m,\ \ell=16m$

۴ تندی متوسط را حساب می‌کنیم $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{16}{4}=4m/s$

B ۳۶ ۳

خط فکری تندی هر سه متحرک یکسان است، بنابراین هر متحرکی که مسیرش طولانی‌تر است در زمان بیشتری از A به B می‌رود. اما سرعت متوسط به مسیر حرکت بستگی ندارد و برداری است که ابتدای مسیر (نقطهٔ A) را به انتهای مسیر (نقطهٔ B) وصل می‌کند. با توجه به این مطالب و رابطهٔ سرعت متوسط $v_{av}=\frac{d}{\Delta t}$ می‌توانید دربارهٔ پاسخ درست فکر کنید.

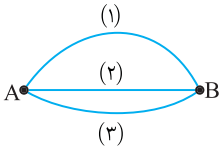


۱ طول مسیر (۱) از هر سه مسیر طولانی‌تر و طول مسیر (۲) از هر سه مسیر کوتاه‌تر است. تندی هر سه متحرک یکسان است بنابراین: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t_1>\Delta t_3>\Delta t_2$

۲ جابه‌جایی هر سه برابر است از این‌رو:

$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t_1>\Delta t_3>\Delta t_2]{d_1=d_2=d_3}v_{av_1}<v_{av_3}<v_{av_2}$

بازی با سوال **مطابق شکل زیر، سه متحرک با بزرگی سرعت متوسط یکسان سه مسیر نشان داده شده را طی می‌کند و تندی متوسط در مسیرهای (۱)، (۲) و (۳) به‌ترتیب s_{av_1}، s_{av_2} و s_{av_3} خواهد بود. کدام گزینه درست است؟**



۱) $s_{av_1}=s_{av_2}=s_{av_3}$

۲) $s_{av_1}<s_{av_2}<s_{av_3}$

۳) $s_{av_1}>s_{av_3}>s_{av_2}$

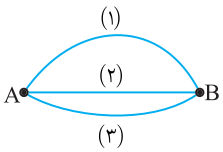
۴) $s_{av_1}>s_{av_2}>s_{av_3}$

پاسخ یادآوری **سرعت متوسط $v_{av}=d/t$ و تندی متوسط $s_{av}=\ell/t$ است که d، جابه‌جایی و L مسافت طی شده است.**

۱ **با توجه فرض مسئله سرعت متوسط هر سه متحرک برابر است از طرفی جابه‌جایی هر سه متحرک از A تا B یکسان و برابر d است.**

$v_{av_1}=v_{av_2}=v_{av_3}\Rightarrow\frac{d}{\Delta t_1}=\frac{d}{\Delta t_2}=\frac{d}{\Delta t_3}\Rightarrow\Delta t_1=\Delta t_2=\Delta t_3$

۲ **اکنون در مورد تندی متوسط می‌توان اظهارنظر کرد. مسافت طی شده توسط متحرک (۱) بیشترین و توسط متحرک (۲) کمترین است. از این‌رو می‌توان نوشت:**



گزینهٔ ۳ $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=\text{ثابت}]{\ell_1>\ell_3>\ell_2}s_{av_1}>s_{av_3}>s_{av_2}$

۳۷ B ۱

۱ جابه‌جایی خودرو در یک مسیر رفت و برگشت صفر است، بنابراین سرعت متوسط آن نیز صفر است. $(v_{av}=0)$

۲ تندی متوسط در کل مسیر را حساب می‌کنیم. اگر طول مسیر رفت و طول مسیر برگشت ℓ باشد طول کل مسیر رفت و برگشت 2ℓ خواهد بود.

۳ زمان حرکت در مسیر رفت خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_1}\Rightarrow 90=\frac{\ell}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{\ell}{90}$

۴ زمان حرکت در مسیر برگشت خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_2}\Rightarrow 60=\frac{\ell}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{\ell}{60}$$

۵ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{2\ell}{\frac{\ell}{90}+\frac{\ell}{60}}\Rightarrow s_{av}=\frac{2\ell}{\frac{2+3}{180}\ell}\Rightarrow s_{av}=\frac{2\times 180}{5}=72km/h$$

میانبر در یک مسیر وقتی دو نیمهٔ مسیر توسط خودرو با دو تندی متفاوت s_{av_1} و s_{av_2} طی می‌شود تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{2s_{av_1}s_{av_2}}{s_{av_1}+s_{av_2}}$$

بازی با سؤال **متحرکی نصف مسیر مستقیمی را با تندی $40m/s$ و بقیهٔ آن مسیر را در همان سو با تندی v طی کرده است. اگر سرعت متوسط در کل مسیر $48m/s$ باشد، اندازهٔ v چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۵۶ ۲) ۹۰ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰

پاسخ با توجه به تعریف سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{\frac{x}{2s_1}+\frac{x}{2s_2}}\Rightarrow v_{av}=\frac{2s_1s_2}{s_1+s_2}\Rightarrow 48=\frac{2\times 40\times v}{40+v}$$

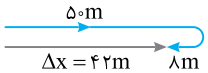
$$\Rightarrow 240+6v=10v\Rightarrow v=60m/s$$

گزینهٔ ٤

۳۸ B ۳

خط فکری باید مدت زمان رفت و مدت زمان برگشت را حساب کنیم و ببینیم که در لحظهٔ $t=14s$، متحرک در چه مکانی است و آیا در مسیر رفت است یا مسیر برگشت؟ در این صورت می‌توانیم سرعت متوسط را به‌دست بیاوریم.

۱ زمان رفت شناگر برابر خواهد شد با:



$$t=\frac{\Delta x}{v_{av}}\Rightarrow t_1=\frac{50}{5}\Rightarrow t_1=10s$$

۲ زمان برگشت شناگر برابر خواهد شد با:

$$t_2=\frac{50}{2}=25s$$

بنابراین در لحظهٔ $t=14s$ شناگر در مسیر برگشت است و با سرعت متوسط $2m/s$ در مدت $4s$، مسافت ۸ متر برگشته است، بنابراین جابه‌جایی شناگر از لحظهٔ شروع تا $t=14s$ برابر $50-8=42m$ است و سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{42}{14}=\frac{6}{2}=3m/s$$

۳۹ A ۳

خط فکری دقت کنید که متحرک زمان کل حرکت خود (t) را در دو بازهٔ زمانی یکسان $(\frac{t}{2})$ طی می‌کند، بنابراین باید بررسی کنید مسافت طی شده در هریک از این بازه‌ها برحسب t چه مقدار است.

۱ مسافت طی شده در بازهٔ $\Delta t_1=\frac{t}{2}$ برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 10=\frac{\ell_1}{\frac{t}{2}}\Rightarrow \ell_1=5t$$

۲ مسافت طی شده در بازهٔ $\Delta t_2=\frac{t}{2}$ با تندی $40m/s$ خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 40=\frac{\ell_2}{\frac{t}{2}}\Rightarrow \ell_2=20t$$

۳ تندی متوسط در کل مدت t را به‌دست می‌آوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell_1+\ell_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}\Rightarrow s_{av}=\frac{5t+20t}{t}=25m/s$$

میانبر هرگاه متحرک کل زمان حرکت را در بازه‌های زمانی یکسان با تندی‌های متفاوت $s_{av_1},s_{av_2},\dots,s_{av_n}$ طی کند آن‌گاه تندی متوسط در کل زمان حرکت خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{s_{av_1}+s_{av_1}+\cdots+s_{av_n}}{n}$$

۴۰ A ۴

۱ طول مسیر حرکت یعنی مسافت طی شده را حساب می‌کنیم ابتدا در مدت $2h$ با تندی متوسط $60km/h$ متحرک حرکت کرده و مسافت طی شده $\ell_1=60\times 2=120km$ و در مدت $30min$ یا $0/5h$ متوقف بوده و سپس با تندی $90km/h$ به مدت $2/5h$ رانندگی کرده یعنی مسافت طی شده آن $\ell_2=90\times 2/5=225km$ است.

۲ کل زمان حرکت متحرک $\Delta t_{کل}=2+0/5+2/5=5h$ و کل مسافت طی شده $\ell=120+225=345km$ است، بنابراین تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{345}{5}\Rightarrow s_{av}=69km/h$$

۴۱ A ۲

۱ جابه‌جایی در مدت t_1 و t_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow d_1=v_{av_1}t_1=20t_1,\quad d_2=v_{av_2}t_2=40t_2$$

۲ متحرک در یک جهت در حال حرکت است و جابه‌جایی کل آن برابر مجموع d_2 و d_1 است. از این رو بنا به تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow 28=\frac{20t_1+40t_2}{t_1+t_2}\Rightarrow 28t_1+28t_2=20t_1+40t_2$$

$$\Rightarrow 8t_1=12t_2\Rightarrow \frac{t_1}{t_2}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

۴۲ B ۳

خط فکری سرعت متوسط کل خلاف جهت محور xها یعنی $-28m/s$ است. شما باید جابه‌جایی در هر قسمت را حساب کنید سپس جابه‌جایی کل را به‌دست بیاورید تا بتوانید به کمک سرعت متوسط کل نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ را بیابید.

۱ در مدت t_1 جابه‌جایی متحرک با سرعت متوسط $20m/s$ خواهد شد:

$$d_1=v_{av_1}t_1\Rightarrow d_1=+20t_1$$

۲ در مدت t_2 جابه‌جایی متحرک در خلاف جهت محور xها بوده یعنی سرعت متوسط آن $-40m/s$ است و جابه‌جایی در این مدت خواهد شد:

$$d_2=v_{av_2}t_2\Rightarrow d_2=-40t_2$$

۳ اکنون رابطهٔ سرعت متوسط کل را نوشته، داده‌های به‌دست آمده را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}\Rightarrow -28=\frac{20t_1-40t_2}{t_1+t_2}\Rightarrow -14=\frac{10t_1-20t_2}{t_1+t_2}$$

$$\Rightarrow -14t_1-14t_2=10t_1-20t_2\Rightarrow -14t_2+20t_2=10t_1+14t_1$$

$$\Rightarrow 6t_2=24t_1\Rightarrow \frac{t_1}{t_2}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

۴ ۴۳ C

خط فکری ابتدا باید بررسی کنیم که در مدت ۸s جابه‌جایی متحرک چند متر است. به چه دلیل به این جابه‌جایی نیاز داریم؟ به این دلیل که جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۰ تا ۳s کمتر از این مقدار است.

۱ جابه‌جایی متحرک در مدت ۸s با سرعت متوسط $15m/s$ خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow 15=\frac{d}{8}\Rightarrow d=120m$$

۲ جابه‌جایی متحرک در تمام مدت ۸s در جهت مثبت محور xها بوده بنابراین در بازهٔ ۰ تا ۳s قطعاً جابه‌جایی از ۱۲۰m کمتر است. از این رو سرعت متوسط در بازهٔ ۰ تا ۳s خواهد شد:

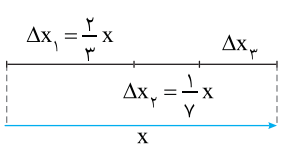
$$v_{av}<\frac{120}{3}\Rightarrow v_{av}<40m/s$$

نتیجه آنکه تمام مقدارهای زیر $40m/s$ می‌تواند جواب مسئله باشد و گزینهٔ (۴) درست است.

۲ ۴۴ B

خط فکری کل مسیر حرکت را x فرض کنید و جابه‌جایی هر سه قسمت را برحسب x به‌دست بیاورید سپس به سراغ بازهٔ زمانی هر قسمت بروید و از فرمول سرعت متوسط بازه‌های زمانی را نیز برحسب x حساب کرده و مسئله را حل کنید.

۱ متحرک ابتدا $\Delta x_1=\frac{2x}{3}$، سپس $\Delta x_2=\frac{x}{7}$ را طی کرده بنابراین باقی مسیر خواهد شد:



$$\Delta x_3=x-\frac{2x}{3}-\frac{x}{7}\Rightarrow\Delta x_3=\frac{4x}{21}$$

۲ بازهٔ زمانی هر قسمت را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow t=\frac{d}{v_{av}}\begin{cases}\Delta x_1=\frac{2}{3}x\rightarrow \Delta t_1=\frac{\Delta x_1}{v_{av_1}}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{\frac{2}{3}x}{28}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{x}{42}\\ \Delta x_2=\frac{x}{7}\rightarrow \Delta t_2=\frac{\Delta x_2}{v_{av_2}}\Rightarrow\Delta t_2=\frac{\frac{x}{7}}{6}\Rightarrow\Delta t_2=\frac{x}{42}\\ \Delta x_3=\frac{4x}{21}\rightarrow \Delta t_3=\frac{\Delta x_3}{v_{av_3}}\Rightarrow\Delta t_3=\frac{\frac{4x}{21}}{8}\Rightarrow\Delta t_3=\frac{x}{42}\end{cases}$$

۳ اکنون می‌توان سرعت متوسط را به‌دست آورد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}\Rightarrow v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{42}+\frac{x}{42}+\frac{x}{42}}$$

$$\Rightarrow v_{av}=14m/s$$

۳ ۴۵ A

۱ بازهٔ زمانی هر قسمت از مسیر را برحسب x و v به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=\frac{\Delta x}{v}\begin{cases}x_1=x,v_1=v\rightarrow\Delta t_1=\frac{x}{v}\\ x_2=2x,v_2=2v\rightarrow\Delta t_2=\frac{2x}{2v}=\frac{x}{v}\\ x_3=3x,v_3=3v\rightarrow\Delta t_3=\frac{3x}{3v}=\frac{x}{v}\end{cases}$$

۲ جابه‌جایی کل را حساب می‌کنیم.

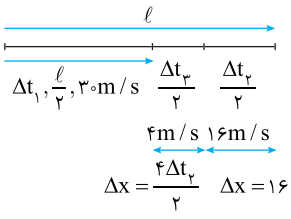
$$\Delta x_{کل}=x+2x+3x=6x$$

۳ سرعت متوسط در کل مسیر خواهد شد:

$$v_{av_{کل}}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}}=\frac{6x}{\frac{x}{v}+\frac{x}{v}+\frac{x}{v}}\Rightarrow v_{av_{کل}}=\frac{6x}{\frac{3x}{v}}=2v$$

۱ ۴۶ B

خط فکری مسئله از دو قسمت تشکیل شده یک بار مسیر حرکت را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کرده و بار دیگر نیمهٔ دوم مسیر را به دو بازهٔ زمانی یکسان تقسیم کرده است، بنابراین شما باید تندی متوسط را در قسمت دوم مسیر (Δt_2) حساب کنید. سپس تندی در قسمت دوم و قسمت اول را برای به‌دست آوردن تندی کل مسیر به‌کار ببریم.



ابتدا تندی متوسط در نیمهٔ دوم مسیر را حساب می‌کنیم:

$$s_{av_2}=\frac{\frac{\ell}{2}}{\Delta t_2}\Rightarrow s_{av_2}=\frac{4\frac{\Delta t_2}{2}+16\frac{\Delta t_2}{2}}{\Delta t_2}=\frac{4+16}{2}=10m/s$$

اکنون تندی متوسط در کل مسیر را به‌دست می‌آوریم:

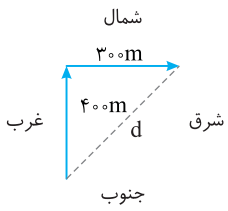
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{\ell}{\Delta t_1+\Delta t_2}\xrightarrow[\Delta t_2=\frac{\frac{\ell}{2}}{10}=\frac{\ell}{20}]{\Delta t_1=\frac{\frac{\ell}{2}}{30}=\frac{\ell}{60}}s_{av}=\frac{\ell}{\frac{\ell}{60}+\frac{\ell}{20}}=\frac{60}{4}=15m/s$$

میانبر البته می‌توانستیم در قسمت دوم مسیر، مستقیماً از رابطهٔ $v_{av}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ استفاده کنیم. دقت کنید در اینجا تندی متوسط و سرعت متوسط یکی است زیرا متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کرده است.

$$v_{av}=\frac{2\times10\times30}{10+30}=15m/s$$

۱ ۴۷ B

۱ متحرک با سرعت ثابت $16m/s$، ۴۰۰m به سمت شمال رفته است، مدت زمان طی این مسیر را حساب می‌کنیم.



$$v=v_{av}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\Rightarrow 16=\frac{400}{\Delta t_1}\Rightarrow\Delta t_1=25s$$

۲ سپس متحرک در مدت ۲۵s با سرعت ثابت $12m/s$ به سمت شرق رفته است و مقدار جابه‌جایی آن در این مدت برابر است با:

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\Rightarrow 12=\frac{\Delta x_2}{25}\Rightarrow\Delta x_2=300m$$

۳ جابه‌جایی کل را به‌دست می‌آوریم:

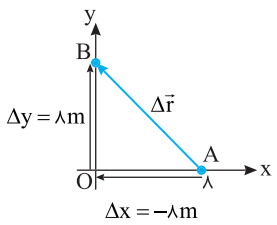
$$|d|=\sqrt{300^2+400^2}=500m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{|d|}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{500}{25+25}=10m/s$$

۲ ۴۸ B

دقت کنید مسئله سرعت متوسط در امتداد محور xها یعنی از A تا O را خواسته است و شما نباید سرعت متوسط از A تا B را حساب کنید. از A تا O متحرک از مکان $+8m$ به مکان $x=0$ رفته یعنی در مدت ۵s جابه‌جایی آن $-8m$ است، بنابراین سرعت متوسط در امتداد محور xها (مولفهٔ x سرعت متوسط) خواهد شد.



$$v_{av,x}=-\frac{8}{5}=-1/6m/s$$

A ۴۹ ۱

ذره در امتداد خط راست از A به B رفته است، بنابراین ابتدا طول مسیر از A تا B را به کمک ریاضی به‌دست می‌آوریم.

$$\ell = AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$
$$= \sqrt{(-3-6)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{81+144} \Rightarrow L = 15m$$

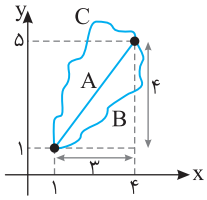
تندی متوسط متحرک خواهد شد: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{15}{5-3} = 7/5 m/s$

سؤال: آیا در این تست مانند تست اصلی می‌توانستیم تندی متوسط را به دست بیاوریم؟
پاسخ: قطعاً نه، زیرا در تست اصلی مسیر حرکت خط راست بود اما در این تست مسیر حرکت مشخص نیست.

B ۵۰ ۴

خط فکری برای آنکه تندی متوسط جسم را حساب کنیم باید چگونگی مسیر حرکت مشخص باشد تا بتوانیم مسافت و سپس تندی را به‌دست بیاوریم در این مسئله مسیر حرکت مشخص نیست، اما ما می‌دانیم که مسافت طی شده بین دو نقطه همواره بزرگ‌تر یا مساوی جابه‌جایی بین دو نقطه است و جابه‌جایی بین دو نقطه نیز برداری است که نقطهٔ ابتدایی را به نقطهٔ انتهایی وصل کند، بنابراین شما باید ابتدا جابه‌جایی و سپس سرعت متوسط را پیدا کنید در این صورت تندی متوسط باید از عددی که برای سرعت متوسط به‌دست می‌آورید بزرگ‌تر یا با آن مساوی باشد.

مسیر حرکت مشخص نیست اما جابه‌جایی در تمام مسیرهایی که روی شکل نشان داده‌ایم برابر است با:



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{9+16} = 5m$$

سرعت متوسط را حساب می‌کنیم. $v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow{t=5s} v_{av} = \frac{5}{5} = 1 m/s$

بنابراین تندی متوسط باید بزرگ‌تر یا مساوی $1 m/s$ باشد، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

B ۵۱ ۲

خط فکری در بررسی سرعت متوسط به مسیر حرکت کاری نداریم و تنها فاصلهٔ نقطهٔ ابتدایی از نقطهٔ انتهایی که مشخص‌کنندهٔ اندازهٔ جابه‌جایی است مهم است، بنابراین مکان d_2 را از ذهن خود حذف کنید و در مدت $5s = 2+3$ جابه‌جایی متحرک را از مکان d_1 تا d_3 حساب کنید.

یادآوری فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحهٔ xoy از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

۱ جابه‌جایی از $\vec{d}_1 = 7\vec{i} + 4\vec{j}$ تا $\vec{d}_3 = -5\vec{i} - \vec{j}$ متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$d = \sqrt{(-5-7)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} \Rightarrow d = 13m$$

۲ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{13}{5} = 2/6 m/s$

بازی با سؤال **اگر متحرکی مسیر بین d_1 تا d_2 و همچنین d_2 تا d_3 را روی خط راست طی کند، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه خواهد بود؟** $(\sqrt{41} \simeq 6/4)$

۱) ۱۳/۸ ۲) ۱۴/۰۸ ۳) ۲/۸۸ ۴) ۳۶

پاسخ **برای به‌دست آوردن تندی متوسط باید مسافت طی شده در هر قسمت را به‌دست آورد.**

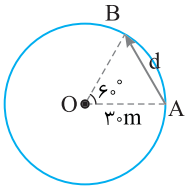
$$d_1 \text{ تا } d_2 : \ell_1 = \sqrt{(3-7)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \simeq 6/4 m$$
$$d_3 \text{ تا } d_2 : \ell_2 = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1+1)^2} = 8m$$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av} = \frac{(\ell_1 + \ell_2)}{\Delta t} = \frac{6/4+8}{2+3} = \frac{14/4}{5} = 2/88 m/s$

گزینهٔ ۳

A ۵۲ ۴

۱ در شکل روبه‌رو، بردار جابه‌جایی از A تا B رسم شده است با توجه به اینکه زاویهٔ O، 60° بوده و ضلع‌های OA و OB هر دو شعاع دایره بوده و با هم برابر و مقدار آن $30m$ است. مثلث OAB یک مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و طول بردار جابه‌جایی AB نیز $30m$ خواهد بود. بنابراین سرعت متوسط خواهد شد:



$$v_{av} = \frac{AB}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{30}{5-2} \Rightarrow v_{av} = 10 m/s$$

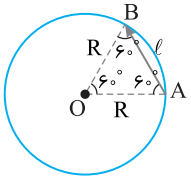
نکته هرگاه متحرک روی مسیر دایره‌ای زاویهٔ θ را طی کند مسافتی که می‌پیماید برابر $\frac{\theta}{360}$ محیط دایره است.

۲ برای تندی متوسط باید طول مسیر AB را حساب کنیم که طول این مسیر $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ محیط دایره است. $\ell = \frac{1}{6}(2\pi R) \Rightarrow L = \frac{1}{6}(2\pi \times 30) \Rightarrow \ell = 10\pi \text{ m}$

تندی متوسط خواهد شد: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{10\pi}{5-2} = \frac{10\pi}{3} m/s$

A ۵۳ ۱

ابتدا زمان حرکت از A تا B را به کمک تندی حرکت حساب می‌کنیم.



$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\ell = \frac{1}{6}(2\pi R)} 4 = \frac{\frac{1}{6}(2\pi R)}{\Delta t}$$
$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\pi R}{12}$$

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع بوده بنابراین جابه‌جایی از A تا B با توجه به شکل برابر شعاع دایره $(d = R)$ است. در این صورت سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{R}{\frac{\pi R}{12}} \Rightarrow v_{av} = \frac{12}{\pi} m/s$$

A ۵۴ ۱

نکته ثانیهٔ nام حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $n-1$ و n به‌طور مثال ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=2s$ تا $t=3s$.

خط فکری برای به‌دست آوردن سرعت متوسط در ثانیهٔ سوم شما باید مکان متحرک در $t=2s$ و $t=3s$ به‌دست بیاورید و سرعت متوسط را به کمک $v_{av} = \Delta x / \Delta t$ حساب کنید. همچنین برای سرعت متوسط در ثانیهٔ دوم باید مکان متحرک در $t=1s$ و $t=2s$ را به کمک معادلهٔ مکان - زمان حساب کرده و سرعت متوسط در این بازه را به‌دست بیاورید.

۱ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 2s$ در این صورت:

$$x = t^3 - 2t + 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = 1-2+1 = 0 \\ t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = 8-4+1 = 5m \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{5-0}{2-1} = 5 m/s$$

۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 3s$ از این‌رو:

$$\begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow x_1 = 8-4+1 = 5m \\ t_2 = 3s \Rightarrow x_2 = 27-6+1 = 22m \end{cases} \Rightarrow v'_{av} = \frac{22-5}{3-2} = 17 m/s$$

۳ بنابراین خواهیم داشت: $v'_{av} - v_{av} = 17 - 5 = 12 m/s$

بازی با سؤال **معادلهٔ حرکت جسمی که روی محور xها در حرکت است در SI به صورت $x = t^3 - 2t + 1$ است. سرعت متوسط این جسم در بازهٔ زمانی $0/5s$ تا $1/5s$ چند m/s است؟**

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) ۰/۵ ۴) صفر

پاسخ مکان جسم در لحظه‌های $t_1=0/5s$ و $t_2=1/5s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$t_1=0/5s\Rightarrow x_1=0/25-1+1\Rightarrow x_1=0/25m$$

$$t_2=1/5s\Rightarrow x_2=2/25-3+1\Rightarrow x_2=0/25m$$

سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{0/25-0/25}{1/5-0/5}\Rightarrow v_{av}=0$

گزینهٔ ۴

B ۳ ۵۵

نکته هرگاه متحرک به مکان اولیهٔ خود بازگردد، یعنی جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ مشخص صفر می‌شود قطعاً سرعت متوسط در آن بازه صفر می‌شود.

با توجه به معادلهٔ $x=3t^2-15t+12$ در لحظهٔ $t_1=0$ مکان اولیه متحرک $x_0=+12m$ می‌شود و اگر در بازهٔ $t_1=0$ تا $t_2=t'$ سرعت متوسط صفر شده باشد یعنی متحرک مجدداً باید $x=+12m$ شود بنابراین در معادلهٔ حرکت به جای x مقدار ۱۲ را قرار می‌دهیم و t' را حساب می‌کنیم.

$$12=3t^2-15t+12\Rightarrow 3t^2-15t=0\Rightarrow 3t(t-5)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\t=5s\end{cases}$$

در نتیجه $t'=5s$ پاسخ مسئله است.

A ۱ ۵۶

بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=0)$ به محل متحرک رسم می‌شود. بنابراین هنگام گذر از مبدأ، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

اکنون باید مکان را برابر صفر قرار دهیم: $x=0\Rightarrow t^2+t+1=0\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

معادلهٔ بالا بدون پاسخ است یعنی مکان متحرک هرگز صفر $(x=0)$ نمی‌شود و متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

A ۲ ۵۷

خط فکری لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظه‌ای که متحرک از مکان $(x=0)$ می‌گذرد بنابراین شما باید در معادلهٔ حرکت مکان را برابر صفر قرار داده و لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان را پیدا کنید تا بتوانید سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $t=0$ تا لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان به‌دست بیاورید.

۱ در لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$x=t^2-t-6\Rightarrow 0=t^2-t-6\Rightarrow(t-3)(t+2)=0\Rightarrow\begin{cases}t=3s & \checkmark\\ t=-2s & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۲ سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{0+6}{3}=2m/s$

A ۲ ۵۸

۱ معادلهٔ حرکت زمان‌های $t=0$ و $t=3s$ را قرار می‌دهیم.

$$x=\alpha+\beta t^3\begin{cases}\xrightarrow{t_1=0} x_1=\alpha\\ \xrightarrow{t_2=3s} x_2=\alpha+27\beta\end{cases}$$

۲ با توجه به فرض مسئله $v_{av}=18m/s$ می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{\alpha+27\beta-\alpha}{3-0}=18\Rightarrow\frac{27\beta}{3}=9\beta=18\Rightarrow\beta=2$$

۳ اکنون با داشتن مقدار β و با توجه به این مکان متحرک در $t=2s$ برابر $24m$ است. مقدار α را حساب می‌کنیم.

$$x=\alpha+\beta t^3\Rightarrow 24=\alpha+\beta(2)^3\xrightarrow{\beta=2}24=\alpha+16\Rightarrow\alpha=8$$

A ۴ ۵۹

خط فکری معادلهٔ مثلثاتی حرکت شما را دچار مشکل نکند روش حل همان است که بود یعنی در لحظه‌های داده شده باید مکان متحرک را به کمک معادلهٔ حرکت به‌دست آورده سپس سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ ابتدا مکان متحرک در لحظه‌های $t_1=\frac{1}{6}s$ و $t_2=\frac{4}{3}s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/02\cos 10\pi t\begin{cases}\xrightarrow{t_1=\frac{1}{6}s} x_1=0/02\cos\frac{10\pi}{6}\\ \xrightarrow{t_2=\frac{4}{3}s} x_2=0/02\cos\frac{40\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0/02\cos\frac{5\pi}{3}\Rightarrow x_1=0/02\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})\\ \Rightarrow x_2=0/02\cos(12\pi+\pi+\frac{\pi}{3})\Rightarrow x_2=-0/02\cos\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=+0/02\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x_1=+0/1m\\ x_2=-0/1m\end{cases}$$

۲ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{-0/1-0/1}{\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}=\frac{-0/2}{\frac{8-1}{6}}\Rightarrow v_{av}=-\frac{0/12}{7}$$

$$\Rightarrow v_{av}=-\frac{12}{700}=-\frac{3}{175}m/s$$

B ۳ ۶۰

یادآوری جابه‌جایی کمیت برداری $(\vec{d})$ و مسافت کمیت نرده‌ای (ℓ) است.

نکته همواره مسافت برابر یا بزرگ‌تر از اندازهٔ جابه‌جایی است.

با توجه به نکتهٔ بیان شده می‌توان نوشت: $|\vec{d}|\le\ell\Rightarrow\frac{|\vec{d}|}{\ell}\le 1$

یادداشت ریاضی $|x|\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1$

با توجه به یادداشت ریاضی باید $-1\le\frac{|\vec{d}|}{\ell}\le 1$ باشد.

A ۳ ۶۱

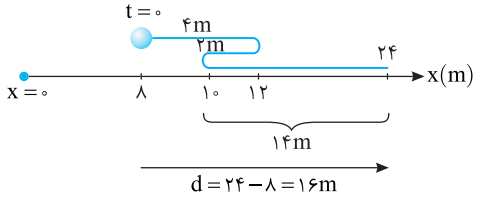
در یک لحظه دو متحرک در یک مکان قرار دارند و مبدأ را هرجا در نظر بگیریم مکان دو متحرک یکسان است.

B ۴ ۶۲

خط فکری برای حل این مسئله قطعاً شما باید مسیر حرکت را رسم کنید از طرفی به کمک تندی متوسط باید مسافت طی شده در مدت $5s$ را به‌دست بیاورید تا متوجه شوید متحرک در لحظهٔ $t=5s$ در چه مکانی است و بتوانید جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ مسافت طی شده در مدت $5s$ را به‌دست می‌آوریم. $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 4=\frac{\ell}{5}\Rightarrow\ell=20m$

۲ مسیر را از مکان $x_0=+8m$ رسم می‌کنیم، متحرک از $+8m$ به مکان $+12m$ می‌رود یعنی $4m$ مسافت طی کرده سپس بازمی‌گردد و به مکان $+10m$ می‌رود. یعنی $2m$ مسافت طی می‌کند تا اینجا $6m$ مسافت طی کرده و هنوز $14m$ باقی مانده تا مسافت کل $20m$ شود. در نقطهٔ $+10m$ تغییر جهت می‌دهد و در امتداد محور xها به حرکت خود ادامه می‌دهد بنابراین باید از مکان $+10m$، $14m$ جلو برود پس به مکان $10+14=24m$ می‌رسد.



۳ متحرک در مدت $5s$ از مکان $+8m$ به مکان $+24m$ رفته و جابه‌جایی آن $d=24-8=16m$ است.

۴ سرعت متوسط در این مدت خواهد شد: $v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow v_{av}=\frac{16}{5}=3/2m/s$

C ۱ ۶۳

خط فکری نیمهٔ دوم مسیر را مستقل از نیمهٔ اول بررسی کنید. یعنی اگر در نیمهٔ دوم مسافت (یا جابه‌جایی) $L_۲$ و زمان جابه‌جایی $\Delta t_۲$ باشد، $\frac{۱}{۳}\Delta t_۲$ متحرک با تندی $۸m/s$ و $\frac{۲}{۳}\Delta t_۲$ را با تندی $۶m/s$ می‌رود. شما با این اطلاعات تندی متوسط در نیمهٔ دوم مسیر را حساب کنید. سپس به سراغ تندی متوسط در کل مسیر بروید.

۱ جابه‌جایی در مدت $\frac{۱}{۳}\Delta t_۲$ برابر است با: $s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow \ell'_۲=۸\times\frac{۱}{۳}\Delta t_۲=\frac{۸}{۳}\Delta t_۲$

۲ جابه‌جایی در مدت $\frac{۲}{۳}\Delta t_۲$ خواهد شد: $s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow \ell''_۲=۶\times\frac{۲}{۳}\Delta t_۲\Rightarrow \ell''_۲=۴\Delta t_۲$

۳ تندی متوسط در نیمهٔ دوم را حساب می‌کنیم.

$$s_۲=\frac{\ell_۲}{\Delta t_۲}=\frac{\frac{۸}{۳}\Delta t_۲+۴\Delta t_۲}{\Delta t_۲}=\frac{۲۰}{۳}m/s$$

اکنون به سراغ کل مسیر می‌رویم

$$\ell_۱=\frac{\ell}{۲}\quad \ell_۲=\frac{\ell}{۲}$$

$$s_{av_۱}=۲۰m/s\quad s_{av_۲}=\frac{۲۰}{۳}m/s$$

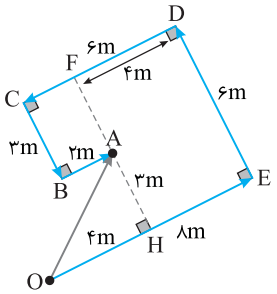
۴ اما باید زمان حرکت در هر نیمه را برحسب L به‌دست بیاوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{t}\Rightarrow\begin{cases}۲۰=\frac{\frac{\ell}{۲}}{t_۱}=t_۱=\frac{\ell}{۴۰}\\ \frac{۲۰}{۳}=\frac{\frac{\ell}{۲}}{t_۲}\Rightarrow t_۲=\frac{\frac{\ell}{۲}}{\frac{۲۰}{۳}}=\frac{۳\ell}{۴۰}\end{cases}$$

۵ تندی متوسط در کل مسیر خواهد شد: $s_{av}=\frac{\ell}{\frac{\ell}{۴۰}+۳\frac{\ell}{۴۰}}=\frac{۴۰}{۴}=۱۰m/s$

A ۳ ۶۴

جابه‌جایی برداری است که از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم می‌شود، با توجه به شکل جابه‌جایی برابر طول OA است. بنابراین از نقطهٔ O تا نقطهٔ A بردار جابه‌جایی OA را رسم می‌کنیم در مثلث OAH باید طول وتر OA را به‌دست بیاوریم بنابراین باید طول اضلاع AH و OH را از روی شکل مشخص کنیم:

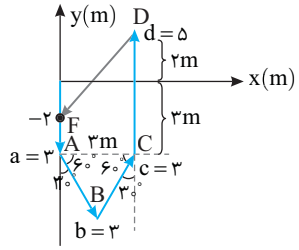


$$AH=DE-BC=۶-۳=۳m\quad ,\quad OH=OE-FD=۸-۴=۴m$$

اکنون بردار جابه‌جایی را حساب می‌کنیم. $OA=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵m$

B ۳ ۶۵

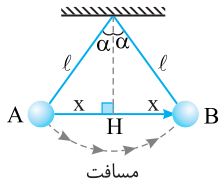
به شکل نگاه کنید. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، بنابراین ضلع $AC=۳m$ است. با توجه به فرض مسئله قرار است ذره خود را از نقطهٔ D به نقطه‌ای روی محور yها در مکان $-۲m$ (نقطهٔ F) برساند. بنابراین ذره باید جابه‌جایی DF را طی کند یعنی از نقطهٔ D به مختصات $D(۳,۲)$ به نقطهٔ $F(۰,-۲)$ برود بنابراین روی محور xها باید $-۳m$ و روی محور yها باید $-۴m$ جابه‌جا شود. بنابراین بردار DF خواهد شد:



$$\overrightarrow{DF}=-۳\vec{i}-۴\vec{j}$$

C ۱ ۶۶

خط فکری مسیر حرکت را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید. بردار A تا B را بکشید یعنی بردار جابه‌جایی را مشخص کنید. در این صورت مسیر حرکت از A تا B را روی شکل نشان دهید. باید طول AB را به کمک مثلثات به دست بیاورید و طول کمان مسیر AB را نیز به‌دست آورید تا بتوانید α را به کمک فرض مسئله حساب کنید.



۱ اندازهٔ جابه‌جایی AB برابر ۲x است و هر x روی شکل را به کمک سینوس به‌دست می‌آوریم.

$$\sin\alpha=\frac{x}{\ell}\Rightarrow x=\ell\sin\alpha\Rightarrow AB=۲\ell\sin\alpha$$

نکته طول کمانی که زاویهٔ روبه‌روی آن θ است برابر $\frac{\theta}{۳۶۰}(۲\pi R)$ است.

۲ طول کمان AB را حساب می‌کنیم، کمان روبه‌روی AB برابر ۲α است بنابراین مسافت AB خواهد شد:

$$\text{مسافت}=\frac{۲\alpha}{۳۶۰}(۲\pi R)$$

شعاع مسیر همان طول ریسمان آونگ است.

$$\text{مسافت}=\frac{۲\alpha}{۳۶۰}(۲\pi\ell)\Rightarrow\text{مسافت}=\frac{\alpha\pi\ell}{۹۰}$$

۳ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{جابه‌جایی}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\pi\Rightarrow\frac{\frac{\alpha\pi\ell}{۹۰}}{۲\ell\sin\alpha}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\pi\Rightarrow\frac{\alpha}{\sin\alpha}=۴۵\sqrt{۲}$$

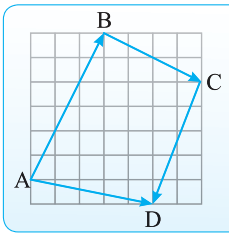
۴ اکنون باید گزینه‌ها را در این رابطه قرار داد تا اندازهٔ α مشخص می‌شود. زاویهٔ $\alpha=۴۵^\circ$ را امتحان می‌کنیم.

$$\frac{۴۵}{\sin۴۵^\circ}=۴۵\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

بنابراین $\alpha=۴۵^\circ$ جواب است.

B ۲ ۶۷

یادداشت ریاضی در شکل روبه‌رو که از کتاب ریاضی پایهٔ هشتم آورده شده است مسیر ذره‌ای که به‌ترتیب جابه‌جایی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CD}$ را طی کرده نشان داده شده است و بردار $\overrightarrow{AD}$ بردار جابه‌جایی کل است. یعنی $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$



خط فکری در صورت مسئله سه جابه‌جایی برحسب بردارهای یکه بیان شده که ذره پشت سر هم آن‌ها را پیموده است بنابراین برای به‌دست آوردن جابه‌جایی کل باید جمع برداری آن‌ها را حساب کنید.

۱ بردار جابه‌جایی در کل مدت حرکت خواهد شد:

$$\vec{d}=\vec{d}_۱+\vec{d}_۲+\vec{d}_۳=(۵\vec{i}-۲\vec{j})+(۳\vec{i}+۷\vec{j})+(۴\vec{i}+۴\vec{j})\Rightarrow\vec{d}=۱۲\vec{i}+۹\vec{j}$$

۲ اندازهٔ جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

$$d=\sqrt{d_x^۲+d_y^۲}=\sqrt{۱۲^۲+۹^۲}\Rightarrow d=\sqrt{۱۴۴+۸۱}=\sqrt{۲۲۵}\Rightarrow d=۱۵m$$

۳ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{۱۵}{۳+۵+۴}\Rightarrow v_{av}=\frac{۱۵}{۱۲}\Rightarrow v_{av}=۱/۲۵m/s$$

A ۱ ۶۸

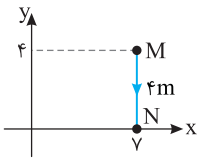
خط فکری همواره یادتان باشد که جابه‌جایی متحرک به مسیر حرکت بستگی ندارد و تنها به مختصات نقطهٔ ابتدایی از نقطهٔ انتهایی بستگی دارد و در حل این مسئله باید از نقطهٔ B چشم‌پوشی کنید و فاصلهٔ بین نقاط A و C را به کمک ریاضی به‌دست بیاورید.

فاصلهٔ $A(۱,۱)$ تا $C(۲,۲)$ یعنی اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$$AC=d=\sqrt{(x_C-x_A)^۲+(y_C-y_A)^۲}\Rightarrow|\vec{d}|=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}\,m$$

B ۶۹ ۱

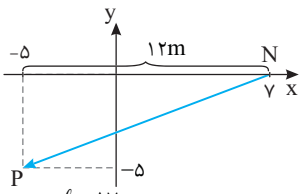
برای به‌دست آوردن تندی متوسط نیاز داریم که مسافت طی شده از M تا N و سپس از N تا P را به‌دست بیاوریم.



۱ مسافت طی شده از MN مطابق شکل برابر $\ell_{MN}=۴m$ است.

۲ متحرک روی خط راست از N به P رفته و فاصلهٔ N تا P خواهد شد:

$$\ell_{NP}=\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=۱۳m$$



۳ مسافت کل برابر است با:

$$\ell=\ell_{MN}+\ell_{NP}$$
$$=۴+۱۳=۱۷m$$

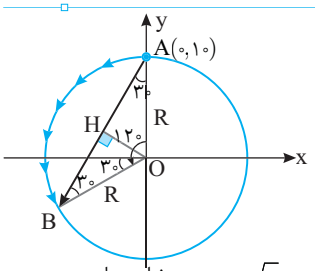
۴ زمان کل حرکت برابر $۵+۳=۸s$ می‌شود.

۵ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۷}{۸}m/s$$

B ۷۰ ۴

۱ متحرک روی دایره‌ای به شعاع $R=۱۰m$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفته است. ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین OAB را رسم می‌کنیم.



۲ طول AH را به کمک $\cos ۳۰^\circ$ حساب می‌کنیم.

$$\cos ۳۰^\circ=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{AH}{OA}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{AH}{R}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

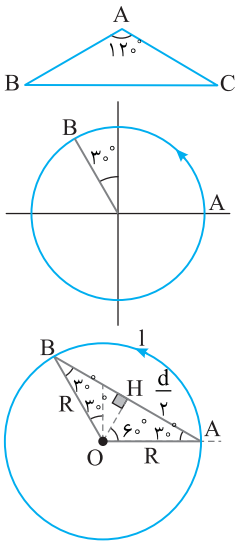
۳ بنابراین جابه‌جایی AB برابر است با:

$$d=AB=۲AH=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}R\Rightarrow d=\sqrt{۳}R\xrightarrow{R=۱۰m}d=۱۰\sqrt{۳}m$$

۴ سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{d}{t}=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow v_{av}=۵\sqrt{۳}m/s$$

میانبر قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰° همواره $\sqrt{۳}$ برابر طول هر ساق آن است. $BC=\sqrt{۳}AB$



بازی با سوال متحرکی کمان AB را طی کرده است. مسافت طی‌شده توسط متحرک چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است؟

۱) ۱ ۲) ۳

۳) $\sqrt{۳}\pi$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$

پاسخ زاویه‌ای که متحرک طی کرده ۱۲۰° است که $\frac{۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۳}$ دایره است بنابراین مسافت طی‌شده برابر طول کمان AB بوده که $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره است.

$$\ell=\frac{۱}{۳}(۲\pi R)\Rightarrow\ell=\frac{۲}{۳}\pi R$$

اگر طول وتر AB را d فرض کنیم فاصلهٔ AH برابر $\frac{d}{۲}$ است و با توجه به شکل در مثلث OAH می‌توان نوشت:

$$\sin ۶۰^\circ=\frac{\frac{d}{۲}}{R}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{d}{۲R}\Rightarrow d=\sqrt{۳}R$$

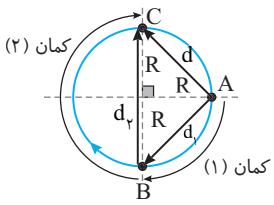
در این صورت نسبت مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی خواهد شد:

$$\frac{\ell}{d}=\frac{\frac{۲}{۳}\pi R}{\sqrt{۳}R}=\frac{۲\sqrt{۳}\pi}{۹}$$

گزینهٔ ۴

C ۷۱ ۲

خط فکری دوباره متن مسئله را بخوانید. مسیر حرکت ذره ساعتگرد است یعنی مطابق شکل ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B سپس از نقطهٔ B به نقطهٔ C می‌رود. سرعت متوسط یعنی جابه‌جایی تقسیم بر زمان بنابراین شما باید جابه‌جایی از A تا B و جابه‌جایی از B تا C را حساب کنید و به کمک سرعت متوسط‌هایی که در مسئله داده شده، زمان حرکت را در هر مرحله به دست بیاورید.



با توجه به شکل متحرک کمان (۱) را با سرعت $۵\sqrt{۲}m/s$ و کمان (۲) را با سرعت متوسط $۴m/s$ طی کرده است. حال زمان کل حرکت را به‌دست می‌آوریم.

۱ جابه‌جایی در قسمت اول:

$$d_۱=\sqrt{R^۲+R^۲}=R\sqrt{۲}$$

۲ زمان در قسمت اول:

$$v_{av}=\frac{d_۱}{\Delta t_۱}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{d_۱}{v_{av}}=\frac{R\sqrt{۲}}{۵\sqrt{۲}}=\frac{R}{۵}$$

۳ جابه‌جایی در قسمت دوم:

$$d_۲=R+R=۲R$$

۴ زمان در قسمت دوم:

$$v_{av}=\frac{d_۲}{\Delta t_۲}\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{d_۲}{v_{av}}=\frac{۲R}{۴}=\frac{R}{۲}$$

۵ کل زمان طی شده برابر است با:

$$\Delta t_{کل}=\frac{R}{۵}+\frac{R}{۲}=\frac{۷}{۱۰}R$$

۶ جابه‌جایی از ابتدا تا انتهای مسیر برابر بردار AC است که اندازهٔ آن خواهد شد:

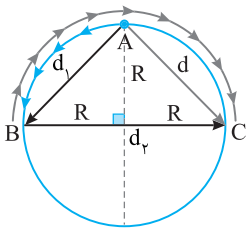
$$d=\sqrt{R^۲+R^۲}=R\sqrt{۲}$$

۷ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t_{کل}}=\frac{R\sqrt{۲}}{\frac{۷}{۱۰}R}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۷}m/s$$

بازی با سوال ذره‌ای روی یک مسیر دایره‌ای با سرعت متوسط $۵\sqrt{۲}m/s$ پادساعتگرد کمان $\frac{\pi}{۲}$ و سپس خلاف جهت به صورت ساعتگرد با سرعت متوسط $۴m/s$ کمان π را طی می‌کند. بزرگی سرعت متوسط ذره در تمام مسیر حرکت چند متر بر ثانیه است؟

پاسخ فرض کنید که ذره روی محیط دایره از نقطهٔ A پادساعتگرد مطابق شکل به نقطهٔ B برود. در این صورت جابه‌جایی ذره خواهد شد:



$$d_۱=AB=\sqrt{R^۲+R^۲}=\sqrt{۲}R$$

با توجه به تعریف سرعت متوسط زمان حرکت از A تا B خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t_۱=\frac{\sqrt{۲}R}{۵\sqrt{۲}}=\frac{R}{۵}$$

ذره ساعتگرد کمان π را طی کرده و از B به C می‌رود و جابه‌جایی ذره خواهد شد:

$$d_۲=R+R=۲R$$

زمان حرکت را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{d_۲}{\Delta t_۲}\Rightarrow\Delta t_۲=\frac{۲R}{۴}=\frac{R}{۲}$$

جابه‌جایی در کل مسیر یعنی بردار AC، اندازهٔ آن را حساب می‌کنیم.

$$\sqrt{R^۲+R^۲}=\sqrt{۲}R$$

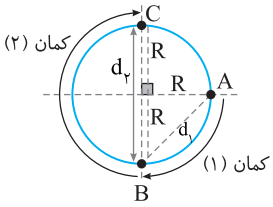
سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{\sqrt{۲}R}{\frac{R}{۲}+\frac{R}{۵}}\Rightarrow v_a=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۷}m/s$$

دقیقاً همان حل تکرار شد.

۷۲ C ۳

خط فکری به کمک محاسبهٔ جابه‌جایی d_1 و d_2 و با داشتن سرعت متوسط در این جابه‌جایی‌ها یعنی $5\sqrt{2}\,m/s$ و $4\,m/s$ زمان را در هر قسمت حساب کنید تا بتوانید زمان کل حرکت از A تا C را به‌دست بیاورید. سپس مسافت طی شده که مطابق شکل $\frac{3}{4}$ محیط دایره را حساب کرده و تندی متوسط را به‌دست بیاورید.



۱ جابه‌جایی در مرحلهٔ اول از A تا B با سرعت متوسط $5\sqrt{2}\,m/s$:

$$d_1=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt{2}$$

۲ زمان جابه‌جایی در مرحلهٔ اول از A تا B:

$$v_{av}=\frac{d_1}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{d_1}{v_{av}}=\frac{R\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{R}{5}\,s$$

۳ جابه‌جایی در مرحلهٔ دوم از B تا C با سرعت متوسط $4\,m/s$ وقتی است که ذره کمان π را ساعتگرد طی کرده و این جابه‌جایی برابر است با: $d_2=R+R=2R$

۴ زمان جابه‌جایی در مرحلهٔ دوم:

$$v_{av}=\frac{d_2}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{d_2}{v_{av}}=\frac{2R}{4}=\frac{R}{2}\,s$$

۵ زمان کل حرکت از A تا C خواهد شد.

$$\Delta t_{کل}=\frac{R}{5}+\frac{R}{2}=\frac{7}{10}R$$

۶ مسافت طی شده $\frac{3}{4}$ محیط دایره است.

$$\ell=\frac{3}{4}(2\pi R)=\frac{9}{2}R$$

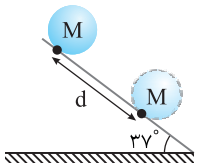
۷ تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t_{کل}}=\frac{\frac{9}{2}R}{\frac{7}{10}R}=\frac{45}{7}\,m/s$$

۷۳ A ۴

خط فکری صورت مسئله شما را نترساند. وقتی استوانه یک دور کامل می‌چرخد روی سطح به اندازهٔ محیط دایرهٔ سطح مقطع استوانه جلو می‌رود یعنی نقطهٔ M محل تماس استوانه با سطح پس از یک دور کامل به اندازهٔ $d=2\pi r$ جلو می‌رود. بنابراین شما کافی است محیط دایرهٔ سطح مقطع استوانه را به‌دست بیاورید.

جابه‌جایی نقطه M خواهد شد:



$$d=2\pi r\xrightarrow{\pi=3\,,r=5cm} d=2\times3\times5=30\,cm$$

۷۴ C ۲

خط فکری متوجه این نکته می‌شوید که وقتی مسئله می‌گوید پس از هر برخورد ۸۰٪ ارتفاع قبلی بالا می‌آید. یعنی در ابتدا که ارتفاع آن ۱۰۰ متر است پس از برخورد اول $\frac{80}{100}\times100=80m$ و پس از برخورد دوم $80\times\frac{80}{100}=64m$ و پس از برخورد سوم $64\times\frac{80}{100}=51/2m$ و ... بالا می‌آید؟ بنابراین شما باید به کمک سرعت متوسط ابتدا مشخص کنید که در لحظهٔ $t=4s$ گلوله در چه مکانی قرار دارد، سپس مسافت طی شده را در کل زمان ۰ تا ۴s به‌دست بیاورید تا بتوانید تندی متوسط را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی گلوله در بازهٔ صفر تا ۴s را حساب می‌کنیم.

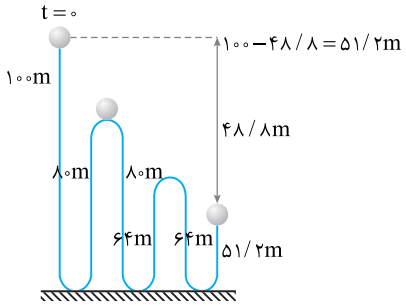
$$v_{av}=\frac{d}{t}\Rightarrow d=v_{av}t\Rightarrow d=12/2\times4\Rightarrow d=48/8m$$

۲ فاصلهٔ گلوله در $t=4s$ از سطح زمین را به‌دست می‌آوریم.

$$100-48/8=51/2m$$

۳ مسیر حرکت را رسم کرده و مسافت را حساب می‌کنیم. البته حرکت روی خط راست است. گلوله روی خط راست بالا و پایین می‌شود و ما برای محاسبهٔ مسافت مسیر را این‌گونه رسم کرده‌ایم.

$$\ell=100+80+80+64+64+51/2=439/2m$$



۴ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{t}=\frac{439/2}{4}=109/8$$

۷۵ C ۴

خط فکری با یک مسئله ریاضی سر و کار داریم. متحرک در هر مرحله خسته شده و مسیر کمتری را با سرعت کوچک‌تری طی کرده است. اگر کل مسیر حرکت x باشد، در مرحلهٔ اول $\frac{x}{2}$ و در مرحلهٔ دوم $\frac{x}{4}$ و مرحلهٔ سوم $\frac{x}{8}$ و ... را طی می‌کند. باید زمان را در هر مرحله به‌دست بیاورید. سپس سرعت متوسط را در کل مسیر x حساب کنید.

زمان در هر مرحله خواهد شد:

$$v_{av_1}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\Rightarrow v=\frac{\frac{x}{2}}{\Delta t_1}\Rightarrow \Delta t_1=\frac{x}{2v}$$

$$v_{av_2}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\Rightarrow \frac{v}{2}=\frac{\frac{x}{4}}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\frac{x}{2v}$$

$$v_{av_3}=\frac{\Delta x_3}{\Delta t_3}\Rightarrow \frac{v}{4}=\frac{\frac{x}{8}}{\Delta t_3}\Rightarrow \Delta t_3=\frac{x}{2v}$$

$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$

سرعت متوسط در کل مسیر را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{x}{t_{کل}}=\frac{x}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3+\cdots}\Rightarrow v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{2v}+\frac{x}{2v}+\frac{x}{2v}+\cdots}$$

$$v_{av}=\frac{x}{\frac{x}{2v}\underbrace{(1+1+1+\cdots)}_{\text{بی‌نهایت بار}}}=\frac{2v}{\infty}$$

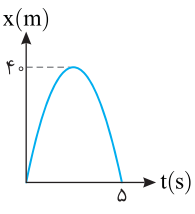
جمع تعداد بی‌نهایت عدد یک در مخرج برابر بی‌نهایت است و تقسیم یک عدد معین بر بی‌نهایت برابر صفر است، بنابراین:

$$v_{av}=\frac{2v}{\infty}=0$$

پنجره ۲

۷۶ A ۱

خط فکری دقت کنید نمودار مکان - زمان مسیر حرکت نیست یعنی اینکه تصور نکنید که متحرک روی این مسیر بالا و پایین می‌رود. در نمودار مکان - زمان، در هر لحظه می‌توان مکان جسم را مشخص کرد و شما به کمک آن می‌توانید مسیر حرکت روی محور xها را رسم کنید. برای سادگی شما روی محور xها مسیر حرکت جسم را رسم کنید تا مسئله حل شود.



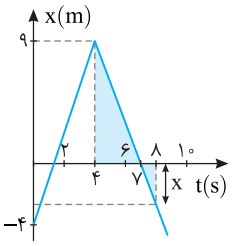
متحرک در $t=0$ در مکان $x=0$ است، سپس به مکان $+40m$ می‌رود و از آن نقطه تغییر جهت داده و برمی‌گردد. بنابراین در مدت 5s جابه‌جایی متحرک صفر است. اما در این مدت متحرک از مکان $x=0$ به مکان $x=40m$ رفته و سپس به مبدأ برمی‌گردد و مسافت طی شده برابر $\ell=40+40=80m$ می‌شود.



B ۷۷ ۱

یادآوری جابه‌جایی برداری است که ابتدای مسیر را به انتهای مسیر وصل می‌کند و نقطهٔ بین راه و مسیر حرکت مهم نیست.

خط فکری جابه‌جایی در مسئله خواسته شده است. در لحظهٔ $t=0$ مکان متحرک $-4m$ است. بنابراین شما باید مکان متحرک را در لحظهٔ $t=8s$ مشخص کنید و به کمک آن اندازهٔ جابه‌جایی را به‌دست بیاورید. معمولاً در نمودارهایی که خط راست هستند از تشابه مثلث استفاده می‌کنیم.



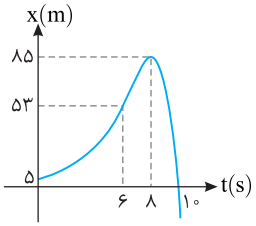
۱ دو مثلث رنگی در شکل با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه خواهد شد: $\frac{9}{x}=\frac{3}{1}\Rightarrow x=3m$

البته x زیر محور زمان بوده و منفی است. یعنی در لحظهٔ $t=8s$ متحرک در مکان $-3m$ است.

۲ متحرک در لحظهٔ $t=0$ در مکان $-4m$ و در لحظهٔ $t=8s$ در مکان $-3m$ است. بنابراین در بازهٔ ۰ تا ۸s متحرک $+1m$ جابه‌جا شده است.

A ۷۸ ۴

گزینهٔ (۱): با توجه به نمودار مکان متحرک در لحظه‌های ۸s تا ۱۰s به‌ترتیب ۸۵m و صفر است. بنابراین جابه‌جایی در این بازه زمانی $d=0-85=-85m$ بوده و این گزینه نادرست است.



گزینهٔ (۲): در لحظهٔ $t=6s$ متحرک در مکان $+53$ و در لحظهٔ $t=10s$ متحرک در مکان $x=0$ است، یعنی جابه‌جایی آن $d=0-53=-53m$ بوده و گزینهٔ (۲) نادرست است.

گزینهٔ (۳): برای مسافت طی شده باید مسیر حرکت از $t=8s$ تا $t=10s$ را مرور کنیم. در این مدت حرکت متحرک روی محور xها و در یک جهت بوده و متحرک ۸۵ متر مسافت طی کرده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

گزینهٔ (۴): در لحظهٔ $t=6s$ مکان متحرک $+53m$ بوده و در $t=8s$ متحرک در مکان ۸۵m تغییر جهت می‌دهد و در $t=10s$ به مبدأ می‌رود، بنابراین مسافتی که در این مدت طی می‌کند برابر است با $\ell=(85-53)+85=117m$.

B ۷۹ ۲

خط فکری مسافت همواره کمیتی مثبت است و هرگاه متحرک تغییر جهت دهد، مسافت همچنان مثبت می‌ماند. بنابراین نموداری می‌تواند نمودار مسافت - زمان این متحرک باشد که از مبدأ شروع شود و تغییر جهت نداشته باشد.

با توجه به آنچه در خط فکری بیان شده، گزینهٔ (۲) می‌تواند نمودار مسافت - زمان این متحرک باشد.

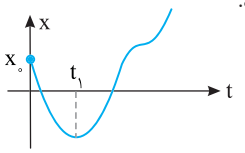
A ۸۰ ۳

۱ مکان اولیهٔ متحرک در لحظهٔ $t=0$، مثبت است.

۲ متحرک از لحظهٔ صفر تا t_1 در خلاف جهت محور در حرکت است.

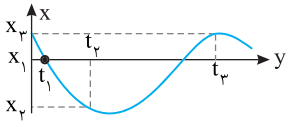
۳ متحرک در لحظهٔ t_1 تغییر جهت داده است.

۴ بعد از لحظهٔ t_1 متحرک تمام مدت در جهت مثبت محور x در حرکت است. بنابراین گزینهٔ (۳) پاسخ درست است.



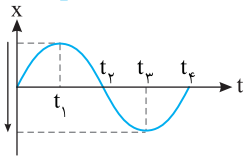
A ۸۱ ۲

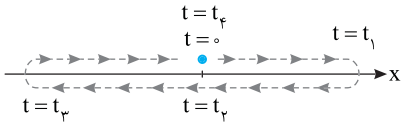
متحرک در لحظهٔ $t_1=0$ در مبدأ مکان است. در لحظهٔ t_2 در مکان x_2 و در لحظهٔ t_3 در مکان x_3 است که با توجه به نمودار فاصلهٔ متحرک از مبدأ در لحظهٔ t_2 از بقیهٔ لحظه‌ها بیشتر است.



A ۸۲ ۳

مسیر حرکت از $t=0$ تا $t=t_4$ مطابق شکل روبه‌روست و در بازهٔ t_1 تا t_3 متحرک در خلاف جهت محور xها یعنی در جهت منفی محور در حرکت است.



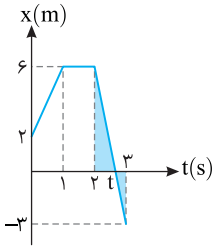


حرکت در خلاف جهت محور

A ۸۳ ۲

خط فکری در مدت ۰ تا ۱s مورچه از مکان ۲ متری به مکان ۶ متری رفته یعنی از مبدأ مکان در حال دور شدن است. در بازهٔ ۱s تا ۲s مورچه در مکان $+6m$ مبدأ ساکن است و مکانش تغییر نمی‌کند. در لحظهٔ t مکان مورچه $x=0$ می‌شود. یعنی در بازهٔ ۲s تا t مورچه در خلاف جهت محور xها از مکان $+6m$ در حال نزدیک شدن به مبدأ است، بنابراین شما باید زمان t را به کمک تشابه مثلث به‌دست بیاورید.

دو مثلث رنگی در شکل متشابه هستند، بنابراین نسبت تشابه خواهد شد:



$$\frac{6}{3}=\frac{t-2}{3-t}\Rightarrow 18-6t=3t-6$$

$$\Rightarrow 24=9t\Rightarrow t=\frac{8}{3}s$$

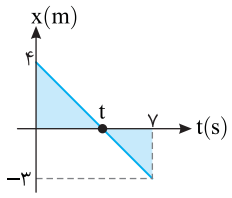
از بازهٔ $t=2s$ تا $t=\frac{8}{3}s$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ $(x=0)$ است، بنابراین:

$$\Delta t=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}s$$

البته شما می‌توانستید به کمک شیب خط نیز مقدار t را حساب کنید.

A ۸۴ ۳

خط فکری در حرکت متحرک هنگامی که مکان متحرک منفی است، بردار مکان منفی است و اگر مکان متحرک مثبت باشد بردار مکان مثبت است. بنابراین هنگام عبور از مبدأ مکان $(x=0)$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. شما باید از تشابه مثلث، t را به دست بیاورید.

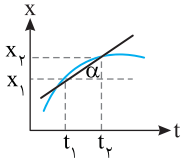


دو مثلث رنگی متشابه هستند و نسبت تشابه خواهد شد:

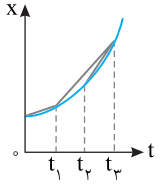
$$\frac{t}{4}=\frac{7-t}{3}\Rightarrow 3t=28-4t\Rightarrow 7t=28\Rightarrow t=4s$$

B ۸۵ ۳

یادآوری در نمودار مکان - زمان شیب خط قاطع بین دو نقطه برابر سرعت متوسط بین آن دو نقطه است. $v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\tan\alpha$



در بازه‌های زمانی بیان شده در گزینه‌ها، خط قاطع را روی نمودار رسم می‌کنیم. در هر گزینه که شیب خط قاطع بیشتر باشد، سرعت متوسط بزرگ‌تر است. در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 شیب خط قاطع از بقیهٔ بازه‌ها بیشتر است بنابراین سرعت متوسط در این بازه بزرگ‌تر از بقیهٔ بازه‌هاست.

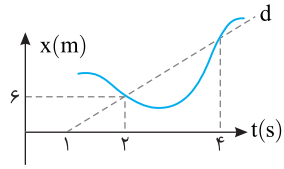


B ۳ ۸۶

خط فکری تندی متوسط به مسافت یعنی مسیر حرکت بستگی دارد که در نمودار چگونگی مسیر یعنی اینکه متحرک از چه نقاطی می‌گذرد مشخص نیست، بنابراین تندی متوسط قابل محاسبه نیست. بنابراین شما باید به سراغ سرعت متوسط بروید و سرعت متوسط را از شیب خط d به‌دست بیاورید.

شیب خط d در همه جای آن قطعاً یکسان است. بنابراین برای به‌دست آوردن سرعت متوسط، کافی است شیب خط d را به کمک دو نقطه که روی نمودار مختصات مشخص دارند به‌دست آوریم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۶-۰}{۲-۱}=۶m/s$$

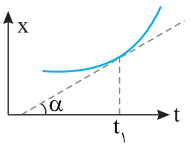


بنابراین سرعت متوسط در بازهٔ ۱s تا ۲s، ۲s تا ۴s یا ۱s تا ۴s برابر ۶m/s است.

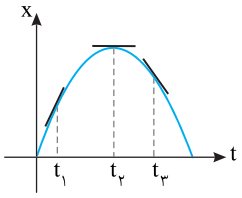
A ۱ ۸۷

یادآوری شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر تندی لحظه‌ای (اندازهٔ سرعت لحظه‌ای) در آن لحظه است.

دقت کنید تندی لحظه‌ای همواره مثبت است، بنابراین شما همواره باید قدرمطلق شیب خط مماس را بررسی کنید. اکنون در لحظه‌های خواسته شده، خط مماس بر نمودار را رسم می‌کنیم. شیب خط مماس در لحظهٔ $t_۱$ از دو لحظهٔ دیگر بزرگ‌تر است. بنابراین تندی در لحظهٔ $t_۱$ از بقیهٔ لحظه‌های بیان شده بیشتر است.



$v_{\text{لحظه‌ای}}=v_{t_۱}$



B ۳ ۸۸

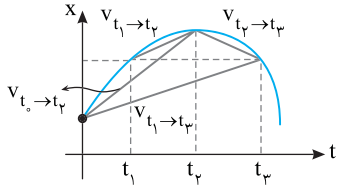
خط فکری مسئلهٔ ساده‌ای است. با رسم خط قاطع در بازه‌های زمانی که در گزینه‌ها بیان شده می‌توان مشخص کرد که شیب کدام خط قاطع منفی است در نتیجه سرعت متوسط منفی است.

برای سادگی روی شکل v_{av} را با حرف v نمایش داده‌ایم. در بازهٔ صفر تا $t_۲$ شیب خط قاطع یعنی سرعت متوسط مثبت است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ نیز شیب خط قاطع یعنی سرعت متوسط مثبت است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ شیب خط قاطع منفی و سرعت متوسط منفی بوده و گزینهٔ (۳) درست است.

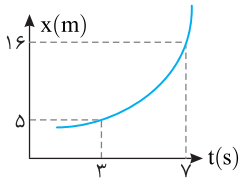
در بازهٔ صفر تا $t_۳$ شیب خط قاطع مثبت و سرعت متوسط مثبت بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.



A ۲ ۸۹

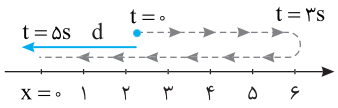
به نمودار دقت کنید. متحرک روی خط راست (محور xها) بدون تغییر جهت از مکان x=۵m به مکان x=۱۶m رفته بنابراین می‌توان نوشت:

$$s_{av}=v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۱۶-۵}{۷-۳}=۲/۷۵m/s$$

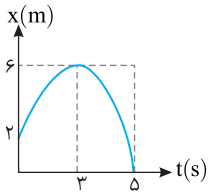


A ۲ ۹۰

مسیر حرکت را روی محور xها رسم می‌کنیم. البته می‌توانید این کار را در ذهن خود انجام دهید.



۱ جابه‌جایی متحرک برداری است که از x=۲ باید به x=۰ برسد یعنی از ابتدای مسیر به انتهای مسیر رسم شود. بنابراین d=−۲m و سرعت متوسط برابر است با:



$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{-۲}{۵-۰}\Rightarrow v_{av}=-۰/۴m/s$$

۲ مطابق شکل متحرک از مکان +۲m به مکان +۶m رفته یعنی ۶−۲=۴m مسافت طی کرده سپس از مکان +۶m به مکان x=۰ می‌رود و در این مدت نیز مسافت ۶m را طی می‌کند، بنابراین مسافت طی شده در مدت ۰ تا ۵s برابر ℓ=۴+۶=۱۰m می‌شود. از این‌رو تندی متوسط خواهد شد

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۱۰}{۵-۰}\Rightarrow s_{av}=۲m/s$$

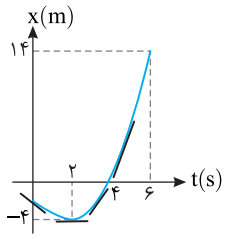
B ۳ ۹۱

یادآوری قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر تندی لحظه‌ای متحرک است و هرچه خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شود، تندی لحظه‌ای متحرک بیشتر می‌شود.

نکته حرکت تندشونده یعنی حرکتی که در آن تندی جسم افزایش می‌یابد بنابراین هرگاه قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان افزایش یابد حرکت تندشونده است.

یادآوری در نقاط بیشینه و کمینه نمودار مکان - زمان شیب خط مماس صفر است، یعنی تندی لحظه‌ای متحرک صفر است.

به نمودار نگاه کنید. از لحظهٔ ۰ تا ۲s قدرمطلق شیب خط مماس در حال کاهش بوده و در t=۲s تندی صفر شده و حرکت کندشونده است و از t=۲s تا t=۶s شیب خط مماس در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است. مسافت طی شده از −۴m تا +۱۴m برابر ℓ=۱۸m است و تندی متوسط خواهد شد:

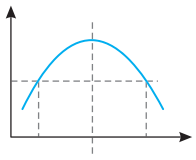


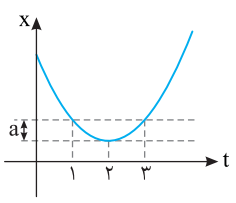
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۸}{۴}=۴/۵m/s$$

B ۴ ۹۲

یادآوری تندی متوسط برابر است با مسافت طی شده در یکای زمان. از طرفی سهمی (نمودار معادلهٔ درجه دوم) نسبت به خط قائم گذرا از رأس سهمی متقارن می‌باشد. $x_{t=۱}$ با $x_{t=۳}$ با هم برابر است، مسافت طی شده از ۱s تا ۲s و ۲s تا ۳s را روی شکل با حرف a نشان داده‌ایم در این صورت:

در بازهٔ t=۱s تا t=۲s و در بازهٔ t=۲s تا t=۳s تندی متوسط خواهد شد:





$$t=۱s\text{ تا }t=۲s\Rightarrow s_{av}=\frac{a}{۱}=a\quad,\quad t=۲s\text{ تا }t=۳s\Rightarrow v_{av}=\frac{a}{۱}=a$$

در بازهٔ ۱s تا ۳s، مسافت طی‌شده L=a+a=۲a است و تندی متوسط در این بازه نیز برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۲a}{۳-۱}=a$$

بنابراین در هر سه بازه، تندی یکسان است.

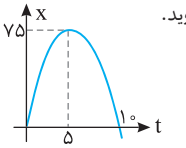
C ۹۳ | ۳

یادداشت ریاضی هرگاه ریشه‌های یک معادله درجه ۲ ($x_۱$ و $x_۲$) را داشته باشیم معادلهٔ آن خواهد شد: $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$

خط فکری در حل این مسئله شما باید ابتدا معادلهٔ حرکت را به‌دست بیاورید.

بنابراین باید به سراغ تمام دانسته‌های خود دربارهٔ سهمی بروید.

۱ نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس سهمی متقارن است. بنابراین مختصات رأس این سهمی خواهد شد $(t=۵s, x=۷۵m)$



۲ ریشه‌های معادله روی نمودار مشخص است $(t=۱۰s, t=۰)$

۳ معادلهٔ درجه ۲ این سهمی را به کمک ریشه‌های آن می‌نویسیم:

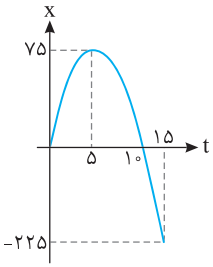
$$x=a(t-۰)(t-۱۰)\Rightarrow x=at^۲-۱۰at \quad (I)$$

۴ باید مختصات رأس در این معادله صدق کند.

$$۱۵=a(۵)^۲-۱۰a(۵)\Rightarrow ۷۵=۲۵a-۵۰a\Rightarrow a=-۳$$

۵ بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$\xrightarrow{(I)} x=-۳t^۲+۳۰t$$



۶ مکان متحرک در $t=۱۵s$ را حساب می‌کنیم

$$x=-۳(۱۵)^۲+۳۰\times۱۵=-۳\times۲۲۵+۴۵۰$$

$$\Rightarrow x=-۲۲۵m$$

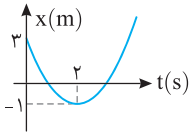
۷ مسافت طی شده از ۰ تا ۱۵s را به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=۷۵+۷۵+۲۲۵=۳۷۵m$$

۸ تندی متوسط در مدت ۱۵s خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۳۷۵}{۱۵}=۲۵m/s$$

بازی با سؤال نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی شکل روبه‌رو است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۵s$ چند متر بر ثانیه است؟ از کتاب درسی



۱) ۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

پاسخ در حل این تست باید به کمک داده‌های روی نمودار معادلهٔ $x=at^۲+bt+c$ را کامل کنیم.

۳ در لحظهٔ $t=۰$ مکان اولیهٔ متحرک $x_۰=۳m$ است، از این رو:

$$۳=۰+۰+c\Rightarrow c=۳m$$

۴ برای مختصات رأس سهمی می‌توان نوشت:

$$t=-\frac{b}{۲a}\xrightarrow{t=۲s}۲=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow b=-۴a \quad (I)$$

۵ مختصات رأس باید در معادله صدق کند:

$$(t=۲s, x=-۱m)\Rightarrow -۱=۴a+۲b+۳\Rightarrow ۴a+۲b=-۴\Rightarrow ۲a+b=-۲ \quad (II)$$

از رابطه‌های (I) و (II)، a و b را به‌دست می‌آوریم.

$$۲a+b=-۲\Rightarrow ۲a-۴a=-۲\Rightarrow -۲a=-۲\Rightarrow a=۱$$

$$b=-۴a\Rightarrow b=-۴$$

معادله کامل شد: $x=t^۲-۴t+۳$

اکنون در لحظه‌های $t=۱s$ و $t=۵s$، مکان متحرک را حساب می‌کنیم:

$$t=۱s\Rightarrow x=۱-۴+۳\Rightarrow x=۰$$

$$t=۵s\Rightarrow x=۲۵-۲۰+۳\Rightarrow x=۸m$$

مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم. متحرک در لحظهٔ $t=۱s$ از مکان $x=۰$ به مکان $-۱m$ رفته و سپس از مکان $-۱m$ به مکان $+۸m$ رفته است. بنابراین

$$\ell=۱+۱+۸=۱۰m$$

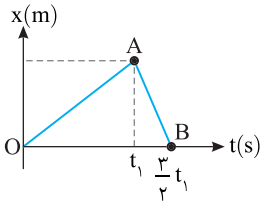
تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۰}{۵-۱}=۲/۵m/s$$

گزینهٔ ۳

A ۹۴ | ۲

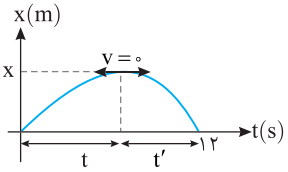
با توجه به تعریف سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$، سرعت متوسط را در هر شاخه حساب کرده و بر هم تقسیم می‌کنیم. داده‌های روی نمودار را در رابطهٔ سرعت متوسط قرار می‌دهیم.



$$\frac{v_{av_{OA}}}{v_{av_{AB}}}=\frac{\frac{x_A-۰}{t_۱}}{\frac{۰-x_A}{\frac{۳}{۲}t_۱-t_۱}}=-\frac{۱}{۲}$$

B ۹۵ | ۱

خط فکری ابتدا باید برای خودتان مشخص کنید که در کدام بازه حرکت تندشونده است. سپس به سراغ اطلاعات مسئله بروید و زمان حرکت تندشونده را حساب کنید.



۱ در بازهٔ ۰ تا t تندی متحرک به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشونده است و در بازهٔ t' متحرک از $v=۰$ شروع به حرکت کرده و تندی آن در حال افزایش است. شما با رسم چند خط مماس می‌توانید این مسئله را بررسی کنید. هرچه به سمت ۱۲s بروید خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شده و قدرمطلق شیب آن در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است.

۲ با توجه به نمودار در بازهٔ ۰ تا t مسافت طی شده $\ell_۱=x$ و در بازهٔ ۰ تا ۱۲s مسافت طی شده $\ell_۲=۲x$ است.

۳ با توجه به فرض مسئله می‌توانیم بنویسیم:

$$s_{av_{۰\to t}}=۳s_{av_{۱۲}}\xrightarrow{s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}}\frac{x}{t}=۳\frac{۲x}{۱۲}\Rightarrow t=۲s$$

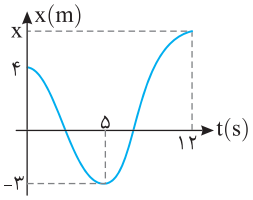
۴ بنابراین مدت زمانی که حرکت تندشونده است برابر خواهد شد با: $t'=۱۲-۲=۱۰s$

B ۹۶ | ۱

خط فکری دقت کنید: هرگاه در مسئله یک مجهول غیرقابل محاسبه داشته باشیم، معمولاً آن مجهول هنگام محاسبات حذف می‌شود. بنابراین نگران مکان متحرک در لحظهٔ $t=۱۲s$ نباشد و سرعت متوسط و تندی متوسط برحسب x یعنی مکان در $t=۱۲s$ به‌دست بیاورید و از هم کم کنید.

۱ مسافت طی شده در مدت ۱۲s را به کمک نمودار حساب کنید.

$$\ell=۴+۳+۳+x=۱۰+x$$

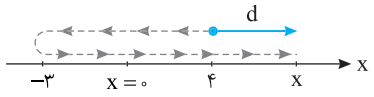


۲ تندی متوسط را در این مدت به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۱۰+x}{۱۲}$$

۳ در مدت ۱۲s متحرک از مکان $x=۴m$ به مکان x می‌رود و جابه‌جایی آن خواهد شد:

$$d=x-۴$$



۴ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم

$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{x-۴}{۱۲}$$

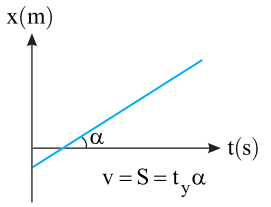
۵ s_{av} و v_{av} را از هم کم می‌کنیم و مسئله را حل می‌کنیم.

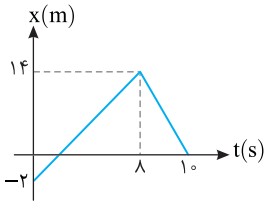
$$s_{av}-v_{av}=\frac{۱۰+x}{۱۲}-\frac{x-۴}{۱۲}\Rightarrow s_{av}-v_{av}=\frac{۱۰+x-x+۴}{۱۲}=\frac{۱۴}{۱۲}=\frac{۷}{۶}m/s$$

A ۹۷ ۱

یادآوری در هر بازه‌ای که نمودار مکان - زمان، خط راست مایل باشد، در تمام بازه‌های آن شیب خط یکسان است، یعنی در تمام لحظات سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای برابر و مقدار آن ثابت است.

نمودار از دو قسمت در بازهٔ ۰ تا ۸s و ۸ تا ۱۰s تشکیل شده و در هر بازه تندی لحظه‌ای ثابت و برابر شیب نمودار است. بنابراین تندی در لحظهٔ $t=۴s$ یعنی شیب نمودار در بازهٔ ۰ تا ۸s و تندی در لحظهٔ $t=۹s$ یعنی شیب نمودار در بازهٔ ۸s تا ۱۰s از این رو خواهیم داشت:





$$v_{t=۴s}=\frac{۱۴-(-۲)}{۸-۰}=۲m/s\Rightarrow s_{t=۴s}=۲m/s$$

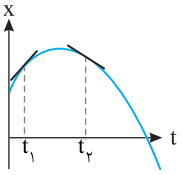
$$v_{t=۹s}=\frac{۰-۱۴}{۱۰-۸}=-۷\frac{m}{s}\Rightarrow s_{t=۹s}=۷m/s$$

در این صورت:

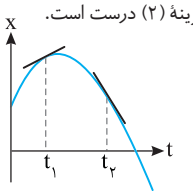
$$\frac{s_{t=۴s}}{s_{t=۹s}}=\frac{۲}{۷}$$

B ۹۸ ۲

خط فکری به دو مطلب باید دقت کنید. یکی اینکه در لحظهٔ $t_۱$ سرعت مثبت است $(+۱۰m/s)$ بنابراین شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در این لحظه باید مثبت باشد و در لحظهٔ $t_۲$ سرعت منفی است $(-۱۲m/s)$ و شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان منفی است و دیگر اینکه اندازهٔ سرعت در لحظهٔ $t_۱$ از اندازهٔ سرعت در لحظهٔ $t_۲$ کمتر است $(|-۱۲|>۱۰)$، بنابراین قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ $t_۱$ باید از قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ $t_۲$ کمتر باشد. اکنون گزینه‌ها را بررسی کنید.



از گزینه‌های (۳) و (۴) شروع می‌کنیم. در گزینهٔ (۳) شیب خط مماس در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ هر دو منفی است یعنی سرعت در این لحظه‌ها منفی است و گزینهٔ (۳) نادرست است. در گزینهٔ (۴) شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ هر دو مثبت است یعنی سرعت در این لحظه‌ها مثبت است و گزینهٔ (۴) نادرست است. اما به سراغ گزینه‌های (۱) و (۲) می‌رویم. شیب خط مماس در نمودار شکل (۱) در لحظهٔ $t_۱$ از قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ $t_۲$ بیشتر است و این گزینه نادرست است. در گزینهٔ (۲) قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ $t_۲$ بزرگ‌تر بوده و گزینهٔ (۲) درست است.



نکته دقت کنید در فیزیک وقتی از بزرگی شیب خط مماس حرف می‌زنیم یعنی هرچه خط مماس به حالت قائم نزدیک‌تر شود بزرگی شیب خط مماس بیشتر می‌شود و تندی لحظه‌ای جسم بیشتر می‌شود.

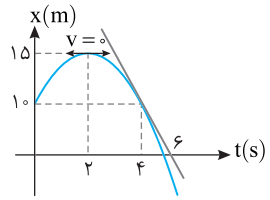
A ۹۹ ۲

خط فکری از شما در مورد سرعت لحظه‌ای سؤال شده بنابراین شما باید به سراغ شیب خط مماس در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۴s$ بروید زیرا شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان بر برابر سرعت لحظه‌ای است. البته در نقاط بیشینه و کمینه که خط مماس موازی محور افقی است، شیب صفر و سرعت متحرک صفر است حال با این اطلاعات مسئله را حل کنید.

۱ لحظهٔ $t=۲s$، نقطهٔ بیشینه نمودار است و سرعت لحظه‌ای در این لحظه صفر است.

۲ با اطلاعات روی نمودار شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان را در لحظهٔ $t=۴s$ به‌دست می‌آوریم

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰-۱۰}{۶-۴}=-۵m/s$$



B ۱۰۰ ۱

خط فکری در این سؤال با نمودار $x-t$ سروکار داریم، به دو نکته زیر دقت کنید:

۱ سرعت متوسط برابر $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (جابه‌جایی) یا شیب خط قاطع بین دو لحظه است و تندی متوسط برابر $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ (مسافت) است.

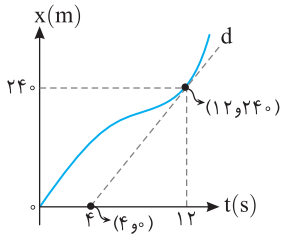
۲ سرعت در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در آن لحظه و تندی برابر اندازهٔ شیب خط مماس در آن لحظه خواهد بود.

در حل سؤال ابتدا با فرض مسئله یعنی برابری تندی در لحظهٔ $t=۱۲s$ با تندی متوسط در بازهٔ $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۱۴s$ شروع می‌کنیم، سپس خواستهٔ سؤال یعنی نسبت سرعت متوسط در دو بازهٔ گفته شده را حساب می‌کنیم.

۳ تندی در لحظهٔ $t=۱۲s$ برابر شیب خط مماس d است.

یادآوری شیب خط برابر نسبت تغییرات محور قائم به تغییرات محور افقی است:

$$\text{شیب خط}=\frac{\text{تغییرات محور قائم}}{\text{تغییرات محور افقی}}=\frac{۲۴۰-۰}{۱۲-۴}=\frac{۲۴۰}{۸}=۳۰m/s$$



شیب خط برابر تندی لحظه‌ای است، بنابراین:

$$s(t=۱۲s)=۳۰m/s \quad (I)$$

۴ مکان متحرک در لحظهٔ $t=۱۴s$ داده نشده و مطابق شکل در بازهٔ ۲s تا ۱۴s متحرک از مکان ۶۰m به مکان x می‌رسد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{x-۶۰}{۱۲} \quad (II)$$

با توجه به فرض مسئله تندی در لحظهٔ ۱۲s با تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۱۴s باهم برابر است پس از رابطهٔ (I) و (II) می‌توان نوشت:

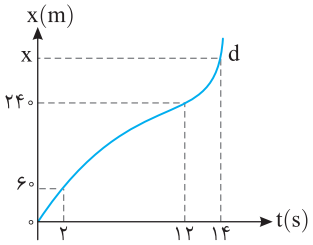
$$\frac{x-۶۰}{۱۲}=۳۰\Rightarrow x-۶۰=۳۶۰\Rightarrow x=۴۲۰m$$

یادآوری دو ثانیه اول یعنی $t=۰$ تا $t=۲s$ و دو ثانیه هفتم یعنی $t=۱۲s$ تا $t=۱۴s$

دو ثانیه اول	دو ثانیه دوم	دو ثانیه سوم	دو ثانیه چهارم	دو ثانیه پنجم	دو ثانیه ششم	دو ثانیه هفتم
۰ تا ۲s	۲ تا ۴s	۴ تا ۶s	۶ تا ۸s	۸ تا ۱۰s	۱۰ تا ۱۲s	۱۲ تا ۱۴s

۵ در دو ثانیه اول (۰ تا ۲s) متحرک از مکان $x=۰$ تا $x=۶۰m$ جابه‌جا می‌شود و سرعت متوسط در این بازه برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۶۰-۰}{۲}=۳۰m/s$$

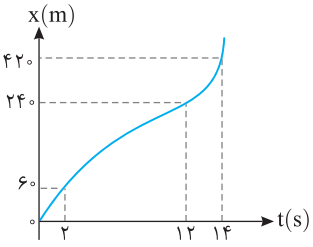


۶ در دو ثانیه هفتم (۱۲s تا ۱۴s) متحرک از مکان $x=۲۴۰m$ به مکان $x=۴۲۰m$ می‌رود و سرعت متوسط خواهد شد:

$$v'_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v'_{av}=\frac{۴۲۰-۲۴۰}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰m/s$$

۷ نسبت v_{av} به v'_{av} را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av}}{v'_{av}}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$



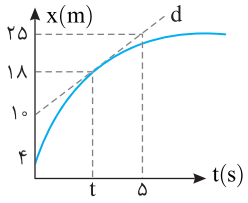
B ۱۰۱ ۱

۱ لحظه‌ای که مکان متحرک $+۱۸m$ است را به راحتی به کمک شیب خط d می‌توانید به‌دست بیاورید.

$$\frac{۲۵-۱۰}{۵-۰}=\frac{۱۸-۱۰}{t-۰}\Rightarrow ۳=\frac{۸}{t}\Rightarrow t=\frac{۸}{۳}s$$

۲ تندی لحظه‌ای در لحظهٔ t نیز شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان یعنی شیب خط d است.

$$v=\frac{۲۵-۱۰}{۵-۰}=۳m/s$$



B ۱۰۲ ۳

قبل از حل مسئله دقت کنید تقسیم‌بندی روی محور tها ۲s، ۲s بوده و تقسیم‌بندی روی محور xها ۶m، ۶m است.

۱ به نمودار دقت کنید. در $t=۰$ نمودار بر محور t مماس شده یعنی شیب خط مماس در $t=۰$ صفر بوده و متحرک از حال سکون به راه افتاده است.

۲ تا لحظهٔ $t=۱۰s$ شیب نمودار در حال افزایش است پس به سرعت متحرک اضافه می‌شود.

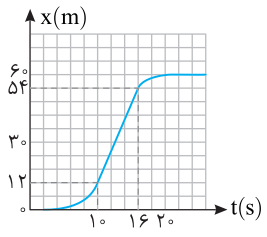
۳ از لحظهٔ $t=۱۰s$ تا $t=۱۶s$ شیب نمودار ثابت است و نتیجه می‌گیریم که سرعت در این بازه ثابت مانده و سرعت در این بازه همان تندی در لحظهٔ $t=۱۰s$ است.

۴ از لحظهٔ $t=۱۶s$ شیب خط مماس در حال کاهش است بنابراین سرعت در حال کاهش است.

۵ نتیجه اینکه بیشینه سرعت همان سرعت در بازهٔ ۱۰s تا ۱۶s است.

۶ از نمودار مشخص می‌شود که در لحظهٔ $t=۱۰s$ و $t=۱۶s$ مکان جسم به‌ترتیب ۱۲m و ۵۴m است. بنابراین سرعت خواهد شد:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۵۴-۱۲}{۱۶-۱۰}=\frac{۴۲}{۶}\Rightarrow v=۷m/s$$



A ۱۰۳ ۴

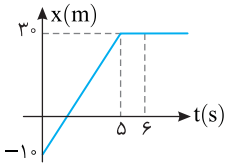
در لحظهٔ $t_۲$ خط مماس، خط افقی و شیب آن صفر است، یعنی در این لحظه سرعت برابر صفر است. بنابراین بازه‌ای را باید انتخاب کنیم که جابه‌جایی در آن بازه صفر باشد تا سرعت متوسط مانند سرعت لحظه‌ای در $t_۲$ صفر شود که با توجه به نمودار از $t_۱$ تا $t_۳$ و همچنین $t_۳$ تا $t_۵$ جابه‌جایی صفر می‌شود که در گزینه‌ها بازه $t_۱$ تا $t_۳$ را داریم.

A ۱۰۴ ۲

۱ در لحظهٔ $t=۰$ مکان متحرک $x=-۱۰m$ و در لحظهٔ $t=۶s$ مکان متحرک ۳۰m است. بنابراین سرعت متوسط در این بازه برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳۰-(-۱۰)}{۶}=\frac{۴۰}{۶}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{۲۰}{۳}m/s$$



۲ در بازهٔ ۰ تا ۵s نمودار یک خط راست مایل است و در تمام لحظات تندی (سرعت) یکسان و برابر شیب نمودار است بنابراین خواهیم داشت:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{۳۰-(-۱۰)}{۵}=۸m/s\Rightarrow v_{t=۴s}=۸m/s$$

۳ اکنون نسبت را حساب می‌کنیم:

$$\frac{v_{av}}{v_{t=۴s}}=\frac{\frac{۲۰}{۳}}{۸}=\frac{۲۰}{۲۴}=\frac{۵}{۶}$$

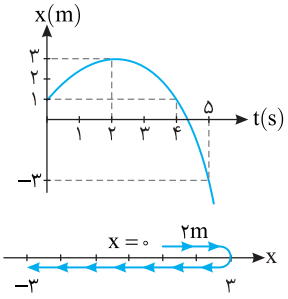
A ۱۰۵ ۴

در بازهٔ صفر تا ۴s متحرک از مکان $x=۱m$ به مکان $x=۱m$ جابه‌جا شده و جابه‌جایی آن صفر است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

در بازهٔ صفر تا ۵s مسافت طی شده متحرک برابر است با:

$$L=۲+۶=۸m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۸}{۵}=۱/۶m/s$$



بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

شیب خط مماس در $t=۵s$ از شیب خط مماس در $t=۴s$ بیشتر است پس تندی لحظه‌ای (اندازهٔ سرعت لحظه‌ای) در $t=۵s$ از $t=۴s$ بزرگ‌تر است.

بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

در لحظهٔ $t=۲s$ مکان متحرک $x=۳m$ و در لحظهٔ $t=۵s$ مکان متحرک $-۳m$ است، یعنی متحرک در خلاف جهت محور جابه‌جا شده و سرعت متوسط منفی است و در تمام بازهٔ ۲s تا ۵s سرعت منفی بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

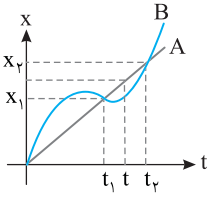
A ۱۰۶ ۴

خط فکری در تمام گزینه‌ها سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $t_۱$ و یا $t_۱$ تا $t_۲$ برای دو متحرک A و B مقایسه شده است، بنابراین شما باید با توجه به تعریف سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ دربارهٔ مقایسهٔ سرعت متوسط‌ها اظهارنظر کنید.

در بازهٔ ۰ تا $t_۱$ مکان هر دو متحرک از صفر تا $x_۱$ تغییر کرده بنابراین جابه‌جایی متحرک A و B یکسان و برابر $\Delta x=x_۱$ بوده و سرعت متوسط A و B در این بازه برابر است.

همچنین در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ جابه‌جایی دو متحرک A و B یکسان و برابر $x_۲-x_۱$ است و در این بازه نیز سرعت متوسط یکی است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

به نمودار نگاه کنید. در بازهٔ ۰ تا t جابه‌جایی A از B بیشتر بوده و سرعت متوسط A از B بیشتر است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

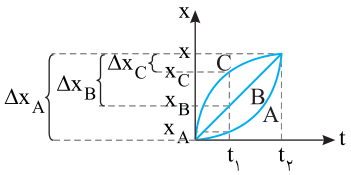


B ۱۰۷ ۳

خط فکری به صورت سؤال دقت کنید، سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا t_2 از شما خواسته نشده است. بلکه سرعت متوسط از لحظهٔ t_1 تا t_2 مورد پرسش است بنابراین شما باید بررسی کنید که در این بازه جابه‌جایی A و B و C چگونه است؟

بـه نمـودار نـگاه کنید. کاملاً قابل تشـخیص که در بـازهٔ زمانی t_1 تـا t_2 جابه‌جایی‌ها به‌صورت $\Delta x_A > \Delta x_B > \Delta x_C$ اسـت و رابطهٔ سـرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta x})$ A و B و C به‌صورت زیر است:

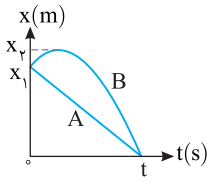
$v_{av_A} > v_{av_B} > v_{av_C}$



A ۱۰۸ ۴

به نمودار نگاه می‌کنیم:

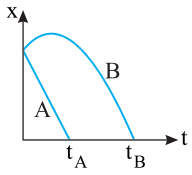
۱ در ابتـدای بـازه $(t=0)$ مـکان هـر دو متحـرک x_1 و در انتهای بـازه (t) مکان صفر است. بنابراین جابه‌جایی در این بازه یکسان و در نتیجه سرعت متوسط A و B با هم برابر است.



۲ مسـافت طی شده توسط A کمتر از مسافت طی شده توسط B است. دقت کنید متحرک B از x_1 به x_2 رفته سپس به مکان $x=0$ می‌رسد. بنابراین تندی متوسط A از تندی متوسط B کمتر است و گزینهٔ (۴) پاسخ تست است.

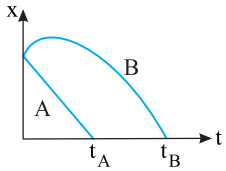
A ۱۰۹ ۴

تندی متوسط به مسیر حرکت و مسافت طی شده بسـتگی دارد. بـا توجه بـه نمـودار جابه‌جایی دو متحـرک یکسـان اسـت اما بـازهٔ زمانـی B از A بزرگ‌تر اسـت و تنها می‌تـوان اظهارنظر کرد که سرعت متوسط B از سرعت متوسط A کوچک‌تر اسـت $(v_{av_B} < v_{av_A})$ اما در مورد تندی متوسـط نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد. زیرا متحرک B دارای مسـافت طی شده بیشـتری، در زمان طولانی‌تری است. به همین دلیل ممکن است تندی متوسط A با تندی متوسط B برابر یا از آن کمتر و یا بیشتر باشد.



A ۱۱۰ ۱

بـا توجـه بـه شـکل، جابه‌جایـی دو متحـرک یکسـان، اما زمـان حرکت متحـرک B از زمان حرکت متحرک A بیشتر است $(t_B > t_A)$ از ایـن‌رو با توجه به تعریف سـرعت متوسـط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ سـرعت متوسط متحرک B از سـرعت متوسـط متحرک A کمتر می‌باشـد و گزینهٔ (۱) درست است.

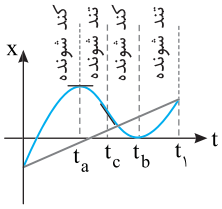


A ۱۱۱ ۴

یادآوری شـیب خط مـماس بر نمودار مکان - زمان برابر سـرعت لحظه‌ای اسـت و شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر سرعت متوسط است.

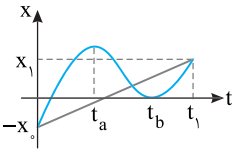
نکته اگر در هر بازهٔ زمانی، چند خط مماس بر نمودار رسـم کنیم و خط مماس به حالت قائم نزدیک شود، حرکت تندشونده و اگر به حالت افقی $(v=0)$ نزدیک شود، حرکت کندشونده است.

۱ از صفر تا t_a شـیب خط مـماس در حال کاهش و سـرعت به سمت صفر می‌رود و حرکت کندشـونده اسـت. از t_a تا t_b ابتدا قدرمطلق شـیب در حال افزایش بوده حرکت تندشـونده و سـپس قدرمطلق شیب در حال کاهش بوده یعنی تندی به سـمت صفر می‌رود و در t_b تندی صفر است. یعنی حرکت کندشونده است و از t_b به بعد شیب در حال افزایش و حرکت تندشونده است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) هر دو نادرست است.



نکته جهت حرکت همان جهت سرعت است.

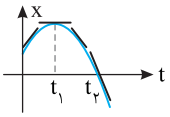
۲ در بـازهٔ ۰ تـا t_a و در بـازهٔ t_b تا t_1 شـیب خط مـماس مثبت و سـرعت و جهت حرکت مثبت و در بازهٔ t_a تا t_b متحرک در جهت منفـی محور در حرکت اسـت. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است.



۳ در بازهٔ ۰ تا t_1 متحرک از مکان منفی $(-x_0)$ به مکان مثبت x_1 می‌رود. بنابراین جابه‌جایی و سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ مثبت بوده و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۱۲ ۴

در هنـگام گذر از مبدأ مکان $(x=0)$ یعنی در لحظهٔ t_2 شیب خط مماس منفی است، پس سرعت منفی می‌باشد و گزینهٔ (۱) درست است. در بیشینه و کمینه نمودار $x-t$ به شرط تغییر علامت سرعت، جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. در این حرکت نیز در t_1 جهت حرکت تغییر کرده است و گزینهٔ (۲) درست است. ابتدا شیب خط مماس در حال کم شدن است تا در لحظهٔ t_1 به صفر می‌رسد پس ابتدا حرکت کندشونده بوده و پس از آن شیب خط در حال زیاد شدن است. (خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود) بنابراین بعد از t_1 حرکت تندشونده می‌شود و گزینهٔ (۳) نیز درست است.



B ۱۱۳ ۳

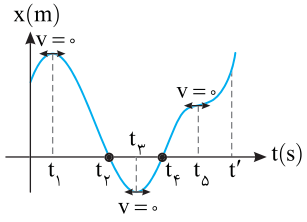
یادآوری ۱ هرگاه خط مماس بر نمودار مکان - زمان موازی محور زمان شـود و شیب آن صفر گردد، متحرک در آن لحظه ساکن است.

یادآوری ۲ هـرگاه نمودار مکان - زمان محـور زمان را قطع کند یعنی متحرک از $x=0$ رد شود، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

یادآوری ۳ برای تغییر جهت متحرک علاوه بر صفر شـدن سرعت باید علامت سرعت قبل و بعد از آن لحظه تغییر کند.

به نمودار نگاه کنید. در سـه لحظهٔ t_1 و t_3 و t_5 مماس بر نمودار موازی محور زمان بوده و در این لحظات سرعت صفر است. یعنی ۳ بار سرعت صفر می‌شود. در لحظهٔ t_2 و t_4 نمودار محور زمان را قطع کرده یعنی متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد. بنابراین ۲ بار بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

در لحظهٔ t_1 و t_3 سرعت صفر شده و در دو طرف این لحظه‌ها علامت سرعت عوض می‌شـود یعنی دو بار متحرک تغییر جهت می‌دهد اما در لحظهٔ t_5 با آنکه سـرعت صفر می‌شود، اما متحرک در جهت مثبت محور به حرکت ادامه می‌دهد و تغییر جهت نداریم.



B ۱۱۴ ۳

۱ شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ t_1 افقی است و شیب آن صفر بوده از این رو در این لحظه سرعت صفر می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

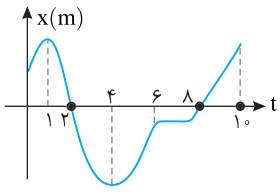
۲ علامت سرعت قبل و بعد از t_1 تغییر کرده پس جهت حرکت در این لحظه تغییر می‌کند و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ دقت کنید در این لحظه متحرک به مبدأ مکان می‌رسد. نمودار محور زمان را قطع نمی‌کند یعنی متحرک از مبدأ نمی‌گذرد و بعد از t_1 و قبل از t_1 مکان متحرک مثبت است. بنابراین علامت مکان تغییر نمی‌کند. پس بردار مکان تغییر جهت نداده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

۴ قبل از t_1 شیب خط مماس کم می‌شود تا در t_1 صفر شود. پس قبل از t_1 حرکت کندشونده بوده و بعد از t_1 شیب خط مماس زیاد می‌شود یعنی حرکت تندشونده شده است. پس در t_1 نوع حرکت تغییر کرده است و گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۱۵ ۱

نکته هرگاه نمودار بالای محور زمان باشد، یعنی $x>0$ باشد، مکان متحرک مثبت و هرگاه نمودار پایین محور زمان قرار داشته باشد یعنی $(x<0)$ و مکان متحرک منفی است.



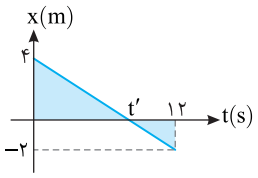
۱ در بازهٔ ۰ تا ۱s متحرک در جهت مثبت محور و از ۱s تا ۴s در خلاف جهت محور، از ۴s تا ۶s در جهت مثبت محور و از ۶s به بعد تا مدتی متحرک ساکن و در آخر در جهت مثبت محور در حرکت است، بنابراین کل مدتی که متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، $4-1=3s$ است.

۲ در بازهٔ ۲s تا ۸s نمودار پایین محور زمان بوده و بردار مکان متحرک منفی است. بنابراین در مدت $8-2=6s$ بردار مکان خلاف جهت محور xهاست.

۳ نسبت دو بازهٔ بیان شده خواهد شد: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

A ۱۱۶ ۱

خط فکری جهت حرکت را علامت سرعت مشخص می‌کند. اگر سرعت مثبت باشد متحرک در جهت مثبت محور x ها در حال حرکت است و اگر سرعت منفی باشد متحرک در جهت منفی محور x ها در حال حرکت است. بنابراین شما باید از روی نمودار علامت سرعت را مشخص کنید و برای مشخص شدن بردار مکان‌های مثبت و منفی، باید مشخص کنید در چه بازه‌ای نمودار بالای محور زمان و در چه بازه‌ای نمودار پایین محور زمان است، یعنی شما باید t' را به‌دست بیاورید.



۱ در تمام مدت ۱۲s متحرک در جهت منفی محور با تندی ثابت از مکان $+4m$ به مکان $-2m$ می‌رود.

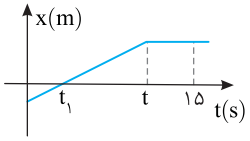
۲ t' را به کمک نوشتن شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{4-(-2)}{12-0}=\frac{4-0}{t'-0}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{4}{t'}\Rightarrow t'=8s$$

۳ در بازهٔ ۸s تا ۱۲s نمودار زیر محور زمان بوده و مکان متحرک به مدت $12-8=4s$ منفی است.

A ۱۱۷ ۱

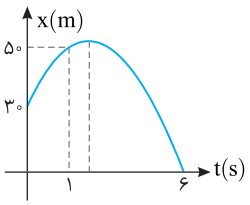
در مدت ۱۵s متحرک ابتدا تا لحظهٔ t در یک جهت در حرکت بوده است و جابه‌جایی و مسافت با هم برابر است و از t تا ۱۵s، جسم ساکن است. بنابراین در مدت ۱۵s جابه‌جایی با مسافت برابر است و گزینهٔ (۱) درست است.



در بازهٔ صفر تا t_1 متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ و سپس تا لحظهٔ t در حال دور شدن از مبدأ است و بعد از t ساکن است و گزینهٔ (۲) نادرست است. در بازهٔ صفر تا t متحرک در جهت مثبت حرکت می‌کند و تغییر جهت نمی‌دهد، یعنی سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

C ۱۱۸ ۱

خط فکری وقتی نمودار سهمی است، باید معادلهٔ مکان - زمان تابع درجه ۲ شبیه $x=at^2+bt+c$ باشد و مختصات نقاط روی نمودار باید در معادله صدق کند. با توجه به این مطلب با یک مسئلهٔ ریاضی سروکار دارید و باید معادله را به‌دست بیاورید.



مختصات نقاط $(t=0, x_0=30m)$، $(t=1s, x=50m)$ و $(t=6s, x=0)$ را در معادلهٔ $x=at^2+bt+c$ جای‌گذاری می‌کنیم.

نمودار سهمی می‌باشد پس معادلهٔ حرکت به صورت $x=at^2+bt+c$ می‌باشد.

$$\begin{cases}t=0\\x=30m\end{cases}\Rightarrow 30=a(0)^2+b(0)+c\Rightarrow 30=c$$

$$\begin{cases}t=1s\\x=50m\end{cases}\Rightarrow 50=a(1)^2+b(1)+30\Rightarrow 20=a+b\ \ (I)$$

$$\begin{cases}t=6s\\x=0\end{cases}\Rightarrow 0=a(6)^2+b(6)+30\Rightarrow -30=36a+6b\ (II)$$

از حل دو معادلهٔ (I) و (II) مقدار a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$(I),(II)\begin{cases}(a+b=20)\times -6\\36a+6b=-30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6a-6b=-120\\36a+6b=-30\end{cases}+$$

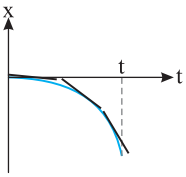
$$30a=-150\Rightarrow a=-5\Rightarrow b=25$$

در رأس سهمی شیب خط مماس یعنی تندی صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد.

بنابراین مختصات رأس را حساب می‌کنیم. $t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow t=\frac{-25}{-10}=2/5s$

A ۱۱۹ ۴

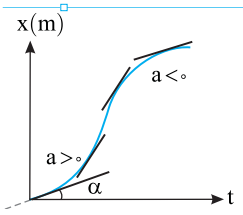
با توجه به شکل روبه‌رو در لحظهٔ $t=0$ نمودار مکان - زمان بر محور زمان مماس بوده و شیب خط مماس یعنی سرعت لحظه‌ای، صفر است و گزینهٔ (۱) درست است. اگر به مماس‌های رسم شده دقت کنید قدرمطلق شیب خط مماس در حال افزایش است، یعنی تندی در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۲) درست است



از شروع حرکت، متحرک از مبدأ در جهت منفی محور و در حال دور شدن از مبدأ است بنابراین گزینهٔ (۳) نیز درست است و پاسخ گزینهٔ (۴) است.

A ۱۲۰ ۱

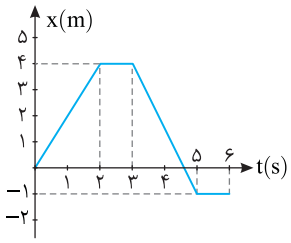
۱ با توجه به شکل روبه‌رو خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=0$ با محور زمان زاویهٔ α می‌سازد یعنی شیب خط مماس بر نمودار صفر نبوده بنابراین سرعت اولیه مخالف صفر بوده و متحرک دارای سرعت اولیه است $(v_0=\tan\alpha)$.



۲ بار رسم چند خط مماس مشخص است که ابتدا شیب خط مماس در حال افزایش بوده تندی در حال افزایش و حرکت تندشونده و سپس شیب خط مماس در حال کاهش بوده یعنی تندی در حال کاهش و حرکت کندشونده است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست و گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) نادرست است.

B ۲ ۱۲۱

۱ متحرک در بازهٔ صفر تا ۲s، چهار متر مسافت طی می‌کند، در بازهٔ ۲s تا ۳s ساکن بوده و در بازهٔ ۳s تا ۵s از مکان ۴m به مکان ۱m− رفته و مسافت ۵m را می‌پیماید و از لحظهٔ t=۵s به بعد ساکن می‌ماند. بنابراین مسافت طی شده از صفر تا ۶s جمعاً l=۴+۵=۹m است و تندی متوسط برابر است با:



$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۹}{۶}=۱/۵m/s$$

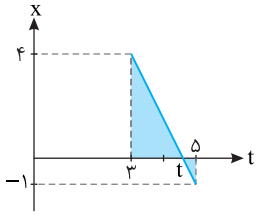
بنابراین گزارهٔ (الف) درست است.

۲ در بازهٔ ۰ تا ۶s متحرک از مکان x=۰ به مکان x=۱m− می‌رود و بردار جابه‌جایی برابر $\vec{d}=-\vec{i}$ است و از این رو سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۶s خواهد شد:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\frac{-\vec{i}}{۶}=-\frac{۱}{۶}\vec{i}$$

بنابراین گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ لحظه‌ای که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد لحظه‌ای است که متحرک از مبدأ مکان (x=۰) می‌گذرد و نمودار محور زمان را قطع می‌کند. برای به دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت از تشابه مثلث استفاده می‌کنیم. دو مثلث رنگی متشابه است، نسبت تشابه را برای دو مثلث می‌نویسیم:



$$\frac{t-۳}{۵-t}=\frac{۴}{۱}\Rightarrow t-۳=۲۰-۴t\Rightarrow ۵t=۲۳\Rightarrow t=۴/۶s$$

بنابراین گزارهٔ (پ) درست است.

۴ متحرک از لحظهٔ ۳s تا لحظهٔ ۵s یعنی به مدت ۲s در خلاف جهت محور در حرکت است و گزارهٔ (ت) درست است.

B ۳ ۱۲۲

خط فکری در فیزیک دبیرستان خبری از زمان منفی نیست و همواره t>۰ است. از طرفی بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان (x=۰) بگذرد. بنابراین در تابع درجهٔ یک باید معادله دارای ریشهٔ مثبت باشد. همچنین در تابع درجهٔ ۲ باید معادله دارای ریشهٔ مثبت بوده در این صورت بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. اما اگر معادلهٔ درجهٔ ۲ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، بردار مکان در آن لحظه تغییر جهت نمی‌دهد.

الف) $x=t+۴\Rightarrow ۰=t+۴\Rightarrow t=-۴s$

ریشه منفی شد و متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

ب) $x=t^۲-۴t+۵=۰\Rightarrow t=\frac{+۴\pm\sqrt{۱۶-۲۰}}{۲}$, $t=\frac{۴\pm\sqrt{-۴}}{۲}$

این معادله ریشه ندارد، یعنی متحرک از مبدأ مکان (x=۰) نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

پ)

$$x=۲t^۲-۴t-۲=۰\Rightarrow t^۲-۲t-۱=۰\Rightarrow t=\frac{۲\pm\sqrt{۴+۴}}{۲}=۱\pm\sqrt{۲}=\begin{cases}۱+\sqrt{۲}>۰\\ ۱-\sqrt{۲}<۰\end{cases}$$

بنابراین متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.

ت) $x=t^۲-۶t+۹=۰\Rightarrow x=(t-۳)^۲$

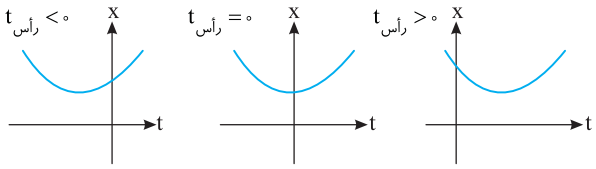
این عبارت همواره مثبت یعنی x تغییر علامت نمی‌دهد. از طرفی این معادله دارای ریشهٔ مضاعف t=۳s و همان‌گونه که گفتیم در ریشهٔ مضاعف بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

بازی با سؤال در چه تعداد از معادله‌های حرکت این مسئله، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **نکته** هرگاه معادلهٔ حرکت درجه اول باشد نمودار مکان - زمان آن یک خط راست مایل است، یعنی متحرک در یک جهت در حال حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

نکته در تابع‌های مکان - زمان درجه ۲، در رأس سهمی متحرک تغییر جهت می‌دهد اگر زمان رأس سهمی مثبت باشد، متحرک تغییر جهت می‌دهد و اگر منفی یا صفر باشد متحرک تغییر جهت نمی‌دهد. (در فیزیک دبیرستان بازهٔ زمانی منفی را در نظر نمی‌گیریم)



الف) $x=t+۴$ تابع درجه اول بوده و متحرک روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

ب) $x=t^۲-۴t+۵\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۴}{۲\times ۱}=۲s>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

پ) $x=۲t^۲-۴t-۲=۰\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=\frac{-۴}{۲\times ۲}=۱>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

ت) $x=t^۲-۶t+۹=۰\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۶}{۲}=۳s>۰$

متحرک تغییر جهت می‌دهد.

گزینهٔ ۱

B ۲ ۱۲۳

یادآوری برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت باید مختصات رأس سهمی $(t=\frac{-b}{۲a})$ را به‌دست آورد. اگر زمان مثبت به‌دست آمد، متحرک (در $t=\frac{-b}{۲a}$) تغییر جهت می‌دهد.

۱ برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت کافی است مختصات رأس سهمی را به‌دست بیاوریم.

$$x=۲t^۲-۴t-۶\xrightarrow{t=\frac{-b}{۲a}}t=-\frac{-۴}{۲\times ۲}\Rightarrow t=۱s$$

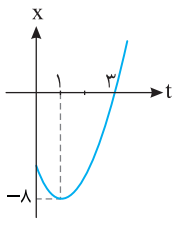
۲ مکان لحظهٔ تغییر جهت را با قرار دادن t=۱s در معادلهٔ حرکت به‌دست می‌آوریم.

$$x=۲(۱)^۲-۴(۱)-۶=۲-۴-۶\Rightarrow x=-۸m$$

۳ برای به‌دست آوردن لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان، در معادلهٔ حرکت x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x=۲t^۲-۴t-۶=۰\Rightarrow t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow t=۳s$$

۴ بنابراین در لحظهٔ t=۱s متحرک در مکان x=۰ و در لحظهٔ t=۳s متحرک در مکان ۸m− بوده و در این بازهٔ زمانی ۸m+ جابه‌جا می‌شود.



B ۱۲۴ ۲

خط فکری باید نمودار $x-t$ را رسم کنید، تا مشخص شود آیا نمودار محور زمان را قطع می‌کند یا نه، زیرا اگر محور زمان را قطع کند، کمترین فاصله از مبدأ مکان صفر می‌شود. اما اگر محور زمان را قطع نکند باید به کمک نمودار کمترین فاصله تا مبدأ مکان را مشخص کرد.

۱ مقدار $\Delta=b^2-4ac$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=t^2-6t+10\Rightarrow\Delta=(-6)^2-4\times10\Rightarrow\Delta=36-40=-4<0$$

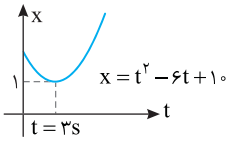
بنابراین این معادله ریشه ندارد.

۲ مختصات رأس سهمی این معادله را حساب می‌کنیم.

$$t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t=-\frac{-6}{2}\Rightarrow t=3s$$

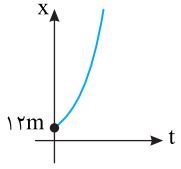
$$x=t^2-6t+10\xrightarrow{t=3s}x=3^2-6\times3+10\Rightarrow x=+1m$$

۳ بنابراین شکل نمودار می‌تواند به شکل روبه‌رو باشد و کمترین فاصله از مبدأ زمان در لحظهٔ $t=3s$ بوده و برابر $x=1m$ است.



B ۱۲۵ ۱

معادلهٔ حرکت به صورت $x=(t+3)(t+4)$ می‌باشد، هر دو ریشهٔ این معادله منفی است و می‌دانیم که زمان نمی‌تواند منفی باشد، پس نمودار $x-t$ تقریباً مشابه شکل مقابل بوده و بالای محور زمان قرار می‌گیرد. از این رو کمترین فاصله از مبدأ در $t=0$ رخ می‌دهد.



B ۱۲۶ ۱

خط فکری ابتدا بررسی کنید که در بازهٔ زمانی داده شده، متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه؟ برای این منظور باید به سراغ مختصات رأس سهمی $t=-\frac{b}{2a}$ بروید.

رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم. $x=2t^2+4t-8\xrightarrow{\text{رأس سهمی}}t=-\frac{4}{2\times2}=-1<0$

بنابراین این متحرک تغییر جهت نداده و همواره در یک جهت روی محور xها در حرکت است و مسافت طی شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است.

B ۱۲۷ ۲

خط فکری باید مختصات رأس سهمی $(t=-\frac{b}{2a})$ را به‌دست بیاورید تا مشخص شود لحظهٔ تغییر جهت در بازهٔ زمانی ارائه شده در مسئله قرار دارد یا نه؟ اگر لحظهٔ تغییر جهت در بازهٔ بیان شده نبود یعنی متحرک در آن بازهٔ زمانی در یک جهت در حرکت است بنابراین مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی و در نتیجه تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط با هم برابر است.

مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم. $t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t=-\frac{-1}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2}s$

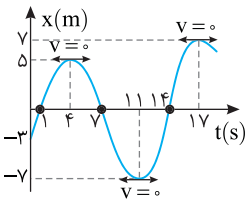
این عدد بین بازهٔ $1s$ تا $4s$ قرار ندارد. یعنی متحرک در این بازهٔ زمانی همواره در یک جهت در حال حرکت بوده و مسافت طی شده با اندازهٔ جابه‌جایی در آن بازه برابر $(\ell=|\vec{d}|)$ است، در نتیجه تندی متوسط $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ با اندازهٔ سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{d}{t})$ برابر است.

B ۱۲۸ ۲

برای آنکه در تمام بازه‌های زمانی اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت با هم برابر باشند، باید متحرک در یک جهت در حال حرکت باشد یعنی متحرک تغییر جهت ندهد. برای آنکه متحرک تغییر جهت ندهد باید $t=-\frac{b}{2a}$ یعنی زمان رأس سهمی منفی شود، بنابراین باید a و b هم‌علامت باشند، در این صورت $ab>0$ خواهد بود.

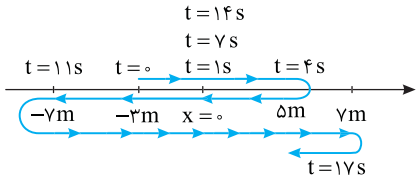
A ۱۲۹ ۲

۱ در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان تندی صفر می‌شود. بنابراین در لحظهٔ $t=4s$ و $t=11s$ و $t=17s$ تندی متحرک صفر شده و سوی حرکت آن تغییر کرده است. بنابراین گزاره (الف) درست است.



۲ هرگاه متحرک از مبدأ مکان بگذرد، جهت بردار مکان در آن لحظه تغییر می‌کند. در $t=1s$ ، $t=7s$ و $t=14s$ متحرک از مبدأ گذر کرده است بنابراین سه بار بردار مکان تغییر جهت داده است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ با توجه به نمودار، مسیر حرکت متحرک در بازهٔ صفر تا $17s$ به شکل زیر است.



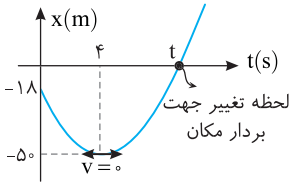
مطابق شکل مسیر، از $t=0$ تا $t=4s$ متحرک در جهت مثبت محور از مکان $-3m$ به مکان $+5m$ می‌رود سپس در بازهٔ $t=4s$ تا $t=11s$ از مکان $+5m$ تا مکان $-7m$ در جهت منفی محور در حرکت است و سرانجام در بازهٔ $t=11s$ تا $t=17s$ یعنی به مدت $6s$ در جهت مثبت محور از مکان $-7m$ به مکان $+7m$ می‌رود یعنی ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود.

در این صورت جمعاً $10s$ در جهت مثبت محور در حرکت بوده است و گزارهٔ (پ) درست است.

۴ متحرک در بازهٔ $t=11s$ تا $t=14s$ در حال نزدیک شدن به مبدأ است و گزارهٔ (ت) نادرست است.

C ۱۳۰ ۱

خط فکری چاره‌ای نیست باید معادلهٔ حرکت را به کمک نقاط مشخص شده روی نمودار به‌دست آورده سپس به کمک آن لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان (t) را به‌دست آورد.



۱ شکل نمودار به صورت سهمی است یعنی $x=at^2+bt+c$. مختصات هر نقطه از نمودار باید در معادله صدق کند از این رو:

$$\begin{cases}t=0\\x=-18m\end{cases}\Rightarrow x=a(0)^2+b(0)+c\Rightarrow-18=c$$

$$\begin{cases}t=4\\x=-50m\end{cases}\Rightarrow-50=a(4)^2+b(4)-18\Rightarrow-50=16a+4b-18$$

$$\Rightarrow-32=16a+4b\quad(1)$$

۲ نقطهٔ $t=4s$ رأس سهمی می‌باشد و می‌دانیم رأس سهمی $t=-\frac{b}{2a}$ است.

پس: $t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow4=-\frac{b}{2a}\Rightarrow b=-8a\quad(2)$

۳ به کمک رابطهٔ (۱) و (۲) مقدار a و b را حساب می‌کنیم.

$$(1),\ (2)\Rightarrow16a+4(-8a)=-32\Rightarrow-16a=-32\Rightarrow a=2\ ,\ b=-16$$

۴ پس معادله حرکت به صورت $x=2t^2-16t-18$ است. زمانی بردار مکان تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ عبور می‌کند:

$$2t^2-16t-18=0\Rightarrow t^2-8t-9=0\Rightarrow(t-9)(t+1)=0$$

$$\Rightarrow t=9s\ ,\ t=-1s\ (\text{غ.ق.ق})$$

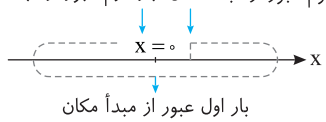
بنابراین در $t=9s$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. زمانی متحرک تغییر جهت می‌دهد که سرعت متحرک صفر شود و علامت سرعت قبل و بعد از آن تغییر کند که همان رأس سهمی می‌باشد. $\Delta t=t_2-t_1=9-4=5s$

B ۱۳۱ ۳

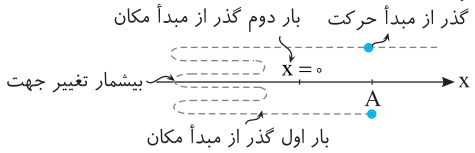
مسیرهای ممکنی که ذره طی می‌کند را بررسی می‌کنیم.

متحرک در مکان‌های مثبت قرار دارد و دو حالت ممکن است پیش بیاید.

۱ متحرک در جهت مثبت شروع به حرکت کند، در این صورت برای آنکه از مبدأ مکان بگذرد باید متوقف شده و برگردد و پس از عبور از مبدأ باید مجدداً متوقف شده و برگردد و برای دومین بار از مبدأ بگذرد، بنابراین حداقل دو بار از مبدأ حرکت می‌گذرد. اما چند بار تغییر جهت می‌دهد. ذره می‌تواند بیشمار بار تغییر جهت داده سپس از مبدأ مکان بگذرد.

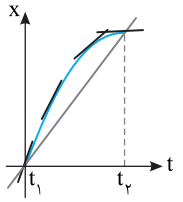


۲ متحرک در جهت منفی محور شروع به حرکت کند در این صورت مطابق شکل می‌تواند بیشمار بار تغییر جهت دهد و دو بار از مبدأ مکان بگذرد اما هنوز از مبدأ حرکت خود عبور نکرده باشد.

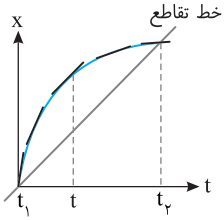


C ۱۳۲ ۴

خط فکری شیب خط قاطع نمودار بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر سرعت متوسط و شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه برابر اندازهٔ سرعت لحظه‌ای (تندی لحظه‌ای) در آن لحظه است. بنابراین شما باید خط قاطع بین t_1 و t_2 و چند خط مماس بر نمودار از لحظهٔ t_1 تا t_2 رسم کرده شیب خطوط مماس را با شیب خط قاطع مقایسه کنید تا متوجه شوید کدام بزرگ‌تر است و گزینه را انتخاب کنید.



به‌شکل خوب نگاه کنید. در ابتدا شیب خطوط مماس از شیب خط قاطع بیشتر است یعنی سرعت لحظه‌ای از سرعت متوسط بزرگ‌تر است. بعد از لحظهٔ t خط مماس به سمت افقی شدن می‌رود و شیب آن از شیب خط قاطع کمتر می‌شود یعنی سرعت لحظه‌ای از سرعت متوسط کوچک‌تر می‌شود.



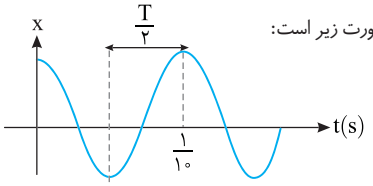
B ۱۳۳ ۱

خط فکری در حل این مسئله چاره‌ای نیست و باید شما رسم توابع مثلثاتی را که از ریاضی فراگرفته‌اید به‌کار ببرید و نقاط بیشینه و کمینهٔ نمودار را مشخص کنید. زیرا در این نقاط سرعت متحرک صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد و تعیین بازه‌های زمانی بین یک کمینه و بیشینهٔ متوالی یعنی حل مسئله.

یادداشت ریاضی در توابع سینوسی و کسینوسی به‌صورت $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است.

دورهٔ تناوب تابع $x=0/4\cos 20\pi t$ خواهد شد: $T=\frac{2\pi}{20\pi}=\frac{1}{10}s$

نمودار تابع به‌صورت زیر است:



بنابراین بازهٔ زمانی بین دو تغییر جهت متوالی خواهد شد:

$\frac{T}{2}=\frac{\frac{1}{10}}{2}=\frac{1}{20}s\Rightarrow T=0/05s$

A ۱۳۴ ۳

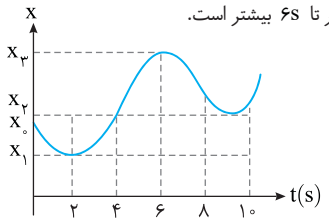
خط فکری تندی متوسط یعنی مقدار مسافت طی شده تقسیم بر مدت زمان طی کردن آن مسافت، بنابراین شما باید در هر بازه زمانی مسافت طی شده را بررسی کرده تا بتوانید تندی متوسط را در بازه‌های مختلف مقایسه کنید.

با توجه به نمودار مسافت طی شده در بازهٔ ۲s تا ۴s از مسافت طی شده در بازه صفر تا ۲s بیشتر است و هم‌چنین در بازهٔ ۴s تا ۶s مسافت طی شده از بازهٔ صفر تا ۲s بیشتر است. یعنی در هر دو ثانیه (از ۲ تا ۶) مسافت طی شده بزرگ‌تر از بازهٔ صفر تا ۲s است بنابراین تندی متوسط در بازهٔ ۲s تا ۶s از ۰ تا ۲s بیشتر می‌شود.

در مدت ۴s بین ۲s تا ۶s مسافت طی شده از مدت ۴s بین ۶s تا ۱۰s بیشتر است و تندی در بازهٔ ۲s تا ۶s از تندی در ۶s تا ۱۰s بیشتر است. اگر بازه بین ۲s تا ۱۰s را به دو قسمت ۴s تقسیم کنیم در ۴s اول تندی از ۴s دوم بیشتر است بنابراین تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s قطعاً از ۶s تا ۱۰s بیشتر است.

اما داستان اصلی در مورد بازهٔ صفر تا ۶s و مقایسهٔ آن با ۲s تا ۱۰s است.

بازهٔ ۲s تا ۶s در هر دو مشترک است. اگر بازهٔ ۶s تا ۱۰s را به دو بازهٔ دو ثانیه‌ای ۶ تا ۸ و ۸ تا ۱۰ تقسیم کنیم در هر دو بازه مسافت طی شده با توجه به نمودار از مسافت طی شده در بازه ۰ تا ۲s بیشتر بوده بنابراین در بازه ۶s تا ۸s و ۸s تا ۱۰s تندی از بازهٔ ۰ تا ۲s بیشتر است در نتیجه به‌طور کلی تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s از تندی متوسط در بازهٔ صفر تا ۶s بیشتر است.



B ۱۳۵ ۴

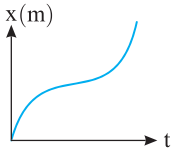
از نمودار مسافت - زمان چیز زیادی به‌دست نمی‌آوریم

۱ مسافت همواره مثبت است بنابراین متحرک می‌تواند از مکان‌های منفی یا مثبت و یا از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده باشد.

۲ متحرک ممکن است متوقف شده و در همان جهت ادامهٔ حرکت داده و یا متوقف شده و تغییر جهت دهد.

۳ متحرک ممکن است در جهت مثبت محور و در مکان‌های مثبت و در مکان‌های منفی دارای جابه‌جایی‌ها مثبت یا منفی باشد.

بنابراین هر سه گزینه می‌تواند پاسخ مسئله باشد.



پنجره ۱ روبه‌روی ۲

B ۱۳۵ ۴

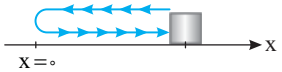
۱ بردار مکان متحرک برابر است با برداری که مبدأ مکان را به مکان جسم وصل می‌کند. مکان جسم را در لحظهٔ $t=3s$ به‌دست می‌آوریم:



$x=t^2-4t+4\Rightarrow x(3)=3^2-4(3)+4=+1\Rightarrow \vec{x}=\vec{i}$

۲ بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ $x=0$ بگذرد و مکان تغییر علامت دهد: $x=t^2-4t+4\Rightarrow 0=t^2-4t+4\Rightarrow (t-2)^2\geq 0\Rightarrow t=2s$

$(t-2)^2$ یک عبارت همیشه مثبت است، یعنی مکان هرگز تغییر علامت نمی‌دهد. در لحظهٔ $t=2s$ مکان متحرک صفر می‌شود، اما متحرک از مبدأ مکان نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.



نمای ع

۳ ۱۳۵ A

۲ مکان متحرک در لحظهٔ $t=0$ (مکان اولیهٔ متحرک) خواهد شد:

$$x=at^2+bt+2 \xrightarrow{t=0} x_0=+2m$$

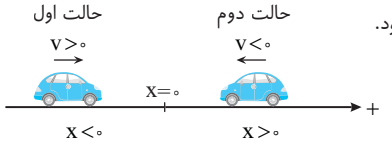
لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظهٔ گذر از مبدأ مکان $(x=0)$ بنابراین متحرک از مکان $+2m$ به $x=0$ می‌رود و جابه‌جایی آن $-2m$ است. نمای ۹

۲ ۱۳۵ A

۳ وقتی متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است دو حالت دارد.

حالت اول: سرعت متحرک مثبت و مکان آن منفی باشد یعنی متحرک از مکان‌های منفی $(x<0)$ در جهت مثبت محور در حال حرکت باشد. $(v>0)$ بنابراین حاصل‌ضرب $xv<0$ می‌شود.

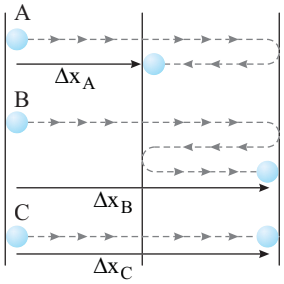
حالت دوم: سرعت متحرک منفی و مکان آن مثبت باشد یعنی متحرک از مکان‌های مثبت $(x>0)$ در جهت منفی محور در حال حرکت باشد $(v<0)$ در این صورت نیز $xv<0$ می‌شود.



نمای ۶

۲ ۱۳۵ A

۴ بازهٔ زمانی برای هر سه متحرک یکسان است $(\Delta t_A=\Delta t_B=\Delta t_C=\Delta t)$.



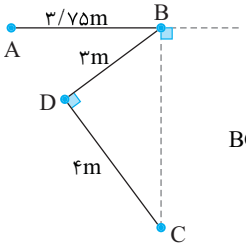
در این مدت متحرک B بیشترین مسافت را طی کرده بنابراین تندی متحرک B $(s_{av}=\ell/\Delta t)$ از بقیه بیشتر است.

جابه‌جایی متحرک B و C یکسان اما جابه‌جایی متحرک A کمتر از آن‌هاست بنابراین متحرک A دارای کمینه سرعت متوسط $(v_{av}=\Delta x/\Delta t)$ است. نمای ۲ و ۳

۳ ۱۳۵ B

۵ برای یافتن سرعت متوسط باید جابه‌جایی متحرک از A تا B را حساب کنیم.

۱ طول BC را به‌دست می‌آوریم.



$$BC^2=BD^2+DC^2 \Rightarrow BC=\sqrt{3^2+4^2}=5m$$

۲ فاصلهٔ AC را حساب می‌کنیم.

$$AC^2=AB^2+BC^2 \Rightarrow AC^2=(3/75)^2+5^2$$

$$AC^2=5^2(0/75^2+1^2)=5^2((\frac{3}{4})^2+1^2)$$

$$AC^2=5^2(\frac{9+16}{16}) \Rightarrow AC=\frac{5\times5}{4} \Rightarrow AC=6/25m$$

۳ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av}=\frac{6/25}{5} \Rightarrow v_{av}=1/25\frac{m}{s}$$

نمای ۲ و ۳

۱ ۱۳۵ A

۶ متحرک ابتدا از مکان 5m به مکان 3m رفته و مسافت $\ell_1=2m$ را طی کرده سپس از مکان 3m به مکان 7m $(\ell_2=4m)$ و از مکان 7m به مکان 5m $(\ell_3=2m)$ و سرانجام از مکان 5m به مکان 10m $(\ell_4=5m)$ می‌رود و مسافت طی شده در این مدت خواهد شد.

$$\ell=\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4=2+4+2+5 \Rightarrow \ell=13m$$

تندی متوسط در این مدت خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t} \Rightarrow s_{av}=\frac{13}{20} \Rightarrow s_{av}=0/65\frac{m}{s}$$

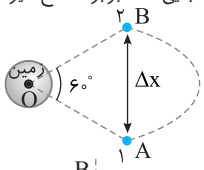
نمای ۶

۲ ۱۳۵ A

۷ ۱ زاویهٔ بین دو موقعیت ماه 60° است. یعنی ماه در این مدت مسافتی برابر $\frac{1}{6}$ محیط دایره طی می‌کند.

$$\ell=\frac{1}{6}(2\pi r) \Rightarrow \ell=\frac{\pi r}{3}$$

۲ مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است بنابراین جابه‌جایی AB برابر شعاع دایرهٔ مسیر حرکت ماه است.



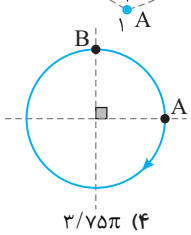
$$\Delta x=r$$

۳ نسبت را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\ell}{\Delta x}=\frac{\frac{\pi r}{3}}{r}=\frac{\pi}{3}$$

نمای ۱

بازی با سوال متحرکی مطابق شکل روی مسیر دایره شکلی به شعاع 30m در مدت 3s در جهت ساعتگرد از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. تندی متوسط متحرک از A تا B چند متر بر ثانیه است؟



۱) 5π ۲) 15π ۳) 10π ۴) $3/75\pi$

پاسخ از A تا B در جهت ساعتگرد $\frac{3}{4}$ دایره طی شده پس مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=\frac{3}{4}(2\pi r) \Rightarrow \ell=\frac{3}{4}\times(2\pi\times30)=45\pi\ m$$

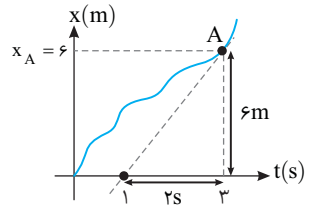
تندی متوسط خواهد شد.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{45\pi}{3}=15\pi\ m/s$$

گزینهٔ ۲

۲ ۱۳۵ B

۸ ابتدا با توجه به سرعت متوسط از لحظهٔ $t=0$ تا $t=3s$ مکان متحرک را در $t=3s$ به‌دست می‌آوریم:



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 2=\frac{x_A-0}{3}$$

$$\Rightarrow x_A=6m$$

سرعت در نقطهٔ A برابر شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A می‌باشد.

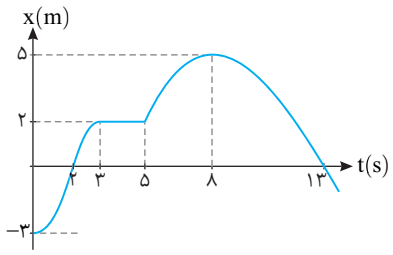
$$v=\frac{6-0}{3-1}=3m/s$$

نمای ۶

۴ ۱۳۵ B

۹ در لحظهٔ $t=2s$ متحرک دارای سرعت است، زیرا شیب خط مماس در این نقطه موازی محور زمان نیست و گزینهٔ (۱) نادرست است.

متحرک در بازهٔ 3s تا 5s ساکن است اما تغییر جهت نمی‌دهد و تنها در لحظهٔ $t=8s$ یعنی یک‌بار تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.



متحرک از ابتدا $t=0$ تا $t=3s$ در جهت مثبت محور در حال حرکت بوده و در بازهٔ 3s تا 5s ساکن و مجدداً در بازهٔ 5s تا 8s در جهت مثبت حرکت می‌کند یعنی جمعاً 6s در حال حرکت در جهت مثبت محور است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

متحرک در بازهٔ ۰ تا 2s از مکان $-3m$ به مکان $x=0$ می‌رود و در بازهٔ 8s تا 13s نیز از مکان $x=5$ به سوی $x=0$ می‌رود یعنی جمعاً 7s در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

نمای ۵ و ۸

۴ ۱۳۵ B

خط فکری ۱۰ سرعت متوسط در مدت ۵s برابر ۲m/s است، بنابراین شما می‌توانید جابه‌جایی متحرک در این مدت را بیابید. سپس به کمک تندی متوسط، مسافت طی شده را حساب کنید تا بتوانید بیشترین فاصله متحرک از مبدأ در مدت ۵s را به‌دست بیاورید.

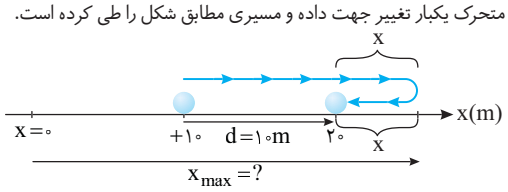
۱ جابه‌جایی را به‌دست می‌آوریم. $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{\Delta x}{۵}\Rightarrow \Delta x=۱۰m$

مکان متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ خواهد شد. $\Delta x=x-x_۰\Rightarrow ۱۰=x-۱۰\Rightarrow x=۲۰m$

۲ تندی متوسط $۴\frac{m}{s}$ است. مسافت طی شده را حساب می‌کنیم.

$s_{av}=\frac{\ell}{t}\Rightarrow ۴=\frac{\ell}{۵}\Rightarrow \ell=۲۰m$

۳ متحرک یکبار تغییر جهت داده و مسیری مطابق شکل را طی کرده است.



با توجه به شکل داریم: $\ell=d+x+x\Rightarrow ۰=۱۰+۲x\Rightarrow x=۵m$

۴ بنابراین بیشترین فاصله از مبدأ خواهد شد. $x_{max}=۲۰+۵=۲۵m$

نمای ۳

پنجره ۳

۴ ۱۳۶ A

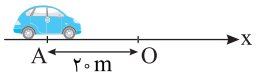
یادآوری حرکت یکنواخت روی خط راست یعنی حرکت با سرعت ثابت که در آن تندی لحظه‌ای ثابت و جهت حرکت تغییر نمی‌کند.

۱ در حرکت یکنواخت تندی ثابت است و جهت حرکت تغییر نمی‌کند و مسافت طی شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی است بنابراین در هر بازهٔ دلخواهی مثلاً ۱s تا ۵s یا ۰s تا ۸s اندازهٔ سرعت متوسط با تندی متوسط برابر و همچنین با اندازه سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای برابر است. $(v_{av}=s_{av}=s)$

۲ جهت حرکت ثابت است اما ممکن است در مسیر حرکت متحرک از مبدأ مکان بگذرد و بردار مکان تغییر جهت دهد بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

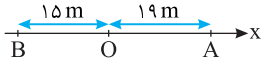
۳ ۱۳۷ A

یادآوری معادلهٔ حرکت یکنواخت روی خط راست به صورت $x=vt+x_۰$ است که در آن v سرعت لحظه‌ای متحرک و $x_۰$ مکان اولیهٔ متحرک یعنی مکان متحرک در مبدأ زمان $(t=۰)$ است.



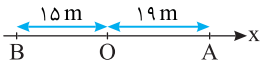
در مبدأ زمان متحرک در نقطهٔ A بوده یعنی مکان اولیهٔ آن $x_۰=-۲۰m$ است. سرعت متحرک در جهت مثبت محور xهاست بنابراین سرعت آن $v=۸m/s$ بوده و معادلهٔ مکان - زمان این متحرک در SI خواهد شد: $x=۸t-۲۰$

بازی با سؤال متحرکی با سرعت ثابت مطابق شکل از نقطهٔ A روی محور xها به حرکت درمی‌آید و پس از ۱۷s به نقطهٔ B می‌رسد. معادله حرکت کدام است؟ (O مبدأ است.) از کتاب درسی



۱) $x=-۲t+۱۹$
۲) $x=۳t-۱۹$
۳) $x=۲t+۱۹$
۴) $x=۵t-۱۵$

پاسخ **خط فکری** در حرکت یکنواخت روی خط راست سرعت در تمام لحظات ثابت است و مقدار آن را از هر بازهٔ زمانی می‌توان حساب کرد بنابراین شما در بازهٔ زمانی حرکت از A تا B می‌توانید سرعت متحرک را حساب کنید.



۱ مکان اولیه متحرک نقطهٔ A یعنی $x_۰=+۱۹m$ است.

۲ سرعت متحرک خواهد شد:

$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t=۱۷s} v=\frac{-۱۵-۱۹}{۱۷-۰}\Rightarrow v=-۲m/s$

۳ معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم: $x=-۲t+۱۹$

گزینهٔ ۱

۲ ۱۳۸ A

خط فکری ذره دارای حرکت با سرعت ثابت بوده و جهت حرکت آن تغییر نمی‌کند. دو راه‌حل برای این مسئله داریم. یکی راه‌حل کلی که در آن اعداد داده شده را در معادلهٔ حرکت $x=vt+x_۰$ قرار می‌دهیم و مقدار v و $x_۰$ را به‌دست آورده و معادله را می‌نویسیم و دیگری استفاده از درک حرکت و گزینه‌ها (راه‌حل دوم).

راه‌حل اول: در معادلهٔ حرکت، زمان‌ها و مکان‌های معادل آن‌ها را قرار می‌دهیم:

$\begin{cases} t=۲s, x=۰ \\ t=۴s, x=-۶m\Rightarrow -۶=۴v+x_۰ \end{cases}\xrightarrow{x=vt+x_۰} ۰=۲v+x_۰\Rightarrow -۶=۲v\Rightarrow v=-۳m/s$

مکان اولیه را به دست می‌آوریم: $۰=۲v+x_۰\Rightarrow ۰=۲(-۳)+x_۰\Rightarrow x_۰=+۶m$

بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد: $x=-۳t+۶$

راه‌حل دوم: متحرک ابتدا به مبدأ و سپس به مکان $-۶m$ رسیده است از این‌رو مکان اولیهٔ آن مثبت اما سرعت آن منفی است و گزینهٔ (۲) این‌گونه است.

۴ ۱۳۹ A

خط فکری مسئلهٔ ساده‌ای است، کافی است داده‌های مسئله را در معادلهٔ حرکت قرار داده سپس با حل یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهول $x_۰$ و v را حساب کرده، معادلهٔ حرکت را نوشته و در آخر با قرار دادن $x=-۳۰m$ در معادله، لحظهٔ گذر متحرک از مکان $x=-۳۰m$ را به‌دست بیاوریم.

معادلهٔ حرکت را به دست می‌آوریم:

$x=vt+x_۰\Rightarrow \begin{cases} t_۱=۲s\Rightarrow -۶=۲v+x_۰ \\ t_۲=۸s\Rightarrow ۵۴=۸v+x_۰ \end{cases}$

$\Rightarrow ۶۰=۶v\Rightarrow v=۱۰m/s\ ,\ x_۰=-۲۶m\ ,\ x=۱۰t-۲۶$

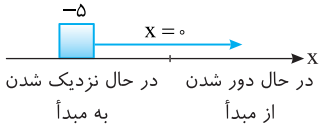
اکنون $x=-۳۰m$ را در رابطه قرار می‌دهیم.

$-۳۰=۱۰t-۲۶\Rightarrow -۴=۱۰t\Rightarrow t=-۰/۴s$

مفهوم زمان منفی این است که متحرک هرگز از مکان $-۳۰m$ نمی‌گذرد.

۳ ۱۴۰ A

۱ به معادلهٔ حرکت نگاه کنید $(x=۲t-۵)$، مکان اولیهٔ متحرک $x_۰=-۵m$ و سرعت متحرک مثبت است و مطابق شکل مسیر، متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.



۲ سرعت متحرک ثابت بوده و برابر ۲m/s است یعنی در هر ثانیه متحرک ۲m جابه‌جا می‌شود و گزینهٔ (۳) درست است.

۳ در لحظهٔ $t=۱s$، مکان متحرک برابر $(x=۲\times ۱-۵=-۳m)$ بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

بازی با سؤال معادلهٔ حرکت متحرکی $x=2t+5$ است. کدام گزینه در مورد حرکت این متحرک درست است؟

۱) سرعت متحرک در لحظهٔ $t=1s$ برابر $2m/s$ می‌باشد.

۲) سرعت متوسط و تندی متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه باهم برابر می‌باشد.

۳) بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

۴) هر سه گزینه درست است.

پاسخ ۱ معادلهٔ حرکت درجه اول است یعنی معادله حرکت مربوط به حرکت با سرعت ثابت می‌باشد و مقدار سرعت با توجه به معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$\begin{cases} x=2t+5 \\ x=vt+v_0 \end{cases} \Rightarrow v=2m/s$$

بنابراین سرعت در هر لحظه برابر $2m/s$ است و گزینهٔ (۱) درست است.

۲ سرعت ثابت و حرکت روی خط راست است بنابراین تندی متوسط و سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه باهم برابر می‌باشد و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند $(x=0)$ غ‌ق‌ق $x=2t+5 \xrightarrow{x=0} 0=2t+5 \Rightarrow t=-2/5$

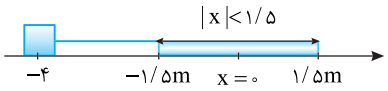
پس بردار مکان تغییر علامت نمی‌دهد. در نتیجه هر سه گزینه درست است.

گزینهٔ ۴

A ۱۴۱ ۲

متحرک با سرعت ثابت $2m/s$ در جهت مثبت محور در حرکت و از مکان $-4m$ می‌گذرد یعنی متحرک ابتدا در مکان‌های منفی بوده و در حال نزدیک شدن به مبدأ است. سؤال شده که چند ثانیه فاصلهٔ متحرک از مبدأ کمتر از $1/5m$ است بنابراین شما باید بازهٔ زمانی حرکت از مکان $-1/5m$ تا $+1/5m$ را حساب کنید.

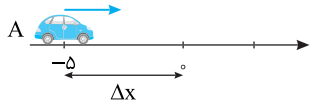
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 2=\frac{1/5-(-1/5)}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=1/5s$$



B ۱۴۲ ۲

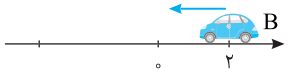
۱ متحرک A از مکان $x=-5m$ در حال نزدیک شدن به مبدأ بوده و در جهت مثبت در حال حرکت می‌باشد و در مدت $3s$ به مبدأ می‌رسد بنابراین سرعت حرکت آن خواهد شد:

$$v_A=v_{av_A}=\frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} \Rightarrow v_A=\frac{5}{3}m/s$$



۲ متحرک B از مکان مثبت و در جهت منفی در حال نزدیک شدن به مبدأ می‌باشد و در مدت $4s$ از مکان $x=+2m$ به مبدأ می‌رسد و سرعت آن خواهد شد:

$$v_B=v_{av_B}=\frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} \Rightarrow v_B=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}m/s$$



۳ نسبت v_A/v_B برابر است با:

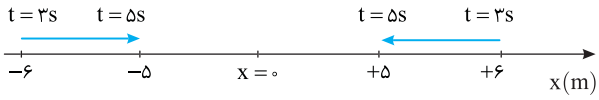
$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{-1}{2}}=-\frac{10}{3}$$

B ۱۴۳ ۴

خط فکری دقت کنید در لحظهٔ $t_1=3s$ و $t_2=5s$ مکان متحرک داده نشده بلکه فاصلهٔ متحرک از مبدأ به ترتیب ۶ متر و ۵ متر است یعنی متحرک ممکن است از مکان $+6m$ به مکان $+5m$ برود و یا از مکان $+6m$ به مکان $-5m$ برود البته متحرک می‌تواند از مکان $-6m$ به مکان $-5m$ و یا حتی به مکان $+5m$ برود. بنابراین همهٔ حالت‌ها باید بررسی شود.

لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظهٔ گذر از مبدأ مختصات.

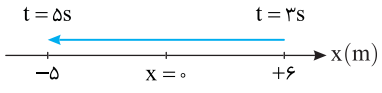
۱ اگر دو نقطه در یک طرف مبدأ مختصات باشند (از $+6m$ به $+5m$ و از $-6m$ به $-5m$) آن‌گاه سرعت ذره برابر خواهد شد با: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{|5-6|}{5-3}=0/5m/s$

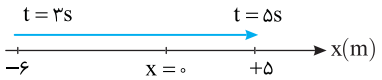


۲ لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظهٔ گذر از $x=0$، بنابراین باید زمان حرکت از مکان $+6m$ (یا $-6m$) با مبدأ با سرعت $0/5m/s$ را حساب کنیم: $\Delta t=\frac{6}{0/5} \Rightarrow \Delta t=12s$

۳ و لحظه گذر از مبدأ برابر $t=12+3=15s$ است.

۴ این بار سرعت متحرک از مکان $+6m$ تا $-5m$ (و یا $-6m$ تا $+5m$) را حساب می‌کنیم. $v=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{|6-(-5)|}{5-3} \Rightarrow v=5/5m/s$





۵ زمان رسیدن از مکان $+6m$ (و یا $-6m$) تا مبدأ با سرعت $5/5m/s$ را به‌دست می‌آوریم. $v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 5/5=\frac{6}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=\frac{12}{11}s$

۶ لحظهٔ رسیدن به مبدأ خواهد شد: $t_2-t_1=\frac{12}{11} \Rightarrow t_2-3=\frac{12}{11} \Rightarrow t_2=\frac{45}{11}s$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

A ۱۴۴ ۳

نکته مدت زمان ثانیهٔ nاُم برابر $1s$ است و بازهٔ آن از لحظهٔ $n-1$ تا لحظهٔ n است. مدت زمان ثانیهٔ پنجم و مدت زمان ثانیهٔ سوم هر دو یک ثانیه است. حرکت با سرعت ثابت است، پس در هر ثانیه جابه‌جایی متحرک مقدار ثابتی است. از این‌رو جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم و ثانیهٔ پنجم یکسان است و نسبت جابه‌جایی‌ها برابر یک است.

A ۱۴۵ ۴

نکته در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی متحرک برابر است. مدت زمان دو ثانیهٔ سوم برابر $2s$ است و جابه‌جایی در این $2s$ با جابه‌جایی در هر دو ثانیهٔ دیگر برابر است. در صورت سؤال گفته شده جابه‌جایی در این مدت نصف جابه‌جایی در مدت n ثانیه است (کلمهٔ پنجم در این مسئله نقشی ندارد) چون سرعت ثابت است بنابراین باید $n=4$ ثانیه باشد تا جابه‌جایی در مدت $2s$ نصف جابه‌جایی در مدت $(n=4)$ باشد.

A ۱۴۶ ۲

۱ حرکت با سرعت ثابت می‌باشد، بنابراین سرعت متوسط در هر بازه برابر سرعت جسم می‌باشد، در مدت $t=3s$ تا $t=19s$ متحرک از $x=25m$ به $x=49m$ منتقل شده است و می‌توان سرعت حرکت را در تمام مسیر به دست آورد.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{49-25}{19-3}=\frac{24}{16} \Rightarrow v=1/5m/s$$

۲ حال در بازهٔ t_1 تا $t_1=3s$ نیز سرعت همان $2m/s$ است و مقدار t_1 قابل محاسبه است:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 1/5=\frac{34-25}{t_1-3} \Rightarrow 9=1/5t_1-4/5 \Rightarrow t_1=9s$$

۳ در بازهٔ $t=3s$ تا $t=17s$ متحرک از مکان $x=25m$ به $x_1=?m$ رسیده بنابراین مجدداً به کمک رابطهٔ سرعت، مقدار x_1 را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 1/5=\frac{x_1-25}{17-3} \Rightarrow x_1=46m$$

۱ ۱۴۷ B

خط فکری مسئلهٔ قشنگی است، در بازهٔ ۷s به بعد سرعت v_2 است یعنی از لحظهٔ $t=8s$ و $t=14s$ سرعت متحرک v_2 است و می‌توانید v_2 را حساب کنید. در بازهٔ $t=7s$ تا $t=8s$ متحرک همین سرعت را دارد و می‌توانید جابه‌جایی متحرک در این ۱s را حساب کنید تا مشخص شود که متحرک در بازهٔ ۲s تا ۷s با سرعت v_1 چند متر جابه‌جا شده و v_1 را به‌دست بیاورید.

t(s)	۲	۸	۱۴
x(m)	۳۰	۵۰	۸۶

۱ سرعت ثابت v_2 را حساب می‌کنیم:

$$v_2=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_2=\frac{86-50}{14-8}\Rightarrow v_2=\frac{36}{6}=6m/s$$

۲ در مدت $t=7s$ تا $t=8s$ متحرک با سرعت $6m/s$، به اندازهٔ $\Delta x=6\times1=6m$ جابه‌جا می‌شود یعنی در لحظهٔ $t=7s$ متحرک در مکان $50-6=44m$ قرار دارد.

۳ سرعت v_1 در بازهٔ ۲s تا ۷s را حساب می‌کنیم. (یادتان باشد سرعت در تمام بازهٔ ۰ تا ۷s ثابت است.)

$$v_1=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_1=\frac{44-30}{7-2}\Rightarrow v_1=\frac{14}{5}=2/8m/s$$

۴ نسبت v_2/v_1 خواهد شد:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{2/8}{6}=\frac{28}{60}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{7}{15}$$

۳ ۱۴۸ A

در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست، مسافت همان اندازهٔ جابه‌جایی است. با توجه به فرض مسئله مسافت (جابه‌جایی) در دو حالت یکسان است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t\xrightarrow{\Delta x_1=\Delta x_2}v_0\times8=(v_0+3)\times5$$

$$\Rightarrow8v_0=5v_0+15\Rightarrow v_0=5m/s$$

بازی با سؤال متحرک A و متحرک B به‌ترتیب با سرعت‌های ثابت ۲۱ و $(v-30)$ متر بر ثانیه جابه‌جایی‌های یکسانی را در مدت t_A و t_B طی می‌کنند، اگر $\frac{t_A}{t_B}=\frac{3}{7}$ باشد v چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۱ ۳) ۳۹ ۴) ۳۷

پاسخ جابه‌جایی دو متحرک یکسان است، بنابراین:

$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow21t_A=(v-30)t_B$$

با توجه به فرض مسئله $\frac{t_A}{t_B}=\frac{3}{7}$ از این‌رو:

$$21\times(\frac{3}{7}t_B)=(v-30)t_B\Rightarrow9=v-30\Rightarrow v=39m/s$$

گزینهٔ ۳

۳ ۱۴۹ A

زمان حرکت با سرعت $80km/h$ و $120km/h$ در جابه‌جایی $150km$ را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}\Delta t_1=\frac{150}{80}\times60=112/5\,min\\ \Delta t_2=\frac{150}{120}\times60=75\,min\end{cases}\Rightarrow112/5-75=37/5\,min$$

بازی با سؤال راننده‌ای که با سرعت $108\,km/h$ حرکت می‌کند، برای یک ثانیه چشم از جاده برمی‌دارد و در آینه نگاه می‌کند. در این یک ثانیه خودروی او چند متر جلوتر رفته است؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۰۸ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۲۰

پاسخ سرعت $108km/h$ را برحسب یکای m/s می‌نویسیم:

$$v=\frac{108km}{h}=108\times\frac{1000m}{3600s}\Rightarrow v=30m/s$$

جابه‌جایی (مسافتی) که متحرک در ۱s طی می‌کند خواهد شد:

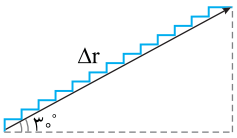
$$\Delta x=v\Delta t=30\times1=30\,m$$

این تست ساده بیان می‌کند که هنگام رانندگی با سرعت $108\,km/h$، در هر ثانیه ۳۰ متر جلو می‌روید و اگر مانعی در ۳۰ متری مقابل شما باشد، با همان سرعت به آن برخورد می‌کنید.

گزینهٔ ۲

۲ ۱۵۰ B

۱ ارتفاع هر طبقه ۶ متر بوده یعنی فاصلهٔ بین دو طبقه $6m$ مطابق شکل است. طول مسیر حرکت (جابه‌جایی) بین دو طبقه را به کمک مثلثات به‌دست می‌آوریم:



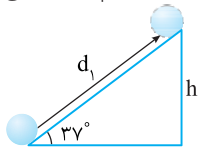
$$\sin30^\circ=\frac{6}{\Delta r}\Rightarrow\Delta r=12m$$

۲ مدت زمان جابه‌جایی ۱۲ متر با سرعت $0/6m/s$ را حساب می‌کنیم:

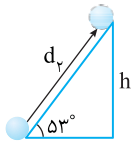
$$\Delta r=v\Delta t\Rightarrow12=0/6\Delta t\Rightarrow\Delta t=20s$$

۳ ۱۵۱ B

۱ این سؤال بیشتر جنبهٔ ریاضی دارد. طول مسیر (جابه‌جایی) جسم روی دو سطح شیب‌دار را به کمک مثلثات به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases}\sin37^\circ=\frac{h}{d_1}\Rightarrow d_1=\frac{h}{\sin37^\circ}\\ \sin53^\circ=\frac{h}{d_2}\Rightarrow d_2=\frac{h}{\sin53^\circ}\end{cases}$$



۲ نسبت $\frac{d_1}{d_2}$ را حساب می‌کنیم:

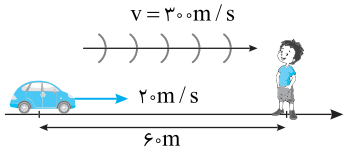
$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{\sin53^\circ}{\sin37^\circ}=\frac{0/8}{0/6}=\frac{4}{3}$$

۳ جابه‌جایی d_1 و d_2 را نوشته و دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\begin{cases}d_1=v_1t_1\\ d_2=v_2t_2\end{cases}\Rightarrow\frac{d_1}{d_2}=\frac{5t}{v\frac{t}{2}}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{10}{v}\Rightarrow v=7/5m/s$$

۳ ۱۵۲ B

خط فکری سرعت صوت $300m/s$ است، زمانی که طول می‌کشد تا صدای بوق به دانش‌آموز برسد را به‌دست بیاورید سپس مشخص کنید در این مدت خودرو با سرعت $72km/h=20m/s$ چند متر جلو رفته و در چه فاصله‌ای از دانش‌آموز قرار می‌گیرد.



۱ ابتدا زمان رسیدن صدای بوق به دانش‌آموز را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow60=300\,\Delta t\Rightarrow\Delta t=0/2s$$

۲ حال باید مشخص کرد در این مدت خودرو چند متر جلو آمده است.

$$v=72km/h=20m/s\ ,\ \Delta x=v\Delta t\Rightarrow\Delta x=20\times0/2=4m$$

۳ بنابراین خودرو در این لحظه در فاصلهٔ $60-4=56m$ دانش‌آموز است.

B ۱۵۳ ۲

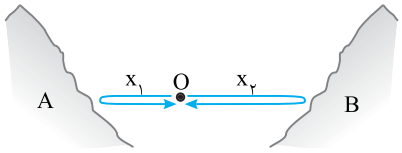
یکی از نمونه‌های طبیعی حرکت یکنواخت روی خط راست با سرعت ثابت انتشار صوت در یک محیط در یک امتداد و روی خط راست است.

۱ دقت کنید صدا از منبع O به کوه نزدیک (نقطهٔ A) رفته و از روی آن باز می‌گردد. بنابراین مسافتی که صوت در این رفت و برگشت طی می‌کند $2x_1$ است:

$$l_1 = vt \Rightarrow 2x_1 = v_{صوت} t_1 \quad (1)$$

۲ صوت از O تا B می‌رود و صدای پژواک دوم شنیده می‌شود و در این مسیر مسافت طی شده $2x_2$ بوده و خواهیم داشت:

$$l_2 = vt \Rightarrow 2x_2 = v_{صوت} t_2 \quad (2)$$



۳ با توجه به فرض مسئله $t_2 - t_1 = 3s$ و سرعت صوت $340 m/s$ است، بنابراین رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم کرده و مسئله را حل می‌کنیم:

$$2x_2 - 2x_1 = v(t_2 - t_1) \Rightarrow 2(x_2 - x_1) = 340 \times 3$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = 1/5 \times 340 m$$

بنابراین اختلاف فاصلهٔ O از A تا B، برابر $1/5 \times 340 m$ است.

B ۱۵۴ ۲

خط فکری هر گاه در یک مسئله دربارهٔ دو متحرک از شما سؤال شود که دو متحرک در چه لحظه‌ای و یا در چه مکانی از کنار هم می‌گذرد شما باید معادلهٔ مکان - زمان هر متحرک را بنویسید (خوشبختانه در این مسئله معادله‌ها را در اختیار دارید)، سپس مکان (x) دو متحرک را برابر قرار دهید.

۱ لحظهٔ عبور از کنار هم را حساب می‌کنیم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2t - 4 = 3t - 12 \Rightarrow t = 8s$$

۲ با قرار دادن زمان $t = 8s$ در هر یک از معادله‌ها می‌توانید مکانی که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند را به‌دست بیاورید.

$$x = 2t - 4 \xrightarrow{t=8s} x = 2 \times 8 - 4 \Rightarrow x = 12 m$$

بازی با سؤال **معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک P و Q که هم‌زمان روی محور x ها با سرعت‌های ثابت شروع به حرکت کرده‌اند در SI به‌ترتیب به‌صورت $x_P = vt + 12$ و $x_Q = 4t - 24$ است. اگر هر دو در یک لحظه به مکان $x = +8m$ برسند، v چند متر بر ثانیه است؟**

۱) $-0/5$ ۲) $0/5$ ۳) $2/5$ ۴) $-2/5$

پاسخ با قرار دادن $x = +8m$ در معادلهٔ حرکت Q، زمان رسیدن آن را به این مکان به دست می‌آوریم:

$$x_Q = 4t - 24 \Rightarrow 8 = 4t - 24 \Rightarrow t = \frac{32}{4} \Rightarrow t = 8s$$

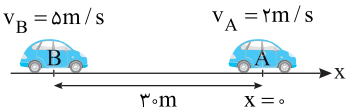
اکنون با قرار دادن $t = 8s$ و $x = 8m$ در معادلهٔ حرکت P، سرعت v را به دست می‌آوریم:

$$x_P = vt + 12 \Rightarrow 8 = v(8) + 12 \Rightarrow v = -0/5 m/s$$

گزینهٔ ۱

B ۱۵۵ ۱

راه‌حل اول: محل حرکت متحرک A را مبدأ در نظر می‌گیریم، معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم:



مکان اولیه متحرک A $(x_{0A} = 0)$ و مکان اولیه متحرک B $(x_{0B} = -30 m)$ است.

معادله‌های حرکت A و B را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = 2t \\ x_B = 5t - 30 \end{cases} \xrightarrow{x_A = x_B} 2t = 5t - 30 \Rightarrow 3t = 30 \Rightarrow t = 10 s$$

مکان رسیدن دو متحرک نسبت به محل آغاز حرکت A خواهد شد: $x = 2 \times 10 = 20 m$

راه‌حل دوم: روش نسبی: در حل این مسائل می‌توان این‌گونه فکر کرد که متحرک A با سرعت $2 m/s$ در هر ثانیه ۲ متر جلو می‌رود و متحرک B با سرعت $5 m/s$ در هر ثانیه $5m$ حرکت می‌کند یعنی در هر ثانیه $5 - 2 = 3m$ عقب ماندگی خود را جبران می‌کند بنابراین با یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

$3m$	$1s$
30	Δt

$$\Rightarrow \Delta t = 10 s$$

میانبر اگر دو متحرک در یک جهت در حرکت باشند می‌توان فرض کرد یک متحرک (مثلاً A) در حال سکون است و متحرک B با سرعت $(v_B - v_A)$ در حال نزدیک شدن به آن است و می‌نویسیم:

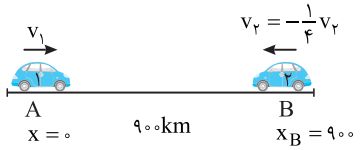
$$\Delta x = |v_B - v_A| \Delta t$$

C ۱۵۶ ۴

راه‌حل اول: روش کلی حل این نوع مسائل به این‌گونه است که معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به یک مبدأ اختیاری مثلاً نقطهٔ A می‌نویسیم و معادلهٔ حرکت را باهم برابر قرار می‌دهیم. جهت حرکت v_1 را مثبت می‌گیریم.

$$x = vt + x_0 \begin{cases} x_1 = v_1 t \\ x_2 = -\frac{1}{4} v_1 t + 900 \end{cases} \xrightarrow{x_1 = x_2} v_1 t = -\frac{1}{4} v_1 t + 900$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} v t = 900 \xrightarrow{t=4s} v = 180 km/h$$

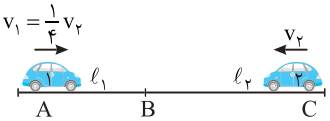


راه‌حل دوم: در حرکت با سرعت ثابت روی خط راست، اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است. باید مجموع مسافت‌هایی که هر متحرک طی می‌کند تا به هم برسند را به‌دست بیاورید و آن را با فاصلهٔ ابتدایی دو متحرک برابر قرار دهیم.

$$\ell_1 = v_1 t \ , \ \ell_2 = v_2 t \Rightarrow \ell_1 + \ell_2 = (v_1 + v_2) t$$

$$\xrightarrow[t=4h]{\ell_1 + \ell_2 = 900 km} 900 = (v_1 + \frac{1}{4} v_1) \times 4$$

$$\Rightarrow 900 = \frac{5}{4} v_1 \times 4 \Rightarrow v_1 = 180 km/h$$



راه‌حل سوم: روش نسبی: می‌توان چنین استدلال کرد که متحرک (۱) با سرعت v_1 در مدت $1h$ به اندازهٔ v_1 کیلومتر و متحرک (۲) با سرعت v_2 در مدت $1h$ به اندازهٔ v_2 کیلومتر به هم نزدیک می‌شوند یعنی در مدت $1h$ دو متحرک به اندازهٔ $v_1 + v_2$ به هم نزدیک می‌شوند، بنابراین به کمک یک تناسب ساده می‌توان نوشت:

$v_1 + v_2$	$1h$
$900 km$	$4h$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 = \frac{900}{4} \Rightarrow v_1 + \frac{v_1}{4} = \frac{900}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5 v_1}{4} = \frac{900}{4} \Rightarrow v_1 = 180 km/h$$

میانبر هر گاه دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می‌کنند می‌توان نوشت:

$$\Delta x = |v_1 + v_2| t$$

B ۳ ۱۵۷

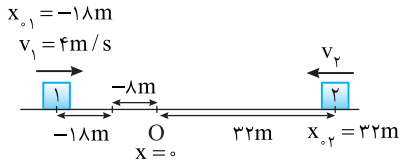
روش اول:

۱ معادلهٔ حرکت متحرک اول را می‌نویسیم:

$x=v_1t+x_{0_1}\Rightarrow x=4t-18$:متحرک (۱)

۲ اکنون زمانی که مکان متحرک $-8m$ می‌شود را به‌دست می‌آوریم.

$-8=4t-18\Rightarrow 4t=10\Rightarrow t=2/5s$



۳ اکنون معادلهٔ حرکت متحرک دوم را می‌نویسیم:

$x_2=v_2t+x_{0_2}\Rightarrow -8=v_2\times 2/5+32\Rightarrow -40=v_2\times 2/5$

$\Rightarrow v_2=\frac{-40}{2/5}\Rightarrow v_2=-16m/s\Rightarrow |v_2|=16m/s$

روش دوم:

با توجه به فرض مسئله متحرک (۱) با حرکت از نقطهٔ $-18m$ در $-8m$ به متحرک (۲) می‌رسد، از این‌رو زمان این حرکت برابر است با:

$\Delta x=vt\Rightarrow 10=4t\Rightarrow t=2/5s$

متحرک (۲) در این مدت برای رسیدن به نقطهٔ C به اندازهٔ $32+8=40m$ جابه‌جا می‌شود. در این صورت: $|\Delta x|=|v|\Delta t\Rightarrow 40=v_2\times 2/5\Rightarrow v_2=16m/s$

B ۲ ۱۵۸

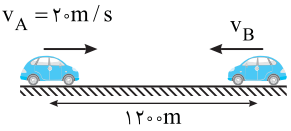
اگر دو متحرک به سمت یکدیگر در حال حرکت باشند با توجه به صورت سؤال بعد از $80s$ به هم می‌رسند، در این مدت متحرک A با سرعت ثابت $20m/s$ به اندازهٔ $\Delta x=vt=1600m$ می‌پیماید که بیشتر از فاصله اولیه بین دو متحرک است. بنابراین این دو متحرک باید قبل از $t=80s$ هم را دیده باشند، پس دو متحرک در حال نزدیک شدن به‌هم نیستند و در یک جهت در حال حرکت می‌باشند. معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

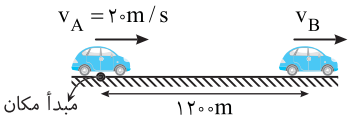
$x_A=vt=20t\xrightarrow{t=80s}x_A=1600m$

$x_B=v_Bt+1200\xrightarrow{t=80s}x_B=80v_B+1200$

در $t=80s$ دو متحرک به هم می‌رسند: $x_A=x_B$

$1600=80v_B+1200\Rightarrow 400=80v_B\Rightarrow v_B=5m/s$





B ۴ ۱۵۹

خط فکری می‌خواهیم یک مثال ساده و عددی را با هم بررسی کنیم. متحرک A از یک نقطه رأس ساعت ۳ بعدازظهر شروع به حرکت می‌کند و $1h$ بعد (یعنی در ساعت ۴ بعدازظهر) متحرک B از همان نقطه به راه می‌افتد. رأس ساعت ۸ شب متحرک B به متحرک A می‌رسد. در این صورت متحرک A $(8-3=5)$ ساعت و متحرک B $(8-4=4h)$ در حرکت بوده‌اند یعنی زمان حرکت A بزرگ‌تر از زمان حرکت B $(t_A>t_B)$ بوده و اگر مدت زمان حرکت A را t_A بنامیم، مدت زمان حرکت B تا رسیدن به A (t_A-1) خواهد بود. البته بین خودمان بماند که بعضی افراد وقتی زمان حرکت A را t_A در نظر می‌گیرند زمان حرکت B را $(t_B=t_A+1)$ در نظر می‌گیرند که کاملاً غلط است. شما باید رابطه جابه‌جایی $\Delta x=vt$ را برای هر دو متحرک بنویسید و آن‌ها را با هم برابر قرارداده، مسئله را حل کنید.

وقتی دو خودرو به هم می‌رسند، جابه‌جایی آن‌ها یکسان است. متحرک دوم یک ساعت پس از متحرک اول شروع به حرکت کرده بنابراین اگر زمان حرکت متحرک اول را Δt_1 در نظر بگیریم زمان حرکت متحرک دوم $(\Delta t_2=\Delta t_1-1)$ خواهد شد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow v_1\Delta t_1=v_2\Delta t_2\Rightarrow 60\Delta t_1=80(\Delta t_1-1)$

$\Rightarrow 60\Delta t_1=80\Delta t_1-80\Rightarrow \Delta t_1=4h$

B ۱ ۱۶۰

۱ خودروی اول با سرعت $10m/s$ پس از ۲۰ ثانیه، ۲۰۰ متر به جلو می‌رود و فاصلهٔ دو خودرو از هم $270-200=270m$ می‌شود.

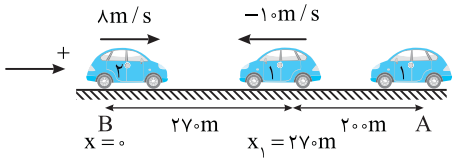
۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را از این لحظه به بعد نوشته و برای این منظور نقطهٔ B را مبدأ مکان فرض می‌کنیم:

معادلهٔ حرکت خودرو (۱): $x_1=-10t+270$

معادلهٔ حرکت خودرو (۲): $x_2=8t$

۳ دو معادله را با هم برابر قرار می‌دهیم و زمان رسیدن دو خودرو به هم را حساب می‌کنیم: $x_2=x_1\Rightarrow 8t=-10t+270\Rightarrow 18t=270\Rightarrow t=15s$

۴ بنابراین متحرک (۲)، ۱۵ ثانیه در حرکت بوده است تا به متحرک (۱) برسد و اندازهٔ جابه‌جایی آن در این مدت خواهد شد: $\Delta x=vt\Rightarrow \Delta x=8\times 15=120m$



B ۱ ۱۶۱

خط فکری دو متحرک از یک مبدأ به سوی یک مقصد می‌روند یعنی جابه‌جایی آن‌ها باهم برابر است $(\Delta x_1=\Delta x_2)$. یکی از آن‌ها $50s$ زودتر به مقصد می‌رسد. یعنی اگر زمان حرکت متحرک کندرو $t_1(v_1=30m/s)$ باشد زمان حرکت متحرک تندرو و $(v_2=40m/s)$ برابر t_1-50 است بنابراین کافی است شما جابه‌جایی‌ها را مساوی قرار داده و مسئله را حل کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک برابر است. از این‌رو:

$\Delta x_1=\Delta x_2\xrightarrow{\Delta x=vt}30t_1=40t_2\xrightarrow{t_2=t_1-50}$

$30t_1=40(t_1-50)\Rightarrow 30t_1=40t_1-2000\Rightarrow t_1=200s$

۲ فاصلهٔ مبدأ تا مقصد برابر است با: $\Delta x=v_1t_1=30\times 200=6000m$

B ۱ ۱۶۲

خط فکری مسئلهٔ ساده اما قابل فکر کردن است. بیشینه فاصلهٔ دو متحرک در طول مسیر یعنی چه؟

دقت کنید متحرک تندرو با سرعت $8m/s$ از مبدأ به راه می‌افتد و همزمان با آن متحرک کندرو با سرعت $5m/s$ از همان نقطه به راه می‌افتد بنابراین در هر لحظه فاصلهٔ بین دو متحرک در حال افزایش است و در طول مسیر بیشینه فاصلهٔ آن‌ها از هم وقتی که متحرک تندرو به مقصد برسد است. بنابراین شما باید مدت زمان رسیدن متحرک تندرو به مقصد را حساب کرده سپس، معین کنید در این مدت متحرک کندرو چند متر جلو آمده تا مشخص شود فاصلهٔ آن‌ها در این لحظه چند متر است.

۱ زمان رسیدن متحرک تندرو را حساب می‌کنیم:

$\Delta x=v\Delta t\xrightarrow{\Delta x=400m}400=8\Delta t\Rightarrow \Delta t=50s$

۲ در مدت $50s$ جابه‌جایی متحرک کندرو خواهد شد:

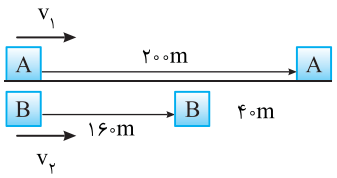
$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow \Delta x_{\text{کندرو}}=5\times 50=250m$

۳ بنابراین بیشینه فاصلهٔ دو متحرک در طول مسیر برابر است با:

$400-250=150m$

B ۳ ۱۶۳

خط فکری دونده A و B مسیر ۲۰۰ متر را می‌خواهند بدوند. دوندهٔ A وقتی به مقصد می‌رسد دوندهٔ B به اندازهٔ ۴۰m از او عقب‌تر است یعنی در مدتی که دوندهٔ A، ۲۰۰ متر دویده، دوندهٔ B، ۱۶۰m دویده است و شما به کمک این موضوع می‌توانید نسبت سرعت B به سرعت A (v_B/v_A) را پیدا کرده و به کمک آن مسئله را حل کنید.



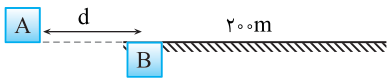
۱ با توجه به رابطهٔ جابه‌جایی زمان خواهیم داشت:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{A}\ ۲۰۰=v_At\\ \xrightarrow{B}\ ۱۶۰=v_Bt\end{cases}\Rightarrow\frac{۲۰۰}{۱۶۰}=\frac{v_At}{v_Bt}\Rightarrow v_B=۰/۸v_A$$

۲ اکنون دوندهٔ A به اندازهٔ d از دوندهٔ B عقب‌تر استارت می‌زند و قرار است باهم به مقصد برسند بنابراین:

$$\begin{matrix}A:d+۲۰۰=v_At'\\ B:۲۰۰=v_Bt'\end{matrix}\Rightarrow\frac{d+۲۰۰}{۲۰۰}=\frac{v_A}{v_B}\xrightarrow{v_B=۰/۸v_A}$$

$$\frac{d+۲۰۰}{۲۰۰}=\frac{۱}{۰/۸}\Rightarrow d+۲۰۰=۲۵۰\Rightarrow d=۵۰m$$

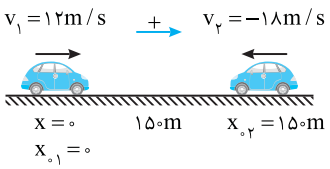


A ۲ ۱۶۴

فاصلهٔ دو خودرو از هم ۱۵۰m است، بنابراین برای آنکه فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۸۰ متر شود. ابتدا باید دو خودرو به هم رسیده و از کنار هم بگذرند، از هم دور شوند تا فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۸۰ متر شود. معادلهٔ حرکت دو خودرو را نوشته و از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{cases}x_۱=۱۲t\\ x_۲=-۱۸t+۱۵۰\end{cases}\xrightarrow{|x_۱-x_۲|=۱۸۰m}۱۲t+۱۸t-۱۵۰=۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۳۰t=۳۳۰\Rightarrow t=۱۱s$$



اگر تفاضل را برابر ۱۸۰− قرار دهیم خواهیم داشت:

غ.ق.ق $۱۲t+۱۸t-۱۵۰=-۱۸۰\Rightarrow ۳۰t=-۳۰\Rightarrow t=-۱s$

روش دیگر: می‌توان فرض کرد متحرک (۲) ساکن است و متحرک (۱) با سرعت $۱۲+۱۸=۳۰m/s$ از فاصلهٔ ۱۵۰ متری به آن نزدیک و سپس ۱۸۰ متر از آن دور می‌شود یعنی متحرک (۱) جمعاً $۱۵۰+۱۸۰=۳۳۰m$ را با سرعت $۳۰m/s$ طی می‌کند.

$$\Delta x=vt\Rightarrow ۳۳۰=۳۰t\Rightarrow t=۱۱s$$

B ۴ ۱۶۵

خط فکری یک‌بار هنگام نزدیک شدن دو متحرک به هم، فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر و بار دیگر بعد از رسیدن به هم و دور شدن از هم، فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر می‌شود. بنابراین مسئله دو حالت دارد:

حالت اول: وقتی هنگام نزدیک شدن فاصلهٔ آن‌ها ۱۰۰ متر است، دو متحرک در مجموع باید مسافت $۳۰۰-۱۰۰=۲۰۰m$ را طی کرده باشند.

$$\begin{cases}|\Delta x_۱|=v_۱t\\ |\Delta x_۲|=v_۲t\end{cases}\Rightarrow|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=(v_۱+v_۲)t\Rightarrow ۲۰۰=۵۰t\Rightarrow t=۴s$$

حالت دوم: هنگامی که از کنار هم می‌گذرند و مجدداً فاصلهٔ آن‌ها از هم ۱۰۰ متر است، باید دو متحرک در مجموع مسافت $۳۰۰+۱۰۰=۴۰۰m$ را بپیمایند.

$$\begin{cases}|\Delta x_۱|=v_۱t\\ |\Delta x_۲|=v_۲t\end{cases}\Rightarrow(v_۱+v_۲)t=۴۰۰\Rightarrow ۵۰t=۴۰۰\Rightarrow t=۸s$$

بازی با سوال دو متحرک از یک نقطه، هم‌زمان در یک جهت با سرعت ۷۲km/h و ۱۰۸km/h به حرکت درمی‌آیند. پس از چند دقیقه فاصلهٔ دو متحرک از هم ۳/۶ کیلومتر می‌شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۳/۶ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ راه‌حل اول: معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته، از هم کم کرده و برابر ۳/۶km قرار می‌دهیم:

$$x=vt\begin{cases}x_۱=۷۲t\\ x_۲=۱۰۸t\end{cases}\xrightarrow{x_۲-x_۱=۳/۶}۱۰۸t-۷۲t=۳/۶\Rightarrow ۳۶t=۳/۶$$

$$\Rightarrow t=۰/۱h\Rightarrow t=۰/۱\times۶۰=۶\min$$

دقت کردید برای حل مسئله سرعت‌ها را تبدیل واحد نکردیم و مسئله را با همان یکای km/h حل کردیم.

راه‌حل دوم: هر دو با هم حرکت کرده‌اند، در هر ساعت متحرک (۱) ۷۲km و متحرک (۲) ۱۰۸km طی می‌کند یعنی متحرک (۲) ۱۰۸−۷۲=۳۶km از اولی جلو می‌افتد، مانند این است که متحرک اول را ساکن فرض کنیم و متحرک دوم با سرعت ۱۰۸−۷۲=۳۶km/h از آن دور شود، در واقع از سرعت نسبی استفاده می‌کنیم: $\Delta x=v_{\text{نسبی}}t\Rightarrow ۳/۶=(۱۰۸-۷۲)t\Rightarrow t=۰/۱h=۶\min$

گزینهٔ ۳

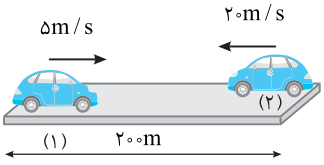
B ۳ ۱۶۶

خط فکری قرار است فاصلهٔ دو متحرک از هم در طول مسیر کمتر از ۵۰m باشد یعنی $|x_۱-x_۲|=۲۵۰m$ شود. بنابراین کافی است که معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و از هم کم کرده و قدرمطلق تفاضل را کوچک‌تر از ۵۰ قرار دهید.

یادداشت ریاضی هر گاه $|a|\le b$ و $b>۰$ باشد آن‌گاه $-b\le a\le b$.

مکان اولیه متحرک با سرعت ۱۰m/s را به عنوان مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت در نظر می‌گیریم. در این صورت معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}x_۱=۵t\\ x_۲=-۲۰t+۲۰۰\end{cases}$$



فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر از ۵۰m باشد یعنی:

$$|x_۱-x_۲|\le ۵۰\Rightarrow|۲۵t-۲۰۰|\le ۵۰$$

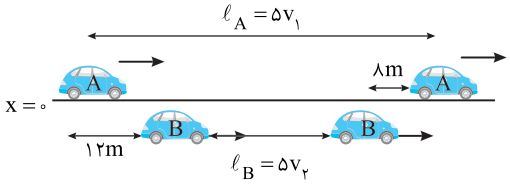
$$\Rightarrow -۵۰\le ۲۵t-۲۰۰\le ۵۰\Rightarrow ۱۵۰\le ۲۵t\le ۲۵۰\Rightarrow ۶s\le t\le ۱۰s$$

بنابراین در بازهٔ $t=۶s$ تا $t=۱۰s$ یعنی در مدت $\Delta t=۱۰-۶=۴s$، فاصلهٔ دو متحرک از هم کمتر از ۵۰ متر است.

B ۳ ۱۶۷

با توجه به شکل و صورت مسئله در مدت ۵s متحرک A با سرعت v_A مسافت $\ell_A=v_At=۵v_A$ و متحرک B مسافت $\ell_B=v_Bt=۵v_B$ را طی می‌کند. اگر به شکل دقت کنید خواهیم داشت:

$$\ell_A=۱۲+\ell_B+۸\Rightarrow ۵v_A=۲۰+۵v_B\Rightarrow v_A-v_B=۴m/s\quad(I)$$



اکنون می‌خواهیم فاصلهٔ دو متحرک به جای ۸m، ۲۴m شود بنابراین:

$$\ell'_A=۱۲+\ell'_B+۲۴\Rightarrow \ell'_A-\ell'_B=۳۶\Rightarrow v_At-v_Bt=۳۶$$

$$\Rightarrow(v_A-v_B)t=۳۶\xrightarrow{(I)}۴t=۳۶\Rightarrow t=۹s$$

B ۴ ۱۶۸

راه‌حل اول: ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به نقطهٔ A می‌نویسیم.

$$x=vt+x_{\circ}\Rightarrow\begin{cases}x_1=v_1t\\x_2=-4v_1t+AB\end{cases}\Rightarrow v_1t=-4v_1t+AB$$

$$\Rightarrow AB=v_1t+(4v_1t)\Rightarrow AB=5v_1t$$

زمان به هم رسیدن دو متحرک برابر می‌شود با:

$$t=\frac{AB}{5v_1}\quad (I)$$

زمان حرکت متحرک (۱) از A تا B برابر است با:

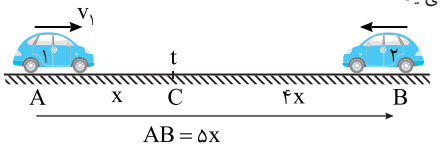
$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}\Rightarrow t_1=\frac{AB}{v_1}\quad (II)$$

اکنون با تقسیم روابط (I) و (II) بر هم می‌توان t_1 را برحسب t به دست آورد:

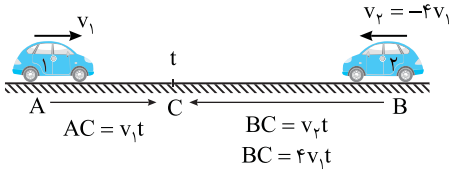
$$\frac{t_1}{t}=\frac{\frac{AB}{v_1}}{\frac{AB}{5v_1}}\Rightarrow\frac{t_1}{t}=5\Rightarrow t_1=5t$$

راه‌حل دوم و سریع:

۱ بنا به فرض مسئله $v_2=-4v_1$ است یعنی در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند اگر متحرک v_1 به اندازهٔ x جلو آمده باشد متحرک ۲ با سرعت $4v_1$ به اندازهٔ $4x$ جلو می‌آید.



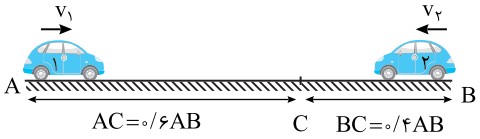
۲ متحرک کندرو (۱) در مدت t مسافت x را طی کرده است بنابراین کل مدت حرکت از A تا B که برابر $5x$ است را در مدت $5t$ طی می‌کند.



B ۱ ۱۶۹

۱ در گام اول شما باید نسبت سرعت‌های v_1 و v_2 را به کمک جابه‌جایی آن‌ها از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند را حساب کنید. دقت کنید که سرعت متحرک (۱) قطعاً از سرعت متحرک (۲) بیشتر است زیرا در مدت t که به هم می‌رسند مسیر طولانی‌تری را طی می‌کند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}AC=v_1t\Rightarrow 0/6AB=v_1t\\BC=v_2t\Rightarrow 0/4AB=v_2t\end{cases}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{2}\quad (I)$$



۲ در ادامهٔ مسیر، متحرک (۱) مسیر BC را در مدت ۴۰s طی کرده است:

$$\Delta x=vt\Rightarrow CB=v_1\times 40\Rightarrow 0/4AB=v_1\times 40\quad (II)$$

۳ در ادامهٔ مسیر، متحرک (۲) مسیر CA را در مدت t_2 طی می‌کند بنابراین:

$$\Delta x=vt\Rightarrow CA=v_2\times t_2\Rightarrow 0/6AB=v_2t_2\quad (III)$$

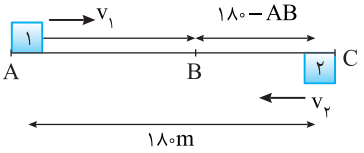
۴ رابطهٔ (II) را بر رابطهٔ (III) تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{0/4AB}{0/6AB}=\frac{v_1\times 40}{v_2\times t_2}\xrightarrow{(I)}\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{40}{t_2}\Rightarrow t_2=90s$$

B ۲ ۱۷۰

۱ متحرک (۱) مطابق شکل از نقطهٔ A و متحرک (۲) از نقطهٔ C به سوی هم می‌روند و در نقطهٔ B به هم می‌رسند. در این مدت متحرک (۱) مسافت AB و متحرک (۲) مسافت $BC=180-AB$ را به ترتیب با تندی‌های v_1 و v_2 طی می‌کنند.

متحرک اول: $AB=v_1t$ (I) ، متحرک دوم: $(180-AB)=v_2t(II)$



۲ دو رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{AB}{180-AB}\quad (III)$$

۳ با توجه به فرض مسئله متحرک (۱) در ادامهٔ مسیر، مسافت BC را در مدت ۱۶s طی می‌کند و متحرک ۲، مسافت BA را در مدت ۲۵s طی می‌کند، از این‌رو خواهیم داشت:

$$\ell=vt\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{متحرک اول}}BC=v_1\times 16\Rightarrow 180-AB=16v_1\\\Rightarrow v_1=\frac{180-AB}{16}\\\xrightarrow{\text{متحرک دوم}}BA=v_2\times 25\Rightarrow AB=25v_2\Rightarrow v_2=\frac{AB}{25}\end{cases}$$

۴ دو رابط را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\frac{180-AB}{16}}{\frac{AB}{25}}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{25}{16}\left(\frac{180-AB}{AB}\right)$$

۵ طرف چپ رابطهٔ بالا و رابطهٔ (III) یکسان بوده، طرف راست آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{AB}{180-AB}=\frac{25}{16}\left(\frac{180-AB}{AB}\right)\Rightarrow\frac{AB^2}{(180-AB)^2}=\frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{180-AB}=\frac{5}{4}\Rightarrow 900-5AB=4AB\Rightarrow AB=100m$$

$$\Rightarrow BC=180-100=80m$$

متحرک (۱) $80m$ را با مدت $16s$ طی کرده بنابراین اندازهٔ سرعت آن (تندی) برابر خواهد شد با:

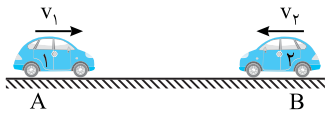
$$v_1=\frac{BC}{t}=\frac{80}{16}=5m/s$$

میانبر هر گاه دو متحرک با تندی‌های ثابت v_1 و v_2 به ترتیب از نقاط A و C به سوی هم بروند و در نقطهٔ B از کنار هم بگذرند چنانچه بازهٔ زمانی که متحرک (۱) را در ادامهٔ مسیر از B به C می‌رود t_1 و بازهٔ زمانی که متحرک (۲) در ادامهٔ مسیر از B به A می‌رود t_2 بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\Rightarrow\frac{AB}{180-AB}=\sqrt{\frac{16}{25}}\Rightarrow\frac{AB}{180-AB}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow AB=100m\Rightarrow BC=80m\Rightarrow v_1=\frac{BC}{t_1}=\frac{80}{16}=5m/s$$

بازی با سؤال **مطابق شکل، دو متحرک (۱) و (۲) هم‌زمان از نقاط A و B می‌گذرند و با تندی‌های ثابت به طرف هم حرکت می‌کنند. دو متحرک پس از مدت t در نقطهٔ C از کنار هم عبور می‌نمایند به‌طوری که $AC=\frac{2}{5}AB$ است. چه مدت پس از آنکه متحرک (۲) به نقطهٔ A می‌رسد، متحرک (۱) از نقطهٔ B عبور خواهد کرد؟**



۱) $\frac{4}{5}t$ ۲) $\frac{5}{6}t$ ۳) $\frac{6}{5}t$ ۴) $\frac{5}{4}t$

پاسخ تندی دو متحرک ثابت است. دو متحرک پس از t ثانیه به هم می‌رسند. متحرک (۲) در این مدت از B به C می‌رود یعنی $\frac{۳}{۵}AB$ را طی می‌کند و در ادامهٔ مسیر از C به A با همان تندی ثابت مسافت $AC=\frac{۲}{۵}AB$ را طی می‌کند بنابراین با یک تناسب ساده زمان حرکت (۲) از C تا A به‌دست می‌آید.

$$\begin{array}{c|c}\frac{۳}{۵}AB & t\\ \frac{۲}{۵}AB & t_۲\end{array}\Rightarrow t_۲=\frac{۲}{۳}t$$

با همین استدلال زمان حرکت متحرک (۱) از A تا C برابر t و از C تا B برابر $t_۲$ است از این‌رو:

$$\begin{array}{c|c}\frac{۲}{۵}AB & t\\ \frac{۳}{۵}AB & t_۱\end{array}\Rightarrow t_۱=\frac{۳}{۲}t$$

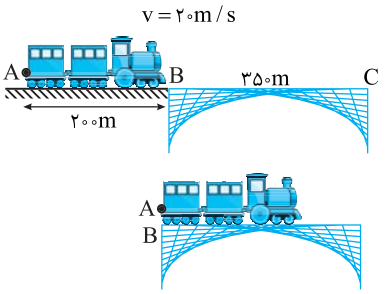
در نتیجه خواهیم داشت: $t_۱-t_۲=\frac{۳}{۲}t-\frac{۲}{۳}t=\frac{۹-۴}{۶}t\Rightarrow t_۱-t_۲=\frac{۵}{۶}t$

گزینهٔ ۲

۲ ۱۷۱ B

۱ هنگامی که انتهای قطار به ابتدای پل برسد قطار به طور کامل روی پل قرار گرفته که نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد. یعنی قطار ۲۰۰m جابه‌جا شود. تندی حرکت قطار ۲۰m/s است بنابراین پس از مدت زیر قطار به‌طور کامل روی پل قرار می‌گیرد:

$$\Delta x=vt\Rightarrow ۲۰۰=۲۰t\Rightarrow t=۱۰s$$



۲ اما وقتی قطار از ابتدای پل شروع به حرکت کند و به‌طور کامل از پل بگذرد باید نقطهٔ A (انتهای قطار) از انتهای پل (نقطهٔ C) بگذرد یعنی قطار باید به اندازهٔ مجموع طول پل و طول خودش جابه‌جا شود.

$$\Delta x=۲۰۰+۳۵۰=۵۵۰m$$

در این صورت زمان عبور کامل قطار از پل خواهد شد:

$$\ell_۱+\ell_۲=vt\Rightarrow ۵۵۰=۲۰t\Rightarrow t=۲۷/۵s$$

۴ ۱۷۲ B

نکته هر گاه یک قطار از ابتدای یک پل بگذرد جابه‌جایی آن هنگامی که به‌طور کامل از پل می‌گذرد برابر $\ell_{پل}+\ell_{قطار}$ خواهد شد. $\Delta x=\ell$

۱ مسافتی که قطار در دو حالت طی می‌کند خواهد شد:

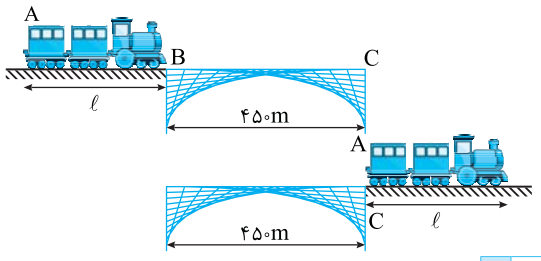
$$\Delta x=vt\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{حالت اول}} ۴۵۰+\ell=۲۰v\\ \xrightarrow{\text{حالت دوم}} ۴۵۰+\ell=۱۵(v+۱۵)\end{cases}$$

۲ مسافت طی شده در دو حالت یکسان است. بنابراین سمت راست روابط بالا را برابر قرار می‌دهیم.

$$۲۰v=۱۵v+۲۲۵\Rightarrow ۵v=۲۲۵\Rightarrow v=۴۵m/s$$

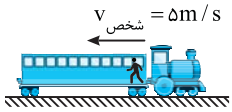
۳ حال با قرار دادن $v=۴۵m/s$ در یکی از معادله‌ها داریم:

$$۴۵۰+\ell=۲۰v\Rightarrow ۴۵۰+\ell=۲۰(۴۵)\Rightarrow ۴۵۰+\ell=۹۰۰\Rightarrow \ell=۴۵۰m$$



۱ ۱۷۳ B

مسئلهٔ ساده‌ای است حرکت قطار نقشی در زمان حرکت شخص از ابتدا به انتهای قطار نخواهد داشت. یعنی شخص با سرعت ثابت $۵m/s$ می‌خواهد جابه‌جایی ۲۵۰ متری انجام دهد، بنابراین:



$$\Delta x=vt\Rightarrow ۲۵۰=۵t\Rightarrow t=۵۰s$$

۳ ۱۷۴ B

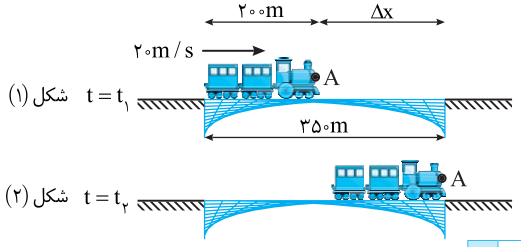
خط فکری وقتی گفته شده «قطار به‌طور کامل روی پل باشد» یعنی تمام طول قطار باید روی پل باشد. بنابراین مطابق شکل ابتدا شما باید قطار را روی پل قرار دهید و انتهای قطار ابتدای پل باشد (شکل ۱) سپس قطار را در ذهن خود حرکت داده تا ابتدای قطار به انتهای پل برسد اما از آن رد نشود. بنابراین جابه‌جایی قطار برابر تفاضل طول پل و طول قطار است. $(\Delta x=\ell_{پل}-\ell_{قطار})$

۱ مسافتی که قطار طی می‌کند و در آن مدت تمام طول قطار روی پل است برابر است با:

$$\Delta x=۳۵۰-۲۰۰=۱۵۰m$$

۲ مدت زمانی که قطار به‌طور کامل روی پل است خواهد شد:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow ۱۵۰=۲۰\Delta t\Rightarrow \Delta t=۷/۵s$$



۲ ۱۷۵ B

خط فکری به جای دو قطار، ذرهٔ A' را در جلوی قطار A و ذرهٔ B' را در انتهای B در نظر می‌گیریم که می‌خواهند از کنار هم بگذرند. بنابراین معادلهٔ حرکت این دو ذره را نوشته باهم برابر قرار دهید.

۱ روی شکل مبدأ مکان اختیاری را نشان داده‌ایم در لحظهٔ $t=۰$ مکان ذرهٔ A'، $x_{۰A}=۰$ و مکان ذرهٔ B'، $x_{۰B}=۲۸۰+۲۰۰=۴۸۰m$ است.

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

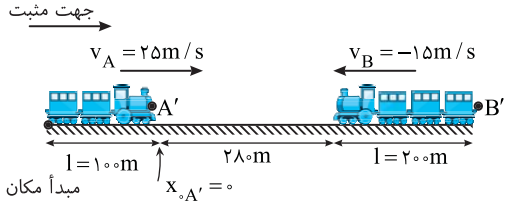
$$x=vt+x_۰\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{A'} x_{A'}=۲۵t\\ \xrightarrow{B'} x_{B'}=-۱۵t+۴۸۰\end{cases}$$

۳ دو معادله را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{A'}=x_{B'}\Rightarrow ۲۵t=-۱۵t+۴۸۰\Rightarrow ۴۰t=۴۸۰\Rightarrow t=۱۲s$$

میانبر دو متحرک به سوی هم می‌روند و برای به‌دست آوردن زمان رسیدن آن‌ها به هم می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد.

$$\Delta x=(v_۱+v_۲)t\Rightarrow ۴۸۰=(۲۵+۱۵)t\Rightarrow t=۱۲s$$



B ۱۷۶ ۲

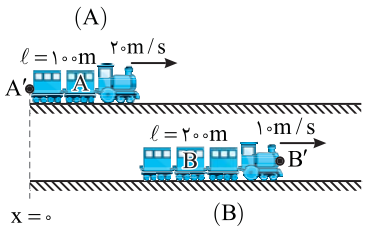
هنگامی قطار A به‌طور کامل از قطار B سبقت می‌گیرد که انتهای قطار A یعنی نقطهٔ A' از ابتدای قطار B یعنی نقطهٔ B' بگذرد. دقت کنید B'، $100+200=300m$ جلوتر از A' است.

۱ معادلهٔ حرکت نقاط A' و B' را نسبت به مبدأ مکان اختیاری روی شکل می‌نویسیم:

$$x=vt+x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=20t \\ x_{B'}=10t+300 \end{cases}$$

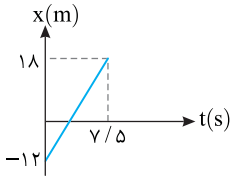
۲ معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{A'}=x_{B'} \Rightarrow 20t=10t+300 \Rightarrow 10t=300 \Rightarrow t=30s$$



A ۱۷۷ ۴

یادآوری معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت $x=vt+x_0$ یک تابع درجهٔ اول بوده و نمودار آن خط راست مایل است. x_0 مکان اولیه همان عرض از مبدأ و v سرعت متحرک برابر شیب نمودار است.



با توجه به نمودار، مکان متحرک در $t=0$، $-12m$ و در $t=7/5$، 18 متر بوده و تغییر مکان متحرک $\Delta x=x_2-x_1=18-(-12)=30m$ می‌شود.

نمودار $x-t$ متحرک به صورت خط راست است پس حرکت با سرعت ثابت است و سرعت در $t=3s$ با سرعت متوسط در بازهٔ دلخواه صفر تا $7/5s$ برابر است.

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{30}{7/5}=4m/s$$

A ۱۷۸ ۳

۱ شیب خط نمودار مکان- زمان بیانگر سرعت متحرک است. بنابراین سرعت خواهد شد:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0-4}{2-0}=-2m/s$$

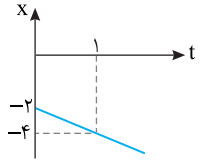
۲ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=4m$ است.

۳ معادلهٔ حرکت خواهد شد:

$$x=vt+x_0 \Rightarrow x=-2t+4$$

A ۱۷۹ ۳

با توجه به شکل مکان اولیه جسم در فاصلهٔ $2m$ از مبدأ محور xها و در قسمت منفی این محور است، بنابراین $x_0=-2m$ است. جهت حرکت و جهت سرعت یکی است و با توجه به شکل جهت حرکت منفی است پس سرعت متحرک نیز منفی و برابر $v=-2m/s$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ حرکت خواهد شد:

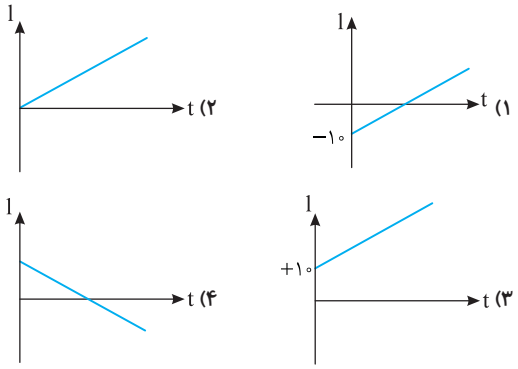


$$x=vt+x_0 \Rightarrow x=-2t-2$$

A ۱۸۰ ۱

دقت کنید معادلهٔ مکان - زمان $x=5t-10$ بوده و مکان اولیه (عرض از مبدأ) $x_0=-10m$ است و شیب خط مثبت بنابراین به نظر می‌رسد که شما باید گزینهٔ (۳) را انتخاب کنید اما به کلمهٔ روی محور قائم دقت کنید، روی محور به جای «مکان» «جابه‌جایی» نوشته شده یعنی شما نمودار $\Delta x-t$ را باید مشخص کنید، جابه‌جایی در حرکت با سرعت ثابت برابر $\Delta x=vt$ بوده که در اینجا $\Delta x=5t$ است. بنابراین پاسخ گزینهٔ (۱) است.

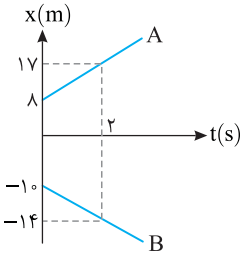
بازی با سؤال معادلهٔ مکان جسمی در SI به صورت $x=-5t-10$ است. نمودار مسافت - زمان این متحرک کدام است؟



پاسخ مسافت کمیت نرده‌ای و همواره مثبت است. معادلهٔ حرکت $x=-5t-10$ یعنی متحرک با سرعت $5m/s$ در خلاف جهت محور در حال حرکت است و در هر ثانیه $+5m$ جابه‌جا می‌شود. بنابراین نمودار مسافت زمان خطی با شیب مثبت است که از مبدأ می‌گذرد. گزینهٔ ۲

A ۱۸۱ ۳

خط فکری شیب نمودار مکان - زمان برابر سرعت جسم است. وقتی نمودار خط راست مایل است سرعت در تمام لحظات یکسان است و تندی متحرک همان اندازهٔ سرعت متحرک است بنابراین شما کافی است شیب هر خط را حساب کنید، البته مقدار مثبت شیب را در نظر بگیرید.



تندی متحرک A:

$$s_A=v_A=\frac{17-8}{2-0}=4/5m/s$$

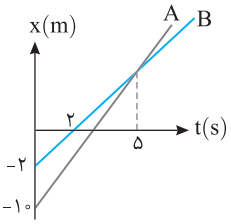
تندی متحرک B:

$$s_B=v_B=\frac{|-14-(-10)|}{2}=\frac{4}{2}=2m/s$$

B ۱۸۲ ۱

۱ نمودار $x-t$ هر دو متحرک خط راست مایل است، بنابراین حرکت هر دو یکنواخت است. ابتدا سرعت متحرک B را با توجه به شکل به دست می‌آوریم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B=\frac{0-(-2)}{2-0}=1m/s$$



۲ معادلهٔ حرکت B برابر خواهد شد با: $x_B=v_Bt+x_{0B} \Rightarrow x_B=t-2$

۳ مکان متحرک A و B در لحظهٔ $t=5s$ که نمودارها یکدیگر را قطع کرده‌اند باهم برابر است، از این‌رو مکان متحرک B در لحظهٔ $t=5s$ را به دست می‌آوریم:

$$x_B=5-2=3m$$

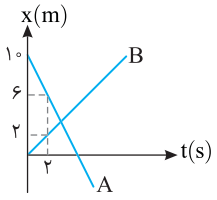
۴ در $t=5s$ مکان متحرک A نیز $x_A=+3m$ است. به کمک معادلهٔ حرکت A، سرعت A را حساب می‌کنیم:

$$x_A=v_At+x_{0A} \Rightarrow 3=v_A\times 5+(-10) \Rightarrow v_A=2/6m/s$$

۵ در لحظهٔ $t=2s$ متحرک B از مبدأ می‌گذرد و در این لحظه متحرک A در مکان $x_A=2/6t-10 \xrightarrow{t=2s} x_A=-4/8m$ خواهد بود: $-4/8m$

A ۱۸۳ ۴

نمودار $x-t$ دو متحرک به صورت خط راست می‌باشد پس حرکت دو متحرک با سرعت ثابت است و شیب هر نمودار برابر سرعت آن‌هاست پس سرعت هر یک را حساب می‌کنیم.



$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}v_A=\frac{۶-۱۰}{۲}=-۲m/s\\ v_B=\frac{۲-۰}{۲}=۱m/s\end{cases}$$

با توجه به نمودار مکان اولیه متحرک A و B به ترتیب $x_{۰A}=۱۰m$ و $x_{۰B}=۰$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ حرکت آن‌ها خواهد شد:

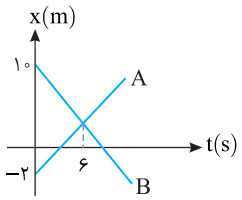
$$x=vt+x_۰\Rightarrow\begin{cases}x_A=-۲t+۱۰\\ x_B=t\end{cases}$$

لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند وقتی است که $x_A=x_B$ می‌شود از این‌رو معادلهٔ حرکت دو متحرک را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$t=-۲t+۱۰\Rightarrow t=\frac{۱۰}{۳}s$$

B ۱۸۴ ۲

۱ در صورت مسئله بیان شده که تندی دو متحرک برابر است یعنی بزرگی سرعت دو متحرک یکسان بوده $|v_A|=|v_B|$ است. با توجه به نمودار شیب خط نمودار $x-t$ متحرک B منفی و شیب خط نمودار $x-t$ متحرک A مثبت است بنابراین $v_A=+v$ و $v_B=-v$ است.



۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A=v_At+x_۰\xrightarrow{x_{۰A}=-۲m}x_A=vt-۲$$

$$x_B=v_Bt+x_۰\xrightarrow{x_{۰B}=۱۰m}x_B=-vt+۱۰$$

۳ با توجه به نمودار دو متحرک از لحظه‌ای که شروع به حرکت می‌کنند تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند در حال نزدیک شدن به هم هستند و از طرفی در صورت سؤال گفته شده ۶s در حال نزدیک شدن به هم هستند، پس دو متحرک در $t=۶s$ به هم می‌رسند. یعنی در $t=۶s$، $x_A=x_B$ است از این‌رو می‌توانیم بنویسیم:

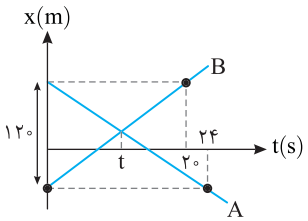
$$\begin{cases}x_A=۶v-۲\\ x_B=-۶v+۱۰\end{cases}\Rightarrow ۶v-۲=-۶v+۱۰\Rightarrow ۱۲v=۱۲\Rightarrow v=۱m/s$$

۴ بنابراین معادلهٔ متحرک A به صورت $x_A=t-۲$ می‌باشد و می‌دانیم هنگام گذر متحرک از مبدأ مکان $x=۰$ بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.

$$x=۰\Rightarrow ۰=t-۲\Rightarrow t=۲s$$

B ۱۸۵ ۱

خط فکری به نمودار باید به خوبی نگاه کنید تا تشخیص دهید متحرک A در مدت ۲۴s مسافت ۱۲۰m و متحرک B نیز در مدت ۲۰s مسافت ۱۲۰m را طی کرده تا بتوانید تندی هر یک را به‌دست بیاورید و در نهایت لحظهٔ t یعنی لحظهٔ رسیدن آن‌ها به یکدیگر را حساب کنید.



۱ تندی متحرک A خواهد شد:

$$s_A=\frac{۱۲۰}{۲۴}=۵m/s$$

۲ تندی متحرک B را حساب می‌کنیم:

$$s_B=\frac{۱۲۰}{۲۰}=۶m/s$$

۳ در مدت t متحرک A مسافت مقابل را طی می‌کند.

$$\ell_A=s_At=۵t$$

۴ در مدت t متحرک B مسافت مقابل را طی می‌کند.

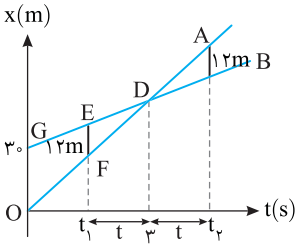
$$\ell_B=s_Bt=۶t$$

۵ مجموع ℓ_A و ℓ_B باید ۱۲۰m شود تا دو متحرک به هم برسند.

$$\ell_A+\ell_B=۱۲۰\Rightarrow ۵t+۶t=۱۲۰\Rightarrow t=\frac{۱۲۰}{۱۱}s$$

B ۱۸۶ ۲

خط فکری در حل این مسئله نباید به سراغ معادلهٔ حرکت بروید بلکه باید به کمک ریاضیات مسئله را حل کنید. به روش حل دقت کنید.



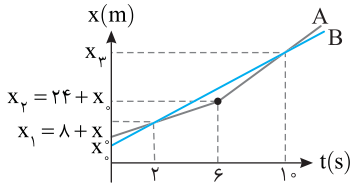
روی نمودار دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ را نشان داده‌ایم که در این دو لحظه فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۲m است. برای مثلث DEF△ و DGO△ نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{۳۰}{۱۲}=\frac{۳}{t}\Rightarrow t=۱/۲s$$

بنابراین ۱/۲s قبل از $t=۳s$ یعنی $t_۱=۳-۱/۲=۱/۸s$ و ۱/۲s بعد از $t=۳s$ یعنی $t_۲=۳+۱/۲=۴/۲s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۱۲ متر است.

B ۱۸۷ ۱

خط فکری نمودار متحرک B خط راست است یعنی متحرک B با سرعت ثابت روی محور xها در حرکت است بنابراین تندی متحرک B همان سرعت آن بوده و برای یافتن سرعت B باید مکان متحرک B در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۱۰s$ را به کمک نمودار و تندی متحرک A به‌دست بیاورید.



۱ تندی متحرک A در بازهٔ ۰ تا ۶s، $۴m/s$ است، مکان اولیهٔ A را با $x_۰$ نمایش می‌دهیم. در لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۶s$ مکان متحرک A خواهد شد:

$$x_A=۴t+x_۰\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۲s}x_۱=۴\times۲+x_۰=۸+x_۰\\ \xrightarrow{t=۶s}x_۲=۴\times۶+x_۰=۲۴+x_۰\end{cases}$$

۲ از مکان $x_۲=۲۴+x_۰$ متحرک A تندی‌اش از $۴m/s$ به $۸m/s$ تبدیل می‌شود. در بازهٔ ۶s تا ۱۰s جابه‌جایی آن خواهد شد:

$$x_۳-x_۲=۸(۱۰-۶)\Rightarrow x_۳-۲۴-x_۰=۳۲\Rightarrow x_۳=۵۶+x_۰$$

۳ اکنون سرعت متحرک B قابل محاسبه است:

$$v_B=\frac{x_۳-x_۱}{۱۰-۲}=\frac{۵۶+x_۰-۸-x_۰}{۸}=\frac{۴۸}{۸}=۶m/s$$

۱۸۸ C

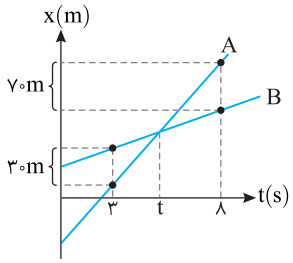
۱ در $t=۳s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم $۳۰m$ است و A، $۳۰m$ از B عقب‌تر است.

۲ در لحظهٔ t دو متحرک به هم می‌رسند.

۳ در $t=۸s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم $۷۰m$ و متحرک A، $۷۰m$ از B جلوتر است.

۴ در مدت $۸-۳=۵s$، دو متحرک نسبت به هم $۳۰+۷۰=۱۰۰m$ جابه‌جا شده‌اند. بنابراین مانند این است که اگر B ساکن باشد A با سرعت $\frac{۱۰۰}{۵}=۲۰m/s$ از ۳۰ متری آن به سوی B رفته و از آن $۷۰m$ فاصله گرفته است.

۵ در بازهٔ $۸-۸=۸s$ فاصلهٔ دو متحرک به اندازهٔ $۲۰\times۸=۱۶۰m$ افزایش می‌یابد یعنی فاصلهٔ آن‌ها از هم $۷۰+۱۶۰=۲۳۰m$ می‌شود.



۱۸۹ B

خط فکری شیب نمودار مکان - زمان برابر سرعت جسم است. وقتی نمودار $x-t$ به صورت خط راست باشد شیب نمودار ثابت بوده یعنی سرعت متحرک ثابت است. فاصلهٔ دو متحرک برابر بزرگی تفاضل مکان دو متحرک در آن لحظه است. سرعت متحرک A مثبت بوده چون شیب خط آن مثبت است و شیب خط B منفی است پس سرعت این متحرک منفی است. در صورت سؤال گفته شده تندی یعنی بزرگی سرعت A دو برابر بزرگی سرعت B است:

$$|v_A|=۲|v_B| \xrightarrow[v_B<۰]{v_A>۰} v_A=-۲v_B$$

نکته معادلهٔ حرکت سرعت ثابت به صورت $x=vt+x_۰$ است.

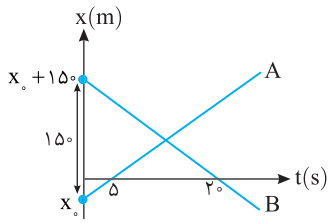
v: سرعت متحرک، $x_۰$: مکان اولیه

روش اول: معادلهٔ حرکت هر متحرک را نوشته و از روی نمودار، داده‌های مسئله را در آن‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$x_A=v_At+x_۰ \xrightarrow[x_A=۰]{t=۵s} ۰=۵v_A+x_۰ \Rightarrow v_A=\frac{-x_۰}{۵} \quad (۱)$$

$$x_B=v_Bt+x_۰+۱۵۰ \xrightarrow[x_B=۰]{t=۲۰s} ۰=۲۰v_B+x_۰+۱۵۰$$

$$\Rightarrow v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰} \quad (۲)$$



با توجه به سؤال $v_A=-۲v_B$ است:

$$v_A=-۲v_B \xrightarrow[v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}]{v_A=\frac{-x_۰}{۵}} \frac{-x_۰}{۵}=-۲\left(\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-x_۰}{۵}=\frac{x_۰+۱۵۰}{۱۰} \Rightarrow -x_۰=\frac{x_۰+۱۵۰}{۲} \Rightarrow -۲x_۰=x_۰+۱۵۰$$

$$\Rightarrow -۳x_۰=۱۵۰ \Rightarrow x_۰=-۵۰m$$

حال $x_۰=-۵۰m$ را در معادله‌های (۱) و (۲) قرار می‌دهیم تا سرعت‌ها به‌دست آید:

$$v_A=\frac{-x_۰}{۵}=\frac{۵۰}{۵}=۱۰m/s \;,\; v_B=\frac{-x_۰-۱۵۰}{۲۰}=\frac{-۱۰۰}{۲۰}=-۵m/s$$

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=۲۰s$ متحرک B از مبدأ مکان می‌گذرد $(x_B=۰)$. معادلهٔ حرکت متحرک A را نوشته و در لحظهٔ $t=۲۰s$ مکان متحرک A را به‌دست می‌آوریم:

$$x_A=v_At+x_۰ \xrightarrow[x_۰=-۵۰m]{v_A=۱۰m/s} x_A=+۱۰t-۵۰$$

$$\xrightarrow{t=۲۰s} x_A=۲۰۰-۵۰=۱۵۰m$$

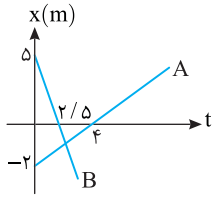
فاصله دو متحرک را حساب می‌کنیم: $r=|x_A-x_B| \Rightarrow r=|۱۵۰-۰|=۱۵۰m$

روش دوم: سرعت متحرک A برابر $۱۰m/s$ است یعنی متحرک A در هر ثانیه $۱۰m$ در جهت مثبت جابه‌جا می‌شود و سرعت متحرک B، $-۵m/s$ بوده یعنی متحرک B در هر ثانیه $۵m$ خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود یعنی در هر ثانیه جمعاً دو متحرک A و B، $۵+۱۰=۱۵m$ متر به هم نزدیک می‌شوند. در ابتدا فاصلهٔ A از B، ۱۵۰ متر است بنابراین این دو متحرک در مدت $\frac{۱۵۰}{۱۵}=۱۰s$ به هم می‌رسند و بعد از به هم رسیدن در هر ثانیه $۱۵m$ از هم دور می‌شوند در مدت $(۲۰-۱۰=۱۰s)$ فاصلهٔ آن‌ها از هم $۱۰\times۱۵=۱۵۰m$ می‌شود.

۱۹۰ C

خط فکری وقتی بیان می‌شود که فاصلهٔ دو متحرک A و B از $۶m$ کمتر باشد یعنی باید $|x_B-x_A|<۶$ باشد بنابراین شما باید از روی نمودار سرعت هر متحرک را به‌دست آورده معادلهٔ حرکت هر یک را نوشته و قدر مطلق تفاضل آن‌ها را کوچک‌تر از $۶m$ قرار داده تا مسئله حل شود.

۱ سرعت حرکت هر متحرک را به دست می‌آوریم:



$$v_A=\frac{۰-(-۲)}{۴-۰} \Rightarrow v_A=۰/۵m/s$$

$$v_B=\frac{۰-۵}{۲/۵-۰} \Rightarrow v_B=-۲m/s$$

۲ معادله حرکت هر متحرک را می‌نویسیم: $x_A=۰/۵t-۲$, $x_B=-۲t+۵$

۳ با توجه به صورت مسئله:

$$|x_A-x_B|<۶ \Rightarrow |۰/۵t-۲+۲t-۵|<۶ \Rightarrow |۲/۵t-۷|<۶$$

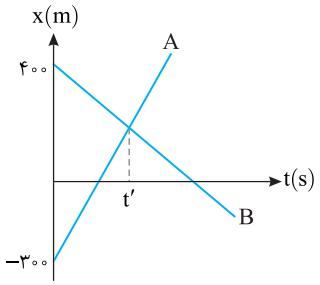
$$\Rightarrow -۶<۲/۵t-۷<۶ \Rightarrow ۱<۲/۵t<۱۳ \Rightarrow ۰/۴<t<۵/۲$$

۱۹۱ C

با توجه به شکل فاصلهٔ ابتدایی A و B از هم $۴۰۰+۳۰۰=۷۰۰m$ است. در لحظهٔ t' دو متحرک به هم می‌رسند سپس از هم دور می‌شوند و فاصلهٔ آن‌ها از هم در $t=۳۰s$، $۳۵۰m$ می‌شود. یعنی مجموع مسافت طی شده توسط دو متحرک در بازهٔ ۰ تا $۳۰s$ باید $۷۰۰+۳۵۰=۱۰۵۰m$ باشد. در این صورت:

$$\ell_A+\ell_B=۱۰۵۰ \xrightarrow{\ell=st} s_At+s_Bt=۱۰۵۰$$

$$(s_A+s_B)۳۰=۱۰۵۰ \Rightarrow s_A+s_B=۳۵m/s$$



با توجه به فرض مسئله $s_B=s_A-۵$ بنابراین:

$$s_A+s_A-۵=۳۵ \Rightarrow ۲s_A=۴۰ \Rightarrow s_A=۲۰m/s$$

۱۹۷ A

خط فکری برای به‌دست آوردن شتاب متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 تنها باید بردار سرعت در لحظهٔ t_1 (v_i) و لحظهٔ t_2 (v_f) را در رابطهٔ شتاب متوسط قرار داد و در این مدت سرعت چه مقدارهایی داشته مهم نیست.

شتاب متوسط برابر آهنگ تغییرات سرعت $v_f - v_i$ می‌باشد، بنابراین:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{۵-۲}{۲+۳} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶ m/s^۲$$

۱۹۸ B

خط فکری شتاب متوسط برابر $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. با توجه به این رابطه و مقدار شتاب متوسط داده شده در دو بازهٔ زمانی حل سؤال را شروع می‌کنیم.

۱ با توجه به تعریف شتاب متوسط برای هر مرحله رابطهٔ شتاب متوسط را می‌نویسیم.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\vec{a} = -۴\vec{i}]{t_1 = ۵s \text{ تا } t_2 = ۱۰s} -۴\vec{i} = \frac{\vec{v}_{۱۰} - \vec{v}_۵}{۱۰-۵} \Rightarrow \vec{v}_{۱۰} - \vec{v}_۵ = -۲۰\vec{i} \quad (۱)$$

$$\xrightarrow[t_2 = ۱۰s \text{ و } t_3 = ۱۲s]{\vec{a} = ۲\vec{i}} ۲\vec{i} = \frac{\vec{v}_{۱۲} - \vec{v}_{۱۰}}{۱۲-۱۰} \Rightarrow \vec{v}_{۱۲} - \vec{v}_{۱۰} = ۴\vec{i} \quad (۲)$$

۲ برای رسیدن به بررسی بازهٔ $t_1 = ۵s$ تا $t_3 = ۱۲s$ سرعت $\vec{v}_{۱۰}$ مزاحم است پس رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم تا $v_{۱۰}$ از دو معادله حذف شود:

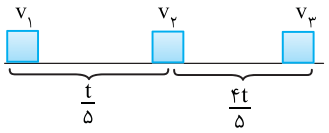
$$\begin{cases} \vec{v}_{۱۰} - \vec{v}_۵ = -۲۰\vec{i} \\ \vec{v}_{۱۲} - \vec{v}_{۱۰} = ۴\vec{i} \end{cases} \xrightarrow{+} \vec{v}_{۱۲} - \vec{v}_۵ = -۲۰\vec{i} + ۴\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_{۱۲} - \vec{v}_۵ = -۱۶\vec{i}$$

۳ شتاب متوسط در بازهٔ $t = ۵s$ تا $t = ۱۲s$ خواهد شد.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_{۱۲} - \vec{v}_۵}{۱۲-۵} \xrightarrow{\vec{v}_{۱۲} - \vec{v}_۵ = -۱۶\vec{i}} a_{av} = \frac{-۱۶\vec{i}}{۷} = \frac{-۱۶}{۷}\vec{i}$$

۱۹۹ B

خط فکری رابطهٔ شتاب متوسط را در بازهٔ $\frac{۱}{۵}t$ و $\frac{۴}{۵}t$ بنویسید و رابطه‌ای بین v_1 و v_2 و v_3 به‌دست بیاورید سپس به سراغ شتاب متوسط در کل مدت t بروید.



۱ **شتاب متوسط در $\frac{۱}{۵}t$:**

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{\Delta t} \Rightarrow ۲ = \frac{v_۲ - v_۱}{\frac{۱}{۵}t} \Rightarrow v_۲ - v_۱ = \frac{۲}{۵}t \Rightarrow v_۱ = v_۲ - \frac{۲}{۵}t \quad (I)$$

۲ **شتاب متوسط در مابقی زمان یعنی $\frac{۴}{۵}t$:**

$$-۴ = \frac{v_۳ - v_۲}{\frac{۴}{۵}t} \Rightarrow v_۳ - v_۲ = \frac{۱۶}{۵}t \Rightarrow v_۳ = v_۲ - \frac{۱۶}{۵}t \qquad (II)$$

۳ **شتاب متوسط در کل مدت حرکت خواهد شد.**

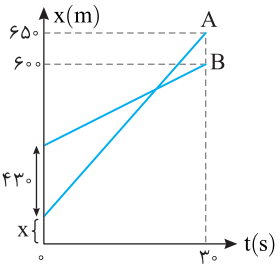
$$a_{av} = \frac{v_۳ - v_۱}{t} \xrightarrow{(I),(II)} a_{av} = \frac{v_۲ - \frac{۱۶}{۵}t - (v_۲ - \frac{۲}{۵}t)}{t} = \frac{-\frac{۱۶}{۵}t + \frac{۲}{۵}t}{t}$$

$$a_{av} = \frac{-۱۴}{۵} m/s^۲ = -۲/۸ m/s^۲$$

۱۹۲ B

خط فکری در صورت مسئله از شما خواسته شده $v_A - v_B$ را به‌دست بیاورید بنابراین شما باید شیب نمودار A و شیب نمودار B را به کمک داده‌های روی نمودار به‌دست آورده از هم کم کنید.

۱ سرعت هر متحرک برابر شیب نمودار $x-t$ است، از این‌رو با توجه به نمودار داریم:



$$v_A = \frac{۶۵۰ - x}{۳۰}$$

$$v_B = \frac{۶۰۰ - (۴۳۰ + x)}{۳۰}$$

۲ تفاضل سرعت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$v_A - v_B = \frac{۶۵۰ - x}{۳۰} - \frac{۱۷۰ - x}{۳۰} = \frac{۴۸۰}{۳۰} \Rightarrow v_A - v_B = ۱۶ m/s$$

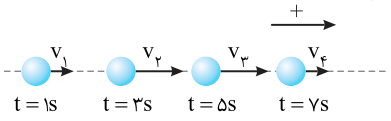
۱۹۳ A

یادآوری نسبت تغییرات بردار سرعت به زمان تغییر را شتاب متوسط گویند $\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. شتاب متوسط کمیت برداری است و همواره در جهت بردار تغییر سرعت است.

با توجه به تعریف شتاب متوسط، وقتی تغییرات سرعت منفی باشد شتاب متوسط الزاماً منفی است.

۱۹۴ A

۱ در لحظه‌های $t_1 = ۱s$ و $t_2 = ۳s$ سرعت‌ها به‌ترتیب v_1 و v_2 بوده و $v_2 > v_1$ است، بنابراین تغییرات سرعت $(\Delta v = v_۲ - v_۱ > ۰)$ مثبت بوده و بردار شتاب متوسط نیز مثبت و به سمت راست است.



۲ در لحظه‌های $t = ۵s$ و $t = ۷s$ سرعت متحرک v_3 و v_4 بوده و $v_4 < v_3$ است یعنی تغییرات سرعت منفی $(\Delta v = v_۴ - v_۳ < ۰)$ و بردار شتاب متوسط منفی و به سمت چپ است.

۱۹۵ A

یک جای‌گذاری ساده در رابطهٔ شتاب متوسط و حل مسئله و تمام.

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow a_{av} = \frac{۹-۵}{۳-۱} = ۲ m/s^۲$$

۱۹۶ B

خط فکری در صورت مسئله تندی در لحظهٔ $t_1 = ۱s$ و $t_2 = ۳s$ داده شده است.

تندی کمیت نرده‌ای است و جهت ندارد در حرکت روی خط راست تندی لحظه‌ای برابر اندازهٔ سرعت است و سرعت کمیت برداری است، بنابراین وقتی گفته می‌شود تندی $۹ m/s$ است یعنی سرعت می‌تواند $+۹ m/s$ و یا $-۹ m/s$ باشد بنابراین این مسئله چهار حالت خواهد داشت. البته در صورت مسئله اندازهٔ شتاب متوسط خواسته شده است.

تندی حرکت در لحظهٔ $t_1 = ۲s$ برابر $s_1 = ۵ m/s$ است. بنابراین سرعت $v_1 = \pm ۵ m/s$ است و در لحظهٔ $t_2 = ۳s$ تندی برابر $s_2 = ۹ m/s$ است پس $v_2 = \pm ۹ m/s$ است:

$$|a_{av}| = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \frac{|v_۲ - v_۱|}{\Delta t} \xrightarrow{v_۱ = +۵ m/s, v_۲ = +۹ m/s} a_{av} = \frac{۹-۵}{۲} = +۲ m/s^۲$$

$$|a_{av}| = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \frac{|v_۲ - v_۱|}{\Delta t} \xrightarrow{v_۱ = +۵ m/s, v_۲ = -۹ m/s} a_{av} = \left|\frac{-۹-۵}{۲}\right| = +۷ m/s^۲$$

$$|a_{av}| = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \frac{|v_۲ - v_۱|}{\Delta t} \xrightarrow{v_۱ = -۵ m/s, v_۲ = ۹ m/s} a_{av} = \frac{۹-(-۵)}{۲} = +۷ m/s^۲$$

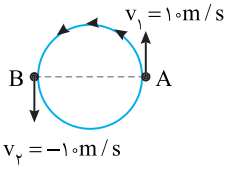
$$|a_{av}| = \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \frac{|v_۲ - v_۱|}{\Delta t} \xrightarrow{v_۱ = -۵ m/s, v_۲ = -۹ m/s} a_{av} = \left|\frac{-۹-(-۵)}{۲}\right| = ۲ m/s^۲$$

۲۰۰ | ۳ | B

نکته بردار سرعت در هر نقطه از مسیر بر مسیر حرکت مماس است.

خط فکری دقت کنید در هر ۱۶s، ذره، یک بار محیط دایره را طی می‌کند، بنابراین در مدت ۸s، نصف محیط را طی خواهد کرد و به‌طور مثال مطابق شکل در مدت ۸s ذره از نقطهٔ A در سوی نشان داده شده به نقطهٔ B می‌رود، بنابراین شما با رسم بردارهای سرعت در نقطهٔ A و B علامت سرعت‌ها را مشخص کرده و شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.

در نقطهٔ A بردار سرعت $v_1=+10\frac{m}{s}$ و در نقطهٔ B که بردار سرعت در خلاف جهت A است $v_2=-10m/s$ خواهد بود بنابراین اندازهٔ شتاب متوسط خواهد شد.



$$|a_{av}|=\frac{|v_2-v_1|}{t_2-t_1}=\frac{|-10-10|}{8}=\frac{20}{8}\Rightarrow|a_{av}|=2/5m/s$$

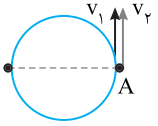
۲۰۱ | ۱ | A

۱ در هر ۲۰s ذره، چهار بار محیط دایره را طی می‌کند بنابراین زمان طی کردن یک بار محیط دایره خواهد شد:

۴ بار	۲۰s
۱ بار	t

$$\Rightarrow t=5s$$

۲ در بازهٔ 5s ذره از هر نقطه‌ای که شروع به حرکت کرده (مثلاً نقطهٔ A) به همان نقطه برمی‌گردد و بردار سرعت‌های v_1 و v_2 برابر شده و تغییرات سرعت برابر صفر شده $(\Delta v=0)$ و در نتیجه شتاب متوسط نیز صفر می‌شود $(a_{av}=0)$.



۲۰۲ | ۲ | A

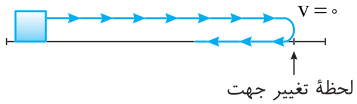
یادآوری معادله سرعت - زمان یک رابطهٔ ریاضی بین سرعت متحرک و زمان است که با قراردادن زمان می‌توان سرعت متحرک را در هر لحظه به‌دست آورد.

خط فکری در صورت مسئله خواسته شده لحظه‌ای که تندی $3m/s$ است را حساب کنیم. تندی کمیت نرده‌ای است و برابر اندازهٔ سرعت است از این‌رو سرعت می‌تواند $+3m/s$ و $-3m/s$ باشد. یک‌بار $v=+3m/s$ و بار دیگر $v=-3m/s$ را در معادله سرعت زمان قرار بدهید.

$$v=-4t+1\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{v=+3m/s}3=-4t+1\Rightarrow2=-4t\Rightarrow t=-0/5 \text{ غیرقابل قبول}\\ \xrightarrow{v=-3m/s}-3=-4t+1\Rightarrow-4=-4t\Rightarrow t=1s\end{cases}$$

۲۰۳ | ۳ | B

خط فکری برای آنکه متحرکی که روی خط راست در حرکت است تغییر جهت بدهد باید ابتدا سرعتش صفر شده سپس تغییر جهت بدهد. بنابراین باید در معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت را برابر صفر قرار دهید اما دقت کنید که آیا علامت سرعت تغییر می‌کند یا نه؟



نکته هرگاه معادلهٔ سرعت زمان درجه ۲ باشد و با قراردادن $v=0$ در معادله اگر زمان منفی به‌دست بیاید و یا معادله ریشه مضاعف داشته باشد تغییر جهتی رخ نمی‌دهد و تنها وقتی که زمان مثبت به‌دست بیاید تغییر جهت اتفاق افتاده است. معادلهٔ سرعت را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$v=t^2-6t+9=(t-3)^2\geq0$$

دقت کنید سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و همواره $v\geq0$ است و متحرک تغییر جهت نخواهد داد.

۲۰۴ | ۴ | B

خط فکری اول باید مشخص کنید که ۲ ثانیهٔ دوم یعنی چه؟ یعنی بازهٔ زمانی بین $t=2s$ تا $t=4s$.

$$0\xrightarrow{\text{۲ ثانیه اول}}2s\xrightarrow{\text{۲ ثانیه دوم}}4s\xrightarrow{\text{۲ ثانیه سوم}}6s\ldots$$

شتاب متوسط یعنی آهنگ تغییر سرعت بنابراین باید سرعت را در لحظه‌های $t=2s$ و $t=4s$ حساب کنید سپس شتاب متوسط را به‌دست بیاورید.

۱ از معادلهٔ سرعت زمان سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم.

$$v=2t^2-4t-2$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{t=2s}v=2(2)^2-4(2)-2\Rightarrow v_1=-2m/s\\ \xrightarrow{t=4s}v=2(4)^2-4(4)-2=+14m/s\end{cases}$$

۲ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{14-(-2)}{2}\Rightarrow a_{av}=8m/s^2$$

بازی با سؤال معادلهٔ سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست در حرکت است در SI به‌صورت $v=2t^2-1$ است. شتاب متوسط در ثانیهٔ سوم حرکتش چند متر بر مجذور ثانیه است؟ کنکور دهه‌های گذشته

۱) ۱۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۶

پاسخ ثانیهٔ سوم بازهٔ زمانی بین $t=2s$ و $t=3s$ است. در این لحظه‌ها سرعت را حساب کرده و در رابطهٔ شتاب متوسط قرار می‌دهیم:

$$t_1=2s\Rightarrow v_1=2\times4-1=7m/s, t_2=3s\Rightarrow v_2=2\times9-1=17m/s,$$

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{17-7}{13-2}=10m/s^2$$

گزینهٔ ۲

۲۰۵ | ۱ | B

یادآوری ریاضی

$$\sin\frac{\pi}{2}=1\ ,\ \sin\frac{3\pi}{2}=-1$$

۱ سرعت در لحظه‌های $t=\frac{1}{8}s$ و $t=\frac{3}{8}s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v_1=2\sin(4\pi\times\frac{1}{8})+0/5=2\sin(\frac{\pi}{2})+0/5$$

$$\Rightarrow v_1=2\times1+0/5\Rightarrow v_1=2/5m/s$$

$$v_2=2\sin(4\pi\times\frac{3}{8})+0/5=2\sin(\frac{3\pi}{2})+0/5$$

$$\Rightarrow v_2=2\times(-1)+0/5\Rightarrow v_2=-1/5m/s$$

۲ بنابراین شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{-1/5-2/5}{\frac{3}{8}-\frac{1}{8}}=\frac{-4}{\frac{1}{4}}=-16m/s^2$$

۲۰۶ | ۴ | B

۱ سرعت در لحظهٔ $t_1=1s$ و $t_2=4s$ را حساب می‌کنیم:

$$v=t^2-bt+1\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=1s}v_1=1-b\times1+1\Rightarrow v_1=2-b\\ \xrightarrow{t_2=4s}v_2=16-4b+1\Rightarrow v_2=17-4b\end{cases}$$

۲ شتاب متوسط صفر است بنابراین:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow0=\frac{17-4b-(2-b)}{4-1}\Rightarrow15-3b=0\Rightarrow b=5$$

۳ معادلهٔ سرعت را کامل می‌کنیم.

$$v=t^2-5t+1$$

۴ سرعت را مساوی $-5m/s$ قرار می‌دهیم.

$$v=-5m/s\Rightarrow t^2-5t+1=-5\Rightarrow t^2-5t+6=0$$

$$\Rightarrow(t-2)(t-3)=0\Rightarrow t=2s, t=3s$$

B ۲۰۷ ۲

۱ متحرک از مکان $x_1=2m$ به مکان $x_2=-2m$ رفته است. حال به کمک معادلهٔ سرعت - مکان سرعت متحرک را در این دو مکان به‌دست می‌آوریم:

$$v=4x+2 \Rightarrow v_1=4(2)+2=10m/s \quad , \quad v_2=4(-2)+2=-6m/s$$

۲ شتاب متوسط در این مدت برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{-6-10}{2}=-8m/s^2$$

A ۲۰۸ ۴

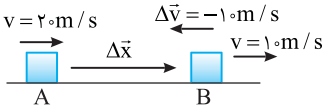
۱ با توجه به تعریف سرعت متوسط $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$ بردار سرعت متوسط همواره در جهت بردار جابه‌جایی است و گزینهٔ (۱) درست است.

۲ سرعت در هر نقطه از مسیر حرکت بر مسیر مماس است و گزینهٔ (۲) درست است.

۳ هرگاه حرکت روی خط راست (مثلاً محور x ها) باشد در این صورت بردار سرعت متحرک در امتداد محور xهاست (یا در جهت مثبت و یا در جهت منفی آن. وقتی بردار سرعت در امتداد محور xهاست بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ نیز در امتداد محور xها بوده در نتیجه بردار شتاب $\vec{a}=\Delta\vec{v}/\Delta t$ نیز در امتداد محور xهاست یعنی بردار سرعت و بردار شتاب لحظه‌ای همواره در یک امتداد و هم‌راستا هستند و گزینهٔ (۳) نیز درست است.



۴ بردار شتاب متوسط با تغییر سرعت هم‌جهت است $\vec{a}_{av}=\Delta\vec{v}/\Delta t$ و بردار سرعت متوسط با بردار جابه‌جایی $(\vec{v}_{av}=\Delta\vec{x}/\Delta t)$ هم‌جهت است. به شکل زیر دقت کنید متحرک از A به B رفته و جابه‌جایی آن نیز مثبت بوده اما به دلیل کاهش سرعت، بردار تغییر سرعت منفی و خلاف جهت جابه‌جایی است یعنی بردار شتاب متوسط و بردار سرعت متوسط در این مثال هم‌جهت نبوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.



A ۲۰۹ ۲

خط فکری حرکت تندشونده حرکتی است که در آن تندی متحرک در حال افزایش است برای این منظور در حرکت روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت و هم‌علامت باشند، یعنی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند. حرکت کندشونده حرکتی است که در آن تندی متحرک در حال کاهش است از این‌رو در حرکت روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم باشند یعنی اگر بردار سرعت مثبت باشد باید بردار شتاب منفی و یا اگر بردار سرعت منفی باشد باید بردار شتاب مثبت باشد.

به شکل‌ها نگاه کنید و ببینید که در کدام شکل‌ها بردار سرعت و شتاب در خلاف هم هستند.

(الف) هر دو بردار شتاب و سرعت هم‌جهت بوده و حرکت تندشونده است.

(ب) بردار شتاب منفی و بردار سرعت مثبت بوده و حرکت کندشونده است.

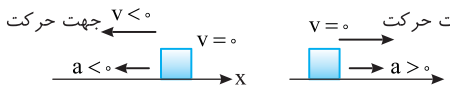
(پ) بردار شتاب مثبت و بردار سرعت منفی بوده و حرکت کندشونده است.

(ت) بردار شتاب و سرعت هر دو منفی بوده و حرکت تندشونده است.

بنابراین در دو مورد حرکت کندشونده است.

A ۲۱۰ ۳

نکته هرگاه جسم از حال سکون روی خط راست به حرکت درآید، شتاب شروع حرکت جسم قطعاً در جهت حرکت جسم است.



در گزینهٔ (۱) جسم از حال سکون در جهت منفی روی محور شروع به حرکت کرده بنابراین شتاب حرکت نیز در جهت منفی محور بوده و گزینهٔ (۱) درست است.

وقتی حرکت روی خط راست تندشونده باشد یعنی سرعت متحرک در یک جهت در حال افزایش بوده و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد بنابراین جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است $(d=\ell)$ و گزینهٔ (۲) درست است.

در حرکت کندشونده روی خط راست باید بردار سرعت و بردار شتاب در خلاف جهت هم باشند و لزومی ندارد شتاب منفی باشد بلکه کافی است اگر بردار سرعت منفی است بردار شتاب مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

در هر حرکتی طول مسیر حرکت (مسافت) همواره برابر یا بزرگ‌تر از اندازهٔ بردار جابه‌جایی است و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲۱۱ ۳

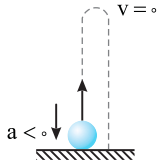
در حرکت تندشونده بردار سرعت و شتاب هم‌جهت و هم‌علامت هستند یعنی اگر $a<0$ باشد بردار سرعت نیز منفی است و تا زمانی که شتاب منفی است سرعت در حال افزایش است و حرکت تندشونده است و هرگز کندشونده نمی‌شود مگر آنکه علامت شتاب تغییر کند که در این مسئله بیان شده a منفی است و علامت آن تغییر نمی‌کند بنابراین هرگز گزینهٔ (۳) اتفاق نمی‌افتد. اما گزینه‌های دیگر را بررسی می‌کنیم.

اگر متحرک با سرعت منفی در جهت منفی محور با شتاب $a<0$ در حرکت باشد، حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) می‌تواند درست باشد.

اگر سرعت متحرک مثبت اما شتاب منفی $(a<0)$ باشد حرکت کندشونده است در این‌صورت دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد.

حالت اول: تندی متحرک کاهش یافته، سرعت صفر شود و متحرک ساکن بماند در این حالت گزینهٔ (۲) درست است.

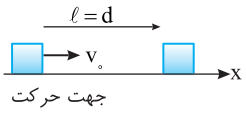
حالت دوم: متحرک پس از آنکه سرعتش صفر شد با همان شتاب بازگردد مانند گلوله‌ای که در شرایط خلأ رو به بالا پرتاب می‌کنیم گلوله متوقف شده و برمی‌گردد و گزینهٔ (۴) درست است.



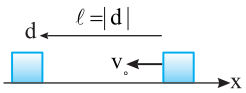
B ۲۱۲ ۱

خط فکری هرگاه مسافت طی شده و بزرگی جابه‌جایی برابر باشد حرکت الزاماً روی خط راست است. اما دو حالت وجود دارد یک حالت آنکه جابه‌جایی مثبت بوده و حالت دیگر آن که جابه‌جایی منفی باشد. بنابراین شما باید دو حالت را بررسی کرده تا بتوانید نوع حرکت را بیان کنید.

حالت اول: متحرک در جهت مثبت در حرکت است و با توجه به اینکه شتاب متوسط در جهت سرعت اولیه است باید سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده باشد.

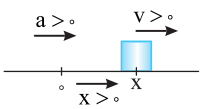


حالت دوم: متحرک در جهت منفی در حرکت باشد در این حالت نیز با توجه به فرض مسئله بردار شتاب متوسط هم‌جهت بردار سرعت اولیه بوده و حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

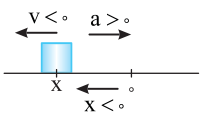


B ۲۱۳ ۴

۱ تست جالبی‌ست، حاصل‌ضرب مکان و سرعت مثبت شده است یعنی وقتی مکان مثبت است، سرعت نیز مثبت است مانند شکل (۱) و وقتی مکان منفی بوده، سرعت نیز منفی است مانند شکل (۲)، بنابراین در هر دو شکل متحرک در حال دور شدن از مبدأ است و گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست است.



شکل (۱)



شکل (۲)

۲ شتاب حرکت مثبت بیان شده $(a>0)$ بنابراین در شکل (۱) بردار شتاب و سرعت هم‌جهت حرکت بوده و حرکت تندشونده است و در شکل (۲)، بردار شتاب و سرعت خلاف جهت بوده و حرکت کندشونده است در نتیجه ممکن است حرکت کندشونده یا تندشونده باشد از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

نکته هرگاه حاصل‌ضرب سرعت در مکان مثبت باشد $(vx>0)$ متحرک در حال دور شدن از مبدأ و اگر منفی باشد $(vx<0)$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

B ۲۱۴ ۱

شتاب حرکت از رابطهٔ $a=2t+1$ پیروی می‌کند و با توجه به اینکه زمان همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود. با گذشت زمان شتاب افزایش می‌یابد اما جهت آن تغییر نمی‌کند. جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده بنابراین سرعت و جهت حرکت جسم همان جهت بردار شتاب است و حرکت تندشونده است و چون شتاب تغییر جهت نمی‌دهد، حرکت کندشونده نخواهد شد.

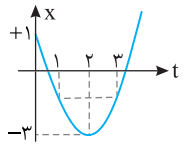
B ۲۱۵ ۱

خط فکری معادله $x=t^2-4t+1$ یک تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است. سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس آن متقارن است رأس سهمی نقطه بیشینه یا کمینه سهمی است و در این نقطه خط مماس بر نمودار موازی محور افقی بوده و شیب آن صفر است. شیب خط مماس بر منحنی مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای بنابراین در رأس سهمی سرعت لحظه‌ای صفر است بنابراین اولین کاری که شما باید انجام بدهید به‌دست آوردن مختصات رأس سهمی است تا بتوانید در مورد سرعت متوسط و شتاب متوسط اظهارنظر کنید.

۱ معادلهٔ حرکت به‌صورت $x=t^2-4t+1$ است و مختصات رأس آن خواهد شد:

$$t=\frac{-b}{2a}\Rightarrow t=\frac{-(-4)}{2\times1}\Rightarrow t=2s\Rightarrow x=4-8+1=-3m$$

۲ نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم. در دو لحظهٔ $t=1s$ و $t=3s$ مکان متحرک یکی است و جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط صفر است و گزینهٔ (۱) درست است.

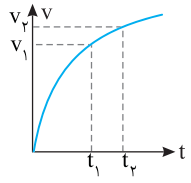


۳ در لحظه‌های $t=1s$ و $t=3s$ شیب خط مماس (سرعت لحظه‌ای متحرک) قرینه است بنابراین تغییر سرعت $(\Delta v\neq0)$ صفر نبوده و شتاب متوسط حرکت $(a_{av}=\Delta v/\Delta t)$ نیز صفر نمی‌شود و گزینهٔ (۲) نادرست است.

۴ در لحظهٔ $t=2s$ یعنی رأس سهمی سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود اما شتاب لحظه‌ای صفر نیست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

A ۲۱۶ ۴

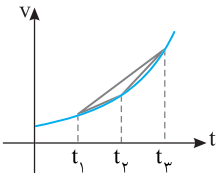
شیب خط قاطع در لحظه‌های t_1 و t_2 روی نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط است.



$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

B ۲۱۷ ۳

خط فکری شیب خط واصل بین دو لحظه در نمودار $v-t$ برابر شتاب متوسط در آن بازه است. از این‌رو برای بررسی شتاب متوسط شما باید خط قاطع بر نمودار را در هر بازه رسم کنید. شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_1، t_1 تا t_2، t_2 تا t_3 و t_1 تا t_3 برابر شیب خط واصل مشخص شده در نمودار است و با توجه به نمودار $v-t$، شیب خط قاطع در بازهٔ t_2 تا t_3 بیشتر است. از این‌رو شتاب متوسط در این بازه بزرگ‌تر است.

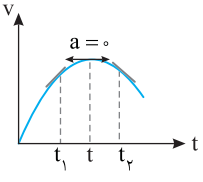


B ۲۱۸ ۴

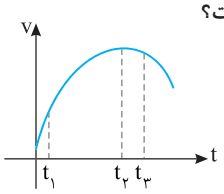
یادآوری بنا به قانون دوم نیوتون نیروی خالص وارد بر جسم برابر $F=ma$ است.

خط فکری برای بررسی تغییرات نیرو باید تغییرات شتاب را بررسی کنیم و برای بررسی تغییرات شتاب باید تغییرات شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ را بررسی کنیم.

از لحظهٔ t_1 تا t شیب خط مماس یعنی شتاب و در نتیجه نیرو در حال کاهش بوده تا به صفر برسد از t به بعد قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار در حال افزایش است (خط مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود) بنابراین بزرگی شتاب در حال افزایش یعنی بزرگی نیرو در حال افزایش است.



بازی با سؤال نمودار $v-t$ متحرکی به صورت شکل روبه‌رو است. نیروی وارد بر متحرک در کدام لحظه بزرگ‌تر است؟



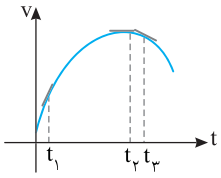
۱) t_1

۲) t_2

۳) t_3

۴) نیروی وارد بر متحرک ثابت است.

پاسخ با توجه به قانون دوم نیوتون $F=ma$ است، پس هرچه شتاب بزرگ‌تر باشد نیرو هم بزرگ‌تر است و می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در هر لحظه برابر شتاب در آن لحظه است.

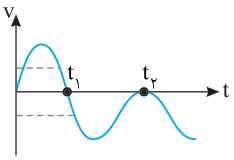


با توجه به شکل اندازهٔ شیب خط مماس در t_1 بزرگ‌تر از اندازهٔ شیب خط مماس در دو لحظهٔ دیگر است پس در t_1 نیروی بزرگ‌تری به جسم وارد می‌شود.

گزینهٔ ۱

A ۲۱۹ ۳

محل برخورد نمودار سرعت - زمان با محور زمان به مفهوم توقف جسم است. بنابراین در لحظه‌های t_1 و t_2 سرعت صفر است. اما متحرک در لحظهٔ t_1 تغییر جهت می‌دهد. زیرا سرعت آن قبل از t_1 مثبت و بعد از t_1 منفی است. یعنی سرعت تغییر علامت و متحرک تغییر جهت داده است. اما در لحظهٔ t_2 سرعت متحرک صفر شده اما تغییر علامت نداده و هم قبل و بعد از t_2 هم‌چنان سرعت منفی است یعنی متحرک تغییر جهت نداده است، بنابراین سرعت دو بار صفر و متحرک یک بار تغییر جهت داده است.



B ۲۲۰ ۳

به نمودار دقت کنید.

۱ سرعت در لحظهٔ t صفر شده و تغییر علامت داده بنابراین متحرک یک بار تغییر جهت داده است و گزارهٔ (الف) درست است.

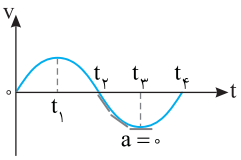
۲ اندازهٔ سرعت از لحظهٔ $t=0$ تا لحظهٔ t در حال کاهش است و از لحظهٔ t به بعد اندازهٔ سرعت در حال افزایش است و گزارهٔ (ب) نادرست است.

۳ با توجه به شیب مماس‌های روی نمودار ابتدا شیب در حال افزایش (خط مماس در حال نزدیک شدن به حالت قائم) و سپس در حال کاهش (خط مماس در حال افقی شدن) است بنابراین شتاب ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد و گزارهٔ (پ) درست است.

۴ اما در تمام مدت شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان مثبت و شتاب مثبت است و گزارهٔ (ت) نادرست است. در نتیجه گزاره‌های (الف) و (پ) درست می‌باشند.

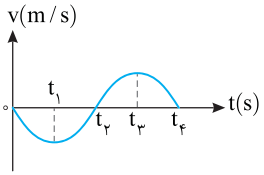
A ۲۲۱ ۳

با توجه به نمودار $v-t$ در لحظهٔ t_2 سرعت صفر است و از این لحظه تا لحظهٔ t_3 اندازهٔ سرعت در حال افزایش و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است. اگر در بازهٔ t_2 تا t_3 بر نمودار خط مماس رسم کنیم شیب خط مماس منفی و شتاب منفی است و گزینهٔ (۲) درست است.



اما با رسم خط‌های مماس بر نمودار در بازهٔ t_2 تا t_3 مشاهده می‌شود که شیب خط مماس در حال کاهش است و در t_3 شیب خط مماس صفر می‌شود. بنابراین شتاب در حال کاهش و در t_3 شتاب صفر می‌شود و گزینهٔ (۳) نادرست است. در بازهٔ t_2 تا t_3 نمودار زیر محور زمان قرار دارد و سرعت در این بازه منفی است و گزینهٔ (۴) درست است.

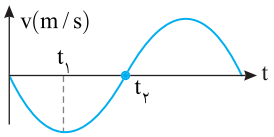
بازی با سؤال نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور xها در حرکت است. مطابق شکل روبه‌رو است. در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 حرکت متحرک ..... شونده و علامت شتاب ..... است.



۱) تند، منفی ۲) تند، مثبت ۳) کند، مثبت ۴) کند، منفی

پاسخ در بازهٔ t_1 تا t_2 اندازهٔ سرعت در حال کاهش است و در t_2 سرعت صفر می‌شود، بنابراین حرکت کندشونده است اما شیب خط مماس بر نمودار در این بازه مثبت و شتاب مثبت است. (علامت سرعت در این بازه منفی و علامت شتاب مثبت است $(av<0)$ و حرکت کندشونده است.)

گزینهٔ ۳



A ۲۲۲ ۲

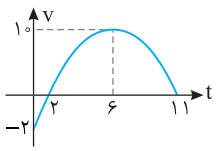
خط فکری هرگاه تندی متحرک (اندازه سرعت) در حال کاهش باشد حرکت کندشونده و هرگاه تندی در حال افزایش باشد حرکت تندشونده است از این‌رو شما باید به تغییر اندازهٔ سرعت دقت کنید.

۱ در بازهٔ صفر تا ۲s اندازهٔ سرعت از ۲m/s به صفر می‌رسد؛ حرکت کندشونده است.

۲ در بازهٔ ۶s تا ۱۱s سرعت از ۱۰m/s به صفر می‌رسد و حرکت کندشونده است.

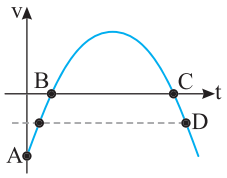
۳ جمعاً به مدت $2s+5s=7s$ حرکت کندشونده است.

۴ از ۲s تا ۶s سرعت از صفر به ۱۰m/s رسیده است؛ بنابراین ۴s حرکت تندشونده است.



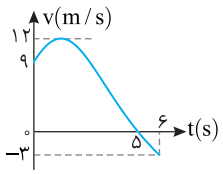
A ۲۲۳ ۴

در لحظات B و C که نمودار سرعت محور زمان را قطع کرده سرعت متحرک صفر شده یعنی متحرک به‌طور لحظه‌ای ساکن است. در لحظهٔ A بزرگی سرعت در حال کوچک‌تر شدن است و سرعت به سمت صفر می‌رود. بنابراین در این لحظه حرکت کندشونده است و در لحظهٔ D بزرگی سرعت در حال افزایش می‌باشد پس حرکت در این لحظه تندشونده است.



A ۲۲۴ ۲

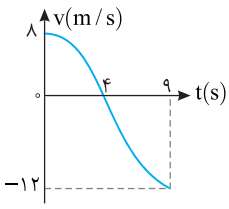
با توجه به تعریف شتاب متوسط، $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$، کافی است در لحظهٔ $t=0$ و $t=6s$ از روی نمودار سرعت متحرک را مشخص کرده و در رابطهٔ شتاب متوسط قرار دهیم.



$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{-3-9}{6-0}=-2m/s^2$$

A ۲۲۵ ۴

در بازهٔ زمانی که اندازهٔ سرعت در حال کاهش است حرکت کندشونده است بنابراین با توجه به نمودار سرعت - زمان در بازهٔ صفر تا ۴s، حرکت کندشونده است و سرعت از ۸ متر بر ثانیه به صفر متر بر ثانیه کاهش می‌یابد و در بازهٔ ۴s تا ۹s، اندازهٔ سرعت از صفر به ۱۲m/s در خلاف جهت محور می‌رسد یعنی تندی افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده است.

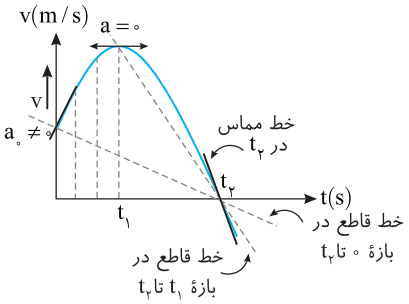


از این‌رو در بازهٔ صفر تا ۴s و ۴s تا ۹s شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}a_{av_{\text{تندشونده}}}=\frac{-12-0}{9-4}=-2/4m/s^2\\ a_{av_{\text{کندشونده}}}=\frac{0-8}{4-0}=-2m/s^2\end{cases}\Rightarrow\frac{a_{av_{\text{تندشونده}}}}{a_{av_{\text{کندشونده}}}}=\frac{6}{5}$$

B ۲۲۶ ۴

مطابق شکل در بازهٔ صفر تا t_1 سرعت متحرک در حال افزایش است و گزینهٔ (۱) نادرست است.



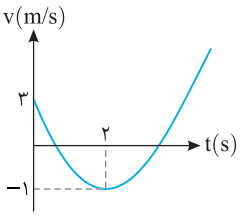
یادآوری شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ برابر شتاب لحظه‌ای است. در لحظهٔ $t=0$ شیب خط مماس بر نمودار با قدرمطلق شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 برابر نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در بازهٔ صفر تا t_1 شیب خط مماس بر نمودار مثبت و شتاب مثبت است و در بازهٔ t_1 تا t_2 شیب خط مماس بر نمودار منفی و شتاب منفی است از این‌رو گزینهٔ (۳) نادرست است.

یادآوری شیب خط قاطع بین دو لحظه در نمودار $v-t$ برابر شتاب متوسط است. با رسم خط قاطع در بازهٔ ۰ تا t_2 و t_1 تا t_2 مشخص است که قدرمطلق شیب خط قاطع در بازهٔ t_1 تا t_2 بزرگ‌تر از شیب خط قاطع در بازهٔ صفر تا t_2 است، بنابراین شتاب متوسط آن بیشتر و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲۲۷ ۱

خط فکری به نظر می‌رسد راهی به جز به دست آوردن معادله سرعت - زمان به کمک اعداد روی نمودار نداریم. بعد از نوشتن معادله حرکت در لحظهٔ $t=1s$ و $t_2=7s$ سرعت‌ها را به‌دست می‌آوریم و شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.



۱ در لحظهٔ $t=0$، سرعت $+3m/s$ است بنابراین

$$v=at^2+bt+c\Rightarrow 3=0+0+c\Rightarrow c=3$$

۲ مختصات رأس سهمی

$$t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow 2=-\frac{b}{2a}\Rightarrow b=-4a \quad (1)$$

۳

$$v=at^2+bt+3\xrightarrow{t=2s,\ v=-1m/s}-1=4a+2b+3\Rightarrow 4a+2b=-4\ (2)$$

از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$4a+2(-4a)=-4\Rightarrow -4a=-4\Rightarrow a=1,\ b=-4\times 1=-4$$

۴ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد

$$v=t^2-4t+3$$

۵ سرعت در لحظه‌های $t_1=1s$ و $t_2=7s$ را حساب می‌کنیم.

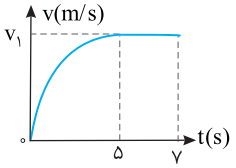
$$t=1s\Rightarrow v=0,\ t=7s\Rightarrow v=49-28+3\Rightarrow v=24m/s$$

۶ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{24-0}{7-1}\Rightarrow a_{av}=4m/s^2$$

۲۲۸ B

۱ با توجه به نمودار در بازهٔ ۵s تا ۷s سرعت متحرک تغییر نکرده است و بنا به رابطهٔ سرعت ثابت خواهیم داشت:



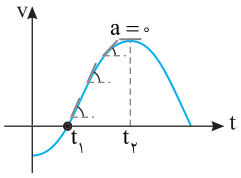
$$\Delta x = v_1 \Delta t \Rightarrow ۱۸ = v_1 \times ۲ \Rightarrow v_1 = ۹m/s$$

۲ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{۹-۰}{۵} = ۱/۸ m/s^۲$$

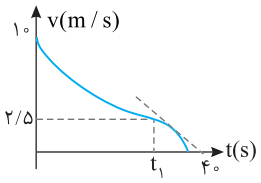
۲۲۹ A

۳ در بازهٔ صفر تا t_1 تندی جسم در حال کاهش بوده و در لحظهٔ t_1 تندی صفر می‌شود یعنی در این بازه حرکت کندشونده است در بازهٔ t_1 تا t_2 سرعت در حال افزایش بوده و حرکت تندشونده است در صورت سؤال پرسیده شده در مدتی که حرکت تندشونده است، شتاب چگونه تغییر می‌کند. با توجه به اینکه شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ اندازهٔ شتاب را مشخص می‌کند در بازهٔ t_1 تا t_2 با رسم چند خط مماس مشخص می‌شود که شیب خط مماس در حال کاهش یعنی شتاب در حال کاهش است.



۲۳۰ B

۱ شتاب در لحظهٔ t_1 یعنی شیب خط مماس در نمودار در لحظهٔ t_1 شتاب لحظه‌ای را از روی نمودار حساب می‌کنیم.



$$a_{t_1} = \frac{۰-۲/۵}{۴۰-t_1}$$

۲ شتاب متوسط در بازهٔ ۰ تا t_1 خواهد شد:

$$a_{av} = \frac{۲/۵-۱۰}{t_1-۰} = \frac{-۷/۵}{t_1}$$

۳ با توجه به فرض مسئله این دو شتاب را با هم برابر قرار می‌دهیم:

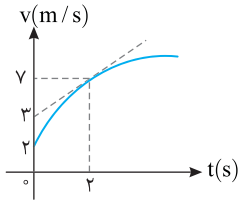
$$\frac{۰-۲/۵}{۴۰-t_1} = \frac{۲/۵-۱۰}{t_1-۰} \Rightarrow \frac{-۲/۵}{۴۰-t_1} = \frac{-۷/۵}{t_1-۰} \Rightarrow \frac{۱}{۴۰-t_1} = \frac{۳}{t_1}$$

$$\Rightarrow ۱۲۰-۳t_1 = t_1 \Rightarrow t_1 = ۳۰s$$

۲۳۱ B

۱ شتاب لحظه‌ای برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان است، بنابراین برای شتاب لحظه‌ای در $t=۲s$ شیب خط مماس را در این لحظه به‌دست می‌آوریم.

$$a = \frac{۷-۳}{۲} = ۲m/s^۲$$



۲ شتاب متوسط نیز در بازهٔ صفر تا ۲s برابر است با:

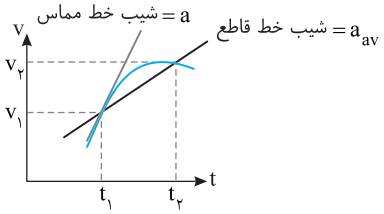
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۷-۲}{۲} = ۲/۵ m/s^۲$$

۳ نسبت شتاب‌ها را حساب می‌کنیم.

$$\frac{a}{a_{av}} = \frac{۲}{۲/۵} = ۰/۸$$

۲ B

یادآوری در نمودار سرعت - زمان، شیب خط قاطع بین دو لحظه برابر شتاب متوسط و شیب خط مماس بر نمودار برابر اندازه سرعت لحظه‌ای است.



خط فکری در نقاط بیشینه و کمینه نمودار سرعت - زمان، خط مماس موازی محور زمان بوده و شیب آن و در نتیجه شتاب حرکت صفر است. از طرفی معادلهٔ $v=t^۲-۸t+۱۲$ تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است، بنابراین شما تنها کافی است مختصات رأس سهمی $\left(t=-\frac{b}{۲a}\right)$ را حساب کنید.

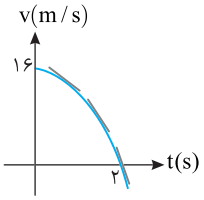
در رأس سهمی شیب خط مماس صفر است، لحظهٔ رأس سهمی را حساب می‌کنیم.

$$v=t^۲-۸t+۱۲\ ,\ t=\frac{-b}{۲a} \Rightarrow t=\frac{۸}{۲}=۴s$$

۲۳۳ B

خط فکری برای بررسی نوع حرکت شما باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنید سپس تمام گزینه‌ها را به کمک نمودار رسم شده بررسی کنید.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان $v=۱۶-۴t^۲$ تابع درجه ۲ بوده و نمودار آن سهمی است. نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم:



$$v=۱۶-۴t^۲ \Rightarrow v=۴(۴-t^۲) \xrightarrow{v=۰} t=۲s$$

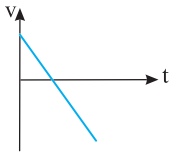
۲ با توجه به شیب خط مماس بر نمودار، در کل مسیر این شیب منفی است. پس شتاب متحرک در طول مسیر در خلاف جهت محور xها است، بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۳ با توجه به نمودار از صفر تا ۲s سرعت متحرک مثبت است یعنی متحرک در جهت مثبت محور x در حرکت است و پس از $t=۲s$ سرعت متحرک منفی می‌شود یعنی متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند و به حرکت خود ادامه می‌دهد، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۴ با توجه به نمودار قبل از $t=۲s$ تندی در حال کاهش و نوع حرکت کندشونده و بعد از $t=۲s$ تندی جسم در حال افزایش و حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۵ نوع حرکت در لحظهٔ $t=۲s$ از کندشونده به تندشونده تغییر می‌کند، اما قبل و بعد از $t=۴s$ حرکت تندشونده است، بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

۲۳۴ A



نمودار سرعت - زمان خط راست بوده از این‌رو درتمام لحظات شیب آن ثابت بوده یعنی شتاب حرکت در تمام مدت ثابت است از طرفی شیب نمودار منفی است از این‌رو شتاب ثابت و منفی است.

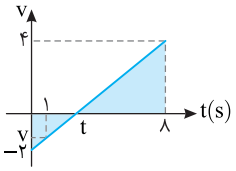
۲۳۵ A

۱ شیب خط نمودار را نوشته و سرعت در لحظهٔ $t=۱s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۴-(-۲)}{۸-۰} = \frac{v-(-۲)}{۱-۰} \Rightarrow \frac{۶}{۸} = \frac{v+۲}{۱} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = v+۲$$

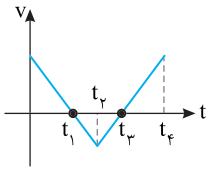
$$\Rightarrow ۴v+۸=۳ \Rightarrow v=-\frac{۵}{۴} m/s$$

بنابراین سرعت $-\frac{۵}{۴} m/s$ و به دلیل منفی بودن سرعت متحرک خلاف جهت محور x در حال حرکت است.



A ۲۳۶ ۳

خط فکری هرگاه سرعت مثبت است متحرک در جهت محور xها حرکت کرده و اگر سرعت منفی باشد متحرک خلاف جهت محور x ها حرکت می‌کند. هم‌چنین اگر نمودار به محور افقی نزدیک شود بزرگی سرعت در حال کاهش می‌باشد و حرکت کندشونده و اگر نمودار در حال دور شدن از این محور افقی باشد بزرگی سرعت در حال افزایش می‌باشد و حرکت تندشونده است.



۱ در بازهٔ صفر تا $t_۱$ سرعت مثبت و حرکت در جهت مثبت محور xها بوده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

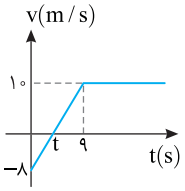
۲ در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ سرعت منفی و متحرک در خلاف جهت محور xها در حال حرکت است از طرفی بزرگی سرعت (تندی متحرک) در حال افزایش یعنی حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۲) نادرست است.

۳ در بازهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ سرعت منفی و جهت حرکت خلاف جهت محور xها است و تندی (اندازهٔ سرعت) در حال کاهش است به‌طوری که در نقطهٔ $t_۳$ سرعت صفر می‌شود یعنی حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

۴ در بازهٔ $t_۳$ تا $t_۴$ سرعت مثبت بوده و گزینهٔ (۴) نادرست است.

A ۲۳۷ ۴

ابتدا لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود (t) را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{۱۰-(-۸)}{۹-۰}=\frac{۰-(-۸)}{t-۰}\Rightarrow ۲=\frac{۸}{t}\Rightarrow t=۴s$$

اکنون با داشتن لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود می‌توان گزینه‌ها را بررسی کرد.

با توجه به نمودار در لحظهٔ $t=۳s$ بزرگی سرعت متحرک در حال کاهش است و در $t=۴s$ متحرک متوقف می‌شود، بنابراین در $t=۳s$ حرکت کندشونده و گزینهٔ (۱) نادرست است.

در بازهٔ زمانی ۰ تا ۹s شیب خط نمودار $v-t$ تغییر نمی‌کند بنابراین شتاب در این بازهٔ زمانی ثابت است پس در لحظهٔ $t=۴s$ نیز شتاب تغییر نمی‌کند و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در $t=۹s$ به بعد بزرگی سرعت ثابت و برابر $۱۰m/s$ باقی می‌ماند، بنابراین حرکت نه تندشونده و نه کندشونده است و گزینهٔ (۳) نادرست است.

در $t=۷s$ بزرگی سرعت متحرک در حال افزایش است و در $t=۹s$ سرعت متحرک به بیشینه مقدار خود یعنی $v=۱۰m/s$ می‌رسد بنابراین در این لحظه حرکت تندشونده و گزینهٔ (۴) درست است.

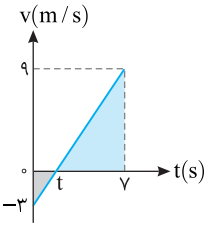
A ۲۳۸ ۴

نکته اگر مکان اولیهٔ متحرکی مشخص نباشد نمودار سرعت - زمان دربارهٔ مکان متحرک و هم‌چنین نزدیک یا دور شدن متحرک به مبدأ مکان اطلاعاتی به ما نمی‌دهد.

با توجه به نکته بیان شده گزینهٔ (۴) درست است.

A ۲۳۹ ۳

لحظهٔ تغییر جهت، لحظه‌ای است که سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. نسبت تشابه را برای دو مثلث رنگی می‌نویسیم و لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{۹}{۳}=\frac{۷-t}{t}\Rightarrow ۳t=۷-t\Rightarrow t=\frac{۷}{۴}s$$

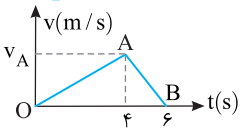
نمودار سرعت - زمان خط راست است و شیب آن ثابت است. از این‌رو شتاب حرکت در تمام بازه‌های زمانی ثابت و یکسان است و خواهد شد:

$$a=a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۹-(-۳)}{۷}=\frac{۱۲}{۷}m/s^۲$$

A ۲۴۰ ۳

یادآوری شیب نمودار سرعت زمان برابر شتاب متحرک است.

در هر قسمت شتاب را حساب می‌کنیم.



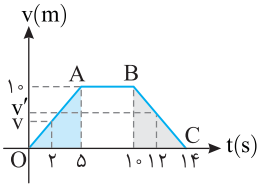
$$a_{av_{OA}}=\frac{v_A-۰}{۴-۰}=\frac{v_A}{۴}\ ,\ a_{av_{AB}}=\frac{۰-v_A}{۶-۴}=\frac{-v_A}{۲}$$

نسبت اندازهٔ شتاب‌ها خواهد شد:

$$\frac{|a_{av_{OA}}|}{|a_{av_{OB}}|}=\frac{\frac{v_A}{۴}}{\frac{v_A}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

B ۲۴۱ ۱

خط فکری باید به کمک شیب خط‌های OA و BC سرعت را در لحظه‌های $t=۲s$ و $t=۱۲s$ حساب کرده سپس به کمک تعریف شتاب متوسط $a_{av}=\Delta v/\Delta t$ مسئله را حل کنید.



۱ به کمک شیب خط OA سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۱۰-۰}{۵-۰}=\frac{v-۰}{۲-۰}\Rightarrow ۲=\frac{v}{۲}\Rightarrow v=۴m/s$$

۲ شیب خط BC را نوشته سرعت در لحظهٔ $t=۱۲s$ را به‌دست می‌آوریم.

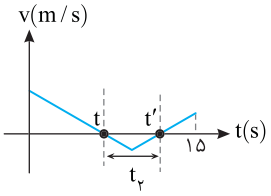
$$\frac{۰-۱۰}{۱۴-۱۰}=\frac{۰-v'}{۱۴-۱۲}\Rightarrow\frac{-۱۰}{۴}=\frac{-v'}{۲}\Rightarrow v'=۵m/s$$

۳ شتاب متوسط خواهد شد.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v'-v}{\Delta t}=\frac{۵-۴}{۱۲-۲}=\frac{۱}{۱۰}m/s^۲$$

C ۲۴۲ ۳

خط فکری هرگاه سرعت مثبت باشد متحرک در جهت محور xها در حرکت است و هرگاه سرعت منفی باشد متحرک در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کند. از طرفی متحرک وقتی تغییر جهت می‌دهد که سرعت آن صفر می‌شود. یعنی نمودار محور زمان را قطع می‌کند بنابراین بازهٔ زمانی بین دو تغییر جهت با توجه به شکل بازهٔ زمانی بین t تا t' است. دقت کنید در این بازه سرعت منفی $(t'-t)$ است و در واقع طراح از شما می‌خواهد که $t_۲=t'-t$ را از روی نمودار به‌دست آورید.



در بازهٔ صفر تا t و t' تا ۱۵s متحرک در جهت مثبت محور xها و در بازهٔ t تا t' متحرک در خلاف جهت محور xها در حرکت بوده است.

$$t_۱=(t-۰)+(۱۵-t')=۱۵+(t-t')\Rightarrow t_۱=۱۵-t_۲\ ,\ t_۲=t'-t$$

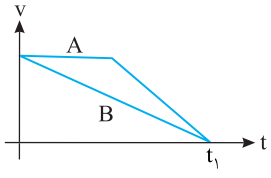
حال با توجه به نسبت داده شده در سؤال:

$$\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\frac{۱۵-t_۲}{t_۲}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow ۶۰-۴t_۲=۵t_۲\Rightarrow ۶۰=۹t_۲\Rightarrow t_۲=\frac{۲۰}{۳}s$$

مدت زمان بین دو لحظهٔ توقف همان $t'-t$ است که برابر با $t_۲$ یعنی $\frac{۲۰}{۳}s$ است.

B ۲۴۳ ۱

در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ تغییر سرعت دو متحرک A و B یکسان است و با توجه به تعریف شتاب متوسط $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$ شتاب متوسط دو متحرک در این بازه با هم برابر است.

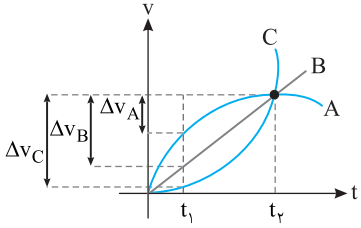


B ۲۴۴ ۱

می‌خواهیم شتاب متوسط سه متحرک A، B و C را در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 با هم مقایسه کنیم. با توجه به تعریف شتاب متوسط $(a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t})$ ما باید تغییرات سرعت این سه متحرک را با هم مقایسه کنیم.

با توجه به شکل در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 تغییر سرعت متحرک A از متحرک B کمتر و تغییر سرعت متحرک B از تغییر سرعت متحرک C کمتر است.

$$\Delta v_A<\Delta v_B<\Delta v_A \Rightarrow a_{av_A}<a_{av_B}<a_{av_C}$$



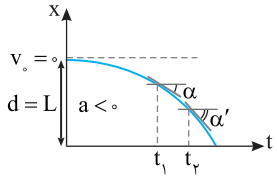
A ۲۴۵ ۴

۱ متحرک روی محور xها در خلاف جهت محور از حال سکون $(|v_0|=0)$ شروع به حرکت کرده است.

۲ دقت کنید در لحظهٔ $t=0$ خط مماس بر نمودار موازی محور xها است و شیب خط مماس صفر و در نتیجه سرعت اولیه صفر است. (گزینهٔ ۳) درست است.)

۳ متحرک روی محور xها تغییر جهت نداده بنابراین جابه‌جایی و مسافت طی شده یکسان است. در نتیجه تندی متوسط و سرعت متوسط برابر است. (گزینهٔ ۱) درست است.)

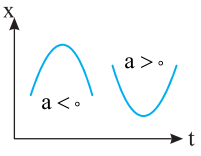
۴ به شکل دقت کنید در بازهٔ t_1 تا t_2 شیب خط مماس بر نمودار بیشتر می‌شود بنابراین اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_2 از اندازهٔ سرعت در لحظهٔ t_1 بیشتر (منفی‌تر) است.



در نتیجه: $\Delta v=v_2-v_1 \xrightarrow[v_2<0,\ v_1<0]{|v_2|>|v_1|} \Delta v<0 \Rightarrow a<0$

هر دو لحظه دلخواه دیگری را که در نظر بگیرید، به همین نتیجه می‌رسید که شتاب منفی است و گزینهٔ (۲) درست است.

میانبر برای تعیین علامت شتاب از روی نمودار مکان - زمان کافی است به جهت تقعر (دهانهٔ نمودار) دقت کنید اگر دهانه رو به بالا باشد شتاب مثبت و اگر رو به پایین باشد شتاب منفی است.

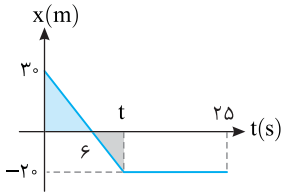


B ۲۴۶ ۴

۱ به کمک شیب نمودار لحظهٔ t را حساب می‌کنیم.

$$\frac{-20-30}{t-0}=\frac{0-30}{6-0} \Rightarrow t=10s$$

۲ سرعت متوسط در مدت ۲۵s خواهد شد:



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-20-30}{25}=-2m/s$$

۳ سرعت در بازهٔ صفر تا 6s ثابت است، بنابراین:

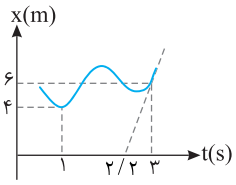
$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v=\frac{0-30}{6}=-5m/s \Rightarrow v_0=-5m/s$$

شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ $t=10s$ تا $t=25s$، صفر است بنابراین: $v_{25}=0$

در نتیجه شتاب متوسط در مدت ۲۵s خواهد شد: $a_{av}=\frac{0-(-5)}{25}=0/2m/s^2$

B ۲۴۷ ۱

برای به‌دست آوردن شتاب متوسط در بازهٔ $t=1s$ تا $t=3s$ باید سرعت را در این دو لحظه به‌دست بیاوریم.



۱ در $t=1s$ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان موازی محور زمان بوده و سرعت لحظه‌ای صفر است $(v_1=0)$

۲ در $t=3s$ شیب خط مماس برابر است با: $v_2=\frac{6-0}{3-2/2}=\frac{6}{0/8}=\frac{60}{8}=7/5m/s$

۳ در این صورت شتاب متوسط برابر است با:

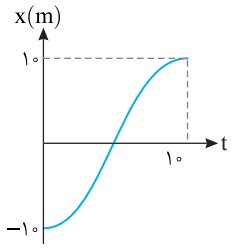
$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{7/5-0}{3-1}=\frac{7/5}{2} \Rightarrow a_{av}=3/75\ m/s^2$$

A ۲۴۸ ۲

در لحظهٔ $t=0$، مکان متحرک $x_1=-10m$ و در لحظهٔ $t=10s$ مکان متحرک $x_2=+10m$ بوده بنابراین سرعت متوسط خواهد شد.

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av}=\frac{10-(10)}{10-0}=2m/s$$

برای به‌دست آوردن شتاب متوسط باید سرعت متحرک را در لحظه‌های $t=0$ و $t=10s$ از روی نمودار مشخص کنیم. در این دو لحظه خط مماس بر نمودار موازی محور زمان بوده و شیب خط مماس و در نتیجه سرعت در این لحظات صفر است، بنابراین شتاب متوسط برابر است با:



$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av}=0$$

A ۲۴۹ ۱

نکته هرگاه جهت دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان به سمت بالا باشد (گنبدی شکل) شتاب حرکت مثبت و هرگاه جهت دهانه (تقعر) نمودار رو به پایین باشد، شتاب منفی است.

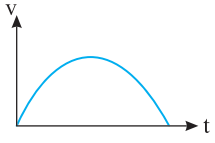
یادآوری هرگاه شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان مثبت باشد سرعت مثبت و متحرک در جهت مثبت محور در حال حرکت است و هرگاه شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان منفی باشد، سرعت منفی و متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت است.

در صورت مسئله بیان شده که سرعت اولیه مثبت باشد یعنی در لحظهٔ $t=0$ شیب خط مماس بر نمودار مثبت باشد که در گزینهٔ (۱) و (۳) این چنین است. از طرفی خواسته شده که در خلاف جهت محور x یعنی منفی باشد بنابراین دهانه (تقعر) نمودار باید رو به پایین باشد و گزینهٔ (۱) درست است.

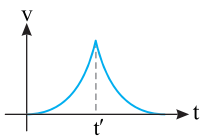
B ۲۵۰ ۲

ابتدا دقت کنید که نمودارهای داده شده، نمودار سرعت - زمان است. سپس به حل مسئله بپردازید.

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و در نهایت نیز متوقف شده است پس در ابتدا و انتهای حرکت سرعت صفر است و گزینهٔ (۱) نمی‌تواند جواب باشد.



در نمودار گزینهٔ (۲)، در تمام مدت نمودار بالای محور زمان بوده و سرعت متحرک مثبت است از طرفی در $t=0$، سرعت صفر است بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.



چون متحرک در جهت مثبت محور xها در حرکت است پس سرعت باید مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۳) نیز نادرست است. در لحظهٔ t' در نمودار گزینهٔ (۴) خط مماس قائم است پس شیب خط مماس در این نقطه که برابر شتاب می‌باشد ∞ است و این ناممکن است بنابراین گزینهٔ (۴) نیز نادرست است اگرچه سرعت در ابتدا و انتها صفر است.

A ۲۵۱ ۴

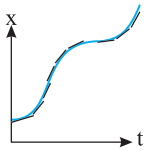
متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده یعنی نمودار در لحظهٔ $t=0$ باید بر محور زمان مماس باشد بنابراین گزینهٔ (۱) و (۳) نادرست هستند.

متحرک پس از مدتی متوقف شده و سپس در جهت مثبت محور به حرکت خود ادامه می‌دهد یعنی شیب خط مماس بر نمودار پس از تغییر جهت باید مثبت باشد بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست و گزینهٔ (۴) درست است.

B ۲۵۲ ۳

در ابتدا با گذر زمان، در بازه‌های زمانی یکسان جابه‌جایی خودرو در حال افزایش است بنابراین سرعت در حال افزایش است یعنی شیب خط مماس بر نمودار باید در حال افزایش باشد.





در ادامهٔ مسیر در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی‌ها کاهش یافته یعنی سرعت در حال کاهش است و مجدداً جابه‌جایی‌ها افزایش می‌یابد یعنی سرعت افزایش می‌یابد. در گزینهٔ (۳) ابتدا شیب خط مماس افزایش، سپس کاهش و سرانجام افزایش می‌یابد.

B ۲۵۳ ۲

۱ بردار مکان متحرک زمانی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ عبور می‌کند، بنابراین مکان را مساوی صفر $(x=0)$ قرار می‌دهیم:

$$x=t^3-3t^2+2t \Rightarrow 0=t^3-3t^2+2t \Rightarrow 0=t(t-1)(t-2)$$

$$\Rightarrow t=0,\ t=1s,\ t=2s$$

۲ دقت کنید در $t=0$ متحرک شروع به حرکت می‌کند پس در $t=0$ از مبدأ مکان متحرک عبور نمی‌کند، بنابراین در لحظه‌های $t=1s$ و $t=2s$ تغییر بردار مکان رخ داده است، اکنون در این دو لحظه سرعت را به کمک معادلهٔ سرعت - زمان داده شده حساب می‌کنیم:

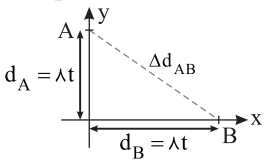
$$v_{t=1s}=3(1)^2-6(1)+2 \Rightarrow v_{t=1}=-1\,m/s$$

$$v_{t=2s}=3(2)^2-6(2)+2 \Rightarrow v_{t=2}=2\,m/s$$

۳ شتاب متوسط حرکت را به‌دست می‌آوریم: $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{2-(-1)}{2-1}=3\,m/s^2$

B ۲۵۴ ۲

۱ مسئلهٔ ساده‌ای است. در مدت t ثانیه جابه‌جایی هر متحرک را حساب می‌کنیم. سرعت هر متحرک $8\,m/s$ است. بنابراین:



$$d_A=d_B=vt \Rightarrow d_A=d_B=8t$$

۲ فاصلهٔ A تا B را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست آورده و برابر $32\sqrt{2}\,m$ قرار می‌دهیم.

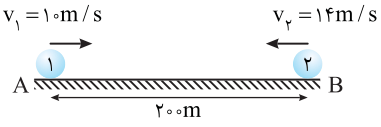
$$AB=\sqrt{d_A^2+d_B^2} \Rightarrow 32\sqrt{2}=\sqrt{(8t)^2+(8t)^2} \Rightarrow 32\sqrt{2}=\sqrt{2}(8t) \Rightarrow t=4s$$

B ۲۵۵ ۳

خط فکری آنچه مسلم است دیدار این دو متحرک برای اولین بار هنگامی است که به سوی هم می‌روند و در بین راه یکدیگر ملاقات می‌کنند اما ملاقات دوم آن‌ها وقتی است که دو متحرک به انتهای مسیر می‌رسند و برمی‌گردند و مجدداً بین راه یکدیگر را ملاقات می‌کنند، بنابراین شما باید ابتدا زمان حرکت متحرک کندرو (۱) را از A تا B حساب کنید. در این مدت متحرک تندرو (۲) قطعاً از B به A رسیده و در حال برگشت است و مقدار مسافتی که در برگشت طی می‌کند را به‌دست بیاورید، بنابراین به مراحل زیر با دقت توجه کنید.

۱ مدت زمان حرکت متحرک کندرو از A تا B خواهد شد:

$$d=vt=200=10t_1 \Rightarrow t_1=20s$$

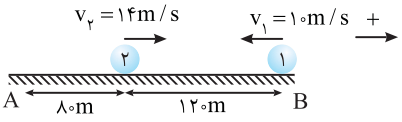


۲ جابه‌جایی متحرک (۲) با تندی $14\,m/s$ در مدت $20s$ را حساب می‌کنیم.

$$\ell_2=vt_0=14\times20=280m$$

۳ یعنی متحرک (۲)، ۲۰۰ متر رفته و $80m$ برگشته و در این لحظه متحرک (۱) از نقطهٔ B در حال برگشت است. یعنی فاصلهٔ دو متحرک از هم $200-80=120m$ است.

۴ اگر نقطهٔ B را در این لحظه مبدأ مکان فرض کنیم با نوشتن معادلهٔ حرکت دو متحرک و برابر قرار دادن معادله‌ها لحظه‌ای که به هم می‌رسند را به‌دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} x_1=-10t \\ x_2=14t-120 \end{cases} \xrightarrow{x_1=x_2} -10t=14t-120 \Rightarrow 24t=120 \Rightarrow t_2=5s$$

ملاقات دوم پس از $20+5=25s$ صورت می‌گیرد.

میانبر در قسمت آخر می‌توانستیم سرعت‌ها را با هم جمع کرده $14+10=24\,m/s$ سپس زمانی که $120m$ با این سرعت طی می‌شود را حساب کرد.

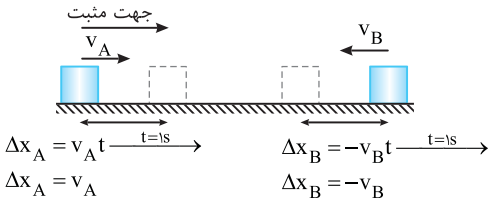
$$\Delta x=(v_1+v_2)t \Rightarrow 120=24t \Rightarrow t=5s$$

$$t_{کل}=20+5=25s$$

B ۲۵۶ ۲

فرض اول: دو جسم با سرعت ثابت به سمت هم حرکت می‌کنند و در هر $10s$، 16 متر به‌هم نزدیک می‌شوند، یعنی در هر ثانیه $1/6m$ به‌هم نزدیک‌تر می‌شوند با توجه به شکل در هر ثانیه متحرک A به اندازهٔ v_A در جهت مثبت و متحرک B، به اندازهٔ v_B در جهت منفی به‌هم نزدیک می‌شوند بنابراین:

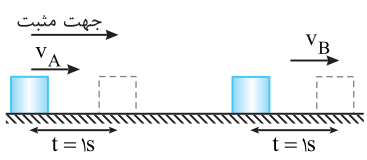
$$\Delta x_{AB}=v_A-(-v_B)=1/6 \Rightarrow v_A+v_B=1/6\,m/s \quad (1)$$: در یک ثانیه



فرض دوم: دو جسم با سرعت ثابت در یک جهت حرکت می‌کنند. متحرک A به اندازهٔ v_A و متحرک B به اندازهٔ v_B در هر ثانیه جابه‌جا می‌شوند و چون در هر $5s$ فاصلهٔ دو متحرک ۳ متر اضافه می‌شود باید سرعت $v_B>v_A$ باشد. پس این دو متحرک در هر ثانیه $0/6$ متر از هم دورتر خواهند شد:

$$\Delta x_{AB}=v_B-v_A \Rightarrow v_B-v_A=0/6 \quad (2)$$

$$(1)\ و\ (2) \Rightarrow \begin{cases} v_A+v_B=1/6 \\ v_B-v_A=0/6 \end{cases} \Rightarrow 2v_B=2/2 \Rightarrow \begin{cases} v_B=1/1\,m/s \\ v_A=0/5m/s \end{cases}$$



میانبر اگر دو متحرک در یک جهت در حال حرکت باشند می‌توان یکی از آن‌ها را ساکن فرض کرد که دیگری با تندی $|v_A-v_B|$ نسبت به آن در حرکت است.

$$\Delta x=|v_A-v_B|t$$

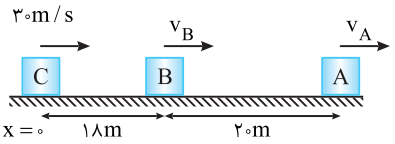
و اگر دو متحرک در خلاف جهت هم در حال حرکت باشند آن‌گاه:

$$\Delta x=(v_A+v_B)t$$

C ۲۵۷ ۲

خط فکری شکل مسئله را رسم کنید و داده‌های مسئله را روی شکل به‌طور کامل نمایش دهید. سپس معادلهٔ حرکت هریک از سه متحرک را بنویسید آن‌گاه مرحله به مرحله مسئله را حل کنید.

۱ اگر مکان C را مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت در نظر بگیریم، معادلهٔ حرکت هر متحرک خواهد شد: $x_A = v_A t + ۳۸$ ، $x_B = v_B t + ۱۸$ ، $x_C = ۳۰t$



۲ در لحظهٔ $t = ۳s$ متحرک‌های B و C به هم رسیده‌اند بنابراین معادله‌های حرکت B و C را برابر قرار داده و v_B را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_C = ۳۰(۳) \\ x_B = ۳v_B + ۱۸ \end{cases} \xrightarrow{x_C = x_B} ۹۰ = ۳v_B + ۱۸ \Rightarrow ۳v_B = ۷۲$$

$$\Rightarrow v_B = ۲۴ m/s$$

۳ دو ثانیه پس از $t = ۳s$ یعنی در لحظهٔ $t = ۵s$ متحرک‌های A و C به هم رسیده‌اند از این رو x_A را برابر x_C قرار داده و سرعت A (v_A) را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_C = ۳۰(۵) \\ x_A = ۵v_A + ۳۸ \end{cases} \xrightarrow{x_C = x_A} ۱۵۰ = ۵v_A + ۳۸ \Rightarrow ۵v_A = ۱۱۲$$

$$\Rightarrow v_A = ۲۲/۴ m/s$$

۴ اکنون با برابر قرار دادن معادلهٔ A و B زمان رسیدن B به A را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x_B = ۲۴t + ۱۸ \\ x_A = ۲۲/۴t + ۳۸ \end{cases} \xrightarrow{x_A = x_B} ۲۴t + ۱۸ = ۲۲/۴t + ۳۸ \Rightarrow ۱/۶t = ۲۰$$

$$\Rightarrow t = \frac{۲۰۰}{۱۶} = ۱۲/۵s$$

۵ پس در لحظهٔ $t = ۱۲/۵s$ متحرک B به A می‌رسد یعنی $\Delta t = ۱۲/۵ - ۵ = ۷/۵s$ بعد از سبقت C از A این اتفاق می‌افتد.

B ۲۵۸ ۳

۱ متحرک A از نقطهٔ P شروع به حرکت کرده، ۴s بعد متحرک B از نقطهٔ O به راه می‌افتد و بعد از ۴s با متحرک A، از نقطهٔ Q می‌گذرد. بنابراین مدت زمان حرکت A از P تا Q به اندازهٔ $۴+۴=۸s$ طول کشیده است.



۲ سرعت A ثابت و برابر $۵m/s$ است. بنابراین فاصلهٔ P تا Q خواهد شد.

$$\Delta x = vt \Rightarrow PQ = ۵ \times ۸ = ۴۰m$$

۳ متحرک B مسیر OQ را در مدت ۴s طی کرده است. بنابراین OQ را حساب می‌کنیم. با توجه به شکل:

$$OQ = OP + PQ = ۱۸ + ۴۰ \Rightarrow OQ = ۵۸m$$

۴ سرعت B خواهد شد:

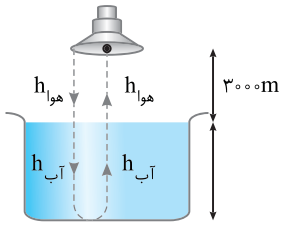
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B = \frac{۵۸}{۴} \Rightarrow v_B = ۱۴/۵ m/s$$

B ۲۵۹ ۱

خط فکری صوت از فرستنده به سمت آب می‌رود سپس وارد آب شده به کف اقیانوس برخورد کرده و به سطح آب بازمی‌گردد و وارد هوا شده و به محل گیرنده می‌رسد. یعنی در طول مسیر حرکت صوت از دو بخش $۲h_{هوا}$ و $۲h_{آب}$ تشکیل شده است. بنابراین شما ابتدا باید مدت زمان حرکت صوت در هوا را به‌دست آورده و این زمان را از ۴۰s کل حرکت کم کنید تا بتوانید عمق آب را حساب کنید.

۱ تندی صوت در هوا ثابت و برابر $۳۰۰m/s$ است و مسافتی که صوت در هوا طی می‌کند برابر $۲h = ۶۰۰۰m$ است بنابراین زمان حرکت صوت در هوا را می‌توان به‌دست آورد.

$$\ell = vt \Rightarrow ۲h_{هوا} = v_{هوا} \times t_{هوا} \Rightarrow ۶۰۰۰ = ۳۰۰ \times t_{هوا} \Rightarrow t_{هوا} = ۲۰s$$



۲ صوت ۲۰s در هوا در حال حرکت است و بنابراین مدت $۴۰ - ۲۰ = ۲۰s$ نیز در آب طی کرده است.

۳ اکنون عمق آب را حساب می‌کنیم.

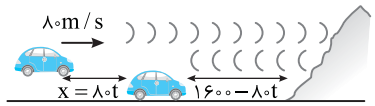
$$\ell = vt \Rightarrow ۲h_{آب} = ۱۲۰۰ \times ۲۰ \Rightarrow ۲h_{آب} = ۲۴۰۰۰ \Rightarrow h_{آب} = ۱۲۰۰۰m = ۱۲km$$

C ۲۶۰ ۱

اگر زمانی که طول می‌کشد تا راننده صدای پژواک را بشنود برابر t فرض کنیم در این مدت خودرو با تندی $۸۰m/s$ مسافت $x = ۸۰t$ جلو می‌آید و صوت نیز مسافت $۱۶۰۰ + ۱۶۰۰ - x$ یعنی $۳۲۰۰ - x$ را طی می‌کند بنابراین می‌توان نوشت:

$$\ell_{صوت} = v_{صوت} t \Rightarrow ۳۲۰۰ - x = ۳۲۰t \xrightarrow{x = ۸۰t} ۳۲۰۰ - ۸۰t = ۳۲۰t$$

$$\Rightarrow ۳۲۰۰ = ۴۰۰t \Rightarrow t = ۸s$$



B ۲۶۱ ۴

خط فکری اگر شما از یک پله برقی که در حال بالا رفتن است بالا بروید قطعاً زمان رسیدن شما به انتهای پله کمتر از زمانی است که روی پله برقی بایستید. در واقع در حالت اول تندی حرکت شما با تندی حرکت پله جمع می‌شود و اگر زمان حرکت پله $t_۱$، زمانی که شما از پلکان ساکن بالا می‌روید $t_۲$ و زمان حرکت پله و شما با هم t فرض شود. به کمک جمع تندی‌ها مسئله قابل حل است.

$$v = v_۱ + v_۲ \xrightarrow[\text{طول پلکان} = L]{v = \frac{\ell}{t}} \frac{\ell}{t} = \frac{\ell}{t_۱} + \frac{\ell}{t_۲} \xrightarrow{t_۱ = ۱min, t_۲ = ۳min}$$

$$\frac{۱}{t} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow t = \frac{۳}{۴} min \Rightarrow t = ۴۵s$$

B ۲۶۲ ۳

خط فکری مجدداً با مسئله‌ای سروکار داریم که در آن از شما مقایسهٔ مسافت طی شده و جابه‌جایی خواسته شده است. ابتدا شما باید مدت زمان حرکت دو قطار از لحظه‌ای که فاصلهٔ آن‌ها از هم $۸۰km$ بوده تا لحظه‌ای که به هم برخورد می‌کنند را بیابید سپس مسافت و جابه‌جایی در این مدت را به‌دست بیاورید.

۱ سرعت حرکت هر قطار $۴۰km/h$ است یعنی در هر ساعت هر قطار ۴۰km جابه‌جا می‌شود که جمعاً $۸۰km$ شده در نتیجه دو قطار پس از ۱h به هم برخورد می‌کنند.

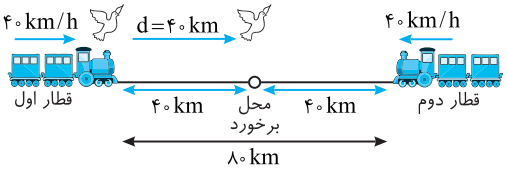
۲ در مدت ۱h پرنده با تندی $۶۰km/h$ مسافتی که طی می‌کند برابر است با:

$$\ell = vt \Rightarrow \ell = ۶۰ \times ۱ = ۶۰km$$

۳ به شکل دقت کنید. جابه‌جایی پرنده از محل شروع پرواز تا محل برخورد برابر $d = ۴۰km$ است.

۴ نسبت ℓ به d خواهد شد:

$$\frac{\ell}{d} = \frac{۶۰}{۴۰} = \frac{۳}{۲}$$



B ۲۶۳ ۲

این نوع پرسش‌ها به مبحث جمع سرعت‌ها مربوط است.

وقتی شناگر در جهت جریان آب شنا می‌کند، سرعت شناگر نسبت به ساحل برابر جمع اندازهٔ سرعت‌ها می‌شود (v_S+v_W) و هنگامی که در خلاف جهت جریان آب شنا می‌کند، سرعت شناگر نسبت به ساحل برابر تفاضل اندازهٔ سرعت‌ها می‌شود (v_S-v_W)، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=v\Delta t\Rightarrow\begin{cases}۹۰۰=(v_S+v_W)(۹۰)\Rightarrow v_S+v_W=۱۰\\ ۹۰۰=(v_S-v_W)(۱۵۰)\Rightarrow v_S-v_W=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{v_S+v_W}{v_S-v_W}=\frac{۱۰}{۶}=\frac{۵}{۳}\Rightarrow ۳v_S+۳v_W=۵v_S-۵v_W\Rightarrow ۸v_W=۲v_S$$

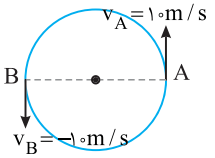
$$\Rightarrow\frac{v_S}{v_W}=۴$$

B ۲۶۴ ۲

۱ مدت زمان بازهٔ زمانی $t_۱=\frac{۱}{۴}s$ تا $t_۲=\frac{۵}{۴}s$ برابر $\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۴}=۱s$ است.

۲ ذره در هر ۲s یک دور کامل می‌چرخد، بنابراین در مدت ۱s، ذره نیم دور می‌چرخد. به‌طور مثال از نقطهٔ A با تندی ثابت ۱۰m/s به نقطهٔ B می‌رود.

۳ بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر حرکت مماس است، بردارهای سرعت دو نقطهٔ A و B را رسم می‌کنیم.



۴ اگر اندازه سرعت در نقطهٔ A، ۱۰m/s باشد در نقطهٔ B سرعت $-۱۰m/s$ بوده و تغییرات سرعت خواهد شد:

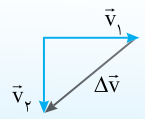
$$|\Delta v|=|-۱۰-۱۰|=۲۰m/s$$

۵ شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰}{۱}\Rightarrow a_{av}=۲۰m/s^۲$$

C ۲۶۵ ۲

یادداشت ریاضی برای نشان دادن بردار تفاضل دو بردار $(\vec{v}_۲-\vec{v}_۱)$، دو بردار را مطابق شکل از یک نقطه رسم کرده سپس از انتهای بردار اول $(\vec{v}_۱)$ برداری به انتهای بردار دوم $(\vec{v}_۲)$ رسم می‌کنیم.



۱ ابتدا محیط دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=۲\pi r\xrightarrow{r=۲۰m}\ell=۲\pi\times۲۰=۴۰\pi\ m$$

۲ زمان یک دور زدن متحرک که با تندی $۱۰\pi\ m/s$ محیط دایره را طی می‌کند، خواهد شد:

$$s=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۱۰\pi=\frac{۴۰\pi}{t}\Rightarrow t=۴s$$

۳ اکنون باید مشخص کنیم که در هر ثانیه متحرک روی دایره چه مقدار می‌چرخد؟ از یک تناسب ساده کمک می‌گیریم.

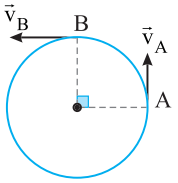
۴s	۱ دور
۱s	?

$$\Rightarrow ?=\frac{۱}{۴}\text{ دور}$$

۴ $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره یعنی متحرک کمان $\frac{\pi}{۲}(۹۰^\circ)$ طی می‌کند و به‌طور مثال از نقطهٔ A در سوی نشان داده شده به نقطهٔ B می‌رود.

۵ بردار سرعت در نقطهٔ A و B را مماس بر دایره رسم می‌کنیم.

۶ تغییر بردار سرعت را به کمک رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم.



$$\Delta v=\sqrt{v_A^۲+v_B^۲}=\sqrt{(۱۰\pi)^۲+(۱۰\pi)^۲}$$

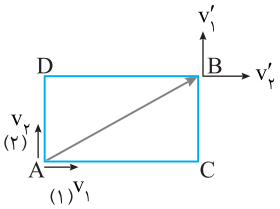
$$\Rightarrow\Delta v=۱۰\sqrt{۲}\pi\ m/s$$

۷ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۰\sqrt{۲}\pi}{۱}=۱۰\sqrt{۲}\pi\ m/s^۲$$

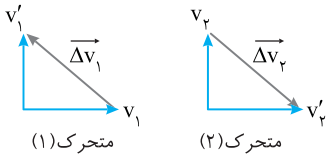
C ۲۶۶ ۱

گزارهٔ (الف): طول مسیر و تندی حرکت دو متحرک یکسان است بنابراین زمان حرکت از A تا B روی دو مسیر برابر است. از طرفی جابه‌جایی هر دو متحرک برابر $\overrightarrow{AB}$ است. بنابراین $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$ یکسان بوده و بردار سرعت متوسط یکی است و گزارهٔ (الف) درست است.



گزارهٔ (ب): همان‌گونه که در بالا بیان کردیم طول مسیر، تندی حرکت دو متحرک و زمان حرکت یکسان بوده و در نتیجه تندی متوسط در کل مسیر $(s_{av}=L/\Delta t)$ برابر است و گزارهٔ (ب) درست است.

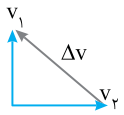
گزارهٔ (پ): به شکل دقت کنید. بردار تغییر سرعت متحرک (۱) و متحرک (۲) به‌صورت زیر است:



بردار شتاب متوسط $(\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t})$ هم‌جهت بردار تغییرات سرعت است، بردار تغییرات سرعت قرینهٔ هم بوده بنابراین بردار شتاب متوسط دو متحرک نیز قرینهٔ هم بوده و گزارهٔ (پ) نادرست است.

B ۲۶۷ ۲

یادآوری ریاضی بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v}=\vec{v}_۲-\vec{v}_۱)$ برداری است که از انتهای $v_۱$ به انتهای $v_۲$ مطابق شکل رسم می‌شود.

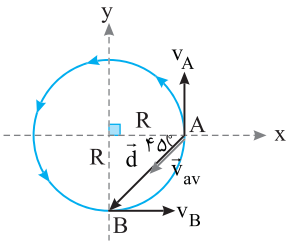


یادآوری بردار سرعت متوسط در جهت بردار جابه‌جایی است و بردار شتاب متوسط در جهت بردار تغییر سرعت است.

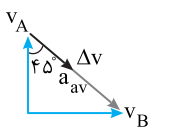
نکته سرعت در هر نقطه بر مسیر مماس است.

خط فکری باید بردار جابه‌جایی و بردار سرعت در نقاط A و B را رسم کرده سپس بردار سرعت متوسط و بردار شتاب متوسط را رسم کنید و زاویهٔ بین آن‌ها را حساب کنید.

۱ بردار جابه‌جایی از A تا B را رسم می‌کنیم $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$. این بردار با امتداد افقی مطابق شکل زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.



۲ بردارهای $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ را از یک نقطه مطابق شکل رسم می‌کنیم. سپس بردار تغییر سرعت را از انتهای $\vec{v}_A$ به انتهای $\vec{v}_B$ می‌کشیم. این بردار با امتداد قائم زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.



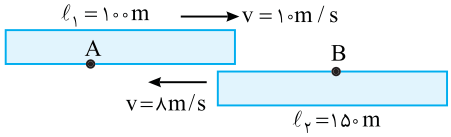
۳ از این‌رو زاویهٔ بین بردار $\vec{d}$ و $\Delta\vec{v}$ یعنی همان زاویهٔ بین بردار سرعت متوسط و بردار شتاب متوسط ۹۰° می‌شود.



A ۲۶۸ ۱

به شکل زیر به دقت نگاه کنید. حال خود را به جای ناظر A قرار دهید که از پنجره به بیرون نگاه می‌کند. این ناظر قطار ۱۵۰ متری را می‌بیند که از جلوی چشمانش می‌گذرد. خود را ساکن فرض کنید قطار ۱۵۰ متری با سرعت $\vec{v}_1+\vec{v}_2=10+8=18m/s$ از مقابل دیدگان شما می‌گذرد و زمان عبور آن از مقابل شما خواهد شد:

$$v=\frac{\ell}{t}\Rightarrow t_1=\frac{\ell}{v}=\frac{150}{18}$$



اکنون خود را جای ناظر B قرار دهید چه طولی از قطار از مقابل شما می‌گذرد؟ حق با شماست ۱۰۰ متر از جلوی شما با سرعت $18m/s$ نسبت به شما می‌گذرد، بنابراین زمان عبور قطار از مقابل ناظر B برابر خواهد شد با:

$$t_2=\frac{\ell}{v}\Rightarrow t_2=\frac{100}{18}$$

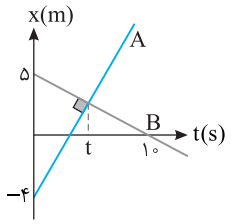
نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ برابر است با:

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{\frac{150}{18}}{\frac{100}{18}}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=1/5$$

B ۲۶۹ ۴

یادآوری ریاضی هرگاه دو خط A و B با شیب‌های m_A و m_B بر هم عمود باشند، آن‌گاه $m_Am_B=-1$ است.

۱ شیب نمودار مکان-زمان برابر سرعت متحرک است. با توجه به نمودار، شیب خط B را به‌دست می‌آوریم:



$$m_B=\frac{0-5}{10}=-\frac{1}{2}\Rightarrow v_B=-\frac{1}{2}m/s$$

۲ شیب نمودار A یعنی سرعت A خواهد شد:

$$m_A=-\frac{1}{m_B}\Rightarrow m_A=2\Rightarrow v_A=2m/s$$

۳ معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و مکان‌ها را مساوی قرار می‌دهیم تا زمان رسیدن دو متحرک را به‌دست آوریم.

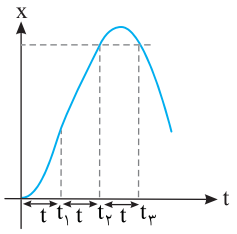
$$\begin{cases}x_A=2t-4\\ x_B=-\frac{1}{2}t+5\end{cases}\xrightarrow{x_A=x_B}2t-4=-\frac{1}{2}t+5\Rightarrow\frac{5}{2}t=9\Rightarrow t=3/6s$$

۴ مکان به هم رسیدن دو متحرک برابر خواهد شد با:

$$x=2t-4\Rightarrow x=7/2-4=3/2m$$

B ۲۷۰ ۱

۱ نمودار از ۰ تا t_1 سهمی است و در لحظهٔ $t=0$ نمودار بر محور زمان مماس بوده و سرعت اولیه صفر است و سرعت در لحظهٔ t_1 شیب خط مماس بر نمودار بوده و آن را v فرض می‌کنیم شتاب متوسط خواهد شد:



$$a_{av}=\frac{v-0}{t_1-0}\Rightarrow a_{av_1}=\frac{v}{t}$$

۲ نمودار از t_1 تا t_2 خط راست است و سرعت در این بازه برابر شیب خط است و شتاب متوسط در این بازه صفر است.

$$a_{av_2}=0$$

۳ نکتهٔ مهم این است که سرعت در بازهٔ t_1 تا t_2 با سرعت در لحظهٔ t_1 و سرعت در لحظهٔ t_2 برابر است.

$$v_{t_1}=v=v_{t_2}$$

۴ نمودار در بازهٔ t_2 تا t_3 سهمی است و در لحظهٔ t_2 و t_3 مکان متحرک یکسان بوده و با توجه به اینکه سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس سهمی متقارن است شیب خط مماس در لحظهٔ t_2 و t_3 هم‌اندازه و قرینهٔ هم است. یعنی در لحظهٔ t_2 سرعت v و در لحظهٔ t_3 سرعت $-v$ است و شتاب در این بازه خواهد شد:

$$|a_{av_3}|=\frac{|v_{t_3}-v_{t_2}|}{t_3-t_2}=\frac{|-v-v|}{t}=\frac{2v}{t}$$

۵ اندازهٔ شتاب در بازهٔ صفر تا t_2 نیز خواهد شد:

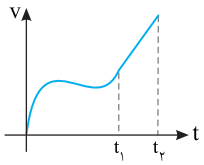
$$|a_{av_4}|=\frac{|v-0|}{t_2-0}=\frac{v}{2t}$$

بنابراین در بازهٔ t_2 تا t_3 شتاب متوسط از بقیهٔ بازه‌ها بیشتر است.

B ۲۷۱ ۲

خط فکری دقت کنید با نمودار سرعت - زمان سروکار داریم، از طرفی اگر در یک بازهٔ زمانی در هر لحظه سرعت لحظه‌ای از سرعت لحظه‌ای تمام لحظات بازهٔ زمانی دیگر بیشتر باشد قطعاً سرعت متوسط در بازهٔ زمانی اول از سرعت متوسط در بازهٔ زمانی دوم بیشتر است.

به نمودار نگاه کنید. در تمام لحظه‌های صفر تا t_1 سرعت لحظه‌ای از سرعت در تمام لحظه‌های t_1 تا t_2 کمتر است، بنابراین قطعاً سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا t_1 از سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 کمتر است و گزینهٔ (۲) درست است.



B ۲۷۲ ۱

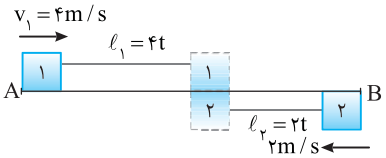
۱ مسافتی که هر متحرک درمدت t می‌پیماید تا دو متحرک به هم برسند خواهد شد:

متحرک (۱):

$$\ell=vt\Rightarrow\ell_1=4t$$

متحرک (۲):

$$\ell_2=v_2t\Rightarrow\ell_2=2t$$



۲ طول مسیر حرکت برابر است با:

$$AB=\ell_1+\ell_2=4t+2t\Rightarrow AB=6t$$

۳ مدت زمانی که متحرک (۱) مسیر AB را طی می‌کند حساب می‌کنیم:

$$AB=v_1t_1\Rightarrow 6t=4t_1\Rightarrow t_1=1/5t$$

۴ مدت زمانی که متحرک (۲) از B به A می‌رود خواهد شد:

$$AB=v_2t_2\Rightarrow 6t=2t_2\Rightarrow t_2=3t$$

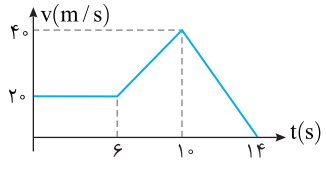
۵ بنابر فرض مسئله اختلاف زمانی t_1 و t_2، برابر t' است. از این‌رو:

$$t'=t_2-t_1=3t-1/5t=1/5t\Rightarrow\frac{t'}{t}=1/5$$

پنجره ۲ روبه‌روی ۳

B ۲۷۲ ۱

۱ **یادآوری** شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است.



۱ در بازهٔ ۰ تا ۶s سرعت ثابت و برابر $20m/s$ است و شتاب در کل این بازهٔ زمانی صفر است، بنابراین در $t=2s$ شتاب صفر است.

۲ در بازهٔ ۶s تا ۱۰s شتاب در تمام لحظات از جمله $t=8s$ ثابت و برابر است با:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{40-20}{10-6}\Rightarrow a=5m/s^2$$

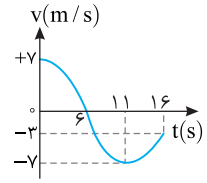
۳ در بازهٔ ۱۰s تا ۱۴s نیز شتاب در تمام لحظات از جمله $t=12s$ ثابت و برابر است با:

$$a=\frac{-40}{14-10}\Rightarrow a=-10m/s^2$$

۴ ۲۷۲ B

۲ شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av}=\frac{v-v_0}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{-۳-۷}{۱۶}=-\frac{۵}{۸}\,m/s^۲$$



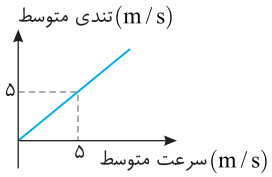
یادآوری شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر شتاب لحظه‌ای است و در نقاط max و min شیب نمودار سرعت - زمان (شتاب) صفر است.

در لحظهٔ $t=۱۱s$ شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان صفر شده $(a=۰)$ و شتاب قبل از این لحظه منفی و بعد از آن لحظه مثبت است یعنی شتاب در $t=۱۱s$ تغییر جهت می‌دهد.

نمای ۱۸

۱ ۲۷۲ B

۳ به نمودار دقت کنید. در تمام لحظات اندازهٔ تندی متوسط و سرعت متوسط برابر است. یعنی در هر بازهٔ زمانی دلخواه، مسافت طی شده و جابه‌جایی متحرک یکی است و این یعنی متحرک روی خط راست در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.



نمای ۲ و ۶

بازی با سؤال **متحرکی روی خط راست در راستای محور x‌ها در حرکت است. اگر در بازه‌ای جابه‌جایی آن d و مسافت طی شدهٔ آن L و $d=L$ باشد، کدام گزینه درست است؟**

۱) بردار مکان متحرک تغییر جهت نداده است.

۲) جهت حرکت متحرک تغییر نکرده است.

۳) بردار مکان یک بار تغییر جهت داده است.

۴) جهت حرکت یک بار تغییر کرده است.

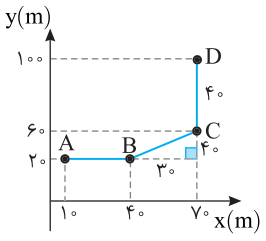
پاسخ **جابه‌جایی و مسافت طی شده با هم برابر است. زمانی این اتفاق می‌افتد که جسم بدون تغییر جهت روی خط راست در حرکت باشد.** گزینهٔ ۲

۲ ۲۷۲ B

۴ **یادآوری** تندی کمیت نرده‌ای اما سرعت و شتاب کمیت برداری است.

خط فکری برای یافتن اندازهٔ شتاب باید زمان را به کمک تندی به‌دست بیاورید اما برای به‌دست آوردن تغییر سرعت، قطعاً باید جهت بردار سرعت در نقطهٔ A و D را در نظر بگیرید.

۱ مسافت طی شده از A تا D را باید حساب کنیم، البته ابتدا باید طول BC را به‌دست بیاوریم.



$$BC=\sqrt{۳۰^۲+۴۰^۲}\Rightarrow BC=۵۰m$$

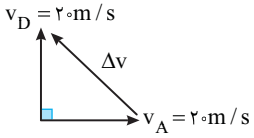
$$\ell=AB+BC+CD\Rightarrow \ell=۳۰+۵۰+۴۰$$

$$\Rightarrow \ell=۱۲۰m$$

۲ زمان را به کمک تندی متحرک حساب می‌کنیم.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow{s_{av}=۲۰m/s}۲۰=\frac{۱۲۰}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=۶s$$

۳ بردار سرعت در نقطهٔ A و نقطهٔ D برهم عمود هستند، بردار تغییر سرعت خواهد شد:



$$\Delta v=\sqrt{۲۰^۲+۲۰^۲}\Rightarrow \Delta v=۲۰\sqrt{۲}\,m/s$$

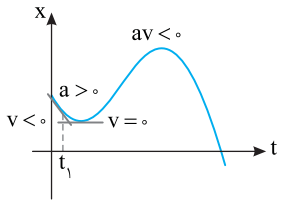
۴ شتاب متوسط خواهد شد:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}=\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۶}\Rightarrow a_{av}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۳}\,m/s^۲$$

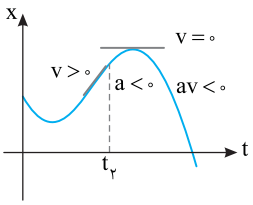
نمای ۱۵

۳ ۲۷۲ B

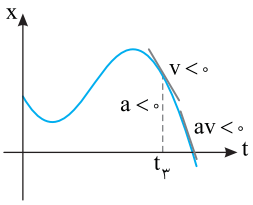
۵ در حرکت تندشونده تندی در حال افزایش است. مطابق شکل بعد از لحظهٔ $t_۱$ سرعت صفر می‌شود. پس در لحظهٔ $t_۱$ حرکت کندشونده است. البته در لحظهٔ $t_۱$ شیب خط مماس منفی بوده، یعنی سرعت منفی اما دهانه نمودار مکان - زمان رو به بالا یعنی $a>۰$ بوده، بنابراین $av<۰$ است و در لحظهٔ $t_۱$ حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۱) نادرست است.



مطابق شکل بعد از $t_۲$ در لحظه نشان داده شده سرعت صفر می‌شود. پس در لحظهٔ $t_۲$ نیز حرکت کندشونده است و گزینهٔ (۲) و (۴) نادرست است.



مطابق شکل بعد از $t_۳$ شیب خط مماس بر نمودار در حال افزایش است و مماس به حالت قائم نزدیک می‌شود، یعنی اندازه سرعت (تندی) افزایش می‌یابد، پس حرکت در این لحظه تندشونده است.



نمای ۸

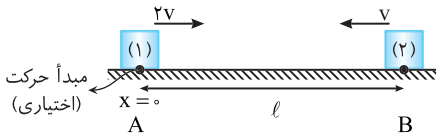
۱ ۲۷۲ B

۶ معادلهٔ $x-t$ درجهٔ اول است و متحرک دارای سرعت ثابت و شتاب حرکت صفر است.

نمای ۱۶

۱ ۲۷۲ B

۷ نقطهٔ A را مبدأ و جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم. فاصلهٔ AB را با ℓ نمایش می‌دهیم.



۱ ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x=vt+x_۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۲vt\\x_۲=-vt+L\end{cases}$$

۲ دو متحرک بعد از ۲h به هم می‌رسند، یعنی اگر در معادلهٔ حرکت $x_۱$ و $x_۲$ به جای t، ۲h قرار بدهیم $x_۱$ با $x_۲$ برابر می‌شود.

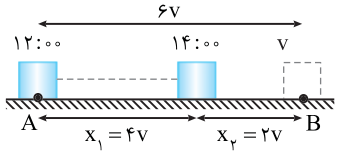
$$t=۲h\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۴v\\x_۲=-۲v+\ell\end{cases}\xrightarrow{x_۱=x_۲}۴v=-۲v+\ell\Rightarrow\ell=۶v$$

۳ مکان رسیدن دو متحرک به هم خواهد شد:

$$x_۱=۲vt\xrightarrow[\text{مکان رسیدن دو متحرک به هم}]{\Delta t=۲h}x=۴v$$

۴ با توجه به شکل از محل رسیدن دو متحرک به‌هم تا زمانی که متحرک (۱) به مکان B می‌رسد متحرک باید $\Delta x=۲v$ جابه‌جا شود: $\Delta x=۲vt\Rightarrow ۲v=۲vt\Rightarrow t=۱h$

بنابراین یک ساعت بعد از ساعت ۱۴:۰۰ متحرک به نقطهٔ B می‌رسد یعنی در ساعت ۱۵:۰۰.

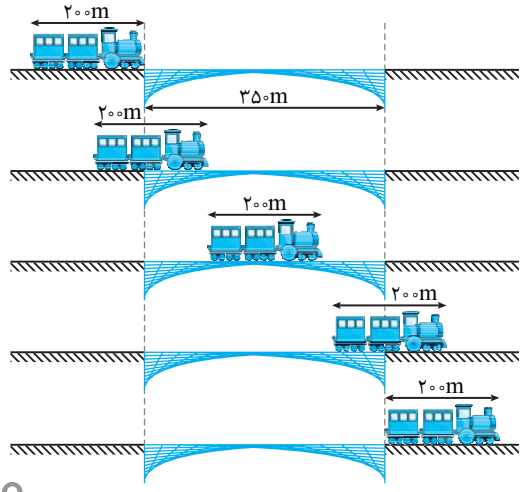


نمای ۱۱

B ۲۷۲ ۴
۸ در تمام شکل‌های زیر به غیر از شکل ابتدایی و نهایی قطار یا قسمتی از قطار روی پل قرار دارد بنابراین باید مدت زمانی که طول می‌کشد تا قطار به طور کامل از پل بگذرد را به‌دست آوریم:

$\Delta x = ۲۰۰ + ۳۵۰ = ۵۵۰ m$

$\Delta x = vt \Rightarrow ۵۵۰ = ۲۰t \Rightarrow t = ۲۷/۵ s$



نمای ۱۲

B ۲۷۲ ۳
۹ متحرک در مدت $۳s$ خلاف جهت محور x با تندی ثابت مسافت $۶m$ را طی کرده یعنی جابه‌جایی متحرک $\Delta x = -۶m$ است بنابراین سرعت متحرک خواهد شد:

$v = v_{av} = \frac{\Delta x_{\circ}}{\Delta t} = -۲ m/s$

معادلهٔ حرکت متحرک به‌صورت $x = -۲t + x_{\circ}$ بوده و چون متحرک تغییر جهت داده، پس متحرک از مبدأ مکان $(x = ۰)$ عبور می‌کند.

بنابراین نمودار $x-t$ شیب منفی $(v$، منفی است$)$ دارد و محور افقی $(x = ۰)$ را قطع می‌کند که با این شرایط تنها گزینهٔ (۳) درست است.

نمای ۱۳

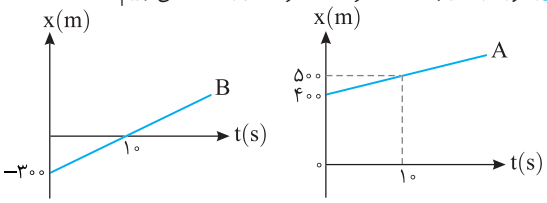
B ۲۷۲ ۲
۱۰ **خط فکری** ابتدا با توجه به نمودار باید معادلهٔ حرکت دو متحرک را بنویسیم.

فاصلهٔ بین دو متحرک برابر تفاضل مکان دو متحرک یعنی $|x_A - x_B|$ است.

نکته اگر نمودار $x-t$ متحرکی به صورت خط راست باشد، حرکت متحرک با سرعت ثابت بوده و معادلهٔ حرکت آن به صورت $x = vt + x_{\circ}$ است.

یادآوری شیب نمودار $x-t$ برابر سرعت متحرک است.

۱ با توجه به شیب خط‌ها، سرعت متحرک‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B = \frac{-۳۰۰}{۱۰} = -۳۰ m/s \quad v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_A = \frac{۱۰۰}{۱۰} = ۱۰ m/s$

۲ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم.

$x_A = v_A t + x_{\circ A} \xrightarrow[x_{\circ A} = ۴۰۰ m]{v_A = ۱۰ m/s} x_A = ۱۰t + ۴۰۰$

$x_B = v_B t + x_{\circ B} \xrightarrow[x_{\circ B} = -۳۰۰ m]{v_B = -۳۰ m/s} x_B = -۳۰t - ۳۰۰$

۳ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۶۰۰ متر است، بنابراین:

$|x_A - x_B| = ۶۰۰ \xrightarrow[x_B = -۳۰t - ۳۰۰]{x_A = ۱۰t + ۴۰۰} |۱۰t + ۴۰۰ - (-۳۰t - ۳۰۰)| = ۶۰۰$

$\Rightarrow |-۲۰t + ۷۰۰| = ۶۰۰$

نکته در حل معادله‌های قدرمطلقی حواستان باشد که: $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$

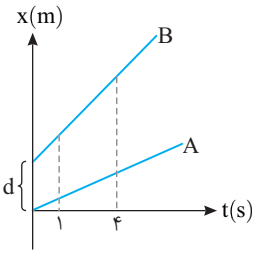
۴ حال معادله را حساب می‌کنیم:

$|-۲۰t + ۷۰۰| = ۶۰۰ \Rightarrow -۲۰t + ۷۰۰ = \pm ۶۰۰$

$\begin{cases} -۲۰t + ۷۰۰ = ۶۰۰ \Rightarrow -۲۰t = -۱۰۰ \Rightarrow t_۱ = ۵s \\ -۲۰t + ۷۰۰ = -۶۰۰ \Rightarrow -۲۰t = -۱۳۰۰ \Rightarrow t_۲ = ۶۵s \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۶۵}{۵} = ۱۳$

نمای ۱۴

بازی با سوال شکل مقابل نمودار مکان - زمان دو متحرک را نشان می‌دهد، اگر فاصلهٔ دو متحرک از هم در لحظهٔ $t = ۴s$، دو برابر فاصلهٔ دو متحرک در $t = ۱s$ باشد، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = ۵s$ چند d است؟



۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

پاسخ ۱ معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$x = vt + x_{\circ} \begin{cases} \xrightarrow{A} x_A = v_A t \\ \xrightarrow{B} x_B = v_B t + d \end{cases}$

۲ مکان دو متحرک را در لحظهٔ $t = ۱s$ و $t = ۴s$ به‌دست می‌آوریم.

$t = ۱s \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A \\ x_B = v_B + d \end{cases} \quad t = ۴s \Rightarrow \begin{cases} x'_A = ۴v_A \\ x'_B = ۴v_B + d \end{cases}$

۳ فاصله دو متحرک در دو لحظهٔ $t = ۱s$ و $t = ۴s$ را حساب می‌کنیم.

$t = ۱s \Rightarrow x_B - x_A = v_B + d - v_A \Rightarrow \Delta x = (v_B - v_A) + d$

$t = ۴s \Rightarrow x'_B - x'_A = ۴v_B + d - ۴v_A \Rightarrow \Delta x' = ۴(v_B - v_A) + d$

۴ با توجه به فرض مسئله $\Delta x'/\Delta x$ برابر ۲ است بنابراین:

$۴(v_B - v_A) + d = ۲[(v_B - v_A) + d]$

$\Rightarrow ۴(v_B - v_A) + d = ۲(v_B - v_A) + ۲d$

$\Rightarrow ۲(v_B - v_A) = d \Rightarrow (v_B - v_A) = \frac{d}{۲} \quad (I)$

۵ مکان دو متحرک در $t = ۵s$ را حساب می‌کنیم.

$x''_A = ۵v_A \quad , \quad x''_B = ۵v_B + d$

۶ فاصلهٔ دو متحرک در $t = ۵s$ خواهد شد:

$x''_B - x''_A = ۵v_B + d - ۵v_A \Rightarrow \Delta x''_{(۵)} = ۵(v_B - v_A) + d$

از رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم. $\Delta x''_{(۵)} = ۵(\frac{d}{۲}) + d \Rightarrow \Delta x'' = \frac{۷}{۲} d$

گزینهٔ ۱

پنجره ۴

A ۲۷۳ ۲
یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، معادلهٔ مکان -زمان یک تابع درجه ۲ به‌صورت $x = \frac{۱}{۲} at^۲ + v_{\circ} t + x_{\circ}$ است.

مکان اولیهٔ متحرک $x_{\circ} = ۰$ و سرعت اولیهٔ متحرک $v_{\circ} = ۳ m/s$ بوده و در لحظهٔ $t = ۲s$، مکان متحرک $+۱۲ m/s$ است. با قرار دادن این داده‌ها در معادله، شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$۱۲ = \frac{۱}{۲} a(۲)^۲ + ۳ \times ۲ + ۰ \Rightarrow a = ۳ m/s^۲$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ حرکت را بنویسیم.

$x = \frac{۳}{۲} t^۲ + ۳t$

A ۲۷۴ ۳

با توجه به معادلهٔ جابه‌جایی - زمان حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 20=\frac{1}{2}\times 4\times(2)^2+v_0\times 2\Rightarrow v_0=6m/s$$

A ۲۷۵ ۱

با توجه به فرض مسئله مکان اولیهٔ متحرک $x_0=0$ است. اندازهٔ سرعت اولیهٔ متحرک $8m/s$ و اندازهٔ شتاب آن $-3m/s^2$ است. بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان می‌توانیم مکان متحرک را در لحظهٔ $t=4s$ حساب کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-3)(4)^2+8\times 4+0\Rightarrow x=-24+32\Rightarrow x=8m$$

بردار مکان خواهد شد:

$$\vec{x}=8\vec{i}$$

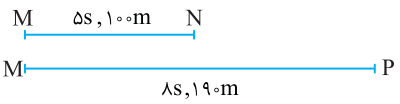
A ۲۷۶ ۴

در معادلهٔ مکان - زمان در بازهٔ زمانی $47-2=45s$ متحرک با شتاب ثابت $a=2m/s^2$ جابه‌جایی ۲۱۱۵ متر را طی کرده است بنابراین:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+vt\Rightarrow 2115=\frac{1}{2}\times 2\times(45)^2+v\times 45\Rightarrow 90=v\times 45\Rightarrow v=2m/s$$

B ۲۷۷ ۳

خط فکری متحرک در مدت $5s$ جابه‌جایی $MN=100m$ و در مدت $3s$ جابه‌جایی $NP=90m$ طی کرده است و در بازهٔ زمانی $5+3=8s$ جابه‌جایی کل $MP=100+90=190m$ را طی می‌کند. بنابراین شما کافی است به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان حرکت با شتاب ثابت یک دستگاه دو معادله دو مجهول بنویسید و آن را حل کنید.



$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\begin{cases}100=\frac{1}{2}a(25)+5v_0\\190=\frac{1}{2}a(64)+8v_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5a+2v_0=40\\4a+v_0=23/75\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3a=-7/5\Rightarrow a=2/5m/s^2$$

بازی با سؤال **متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست، در ۳ ثانیه آغازین حرکت، جابه‌جایی ۱۵ متر و ۲ ثانیه بعد جابه‌جایی ۲۵ متر را می‌پیماید. سرعت اولیه متحرک چند m/s است؟**

۱) $+0/5$ ۲) $-0/5$ ۳) $+1$ ۴) -1

پاسخ ۱ **متحرک در مدت $3s$، $15m$ طی کرده بنابراین می‌توانیم بنویسیم:**

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[x=15m]{t=3s}15=\frac{1}{2}\times a\times 9+3v_0\Rightarrow 30=9a+6v_0$$

$$\Rightarrow 10=3a+2v_0\quad (I)$$

۲ **متحرک در کل مدت $3s+2s=5s$ جمعاً $15+25=40m$ جابه‌جا شده است.**

از این رو:

$$40=\frac{1}{2}\times a\times 25+5v_0\Rightarrow 40=12/5a+5v_0\Rightarrow 8=2/5a+v_0\quad (II)$$

۳ **با حل دو معادلهٔ (I) و (II) داریم:**

$$a=3m/s^2, v_0=0/5m/s$$

گزینهٔ ۱

A ۲۷۸ ۱

با توجه به تعریف شتاب خواهیم داشت:

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}\xrightarrow[t_2=5s,t_1=3s]{\vec{a}=-4\vec{i},v_1=8\vec{i}}-4\vec{i}=\frac{\vec{v}_2-8\vec{i}}{5-3}\Rightarrow -8\vec{i}=\vec{v}_2-8\vec{i}\Rightarrow\vec{v}_2=0$$

A ۲۷۹ ۴

۱ با توجه به معادله سرعت - زمان خواهیم داشت:

$$v=at+v_0\xrightarrow{t_1=2s}5=2a+v_0\xrightarrow{t_2=6s}12=6a+v_0\Rightarrow 7=4a\Rightarrow a=1/75m/s^2$$

$$5=2\times 1/75+v_0\Rightarrow v_0=1/5m/s$$

۲ در این صورت سرعت در لحظه $t=3s$ خواهد شد:

$$v=1/75t+1/5\Rightarrow v=1/75\times 3+1/5\Rightarrow v=6/75m/s$$

B ۲۸۰ ۴

معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم و مقادیر t و $2t$ را در آن قرار می‌دهیم. البته حواسمان هست که متحرک دارای سرعت اولیه (v_0) بوده و حرکت آن تندشونده است. یعنی شتاب a و سرعت هم‌علامت بوده و با گذشت زمان سرعت در حال افزایش است بنابراین:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}v_1=at+v_0\\v_2=a(2t)+v_0=2at+v_0\end{cases}\Rightarrow v_1<v_2<2v_1$$

البته شاید یک مثال عددی کار را برای شما راحت‌تر کند فرض کنید: $at=3$ و $v_0=2$ است از این‌رو:

$$\begin{cases}v_1=3+2=5\\v_2=6+2=8\end{cases}\Rightarrow 5<8<10\Rightarrow 5<8<2\times 5$$

B ۲۸۱ ۱

یادآوری دو ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$.

۱ معادلهٔ سرعت زمان در حرکت با شتاب ثابت به‌صورت $v=at+v_0$ است. معادلهٔ داده شده در مسئله را با این معادله مقایسه کرده، شتاب و سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}v=at+v_0\\v=-2t+4\end{cases}\Rightarrow a=-2m/s^2, v_0=4m/s$$

۲ در لحظهٔ $t=4s$ و $t=6s$ مکان‌ها را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}(-2)(4)^2+4\times 4+x_0\Rightarrow x_1=x_0\\x_2=\frac{1}{2}(-2)(6)^2+4\times 6+x_0\Rightarrow x_2=-12+x_0\end{cases}$$

۳ بزرگی جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ سوم خواهد شد: $|\Delta x|=|-12|=12m$

بازی با سؤال **معادله سرعت - زمان متحرکی (در SI) به صورت $v=4t+3$ است. شتاب و جابه‌جایی متحرک در $0/5s$ آغازین حرکت به ترتیب از راست به چپ چند m/s^2 و چند متر است؟**

۱) ۴، ۲ ۲) ۶، ۴ ۳) ۲، ۶− ۴) ۲، ۴

پاسخ **ابتدا با مقایسه معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت با معادله سرعت - زمان مسئله، شتاب و سرعت اولیه را مشخص می‌کنیم.**

$$\begin{cases}v=at+v_0\\v=4t+3\end{cases}\Rightarrow a=4m/s^2, v_0=3m/s$$

جابه‌جایی متحرک را در مدت $0/5s$ به دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\Delta x=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}\Rightarrow\Delta x=2m$$

گزینهٔ ۱

A ۲۸۲ ۲

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان، سرعت اولیهٔ متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 24=\frac{1}{2}\times 2\times(4)^2+4v_0\Rightarrow 24=16+4v_0\Rightarrow v_0=2m/s$$

۲ سرعت در پایان این مدت خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2\times 4+2=10m/s$$

میانبر سرعت در پایان مدت t را می‌توان از رابطهٔ زیر نیز به‌دست آورد.

$$\Delta x=-\frac{1}{2}at^2+vt$$

A ۲۸۳ ۲

خط فکری اگر مشتق‌گیری بلد بودید و می‌دانستید که مشتق معادلهٔ مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است، مسئله را راحت حل می‌کردید. اما اکنون باید معادلهٔ مکان - زمان داده شده را با معادلهٔ حرکت کلاسیک حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست آورد.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ x=5t^2-3t+1 \end{cases} \xrightarrow[v=at+v_0]{x_0=1m\ ,\ v_0=-3m/s\ ,\ \frac{1}{2}a=5\Rightarrow a=10m/s^2} v=10t-3$$

۲ لحظه‌ای را که در آن سرعت $6m/s$ است، به‌دست می‌آوریم:

$$6=10t-3\Rightarrow t=0/9s$$

۳ زمان به‌دست آمده را در معادلهٔ مکان - زمان قرار می‌دهیم.

$$x=5t^2-3t+1\xrightarrow{t=0/9s}x=5(0/9)^2-3(0/9)+1\Rightarrow x=2/35m$$

A ۲۸۴ ۲

۱ در مبدأ زمان متحرک در مکان $+2m$ است، یعنی مکان اولیهٔ متحرک $x_0=+2m$ است.

۲ با مقایسه معادله سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت با معادله سرعت - زمان مسئله، شتاب و سرعت اولیه مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} v=at+v_0 \\ v=3t-6 \end{cases}\Rightarrow a=3m/s^2\ ,\ v_0=-6m/s$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان را در $t=3s$ حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times3\times9+3\times(-6)+2\Rightarrow x=13/5-18+2$$
$$\Rightarrow x=-2/5m$$

A ۲۸۵ ۲

بردار مکان، برداری است که از مبدأ مکان $(x=0)$ به محل متحرک رسم می‌شود و هرگاه متحرک از مبدأ می‌گذرد، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

اکنون باید مکان را برابر صفر قرار دهیم:

$$x=0\Rightarrow t^2+3t-4=0\Rightarrow(t+4)(t-1)=0\Rightarrow t=1s\ ,\ t=-4s$$ غ‌ق‌ق

یکی از ریشه‌ها مثبت $(t=1s)$ و یکی از آن‌ها منفی $(t=-4)$ است. از این‌رو بردار مکان یک بار تغییر جهت می‌دهد.

A ۲۸۶ ۴

۱ ابتدا با مقایسه معادله داده شده با معادله مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، مقدار شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیه را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \\ x=t^2-6t+10 \end{cases}\Rightarrow x_0=+10m\ ,\ \frac{1}{2}a=1\Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-6m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2t-6$$

۳ در حرکت با شتاب ثابت لحظه تغییر جهت حرکت لحظه صفر شدن سرعت است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v=0\Rightarrow2t-6=0\Rightarrow t=3s$$

۴ اکنون مکان تغییر جهت حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$x=t^2-6t+10\xrightarrow{t=3s}x=(3)^2-6(3)+10=1m$$

پس متحرک در یک متری مبدأ تغییر جهت می‌دهد.

B ۲۸۷ ۴

یادآوری بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ می‌گذرد.

۱ ابتدا با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان، شتاب حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow-10=\frac{1}{2}a(4)^2+4\times4+(-2)\Rightarrow a=-3m/s^2$$

۲ معادلهٔ مکان - زمان را نوشته و در آن مکان را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{1}{2}\times(-3)\times t^2+4t+(-2)\Rightarrow x=-\frac{3}{2}t^2+4t-2$$

$$x=0\Rightarrow-\frac{3}{2}t^2+4t-2=0\Rightarrow3t^2-8t+4=0\Rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm2}{3}$$

$$\Rightarrow t=2s\ ,\ t=\frac{2}{3}s$$

۳ هر دو مقدار زمان به‌دست آمده مثبت است، بنابراین در دو لحظهٔ $t=2s$ و $t=\frac{2}{3}s$ متحرک تغییر جهت می‌دهد.

B ۲۸۸ ۴

۱ متحرک از مکان اولیهٔ $x_0=+20m$ با سرعت اولیهٔ $-4m/s$ گذشته و در لحظهٔ $t=2s$ به مکان $x=+2m$ رسیده است. این داده‌ها را در معادلهٔ مکان - زمان قرار داده و شتاب را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow2=\frac{1}{2}\times a\times4+2\times(-4)+20\Rightarrow a=-5m/s^2$$

۲ متحرک لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که سرعتش صفر شود و تغییر علامت بدهد. در حرکت با شتاب ثابت کافی است در معادلهٔ سرعت - زمان، مقدار v را برابر صفر قرار داده تا لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست بیاوریم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=-5t-4\xrightarrow{v=0}-5t-4=0\Rightarrow t=-0/8s$$

زمان منفی به‌دست آمده است، از این رو متحرک هرگز تغییر جهت نمی‌دهد.

میانبر سرعت اولیه و شتاب حرکت هر دو منفی هستند یعنی هم‌علامت هستند و حرکت تندشونده است. از این رو سرعت متحرک صفر نخواهد شد و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

B ۲۸۹ ۴

خط فکری از ما خواسته شده بازهٔ زمانی‌ای که متحرک خلاف جهت محور x در حرکت است را مشخص کنیم. وقتی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند یعنی سرعت آن منفی است. بنابراین شما باید معادلهٔ سرعت - زمان را از روی معادلهٔ مکان - زمان بنویسید، سپس آن را تعیین علامت کنید.

یادداشت ریاضی در معادلهٔ درجهٔ اول $y=ax+b$ سمت چپ ریشه مخالف علامت a و سمت راست ریشه موافق علامت a است.

۱ با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت مسئله و معادلهٔ مکان - زمان، حرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x=t^2-6t+5 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases}\Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-6m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته و تعیین علامت می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2t-6\xrightarrow{v=0}2t-6=0\Rightarrow t=3s$$

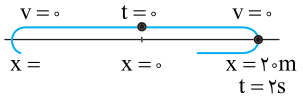
۳ با رسم جدول، علامت سرعت را تعیین می‌کنیم.

t	$-\infty$		0		3		$+\infty$
v	−		−	0	+		
	زمان منفی نداریم.						

۴ بنابراین در بازهٔ زمانی ۱s تا ۵s، در مدت ۱s تا ۳s سرعت منفی است یعنی به مدت ۲s متحرک در خلاف جهت محور در حال حرکت است.

A ۲۹۰ ۲

خط فکری متحرک از مبدأ مکان ($x_0=0$) در جهت مثبت محور با سرعت اولیه $+20m/s$ و شتاب $a=-10m/s^2$ می‌گذرد. بنابراین در ابتدا که بردار سرعت و شتاب خلاف جهت هم هستند حرکت کندشونده است و متحرک پس از مدتی می‌ایستد و برمی‌گردد. در لحظهٔ تغییر جهت فاصلهٔ متحرک از مبدأ را باید به‌دست بیاورید. همچنین در انتهای بازه صفر تا $3s$ یعنی $t=3s$ مکان را حساب کرده تا مشخص شود بیشترین فاصله از مبدأ چند متر است؟



۱ در معادلهٔ $v=-10t+20$، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم تا لحظهٔ تغییر جهت مشخص شود.

$$-10t+20=0\Rightarrow t=2s$$

۲ به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت و لحظهٔ انتهای بازه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=2s\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times(-10)\times(2)^2+20\times2+0\Rightarrow x=-20+40=20m\\ t=3s\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times(-10)\times(3)^2+20\times3+0\Rightarrow x=-45+60=15m\end{cases}$$

۳ بنابراین بیشترین فاصله از مبدأ در بازهٔ صفر تا $3s$، $20m$ است.

بازی با سؤال **اگر در این تست بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=6s$ بیان شده بود، بیشترین فاصله از مبدأ چند متر می‌شد؟**

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

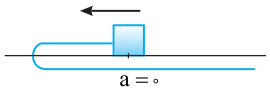
پاسخ **تمام حل شبیه مسئلهٔ قبلی است، فقط در انتها باید مکان در لحظهٔ $t=6s$ را به‌دست آوریم**

$$x=\frac{1}{2}\times(-10)(6)^2+20\times6\Rightarrow x=-180+120=-60m$$

گزینهٔ ۳

B ۲۹۱ ۳

با توجه به معادلهٔ $v=4t-6$، سرعت اولیهٔ متحرک $v_0=-6m/s$ است. یعنی متحرک در جهت منفی محور شروع به حرکت کرده است و چون شتاب آن $+4m/s^2$ است و بردار شتاب و سرعت هم‌علامت نیستند. ابتدا حرکت کندشونده است و متحرک متوقف شده برمی‌گردد و برای آنکه تنها یک بار از مبدأ مکان بگذرد کافی است که از ابتدا مکان اولیهٔ آن صفر یا منفی باشد. ($x_0=a\leq0$) و مسئله نیازی به هیچ‌گونه محاسبهٔ عددی ندارد.



B ۲۹۲ ۴

یادآوری الف) حرکتی که تندی متحرک در آن در حال کاهش باشد را حرکت کندشونده گویند. در این حرکت $av<0$ است.

ب) حرکتی که تندی متحرک در آن در حال افزایش باشد را حرکت تندشونده گویند. در این حرکت $av>0$ است.

۱ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان متحرک و معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$v=4t-12,\ v=at+v_0\Rightarrow v_0=-12m/s, a=4m/s^2$$

۲ در ابتدا شتاب و سرعت مختلف‌العلامت بوده و $av<0$ است پس حرکت در ابتدا کندشونده است.

۳ در لحظهٔ $t=3s$ با توجه به معادلهٔ $v=4t-12$ سرعت متحرک صفر می‌شود و پس از این لحظه سرعت متحرک مثبت و شتاب نیز ثابت و مثبت است پس بعد از $t=3s$، $av>0$ بوده و حرکت تندشونده است.

B ۲۹۳ ۳

۱ معادلهٔ $x-t$ متحرک درجه دوم است پس حرکت با شتاب ثابت است. با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان مسئله با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت v_0 و a را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=t^2-6t+5\\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\end{cases}\Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-6m/s$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2t-6$$

۳ حال در لحظات $t=2s$ و $t=5s$ سرعت را حساب می‌کنیم.

$$t=2s\Rightarrow v=2\times2-6=-2m/s\ ,\ t=5s\Rightarrow v=2\times5-6=4m/s$$

۴ در لحظهٔ $t=2s$ شتاب مثبت و سرعت منفی است پس در این لحظه $av<0$ و حرکت کندشونده است.

۵ در لحظهٔ $t=5s$ شتاب مثبت و سرعت مثبت است پس در این لحظه $av>0$ و حرکت تندشونده است.

A ۲۹۴ ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{t=4s,x=16m,a=3m/s^2}$$

$$16=\frac{1}{2}\times3\times(4)^2+v_0\times(4)\Rightarrow v_0=-2m/s$$

۲ بنابراین در ابتدا سرعت منفی و شتاب مثبت بوده یعنی شتاب و سرعت در خلاف جهت هم هستند و حرکت کندشونده است.

۳ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته و لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم.

$$v=3t-2\xrightarrow{v=0}3t-2=0\Rightarrow t=\frac{2}{3}s$$

۴ بازهٔ زمانی خواسته شده صفر تا $4s$ است. بنابراین از صفر تا $\frac{2}{3}s$ حرکت کندشونده و از $\frac{2}{3}s$ تا $4s$ حرکت تندشونده است.

B ۲۹۵ ۲

۱ معادلهٔ مکان - زمان $x=t^2-4t+8$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ مقایسه می‌کنیم و شتاب و سرعت اولیه را به دست آورده و معادلهٔ سرعت زمان را می‌نویسیم.

$$\begin{cases}x=t^2-4t+8\\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\end{cases}\Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-4m/s, x_0=+8m$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد: $v=2t-4$

۳ لحظهٔ تغییر جهت را یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$2t-4=0\Rightarrow t=2s$$

۴ بنابراین در ابتدا که سرعت اولیه منفی است متحرک تا لحظهٔ $t=2s$ در خلاف جهت محور در حرکت است و گزینهٔ (۱) نادرست است.

۵ در بازهٔ ۰ تا ۲s حرکت کندشونده است و در لحظهٔ $t=2s$ متحرک متوقف شده و برمی‌گردد و در جهت مثبت محور دارای حرکت تندشونده می‌شود و گزینهٔ (۲) درست و گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند.

بازی با سؤال **معادلهٔ مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x=-5t^2+6t+12$ است. در مورد جهت حرکت و نوع آن کدام مطلب درست است؟**

۱) همواره در جهت محور و کندشونده ۲) ابتدا در جهت محور و کندشونده
۳) ابتدا درخلاف جهت محور و کندشونده ۴) همواره در خلاف جهت محور و کندشونده

پاسخ معادلهٔ $x=-۵t^۲+۶t+۱۲$ را با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت یعنی $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$ مقایسه می‌کنیم و سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}a=-۵\Rightarrow a=-۱۰m/s^۲\ ,\ v_۰=۶m/s\ ,\ x_۰=۱۲m$$

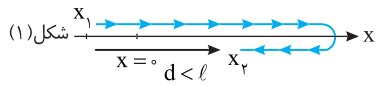
سرعت اولیه $+۶m/s$ است، پس متحرک ابتدا در جهت مثبت محور در حرکت است. سرعت اولیه مثبت و شتاب منفی است، بنابراین در ابتدا حرکت کندشونده است.

نتیجه: در حرکت با شتاب ثابت هرگاه در معادلهٔ مکان - زمان ضریب $t^۲$ و ضریب t هم‌علامت باشند، حرکت همواره تندشونده است و اگر دارای علامت مخالف باشند حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. گزینهٔ ۲

۲۹۶ B ۳

در مسیر زیر جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه نیستند اما جابه‌جایی مثبت و در نتیجه سرعت متوسط مثبت است و لزومی ندارد که سرعت متوسط منفی باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

شکل (۱)



در مسیر زیر متحرک با شتاب ثابت از نقطهٔ $x_۱$ گذشته، متوقف شده و برمی‌گردد و از مبدأ نمی‌گذرد بنابراین لزومی ندارد که بردار مکان تغییر جهت دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

شکل (۲)



در یک بازهٔ زمانی معین سرعت متوسط $(v_{av}=d/t)$ و تندی متوسط $(s_{av}=\ell/t)$ با هم برابر نیستند. بنابراین جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه نخواهند بود. در این صورت باید متحرک روی خط راست حداقل یک بار تغییر جهت بدهد یعنی حرکت ابتدا کندشونده بوده و پس از توقف و تغییر جهت متحرک با همان شتاب ثابت برمی‌گردد و با حرکت تندشونده به حرکت خود ادامه می‌دهد و گزینهٔ (۳) درست است.

دوباره به شکل (۲) نگاه کنید دقیقاً متوجه می‌شوید که لزومی ندارد که متحرک ابتدا در جهت مثبت حرکت کند و گزینهٔ (۴) نادرست است.

۲۹۷ A ۲

در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی $(\frac{v+v_۰}{۲})$ است، بنابراین:

$$v_{av}=\frac{۰+۲۰}{۲}=۱۰m/s$$

۲۹۸ A ۱

سرعت در لحظهٔ $t=۳s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v=۲t+v_۰\xrightarrow{t=۳s}v=۶+v_۰$$

سرعت متوسط در بازهٔ ۰ تا ۳s برابر $۸m/s$ شده است. از طرفی در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط از رابطهٔ $v_{av}=\frac{v+v_۰}{۲}$ به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$۸=\frac{۶+v_۰+v_۰}{۲}\Rightarrow ۱۶=۶+۲v_۰\Rightarrow v_۰=۵m/s$$

۲۹۹ A ۱

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی ۰ تا t ثانیه سرعت متوسط متحرک از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰$$

۱ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سرعت اولیهٔ آن $v_۰=۰$ است.

۲ در بازهٔ صفر تا ۲/۵s سرعت متوسط برابر $۸m/s$ است. به کمک رابطهٔ بالا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_۰\Rightarrow ۸=\frac{۱}{۲}a\times ۲/۵+۰\Rightarrow a=۶/۴m/s^۲$$

۳ سرعت در لحظهٔ $t=۳s$ خواهد شد:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۶/۴\times ۳+۰\Rightarrow v=۱۹/۲m/s$$

بازی با سؤال متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ و با سرعت اولیهٔ $۵m/s$ تندشونده در حرکت است. اگر در بازهٔ صفر تا t ثانیه سرعت متوسط ۱/۵ برابر سرعت اولیه باشد، t چند ثانیه است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ با توجه به فرض مسئله:

$$v_{av}=۱/۵v_۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}at+v_۰=۱/۵v_۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times ۲t+۵=۱/۵\times ۵\Rightarrow t+۵=۷/۵$$

$$\Rightarrow t=۲/۵s$$

گزینهٔ ۳

۳۰۰ A ۱

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت ابتدای بازه $(v_۱)$ و سرعت انتهای بازه $(v_۲)$ است.

$$(v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲})$$

۱ با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\xrightarrow{v_{av}=۵/۵\,m/s}۵/۵=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Rightarrow v_۱+v_۲=۱۱\ (I)$$

۲ تغییرات سرعت برابر $۹\,m/s$ است. از این‌رو:

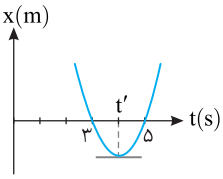
$$v_۲-v_۱=۹\ \ (II)$$

۳ دستگاه دو معادله دو مجهول (I) و (II) را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}v_۱+v_۲=۱۱\\ v_۲-v_۱=۹\end{cases}\xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{دو معادله را}}۲v_۱=۲\Rightarrow v_۱=۱m/s$$

۳۰۱ B ۳

در لحظهٔ $t_۱=۲s$ و $t_۲=۶s$ مکان متحرک را به‌دست می‌آوریم:



$$x(۲)=۲^۲-۸(۲)+۱۵=۳m$$

$$x(۶)=۶^۲-۸(۶)+۱۵=۳m$$

بنابراین جابه‌جایی در این بازه صفر شده و سرعت متوسط در این بازه صفر است. در این صورت سرعت لحظه‌ای خواسته شده نیز باید صفر شود، یعنی شیب خط مماس بر نمودار صفر باشد. می‌دانیم در تابع درجه دوم در رأس سهمی $(t'=-\frac{b}{۲a})$ شیب خط مماس صفر می‌شود.

$$t'=\frac{۸}{۲}=۴s$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط با سرعت در وسط بازهٔ زمانی برابر است.

۳۰۲ B ۱

معادلهٔ مکان - زمان متحرک $(x=t^۲-۴t+۵)$ تابع درجه دوم می‌باشد، یعنی متحرک دارای شتاب ثابت بوده، بنابراین شتاب در هر لحظه با شتاب متوسط در هر بازه برابر است.

۳۰۳ A ۱

ابتدا به کمک معادله جابه‌جایی - زمان، زمان را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\xrightarrow{\Delta x=۲۴m\,,\,a=۴m/s^۲\,,\,v_۰=۲m/s}۲۴=\frac{۱}{۲}\times ۴\times t^۲+۲t$$

$$\Rightarrow ۲t^۲+۲t=۲۴\Rightarrow t^۲+t-۱۲=۰\Rightarrow t=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۴۸}}{۲}=\frac{-۱\pm ۷}{۲}\Rightarrow t=۳s$$

سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۲۴}{۳}=۸m/s$$

A ۳۰۴ ۳

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازهٔ زمانی ۰ تا t ثانیه سرعت متوسط خواهد شد: $v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$

۱ شتاب حرکت را به کمک معادلهٔ سرعت متوسط به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0 \Rightarrow 6=\frac{1}{2}a\times 5+2 \Rightarrow a=1/6 m/s^2$$

۲ مکان را در لحظهٔ $t=2s$ و $t=4s$ به دست آورده و از هم کم می‌کنیم و جابه‌جایی را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \begin{cases} \xrightarrow{t=2s} x=\frac{1}{2}\times 1/6\times 4+2\times 2+x_0=7/2+x_0 \\ \xrightarrow{t=4s} x=\frac{1}{2}\times 1/6\times 16+2\times 4+x_0=20/8+x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x=13/6 m$$

B ۲ ۳۰۵

۱ سرعت متوسط در مدت ۵s را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta x=75m} v_{av}=\frac{75}{5}=15 m/s$$

۲ در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2} \xrightarrow{v_2=20m/s} 15=\frac{20+v_1}{2} \Rightarrow v_1=10 m/s$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$$a=\frac{v_2-v_1}{\Delta t} \Rightarrow a=\frac{20-10}{5}=2 m/s^2$$

۴ سرعت در 5s بعدی خواهد شد:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v_3=2\times 5+20 \Rightarrow v_3=30 m/s$$

۵ سرعت متوسط در این 5s را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av}=\frac{v_3+v_2}{2}=\frac{20+30}{2}=25 m/s$$

A ۳ ۳۰۶

خط فکری سرعت متوسط در کل مسیر برحسب سرعت نهایی (v) در انتهای بازه داده شده است. اگر شما سرعت اولیه را برحسب v به‌دست بیاورید، می‌توانید تشخیص دهید که حرکت کندشونده است یا تندشونده.

۱ در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v+v_0}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}v=\frac{v+v_0}{2} \Rightarrow v_0=\frac{1}{3}v$$

۲ سرعت اولیه برابر با $\frac{v}{3}$ می‌باشد، بنابراین حرکت تندشونده است، زیرا سرعت از $\frac{1}{3}v$ به v رسیده است.

B ۲ ۳۰۷

خط فکری حرکت تندشونده است، یعنی بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت هستند. اگر جهت حرکت را مثبت بگیریم، سرعت و شتاب نیز مثبت خواهد بود.

۱ در معادلهٔ جابه‌جایی - زمان، داده‌های مسئله را قرار می‌دهیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow{\Delta x=16m,\ t=4s} 16=\frac{1}{2}a(4)^2+4v_0 \Rightarrow 4=2a+v_0$$

$$\Rightarrow v_0=4-2a$$

۲ دقت کنید سرعت و شتاب هر دو مثبت (یا هر دو منفی) اند، البته با توجه به اینکه ما جهت حرکت را مثبت گرفته‌ایم v_0 و a هر دو مثبت هستند. بنابراین

$$v_0>0 \Rightarrow 4-2a>0 \Rightarrow 4>2a \Rightarrow a<2 m/s^2$$

۳ گزینه‌ای که در آن شتاب کمتر از $2 m/s^2$ است پاسخ تست است یعنی گزینهٔ (۲) درست است.

A ۲ ۳۰۸

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط در t ثانیهٔ آغازین حرکت از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید $v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$

۱ ابتدا در معادلهٔ داده شده در مسئله $v_{av}=\alpha t+5$، زمان را $t=5s$ و سرعت متوسط را $11 m/s$ قرار می‌دهیم.

$$11=5\alpha+5 \Rightarrow \alpha=1/2 m/s^2$$

۲ α را در معادلهٔ سرعت متوسط زمان قرار داده و شتاب را حساب می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}a \Rightarrow 1/2=\frac{1}{2}a \Rightarrow a=2/4 m/s^2$$

A ۲ ۳۰۹

مسئلهٔ ساده‌ای است و به کمک معادلهٔ مستقل از زمان که ما به آن فرمول طلایی می‌گوییم قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t \Rightarrow 0/1=\frac{30+50}{2}t \Rightarrow t=\frac{1}{400}s$$

بازی با سؤال **سرعت متحرکی که با شتاب ثابت در حرکت است، در مدت ۱۵ دقیقه از $40 km/h$ به $60 km/h$ می‌رسد. در این مدت متحرک چند متر جابه‌جا شده است؟** از کتاب درسی

۱) ۱۲۵۰۰ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۵۰۰۰

پاسخ **نیازی به تبدیل یکای km/h به m/s نیست، بلکه دقیقه را به ساعت تبدیل می‌کنیم، سپس مسئله را حل می‌کنیم:**

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t=\frac{60+40}{2}\times\frac{15}{60}=\frac{100}{8}=12/5 km=12500 m$$

گزینهٔ ۱

A ۲ ۳۱۰

۱ ابتدا سرعت را بر حسب m/s به دست می‌آوریم:

$$v=54\frac{km}{h}=\frac{54}{3/6}=15 m/s$$

۲ سپس به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب خواهیم داشت:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t \Rightarrow 240=\frac{0+15}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta t=\frac{480}{15}=\frac{160}{5} \Rightarrow \Delta t=32s$$

A ۴ ۳۱۱

با یک جای‌گذاری ساده در فرمول طلایی $x=\frac{v+v_0}{2}t+x_0$ مسئله حل می‌شود.

$$(x=-122/5m, t=5s, v_0=0,\ x_0=0) \Rightarrow -122/5=\frac{v+0}{2}\times 5+0$$

$$\Rightarrow v=-49 m/s$$

بنابراین بزرگی سرعت $|v|=49 m/s$ است.

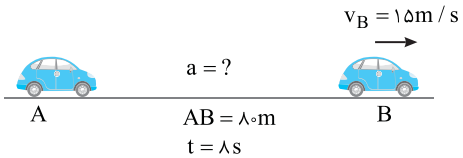
A ۴ ۳۱۲

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت در هنگام گذر از نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v_B+v_A}{2}\Delta t \Rightarrow 80=\frac{15+v_A}{2}\times 8 \Rightarrow v_A=5 m/s$$

۲ اکنون می‌توان شتاب را به دست آورد:

$$a=\frac{v_B-v_A}{\Delta t} \Rightarrow a=\frac{15-5}{8}=\frac{5}{4} m/s^2$$



A ۳ ۳۱۳

داده‌های مسئله را در معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) قرار می‌دهیم و مقدار v را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow ۲۴=\frac{\frac{v}{2}+v}{2}\times ۴\Rightarrow ۲۴=\frac{\frac{۳v}{2}}{2}\times ۴\Rightarrow ۲۴=۳v\Rightarrow v=۸m/s$$

بازی با سؤال **متحرکی با شتاب ثابت و سرعت اولیه v_0 روی خط راست به راه می‌افتد و در مدت ۴s، جابه‌جایی متحرک ۲۰ متر بوده و در پایان این مدت سرعت آن $۳v_0$ می‌شود، v_0 چند m/s است؟**

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲/۵

پاسخ **با جای‌گذاری در معادلهٔ مستقل از شتاب:**

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow ۲۰=\frac{۳v_0+v_0}{2}\times ۴\Rightarrow v_0=۲/۵m/s$$

گزینهٔ ۴

A ۳ ۳۱۴

۱ با توجه به تعریف شتاب ثابت:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow ۲=\frac{\frac{v}{۳}-v}{۸}\Rightarrow ۱۶=-\frac{۲}{۳}v\Rightarrow v=-۲۴m/s$$

۲ اکنون جابه‌جایی را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (رابطهٔ طلایی) به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{-۸+(-۲۴)}{2}\times ۸\Rightarrow \Delta x=-۱۲۸m$$

بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی ۱۲۸ متر است. در حل این تست شتاب را $+۲m/s$ در نظر گرفتیم و چون اندازهٔ سرعت در حال کاهش بوده، v منفی به دست آمد. شما می‌توانید شتاب را $-۲m/s^2$ قرار دهید که در جواب نهایی یعنی اندازهٔ جابه‌جایی تغییری حاصل نخواهد شد.

A ۱ ۳۱۵

۱ معادلهٔ سرعت - زمان، تابع درجهٔ اول از زمان است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است:

$$\left.\begin{array}{l} v=at+v_0 \\ v=۲t-۴ \end{array}\right\}\Rightarrow a=۲m/s^2\ ,\ v_0=-۴m/s$$

۲ برای حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط $v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}$ است. سرعت در لحظهٔ $t=۱s$ و $t=۲s$ را حساب می‌کنیم

$$\left\{\begin{array}{l} t_1=۱s\Rightarrow v_1=-۲m/s \\ t_2=۲s\Rightarrow v_2=۰ \end{array}\right.\Rightarrow v_{av}=\frac{-۲+۰}{2}\Rightarrow v_{av}=-۱m/s$$

۳ جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی با توجه به سرعت متوسط خواهد شد.

$$\Delta x=v_{av}\Delta t\Rightarrow \Delta x=-۱\times(۲-۱)=-۱m/s$$

A ۱ ۳۱۶

سرعت متحرک در $x_1=۱۰m$ برابر $v_1=۴m/s$ و در مکان $x_2=۱۹m$، برابر $v_2=\frac{۱۸}{۳/۶}=۵m/s$ است. داده‌های مسئله ما را به معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت - مکان) هدایت می‌کند.

$$v_2^2-v_1^2=۲a\Delta x\Rightarrow ۲۵-۱۶=۲a\times(۱۹-۱۰)\Rightarrow a=۰/۵m/s^2$$

A ۴ ۳۱۷

شتاب حرکت یعنی آهنگ تغییر سرعت در صورت مسئله بیان شده تندی با شتاب $۱m/s$ افزایش می‌یابد، بنابراین $a=+۱m/s^2$ است و به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسئله قابل حل است. البته ابتدا یکای سرعت را به m/s تبدیل می‌کنیم.

$$v=۱۸km/h\times\frac{۱۰^3m}{۱km}\times\frac{۱h}{۳۶۰۰s}\Rightarrow v=\frac{۱۸}{۳/۶}=۵m/s$$

$$v^2-v_1^2=۲a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=۳۰۰m} v^2-۲۵=۲\times۱\times۳۰۰\Rightarrow v^2=۶۲۵$$

$$\Rightarrow v=۲۵m/s$$

$$v_2=۲۵m/s\times\frac{۳۶۰۰s}{۱h}\times\frac{۱km}{۱۰۰۰m}=۲۵\times۳/۶km/h=۹۰km/h$$

A ۱ ۳۱۸

۱ میزان کاهش سرعت در هر ثانیه یعنی آهنگ تغییر سرعت برابر $۱/۶m/s$ در هر ثانیه است، بنابراین شتاب حرکت $(-۱/۶m/s^2)$ است (جهت حرکت را مثبت فرض کرده‌ایم).

۲ به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) خواهیم داشت:

$$v^2-v_0^2=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۴۰۰=۲(-۱/۶)\Delta x\Rightarrow \Delta x=\frac{۲۰۰۰}{۱۶}=۱۲۵m$$

A ۳ ۳۱۹

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت- مکان) به راحتی این پرسش قابل حل است.

$$v_2^2-v_1^2=۲a(x_2-x_1)\xrightarrow{a=۲m/s^2,v_1=۵m/s,x_1=۳m/s,v_2=۷m/s}$$

$$۴۹-۲۵=۲\times۲\times(x_2-۳)\Rightarrow x_2=۹m$$

A ۲ ۳۲۰

۱ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده یعنی سرعت اولیه صفر است. به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$v^2-v_0^2=۲a\Delta x\xrightarrow{\Delta x=۹m} ۸۱-۰=۲a\times۹\Rightarrow a=۴/۵m/s^2$$

۲ سرعت متوسط در ۴s آغازین حرکت خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{۱}{۲}at+v_0\Rightarrow v_{av}=\frac{۱}{۲}\times۴/۵\times۴+۰\Rightarrow v_{av}=۹m/s$$

A ۱ ۳۲۱

۱ با توجه به معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) برای حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت: $v^2-v_0^2=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-v_0^2=۲(-a)\Delta x\Rightarrow \Delta x_{\text{توقف}}=\frac{v_0^2}{۲a}$

۲ شتاب در دو حالت یکسان است در دو حالت رابطهٔ بالا را نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم سپس داده‌های مسئله $v_{01}=۴۰km/h$ و $v_{02}=۸۰km/h$ را در رابطه قرار می‌دهیم.

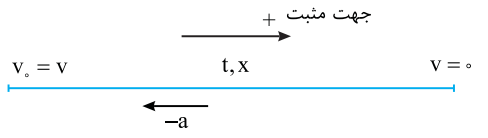
$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=\frac{v_{02}^2}{v_{01}^2}=\frac{۸۰^2}{۴۰^2}\Rightarrow\frac{\Delta x_2}{۵۰}=۴\Rightarrow \Delta x_2=۲۰۰m$$

A ۳ ۳۲۲

نکته وقتی متحرک، ترمز می‌کند و می‌ایستد، زمان توقف و جابه‌جایی تا توقف برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow ۰=-at+v\Rightarrow t=\frac{v}{a}$$

$$v^2-v_0^2=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-v^2=۲(-a)x\Rightarrow x=\frac{v^2}{۲a}$$



سرعت اولیه از v به ۲v و شتاب از a به ۲a تغییر کرده است. از طرفی متحرک روی خط راست با شتاب ثابت ترمز کرده و می‌ایستد، بنابراین مسافت طی شده همان جابه‌جایی خودرو است. در روابط بالا داده‌ها را قرار داده و مسئله را حل می‌کنیم.

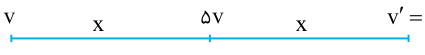
۱ زمان توقف: $t'=\frac{۲v}{(۲a)}\Rightarrow t'=\frac{v}{a}\Rightarrow t'=t$

۲ جابه‌جایی توقف:

$$\Delta x'=\frac{(۲v)^2}{۲(۲a)}\Rightarrow\Delta x'=\frac{۴v^2}{۴a}\Rightarrow\Delta x'=\frac{v^2}{a}\Rightarrow\Delta x'=۲x$$

A ۳۲۳ ۲

برای درک بهتر مسئله یک شکل ساده رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل و معادلهٔ مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت عدد جابه‌جایی حالت اول و جابه‌جایی حالت دوم می‌توان نوشت:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$$

$$\left.\begin{array}{l}(۵v)^۲-v^۲=۲ax\\(v')^۲-(۵v)^۲=۲ax\end{array}\right\}\Rightarrow ۲۴v^۲=v'^۲-۲۵v^۲\Rightarrow v'^۲=۴۹v^۲\Rightarrow v'=۷v$$

A ۳۲۴ ۳

۱ به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۴۰۰=۲a\times ۴۰\Rightarrow a=-۵m/s^۲$$

۲ اکنون سرعت را در جابه‌جایی $\Delta x=۳۰m$ به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v^۲-۴۰۰=۲\times(-۵)\times ۳۰\Rightarrow v^۲=۱۰۰\Rightarrow v=۱۰m/s$$

A ۳۲۵ ۱

جهت حرکت را مثبت می‌گیریم، در این‌صورت شتاب $-۴m/s^۲$ است به کمک معادلهٔ مستقل از زمان مسئله را حل می‌کنیم:

$$v_۱=۳۶km/h\times\frac{۱۰}{۳۶}=۱۰m/s$$

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰^۲-۱۰^۲=۲\times(-۴)\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=۱۲/۵m$$

گوزن در فاصلهٔ ۱۵ متری اتومبیل بوده و اتومبیل پس از ۱۲/۵m می‌ایستد. بنابراین فاصلهٔ گوزن تا اتومبیل در هنگام توقف ۱۵−۱۲/۵=۲/۵m می‌باشد.

B ۳۲۶ ۱

نکته زمان واکنش یعنی بازهٔ زمانی از لحظه‌ای که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که ترمز می‌کند.

خط فکری در مدت زمان واکنش، حرکت متحرک تقریباً حرکت با سرعت ثابت روی خط راست است. بنابراین شما باید در مدت ۰/۴s، جابه‌جایی خودرو را به کمک رابطهٔ سرعت ثابت به‌دست آورده سپس جابه‌جایی آن را پس از ترمز تا توقف کامل به کمک روابط شتاب ثابت حساب کنید.

۱ سرعت را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم.

$$v=۹۰km/h=\frac{۹۰}{۳/۶}=۲۵m/s$$

۲ جابه‌جایی در مدت زمان واکنش برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x_۱=۲۵\times ۰/۴\Rightarrow\Delta x_۱=۱۰m$$

۳ از لحظهٔ ترمز تا توقف کامل، جابه‌جایی اتومبیل برابر خواهد شد با:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۰-۲۵^۲=۲(-۵)\Delta x_۲\Rightarrow\Delta x_۲=۶۲/۵m$$

۴ بنابراین اتومبیل از لحظهٔ مشاهدهٔ مانع تا توقف، جابه‌جایی $\Delta x_۱+\Delta x_۲$ را می‌پیماید:

$$۶۲/۵+۱۰=۷۲/۵m$$

در نتیجه اتومبیل در فاصلهٔ ۸۰−۷۲/۵=۷/۵m از مانع می‌ایستد.

B ۳۲۷ ۲

ابتدا سرعت خودرو را بر حسب متر بر ثانیه به‌دست می‌آوریم:

$$v=۱۰۸\frac{km}{h}\times\frac{۱h}{۳۶۰۰s}\times\frac{۱۰۰۰m}{۱km}=\frac{۱۰۸}{۳/۶}=۳۰m/s$$

۱ جابه‌جایی متحرک در مدت t خودرو با سرعت ثابت ۳۰m/s برابر است با:

$$\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x_۱=۳۰t$$

۲ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی که حرکت کندشونده است به کمک معادلهٔ مستقل از زمان (معادلهٔ سرعت - مکان) حساب می‌کنیم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x_۲\Rightarrow ۰-۳۰^۲=۲\times(-۳)\times\Delta x_۲\Rightarrow\Delta x_۲=۱۵۰m$$

۳ برای آنکه خودرو به مانع برخورد نکند، باید در مدت زمان واکنش جابه‌جایی آن کمتر ۲۰۰−۱۵۰=۵۰m باشد، بنابراین

$$\Delta x_۱\le ۵۰\Rightarrow ۳۰t\le ۵۰\Rightarrow t\le\frac{۵}{۳}$$

B ۳۲۸ ۴

۱ ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت-مکان (مستقل از زمان) شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a(x-x_۰)\xrightarrow[v_۰=۸m/s,v=۶m/s]{x=۱۸/۵m,x_۰=۱۵m}۳۶-۶۴=۲a(۱۸/۵-۱۵)$$

$$\Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

۲ بنابراین معادلهٔ مکان- زمان آن خواهد شد:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(-۴)t^۲+۸t+۱۵\Rightarrow x=-۲t^۲+۸t+۱۵$$

A ۳۲۹ ۲

۱ ابتدا شتاب را به کمک معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) به‌دست می‌آوریم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow ۱۷^۲-۹^۲=۲a(۳۱-۵)\Rightarrow(۱۷+۹)(۱۷-۹)=۲\times a\times ۲۶$$

$$\Rightarrow a=۴m/s^۲$$

۲ سرعت اولیه را به کمک معادلهٔ سرعت- زمان حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۹=۴\times ۱+v_۰\Rightarrow v_۰=۵m/s$$

۳ اکنون مکان اولیهٔ متحرک را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۵=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱+۵\times ۱+x_۰\Rightarrow x_۰=-۲m$$

۴ معادله حرکت برابر است با:

$$x=\frac{۱}{۲}\times ۴t^۲+۵t-۲\Rightarrow x=۲t^۲+۵t-۲$$

B ۳۳۰ ۲

خط فکری در این پرسش خاص معادلهٔ سرعت - مکان داده شده را با معادلهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه می‌کنیم و ضریب x را برابر ۲a قرار می‌دهیم و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

معادله $v=۵\sqrt{x}$ را به توان ۲ رسانده تا شبیه معادلهٔ مستقل از زمان شود.

$$v^۲=۲۵x$$

با توجه به معادلهٔ $v^۲-v_۰^۲=۲ax$، ضریب x در دو معادله را برابر قرار می‌دهیم و شتاب را به‌دست می‌آوریم.

$$۲a=۲۵\Rightarrow a=۱۲/۵m/s^۲$$

A ۳۳۱ ۱

خط فکری معادلهٔ سرعت - مکان داده شده را به توان ۲ برسانید و آن را به‌صورت معادلهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x$ مرتب کنید و با مقایسه، مقدار $v_۰$ و a را به‌دست بیاورید، حرکت کندشونده است و باید علامت a و $v_۰$ یکسان نباشد. پس به سراغ حل مسئله برویم.

۱

$$v=\pm\sqrt{۷x+۴۹}\Rightarrow v^۲-۴۹=+۷x\xrightarrow{v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x}$$

$$v_۰^۲=۴۹\Rightarrow v_۰=\pm ۷m/s\ ,\ ۲a=۷\Rightarrow a=\mp ۳/۵m/s^۲$$

۲ حرکت کندشونده است از این‌رو اگر شتاب را مثبت $a=+۳/۵m/s^۲$ فرض کنیم، سرعت اولیهٔ آن منفی $(v_۰=-۷m/s)$ است. اکنون به کمک معادلهٔ جابه‌جایی زمان مسئله را حل می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۲}(۳/۵)۱۶+(-۷)\times ۴\Rightarrow\Delta x=۲۸-۲۸=۰$$

C ۳۳۲ ۱

خط فکری مهم‌ترین قسمت حل مسئله این است که در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیه $x_0=\frac{-27}{8}m$ است. بنابراین با قرار دادن مکان اولیه در معادلهٔ داده شده، سرعت اولیه متحرک را به‌دست می‌آوریم سپس با مرتب کردن معادله و با مقایسهٔ آن با معادلهٔ مستقل از زمان شتاب را حساب کرده سپس به کمک معادلهٔ مکان - زمان لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان یعنی لحظهٔ گذر از $x=0$ را حساب می‌کنیم.

۱ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$\frac{v^2}{36}-\frac{2x}{9}=1\Rightarrow\frac{v_0^2}{36}-\frac{2(\frac{-27}{8})}{9}=1\Rightarrow\frac{v_0^2}{36}+\frac{3}{4}=1\Rightarrow\frac{v_0^2+27}{36}=1$$
$$\Rightarrow v_0^2+27=36\Rightarrow v_0^2=9\Rightarrow v_0=3m/s$$

۲ متحرک در حال حرکت با شتاب ثابت است بنابراین معادلهٔ سرعت - مکان $v^2-v_0^2=2ax$ می‌باشد. حال معادلهٔ داده شده را مرتب می‌کنیم

$$\frac{v^2}{36}-\frac{2x}{9}=1\Rightarrow\frac{v^2}{36}-\frac{8x}{36}=1\xrightarrow{\times36}v^2-8x=36\Rightarrow v^2=8x+36$$

۳ شتاب را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}v^2=2a(x-x_0)+v_0^2\\ v^2=8x+36\end{cases}\Rightarrow 2a=8\Rightarrow a=4m/s^2$$

۴ معادلهٔ مکان - زمان متحرک به صورت $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ می‌باشد، بنابراین:

$$x=\frac{1}{2}\times4\times t^2+3t-\frac{27}{8}\Rightarrow x=2t^2+3t-\frac{27}{8}$$

۵ هنگامی که متحرک از $x=0$ عبور می‌کند بردار مکان متحرک تغییر جهت خواهد داد:

$$2t^2+3t-\frac{27}{8}=0\Rightarrow t=\frac{3}{4}s,\ t=-\frac{9}{4}s\ \text{غ ق ق}$$

بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{3}{4}s=0/75s$ بردار مکان تغییر جهت می‌دهد.

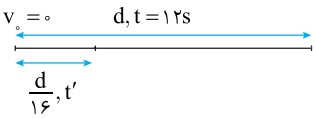
B ۳۳۳ ۴

۱ برای آن‌که معادلهٔ $v=\frac{-\sqrt{-2x}}{4}$ پاسخ داشته باشد زیر رادیکال مثبت باشد. از این رو مقدارهای x باید منفی بوده یعنی متحرک در مکان‌های منفی است.

۲ در $x=0$، $v_0=0$ است یعنی متحرک از مبدأ مکان از حال سکون در جهت منفی محور حرکت کرده است و با افزایش مقدار x، تندی نیز در حال افزایش و حرکت تندشونده است.

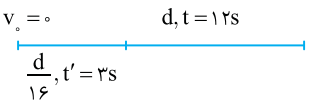
A ۳۳۴ ۳

خط فکری در حل این نوع مسائل یک شکل ساده از مسئله بکشید و طول تمام مسیر مستقیم را d بنامید و معادلهٔ مکان - زمان را برای آن بنویسید همچنین معادلهٔ مکان - زمان را برای قسمت اول مسیر (دقت کنید حتماً قسمت اول که در آن سرعت اولیه صفر است) بنویسید و دو معادله را بر هم تقسیم کنید.



با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت و سرعت اولیه صفر، برای کل مسیر (d) و $\frac{d}{16}$ اول مسیر معادله‌ها را می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\begin{cases}d=\frac{1}{2}at^2\\ \frac{d}{16}=\frac{1}{2}at'^2\end{cases}\Rightarrow16=\frac{t^2}{t'^2}\Rightarrow t'=\frac{t}{4}=\frac{12}{4}\Rightarrow t'=3s$$



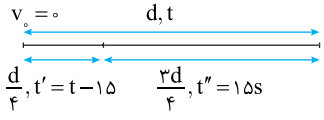
میانبر وقتی متحرک از حال سکون با شتاب ثابت روی خط راست شروع به حرکت کرده و در مدت t جابه‌جایی d را انجام می‌دهد، $\frac{d}{n}$ اول مسیر را در مدت $t'=\frac{t}{\sqrt{n}}$ می‌پیماید.

بازی با سؤال **متحرکی روی خط راست از حال سکون با شتاب ثابت جابه‌جایی d را در مدت t طی می‌کند. این متحرک $\frac{3d}{4}$ آخر مسیر را در مدت $15s$ طی می‌کند. t چند ثانیه است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ همان‌گونه که بیان شد، باید $d-\frac{3d}{4}=\frac{d}{4}$ اول مسیر را با کل مسیر مقایسه کنیم. اگر زمان کل حرکت t باشد، زمان حرکت $\frac{d}{4}$ اول مسیر $t'=t-15$ ثانیه است. معادله‌ها را نوشته و مسئله را حل می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{4}=\frac{1}{2}a(t-15)^2\\ d=\frac{1}{2}at^2\end{cases}\xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو رابطه را بر هم}}\frac{1}{4}=\frac{(t-15)^2}{t^2}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{t-15}{t}\Rightarrow t=30s$$



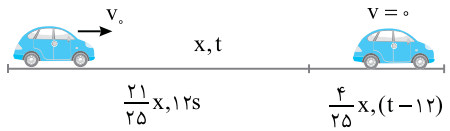
گزینهٔ ۳

B ۳۳۵ ۱

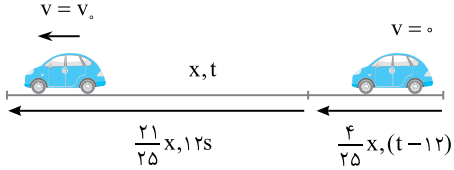
نکته در حرکت کندشونده با شتاب ثابت روی خط راست که متحرک متوقف می‌شود، می‌توان حرکت را از مکان توقف یک حرکت تندشونده با همان شتاب فرض کرد.

خط فکری با توجه به نکتهٔ بیان شده، شما زمان کل توقف را t و مسافت طی شده را x فرض کنید. در این صورت، متحرک مسافت طی شدهٔ اول حالت فرضی $(\frac{4}{25}x)$ را در $t-12s$ طی می‌کند. بنابراین معادلهٔ مکان - زمان را برای x و $\frac{4}{25}x$ نوشته و بر هم تقسیم کنید.

$$\left.\begin{matrix}x=\frac{1}{2}at^2\\ \frac{4x}{25}=\frac{1}{2}a(t-12)^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{25}{4}=\frac{t^2}{(t-12)^2}\Rightarrow\frac{5}{2}=\frac{t}{t-12}\Rightarrow5t-60=2t\Rightarrow t=20s$$



حالت اصلی



حالت فرضی

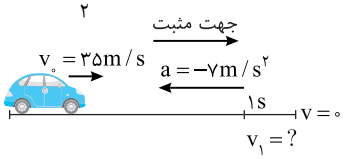
A ۳۳۶ ۴

روش اول: سرعت خودرو با شتاب $۷m/s^۲$ از $۳۵m/s$ به صفر رسیده است از این‌رو سرعت آن یک ثانیه قبل از توقف کامل خواهد شد:

$$v=at+v_۱\Rightarrow ۰=-۷\times ۱+v_۱\Rightarrow v_۱=۷m/s$$

جابه‌جایی در یک ثانیهٔ آخر را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_۱}{۲}t\Rightarrow \Delta x=\frac{۰+۷}{۲}\times ۱=۳/۵m$$



روش راحت‌تر: کافی است فرض کنیم متحرک از حال سکون با شتاب $۷m/s^۲$ به راه می‌افتد و جابه‌جایی آن را در $t=۱s$ از شروع حرکتش به‌دست آوریم.

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲=\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۱=۳/۵m$$

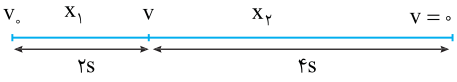


B ۳۳۷ ۲

خط فکری ابتدا شتاب حرکت را برحسب سرعت اولیه $v_۰$ به‌دست بیاورید، زمان طی مسیر ۶s است که به دو بازهٔ ۲s اول و ۴s بعدی تقسیم شده سرعت را در $t=۲s$ حساب کنید و به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) جابه‌جایی در هر قسمت را به‌دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

۱ شتاب حرکت برابر است با:

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-v_۰}{۶}\Rightarrow a=\frac{-v_۰}{۶}$$



۲ سرعت را در لحظهٔ $t=۲s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=\frac{-v_۰}{۶}\times ۲+v_۰\Rightarrow v=\frac{۲}{۳}v_۰$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی‌های $x_۱$ و $x_۲$ را به‌دست می‌آوریم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{\frac{۲}{۳}v_۰+v_۰}{۲}\times ۲\Rightarrow x_۱=\frac{۵}{۳}v_۰\\ x_۲=\frac{۰+\frac{۲}{۳}v_۰}{۲}\times ۴\Rightarrow x_۲=\frac{۴}{۳}v_۰\end{cases}\Rightarrow\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{۴}{۵}$$

A ۳۳۸ ۲

مسئلهٔ ساده‌ای است. در صورت مسئله حرفی از زمان (t) زده نشده بنابراین فرمول مستقل از زمان اولین انتخاب برای حل مسئله است.

رابطهٔ مستقل از زمان را برای کل مسیر (x) و برای ۱۵۰ متر اول که تندی نصف می‌شود را می‌نویسیم:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\begin{cases}\xrightarrow{v=۰}۰-v_۰^۲=۲a(x)\\ \xrightarrow{v=\frac{v_۰}{۲}}(\frac{v_۰}{۲})^۲-v_۰^۲=۲a(۱۵۰)\Rightarrow-\frac{۳v_۰^۲}{۴}=۲a(۱۵۰)\end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.

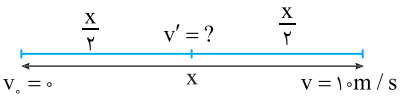
$$\frac{v_۰^۲}{\frac{۳}{۴}v_۰^۲}=\frac{x}{۱۵۰}\Rightarrow\frac{۴}{۳}=\frac{x}{۱۵۰}\Rightarrow x=۲۰۰m$$

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت از حال سکون به راه می‌افتد و در جابه‌جایی x سرعتش به $۱۰m/s$ می‌رسد، سرعت این متحرک در گذر از وسط مسیر چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۵\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$

پاسخ معادلهٔ مستقل از زمان را در دو حالت نوشته و بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases}v'^۲-v_۰^۲=۲a(\frac{x}{۲})\\ v^۲-v_۰^۲=۲ax\end{cases}\xrightarrow[v=۱۰]{v_۰=۰}\frac{v'^۲}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow v'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۱۰\Rightarrow v'=۵\sqrt{۲}m/s$$



میانبر اگر متحرک از حال سکون با شتاب ثابت a شروع به حرکت کرده و پس از جابه‌جایی x سرعتش v شود سرعت آن پس از جابه‌جایی $\frac{x}{n}$ خواهد شد $v'=\frac{v}{\sqrt{n}}$.

گزینهٔ ۲

A ۳۳۹ ۳

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، شتاب حرکت را در مدتی که متحرک از مکان $x_۱=۱۰/۵m$ به مکان $x_۲=+۱۶m$ می‌رود به‌دست می‌آوریم:

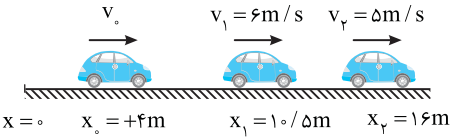
$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱)\Rightarrow ۲۵-۳۶=۲a(۱۶-۱۰/۵)\Rightarrow a=-۱m/s^۲$$

اکنون بزرگی سرعت اولیه را در مدتی که متحرک از مکان اولیه $x_۰=+۴m$ به مکان $x_۲=+۱۶m$ می‌رود را حساب می‌کنیم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a(x-x_۰)\Rightarrow ۲۵-v_۰^۲=۲(-۱)(۱۶-۴)\Rightarrow v_۰^۲=۲۵+۲۴$$

$$\Rightarrow v_۰=+۷m/s$$

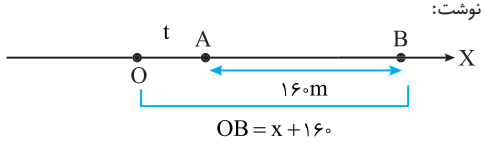
مسیر حرکت در واقع به شکل زیر است:



B ۳۴۰ ۲

خط فکری سرعت متحرک در نقطهٔ O صفر است، بنابراین می‌توانید فرض کنید که متحرک از نقطهٔ O با شتاب $۲m/s^۲$ از حال سکون روی محور xها شروع به حرکت کرده و ابتدا فاصلهٔ OA را در مدت t ثانیه و فاصلهٔ OB را در مدت $(t+۸)$ ثانیه طی کرده است. فاصله OA را با حرف x نشان دهید. در این صورت فاصلهٔ OB برابر $(x+۱۶۰)$ متر است.

۱ با توجه به شکل زیر، به کمک معادلهٔ مکان - زمان برای حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:



$$OB=x+۱۶۰$$

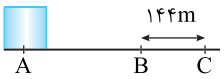
$$\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}at^۲=t^۲\\ x+۱۶۰=\frac{۱}{۲}a(t+۸)^۲=(t+۸)^۲\end{cases}\xrightarrow{\text{دو معادله را از هم کم کنیم}}$$

$$۱۶۰=(t+۸)^۲-t^۲\Rightarrow ۱۶۰=۱۶t+۶۴\Rightarrow t=۶s$$

۲ با داشتن $t=۶s$ مقدار OA را حساب می‌کنیم:

$$x=t^۲\xrightarrow{t=۶s}OA=۳۶m$$

بازی با سؤال متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت از نقطهٔ A حرکت می‌کند و فاصلهٔ B تا C را در مدت ۴ ثانیه طی می‌کند.



اگر سرعت متحرک هنگام عبور از B برابر ۱۶m/s، فاصلهٔ A و B چند متر است؟

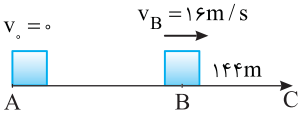
۱) ۱۲/۸ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵/۶

پاسخ به کمک معادلهٔ جابه‌جایی - زمان در بازهٔ زمانی حرکت متحرک از B تا C شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 144=\frac{1}{2}a\times(4)^2+16\times4\Rightarrow 80=8a\Rightarrow a=10m/s^2$$

اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان فاصلهٔ AB را حساب می کنیم:

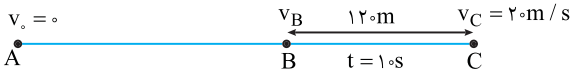
$$v_B^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow 16^2-0=2\times10(AB)\Rightarrow AB=128m$$



گزینهٔ ۱

B ۳۴۱ ۲

حرکت دارای شتاب ثابت است.



۱ سرعت در نقطهٔ B را به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v_C+v_B}{2}\Delta t\Rightarrow 120=\frac{20+v_B}{2}\times10\Rightarrow v_B=4m/s$$

۲ شتاب را حساب می‌کنیم:

$$a=\frac{v_C-v_B}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{20-4}{10}\Rightarrow a=1/6m/s^2$$

۳ اکنون به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، فاصلهٔ A تا B را به دست می‌آوریم:

$$v_B^2-v_A^2=2a\Delta x\Rightarrow 16-0=2\times1/6\times\Delta x\Rightarrow\Delta x=5m$$

C ۳۴۲ ۳

نکته در یک حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت لحظه‌ای در وسط بازه است.

خط فکری در بازهٔ زمانی ۲s تا ۴s سرعت متوسط را به‌دست بیاورید. با این کار سرعت در لحظهٔ $t=3s$ حساب کرده‌اید همین کار را برای بازهٔ ۴s تا ۶s انجام دهید تا سرعت در لحظهٔ $t=5s$ را به‌دست بیاورید از آن‌جا شتاب حرکت و ... را به‌دست آورید.

t(s)	۲	۴	۶
x(m)	۲۰	۳۶	۴۴

۱ سرعت متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{36-20}{4-2}\Rightarrow v_{av}=8m/s\Rightarrow v_{t=3s}=8m/s$$

۲ سرعت متوسط در بازهٔ ۴s تا ۶s را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{44-36}{6-4}=4m/s\Rightarrow v_{t=5s}=4m/s$$

۳ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{4-8}{5-3}\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۴ سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\xrightarrow[a=-2m/s^2]{t=3s\,;\,v=8m/s}8=-2\times3+v_0\Rightarrow v_0=14m/s$$

۵ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=-2t+14$

۶ در حرکت با شتاب ثابت نوع حرکت در لحظه‌ای تغییر می‌کند که سرعت صفر شود بنابراین $v=0\Rightarrow-2t+14=0\Rightarrow t=7s$

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند. اگر در زمان‌های $t=2s$، $t=6s$ و $t=8s$ به‌ترتیب از $x=10m$، $x=50m$ و $x=90m$ عبور کند، شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۴ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{3}{10}$

پاسخ سرعت متوسط در بازهٔ ۲s تا ۶s با سرعت در لحظهٔ $t=4s$ برابر است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{50-10}{6-2}\Rightarrow v_{av}=10m/s\Rightarrow v_{t=4s}=10m/s$$

سرعت در لحظهٔ $t=7s$ با سرعت متوسط در بازهٔ ۶s تا ۸s برابر است از این‌رو:

$$v_{av}=\frac{90-50}{8-6}\Rightarrow v_{av}=20m/s\Rightarrow v_{t=7s}=20m/s$$

شتاب حرکت خواهد شد:

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a=\frac{20-10}{7-4}=\frac{10}{3}m/s^2$$

گزینهٔ ۳

B ۳۴۳ ۲

خط فکری با مسئله راحتی سروکار داریم. در صورت مسئله صحبتی از زمان نیست بنابراین باید به سراغ معادلهٔ مستقل از زمان برویم و به کمک آن شتاب را در بازهٔ مکانی $-25m$ تا $-10m$ حساب کنیم سپس با همان معادلهٔ v_1 را به‌دست می‌آوریم.

x(m)	$x_1=-22$	$x_2=-25$	$x_3=-10$
v(m/s)	v_1	$v_2=2$	$v_3=8$

۱ شتاب حرکت خواهد شد:

$$v_3^2-v_2^2=2a(x_3-x_2)\Rightarrow 8^2-2^2=2a[-10-(-25)]$$

$$\Rightarrow 60=2a(15)\Rightarrow a=2m/s^2$$

۲ سرعت v_1 را حساب می‌کنیم:

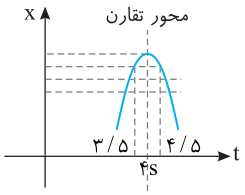
$$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)\Rightarrow 2^2-v_1^2=2\times2[-25-(-22)]$$

$$4-v_1^2=-12\Rightarrow v_1^2=+16\Rightarrow v_1=\pm4m/s$$

دقت کنید مکان متحرک ابتدا $x_1=-22m$، سپس $x_2=-25m$ است یعنی متحرک در جهت منفی محور در حال حرکت بوده است از این‌رو $v_1=-4m/s$ خواهد بود.

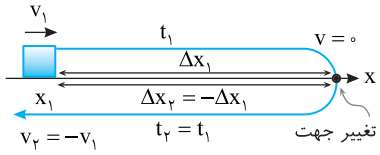
B ۳۴۴ ۳

متحرک دارای شتاب ثابت است و نمودار مکان- زمان آن سهمی است. از طرفی در لحظهٔ $t=4s$ متحرک در بیشترین فاصلهٔ مثبت از مبدأ مکان است. یعنی متحرک در این لحظه تغییر جهت داده است. به عبارت بهتر متحرک ابتدا در جهت محور x ها در حرکت بوده و در لحظهٔ $t=4s$ سرعتش در مکان مثبت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است. لحظهٔ $t=4s$ رأس سهمی مکان- زمان است و نمودار مکان - زمان آن می‌تواند به شکل زیر باشد. در یک سهمی نقاط واقع بر سهمی نسبت به محور قائم گذرنده از رأس تقارن دارد و در نقاطی که فاصلهٔ زمانی یکسانی از محور دارند مکان متحرک یکسان است و در بازهٔ زمانی بین این لحظه‌ها جابه‌جایی صفر است و تنها در گزینهٔ (۳) فاصلهٔ زمانی ۳/۵s و ۴/۵s از ۴s برابر است و جابه‌جایی صفر است.

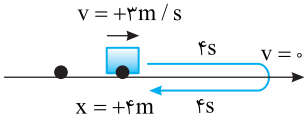


B ۳۴۵ ۱

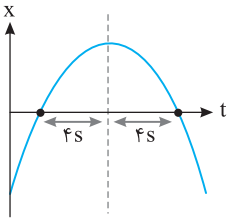
خط فکری در حل این نوع مسائل مطلب بسیار مهم تقارن حرکت متحرک در دو طرف مکان و لحظه‌ای است که متحرک با شتاب ثابت متوقف شده و برمی‌گردد یعنی در هر بازهٔ زمانی و مکانی از یک نقطه به سوی محل تغییر جهت برود در همان بازهٔ زمانی از محل تغییر جهت به محل اولیه بازمی‌گردد و در آن محل سرعتش نیز قرینه می‌شود.



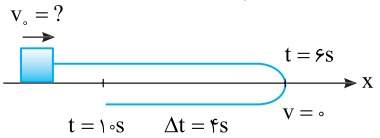
روش اول: نیازی به نوشتن هیچ رابطه و فرمولی نداریم، در مدت ۴s متحرک به بیشینه مکان می‌رسد. مدت زمان ۸s را در ذهن خود به دو بازهٔ زمانی ۴s تقسیم کنید در ۴s اول متحرک از مکان $+4m$ با سرعت $+3m/s$ به بیشینه مکان مثبت رفته، متوقف شده و ۴s بعد این مسیر را برگشته و به مکان $x=+4m$ برمی‌گردد.



روش دوم: معادلهٔ مکان-زمان حرکت با شتاب ثابت یک تابع درجه ۲ $(x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0)$ بوده و نمودار آن سهمی است و خطی که از رأس سهمی می‌گذرد محور تقارن سهمی است و مفهوم آن این است که در فاصلهٔ زمانی یکسان از این محور مکان مقدار یکسانی است.



بازی با سؤال **متحرکی روی محور xها با شتاب ثابت در حرکت است و در لحظهٔ $t_1=6s$ در جهت مثبت در بیشترین فاصلهٔ خود از مبدأ مکان است. اگر در لحظهٔ $t_2=10s$ از مبدأ مکان با سرعت $8m/s$ خلاف جهت محور x عبور کند، سرعت اولیه متحرک چند متر بر ثانیه است؟**



پاسخ **۱** **متحرک در لحظهٔ $t=6s$ در محل تغییر جهت حرکت خود است و در لحظهٔ $t=10s$ از مبدأ مکان $x=0$ با سرعت $8m/s$ در خلاف جهت محور $(v=-8m/s)$ می‌گذرد. شتاب حرکت را با توجه به این مطالب حساب می‌کنیم. در بازهٔ ۴s سرعت متحرک از صفر به $-8m/s$ رسیده از این‌رو،**

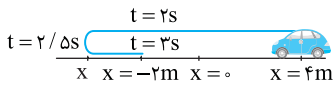
$$v=at+v_0\Rightarrow -8=a(4)+0\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۲ سرعت متحرک در مدت ۰ تا ۶s از سرعت اولیه (v_0) با شتاب $(-2m/s^2)$ به صفر رسیده است بنابراین خواهیم داشت:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-2\times 6+v_0\Rightarrow v_0=12m/s$$

B ۳۴۶ ۴

۱ متحرک دارای حرکت با شتاب ثابت است و در لحظه‌های $t=2s$ و $t=3s$ از مکان $-2m$ می‌گذرد، بنابراین در این بازه متحرک تغییر جهت داده است. اما در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد. در واقع متحرک از $t=2s$، نیم ثانیه رفته در لحظهٔ $2/5s$ متوقف شده و نیم ثانیه برمی‌گردد و در لحظهٔ $t=3s$ از مکان $-2m$ مجدداً می‌گذرد. (البته لحظهٔ تغییر جهت، لحظهٔ رأس سهمی است و در دو طرف محور قائم گذرنده از رأس سهمی تقارن دارد با این استدلال نیز مشخص است که $t_{\text{رأس}}=\frac{2+3}{2}=2/5s$.



۲ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان می‌توان نوشت:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=a(2/5)+v_0\Rightarrow v_0=-2/5a \quad (I)$$

۳ مکان اولیهٔ متحرک $x=+4m$ است. با توجه به معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت خواهیم داشت

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{t=2s,\ x=-2m} -2=\frac{1}{2}a(4)+2v_0+4$$

$$\Rightarrow -2=2a+2v_0+4\Rightarrow 2a+2v_0=-6\Rightarrow a+v_0=-3 \quad (II)$$

۴ از رابطهٔ (I) در رابطهٔ (II) جای‌گذاری کرده شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$a-2/5a=-3\Rightarrow -1/5\,a=-3\Rightarrow a=2m/s^2$$

B ۳۴۷ ۳

خط فکری در مسئلهٔ گفته شده در بازهٔ ۰ تا ۱۰s، ۶s حرکت تندشونده است یعنی باید از ۰ تا ۴s حرکت کندشونده باشد و در لحظهٔ $t=4s$ متحرک متوقف شده و تغییر جهت داده و ۶s حرکت آن تندشونده است.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته در $t=4s$، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=4a+v_0\Rightarrow v_0=-4a \quad (I)$$

۲ در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیه $x_0=-10m$ بوده و در لحظهٔ $t=10s$ مکان آن $x=-30m$ است. معادلهٔ مکان زمان را نوشته یک رابطهٔ دیگر بین v_0 و a به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow -30=\frac{1}{2}a(10)^2+v_0(10)+(-10)$$

$$-30=50a+10v_0-10\Rightarrow -20=50a+10v_0$$

۳ از رابطهٔ (I) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$-20=50a+10(-4a)\Rightarrow -20=10a\Rightarrow a=-2m/s^2$$

$$v_0=-4(-2)\Rightarrow v_0=8m/s$$

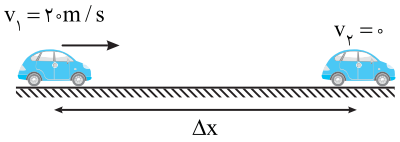
۴ معادلهٔ سرعت را نوشته، $t=16s$ را در آن قرار می‌دهیم.

$$v=-2t+8\Rightarrow v=-2\times 16+8\Rightarrow v=-24m/s\Rightarrow |v|=24m/s$$

A ۳۴۸ ۳

سرعت اولیه برابر $v_1=72km/h=\frac{72}{3/6}=20m/s$ است. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب مسئله به‌راحتی قابل حل است.

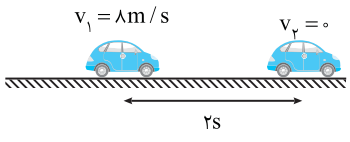
$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{20+0}{2}\times 5\Rightarrow \Delta x=50m$$



A ۳۴۹ ۲

متحرک ترمز کرده و در انتهای مسیر متوقف خواهد شد بنابراین در بازهٔ ۰ تا ۲s سرعت متحرک از $8m/s$ با شتاب ثابت به صفر می‌رسد از این‌رو به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب مسئله قابل حل است.

$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t\Rightarrow \Delta x=\frac{8+0}{2}\times 2\Rightarrow \Delta x=8m$$



B ۳۵۰ ۳

راه‌حل اول: ۱ مطابق شکل در مدت ۲s آخر حرکت سرعت از v_1 به صفر می‌رسد. به کمک رابطهٔ مستقل از شتاب سرعت v_1 را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_1}{2}\Delta t\Rightarrow 6=\frac{0+v_1}{2}\times 2\Rightarrow v_1=6m/s$$

۲ شتاب حرکت خواهد شد:

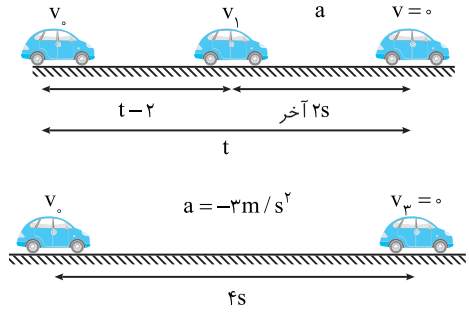
$$a=\frac{v-v_1}{t}\Rightarrow a=\frac{0-6}{2}=-3m/s^2$$

۳ سرعت لحظهٔ ترمز را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-3\times 4+v_0\Rightarrow v_0=12m/s$$

۴ مسافت طی‌شده از لحظهٔ ترمز تا توقف برابر است با:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow \Delta x=\frac{0+12}{2}\times 4\Rightarrow \Delta x=24m$$



راه‌حل دوم: می‌توان فرض کرد که متحرک از حال سکون با همان شتاب به راه افتاده است و شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow 6=\frac{1}{2}a(2)^2\Rightarrow a=3m/s^2$$

جابه‌جایی در مدت ۴s با شتاب $3m/s^2$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2_{کل}=\frac{1}{2}\times 3\times 4^2\Rightarrow \Delta x=24m$$

B ۳۵۱ ۲

خط فکری ۱۰۰m آخر مسیر را که متحرک در ۲s طی می‌کند یک مسیر مستقل فرض کنید که در ابتدای آن سرعت اولیهٔ متحرک v_1 است. سپس سرعت را در انتهای ۱۰۰ متر یعنی سرعت نهایی در (v_f) را به‌دست بیاورید و سرعت متوسط از $v_0=0$ تا v_f را حساب کنید.

۱ ۱۰۰m آخر با سرعت اولیه v_1 و در مدت ۲s با شتاب $2m/s^2$ طی می‌شود. بنابراین:

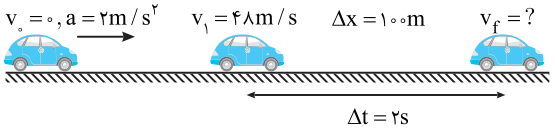
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_1t\Rightarrow 100=\frac{1}{2}\times 2\times 2^2+2v_1\Rightarrow 100=(2)^2+2v_1\Rightarrow v_1=48m/s$$

۲ سرعت نهایی را از رابطهٔ مستقل از شتاب حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_f}{2}\Delta t\Rightarrow 100=\frac{48+v_f}{2}\times 2\Rightarrow v_f=52m/s$$

۳ متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده پس $v_i=0$ و سرعت نهایی $v_f=52m/s$ می‌باشد:

$$v_{av}=\frac{v_i+v_f}{2}=\frac{0+52}{2}=26m/s$$



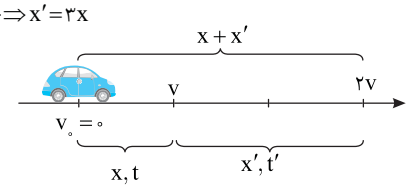
A ۳۵۲ ۲

۱ حرکت دارای شتاب ثابت است بنابراین در بازهٔ زمانی یکسان، تغییر سرعت یکسان است یعنی در مدت t سرعت از صفر به v رسیده است. بنابراین مدتی که سرعت از v به 2v می‌رسد نیز برابر $t'=t$ است.

۲ رابطهٔ مستقل از زمان را برای ۰ تا v و برای ۰ تا 2v را نوشته بر هم تقسیم کرده نسبت $\frac{x'}{x}$ را حساب می‌کنیم

$$\begin{cases} v^2-0=2ax & (1)\\ (2v)^2-0=2a(x+x') & (2)\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم}}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{x}{x+x'}\Rightarrow x'=3x$$



B ۳۵۳ ۱

روش اول: با توجه به معادلهٔ مکان - زمان $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ و داده‌های سؤال می‌توان نوشت:

$$x_1=\frac{1}{2}at_1^2+v_0t_1+x_0\xrightarrow{t_1=1s,x_1=3m}3=\frac{1}{2}a+v_0+x_0\quad (I)$$

$$x_2=\frac{1}{2}at_2^2+v_0t_2+x_0\xrightarrow{t_2=3s,x_2=11m}11=\frac{9}{2}a+3v_0+x_0\quad (II)$$

$$x_3=\frac{1}{2}at_3^2+v_0t_3+x_0\xrightarrow{t_3=5s,x_3=35m}\Rightarrow 35=\frac{25}{2}a+5v_0+x_0\quad (III)$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو معادلهٔ (I),(II)}}8=4a+2v_0$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو معادلهٔ (II),(III)}}24=8a+2v_0$$

حال با توجه به دو معادلهٔ $\begin{cases}8=4a+2v_0\\24=8a+2v_0\end{cases}$ مقدار a و v_0 را به‌دست می‌آوریم:

$$-16=-4a\Rightarrow a=4m/s^2\ ,\ v_0=-4m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4t-4$$

لحظهٔ تغییر جهت، لحظه‌ای است که سرعت صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. معادلهٔ سرعت - زمان $v=4t-4$ تابع درجهٔ یک است و در دو طرف ریشه‌اش تغییر علامت می‌دهد.

$$v=0\Rightarrow 4t-4=0\Rightarrow t=1s$$

روش دوم: **نکته** در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر سرعت لحظه‌ای در وسط بازه است.

۱ سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی ۱s تا ۳s که متحرک از مکان $x_1=3m$ تا $x_2=11m$ را طی می‌کند، به‌دست می‌آوریم که برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=2s$ است.

$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow v_{av}=\frac{11-3}{3-1}\Rightarrow v_{av}=4m/s\Rightarrow v_{t=2s}=4m/s$$

۲ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۳s تا ۵s که متحرک از مکان $x_2=11m$ و $x_3=35m$ را طی می‌کند برابر سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t=4s$ است.

$$v_{av}=\frac{35-11}{5-3}\Rightarrow v_{av}=\frac{24}{2}=12m/s\Rightarrow v_{t=4s}=12m/s$$

۳ شتاب حرکت خواهد شد:

$$a=\frac{v-v_0}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{12-4}{4-2}\Rightarrow a=4m/s^2$$

۴ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\xrightarrow{t=2s,\,v=4m/s}4=2\times 4+v_0\Rightarrow v_0=-4m/s$$

۵ لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=4t-4\Rightarrow t=1s$$

۳ ۳۵۴ B

۱ سرعت اتومبیل پس از ترمز در طی x متر، از v به $\frac{v}{۲}$ رسیده، بنابراین طبق معادلهٔ مستقل از زمان داریم: (۱) $v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x \Rightarrow (\frac{v}{۲})^۲-v^۲=۲ax \Rightarrow \frac{-۳}{۴}v^۲=۲ax$

۲ در کل مسیر ترمز گرفتن سرعت متحرک از v به صفر خواهد رسید بنابراین خواهیم داشت: (۲) $v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰^۲-v^۲=۲ax' \Rightarrow -v^۲=۲ax'$

۳ با تقسیم رابطه (۱) و (۲) دو برهم داریم: $\frac{(۱)}{(۲)} \Rightarrow \frac{\frac{-۳}{۴}v^۲}{-v^۲}=\frac{x}{x'} \Rightarrow x'=\frac{۴}{۳}x$

۳ ۳۵۵ B

خط فکری در صورت مسئله، حرفی از زمان نیست بنابراین معادلهٔ مستقل از زمان اولین انتخاب است. برای AB و AC و DB معادلهٔ مستقل از زمان را برحسب a و L بنویسید و مسئله را حل کنید.

۱ سرعت متحرک پس از طی مسافت ℓ با شتاب ثابت از $۵m/s$ به $۱۵m/s$ می‌رسد، بنابراین: $v_B^۲-v_A^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۲۲۵-۲۵=۲aL \Rightarrow ۱۰۰=aL \quad (I)$

۲ حال از A تا C متحرک با همان شتاب و با سرعت $v_A=۵m/s$ پس از مسافت $\frac{\ell}{۴}$ به نقطهٔ C رسیده بنابراین:

$$v_C^۲-v_A^۲=۲a\Delta x \Rightarrow v_C^۲-۲۵=۲a\frac{\ell}{۴} \Rightarrow v_C^۲-۲۵=\frac{a\ell}{۲} \quad (II)$$

۳ رابطهٔ (I) و (II) را بر هم تقسیم کنیم تا v_C را به‌دست بیاوریم.

$$\frac{۱۰۰}{v_C^۲-۲۵}=\frac{aL}{\frac{aL}{۲}} \Rightarrow v_C^۲=۷۵ \Rightarrow v_C=۵\sqrt{۳}m/s$$

۴ متحرک از D تا B مسافت $\frac{\ell}{۴}$ را با همان شتاب طی کرده و در نقطهٔ B سرعتش به $۱۵m/s$ می‌رسد:

$$v_B^۲-v_D^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۲۲۵-v_D^۲=۲a\frac{\ell}{۴} \xrightarrow{a\ell=۱۰۰} ۲۲۵-v_D^۲=۵۰$$
$$\Rightarrow v_D^۲=۱۷۵ \Rightarrow v_D=۵\sqrt{۷}m/s$$

۲ ۳۵۶ B

۱ بعد از این همه تست یاد گرفته‌ایم که در معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت ضریب $t^۲$ نصف شتاب $(\frac{۱}{۲}a)$ و ضریب t، سرعت اولیه است از این‌رو:

$$x=۲t^۲-۱۶t+۵ \Rightarrow a=۴m/s^۲ \ , \ v_۰=-۱۶m/s$$

۲ بنابراین معادلهٔ سرعت - زمان و لحظهٔ تغییر جهت خواهد شد:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=۴t-۱۶ \xrightarrow{v=۰} ۰=۴t-۱۶ \Rightarrow t=۴s$$

۳ حال مکان متحرک را در لحظه تغییر جهت به‌دست می‌آوریم:

$$x'=۲(۴)^۲-۱۶(۴)+۵=-۲۷m$$

۴ بنابراین فاصلهٔ متحرک از $x=-۲m$ برابر است با:

$$|x'-x|=|-۲۷-(-۲)|=۲۵m$$

۲ ۳۵۷ B

خط فکری دو ثانیهٔ اول یعنی بازهٔ زمانی بین صفر تا ۲s و ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی در $t=۲s$ تا $t=۳s$، سرعت در لحظه‌های صفر، ۲s و ۳s را به‌دست بیاورید سپس به کمک رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت $(v_{av}=\frac{v_۲+v_۱}{۲})$، سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول و ثانیهٔ سوم را حساب کنید و تفاضل آن‌ها را برابر $۶m/s$ قرار دهید و مسئله را حل کنید.

۱ سرعت‌ها را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=۰} v_۱=v_۰ \\ \xrightarrow{t=۲s} v_۲=۲a+v_۰ \\ \xrightarrow{t=۳s} v_۳=۳a+v_۰ \end{cases}$$

۲ سرعت متوسط در ۲ ثانیهٔ اول خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}=\frac{v_۰+۲a+v_۰}{۲} \Rightarrow v_{av}=v_۰+a$$

۳ سرعت متوسط در ثانیهٔ سوم را به‌دست می‌آوریم.

$$v'_{av}=\frac{v_۲+v_۳}{۲}=\frac{۲a+v_۰+۳a+v_۰}{۲} \Rightarrow v'_{av}=\frac{۵}{۲}a+v_۰$$

۴ تفاضل دو سرعت متوسط را با توجه به فرض مسئله برابر $۶m/s$ قرار می‌دهیم.

$$v_{av}-v'_{av}=۶ \Rightarrow v_۰+a-(\frac{۵}{۲}a+v_۰)=۶ \Rightarrow -\frac{۳}{۲}a=۶ \Rightarrow a=-۴m/s^۲$$

۳ ۳۵۸ B

۱ حرکت دارای شتاب ثابت است و معادلهٔ داده شده در واقع رابطه‌ای بین سرعت و مکان، یعنی رابطهٔ مستقل از زمان است. دو طرف آن را به توان ۲ رسانده و با رابطهٔ مستقل از زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کنیم:

$$|v_x|=\sqrt{۴\Delta x+۳۶} \Rightarrow v_x^۲-۳۶=۴\Delta x \xrightarrow{v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x}$$
$$v_۰^۲=۳۶ \Rightarrow v_۰=۶m/s \ , \ ۲a=۴ \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۲ اکنون با داشتن سرعت اولیه و شتاب، جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ اول خواهد شد:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۲)^۲+۶\times۲ \Rightarrow \Delta x=۱۶m$$

۳ ۳۵۹ A

یادآوری معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $(x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰)$ یک تابع درجه ۲ است و نمودار آن سهمی است. اگر ضریب $t^۲$ مثبت باشد یعنی شتاب مثبت باشد، دهانه نمودار رو به بالا و اگر منفی باشد دهانهٔ نمودار رو به پایین است.

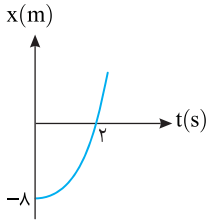
با توجه به معادلهٔ $x=t^۲+۳t+۴$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}a=۱ \Rightarrow a=+۲m/s^۲ \ , \ v_۰=۳m/s \ , \ x_۰=۴m$$

شتاب مثبت است $a=۲m/s^۲$، بنابراین دهانه نمودار باید رو به بالا باشد، سرعت اولیه $+۳m/s$ است یعنی شیب خط مماس بر نمودار در $t=۰$ باید مثبت باشد و مکان اولیه $x=+۴m$ است، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

۴ ۳۶۰ A

خط فکری به نمودار نگاه کنید با توجه به فرض مسئله $v_۰=۰$ بوده و در مدت ۲s متحرک جابه‌جایی $+۸m$ را طی کرده است بنابراین به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب، سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ به راحتی به‌دست می‌آید.

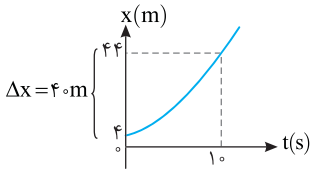


داده‌های روی نمودار را در معادلهٔ مستقل از شتاب جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow ۸=\frac{v+۰}{۲}\times۲ \Rightarrow v=۸m/s$$

۱ ۳۶۱ B

۱ نمودار سهمی است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است از طرفی شیب خط مماس در $t=۰$ برابر ۲ است یعنی سرعت اولیه جسم برابر $v_۰=۲m/s$ است به کمک معادله طلایی مستقل از شتاب، سرعت در لحظه $t=۱۰s$ را به‌دست می‌آوریم.



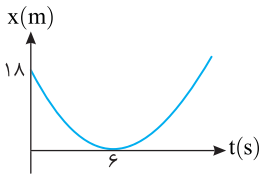
$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t \Rightarrow ۴۰=\frac{v+۲}{۲}\times۱۰ \Rightarrow v=۶m/s$$

۲ حرکت دارای شتاب ثابت است و شتاب متوسط در تمام بازه‌های زمانی یکسان است.

$$a_{av}=a=\frac{v-v_۰}{t}=\frac{۶-۲}{۱۰}=۰/۴m/s$$

A ۳۶۲ ۲

۱ در لحظهٔ $t=۶s$ نمودار بر محور زمان مماس شده است یعنی در این لحظه شیب خط مماس بر نمودار صفر بوده و سرعت در این لحظه صفر است.



۲ به کمک معادله مستقل از شتاب (فرمول طلایی) سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

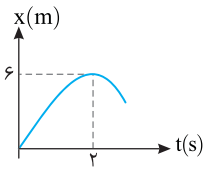
$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow -۱۸=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۶\Rightarrow v_۰=-۶m/s$$

۳ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-(-۶)}{۶}\Rightarrow a=۱m/s^۲$$

A ۳۶۳ ۳

یادآوری در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان سرعت لحظه‌ای صفر است.



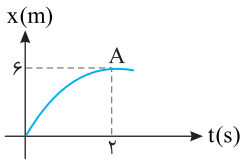
۱ سرعت در لحظهٔ $t=۲s$ برابر صفر است. به کمک معادله طلایی مستقل از شتاب، سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۶=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۲\Rightarrow v_۰=۶m/s$$

۲ شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۲}=-۳m/s^۲$$

بازی با سؤال شکل زیر که قسمتی از یک سهمی است، نمودار مکان- زمان یک متحرک را نشان می‌دهد. اگر نقطهٔ A ماکزیمم نمودار باشد، معادلهٔ سرعت- زمان متحرک کدام است؟



۱) $v=۳-۶t$

۲) $v=۶+۳t$

۳) $v=۳+۶t$

۴) $v=۶-۳t$

پاسخ نمودار مکان- زمان بخشی از یک سهمی است، بنابراین حرکت دارای شتاب ثابت است و به کمک رابطه‌های حرکت با شتاب ثابت پرسش را حل می‌کنیم. در نقطهٔ بیشینهٔ نمودار مکان- زمان، سرعت صفر است.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۶=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۲\Rightarrow v_۰=۶m/s$$

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۲}=-۳m/s^۲$$

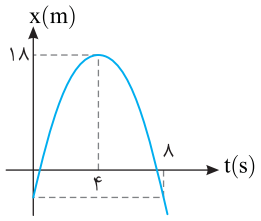
معادلهٔ سرعت- زمان خواهد شد: $v=at+v_۰\Rightarrow v=-۳t+۶$

گزینه ۴

B ۳۶۴ ۳

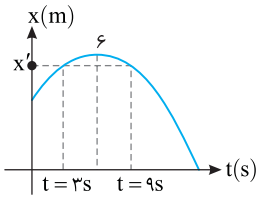
خط فکری شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر سرعت است و می‌دانیم نمودار سهمی نسبت به رأس آن متقارن می‌باشد و در فاصله‌های زمانی یکسان نسبت به رأس اندازهٔ شیب‌ها یکسان است بنابراین شما باید به دنبال نقطه‌ای که با $t=۰$ متقارن است بگردید.

به نمودار نگاه کنید رأس سهمی در $t=۴s$ اتفاق افتاده و بنابراین لحظهٔ متقارن با صفر $(t=۰)$ لحظهٔ $t=۸s$ است و در این لحظه شیب خط مماس بر نمودار قرینهٔ شیب خط مماس در لحظهٔ $t=۰$ بوده یعنی بزرگی سرعت در $t=۸s$ با بزرگی سرعت در $t=۰$ برابر است.



B ۳۶۵ ۱

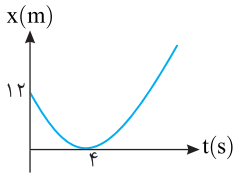
نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس متقارن است. به نمودار نگاه کنید لحظهٔ رأس سهمی $t=۶s$ است و لحظه‌های $t=۳s$ و $t=۹s$ در دو طرف آن متقارن هستند از این‌رو مکان متحرک در $t=۳s$ و $t=۹s$ که فاصلهٔ یکسانی از رأس سهمی $t=۶s$ دارند با هم برابر است بنابراین جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی صفر است.



$$\Delta x=x_{(۹)}-x_{(۳)}=x'-x'=۰$$

A ۳۶۶ ۳

۱ در لحظهٔ $t=۴s$ که نمودار مماس بر محور زمان است، سرعت لحظه‌ای متحرک صفر است از این‌رو به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی)، سرعت اولیه به راحتی به‌دست می‌آید.



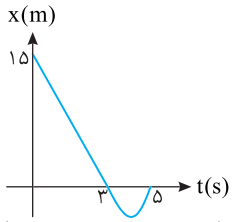
$$x=\frac{v+v_۰}{۲}t+x_۰\Rightarrow ۰=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۴+۱۲\Rightarrow -۲v_۰=۱۲\Rightarrow v_۰=-۶m/s$$

نکته هرگاه نمودار مکان - زمان سهمی باشد در لحظه‌هایی که در فاصلهٔ یکسان از رأس سهمی هستند، سرعت‌ها قرینه هم است.

۲ لحظهٔ $t=۸s$ و لحظهٔ $t=۰$ در فاصلهٔ یکسان از رأس سهمی قرار دارند و تندی لحظه‌ای در آن‌ها یکسان است بنابراین بدون استفاده از فرمول دیگری، می‌توان گفت سرعت در لحظهٔ $t=۸s$ برابر $+۶m/s$ است.

A ۳۶۷ ۳

خط فکری محل تقاطع نمودار مکان - زمان با محور قائم برابر مکان اولیه است. از طرفی مختصات هر نقطه روی نمودار باید در معادلهٔ مکان - زمان صدق کند بنابراین معادلهٔ مکان - زمان را بنویسید و مختصات نقاط روی نمودار را در آن قرار داده و مسئله را حل کنید.



با توجه به نمودار مکان اولیه $x_۰=۱۵m$ و در لحظه‌های $t=۳s$ و $t=۵s$ متحرک از مبدأ مکان $(x=۰)$ گذشته است و مختصات این نقاط باید در معادله صدق کند از این‌رو:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow\begin{cases}t=۳s\Rightarrow ۰=\frac{۹}{۲}a+۳v_۰+۱۵\\ t=۵s\Rightarrow ۰=\frac{۲۵}{۲}a+۵v_۰+۱۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۸m/s$$

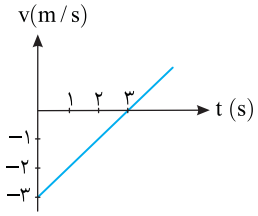
اکنون می‌توانیم معادلهٔ حرکت را بنویسیم: $x=\frac{۱}{۲}\times ۲t^۲-۸t+۱۵\Rightarrow x=t^۲-۸t+۱۵$

B ۳۶۸ ۳

شیب نمودار سرعت- زمان برابر شتاب است.

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-(-۳)}{۳-۰}=۱m/s^۲$$

سرعت اولیهٔ متحرک $v_۰=-۳m/s$ می‌باشد.



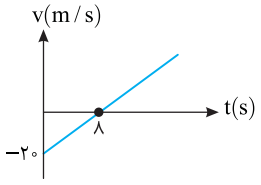
بنابراین معادلهٔ حرکت آن در SI به‌صورت زیر است:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}t^۲-۳t+x_۰$$

که در همهٔ گزینه‌ها مکان اولیه $x_۰=۰$ است و معادله به‌صورت $x=\frac{۱}{۲}t^۲-۳t$ خواهد بود.

B ۳ ۳۶۹

۱ داده‌های روی نمودار را در رابطهٔ شتاب قرار می‌دهیم و شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.



$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{0-(-20)}{8}$$
$$\Rightarrow a=2/5\,m/s^2$$

۲ با توجه به فرض مسئله در لحظهٔ $t=0$ مکان متحرک $x_0=0$ و با توجه به نمودار $v_0=-20\,m/s$ است بنابراین به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان متحرک در لحظهٔ $t=20s$ را حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times2/5\times400+(-20)\times20+0\Rightarrow x=100m$$

B ۲ ۳۷۰

۱ شتاب حرکت جسم را به‌دست می‌آوریم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{-9-12}{21}\Rightarrow a=-1m/s^2$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=6s$ و $t=12s$ را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t_1=6s} v=-1\times6+12\Rightarrow v_1=+6m/s\\ \xrightarrow{t_2=12s} v=-1\times12+12\Rightarrow v_2=0\end{cases}$$

۳ جابه‌جایی را به کمک معادله مستقل از شتاب به‌دست می‌آوریم.

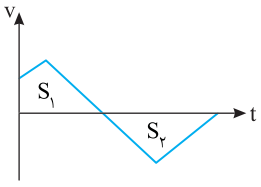
$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}t\Rightarrow\Delta x=\frac{6+0}{2}\times(12-6)\Rightarrow\Delta x=18m$$

روش دیگر:

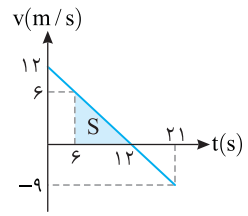
یادآوری سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان به ما جابه‌جایی و مسافت متحرک را می‌دهد.

جابه‌جایی $d=S_1+S_2+\cdots$

مسافت $\ell=|S_1|+|S_2|+\cdots$



سرعت در لحظهٔ $t=6s$ و $t=12s$ را به کمک شیب نمودار حساب می‌کنیم.

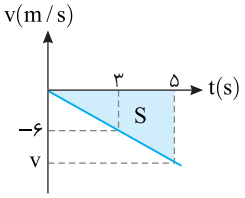


$$\frac{-9-12}{21-0}=\frac{v_1-12}{6-0}$$
$$\Rightarrow-1=\frac{v_1-12}{6}\Rightarrow v_1=6m/s$$
$$\frac{-9-12}{21-0}=\frac{v-12}{12-0}$$
$$\Rightarrow-1=\frac{v-12}{12}\Rightarrow v_2=0$$

سطح زیر نمودار از $t=6s$ تا $t=12s$ را حساب می‌کنیم. $\Delta x=S=\frac{6\times6}{2}=18m$

B ۳ ۳۷۱

۱ به کمک شیب خط، سرعت در لحظهٔ $t=5s$ را به‌دست می‌آوریم.

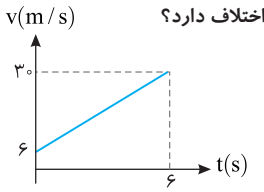


$$\frac{v-0}{5-0}=\frac{-6-0}{3-0}\Rightarrow v=-10m/s$$

۲ مسافت طی شده را به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان به‌دست می‌آوریم.

$$\ell=|S|=|\frac{-10\times5}{2}|=25m$$

بازی با سؤال نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست در حرکت است، مطابق شکل زیر است جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت چند متر با جابه‌جایی در ۴s آغازین حرکت اختلاف دارد؟

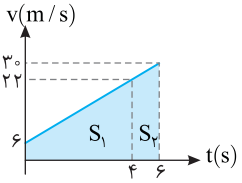


۱) ۲ متر، بیشتر
۲) ۲ متر، کمتر
۳) ۴ متر، بیشتر
۴) ۴ متر، کمتر

پاسخ ۱ ابتدا شتاب را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{30-6}{6}=4m/s^2$$

۱ ۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$، بنابراین سرعت در $t=4s$ را به‌دست می‌آوریم.



سرعت در $t=4s$ خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4\times4+6=22m/s$$

اکنون سطح زیر نمودار در بازهٔ صفر تا ۴s و بازهٔ ۴s تا ۶s را به‌دست می‌آوریم:

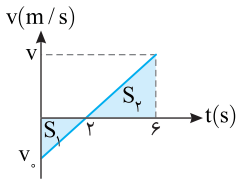
$$\Delta x_1=S_1=\frac{6+22}{2}\times4=56m,\ \Delta x_2=S_2=\frac{30+22}{2}\times2=52m$$

جابه‌جایی در ۲s ثانیهٔ سوم آغازین حرکت ۴ متر کمتر است. $56-52=4m$

گزینهٔ ۴

B ۱ ۳۷۲

خط فکری هرگاه تندی در حال افزایش باید حرکت تندشونده و هرگاه تندی در حال کاهش باشد حرکت کندشونده است. از طرفی به کمک سطح زیر نمودار $v-t$ می‌توان مسافت را حساب کرد. البته شما باید بین v_0 و v سرعت در هر لحظهٔ صفر و ۶s رابطه‌ای به‌دست بیاورید.



۱ در بازهٔ ۰ تا ۲s حرکت کندشونده و در بازهٔ ۲s تا ۶s حرکت تندشونده است.

۲ با توجه به شیب نمودار یک رابطهٔ ریاضی بین سرعت اولیه و سرعت در لحظهٔ $t=6s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{v_0-0}{0-2}=\frac{v-0}{6-2}\Rightarrow v=-2v_0$$

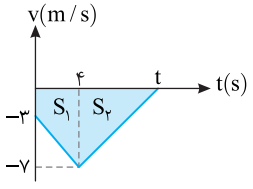
۳ سطح S_1 و S_2 را بر حسب v_0 و v به‌دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\ell_2=|S_2|=|\frac{v\times(6-2)}{2}|=2v$$ تندشونده

$$\ell_1=|S_1|=|\frac{v_0\times2}{2}|=v_0$$ کندشونده

$$\frac{\ell_2}{\ell_1}=|\frac{2v}{v_0}|=\frac{2\times2v_0}{v_0}=4$$

A ۲ ۳۷۳



سطح بین نمودار سرعت زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی است، سطح S_1 و S_2 را به‌دست آورده با هم جمع کرده و برابر ۲۷m قرار می‌دهیم.

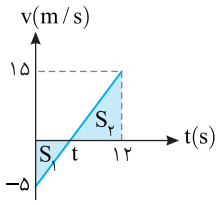
$$|d|=|S|=|S_1|+|S_2|=|\frac{-3+(-7)}{2}\times4|+|\frac{-7\times(t-4)}{2}|$$
$$+20+3/5t-14=27\Rightarrow t=6s$$

دقت کنید که جابه‌جایی منفی $(-27m)$ است.

A ۳۷۴ ۲

خط فکری شتاب برابر شیب نمودار سرعت - زمان است و در بازهٔ صفر تا ۱۲s شیب خط نمودار مثبت بنابراین شتاب مثبت است و باید مسافت طی شده در بازهٔ ۰ تا ۱۲s را به کمک سطح زیر نمودار حساب کنید.

۱ لحظهٔ t را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{0-(-5)}{t-0}=\frac{15-0}{12-t}\Rightarrow 3t=12-t\Rightarrow t=3s$$

۲ اکنون سطح‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow \ell=\frac{5\times 3}{2}+\frac{15\times 9}{2}$$

$$\Rightarrow \ell=7/5+67/5=75m$$

B ۳۷۵ ۱

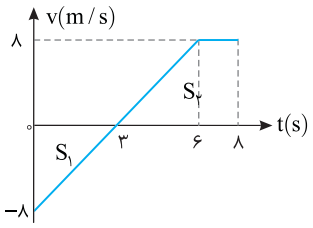
خط فکری بنا به تعریف، سرعت متوسط برابر جابه‌جایی تقسیم بر زمان جابه‌جایی است $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$. از طرفی جابه‌جایی برابر سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان است. شما باید به کمک سطح زیر نمودار جابه‌جایی را پیدا کنید و سرعت متوسط را بیابید.

۱ جابه‌جایی خواهد شد:

$$\Delta x=S=\frac{-8\times 3}{2}+\frac{5+2}{2}\times 8=-12+28=16m$$

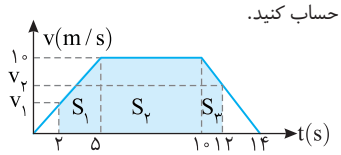
۲ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{16}{8}=2m/s$$



B ۳۷۶ ۳

خط فکری باید به کمک شیب خط، سرعت در لحظه‌های $t=2s$ و $t=12s$ را به‌دست بیاورید سپس به کمک سطح زیر نمودار، جابه‌جایی را حساب کرده و در آخر سرعت متوسط را حساب کنید.



۱ سرعت در لحظهٔ $t=2s$:

$$\frac{10-0}{v_1-0}=\frac{5-0}{2-0}\Rightarrow v_1=4m/s$$

۲ سرعت در لحظهٔ $t=12s$:

$$\frac{0-10}{14-10}=\frac{0-v_2}{14-12}\Rightarrow v_2=5m/s$$

۳ جابه‌جایی در بازه $t=2s$ تا $t=12s$:

$$\Delta x=S_1+S_2+S_3\Rightarrow \Delta x=\frac{10+4}{2}\times 3+10\times 5+\frac{10+5}{2}\times 2$$

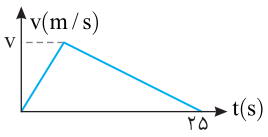
$$\Delta x=21+50+15\Rightarrow \Delta x=86m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{86}{12-2}\Rightarrow v_{av}=8/6m/s$$

A ۳۷۷ ۱

۱ سطح زیر نمودار برابر جابه‌جایی است از این‌رو:

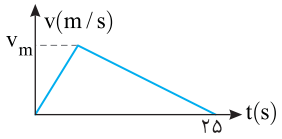


$$\Delta x=S=\frac{v\times 25}{2}$$

۲ سرعت متوسط $10m/s$ است به کمک تعریف سرعت متوسط، v را حساب می‌کنیم.

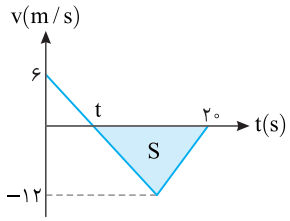
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 10=\frac{v\times 25}{2\times 25}\Rightarrow v=20\frac{m}{s}$$

میانبر در نمودارهای سرعت - زمان که به شکل مثلث از مبدأ زمان شروع می‌شوند، همواره بیشینه سرعت دو برابر سرعت متوسط است. $v_m=2v_{av}$



B ۳۷۸ ۲

خط فکری مدتی که متحرک در خلاف جهت محور x در حرکت است یعنی مدت زمانی که سرعت متحرک منفی است با توجه به شکل در بازه t تا ۲۰s سرعت منفی است. شما باید سطح S را به‌دست بیاورید تا بتوانید سرعت متوسط را حساب کنید. نیازی به محاسبه t وجود ندارد و مسئله بسیار ساده است دقت کنید.



سطح S را حساب می‌کنیم.

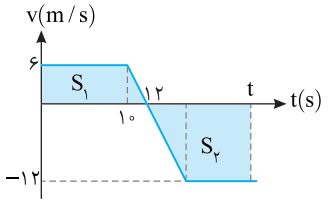
$$\ell=|S|=\frac{12\times(20-t)}{2}\Rightarrow \ell=6(20-t)$$

تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{6\times(20-t)}{20-t}\Rightarrow s_{av}=6m/s$$

B ۳۷۹ ۲

خط فکری هنگامی که متحرک مجدداً از مبدأ حرکتش می‌گذرد، جابه‌جایی آن صفر است. از این‌رو باید لحظه‌ای را به‌دست آورد که سطح زیر نمودار برابر صفر شود در واقع باید در لحظهٔ فرضی t، سطح زیر نمودار S_1 و S_2 برابر و قرینه هم باشند.



قرار است سطح S_1 و S_2 هم‌اندازه باشد از این‌رو مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_1|+|S_2|\Rightarrow|S_1|=|S_2|\Rightarrow \ell=2|S_1|$$

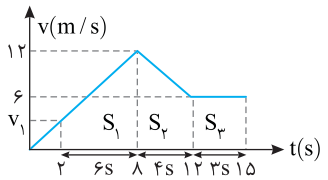
بنابراین کافی است سطح S_1 را به‌دست بیاورید و مقدار آن را دو برابر کنید. یعنی نیازی به یافتن لحظه t نداریم.

$$\ell=2S_1=2\times\frac{10+12}{2}\times 6=132m$$

B ۳۸۰ ۳

۱ به کمک شیب خط سرعت در لحظهٔ $t=2s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{12-0}{8-0}=\frac{v_1-0}{2-0}\Rightarrow v_1=3m/s$$



۲ جابه‌جایی متحرک را در بازهٔ $t=2s$ تا $t=15s$ به کمک سطح زیر نمودار به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=S_1+S_2+S_3\Rightarrow \Delta x=\frac{3+12}{2}\times 6+\left(\frac{12+6}{2}\right)\times 4+6\times 3$$

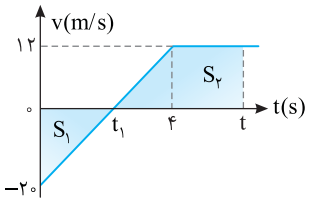
$$\Rightarrow \Delta x=45+36+18\Rightarrow \Delta x=99m$$

۳ اکنون می‌توان مکان متحرک در لحظهٔ $t=15s$ را حساب کرد:

$$\Delta\vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1\Rightarrow 99\vec{i}=\vec{x}_2-6\vec{i}\Rightarrow x_2=105\vec{i}$$

B ۳۸۱ | ۱

۱ به کمک شیب خط لحظهٔ t_1 که سرعت صفر می‌شود را حساب می‌کنیم.



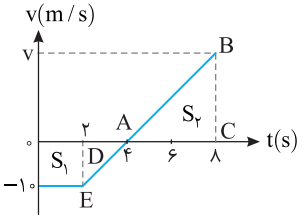
$$\frac{0-(-20)}{t_1-0}=\frac{12-0}{4-t_1}$$
$$\Rightarrow\frac{5}{t_1}=\frac{3}{4-t_1}\Rightarrow 3t_1=20-5t_1$$
$$8t_1=20\Rightarrow t_1=2/5s$$

۲ قرار است متحرک به مکان شروع حرکتش برگردد یعنی جابه‌جایی متحرک صفر شود $(\Delta x=0)$، در واقع سطح زیر نمودار باید تا لحظهٔ موردنظر صفر شود، بنابراین مساحت S_1 و S_2 باید هم‌اندازه باشد.

$$|S_1|=|S_2|\Rightarrow\left|\frac{-20\times 2/5}{2}\right|=\left|\frac{(t-2/5)+(t-4)}{2}\times 12\right|$$
$$25=12t-39\Rightarrow 12t=64\Rightarrow t=\frac{16}{3}$$

C ۳۸۲ | ۲

۱ به کمک شیب خط EB سرعت در لحظهٔ $t=8s$ را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{0-(-10)}{4-2}=\frac{v-0}{8-4}$$
$$\Rightarrow v=20m/s$$

۲ متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان $x=0$ با سرعت منفی شروع به حرکت کرده و به مدت ۴s در حال دور شدن از مبدأ است. جابه‌جایی متحرک در این ۴s را به کمک سطح زیر نمودار حساب می‌کنیم.

$$S_1=\Delta x_1=\left(\frac{4+2}{2}\right)(-10)=-30m$$

۳ در لحظهٔ $t=4s$، سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد و به سوی مبدأ بازمی‌گردد و در بازهٔ ۴s تا ۸s به اندازهٔ مقدار زیر در جهت مثبت محور حرکت می‌کند.

$$\Delta x_2=S_2=\frac{4\times 20}{2}=40m$$

۴ پس متحرک در بازگشت از مبدأ گذشته و در $t=8s$ در مکان $x=-30+40=10m$ مبدأ است، پس در $t=4s$ فاصلهٔ متحرک از مبدأ از بقیهٔ لحظه‌ها بیشتر است.

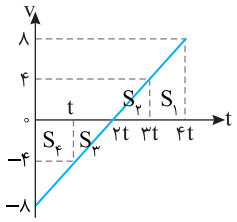
A ۳۸۳ | ۴

در هر سه گزینه $v_0^2=(\pm 4)^2=16$ و $v^2=(\pm 8)^2=64$ بوده و با توجه به معادلهٔ سرعت - مکان (مستقل از زمان) $v^2-v_0^2=2a\Delta x$، جابه‌جایی در هر سه حالت برابر است با:

$$\Delta x=\frac{64-16}{2a}=\frac{24}{a}$$

روش استفاده از نمودار:

ابتدا دقت کنید که حرکت با شتاب ثابت است و در بازهٔ زمانی یکسان تغییرات سرعت یکسان است یعنی بازه زمانی تغییر سرعت از $-8m/s$ تا $-4m/s$ و از $-4m/s$ تا صفر و ... یکسان و برابر t است.



بزرگی جابه‌جایی برابر سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان است.

سطح S_1 و سطح S_4 با هم برابر است زیرا دو ذوزنقه با قاعده‌های برابر و ارتفاع t هستند و جابه‌جایی در گزینهٔ (۱) و (۳) برابر است.

$$|S_1|=|S_4|=\frac{8+4}{2}t=6t$$

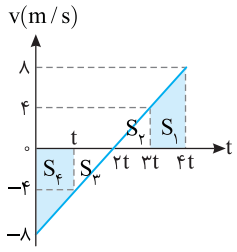
در تغییر سرعت از $-4m/s$ تا $8m/s$ سطح زیر نمودار خواهد شد.

$$(S_1+S_2)+S_3=\frac{8+4}{2}t+\frac{4\times t}{2}+\frac{-4\times t}{2}=6t$$

بنابراین در سه حالت جابه‌جایی یکسان است. البته روش اول بسیار منطقی و کوتاه‌تر است.

A ۳۸۴ | ۲

متحرک دارای شتاب ثابت است و در گزینهٔ (۱) و (۳) تغییر جهت نداده است اما در گزینهٔ (۲) سرعت ابتدا از $-4m/s$ به صفر رسیده و سپس از صفر به $8m/s$ می‌رسد، بنابراین مسافت طی شده در گزینهٔ (۱) و (۳) برابر و در گزینهٔ (۲) بیشتر از گزینه‌های (۱) و (۳) است. البته با رسم نمودار سرعت - زمان مسئله را واضح‌تر توضیح می‌دهیم.



۱ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $4m/s$ تا $8m/s$ برابر سطح $|S_1|$ است.

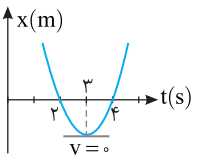
۲ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $-4m/s$ تا $8m/s$ برابر مجموع سطح‌ها $|S_1|+|S_2|+|S_3|$ است.

۳ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی تغییر سرعت از $-4m/s$ تا $-8m/s$ برابر سطح $|S_4|$ است.

بنابراین مسافت طی شده در گزینهٔ (۲) از بقیه حالت‌ها بیشتر است.

C ۳۸۵ | ۳

معادلهٔ $x=t^2-6t+8$ تابع درجه ۲ است. ریشه‌ها و مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم و نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم.



$$x=t^2-6t+8$$
$$\Rightarrow x=(t-2)(t-4)\xrightarrow{x=0}t=2s,t=4s$$

رأس سهمی که جهت حرکت تغییر می‌کند برابر است با $t=-\frac{b}{2a}=\frac{6}{2}=3s$.

قبل از لحظهٔ $t=3s$ متحرک در جهت منفی محور در حرکت است و در $t>3s$ متحرک در جهت مثبت محور در حرکت است یعنی در تمام بازه‌های زمانی قبل از ۳s و تمام بازه‌های زمانی بعد از ۳s که تغییر جهت وجود ندارد تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط یکی است.

بازی با سوال معادلهٔ مکان- زمان متحرکی در SI که روی خط راست حرکت می‌کند به‌صورت $x=t^2-3t$ است. مسافت طی شده در ثانیهٔ سوم چند برابر جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم است؟

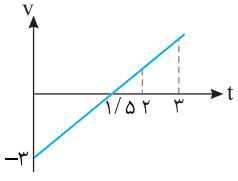
خارج ریاضی - ۹۸

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۱/۵ ۴) -۱/۰۵

پاسخ ابتدا لحظهٔ تغییر جهت یعنی لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود و علامت سرعت تغییر می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x=t^2-3t\\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\end{cases}\Rightarrow a=2m/s^2, v_0=-3m/s$$
$$\xrightarrow{v=at+v_0}v=2t-3\xrightarrow{v=0}0=2t-3\Rightarrow t=1/5s$$

لحظهٔ تغییر جهت $t=1/5s$ است. اما ثانیهٔ سوم یعنی $t=2s$ تا $t=3s$ و در این بازه متحرک تغییر جهت نمی‌دهد بنابراین جابه‌جایی و مسافت در ثانیهٔ سوم با هم برابر است.



گزینهٔ ۱

B ۳۸۶ ۲

راه‌حل اول: با توجه به معادلهٔ مکان- زمان جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم یعنی جابه‌جایی در بازه $t=۲s$ تا $t=۳s$ برابر است با:

$$\Delta x=x_{t=۳s}-x_{t=۲s}=(۳)^۲-۳(۳)-(۲^۲-۳(۲))=۹-۹-۴+۶=۲m$$

با مقایسهٔ معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت و معادله داده شده در مسئله، سرعت اولیه و شتاب را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\\ x=t^۲-۳t\end{cases}\Rightarrow \frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲\ ,\ v_۰=-۳m/s$$

ثانیه دوم یعنی بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۲s$. مکان در این دو لحظه را به‌دست می‌آوریم:

$$t=۱s\Rightarrow x=۱-۳=-۲m\ \ ,\ \ t=۲s\Rightarrow x=۴-۶=-۲m$$

بررسی می‌کنیم که آیا متحرک در این بازه تغییر جهت داده است؟ از این رو معادلهٔ سرعت- زمان را می‌نویسیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v=۲t-۳\xrightarrow{v=۰}۲t-۳=۰\Rightarrow t=۱/۵s$$

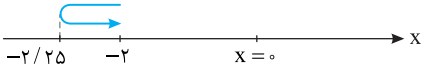
$$x=t^۲-۳t\Rightarrow x=(۱/۵)^۲-۳(۱/۵)=۲/۲۵-۴/۵=-۲/۲۵m$$

اکنون مسیر حرکت را رسم می‌کنیم.

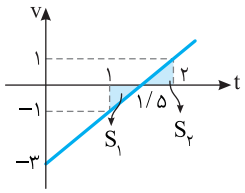
بنابراین:

$$\frac{\ell}{\Delta x}=\frac{۰/۵}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$\ell=۰/۲۵+۰/۲۵=۰/۵m$



راه‌حل دوم: بهترین روش برای حل مسائل مربوط به مسافت طی شده رسم نمودار سرعت - زمان است. مسافت طی شده برابر مجموع مساحت‌های زیر نمودار $v-t$ است، بنابراین ابتدا نمودار معادلهٔ $v=۲t-۳$ را رسم می‌کنیم.



در ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۲s$ ، سرعت این دو لحظه را روی نمودار مشخص کرده و مساحت مثلث‌های $S_۱$ و $S_۲$ را به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم.

$$v=۲t-۳\begin{cases}\xrightarrow{t=۱s}v_۱=-۱m/s\\ \xrightarrow{t=۲s}v_۲=۱m/s\end{cases}$$

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|\Rightarrow L=\frac{۱\times ۰/۵}{۲}+\frac{۱\times ۰/۵}{۲}=۰/۵m$$

بازی با سؤال معادلهٔ مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x=t^۲-۸t+۱۵$ است، مسافت طی شده در مدت صفر تا $۵s$ چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶

پاسخ ابتدا معادلهٔ سرعت زمان را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\ ,\ x=t^۲-۸t+۱۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲m/s^۲, v_۰=-۸m/s^۲\Rightarrow v=۲t-۸$$

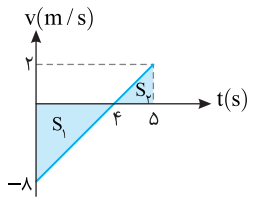
نمودار سرعت زمان را رسم می‌کنیم.

$$v=۲t-۸\xrightarrow{v=۰}t=۴s$$

سرعت در $t=۵s$ برابر است با:

$$v=۲\times ۵-۸=۲m/s$$

اکنون قدر مطلق سطح‌ها را با هم جمع می‌کنیم.



$$\ell=S_۱+S_۲=\frac{۸\times ۴}{۲}+\frac{۲\times ۱}{۲}=۱۶+۱=۱۷m$$

گزینه ۳

B ۳۸۷ ۳

۱ ابتدا لحظهٔ تغییر جهت را حساب می‌کنیم.

$$v=۰\Rightarrow -۲t+۸=۰\Rightarrow t=۴s$$

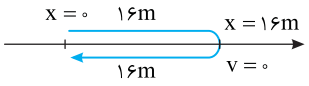
۲ مکان اولیه را به دلخواه مبدأ می‌گیریم و مکان تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(-۲)\times(۴)^۲+۸\times ۴=۱۶m$$

۳ در لحظهٔ $t=۸s$ نیز مکان را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(-۲)(۸)^۲+۸\times ۸=۰$$

۴ با توجه به نمودار روبه‌رو مسافت طی شده برابر است با:

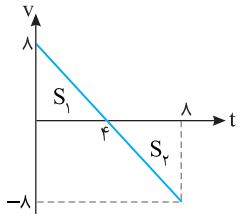


$$\ell=۱۶+۱۶=۳۲m$$

۵ تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۳۲}{۸}=۴m/s$$

روش بهتر رسم نمودار سرعت - زمان: سرعت در لحظه صفر و $۸s$ و لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را حساب کرده و نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم و به کمک سطح زیر نمودار تندی را به‌دست می‌آوریم.



$$v=-۲t+۸\begin{cases}\xrightarrow{t=۰}v=+۸m/s\\ \xrightarrow{v=۰}۰=-۲t+۸\Rightarrow t=۴s\\ \xrightarrow{t=۸s}v=-۲\times ۸+۸=-۸m/s\end{cases}$$

مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|=\frac{۸\times ۴}{۲}+\frac{۸\times ۴}{۲}=۳۲m$$

تندی متوسط خواهد شد:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۳۲}{۸}=۴m/s$$

B ۳۸۸ ۳

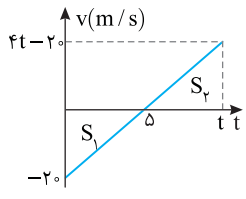
خط فکری مسافت طی شده متحرک با شتاب ثابت $a=۴m/s^۲$ در یک بازهٔ زمانی $۳۸۸m$ است. سرعت اولیه که در خلاف جهت محور است برابر $-۲۰m/s$ بوده و متحرک در این لحظه از مبدأ مکان $(x_۰=۰)$ می‌گذرد. بنابراین به نظر می‌رسد با نوشتن معادله سرعت - زمان و رسم نمودار سرعت - زمان به کمک سطح زیر نمودار می‌تواند لحظه‌ای که مسافت طی شده به $۳۸۸m$ می‌رسد را به‌دست آورد.

۱ معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۴t-۲۰$$

۲ نمودار را رسم می‌کنیم.

$$v=۰\Rightarrow ۴t-۲۰=۰\Rightarrow t=۵s$$



۳ با توجه به فرض مسئله، مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|\Rightarrow ۳۸۸=|\frac{-۲۰\times ۵}{۲}|+|\frac{(۴t-۲۰)(t-۵)}{۲}|$$

$$۳۳۸=(۲t-۱۰)(t-۵)\Rightarrow ۳۳۸=۲(t-۵)(t-۵)$$

$$۱۶۹=(t-۵)^۲\Rightarrow t-۵=۱۳\Rightarrow t=۱۸s$$

۴ تندی در لحظهٔ $t=۱۸s$ خواهد شد:

$$v=۴t-۲۰\Rightarrow v=۴\times ۱۸-۲۰=۵۲m/s$$

B ۳۸۹ ۴

۱ ابتدا به کمک معادله مکان - زمان سرعت اولیه را به دست می‌آوریم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow 2=\frac{1}{2}\times 4\times(2)^2+2v_0 \Rightarrow v_0=-3m/s$$

۲ اکنون لحظه و مکان تغییر جهت متحرک را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=4t-3 \xrightarrow{v=0} t=\frac{3}{4}s$$

$$x=\frac{1}{2}\times 4\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow x=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}=-\frac{9}{8}m=-1/125m$$

۳ با توجه به شکل مسافت طی‌شده خواهد شد.

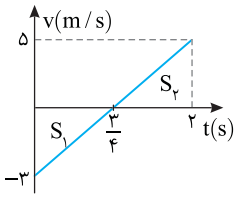
$$\ell=1/125+1/125+2=4/25m$$



روش رسم نمودار:

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم.

$$v=4t-3 \xrightarrow{t=2s} v=5m/s$$



مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S_1|+|S_2| \Rightarrow \ell=\left|\frac{-3\times\frac{3}{4}}{2}\right|+\left|\frac{5\times(2-\frac{3}{4})}{2}\right| \Rightarrow \ell=\frac{9}{8}+\frac{25}{8} \Rightarrow \ell=\frac{34}{8}$$

$$\Rightarrow \ell=4/25m$$

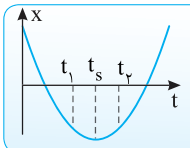
A ۳۹۰ ۳

۱ در لحظه‌های $t=3s$ و $t=5s$ متحرک از مبدأ گذشته و در لحظه تغییر جهت (رأس سهمی $x-t$) مکان متحرک منفی بوده پس نمودار $x-t$ حرکت تقریباً به صورت زیر است.

یادداشت ریاضی

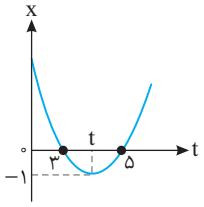
در نمودارهای سهمی مانند نمودار $x-t$ در حرکت با شتاب ثابت، رأس نمودار محور تقارن است بنابراین:

$$t_s=\frac{t_1+t_2}{2}$$



۲ با توجه به یادداشت ریاضی بالا لحظهٔ t در نمودار $x-t$ برابر است با:

$$t=\frac{3+5}{2}=4s$$



۳ با توجه به نمودار در $t=4s$ سرعت متحرک صفر شده و در بازهٔ $t=4s$ تا $t=5s$ متحرک به اندازهٔ $\Delta x=0-(-1)=1m$ جابه‌جا می‌شود. شتاب متحرک را با توجه به این اطلاعات حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_1t \xrightarrow[\Delta t=1s]{v_1=0} 1=\frac{1}{2}a \Rightarrow a=2m/s^2$$

۴ شتاب متحرک $2m/s^2$ و در $t=4s$ سرعت متحرک صفر شده است، با توجه به این اطلاعات سرعت اولیه و سرعت در $t=5s$ را حساب می‌کنیم:

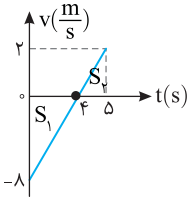
$$t_1=0,\ t_2=4s: \quad v_2=at+v_1 \xrightarrow[v_2=0]{\Delta t=4s}$$

$$0=2\times 4+v_1 \Rightarrow v_1=-8m/s$$

$$t_2=4s,\ t_3=5s: \quad v_3=at+v_2 \xrightarrow[v_2=0]{\Delta t=1s}$$

$$v_3=2\times 1+0 \Rightarrow v_3=2m/s$$

۵ برای به‌دست آوردن تندی متوسط نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم تا با استفاده از سطح زیر نمودار مسافت به‌دست آید:



$$\ell=|S_1|+|S_2|$$

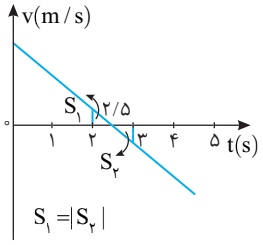
$$\Rightarrow \ell=\frac{4\times 8}{2}+\frac{1\times 2}{2}=16+1=17m$$

۶ تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{17}{5}m/s$$

A ۳۹۱ ۳

خط فکری با رسم نمودار $v-t$ متحرک، وضعیت حرکت را بررسی می‌کنیم. برای این منظور با توجه به منفی‌بودن شتاب، شیب نمودار منفی خواهد بود. از طرفی چون جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم (۲s تا ۳s) حرکت صفر است، یعنی در نیمی از آن جابه‌جایی مثبت و در نیمی از آن جابه‌جایی منفی است بنابراین مطابق شکل مقابل باید در لحظهٔ $t=\frac{2+3}{2}=2/5s$ متحرک تغییر جهت داده باشد تا سطح زیر نمودار در بازه‌های ۲s تا ۲/۵s و ۲/۵s تا ۳s برابر باشد، زیرا مجموع جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم صفر است.



نکته در حرکت شتاب ثابت که مسافت و یا تندی خواسته می‌شود باید نمودار $v-t$ را رسم کرده و از روی سطح زیر نمودار مسافت را حساب کنید.

تندی متحرک در $t=2/5s$ صفر شده و شتاب حرکت $a=-4m/s^2$ است. برای رسم نمودار $v-t$ و محاسبهٔ مسافت در بازهٔ $t_1=2s$ تا $t_2=4s$ باید تندی در $t=2s$ و $t=4s$ حساب شود:

$$\begin{cases} t_1=2/5s, v_1=0 \\ a=-4m/s^2 \\ t_2=4s \end{cases} \Rightarrow v_2=a\Delta t+v_1 \xrightarrow{\Delta t=t_2-t_1} \Delta t=1/5s$$

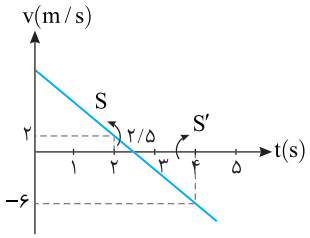
$$v_2=-4\times 1/5+0 \Rightarrow v_2=-6m/s$$

$$\begin{cases} t_1=2s, v_1=? \\ a=-4m/s^2 \\ t_2=2/5s, v_2=0 \end{cases} \Rightarrow v_2=a\Delta t+v_1 \xrightarrow{\Delta t=t_2-t_1} \Delta t=0/5s$$

$$0=-4\times 0/5+v_1 \Rightarrow v_1=2m/s$$

نمودار $v-t$ را رسم کرده و سطح زیر نمودار بین ثانیه‌های ۲s تا ۲/۵s و ۲/۵s تا ۴s را حساب کرده

$$S=\frac{0/5\times 2}{2}=0/5m \quad , \quad |S'|=\frac{1/5\times 6}{2}=4/5m$$



مجموع قدر مطلق سطح زیر نمودار $v-t$ برابر مسافت طی‌شده است:

$$\ell=S+|S'| \Rightarrow \ell=0/5+4/5=5m$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت اگر جابه‌جایی یا سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 صفر شود، آن‌گاه در لحظهٔ $t=\frac{t_1+t_2}{2}$ متحرک تغییر جهت داده و تندی آن صفر می‌شود.

بازی با سؤال متحرکی با شتاب ثابت در مبدأ زمان با سرعت $18m/s$ روی خط راست، در حرکت بوده و سرعت متوسط متحرک در ثانیهٔ پنجم حرکت برابر با صفر است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ $t=0$ تا $t=10s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۰/۱ ۲) ۱۰۱ ۳) ۲۰ ۴) ۲۰/۱

پاسخ **نکته** هرگاه در حرکت با شتاب ثابت در یک بازهٔ زمانی جابه‌جایی و یا سرعت متوسط صفر شود، در لحظهٔ وسط بازه زمانی سرعت متحرک صفر شده و متحرک تغییر جهت می‌دهد.

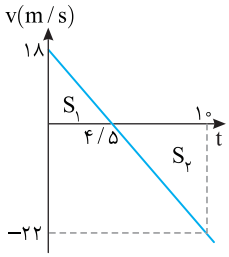
۱ در ثانیهٔ پنجم بین بازهٔ زمانی $t=4s$ تا $t=5s$ سرعت متوسط صفر شده است. بنابراین در لحظهٔ $t=4/5s$ سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. سرعت اولیه $v_0=18m/s$ و شتاب ثابت است. شتاب حرکت را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=a\times 4/5+18 \Rightarrow a=-4m/s^2$$

۲ معادلهٔ سرعت - زمان را نوشته، سرعت در لحظهٔ $t=10s$ را حساب کرده نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:

$$v=-4t+18 \xrightarrow{t=10s} v=-40+18 \Rightarrow v=-22m/s$$

۳ مسافت طی شده را به‌دست می‌آوریم:



$$\ell=|S_1|+|S_2|=\left|\frac{18\times 4/5}{2}\right|+\left|\frac{-22\times 5/5}{2}\right|$$
$$\ell=9\times 4/5+11\times 5/5$$
$$\Rightarrow \ell=40/5+60/5 \Rightarrow L=101m$$

۴ تندی متوسط خواهد شد:

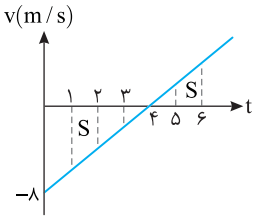
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{101}{10}=10/1m/s$$

گزینهٔ ۱

C ۳۹۲ ۲

نکته هرگاه در یک حرکت با شتاب ثابت مسافت طی شده در دو بازهٔ زمانی با هم برابر شود، آن‌گاه دقیقاً در وسط بازهٔ زمانی از ابتدای بازه اول تا انتهای بازهٔ دوم سرعت متحرک صفرشده و تغییر جهت می‌دهد.

خط فکری ثانیهٔ سوم یعنی از $t=2s$ تا $t=3s$ و ثانیهٔ ششم یعنی از $t=5s$ تا $t=6s$ مسافت‌ها یکسان است. بنابراین در لحظهٔ $t=\frac{6+2}{2}=4s$ سرعت متحرک صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد. با توجه به صورت مسئله سرعت اولیه $-8m/s$ است، بنابراین شما باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنید و تا لحظهٔ $t=4s$ سطح زیر نمودار را حساب کنید.



۱ سطح زیر نمودار خواهد شد:

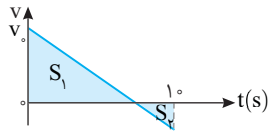
$$\Delta x=S=\frac{-8\times 4}{2}=-16m$$

۲ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=20m$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x=x-x_0 \Rightarrow -16=x-20 \Rightarrow x=4m$$

A ۳۹۳ ۴

خط فکری هرگاه تندی متوسط بزرگ‌تر از سرعت متوسط باشد، مسافت طی‌شده بزرگ‌تر از جابه‌جایی بوده و به این معنی است که متحرک در حین حرکت تغییر جهت داده است. برای محاسبهٔ مسافت و تندی بهتر است نمودار $v-t$ کشیده شود که چون سرعت اولیه با توجه به سؤال در جهت محور xها بوده (در جهت مثبت) و تغییر جهت داشته‌ایم، نمودار $v-t$ به صورت روبه‌رو می‌شود:



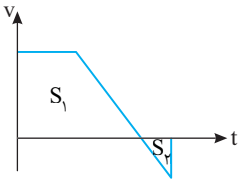
واضح است که چون سرعت اولیه مثبت است و متحرک تغییر جهت داده، شیب نمودار منفی می‌شود. حال با توجه به تعریف سرعت متوسط و تندی متوسط خواهیم داشت:

۱ در بازهٔ صفر تا $10s$ سرعت متوسط $7/5$ متر بر ثانیه است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x=75m$$

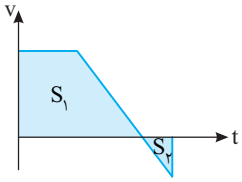
۲ در بازهٔ صفر تا $10s$ تندی متوسط $8/5$ متر بر ثانیه است:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \ell=85m$$



نکته در نمودار $v-t$ مسافت و جابه‌جایی متحرک با استفاده از سطح محصور بین نمودار و محور افقی به‌دست می‌آید:

$$\Delta x=S_1+S_2 \quad , \quad \ell=|S_1|+|S_2|$$

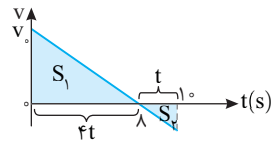


۳ مسافت و جابه‌جایی را می‌توان به کمک سطح زیر نمودار به‌دست آورد:

$$\begin{cases} \ell=S_1+S_2 \Rightarrow 85=S_1+S_2 \\ \Delta x=S_1-S_2 \Rightarrow 75=S_1-S_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow S_1=80m, S_2=5m$$

یادداشت ریاضی یکی از ابزارهای ریاضی مفید در محاسبات سطح زیر نمودار استفاده از تشابه مثلث‌ها است که در آن، مجذور نسبت ضلع‌ها برابر با نسبت مساحت‌هاست.

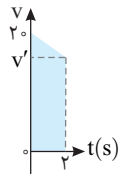
۴ نسبت مساحت سطح زیر نمودار در این دو بخش به صورت $\frac{S_1}{S_2}=16$ است، پس نسبت ضلع‌های این دو مثلث متشابه ۱ به ۴ است.



$$\frac{t}{(10-t)}=\frac{1}{4} \Rightarrow 4t=10-t \Rightarrow t=2$$

$$S_1=80m \Rightarrow \frac{v_0\times 8}{2}=80 \Rightarrow v_0=20m/s$$

برای به‌دست آوردن سطح زیر نمودار در ۲ ثانیه اول نیاز به داشتن سرعت در ثانیه دوم داریم. به این منظور ابتدا شتاب حرکت را با توجه به شیب نمودار $v-t$ به‌دست می‌آوریم:



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-20}{8}=-2/5m/s^2$$

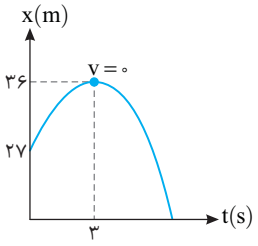
حال مسافت $2s$ اول را حساب می‌کنیم:

$$v'=at+v_0 \Rightarrow v'=-5+20 \Rightarrow v'=15m/s$$

$$\ell=\frac{(20+15)2}{2}=35m$$

A ۳۹۴ ۳

خط فکری حرکت متحرک شتاب ثابت است و با توجه به اطلاعات داده شده در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۳s$ شتاب متحرک و سرعت اولیه آن را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید در لحظهٔ $t=۳s$ شیب خط مماس بر نمودار افقی شده و سرعت متحرک صفر است (رأس سهمی)، همچنین مسافت طی شده خواسته شده و برای حل از سطح زیر نمودار $v-t$ کمک می‌گیریم.



۱ با توجه به رابطهٔ $\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t$، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=۳۶-۲۷=۹m\ ,\ \Delta t=۳s\ ,\ v_۰=?\ ,\ v=۰$$

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\times\Delta t\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۳\Rightarrow v_۰=۶m/s$$

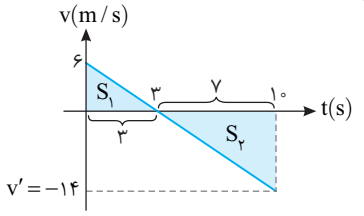
۲ با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان، شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=۳a+۶\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

۳ سرعت اولیه $v_۰=۶m/s$ و شتاب $a=-۲m/s^۲$ است، سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$t=۱۰s\Rightarrow v'=at+v_۰\Rightarrow v'=-۲\times ۱۰+۶=-۱۴m/s$$

۴ با توجه به اطلاعات به‌دست آمده نمودار $v-t$ متحرک را رسم و از سطح زیر نمودار مسافت را حساب می‌کنیم:

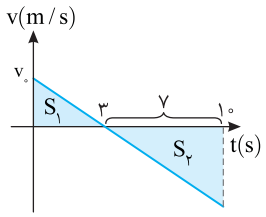


$$S_۱=\frac{۶\times ۳}{۲}=۹m$$

$$|S_۲|=\frac{۷\times ۱۴}{۲}=۴۹m$$

$$\Rightarrow \ell=S_۱+|S_۲|=۵۸m$$

میانبر از ابتدا با دانستن اینکه سرعت اولیه متحرک مثبت است نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:



با توجه به اینکه سطح زیر نمودار نشان‌دهنده جابه‌جایی متحرک است، $S_۱$ برابر خواهد بود با:

$$\Delta x_۱=S_۱=۳۶-۲۷=۹m$$

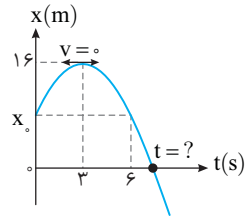
حال با استفاده از تشابه دو مثلث شکل گرفته در نمودار، اندازه جابه‌جایی ۳ ثانیه تا ۱۰ ثانیه را حساب می‌کنیم:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=(\frac{۳}{۷})^۲\Rightarrow\frac{۹}{S_۲}=\frac{۹}{۴۹}\Rightarrow S_۲=۴۹m$$

در نتیجه مسافت طی شده از شروع حرکت تا ثانیه ۱۰ ام برابر مجموع جابه‌جایی‌ها یعنی $۴۹+۹=۵۸m$ است.

A ۳۹۵ ۳

۱ حرکت با شتاب ثابت بوده و نمودار آن سهمی است. در نمودار سهمی، خط قائم گذرنده از رأس سهمی، محور تقارن آن است، بنابراین مطابق شکل در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۶s$، مکان متحرک یکسان است.



۲ در بازهٔ صفر تا ۶s، تندی متوسط متحرک $۳m/s$ است، در این صورت مسافت طی شده در این مدت خواهد شد:

$$\ell=vt\Rightarrow\ell=۳\times ۶=۱۸m$$

۳ متحرک در مدت صفر تا ۶s، ۱۸m مسافت طی کرده و مطابق نمودار ابتدا در مدت ۳s اول ۹m رفته و سپس از ۳s تا ۶s، ۹m برگشته است.

۴ از صفر تا ۳s، ۹m رفته بنابراین مکان اولیهٔ آن خواهد شد:

$$۱۶-x_۰=۹\Rightarrow x_۰=۷m$$

۵ با توجه به معادلهٔ مستقل از شتاب در بازهٔ صفر تا ۳s سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۳\Rightarrow v_۰=\frac{۱۸}{۳}=۶m/s$$

۶ شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم.

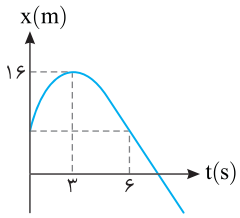
$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۳}=-۲m/s^۲$$

۷ در مدت زمانی که نمودار $x-t$ بالای محور زمان است و x مثبت است، بردار مکان مثبت خواهد بود.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}(-۲)t^۲+۶t+۷$$

$$\Rightarrow t^۲-۶t-۷=۰\Rightarrow t=-۱\ \text{غ.ق.ق}\ ,\ t=۷s$$

بازی با سؤال **نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر در بازهٔ زمانی ۰ تا ۶s تندی متوسط $۳m/s$ باشد، در چه لحظه‌ای بردار مکان تغییر جهت می‌دهد؟ $(\sqrt{۲۵}=۱/۴)$**



۱) ۷
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۵

پاسخ **۱ متحرک با تندی متوسط $۳m/s$ در مدت ۶s مسافت زیر را طی می‌کند.**

$$\ell=s_{av}t\Rightarrow\ell=۶\times ۳=۱۸m$$

۲ نمودار سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس تقارن دارد بنابراین در $t=۰$ و $t=۶s$ مکان متحرک برابر بوده و در این مدت مسافت طی شده $۱۸m$ است. از این‌رو در ۰ تا ۳s متحرک $\frac{۱۸}{۲}=۹m$ طی کرده و به مکان $۱۶m$ می‌رسد. بنابراین مکان اولیهٔ آن $x_۰=۱۶-۹=۷m$ است.

۳ به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow ۹=\frac{۰+v_۰}{۲}\times ۳\Rightarrow v_۰=۶m/s$$

۴ شتاب حرکت خواهد شد:

$$a=\frac{v-v_۰}{t}\Rightarrow a=\frac{۰-۶}{۳}\Rightarrow a=-۲m/s^۲$$

۵ معادلهٔ حرکت را بنویسید زمان تغییر جهت بردار مکان $(x=۰)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(-۲)t^۲+۶t+۷=۰$$

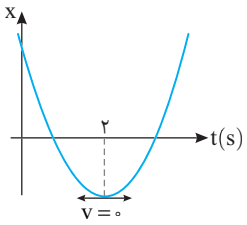
$$-t^۲+۶t+۷=۰\Rightarrow+t^۲-۶t-۷=۰$$

$$t=\frac{+۶\pm ۸}{۲}\Rightarrow t=+۳\pm ۴\Rightarrow t=۳-۴<۰\ \text{غ ق ق}$$

$$t=۳+۴\Rightarrow t=۷s$$

گزینهٔ ۱

B ۳۹۶ ۳



باید از نمودار به این اطلاعات دست پیدا کنید.

۱ در لحظهٔ $t=۲s$ متحرک تغییر جهت داده و سرعت آن صفر شده است.

۲ در نمودار مکان - زمان اگر جهت تقعر رو به بالا شد شتاب مثبت است که در این نمودار جهت تقعر منحنی رو به بالاست و شتاب مثبت است.

۳ در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت صفر شده است، با توجه به معادلهٔ سرعت زمان درحرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیه و سرعت در لحظهٔ $t=۱s$ و $t=۶s$ را برحسب شتاب حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \xrightarrow{t=۲s} ۰=۲a+v_۰ \Rightarrow v_۰=-۲a$$

$$t_۱=۱s \Rightarrow v_۱=a\times ۱+(-۲a) \Rightarrow v_۱=-a$$

$$t_۲=۶s \Rightarrow v_۲=a\times ۶-۲a \Rightarrow v_۲=۴a$$

۴ سرعت متوسط در بازهٔ $t=۱s$ تا $t=۶s$ برابر $۳m/s$ است بنابراین جابه‌جایی در این مدت خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۳=\frac{\Delta x}{۶-۱} \Rightarrow \Delta x=۱۵m$$

۵ در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ برابر میانگین سرعت‌هاست از این‌رو می‌توان نوشت:

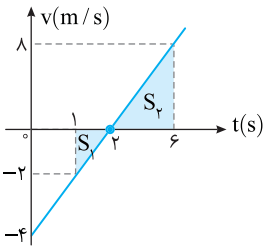
$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲} \xrightarrow{v_۱=-a\,,\,v_۲=۴a} ۳=\frac{-a+۴a}{۲} \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

۶ در این صورت $v_۱$ و $v_۲$ را می‌توان به دست آورد.

$$v_۱=-a \Rightarrow v_۱=-۲m/s\,,\,v_۲=۴a \Rightarrow v_۲=۴\times ۲=۸m/s$$

۷ نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم.

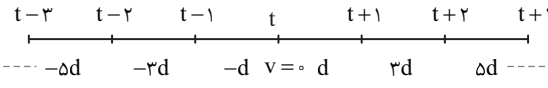
۸ برای یافتن مسافت کافی است $S_۱+S_۲$ را حساب کنیم.



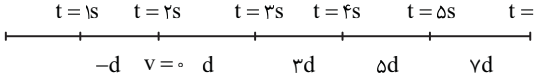
$$\ell=|S_۱|+|S_۲|=\frac{۲\times ۱}{۲}+\left(\frac{۸\times ۴}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \ell=۱۷m$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت اگر در لحظه t سرعت جسم صفر شود برای جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های قبل و بعد از t رابطهٔ زیر برقرار است.



با توجه به نمودار مسئله در لحظهٔ $t=۲s$ سرعت صفر شده است بنابراین در بازهٔ $۱s$ تا $۶s$ که سرعت متوسط $۳m/s$ و جابه‌جایی $۱۵m$ است می‌توان نوشت:

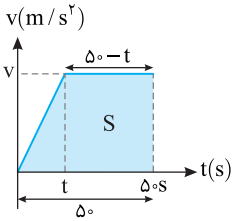


$$\Delta x=-d+d+۳d+۵d+۷d=۱۵ \Rightarrow ۱۵d=۱۵ \Rightarrow d=۱m$$

مسافت طی شده خواهد شد: $\ell=|-d|+d+۳d+۵d+۷d=۱۷d \Rightarrow \ell=۱۷m$

B ۳۹۷ ۴

راه‌حل اول: نمودار سرعت - زمان را با توجه به داده‌های مسئله رسم می‌کنیم.



مساحت زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی می‌باشد بنابراین:

$$\Delta x_{کل}=۶۰۰+۲۰۰=۸۰۰m$$

$$\Rightarrow \Delta x_{کل}=S=\frac{v(۵۰+(۵۰-t))}{۲}=۸۰۰m$$

$$\Delta x_{کل}=S=\frac{۱۰۰v-vt}{۲}=۸۰۰ \qquad (۱)$$

بنا به فرض مسئله سطح زیر نمودار از صفر تا t باید برابر $۲۰۰m$ باشد از این‌رو:

$$S_۱=\frac{vt}{۲}=۲۰۰ \Rightarrow vt=۴۰۰m \qquad (۲)$$

اکنون در رابطهٔ (۱) از رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{۱۰۰v-۴۰۰}{۲}=۸۰۰ \Rightarrow ۱۰۰v-۴۰۰=۱۶۰۰ \Rightarrow v=۲۰m/s$$

راه‌حل دوم:

با توجه به صورت سؤال، می‌توان برای سادگی در فهم آن، شکل زیر را رسم کرد. برای قسمت اول از فرمول مستقل از زمان می‌نویسیم:



$$\Delta x_۱=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t_۱ \Rightarrow ۲۰۰=\frac{v+۰}{۲}t_۱ \Rightarrow vt_۱=۴۰۰ \qquad (۱)$$

اگر مدت حرکت در ابتدا را $t_۱$ فرض کنیم در مدت $t_۲=۵۰-t_۱$ متحرک دارای حرکت یکنواخت بوده از این‌رو:

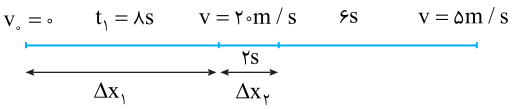
$$\Delta x_۲=v\Delta t_۲ \Rightarrow ۶۰۰=v(۵۰-t_۱) \Rightarrow ۶۰۰=۵۰v-vt_۱ \qquad (۲)$$

از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۶۰۰=۵۰v-(۴۰۰) \Rightarrow v=۲۰m/s$$

B ۳۹۸ ۴

جابه‌جایی در قسمت اول مسیر برابر است با:



$$\Delta x_۱=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t_۱ \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{۲۰+۰}{۲}\times ۸ \Rightarrow \Delta x_۱=۸۰m$$

در قسمت دوم مسیر که حرکت کندشونده است، ابتدا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_۰}{t} \Rightarrow a=\frac{۵-۲۰}{۶} \Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}m/s^۲$$

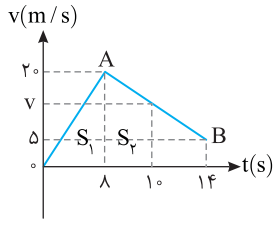
جابه‌جایی در مدت $۲s$ از لحظهٔ $t=۸s$ تا $t=۱۰s$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x_۲=\frac{۱}{۲}\times\left(-\frac{۵}{۲}\right)\times ۴+(۲۰\times ۲) \Rightarrow \Delta x_۲=۳۵m$$

سرعت متوسط برابر جابه‌جایی در یکای زمان است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av}=\frac{۸۰+۳۵}{۱۰}=۱۱/۵m/s$$

روش رسم نمودار سرعت - زمان:



متحرک از حال سکون $v_۰=۰$ شروع به حرکت کرده و در مدت $۸s$ سرعتش به $۲۰m/s$ رسید. سپس در مدت $۶s$ یعنی بازهٔ زمانی بین $(۸s$ تا $۱۴s)$ سرعت به $۵m/s$ رسیده است بنابراین نمودار $v-t$ به‌صورت روبه‌روست.

سرعت در لحظهٔ $t=۱۰s$ را به کمک شیب خط AB حساب می‌کنیم.

$$\frac{۵-۲۰}{۱۴-۸}=\frac{v-۲۰}{۱۰-۸} \Rightarrow \frac{-۱۵}{۶}=\frac{v-۲۰}{۲} \Rightarrow v=۱۵m/s$$

به کمک سطح زیر نمودار از جابه‌جایی در $۱۰s$ را حساب می‌کنیم.

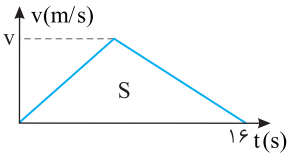
$$\Delta x=S_۱+S_۲ \Rightarrow \Delta x=\frac{۲۰\times ۸}{۲}+\frac{۲۰+۱۵}{۲}\times ۲ \Rightarrow \Delta x=۸۰+۳۵ \Rightarrow \Delta x=۱۱۵m$$

سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۱۵}{۱۰} \Rightarrow v_{av}=۱۱/۵m/s$$

B ۳۹۹ ۳

متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده و سرعتش به v رسیده سپس مجدداً سرعت آن به صفر رسیده است. از این‌رو نمودار سرعت- زمان خودرو مطابق شکل روبرو است.

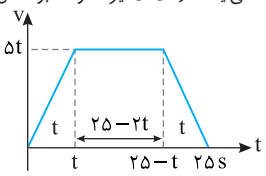


سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر با جابه‌جایی جسم است.

$$\Delta x=S\Rightarrow\Delta x=۱۶۰m\Rightarrow۱۶۰=\frac{v\times۱۶}{۲}\Rightarrow v=۲۰m/s$$

C ۴۰۰ ۳

خط فکری بهتر بود طراح می‌گفت متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده است. اما حل مسئله اگر مدت زمان حرکت تندشونده با شتاب $5m/s^2$ را t بنامیم، سرعت متحرک در لحظهٔ t برابر $v=at+v_0=5t$ خواهد شد. از طرفی وقتی متحرک با شتاب $-5m/s^2$ حرکت را کند کرده تا می‌ایستد زمان آن نیز t خواهد بود. کل مدت حرکت ۲۵s است، بنابراین زمان حرکت یکنواخت $25-2t$ می‌شود. اکنون با این داشته‌ها می‌توانید نمودار سرعت - زمان را به شکل روبه‌رو رسم و به کمک سطح زیر نمودار مسئله را حل کنید.



۱ با توجه به فرض مسئله سرعت متوسط در مدت ۲۵، $20m/s$ است بنابراین جابه‌جایی متحرک خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\Delta x=۲۰\times۲۵\Rightarrow\Delta x=۵۰۰m$$

۲ سطح زیر نمودار سرعت - زمان یک ذوزنقه است که مقدار مساحت آن باید ۵۰۰ باشد.

یادآوری ریاضی مساحت ذوزنقه برابر مجموع دو قاعده ضربدر نصف ارتفاع

$$S=\frac{(۲۵-2t)+۲۵}{۲}\times5t=۵۰۰\Rightarrow\frac{۵۰-2t}{۲}\times t=۱۰۰\Rightarrow(۲۵-t)t=۱۰۰$$

$$t^2-۲۵t+۱۰۰=0\Rightarrow(t-۵)(t-۲۰)=0\Rightarrow t=5s,t=۲۰s$$

کل مدت حرکت ۲۵s است، بنابراین $t=۲۰s$ نمی‌تواند جواب مسئله باشد. زیرا مدت زمان حرکت یکنواخت خواهد شد: $25-2t=25-2\times۲۰=-۱۵s$

که غیرقابل قبول است بنابراین $t=5s$ جواب بوده و مدت زمان حرکت یکنواخت برابر است با: $25-2\times5=۱۵s$

بازی با سؤال **متحرکی در یک مسیر مستقیم از حال سکون حرکت می‌کند و پس از ۱۵ ثانیه می‌ایستد. اگر متحرک t_1 ثانیه اول مسیر را با شتاب $2m/s^2$ و مابقی زمان را با شتاب $-1m/s^2$ طی کند تا متوقف شود، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ **متحرک از حال سکون $v_1=0$ حرکت کرده و پس از t_1 ثانیه به سرعت $v_2=v$ می‌رسد:**

$$v_2=at+v_1\Rightarrow v=2t_1\quad(1)$$

سپس متحرک پس از t_2 ثانیه با شتاب $a=-1m/s^2$ از سرعت $v_2=v$ به سرعت $v_3=0$ می‌رسد:

$$v_3=at+v_2\Rightarrow-v=-t_2\Rightarrow v=t_2\quad(2)$$

با توجه به معادله‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}v=2t_1\\v=t_2\end{cases}\Rightarrow t_2=2t_1$$

زمان کل حرکت $t_1+t_2=3t_1=۱۵s$ است، بنابراین $t_1=5s$، $t_2=۱۰s$ و $v=2t_1=۱۰m/s$ است. جابه‌جایی در هر بازه را حساب می‌کنیم:

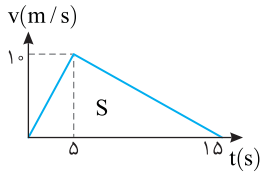
$$\begin{cases}\Delta x_1=\frac{v_1+v_2}{۲}t_1\Rightarrow\Delta x_1=\frac{0+۱۰}{۲}\times5=۲۵m\\\Delta x_2=\frac{v_2+v_3}{۲}t_2\Rightarrow\Delta x_2=\frac{۱۰+0}{۲}\times۱۰=۵۰m\end{cases}\Rightarrow\Delta x_{کل}=\Delta x_1+\Delta x_2=۷۵m$$

سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}=\frac{۷۵}{۱۵}=5m/s$$

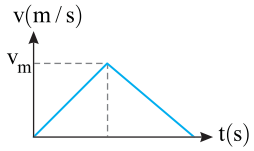
روش حل به کمک نمودار سرعت - زمان

با توجه به اینکه $t_1=5s$ و $t_2=۱۰s$ و سرعت در لحظهٔ t_1 برابر $2\times5=۱۰m/s$ است نمودار سرعت - زمان را رسم کرده و مسئله را حل می‌کنیم.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{S}{\Delta t}=\frac{\frac{۱۰\times۱۵}{۲}}{۱۵}=5m/s$$

میانبر **هرگاه نمودار به‌صورت مثلث شکل روبه‌رو باشد، سرعت متوسط، نصف سرعت بیشینه است:**

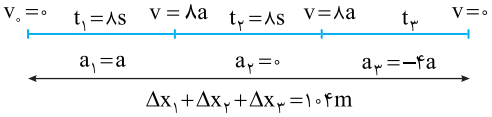


$$v_{av}=\frac{1}{2}v_m$$

گزینهٔ ۲

B ۴۰۱ ۱

با توجه به نمودار رسم شده در قسمت اول حرکت: $v=at_1\Rightarrow v=8a$



در قسمت سوم (آخر) حرکت: $v=a_3t_3+v_0\Rightarrow0=-4at_3+8a\Rightarrow t_3=2s$

اکنون مسئله به راحتی قابل حل است.

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\Delta x_1=\frac{1}{2}a\times64=32a$$

$$\Delta x_2=vt_2\Rightarrow\Delta x_2=(8a)\times8=64a$$

$$\Delta x_3=\frac{1}{2}(-4a)(2)^2+(8a)\times2=8a$$

جمع جابه‌جایی‌ها برابر ۱۰۴ متر است.

$$\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=104\Rightarrow32a+64a+8a=104\Rightarrow a=1m/s^2$$

روش رسم نمودار:

نکته هرگاه متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت a_1 شروع به حرکت کند و در مدت t_1 سرعتش به v برسد، سپس با شتاب ثابت a_2 سرعتش از v به صفر برسد آن‌گاه:

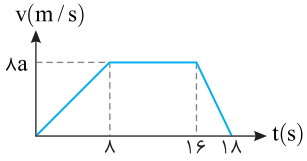
$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{t_1}{t_2}=\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$$

در صورت مسئله بیان شده که در مدت 8s با شتاب a سرعت به $v=8a$ رسیده و سپس با شتاب $-4a$ متوقف شده است. بنابراین زمان توقف آن خواهد شد:

$$t_2=\frac{8}{4}=2s$$

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. سطح زیر نمودار برابر جابه‌جایی است. از این‌رو خواهیم داشت:

$$S=\Delta x\Rightarrow\frac{18+8}{2}\times8a=104\Rightarrow a=1m/s^2$$



B ۴۰۲ ۲

با توجه به فرض‌های پرسش، شکل زیر را رسم کرده و سپس به کمک معادلهٔ مستقل از زمان پرسش را حل می‌کنیم.



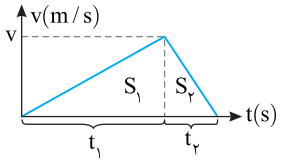
$$v^2-v_0^2=2a\Delta x \Rightarrow \begin{cases} \text{برای قسمت اول حرکت} & v^2-0=2a_1\Delta x_1 \\ \text{برای قسمت دوم حرکت} & 0-v^2=2(-a_2)\Delta x_2 \end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$1=\frac{2a_1(4\Delta x_2)}{2a_2(\Delta x_2)}\Rightarrow a_2=4a_1$$

روش رسم نمودار

با توجه به فرض مسئله:



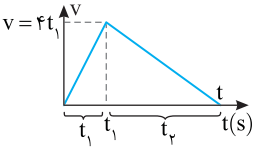
$$\frac{S_1}{S_2}=4\Rightarrow\frac{\frac{vt_1}{2}}{\frac{vt_2}{2}}=4\Rightarrow t_1=4t_2$$

به کمک معادلهٔ سرعت - زمان خواهیم داشت:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases} v=a_1t_1+0 \\ 0=a_2t_2+v \end{cases}\Rightarrow\left|\frac{a_2}{a_1}\right|=\left|\frac{t_1}{t_2}\right|=4$$

B ۴۰۳ ۳

خط فکری شتاب مرحلهٔ اول $4m/s^2$ و شتاب مرحلهٔ دوم $-1m/s^2$ بوده و متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و سپس متوقف شده است. شتاب حرکت در قسمت اول چهار برابر شتاب مرحلهٔ دوم است. بنابراین شیب نمودار در قسمت اول چهار برابر شیب در قسمت دوم است.



$$|a_1|=4|a_2|\Rightarrow\left|\frac{v}{t_1}\right|=4\left|\frac{v}{t_2}\right|\Rightarrow t_2=4t_1$$

سرعت v بر حسب t_1 خواهد شد:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4t_1$$

و کل مدت حرکت برابر است با:

$$t=t_1+t_2\Rightarrow t=t_1+4t_1=5t_1$$

سطح زیر نمودار بردار جابه‌جایی $(1km=1000m)$ است، بنابراین:

$$S=\Delta x\Rightarrow\frac{4t_1\times t}{2}=1000\Rightarrow\frac{4t_1\times5t_1}{2}=1000$$

$$t_1^2=100\Rightarrow t_1=10s\Rightarrow t=50s=\frac{5}{6}min$$

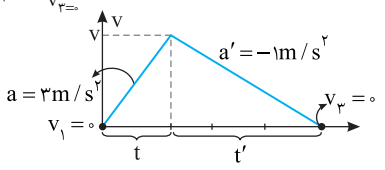
A ۴۰۴ ۴

خط فکری در سؤالات مشابه این تست که حرکت متحرک چندمرحله‌ای است یعنی ابتدا با شتاب تندشونده $3m/s^2$ در حال حرکت بوده و سپس با شتاب $1m/s^2$ حرکت کندشونده دارد بهتر است، سؤال را با استفاده نمودار $v-t$ حل کنیم.

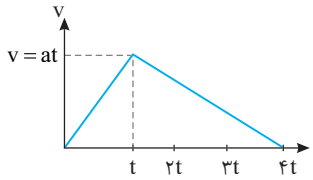
۱ با توجه به نمودار سرعت در لحظهٔ t در هردو قسمت شیب‌دار مشترک است، بنابراین از آن‌جا که شتاب در قسمت کندشونده $\frac{1}{3}$ شتاب در قسمت تندشونده است بنابراین زمان و مسافت توقف درقسمت کندشونده ۳ برابر زمان و مسافت طی شده در قسمت تندشونده است.

$$v_2=at+v_1\xrightarrow[v_1=0]{v_2=v} v=3t \Rightarrow t'=3t$$

$$v_3=a't'+v_2\xrightarrow[v_3=0]{v_2=v} v=t'$$



۲ مسافت طی‌شده خواهد شد:

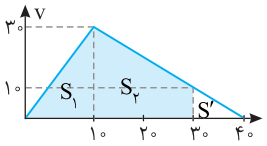


$$S=\frac{v\times4t}{2}=\frac{at\times4t}{2}$$

$$\xrightarrow{a=3m/s^2}\frac{3t\times4t}{2}=600\Rightarrow t=10s$$

$$v=at=3\times10=30m/s$$

۳ اکنون سطح زیر نمودار را از صفر تا $30s$ حساب می‌کنیم. ابتدا سرعت را در لحظهٔ $t=30s$ حساب می‌کنیم:



$$v=at+v_0\Rightarrow v=-1\times20+30\Rightarrow v=10m/s$$

$$\ell=S_1+S_2=\frac{30\times10}{2}+\frac{30+10}{2}\times20\Rightarrow\ell=150+400=550m$$

میانبر سرعت در لحظهٔ $t=30s$ را می‌توان با توجه به شیب نمودار از قسمت انتهایی محاسبه کرد:

$$v=at_0+v_0\Rightarrow v=1\times10+0=10m/s$$

سپس مساحت زیر نمودار بین ثانیه‌های $t=30s$ تا $t=40s$ را حساب می‌کنیم:

$$S'=\frac{10\times10}{2}=50m$$

با کاستن این مسافت از کل مسافت طی‌شده می‌توان مسافت طی‌شدهٔ تا ثانیهٔ ۳۰ را به‌دست آورد:

$$\ell=600-50=550m$$

B ۴۰۵ ۴

ابتدا جابه‌جایی خودرو را در مدتی که با شتاب $3m/s^2$ و سرعت اولیهٔ $108km/h$ با حرکت کندشونده می‌ایستد، به دست می‌آوریم.

$$v_0=108km/h=108\times\frac{1000m}{3600s}=30m/s$$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x_2\Rightarrow0-900=2(-3)\Delta x_2\Rightarrow\Delta x_2=150m$$

در بازه‌ای که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که ترمز می‌کند، جابه‌جایی خودرو برابر است با:

$$\Delta x_1=165-150=15m$$

اکنون زمان‌های t_1 و t_2 را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_1=v_1\Delta t\Rightarrow15=30t_1\Rightarrow t_1=0/5s$$

$$\Delta x_2=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow150=\frac{1}{2}(-3)(t_2^2)+30t_2$$

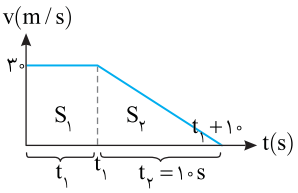
$$\Rightarrow50=-\frac{1}{2}t_2^2+10t_2\Rightarrow t_2^2-20t_2+100=0\Rightarrow(t_2-10)^2=0\Rightarrow t_2=10s$$

البته برای محاسبهٔ t_2 می‌توانستیم حرکت اتومبیل را از حال سکون و تندشونده با شتاب $+3m/s^2$ در نظر بگیریم:

$$\Delta x_2=\frac{1}{2}at_2^2\Rightarrow150=\frac{1}{2}\times3t_2^2\Rightarrow t_2=10s$$

در این صورت $\frac{t_2}{t_1}=\frac{10}{0/5}=20$.

روش رسم نمودار:



سرعت متحرک در مدت t_2 از $30m/s$ با شتاب $3m/s^2$ به صفر می‌رسد بنابراین:

$$v=at+v_0\Rightarrow0=-3\times t_2+30\Rightarrow t_2=10s$$

با توجه به فرض مسئله اتومبیل دقیقاً جلو مانع می‌ایستد یعنی $165m$ جابه‌جا شده است. بنابراین سطح زیر نمودار $v-t$ باید ۱۶۵ متر باشد.

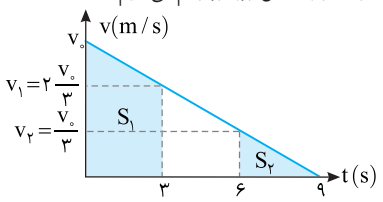
$$S_1+S_2=165\Rightarrow30t_1+\frac{30\times10}{2}=165\Rightarrow30t_1=15\Rightarrow t_1=0/5s$$

بنابراین نسبت t_2/t_1 خواهد شد:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{10}{0/5}=20$$

B ۴۰۶ ۳

نمودار سرعت - زمان را به شکل روبه‌رو رسم می‌کنیم.



به کمک شیب نمودار سرعت - زمان، سرعت در لحظهٔ $t=3s$ و $t=6s$ را حساب می‌کنیم. سرعت در $t=3s$:

$$\frac{0-v_0}{9-0}=\frac{v_1-v_0}{3-0}\Rightarrow\frac{-v_0}{3}=v_1-v_0\Rightarrow v_1=\frac{2v_0}{3}$$

سرعت در $t=6s$:

$$\frac{0-v_0}{9-0}=\frac{v_2-v_0}{6-0}\Rightarrow\frac{-v_0}{3}=\frac{v_2-v_0}{2}\Rightarrow\frac{-2v_0}{3}=v_2-v_0\Rightarrow v_2=\frac{v_0}{3}$$

سطح زیر نمودار S_1 و S_2 را به دست آورده بر هم تقسیم می‌کنیم.

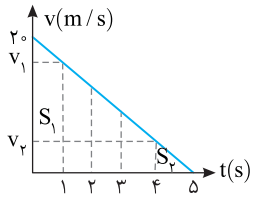
$$\begin{cases}0\to 3s:\Delta x_1=S_1=\frac{v_0+\frac{2v_0}{3}}{2}\times 3=\frac{5v_0}{2}\\ 6s\to 9s:\Delta x_2=S_2=\frac{\frac{v_0}{3}\times 3}{2}=\frac{v_0}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}=\frac{\frac{5v_0}{2}}{\frac{v_0}{2}}=5$$

A ۴۰۷ ۴

زمان کل حرکت را به کمک معادلهٔ مستقل از شتاب به دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{v+v_0}{2}t\xrightarrow{\Delta x=50m,\ v=0,\ v_0=20m/s}50=\frac{+20}{2}t\Rightarrow t=5s$$

سرعت در ثانیهٔ اول و ثانیهٔ $t=4s$ را به کمک شیب نمودار حساب کرده سپس سطح S_1 و S_2 را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{0-20}{5-0}=\frac{20-v_1}{0-1}\Rightarrow v_1=16m/s$$

$$\frac{0-20}{5-0}=\frac{20-v_2}{0-4}\Rightarrow v_2=4m/s$$

سطح S_1: $S_1=\frac{20+16}{2}\times 1=18m$

سطح S_2: $S_2=\frac{4\times 1}{2}=2m$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{18}{2}=9$$

B ۴۰۸ ۱

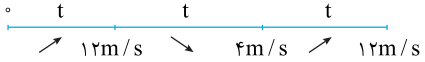
می‌توان با رابطهٔ $v=\frac{v+v_0}{2}$ تست را حل کرد. ابتدا سرعت را در ابتدا و انتهای هر بازه مشخص می‌کنیم.

سرعت در انتهای بازهٔ اول: $v_{av}=\frac{v_1+v_0}{2}\Rightarrow 6=\frac{v_1+0}{2}\Rightarrow v_1=12m/s$

سرعت در انتهای بازهٔ دوم: $v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}\Rightarrow 8=\frac{v_2+12}{2}\Rightarrow v_2=4m/s$

سرعت در انتهای بازهٔ سوم: $v_{av}=\frac{v_3+v_2}{2}\Rightarrow 8=\frac{v_3+4}{2}\Rightarrow v_3=12m/s$

دقت کنید، سرعت انتهای هر قسمت، سرعت اولیهٔ قسمت بعدی است. ابتدا سرعت از صفر به $12m/s$ رسیده است. پس حرکت تندشونده است. سپس از $12m/s$ به $4m/s$ می‌رسد. یعنی حرکت کندشونده است و سرانجام از $4m/s$ به $12m/s$ می‌رسد. یعنی سرانجام حرکت تندشونده است.



B ۴۰۹ ۱

خط فکری مبدأ و مقصد دو متحرک (۱) و (۲) یکسان است و هر دو هم‌زمان از حال سکون شروع به حرکت کرده‌اند، شتاب متحرک (۱) برابر $a_1=2m/s^2$ و شتاب متحرک (۲) را $a_2=8m/s^2$ بوده بنابراین متحرک (۲) زودتر به مقصد می‌رسد، اگر زمان رسیدن متحرک (۱) به مقصد را t_1 فرض کنیم، زمان رسیدن متحرک (۲) به مقصد برابر $t_2=t_1-3$ خواهد بود. از این رو شما باید معادلهٔ جابه‌جایی - زمان هر دو متحرک را نوشته و با هم مساوی قرار دهید تا زمان رسیدن هر متحرک به مقصد را به‌دست بیاورید و سرانجام طول مسیر AB را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک با هم برابر است.

$$\Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}a_2t_2^2\xrightarrow{t_1=t_2+3}\frac{1}{2}\times 2(t_2+3)^2=\frac{1}{2}\times 8t_2^2$$

$$\Rightarrow|t_2+3|=|2t_2|\Rightarrow t_2=3s$$

۲ اکنون مقدار جابه‌جایی را به دست می‌آوریم: $\Delta x=\frac{1}{2}\times 8\times(3)^2\Rightarrow x=36m$

B ۴۱۰ ۲

خط فکری یک تست ساده روبه‌روی شماست. دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند و به سوی یک مقصد می‌روند، پس شما باید جابه‌جایی آن‌ها را برابر قرار دهید. البته متحرکی که شتابش بیشتر است، سریع‌تر (زودتر) به مقصد می‌رسد. یعنی اگر شما زمان حرکت متحرک تندرو را t_1 بگیرید زمان حرکت متحرک کندرو $t_2=t_1+2$ می‌شود و شما می‌توانید مسئله را حل کنید.

۱ جابه‌جایی‌ها یکسان است. $\Delta x_1=\Delta x_2$

۲ معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت را برای دو متحرک می‌نویسیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}(\frac{9}{16}a)(t_1+2)^2\Rightarrow t_1=\frac{3}{4}(t_1+2)$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{3}{4}t_1+\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}t_1=\frac{3}{2}\Rightarrow t_1=6s$$

بازی با سؤال **دو متحرک هم‌زمان از یک نقطه روی خط راست با شتاب $a_1=2m/s^2$ و $a_2=8m/s^2$ به سوی یک مقصد از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و با فاصلهٔ زمانی $4s$ به مقصد می‌رسند. سرعت متحرکی که دیرتر به مقصد می‌رسد هنگام رسیدن به مقصد چند متر بر ثانیه است؟**

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

پاسخ **جابه‌جایی دو متحرک با هم برابر است. از این‌رو:**

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\ ,\ \Delta x_1=\Delta x_2\Rightarrow\frac{1}{2}(2)t_1^2=\frac{1}{2}(8)(t_1-4)^2$$

$$\Rightarrow t_1=2(t_1-4)\Rightarrow t_1=8s$$

زمان حرکت متحرک با شتاب کمتر برابر $8s$ است بنابراین سرعت آن هنگام رسیدن به مقصد برابر است با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=2\times 8=16m/s$$

گزینهٔ ۲

A ۴۱۱ ۲

خط فکری سرعت دو متحرک در لحظهٔ t داده شده است. اگر شما معادلهٔ سرعت زمان را برای هریک از دو متحرک بنویسید و مقدار سرعت در لحظهٔ t را در معادله قرار دهید، در این صورت دو معادله دو مجهول به‌دست می‌آورید که با حل آن می‌توانید t را حساب کنید. البته بهتر بود که طراح در صورت مسئله بیان می‌کرد که متحرک از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. یعنی سرعت اولیه صفر است. $(v_0=0)$

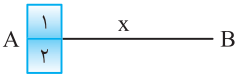
با توجه به معادلهٔ سرعت - زمان برای حرکت با شتاب ثابت می‌توان نوشت:

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}10=at+v_0\\ 22=(a+1/5)t+v_0\end{cases}\xrightarrow{v_0=0}\begin{cases}10=at\\ 22=at+1/5t\end{cases}$$

$$\Rightarrow 22=10+1/5t\Rightarrow t=\frac{12}{1/5}=8s$$

B ۲ ۴۱۲

۱ سرعت متحرک در هر لحظه را با استفاده از معادلهٔ سرعت - زمان به دست می‌آوریم:



$$v_1 = a_1 t_1 + v_0 \xrightarrow{\text{از حال سکون}} v_1 = a_1 t_1$$

$$v_2 = a_2 t_2 + v_0 \xrightarrow{\text{از حال سکون}} v_2 = a_2 t_2$$

۲ در یک لحظه سرعت متحرک اول دو برابر سرعت متحرک دوم است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1 t_1}{a_2 t_2} = 2 \xrightarrow[t_1 = t_2]{\text{در یک لحظه}} \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = 2 \Rightarrow a_1 = 2a_2$$

۳ هر دو متحرک تا انتهای مسیر جابه‌جایی یکسانی را انجام می‌دهند. معادلهٔ مستقل از زمان را برای دو متحرک می‌نویسیم.

$$\begin{cases} v_{f_1}^2 - v_0^2 = 2a_1 x \\ v_{f_2}^2 - v_0^2 = 2a_2 x \end{cases} \xrightarrow[x=AB]{v_0 = 0} \begin{cases} v_{f_1}^2 = 2a_1 x \Rightarrow v_{f_1}^2 = 4a_2 x & (1) \\ v_{f_2}^2 = 2a_2 x & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \left(\frac{v_{f_1}}{v_{f_2}}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{v_{f_1}}{v_{f_2}} = \sqrt{2} \Rightarrow v_{f_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{f_1} \Rightarrow v_{f_2} = 10\sqrt{2}\,m/s$$

B ۲ ۴۱۳

خط فکری دو متحرک A و B بدون سرعت اولیه $(v_0 = 0)$ شروع به حرکت کرده‌اند. شتاب متحرک A، چهار برابر شتاب متحرک B است $(a_A = 4a_B)$. معادلهٔ مکان - زمان را برای دو متحرک A و B بنویسید و جابه‌جایی‌های آن‌ها را برابر قرار دهید تا بتوانید رابطه‌ای بین زمان حرکت دو متحرک به‌دست بیاورید و از آنجا سرعت متوسط را حساب کنید.

۱ جابه‌جایی دو متحرک را برابر قرار می‌دهیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \xrightarrow{\Delta x_A = \Delta x_B} \frac{1}{2} a_A t_A^2 = \frac{1}{2} a_B t_B^2$$

$$\xrightarrow[\text{فرض مسأله}]{a_A = 4a_B} 4t_A^2 = t_B^2 \Rightarrow t_B = 2t_A$$

۲ اکنون نسبت سرعت متوسط A به سرعت متوسط B را به دست می‌آوریم.

$$\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}} = \frac{\frac{\Delta x_A}{t_A}}{\frac{\Delta x_B}{t_B}} = \frac{t_B}{t_A} = 2$$

A ۲ ۴۱۴

خط فکری معادلهٔ حرکت دو متحرک را در اختیار دارید، بنابراین کافی است که با مقایسهٔ معادله‌های حرکت با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب و سرعت اولیهٔ هر متحرک را به‌دست آورده و معادلهٔ سرعت - زمان هر متحرک را بنویسید و تفاضل سرعت‌ها را مطابق فرض مسئله برابر $8\,m/s$ قرار دهید.

با مقایسه معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت با معادلهٔ حرکت دو متحرک داده شده، معادله سرعت زمان را می‌نویسیم:

متحرک (۱):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \\ x_1 = 2t^2 - 3t + 17 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 4\,m/s^2 \,,\, v_0 = -3\,m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان متحرک (۱): $v_1 = 4t - 3$

متحرک (۲):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \\ x_2 = t^2 - \alpha t \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 2\,m/s^2 \,,\, v_0 = -\alpha$$

معادلهٔ سرعت - زمان متحرک (۲): $v_2 = 2t - \alpha$

با توجه به فرض مسئله:

$$v_1 - v_2 = 8 \Rightarrow 4t - 3 - (2t - \alpha) = 8 \Rightarrow 2t - 3 + \alpha = 8$$

$$\xrightarrow{t=3s} 3 + \alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 5$$

A ۲ ۴۱۵

خط فکری هرگاه از شما مدت زمان رسیدن دو متحرک به هم خواسته شود، کافی است معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته و مکان‌ها را برابر قرار دهید.

خودرو دارای شتاب ثابت بوده و معادلهٔ مکان - زمان آن خواهد شد:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow x_{\text{خودرو}} = t^2$$

کامیون دارای سرعت ثابت بوده و معادلهٔ حرکت آن خواهد شد:

ابتدا سرعت را برحسب m/s به‌دست می‌آوریم:

$$36\frac{km}{h} \times \frac{10}{36} = 10\frac{m}{s} \Rightarrow x = vt \Rightarrow x_{\text{کامیون}} = 10t$$

هنگامی که دو متحرک به هم می‌رسند $x_{\text{کامیون}} = x_{\text{خودرو}}$ می‌شود پس:

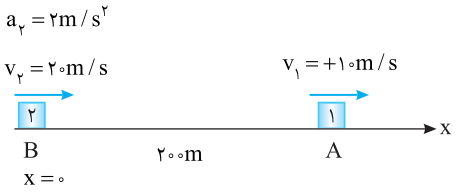
$$t^2 = 10t \Rightarrow t^2 - 10t = 0 \Rightarrow t(t-10) = 0 \Rightarrow t = 10\,s$$

جابه‌جایی کامیون و خودرو در $t = 10\,s$ برابر است با:

$$\Delta x_{\text{خودرو}} = \Delta x_{\text{کامیون}} = 100\,m$$

B ۲ ۴۱۶

خط فکری در صورت مسئله بیان نشده که متحرک (۱) با سرعت ثابت $10\,m/s$ به دنبال متحرک (۲) در حرکت است یا برعکس؟ اگر متحرک (۱) از نقطهٔ A به دنبال متحرک (۲) حرکت کند هرگز به متحرک (۲) نمی‌رسد زیرا سرعت متحرک (۱) $10\,m/s$ و سرعت اولیهٔ متحرک (۲) $20\,m/s$ و حرکت آن شتابدار است. بنابراین شما باید معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را در حالتی که متحرک (۲) به دنبال متحرک (۱) است بنویسید و مکان‌ها را برابر قرار دهید.



$$\begin{cases} x_1 = vt + x_0 \Rightarrow x_1 = +10t + 200 \\ x_2 = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 20t \end{cases} \Rightarrow +10t + 200 = t^2 + 20t$$

$$\Rightarrow t^2 + 10t - 200 = 0 \Rightarrow (t-10)(t+20) = 0 \Rightarrow t = 10\,s$$

B ۳ ۴۱۷

۱ جهت حرکت را مثبت و محل شروع حرکت را مبدأ مکان $(x_0 = 0)$ می‌گیریم، سرعت توپ با آهنگ $1\,m/s$ کم می‌شود، یعنی شتاب حرکت $-1\,m/s^2$ است و سرعت اولیهٔ توپ $15\,m/s$ است. معادلهٔ حرکت توپ را می‌نویسیم:

$$a = -1\,m/s^2 \quad , \quad x_{\text{توپ}} = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow x_{\text{توپ}} = -\frac{1}{2} t^2 + 15t$$

۲ موتور نیز از همان مکان با شتاب $a = 2\,m/s^2$ از حال سکون $(v_0 = 0)$ می‌کند، بنابراین معادلهٔ حرکت موتور خواهد شد:

$$x_{\text{موتور}} = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow x_{\text{موتور}} = t^2$$

۳ هنگامی که توپ و موتور به هم می‌رسند مکان آن‌ها یکسان است، از این‌رو معادله‌های حرکت را برابر قرار می‌دهیم:

$$x_{\text{موتور}} = x_{\text{توپ}} \Rightarrow t^2 = -\frac{1}{2} t^2 + 15t \Rightarrow \frac{3}{2} t^2 - 15t = 0 \Rightarrow t^2 - 10t = 0$$

$$\Rightarrow t(t-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10\,s \end{cases}$$

بنابراین پس از $10\,s$ موتورسوار و توپ به هم می‌رسند. در این مدت موتورسوار $x_{\text{موتور}} = t^2 = 10^2 = 100\,m$ جابه‌جا شده است.

A ۱ ۴۱۸

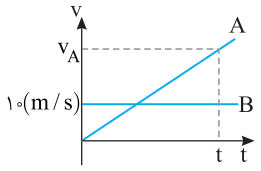
خط فکری مسئلهٔ جالبی است. ابتدا به این فکر می‌افتیم که معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته با هم برابر قرار می‌دهیم و مسئله حل می‌شود، اما شتاب حرکت متحرک A را نداریم، بنابراین برای متحرک A از معادلهٔ مستقل از شتاب استفاده می‌کنیم و سرعت متحرک A هنگام رسیدن به متحرک B را حساب می‌کنیم.

با توجه به صورت پرسش می‌توان نوشت:

$$x_A=\frac{v+v_0}{2}t\Rightarrow x_A=\frac{v_A}{2}t\quad,\quad x_B=v_Bt\Rightarrow x_B=10t$$

$$\xrightarrow{x_A=x_B}\frac{v_A}{2}t=10t\Rightarrow v_A=20m/s$$

روش دوم: استفاده از نمودار سرعت - زمان نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B را رسم می‌کنیم. اگر در لحظهٔ t دو متحرک از کنار هم بگذرند، باید سطح زیر نمودار A و B تا لحظهٔ t با هم برابر باشند. از این رو:



$$S_A=S_B\Rightarrow\frac{v_At}{2}=10t\Rightarrow v_A=20m/s$$

B ۴ ۴۱۹

خط فکری متحرک A از نقطهٔ O شروع به حرکت کرده و 5s بعد متحرک B در همان جهت از نقطهٔ O می‌گذرد. وقتی دو متحرک به هم می‌رسند، متحرک A، 5s بیشتر در حرکت بوده است $(t_A>t_B)$ بنابراین زمان حرکت B، 5s از زمان حرکت A کمتر است $(t_B=t_A-5)$. معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته با هم برابر قرار می‌دهیم.

معادلهٔ حرکت دو متحرک را نوشته و با هم برابر قرار می‌دهیم. (نقطهٔ O را مبدأ در نظر می‌گیریم.)

معادلهٔ حرکت A: $x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t\Rightarrow x_A=t_A^2$

معادلهٔ حرکت B: $x_B=vt_B\Rightarrow x_B=30(t_A-5)$

$$x_A=x_B\Rightarrow t_A^2=30t_A-150\Rightarrow t_A^2-30t_A+150=0$$

$$\Rightarrow t_A=+15\pm\sqrt{225-150}\Rightarrow t_A=15\pm\sqrt{75}=15\pm5\sqrt{3}$$

با توجه به فرض پرسش $\sqrt{3}=1/7$:

$$t_A=15\pm8/5\Rightarrow t_A=6/5s,23/5s$$

C ۱ ۴۲۰

خط فکری هرگاه معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را نوشته و برابر قرار دهیم می‌توان لحظهٔ گذر دو متحرک از کنار یکدیگر را به‌دست آورد. وقتی یکی از متحرک‌ها دارای حرکت با شتاب ثابت باشد، معادلهٔ به‌دست آمده یک تابع درجه ۲ است. اگر معادله دارای دو جواب $(\Delta>0)$ باشد و هر دو جواب مثبت باشد $(t>0)$، متحرک‌ها دو بار از کنار هم می‌گذرند و اگر معادله دارای یک جواب مثبت $(\Delta=0)$ باشد، دو متحرک یک بار در کنار هم قرار می‌گیرند و اگر $(\Delta<0)$ باشد دو متحرک از کنار هم نمی‌گذرند.

۱ معادلهٔ حرکت کامیون را می‌نویسیم:

$$x_ک=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{a=2m/s^2,v_0=0}x_ک=\frac{1}{2}\times2t^2+0\Rightarrow x_ک=t^2$$

۲ اگر مدت حرکت کامیون t باشد مدت حرکت اتومبیل $t-1$ است. بنابراین معادلهٔ حرکت اتومبیل خواهد شد: $x_{اتو}=vt_{اتو}\Rightarrow x_{اتو}=v(t-1)$

۳ معادله‌ها را برابر قرار می‌دهیم. $t^2=vt-v\Rightarrow t^2-vt+v=0$

۴ باید $\Delta=0$ شود تا اتومبیل یک بار در کنار کامیون باشد.

$$v^2-4v=0\Rightarrow v=4m/s$$

A ۲ ۴۲۱

زمان حرکت کامیون را وقتی 9/9m جابه‌جا شده است به دست می‌آوریم:

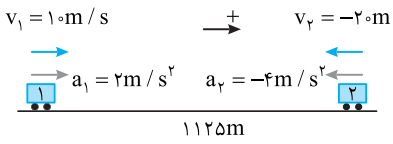
$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{a=2/2m/s^2}9/9=\frac{1}{2}(2/2)t^2\Rightarrow t=3s$$

در این لحظه $(t=3s)$ اتومبیل به کامیون می‌رسد و سرعت آن برابر خواهد شد با:

$$v=at+v_0\Rightarrow v=3/5\times3\Rightarrow v=10/5m/s$$

B ۱ ۴۲۲

با توجه به شکل رسم شده، معادلهٔ حرکت هر متحرک را می‌نویسیم. به دلخواه خود، مکان متحرک (۱) را مبدأ مختصات گرفته و جهت متحرک اول را جهت مثبت اختیار کرده‌ایم. در هر دو حرکت باید بردار سرعت و بردار شتاب هم‌جهت باشند زیرا هر دو حرکت تندشونده هستند.



$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\times2t^2+10t\\ x_2=\frac{1}{2}(-4)t^2-20t+1125\end{cases}\xrightarrow{x_1=x_2}$$

$$t^2+10t=-2t^2-20t+1125\Rightarrow3t^2+30t-1125=0\Rightarrow t^2+10t-375=0$$

$$t=-5\pm\sqrt{25+375}=-5\pm20\Rightarrow t=15s\quad,\quad t=-25s\ \text{غ ق ق}$$

یادآوری ریاضی در معادلهٔ درجهٔ دو $y=ax^2+bx+c$، هرگاه b عدد زوج باشد $(b=2b')$، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد که محاسبات عددی ساده‌تر شود زیرا اعداد کوچک‌تر هستند.

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

میانبر استفاده از سرعت نسبی و شتاب نسبی.

چون سرعت‌های اولیه خلاف جهت هم هستند:

$$v_{نسبی}=v_1+v_2=10+20=30\ m/s$$

چون شتاب‌های دو متحرک خلاف جهت هم هستند:

$$a_{نسبی}=a_1+a_2=2+4=6\ m/s^2$$

$$\Delta x=\frac{1}{2}a_{نسبی}t^2+v_{0نسبی}t\Rightarrow1125=\frac{1}{2}(6)t^2+30t\Rightarrow3t^2+30t-1125=0$$

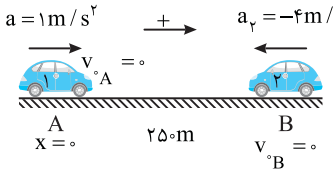
$$\Rightarrow t^2+10t-375=0\Rightarrow t=15s$$

B ۴ ۴۲۳

نقطهٔ A را مبدأ مختصات و جهت راست را جهت مثبت فرض می‌کنیم. سپس داده‌های مسئله را با توجه به علامت آن‌ها روی شکل می‌نویسیم تا حل مسئله راحت‌تر شود.

۱ ابتدا معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x_A=\frac{t^2}{2}\quad,\quad x_B=-2t^2+250$$



۲ هنگام رسیدن دو متحرک به هم $x_A=x_B$ است، بنابراین:

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{t^2}{2}=-2t^2+250\Rightarrow\frac{5t^2}{2}=250\Rightarrow t^2=100s\Rightarrow t=10s$$

۳ دو متحرک پس از 10s به هم می‌رسند. حال مدت زمانی که طول می‌کشد متحرک (۱) از A به B برسد را به دست می‌آوریم:

$$250=\frac{t'^2}{2}\Rightarrow t'^2=500\Rightarrow t'=10\sqrt{5}=10\times2/2=22s$$

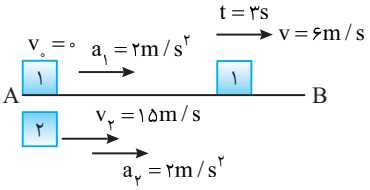
۴ متحرک (۱) $t'-t=22-10=12s$ پس از به هم رسیدن متحرک (۱) و (۲) به مکان B می‌رسد.

B ۴۲۴ ۱

دقت کنید سرعت متحرک اول پس از ۳s با شتاب $۲m/s^۲$ خواهد شد:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v_۱=۲\times ۳+۰ \Rightarrow v_۱=۶m/s$$

در لحظه‌ای که سرعت متحرک اول $۶m/s$ است، سرعت متحرک دوم $۱۵m/s$ و شتاب هر دو متحرک یکسان است. چون سرعت متحرک (۲) بیشتر است. به متحرک (۱) نزدیک شده از آن سبقت می‌گیرد و سپس از متحرک اول دور می‌شود.



B ۴۲۵ ۲

خط فکری پس از جدا شدن واگن، قطار با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و واگن با حرکت کندشونده متوقف می‌شود. شتاب حرکت واگن را نداریم بنابراین شما باید برای واگن از معادلهٔ مستقل از شتاب (فرمول طلایی) استفاده کنید.

۱ برای واگن می‌نویسیم:

$$\Delta x_{\text{واگن}}=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t=\frac{v_۰}{۲}\Delta t$$

۲ قطار با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه داده است از این رو:

$$\Delta x_{\text{قطار}}=v_۰\Delta t$$

۳ اکنون خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta x_{\text{واگن}}}{\Delta x_{\text{قطار}}}=\frac{\frac{v_۰}{۲}\Delta t}{v_۰\Delta t}=\frac{۱}{۲}$$

B ۴۲۶ ۲

خط فکری از شما خواسته شده فاصلهٔ دو متحرک را پس از توقف متحرک دوم برحسب v و a به‌دست بیاورید. بنابراین شما ابتدا باید زمان توقف و جابه‌جایی متحرک (۲) را حساب کرده سپس مقدار جابه‌جایی متحرک (۱) را در این مدت به‌دست آورده و جابه‌جایی‌ها را از هم کم کنید.

۱ ابتدا زمان توقف و جابه‌جایی متحرک (۲) از محل گذر دو متحرک تا محل توقف را به دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۰=-at_۲+v \Rightarrow t_۲=\frac{v}{a}$$

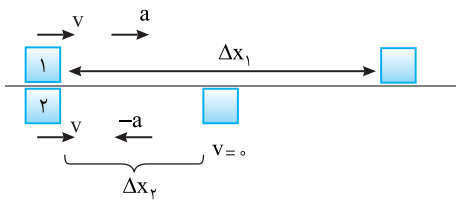
$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-v^۲=-۲a\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲=\frac{v^۲}{۲a}$$

۲ اکنون جابه‌جایی متحرک (۱) را با شتاب a در مدت $t_۲$ حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{۱}{۲}a\left(\frac{v}{a}\right)^۲+v\left(\frac{v}{a}\right)=\frac{۳}{۲}\frac{v^۲}{a}$$

۳ فاصلهٔ دو متحرک از هم خواهد شد:

$$\Delta x_۱-\Delta x_۲=\frac{۳v^۲}{۲a}-\frac{v^۲}{۲a}=\frac{v^۲}{a}$$



B ۴۲۷ ۲

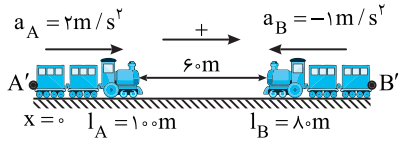
خط فکری ابتدا باید دقت کنید که این دو قطار وقتی به‌طور کامل از کنار هم می‌گذرند که انتهای قطار A به انتهای قطار B برسد. یعنی نقاط A' و B' از کنار هم بگذرند. بنابراین شما باید یک نقطه مثلاً محل ابتدایی A' را مبدأ و جهت راست را جهت مثبت فرض کنید. در این صورت مکان اولیهٔ B' خواهد شد $(x_{۰B'}=۱۰۰+۶۰+۸۰=۲۴۰m)$

معادلهٔ حرکت نقاط A' و B' را نوشته و مسئله را حل کنید.

معادلهٔ مکان زمان نقطهٔ A' و B' را می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم.

$$x_{A'}=\frac{۱}{۲}a_At^۲ \Rightarrow x_{A'}=t^۲ \quad , \quad x_{B'}=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+d \Rightarrow x_{B'}=-\frac{t^۲}{۲}+۲۴۰$$

$$x_{A'}=x_{B'} \Rightarrow t^۲=-\frac{t^۲}{۲}+۲۴۰ \Rightarrow \frac{۳t^۲}{۲}=۲۴۰ \Rightarrow t^۲=۱۶۰ \Rightarrow t=۴\sqrt{۱۰}s$$



B ۴۲۸ ۲

هنگامی قطار B به‌طور کامل از قطار A سبقت می‌گیرد که انتهای قطار B به ابتدای قطار A برسد، یعنی نقطهٔ B' (انتهای قطار B) به نقطهٔ A' (ابتدای قطار A) برسد. مکان ابتدایی B' را مبدأ مکان و جهت راست را مطابق شکل جهت مثبت در نظر می‌گیریم و برای نقاط B' و A' معادلهٔ حرکت می‌نویسیم:

$$x_{A'}=vt+x_۰ \xrightarrow{x_۰=۲۵۰m} x_{A'}=۳۷/۵t+۲۵۰$$

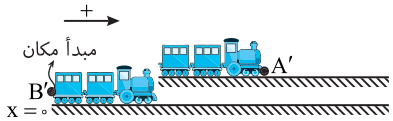
معادلهٔ حرکت A: $x_{A'}=۳۷/۵t+۲۵۰$

معادلهٔ حرکت B: $x_{B'}=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow x_{B'}=۲/۵t^۲$

مکان A' و B' را برابر قرار می‌دهیم:

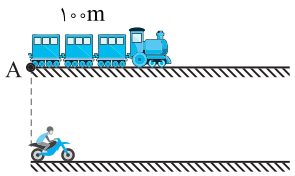
$$x_{A'}=x_{B'} \Rightarrow ۳۷/۵t+۲۵۰=۲/۵t^۲ \Rightarrow ۲/۵t^۲-۳۷/۵t-۲۵۰=۰$$

$$\Rightarrow t^۲-۱۵t-۱۰۰=۰ \Rightarrow (t-۲۰)(t+۵)=۰ \Rightarrow t=۲۰s$$



B ۴۲۹ ۲

۱ نقطهٔ A را مبدأ مکان می‌گیریم و جهت حرکت قطار و موتور را جهت مثبت فرض می‌کنیم.



۲ معادلهٔ حرکت موتور که با شتاب $۴m/s^۲$ از حال سکون $(v_۰=۰)$ به راه می‌افتد را می‌نویسیم.

$$x_م=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow x_م=\frac{۱}{۲}\times ۴t^۲+۰ \Rightarrow x_م=۲t^۲$$

۳ موتور قرار است که از جلوی قطار بگذرد بنابراین معادلهٔ نقطهٔ جلوی قطار را که در فاصلهٔ ۱۰۰ متری نقطهٔ A قرار دارد می‌نویسیم. $x=vt+x_۰ \Rightarrow x_{\text{جلوی ق}}=۱۰t+۱۰۰$

۴ معادله‌های حرکت را برابر قرار می‌دهیم.

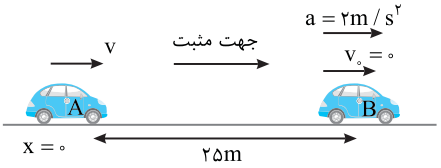
$$x_م=x_{\text{جلوی ق}} \Rightarrow ۲t^۲=۱۰t+۱۰۰ \Rightarrow t^۲-۵t-۵۰=۰ \Rightarrow (t+۵)(t-۱۰)=۰$$

$$\Rightarrow t=۱۰s$$

B ۴۳۰ **۱**

خط فکری هرگاه قرار باشد که دو متحرک به هم برسند، معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم. اگر یکی از متحرک‌ها (و یا هردو) دارای حرکت شتابدار باشد با برابر قرار دادن معادله‌های حرکت، یک معادلهٔ درجه ۲ به‌دست می‌آید و برای آنکه دو متحرک از کنار هم بگذرند باید $\Delta \geq 0$ شود یعنی معادله دارای جواب باشد. از این رو شما معادلهٔ حرکت‌های دو متحرک را نوشته برابر قرار دهید و Δ را بزرگ‌تر و مساوی صفر بگذارید.

محل ابتدایی خودروی A در لحظه‌ای که خودروی B شروع به حرکت می‌کند را مبدأ مکان و مطابق شکل جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم.



معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به محل ابتدایی خودروی A می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = vt + x_0 \Rightarrow x_A = vt \\ x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x_B = t^2 + 25 \end{cases} \xrightarrow{x_A = x_B} vt = t^2 + 25$$

$$\Rightarrow t^2 - vt + 25 = 0$$

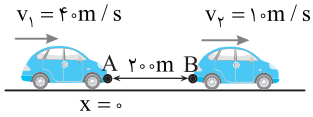
اگر معادلهٔ به دست آمده دارای جواب باشد، دو متحرک به هم می‌رسند. معادلهٔ درجه ۲ وقتی جواب دارد که $\Delta \geq 0$ باشد از این‌رو:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow v^2 - 4 \times 25 \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq 100 \Rightarrow v \geq 10 m/s$$

بنابراین حداقل سرعت v باید $10 m/s$ باشد.

C ۴۳۱ **۲**

خط فکری وقتی خودروی عقبی به خودروی جلویی برخورد می‌کند که نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد (مطابق شکل). در این صورت اگر معادلهٔ حرکت دو خودرو را بنویسیم در آخر به یک معادلهٔ درجهٔ ۲ می‌رسیم. با حل این معادله زمان رسیدن A به B به‌دست می‌آید. اما مسئله می‌خواهد که خودروی عقبی به خودروی جلویی نرسد. یعنی از نظر ریاضی باید معادلهٔ به‌دست آمده بدون جواب باشد $(\Delta < 0)$ معادله‌های حرکت را بنویسید، با هم برابر قرار داده و Δ ی آن را کوچکتر از صفر قرار دهید.



معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را نوشته و برابر قرار می‌دهیم.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}at^2 + 40t \\ x_2 = v_2 t = 10t + 200 \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 40t = 10t + 200 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 30t - 200 = 0$$

اگر این معادله جواب نداشته باشد برخوردی صورت نمی‌گیرد. برای این منظور باید $\Delta < 0$ باشد.

$$\Delta < 0 \Rightarrow 900 + 400a < 0 \Rightarrow a < -\frac{9}{4} \Rightarrow |a| > \frac{9}{4}$$

بنابراین کمینه (حداقل) مقدار a باید برابر $\frac{9}{4} m/s^2$ باشد تا متحرک عقبی به متحرک جلویی برخورد نکند.

B ۴۳۲ **۳**

خط فکری شکل مسئله را کامل کنید. یعنی تمام داده‌های مسئله را روی آن بنویسید. نقطهٔ ۲ را مبدأ مکان و جهت راست را جهت مثبت می‌گیریم. در این صورت شتاب متحرک A که حرکتش تندشونده است $a_A = +4 m/s^2$ و شتاب متحرک B که حرکتش کندشونده بوده $a_B = -4 m/s^2$ می‌شود. معادله‌های حرکت را بنویسید و با هم برابر قرار دهید. یک معادلهٔ درجه ۲ به‌دست می‌آورید که ریشه‌های آن، لحظه‌هایی است که دو متحرک به هم می‌رسند اما برای آنکه معادله دارای جواب باشد باید $\Delta \geq 0$ باشد. حل مسئله را شروع کنید.

۱ معادلهٔ متحرک‌های A و B را می‌نویسیم، حرکت متحرک A تندشونده است پس شتاب در جهت حرکت می‌باشد امّا حرکت متحرک B کندشونده است پس شتاب خلاف جهت حرکت می‌باشد.

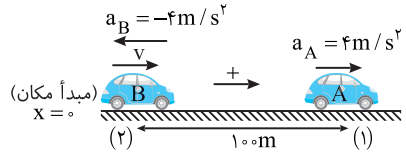
$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A} t + x_0 \Rightarrow x_A = 2t^2 + 100 \\ x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B} t \Rightarrow x_B = -2t^2 + vt \end{cases} \xrightarrow{x_A = x_B}$$

$$2t^2 + 100 = -2t^2 + vt \Rightarrow 4t^2 - vt + 100 = 0$$

۲ معادلهٔ بالا به ازای $\Delta \geq 0$ جواب خواهد داشت:

$$(-v)^2 - 4(400) \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq 1600 \Rightarrow v \geq 40 m/s$$

بنابراین کمینهٔ سرعت متحرک B در لحظهٔ نشان داده شده $v = 40 m/s$ می‌باشد.

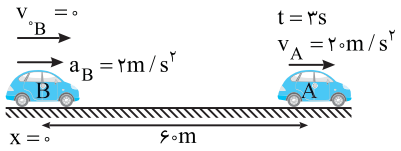


C ۴۳۳ **۳**

خط فکری سؤال جالبی است. اتومبیل A با سرعت ثابت از کنار اتومبیل ساکن B می‌گذرد، سه ثانیه بعد اتومبیل B با شتاب $2 m/s^2$ به دنبال A به راه می‌افتد. در این لحظه اتومبیل A به اندازهٔ $(\Delta x = 20 \times 3 = 60 m)$ جلوتر از اتومبیل B است. اما مهم‌ترین نکته این است که تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل A $(20 m/s)$ از سرعت اتومبیل B بیشتر باشد، فاصلهٔ دو اتومبیل زیاد می‌شود و لحظه‌ای که $v_B \geq v_A$ شود فاصلهٔ دو اتومبیل شروع به کم شدن می‌کند. بنابراین در لحظه‌ای که $v_B = 20 m/s$ می‌شود، فاصلهٔ دو متحرک از هم بیشترین مقدار است. با توجه به این مطلب مسئله را حل می‌کنیم.

۱ مدت زمانی که طول می‌کشد سرعت متحرک B به سرعت $20 m/s$ برسد برابر است با:

$$v = a_B t + v_0 \Rightarrow 20 = 2t \Rightarrow t = 10 s$$



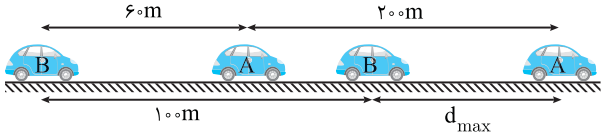
۲ در این مدت جابه‌جایی A و B را به دست می‌آوریم:

$$x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_0 t \Rightarrow x_B = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100 m$$

$$x_A = vt \Rightarrow x_A = 20 \times 10 = 200 m$$

۳ بنابراین جابه‌جایی متحرک A از لحظهٔ عبور از متحرک B برابر است با

$$200 + 60 = 260 m$$



۴ بیشینه فاصلهٔ A و B خواهد شد:

$$d = x_A - x_B \Rightarrow d_{max} = 260 - 100 = 160 m$$

A ۴۳۴ **۳**

تا لحظهٔ $t = 3T$ سرعت متحرک ثابت است. با توجه به رابطهٔ $\Delta x = v \Delta t$ و با توجه به شکل‌ها، در $t = 0$ تا $t = T$ متحرک A بیشتر از متحرک B جابه‌جا می‌شود:

$$\begin{matrix} \Delta x_A = v_{0A} T \\ \Delta x_B = v_{0B} T \end{matrix} \xrightarrow{\Delta x_A > \Delta x_B} v_{0A} > v_{0B}$$

از لحظهٔ $t = 3T$ به بعد حرکت‌ها با شتاب ثابت است و با ادامهٔ حرکت از این لحظه به بعد جابه‌جایی‌های متحرک B بیشتر از جابه‌جایی‌های متحرک A شده است بنابراین شتاب متحرک B بیشتر از شتاب متحرک A است. در ثانیهٔ Tام آخر حرکت چون جابه‌جایی B بیشتر از جابه‌جایی A بوده پس سرعت انتهایی متحرک B بزرگ‌تر از سرعت انتهایی متحرک A است.

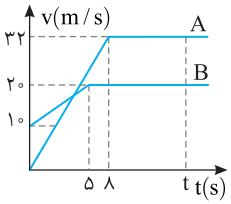
B ۴ ۴۳۵

خط فکری در مسائلی که نوع حرکت متحرک تغییر می‌کند بهتر است که مسئله را به کمک رسم نمودار سرعت - زمان حل کنیم. در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند باید سطح زیر نمودار سرعت - زمان دو متحرک با هم برابر باشد. از این رو با توجه به داده‌های مسئله، نمودارها را رسم کنید.

۱ زمان رسیدن دو متحرک به سرعت ثابت را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow 4=\frac{32-0}{t}\Rightarrow t_A=8s\ ,\ 2=\frac{20-10}{t}\Rightarrow t_B=5s$$

۲ نمودار سرعت - زمان هر دو متحرک را رسم می‌کنیم. لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند (t) سطح زیر نمودار سرعت - زمان آن‌ها یکی است.



یادآوری ریاضی مساحت ذوزنقه برابر مجموع دو قاعده ضربدر نصف ارتفاع است.

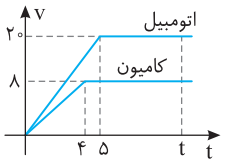
$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow S_A=S_B\Rightarrow\frac{t+t-8}{2}\times 32=\frac{20+10}{2}\times 5+20\times(t-5)\Rightarrow$$

$$(2t-8)\times 16=75+20t-100\Rightarrow 32t-128=20t-25\Rightarrow 12t=103\Rightarrow t=\frac{103}{12}s$$

بازی با سؤال **یک اتومبیل و یک کامیون به طور همزمان از حال سکون و در یک جهت شروع به حرکت می‌کنند. در لحظهٔ شروع حرکت اتومبیل ۲۰۶m عقب‌تر از کامیون است. ابتدا اتومبیل ۵s با شتاب ثابت $4m/s^2$ و کامیون ۴s با شتاب ثابت $2m/s^2$ حرکت می‌کنند. سپس هر یک از آن‌ها با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهند. چند ثانیه پس از شروع حرکت، اتومبیل به کامیون می‌رسد؟**

۱) ۲۰ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ نمودار سرعت - زمان هر دو متحرک را رسم می‌کنیم:



اتومبیل: $v=at+v_0\Rightarrow v=4\times 5=20m/s$

کامیون: $v=at+v_0\Rightarrow v=2\times 4=8m/s$

دقت کنید برای آنکه دو متحرک به هم برسند باید سطح زیر نمودار اتومبیل از سطح زیر نمودار کامیون ۲۰۶ متر بیشتر باشد. زیرا اتومبیل ۲۰۶m عقب بودن خود را باید جبران کند.

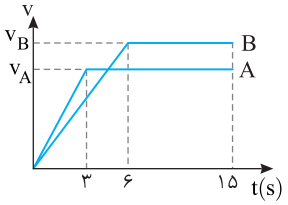
$$S_{\text{اتومبیل}}=S_{\text{کامیون}}+206\Rightarrow\frac{t+(t-5)}{2}\times 20=\frac{t+(t-4)}{2}\times 8+206\Rightarrow$$

$$20t-50=8t-16+206\Rightarrow 12t=240\Rightarrow t=20s$$

گزینهٔ ۱

B ۴ ۴۳۶

۱ باید نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید. دقت کنید که در ۳s اول نمودار متحرک A خط راست مایل و پس از آن نمودار خط راست افقی است و برای متحرک B نمودار تا لحظهٔ $t=6s$، حرکت با شتاب ثابت و سرعت در حال افزایش تا مقدار v_B است و از آن به بعد سرعت متحرک B ثابت است.



۲ دو متحرک پس از ۱۵s با هم از مبدأ به مقصد می‌رسند بنابراین سطح زیر نمودار دو متحرک در بازهٔ صفر تا ۱۵s باید برابر باشد.

$$S_A=S_B\Rightarrow(15+12)\times\frac{v_A}{2}=(15+9)\times\frac{v_B}{2}\Rightarrow 27v_A=24v_B$$

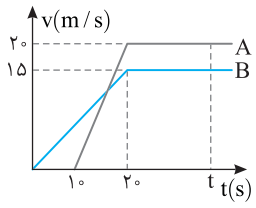
$$\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{24}{27}\Rightarrow\frac{v_A}{v_B}=\frac{8}{9}$$

۳ اکنون نسبت شتاب دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\frac{a_A}{a_B}=\frac{\frac{v_A-0}{3}}{\frac{v_B-0}{6}}\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=\frac{v_A}{v_B}\times 2\Rightarrow\frac{a_A}{a_B}=\frac{8}{9}\times 2=\frac{16}{9}$$

C ۲ ۴۳۷

خط فکری با توجه به نمودار متحرک A، ۱۰s پس از حرکت متحرک B به راه می‌افتد. بنابراین باید مشخص کنیم در این مدت متحرک B چند متر از متحرک A جلو می‌افتد. سپس سطح زیر نمودار را برای هر دو متحرک A و B در لحظهٔ t که به هم می‌رسند حساب کنیم. البته سطح زیر نمودار A باید به مقداری که از متحرک B عقب است از سطح زیر نمودار B بیشتر باشد.



۱ شتاب متحرک B را حساب می‌کنیم.

$$a=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow a=\frac{15-0}{20}\Rightarrow a=\frac{3}{4}m/s^2$$

۲ جابه‌جایی متحرک B را در مدت ۱۰s به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\Delta x_B=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times(10)^2+0\Rightarrow\Delta x_B=37/5m$$

۳ سطح زیر نمودار دو متحرک را حساب می‌کنیم.

$$S_A=(t-10+t-20)\times\frac{20}{2}\Rightarrow S_A=20t-300$$

$$S_B=(t+t-20)\times\frac{15}{2}\Rightarrow S_B=15t-150$$

۴ با توجه به آنچه در خط فکری بیان کردیم، می‌نویسیم:

$$S_A=S_B+37/5\Rightarrow 20t-300=15t-150+37/5\Rightarrow 5t=187/5\Rightarrow t=37/5s$$

A ۱ ۴۳۸

خط فکری ثانیهٔ t ام یعنی بازهٔ زمانی بین $t-1$ تا t بنابراین جابه‌جایی در ثانیهٔ چهارم یعنی جابه‌جایی در بازهٔ $t=3s$ تا $t=4s$. دقت کنید متحرک از حال سکون با شتاب ثابت حرکت کرده است از این رو مسافت طی شده و جابه‌جایی متحرک یکی است. شما باید مکان جسم در لحظه‌های $t=3s$ و $t=4s$ را به‌دست آورده و آن‌ها را از هم کم کنید.

راه‌حل اول: به کمک معادلهٔ مکان - زمان، مکان جسم در لحظهٔ $t=3s$ و $t=4s$ را به‌دست آورده و از هم کم می‌کنیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\ \begin{cases}t=3s\rightarrow x=\frac{1}{2}\times 10\times 9=45m\\ t=4s\rightarrow x=\frac{1}{2}\times 10\times 16=80m\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Delta x_{(4)}=80-45=35m$$

میانبر در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام

حرکت از رابطهٔ روبه‌رو به‌دست می‌آید: $\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0$

راه‌حل دوم: استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام:

$$\Delta x_{(4)}=\frac{1}{2}\times 10(2\times 4-1)=35m$$

A ۲ ۴۳۹

یادآوری سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت در حرکت است در بازهٔ زمانی صفر تا t از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0$$

۱ شتاب حرکت متحرک را به کمک سرعت متوسط آن به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0\xrightarrow{t=3s,v_{av}=12m/s,v_0=0}12=\frac{1}{2}a\times 3+0\Rightarrow a=8m/s^2$$

۲ جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم خواهد شد:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\frac{1}{2}\times 8\times(2\times 3-1)+0=20m$$

A ۴۴۰ ۳

روش اول: متحرک از حال سکون $(v_0=0)$ شروع به حرکت کرده است محل شروع حرکت را مبدأ اختیار می‌کنیم. جابه‌جایی متحرک در مدت ۱s برابر ۲/۵m شده است یعنی مکان در لحظهٔ $t=1s$ برابر $x=2/5m$ است. به کمک معادله حرکت، شتاب را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 2/5=\frac{1}{2}(a)(1)\Rightarrow a=5m/s^2$$

مکان متحرک در مدت ۲s را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x'=\frac{1}{2}\times 5\times 2^2+0\Rightarrow \Delta x'=10m$$

جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم یعنی جابه‌جایی در بازهٔ $t=1s$ تا $t=2s$ بنابراین مکان در این دو لحظه را از هم کم می‌کنیم.

$$\Delta x_{(2)}=x'-x=10-2/5=7/5m$$

روش دوم: جابه‌جایی یک متحرک که دارای حرکت با شتاب ثابت روی خط راست است، در ثانیهٔ t ام حرکتش از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow \Delta x_{(1)}=\frac{1}{2}a(2\times 1-1)+0\Rightarrow 2/5=\frac{1}{2}a\Rightarrow a=5m/s^2$$

بنابراین جابه‌جایی آن در ثانیهٔ دوم حرکتش برابر است با:

$$\Delta x_{(2)}=\frac{1}{2}\times 5\times(2\times 2-1)+0\Rightarrow \Delta x_{(2)}=7/5m$$

تذکر **رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام در کتاب بیان نشده است اما در حل این‌گونه مسائل، کاربرد مفیدی دارد.**

B ۴۴۱ ۳

راه‌حل اول:

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن شتاب است. $|\Delta x_{(t)}-\Delta x_{(t-1)}|=a$

۱ جابه‌جایی متحرک در حرکت کندشونده‌اش در ثانیهٔ چهارم، یک متر از جابه‌جایی آن در ثانیهٔ ششم بیشتر بوده است و با توجه به نکتهٔ بیان شده جابه‌جایی در ثانیهٔ چهارم به اندازهٔ 2a از جابه‌جایی در ثانیهٔ ششم بیشتر است، بنابراین شتاب حرکت خواهد شد:

$$|2a|=1\Rightarrow|a|=\frac{1}{2}m/s^2$$

۲ سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-0/5\times 6+v_0\Rightarrow v_0=3m/s$$

راه حل دوم: به کمک رابطهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست می‌توان نوشت:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow\begin{cases}\Delta x_{(4)}=\frac{1}{2}a(2\times 4-1)+v_0=\frac{7}{2}a+v_0\\ \Delta x_{(6)}=\frac{1}{2}a(2\times 6-1)+v_0=\frac{11}{2}a+v_0\end{cases}$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\Delta x_{(4)}-\Delta x_{(6)}=\frac{7}{2}a-\frac{11}{2}a\Rightarrow 1=\frac{-4}{2}a\Rightarrow a=-0/5m/s^2$$

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-0/5\times 6+v_0\Rightarrow v_0=3m/s$$

B ۴۴۲ ۲

جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم برابر ۲۸ متر است، سرعت اولیه را به کمک جابه‌جایی در ثانیهٔ t ام به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{(t)}=\frac{1}{2}a(2t-1)+v_0\Rightarrow 28=\frac{1}{2}\times 6(2\times 3-1)+v_0\Rightarrow v_0=13m/s$$

اکنون به کمک معادلهٔ مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک در ثانیهٔ $t=5s$ را حساب می‌کنیم البته در لحظهٔ $t=0$ مکان اولیهٔ متحرک $x_0=4m$ بوده است.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\times 6\times 25+13\times 5+4=75+65+4\Rightarrow x=144m$$

B ۴۴۳ ۱

نکته ۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازه‌های زمانی بین $t=4s$ تا $t=6s$.

یادآوری برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در مدت n ثانیهٔ حرکت از معادلهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$$

که در آن t کل مدت زمان و n تعداد ثانیه‌های آخر مدت t است اما این به چه معنی است؟ یعنی اگر گفته شود جابه‌جایی در سه ثانیهٔ پنجم شما باید به جای t مقدار $5\times 3=15s$ و جای n، 3s را قرار دهید.

۱ جابه‌جایی در 2s اول برابر 13m شده است از این‌رو:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 13=\frac{1}{2}a(2)^2+2v_0\Rightarrow 13=2a+2v_0\quad (I)$$

۲ در دو ثانیهٔ سوم یعنی در رابطهٔ بیان شده در یادآوری به جای t مقدار $2\times 3=6s$ و به جای n مقدار 2s را قرار دهید.

$$25=\frac{2}{2}a(2\times 6-2)+2v_0\Rightarrow 25=10a+2v_0\quad (II)$$

۳ به کمک معادله‌های (I) و (II)، a را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}13=2a+2v_0\\ 25=10a+2v_0\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}}12=8a\Rightarrow a=1/5m/s^2$$

B ۴۴۴ ۴

یادآوری در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در بازهٔ زمانی n ثانیه از کل مدت حرکت t ثانیه برابر است با:

$$\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$$

۱ جابه‌جایی در دو ثانیهٔ اول یعنی در رابطهٔ $n=2s$ و $t=2s$ را قرار دهیم:

$$54=\frac{2}{2}a(2\times 2-2)+2v_0\Rightarrow 54=2a+2v_0\quad (1)$$

۲ جابه‌جایی در دو ثانیهٔ سوم یعنی در رابطهٔ $n=2s$ و $t=6s$ را قرار دهیم:

$$38=\frac{2}{2}a(2\times 6-2)+2v_0\Rightarrow 38=10a+2v_0\quad (2)$$

۳ رابطه‌های (۱) و (۲) را از هم کم کرده و شتاب را حساب می‌کنیم:

$$54-38=2a+2v_0-10a-2v_0\Rightarrow 16=-8a\Rightarrow a=-2m/s^2$$

۴ اکنون v_0 را از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آوریم:

$$54=2a+2v_0\Rightarrow 54=2\times(-2)+2v_0\Rightarrow v_0=29m/s$$

۵ مسافت طی شده تا توقف به کمک رابطهٔ مستقل از زمان خواهد شد:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-(29)^2=2\times(-2)\Delta x\Rightarrow \Delta x=210/25m$$

B ۴۴۵ ۲

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست می‌توان ثابت کرد که جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی متوالی یکسان t تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت at^2 می‌دهند.

در صورت مسئله بیان شده که در هر 2s، متحرک 8m کمتر جابه‌جا می‌شود یعنی در بازهٔ زمانی یکسان $t=2s$، قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر ۸ است از این‌رو می‌توان نوشت:

$$at^2=8\Rightarrow a(2)^2=8\Rightarrow a=2m/s^2$$

متحرک بعد از 400m متوقف شده است. به کمک معادلهٔ مستقل از زمان سرعت اولیهٔ را حساب می‌کنیم:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-v_0^2=2\times(-2)\times 400\Rightarrow v_0^2=1600\Rightarrow v_0=40m/s$$

بازی با سوال **متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت در حرکت است و در هر ثانیه، ۲/۵ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل جابه‌جا می‌شود. شتاب متحرک چند متر بر مجذور ثانیه است؟**

۱) ۲/۵ ۲) ۵

۳) ۱/۲۵ ۴) قابل محاسبه نیست.

پاسخ **در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن شتاب است.**

$$\Delta x_{(t)}-\Delta x_{(t-1)}=a$$

در این پرسش، جابه‌جایی در هر ثانیه، ۲/۵ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل است یعنی قدرنسبت این دنباله که همان شتاب است برابر $2/5m/s^2$ است. گزینهٔ ۱

B ۴۴۶ ۲

راه‌حل اول: ۱ معادلهٔ سرعت - زمان $v=-2t+4$ را با معادلهٔ سرعت - زمان حرکت با شتاب ثابت $v=at+v_0$ مقایسه می‌کنیم، مشخص می‌شود که حرکت دارای شتاب ثابت $a=-2m/s^2$ و سرعت اولیهٔ $v_0=4m/s$ است و معادلهٔ مکان - زمان آن به صورت روبه‌رو است:

$$x=\frac{1}{2}(-2)t^2+4t+x_0 \Rightarrow x=-t^2+4t+x_0$$

۲ ۲ ثانیهٔ سوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی بین $t=4s$ و $t=6s$ بنابراین مکان در این دو لحظه را به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم تا جابه‌جایی به‌دست آید:

$$\begin{cases} t_1=4s \Rightarrow x_1=-16+16+x_0 \Rightarrow x_1=x_0 \\ t_2=6s \Rightarrow x_2=-36+24+x_0 \Rightarrow x_2=-12+x_0 \end{cases} \Rightarrow |\Delta x|=12m$$

راه‌حل دوم: استفاده از رابطهٔ روبه‌رو: $\Delta x_{(n)}=\frac{n}{2}a(2t-n)+nv_0$

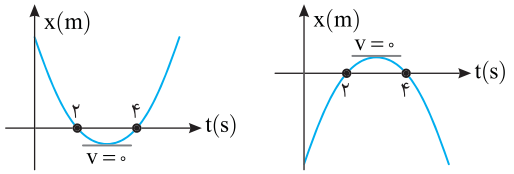
در این رابطه ۲ ثانیهٔ سوم یعنی $n=2$ و $t=6s$ است.

$$\Delta x_{(n)}=\frac{2}{2}\times(-2)(2\times6-2)+2\times4=-20+8=-12m$$

پس بزرگی جابه‌جایی برابر $12m$ است.

B ۴۴۷ ۴

خط فکری معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $(x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0)$ یک تابع درجه ۲ است که نمودار آن سهمی است. از طرفی لحظه‌ای بردار مکان متحرک تغییر جهت (علامت) می‌دهد که از مبدأ $(x=0)$ بگذرد، در این صورت لحظه‌های $t=2s$ و $t=4s$ ریشه‌های معادلهٔ مکان زمان هستند و در این لحظه‌ها نمودار مکان - زمان محور زمان را قطع خواهد کرد. بنابراین اگر شما بخواهید نمودار مکان - زمان که یک سهمی است را رسم کنید باید یکی از دو نمودار زیر را رسم کنید.



۱ به نمودارهای رسم شده دقت کنید. لحظهٔ تغییر جهت متحرک یعنی لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر می‌شود و این لحظه در لحظه‌های کمینه و بیشینه نمودار (رأس سهمی) اتفاق می‌افتد.

۲ همچنین سهمی نسبت به خط قائم عبوری از رأس سهمی متقارن است بنابراین لحظهٔ تغییر جهت $t_{\text{تغییر جهت}}=\frac{2+4}{2}=3s$ خواهد شد.

B ۴۴۸ ۲

الف) جابه‌جایی بین دو لحظهٔ $t=0$ تا $t=4s$ را به دست می‌آوریم. برای این کار مکان در لحظهٔ $t=0$ و $t=4s$ را به کمک معادلهٔ حرکت $x=t^2+4t+5$ به‌دست آورده از هم کم می‌کنیم.

$$t=0 \Rightarrow x=0+4(0)+5 \Rightarrow x_1=5m \, , \, t=4s \Rightarrow x=4^2+4(4)+5 \Rightarrow x_2=37$$

جابه‌جایی $37-5=32m$ است. بنابراین سرعت متوسط در این بازه خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{32}{4}=8m/s$$

این گزاره نادرست است.

ب) معادلهٔ مکان - زمان مسئله را با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده و شتاب و سرعت اولیه را مشخص می‌کنیم.

$$x=t^2+4t+5 \, , \, x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow a=2m/s^2 \, , \, v_0=4m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم: $v=at+v_0 \Rightarrow v=2t+4$

بعد از $t=0$ همواره یک مقدار مثبت به ۴ اضافه می‌شود پس کمترین سرعت در $t=0$ و $4m/s$ است و این گزاره درست است.

پ) با توجه به معادلهٔ سرعت که در بالا به دست آمده همواره سرعت مثبت است و شتاب نیز ثابت و مثبت می‌باشد پس حرکت تند شونده است و این گزاره درست است.

ت) زمانی بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان $x=0$ عبور می‌کند. Δ را تشکیل می‌دهیم $x=t^2+4t+5 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=16-4\times5=-4<0$ بنابراین معادله جواب ندارد. یعنی متحرک هیچ‌گاه از مبدأ مکان نمی‌گذرد و گزارهٔ (ت) نادرست است.

B ۴۴۹ ۴

خط فکری طراح بیان کرده که در لحظهٔ $t=2s$ متحرک در یک متری مبدأ است بنابراین مکان آن می‌تواند $x=+1m$ و یا $x=-1m$ باشد. شما باید در دو حالت مسئله را حل کنید.

حالت اول: اگر متحرک در $t=2s$ در $x=+1m$ باشد، آن‌گاه: $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$

$$\begin{cases} t=2s \Rightarrow 1=\frac{1}{2}a\times(2)^2+0+x_0 \\ t=4s \Rightarrow 13=\frac{1}{2}a\times(4)^2+0+x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+x_0=1 \\ 8a+x_0=13 \end{cases} \Rightarrow 6a=12$$

$$\Rightarrow a=2m/s^2 \Rightarrow x_0=-3m$$

حالت دوم: اگر متحرک در $t=2s$ در $x=-1m$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} t=2s \Rightarrow -1=\frac{1}{2}a(2)^2+0+x_0 \\ t=4s \Rightarrow 13=\frac{1}{2}a(4)^2+0+x_0 \end{cases} \Rightarrow 6a=14 \Rightarrow a=\frac{7}{3}m/s^2 , x_0=-\frac{17}{3}m$$

C ۴۵۰ ۴

خط فکری در صورت مسئله اندازهٔ شتاب و اندازهٔ جابه‌جایی در مدت $2s$ داده شده است. بنابراین ممکن است شتاب مثبت و جابه‌جایی نیز مثبت باشد یا شتاب و جابه‌جایی هر دو منفی باشند و یا شتاب مثبت و جابه‌جایی منفی و بالعکس باشد. در نتیجه چهار حالت را باید یک به یک بررسی کنیم و با به‌دست آوردن سرعت اولیه و مقایسهٔ آن با شتاب، نوع حرکت را تعیین کنیم.

اگر بردار شتاب و بردار جابه‌جایی هم جهت باشند یعنی اگر شتاب و بردار جابه‌جایی هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند آن‌گاه:

۱ هر دو مثبت باشند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow +6=\frac{1}{2}\times(+2)\times(2)^2+v_0\times(2) \Rightarrow v_0=+1m/s$$

معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد: $v=at+v_0 \Rightarrow v=2t+1$

در معادلهٔ $v=2t+1$ ، شتاب $+2m/s^2$ و سرعت اولیه $v_0=1m/s$ است و حرکت همواره تندشونده است.

۲ هر دو منفی باشند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow{\text{هر دو منفی}} -6=\frac{1}{2}(-2)\times(2)^2+v_0\times(2) \Rightarrow v_0=-1m/s$$

معادلهٔ سرعت زمان خواهد شد $v=-2t-1$ و چون سرعت اولیه و شتاب هر دو منفی هستند حرکت همواره تندشونده است و گزینهٔ (۱) درست است.

اکنون حالتی را بررسی می‌کنیم که بردار شتاب و بردار جابه‌جایی در این دو ثانیه هم جهت نباشد.

۳ شتاب $2m/s^2$ و جابه‌جایی $-6m$ باشد.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow[\Delta x<0]{a>0} -6=\frac{1}{2}\times2\times(2)^2+v_0\times2 \Rightarrow v_0=-5m/s$$

در این صورت معادلهٔ سرعت زمان خواهد شد: $v=at+v_0 \Rightarrow v=2t-5$

بنابراین ابتدا سرعت و شتاب هم‌علامت نبوده حرکت کندشونده است اما پس از توقف جسم در $t=2/5s$ ، حرکت تندشونده می‌شود.

۴ شتاب منفی $-2m/s^2$ و جابه‌جایی مثبت $+6m$ باشد:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow[\Delta x>0]{a<0} 6=\frac{1}{2}\times(-2)\times(2)^2+v_0\times2 \Rightarrow v_0=+5m/s$$

در این حالت نیز $v=-2t+5$ بوده و حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده خواهد بود و گزینهٔ (۲) درست است.

B ۴۵۱ ۲

خط فکری متحرک از حال سکون با شتاب ثابت $+۲a$ شروع به حرکت کرده و سرعتش به v می‌رسد. سپس با همان شتاب $(-۲a)$ ترمز می‌کند و می‌ایستد. بنابراین اگر در قسمت اول زمان $t_۱$ و جابه‌جایی $\Delta x_۱$ و در قسمت دوم زمان $t_۲$ و جابه‌جایی $\Delta x_۲$ باشد، باید رابطه‌ای بین زمان‌ها و جابه‌جایی‌ها به‌دست بیاوریم.

۱ به کمک معادلهٔ سرعت - زمان خواهیم داشت

قسمت اول: $v=at+v_۰ \Rightarrow v=(۲a)t_۱ \Rightarrow t_۱=\frac{v}{۲a}$

$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow v^۲=۲(۲a)\Delta x_۱ \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{v^۲}{۴a}$

قسمت دوم: $v=at+v_۰ \xrightarrow{v=۰} ۰=(-۲a)t_۲+v \Rightarrow t_۲=\frac{v}{۲a}$

$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-v^۲=۲(-۲a)\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲=\frac{v^۲}{۴a}$

۲ نتیجه اینکه در این حرکت $t_۱=t_۲$ و $\Delta x_۱=\Delta x_۲$ بوده و اگر زمان کل حرکت t و کل جابه‌جایی x باشد آنگاه:

$t_۱-t_۲=t \Rightarrow t_۱+t_۱=t \Rightarrow t_۱=\frac{t}{۲}$ (I)

$\Delta x_۱+\Delta x_۲=x \Rightarrow \Delta x_۱+\Delta x_۱=x \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{x}{۲}$ (II)

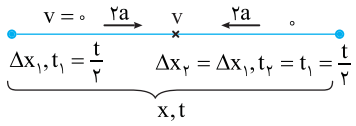
۳ با توجه به معادلهٔ مکان - زمان می‌توان نوشت:

$\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{۱}{۲}(۲a)t_۱^۲ \xrightarrow{t_۱=\frac{t}{۲}} \Delta x_۱=a(\frac{t}{۲})^۲=\frac{at^۲}{۴}$

با توجه به رابطهٔ II خواهیم داشت: $\Delta x_۱=\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{at^۲}{۴}=\frac{x}{۲} \Rightarrow x=\frac{at^۲}{۲} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{۲x}{a}}$

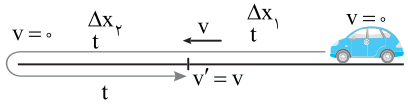
هرگاه متحرک با شتاب $a_۱$ از حال سکون شروع به حرکت کرده و در مدت $t_۱$ جابه‌جایی $x_۱$ را طی کند، سپس با شتاب $a_۲$ ترمز کرده و در مدت $t_۲$ جابه‌جایی $x_۲$ را طی کند تا متوقف شود آن‌گاه:

$\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{a_۲}{a_۱}$



B ۴۵۲ ۳

در قسمت اول حرکت در مدت t سرعت از صفر به v رسیده سپس مطابق شکل در مدت $۲t$ سرعت به $-v$ می‌رسد یعنی ابتدا سرعت صفر شده و متحرک تغییر جهت داده تا سرعتش از صفر به $-v$ می‌رسد، از این‌رو:



$\Delta x_۱=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t_۱ \Rightarrow \Delta x_۱=\frac{v}{۲}t \quad , \quad \Delta x_۲=\frac{v_۲+v'}{۲}\Delta t_۲ \Rightarrow \Delta x_۲=\frac{v}{۲}t$

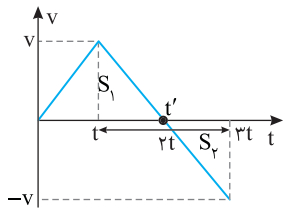
$\Delta x_۳=\frac{v_۳+v'}{۲}\Delta t \Rightarrow \Delta x_۳=\frac{-v}{۲}t$

مسافت برابر است با مجموع بزرگی جابه‌جایی‌ها:

$\ell=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|+|\Delta x_۳| \Rightarrow \ell=\frac{v}{۲}t+\frac{v}{۲}t+\frac{v}{۲}t \Rightarrow \ell=\frac{۳v}{۲}t$

حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان حرکت متحرک به شکل روبه‌روست و کافی است مساحت $S_۱$ و $S_۲$ را حساب کرده و با هم جمع کنیم.



ابتدا t' محل تقاطع نمودار با محور زمان را به کمک شیب خط به‌دست می‌آوریم.

$\frac{-v-v}{۳t-t}=\frac{۰-v}{t'-t} \Rightarrow \frac{۲}{۳t-t}=\frac{۱}{t'-t} \Rightarrow ۲t'-۲t=۲t \Rightarrow t'=۲t$

$L=|S_۱|+|S_۲| \Rightarrow L=\frac{v\times ۲t}{۲}+|\frac{-v\times t}{۲}| \Rightarrow L=vt+\frac{vt}{۲}=\frac{۳}{۲}vt$

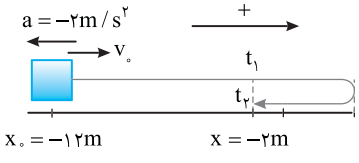
B ۴۵۳ ۳

یادآوری ریاضی در معادلهٔ درجهٔ ۲ $(y=ax^۲+bx+c)$ برای حاصل‌ضرب دو ریشه حاصل‌جمع دو ریشه و تفاضل دو ریشه داریم:

$x_۱x_۲=\frac{c}{a} \ , \ x_۱+x_۲=-\frac{b}{a} \ , \ |x_۲-x_۱|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

خط فکری دقت کنید در مدت $۳s$ متحرک از یک مکان $(x=-۲m)$ می‌گذرد و چنانچه لحظه‌های گذر از این مکان را حساب کنیم اختلاف آن‌ها $t_۲-t_۱=۳s$ است. معادلهٔ حرکت را می‌نویسیم و به جای x مقدار $-۲m$ را قرار می‌دهیم. اما به جای به‌دست آوردن ریشه‌ها تفاضل آن‌ها $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ را حساب می‌کنیم.

با توجه به شکل، اختلاف زمانی دو بار گذر از مکان $x=-۲m$ برابر $۳s$ است. $(t_۲-t_۱=۳s)$



معادلهٔ مکان - زمان را نوشته، داده‌های مسئله را در آن قرار می‌دهیم.

$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow -۲=\frac{۱}{۲}\times -۲\times t^۲+v_۰t-۱۲ \Rightarrow t^۲-v_۰t+۱۰=۰$

تفاضل دو ریشهٔ این معادله برابر ۳ است.

$\Delta t=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \Delta t=\frac{\sqrt{v_۰^۲-۴۰}}{۱} \Rightarrow ۳=\sqrt{v_۰^۲-۴۰} \Rightarrow v_۰^۲=۴۹ \Rightarrow v_۰=۷m/s$

B ۴۵۴ ۴

۱ معادله را به صورت معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت $(x-t)$ در می‌آوریم:

$t=۱+\frac{\sqrt{۶۵-۱۰x}}{۵} \Rightarrow \frac{\sqrt{۶۵-۱۰x}}{۵}=t-۱ \Rightarrow \sqrt{۶۵-۱۰x}=۵(t-۱)$

$\Rightarrow ۶۵-۱۰x=۲۵(t-۱)^۲ \Rightarrow ۶۵-۱۰x=۲۵+۲۵t^۲-۵۰t$

$\Rightarrow ۱۰x=-۲۵t^۲+۵۰t+۴۰ \Rightarrow x=-۲/۵t^۲+۵t+۴$

۲ معادله را با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مقایسه کرده a و $v_۰$ را مشخص می‌کنیم.

$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow x=-۲/۵t^۲+۵t+۴ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a=-۲/۵ \Rightarrow a=-۵m/s^۲ \\ v_۰=۵m/s \\ x_۰=+۴m \end{cases}$

۳ معادلهٔ سرعت - زمان خواهد شد. $v=-۵t+۵, \ v=۰ \Rightarrow =۱s$

t	۰		۱
v		+	۰ −
$a=-۵m/s^۲$		−	−
av		−	+
		کندشونده	تندشونده

بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

میانبر هرگاه ضریب $t^۲$ (شتاب) و ضریب t (سرعت اولیه) در معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت مختلف‌العلامت باشند حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

۴ ۴۵۵ C

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در بازه‌های زمانی یکسان و متوالی t تشکیل دنبالهٔ حسابی به قدر نسبت at^2 می‌دهند.

با توجه به فرض مسئله در بازه‌های متوالی و یکسان t متحرک به‌ترتیب مسافت ۴۵ متر، ۲۷ متر و ۹ متر طی می‌کند بنابراین تفاضل هر دو مسافت متوالی باید برابر at^2 باشد. اگر جهت حرکت را مثبت فرض کنیم چون حرکت کندشونده است شتاب حرکت در خلاف جهت حرکت بوده و منفی است.

بنابراین شتاب حرکت $-2m/s^2$ بنابراین:

$$27-45=at^2\Rightarrow -18=-2t^2\Rightarrow t=3s$$

اکنون به کمک معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_0\xrightarrow{t=3\Delta t=9s}0=(-2)(9)+v_0\Rightarrow v_0=18m/s$$

۳ ۴۵۶ B

وقتی متحرکی با شتاب ثابت می‌ایستد یعنی شتاب $-a$ و حرکت کندشونده است. می‌توان فرض کرد در همان مدت با شتاب $+a$ از حال سکون شروع به حرکت کرده است. یعنی می‌توان حرکت در ثانیهٔ آخر را از سکون بررسی کرد. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow 3=\frac{1}{2}a\times 1\Rightarrow a=6m/s^2$$

حال برای ۳s اول مسیر کندشونده می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 33=\frac{1}{2}(-6)\times(3)^2+3v_0\Rightarrow v_0=20m/s$$

روش حل به کمک رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان را رسم کنید. دقت کنید سطح زیر نمودار در ۱s آخر برابر ۳m است و در ثانیهٔ آخر سرعت از v به صفر می‌رسد. حساب می‌کنیم و در هر ثانیه سرعت به اندازهٔ شتاب a کم می‌شود بنابراین ابتدای ثانیهٔ آخر سرعت برابر a است. از این رو:

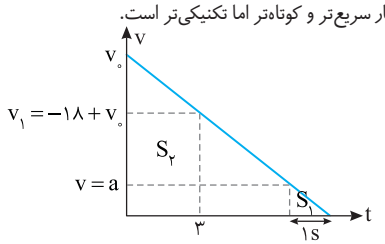
$$S_1=\frac{a\times 1}{2}\Rightarrow 3=\frac{a\times 1}{2}\Rightarrow a=6m/s^2$$

سرعت در لحظهٔ $t=3s$ برابر است با: $v=at+v_0\Rightarrow v_1=-6\times 3+v_0=-18+v_0$

اکنون سطح ذوزنقهٔ S_2 را برابر ۳۳ متر قرار می‌دهیم.

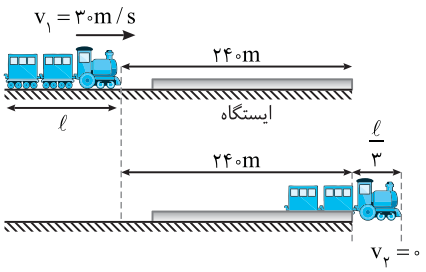
$$(-18+v_0+v_0)\times\frac{3}{2}=33\Rightarrow -18+2v_0=22\Rightarrow v_0=20m/s$$

روش اول بسیار سریع‌تر و کوتاه‌تر اما تکنیکی‌تر است.



۱ ۴۵۷ B

خط فکری فاصلهٔ ابتدای قطار تا انتهای ایستگاه ۲۴۰m است و هنگام توقف قطار، $\frac{1}{3}$ آن از ایستگاه عبور کرده یعنی کل مسافت طی‌شده توسط قطار $240+\frac{L}{3}$ است، بنابراین شما ابتدا باید مشخص کنید که این قطار با شتاب $-1/5m/s^2$ و سرعت اولیه $30m/s$ پس از طی مسافت چند متر می‌ایستد و این مقدار به‌دست آمده را با $240+\frac{\ell}{3}$ برابر قرار بدهید و طول قطار را به‌دست بیاورید.



۱ به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، مسافت طی شده توسط قطار در مدت توقف را به‌دست می‌آوریم: $v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\Rightarrow 0-900=2\times(-1/5)\Delta x\Rightarrow \Delta x=300m$

۲ بنابراین قطار بعد از ۳۰۰m متوقف می‌شود، در این صورت طول قطار را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=240+\frac{\ell}{3}\Rightarrow 300=240+\frac{\ell}{3}\Rightarrow \ell=180m$$

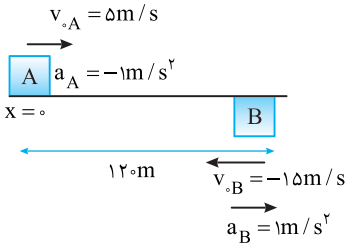
۳ برای آنکه طولی از قطار از انتهای ایستگاه عبور نکند باید سرعت قطار در مسافت ۲۴۰ متر از $30m/s$ به صفر برسد. از این رو:

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x\xrightarrow{v_1=30m/s,v_2=0,\Delta x=240m}-900=+2a\times 240$$

$$\Rightarrow a=-\frac{15}{8}m/s^2$$

۱ ۴۵۸ C

۱ محل ابتدایی اتومبیل A را مبدأ مکان و جهت مثبت را مطابق شکل به سوی راست می‌گیریم. با توجه به جهت مثبت برای اتومبیل A $v_{0A}=+5m/s$ و شتاب $a_A=-1m/s^2$ می‌شود و سرعت اولیه B، $v_{0B}=-15m/s$ و شتاب حرکت B که خلاف جهت v_{0B} و در جهت مثبت محور است برابر $a_B=+1m/s^2$ می‌شود.



۲ معادلهٔ حرکت دو اتومبیل را می‌نویسیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{1}{2}(-1)t^2+5t\\ x_B=\frac{1}{2}(1)t^2-15t+120/5\end{cases}$$

۳ معادله‌های حرکت را مساوی قرار می‌دهیم.

$$x_A=x_B=\frac{-1}{2}t^2+5t=\frac{1}{2}t^2-15t+120/5\Rightarrow t^2-20t+120/5=0$$

$$\Rightarrow\Delta'=100-120/5<0$$

چرا مسئله جواب ندارد؟ مگر دو متحرک به سوی هم نمی‌روند. در واقع در این حل هر متحرک متوقف شده و برمی‌گردد. در حالی که اتومبیل‌ها وقتی که متوقف می‌شوند برنمی‌گردند. از این رو باید مشخص کنیم که اتومبیل A پس از چند ثانیه می‌ایستد و در این مدت چند متر جلو می‌آید.

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=(-1)t+5\Rightarrow t=5s$$

$$\Delta x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t\Rightarrow\Delta x_A=\frac{1}{2}\times(-1)(5)^2+5\times 5\Rightarrow\Delta x_A=12/5m$$

بنابراین اتومبیل A پس از 5s با طی مسافت $12/5m$ می‌ایستد و برای آنکه اتومبیل B به A برسد باید $120/5-12/5=108m$ مسافت طی کند. اکنون بررسی کنیم B در چه مدتی $108/5m$ را طی می‌کند.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow -108=\frac{1}{2}(1)t^2+(-15)t\Rightarrow t^2-30t+216=0$$

حال با توجه به معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$t_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{900-864}}{2}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{36}}{2}\Rightarrow\begin{cases}t_1=12s\\ t_2=18s\end{cases}$$

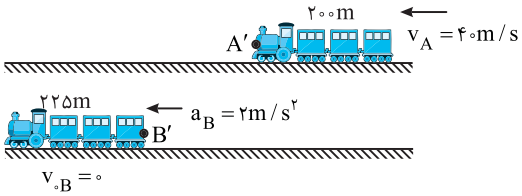
اکنون باید مشخص کنیم اتومبیل B پس از چه مدتی می‌ایستد؟

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-1\times t+15\Rightarrow t_B=15s$$

در نتیجه $t_1=12s$ قابل قبول است و $t_2=18s$ جواب مسئله نیست. زیرا از 15s بیشتر است.

B ۴۵۹ ۴

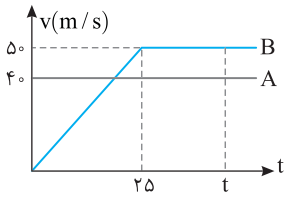
۱ شکل سادهٔ زیر را برای خود رسم کنید. تا متوجه شوید برای سبقت گرفتن از A باید قطار B، ۴۲۵=۲۰۰+۲۲۵ متر بیشتر از قطار A حرکت کند. چرا؟ برای آنکه سبقت B از A یعنی انتهای قطار B (نقطهٔ B') باید از ابتدای قطار A (نقطهٔ A') بگذرد.



۲ لحظه‌ای را که سرعت قطار B با شتاب $۲m/s^۲$ به $۵۰m/s$ می‌رسد حساب کنید.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۵۰=۲t+۰ \Rightarrow t=۲۵s$$

۳ نمودار سرعت - زمان دو متحرک را مطابق شکل روبه‌رو رسم کنید.



۴ سطح زیر نمودار B باید ۴۲۵m از سطح زیر نمودار A بیشتر باشد.

$$S_B = S_A + ۴۲۵ \Rightarrow (t+t-۲۵)\times\frac{۵۰}{۲} = ۴۰t+۴۲۵$$

$$\Rightarrow ۵۰t-۶۲۵ = ۴۰t+۴۲۵ \Rightarrow ۱۰t=۱۰۵۰ \Rightarrow t=۱۰۵s$$

C ۴۶۰ ۲

خط فکری زمان واکنش یعنی بازهٔ زمانی که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که پدال ترمز را می‌فشرد. در این بازه زمانی می‌توان حرکت را یکنواخت فرض کرد. مسافتی که خودروی A طی می‌کند ۱۱۰ متر است. شما باید جابه‌جایی در مدت ترمز را حساب کرده از ۱۱۰ متر کم کنید و جابه‌جایی در زمان واکنش را به‌دست بیاورید تا بتوانید زمان واکنش A را حساب کرده به سراغ خودروی B بروید.

۱ جابه‌جایی خودروی A با شتاب $-۲m/s^۲$ و سرعت اولیهٔ $+۲۰m/s$ تا لحظهٔ توقف خواهد شد: $v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-۲۰^۲=۲\times(-۲)\times\Delta x \Rightarrow \Delta x=۱۰۰m$

۲ بنابراین راننده پس از طی مسافت $۱۰۰-۱۱۰=۱۰m$ ترمز می‌گیرد و این ۱۰ متر را با تندی $۲۰m/s$ می‌رود. زمان واکنش A را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x=vt \Rightarrow ۱۰=۲۰t \Rightarrow t_A=۰/۵s$$

۳ زمان واکنش A نصف زمان واکنش B است. از این‌رو زمان واکنش B خواهد شد: $t_A=۰/۵t_B \Rightarrow ۰/۵=t_B \Rightarrow t_B=۱s$

۴ در این مدت خودروی B با تندی $۱۸m/s$ مسافت زیر را طی می‌کند.

$$\Delta x_B=v_Bt \Rightarrow \Delta x_{B_۱}=۱۸\times۱ \Rightarrow \Delta x_{B_۱}=۱۸m$$

۵ جابه‌جایی B حین ترمز گرفتن خواهد شد:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-(۱۸)^۲=۲(-۲)\Delta x \Rightarrow \Delta x_{B_۲}=۸۱m \Rightarrow \Delta x=۸۱m$$

۶ بنابراین خودروی B پس از طی مسافت $۸۱+۱۸=۹۹m$ در فاصلهٔ $۱۱۰-۹۹=۱۱$ متری مانع می‌ایستد.

C ۴۶۱ ۲

حل با رسم نمودار سرعت - زمان

نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم اما چگونه؟

۱ در مدت ۲۰s سرعت متحرک با شتاب ثابت a از صفر به مقدار v می‌رسد سپس شتاب آن $-a$ می‌شود، بنابراین در همان مدت ۲۰s سرعت متحرک صفر می‌شود، یعنی در لحظهٔ $t=۴۰s$ متوقف شده سرعتش منفی می‌شود.

۲ متحرک می‌خواهد به مبدأ حرکت برگردد یعنی جابه‌جایی آن صفر شود. $\Delta x=۰$

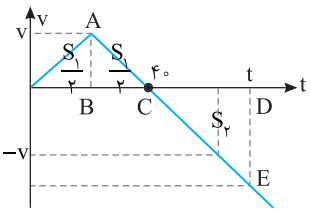
۳ جابه‌جایی برابر سطح زیر نمودار $v-t$ است، بنابراین سطح زیر نمودار در بازهٔ ۰ تا $۴۰s$ $(S_۱)$ باید با سطح زیر نمودار در بازهٔ $۴۰s$ تا t $(S_۲)$ برابر شود.

۴ سطح $S_۱$ به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. یعنی $S_۱$ دو برابر سطح مثلث ABC است و برابر با سطح مثلث CDE است $(S_۲=S_۱)$. $S_{CDE}=۲S_{ABC}$

۵ دو مثلث ABC و CDE متشابه‌اند و در مثلث‌های متشابه نسبت مساحت‌ها برابر توان ۲ نسبت تشابه است.

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=\left(\frac{CD}{BC}\right)^۲ \Rightarrow ۲=\left(\frac{t-۴۰}{۲۰}\right)^۲ \Rightarrow t-۴۰=۲۰\sqrt{۲} \Rightarrow t=۴۰+۲۰\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴} t=۶۸s$$



روش تحلیلی با معادلات حرکت با شتاب ثابت

۱ ابتدا متحرک با شتاب ثابت a از حال سکون شروع به حرکت کرده و بعد از ۲۰s سرعت آن خواهد شد: $v=at+v_۰ \Rightarrow v=a\times۲۰+۰ \Rightarrow v=۲۰a$

برای آنکه مجدد به مکانی برسیم که در ابتدا سرعت $۲۰a$ بوده باید متحرک مسیر رفت را بازگردد و به همان مکان برسد. چون شتاب حرکت ثابت است بنابراین در لحظهٔ بازگشت به مکان $x_۱$ تندی برابر $۲۰a$ اما جهت آن قرینه خواهد بود بنابراین حرکت بازگشت قرینهٔ حرکت رفت است.

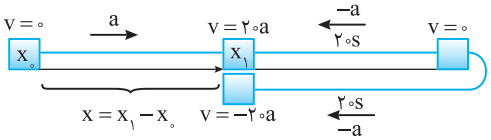
۲ در لحظهٔ $t=۲۰s$، شتاب قرینه می‌شود $(a_۲=-a)$ زمان توقف را حساب می‌کنیم. $v=at+v_۰ \Rightarrow ۰=-a\times t+۲۰a \Rightarrow t=۲۰s$

۳ بنابراین متحرک در لحظهٔ $t=۴۰s$ سرعتش صفر شده و برمی‌گردد.

۴ لحظه‌ای که سرعتش برابر $-۲۰a$ می‌شود را حساب می‌کنیم.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow -۲۰a=(-a)t+۰ \Rightarrow t=۲۰s$$

بنابراین در لحظهٔ $t=۴۰+۲۰=۶۰s$ سرعت متحرک $-۲۰a$ می‌شود و مسیر حرکت تا این لحظه مطابق شکل زیر است.



۵ از این لحظه $(t=۶۰s)$ متحرک باید جابه‌جایی x را طی کند تا به مبدأ حرکتش برگردد. ابتدا x را حساب می‌کنیم. $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}a(۲۰)^۲+۰ \Rightarrow x=۲۰۰a$

۶ اکنون زمان طی x را در مسیر برگشت حساب می‌کنیم.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \xrightarrow[a_۲=-a\,,\,v_۰=-۲۰a]{x=-۲۰۰a} -۲۰۰a=\frac{۱}{۲}(-a)t^۲+(-۲۰a)t$$

$$۲۰۰=\frac{۱}{۲}t^۲+۲۰t \Rightarrow t^۲+۴۰t-۴۰۰=۰ \Rightarrow t=-۲۰\pm\sqrt{۴۰۰+۴۰۰}$$

$$\Rightarrow t=-۲۰\pm۲۰\sqrt{۲} \xrightarrow{\sqrt{۲}=۱/۴} \begin{cases} t=-۲۰-۲۸=-۴۸s & \text{غ ق ق} \\ t=-۲۰+۲۸=۸s \end{cases}$$

۷ بنابراین متحرک در مدت $۶۰+۸=۶۸s$ به مبدأ حرکتش برمی‌گردد.

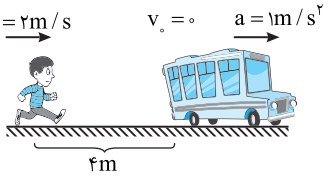
B ۴۶۲ ۱

خط فکری از زندگی روزمره می‌توانید درک کنید که اگر اتومبیل B به دنبال اتومبیل A در حرکت باشد تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل B از سرعت اتومبیل A بیشتر باشد، اتومبیل B به اتومبیل A نزدیک می‌شود، اگر $v_B=v_A$ باشد، فاصلهٔ دو اتومبیل تغییر نمی‌کند و اگر سرعت اتومبیل B از اتومبیل A کمتر شود، فاصلهٔ دو اتومبیل افزایش می‌یابد. در صورت مسئله بیان شده که متحرک A از حال سکون شروع به حرکت کرده و با شتاب ثابت بر سرعت خود می‌افزاید. اتومبیل B، سرعتش ثابت و برابر $۱۵m/s$ است. تا لحظه‌ای که سرعت اتومبیل A از $۱۵m/s$ کمتر است، B به آن نزدیک می‌شود و وقتی سرعت A از $۱۵m/s$ بیشتر شد، فاصلهٔ دو اتومبیل از هم زیاد می‌شود. بنابراین در مدت ۵s با شتاب a نباید سرعت A به $۱۵m/s$ رسیده باشد. از این رو می‌توان نوشت: $v=at<۱۵ \Rightarrow ۵a<۱۵ \Rightarrow a<۳m/s^۲$

توجه کنید اگر شتاب حرکت بزرگ‌تر از $۳m/s^۲$ باشد پس از ۵s تندی متحرک A بزرگ‌تر از $۱۵m/s$ بوده فاصلهٔ آن از متحرک B دائماً افزایش می‌یابد.

B ۴۶۳ ۳

خط فکری دقت کندی در لحظه‌ای که اتوبوس با شتاب $1m/s^2$ شروع به حرکت می‌کند، سرعت شخص $2m/s$ است و شخص به اتوبوس نزدیک می‌شود اما پس از $2s$، سرعت اتوبوس $v=at=1\times2=2m/s$ شده و از آن به بعد فاصلهٔ اتوبوس از شخص شروع به افزایش می‌کند. در نتیجه کمینه فاصلهٔ بین شخص و اتوبوس در $t=2s$ اتفاق می‌افتد، بنابراین شما جابه‌جایی شخص و اتوبوس را در مدت $2s$ پیدا کرده و مسئله را حل کنید.



راه‌حل اول:

۱ جابه‌جایی شخص در مدت $2s$ خواهد شد

$$\Delta x_{ش}=vt\Rightarrow\Delta x_{ش}=2\times2=4m$$

۲ جابه‌جایی اتوبوس در مدت $2s$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_{اتو}=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow\Delta x_{اتو}=\frac{1}{2}\times1\times(2)^2\Rightarrow\Delta x_{اتو}=2m$$

۳ فاصلهٔ ابتدایی اتوبوس و شخص 4 متر بوده است. شخص $4m$ جلو آمده و در این مدت اتوبوس نیز دو متر جلو می‌رود و فاصلهٔ شخص تا اتوبوس $4-2=2m$ می‌شود.

راه‌حل دوم: چون شخص با سرعت ثابت $2m/s$ در حال دویدن است، در نتیجه از معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت استفاده می‌کنیم. اگر مبدأ مختصات را مکان شخص، وقتی که در فاصلهٔ 4 متری از انتهای اتوبوس قرار دارد در نظر بگیریم، داریم:

$$x_{ش}=vt+x_{\circ}\xrightarrow[x_{\circ}=0]{v=2m/s}x_{ش}=2t$$

اتوبوس هم با شتاب ثابت حرکت خود را آغاز می‌کند، بنابراین:

$$x_{اتو}=\frac{1}{2}at^2+v_{\circ}t+x_{\circ}\xrightarrow[x_{\circ}=4m]{a=1m/s^2,\,v_{\circ}=0}x_{اتو}=\frac{1}{2}\times1\times t^2+0\times t+4$$

$$\Rightarrow x_{اتو}=\frac{t^2}{2}+4$$

برای به دست آوردن حداقل فاصلهٔ شخص از اتوبوس، باید از معادلهٔ تفاضل مکان اتوبوس و شخص بهره ببریم:

$$\Delta x=\frac{t^2}{2}-2t+4$$

با توجه به این‌که معادلهٔ به دست آمده تابع درجهٔ ۲ است مقدار کمینه تابع (یعنی رأس سهمی) خواهد شد:

$$t=-\frac{b}{2a}\Rightarrow t=-\left(\frac{-2}{2\times\frac{1}{2}}\right)\Rightarrow t=2s\ ,\ \Delta x_{min}=2-4+4=2m$$

B ۴۶۴ ۲

بردار مکان وقتی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ بگذرد، یعنی $x=0$ شود. البته باید در این لحظه بردار مکان تغییر علامت دهد. معادلهٔ حرکت را مساوی صفر $(x=0)$ قرار می‌دهیم.

$$x=0\Rightarrow t^2-6t+9=0\Rightarrow(t-3)^2=0\Rightarrow t=3s$$

مقدار $(t-3)^2$ همواره مثبت است یعنی مکان همواره مثبت است و با آنکه در $t=3s$ مکان صفر می‌شود اما بردار مکان تغییر علامت نمی‌دهد. متحرک در تمام مسیرش در قسمت مثبت محور در حرکت است و در لحظهٔ $t=3s$ به مبدأ رسیده از آن عبور نکرده و برمی‌گردد. متحرک تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن همواره مثبت است. پس، بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد.

C ۴۶۵ ۲

خط فکری موتورسوار با تندی ثابت $16m/s$ در حرکت است و حرکت آن یکنواخت است. خودرو دارای سرعت $25m/s$ است و با شتاب $4m/s^2$ از سرعت خود می‌کاهد و تا لحظه‌ای که سرعت آن به $16m/s$ برسد، در حال نزدیک شدن به موتورسوار است. یعنی کمترین فاصلهٔ بین موتورسوار و خودرو لحظه‌ای است که سرعت خودرو $16m/s$ شود.

۱ در مدت $0/5s$ جابه‌جایی خودرو و موتورسوار را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}\Delta x_{خودرو}=v_{خودرو}t\Rightarrow\Delta x_{خودرو}=24\times0/5=12m\\ \Delta x_{موتورسوار}=v_{موتورسوار}t\Rightarrow\Delta x=16\times0/5=8m\end{cases}\Rightarrow12-8=4m$$

۲ بنابراین در لحظه‌ای که خودرو ترمز می‌کند، فاصلهٔ آن از موتورسوار برابر است با:

$$50-4=46m$$

۳ مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت خودرو $16m/s$ شود را به‌دست می‌آوریم.

$$v=at+v_{\circ}\Rightarrow16=-4\times t+24\Rightarrow t=2s$$

۴ جابه‌جایی موتورسوار و خودرو را در مدت $2s$ حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_{موتورسوار}=v_{موتورسوار}t=16\times2\Rightarrow\Delta x_{موتورسوار}=32m$$

$$\Delta x_{خودرو}=\frac{v+v_{\circ}}{2}t\Rightarrow\frac{16+24}{2}\times2\Rightarrow\Delta x_{خودرو}=40m$$

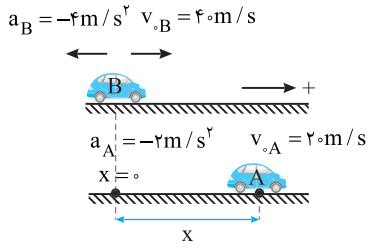
۵ یعنی در این دو ثانیه خودرو $40-32=8m$ به موتورسوار نزدیک می‌شود.

بنابراین کمینه فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

$$\Delta x_{min}=46-8=38m$$

B ۴۶۶ ۳

۱ با توجه به صورت مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم، مکان اولیهٔ متحرک B را مبدأ مکان و سمت راست را جهت مثبت اختیار می‌کنیم.



۲ معادلهٔ حرکت متحرک A را می‌نویسیم.

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{\circ_A}t+x_{\circ}\Rightarrow x_A=\frac{1}{2}\times(-2)t^2+20t+x$$

$$\Rightarrow x_A=-t^2+20t+x$$

۳ مکان متحرک A را در مدت $4s$ به‌دست می‌آوریم.

$$t=4s\Rightarrow x_A=-16+20\times4+x\Rightarrow x_A=64+x$$

۴ متحرک B به مدت $1s$ با همان سرعت $40m/s$ به حرکت خود ادامه می‌دهد سپس با شتاب $-4m/s^2$ ترمز می‌گیرد. بنابراین در مدت $4s$ متحرک B، $1s$ دارای حرکت یکنواخت و $3s$ دارای حرکت با شتاب ثابت است. مکان آن در $t=4s$ را حساب می‌کنیم.

$$x_B=vt_{\text{تاخیر}}+\left(\frac{1}{2}at'^2+v_{\circ}t'\right)\Rightarrow x_B=40\times1+\frac{-1}{2}\times4\times3^2+40\times3$$

$$\Rightarrow x_B=40-18+120\Rightarrow x_B=142m$$

۵ در $t=4s$ مکان دو متحرک یکی است بنابراین:

$$x_A=x_B\Rightarrow64+x=142\Rightarrow x=78m$$

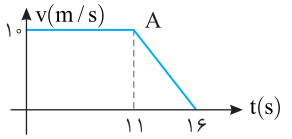
B ۳ ۴۶۷

خط فکری به دلیل اینکه دو متحرک از یک نقطه در مبدأ زمان عبور کرده‌اند، پس زمانی به هم می‌رسند که جابه‌جایی یکسانی داشته باشد، پس نمودار $v-t$ دو متحرک را رسم می‌کنیم و با توجه به سطح زیر نمودار می‌توان جابه‌جایی را به‌دست آورد:

۱ متحرک A در ابتدا تا لحظهٔ $t=۱۱s$ با تندی ثابت $۱۰m/s$ حرکت می‌کند و بعد از آن با شتاب $a=-۲m/s^۲$ از تندی خود کاسته تا متوقف شود:

$$v_۱=۱۰m/s\ ,\ v_۲=۰\ ,\ \Delta t=(t'-۱۱)\ ,\ a=-۲m/s^۲$$

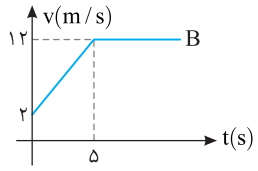
$$v_۲=a(t'-۱۱)+v_۱\Rightarrow ۰=-۲(t'-۱۱)+۱۰\Rightarrow t'-۱۱=۵\Rightarrow t'=۱۶s$$



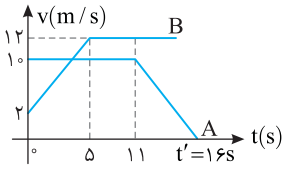
۲ متحرک B از تندی $۲m/s$ شروع به حرکت کرده و مدت $۵s$ به طور شتابدار حرکت می‌کند و سپس با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و با توجه به سؤال و جهت حرکت هر دو یکی است پس علامت تندی هر دو متحرک یکسان است.

$$v'_۲=?\ ,\ v'_۱=۲\ ,\ t=۵s\ ,\ a'=۲m/s^۲$$

$$v'_۲=a't+v'_۱\Rightarrow v'_۲=۲\times۵+۲\Rightarrow v'_۲=۱۲m/s$$



۳ نمودار $v-t$ دو متحرک به صورت زیر است:



۴ هر دو متحرک از یک نقطه (مبدأ مختصات) شروع به حرکت کرده‌اند، پس برای آنکه دو متحرک به هم برسند باید جابه‌جایی هر دو متحرک یکسان باشد. ابتدا جابه‌جایی دو متحرک تا لحظهٔ $t=۵s$ را از سطح زیر نمودار $v-t$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_A=S_A=۱۰\times۵=۵۰m\ ,\ \Delta x_B=S_B=\frac{۵\times(۲+۱۲)}{۲}=۳۵m$$

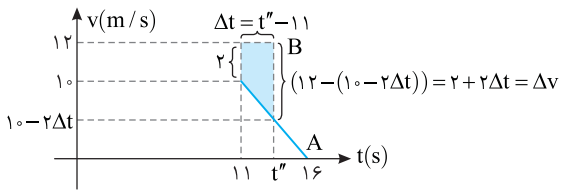
۵ تندی اولیهٔ متحرک A بیشتر از تندی اولیهٔ متحرک B است و در ابتدا A از متحرک B جلو زده و همانطور که در حساب کردن جابه‌جایی مشخص است متحرک A در $۵s$ اولیه بیشتر از متحرک B جابه‌جا شده است و این دو در این مدت به هم نمی‌رسند. حال جابه‌جایی در بازهٔ صفر تا $۱۱s$ را حساب می‌کنیم. $\Delta x_A=۱۱\times۱۰=۱۱۰m\ ,\ \Delta x_B=۳۵+(۱۲\times۶)=۱۰۷m$

۶ بنابراین تا لحظهٔ $t=۱۱s$ متحرک A به اندازهٔ $۱۱۰-۱۰۷=۳m$ جلوتر از متحرک B است و اگر در لحظهٔ t'' این دو متحرک به هم برسند باید جابه‌جایی متحرک B از $t=۱۱s$ تا t'' به اندازهٔ $۳m$ بیشتر از جابه‌جایی متحرک A در این بازه باشد و با توجه به نمودار، سرعت متحرک در لحظهٔ t'' را به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_B-\Delta x_A=۳m \xrightarrow[\text{جابه‌جایی برابر سطح رنگی ذوزنقه شکل زیر نمودار است}]{\text{با توجه به شکل این اختلاف}}$$

$$\frac{(\Delta t)\times((۲\Delta t+۲)+۲)}{۲}=۳\Rightarrow(\Delta t)(۲\Delta t+۴)=۶$$

$$\Delta t(\Delta t+۲)=۳\Rightarrow\Delta t=۱s\ ,\ t''=۱۱+۱=۱۲s$$



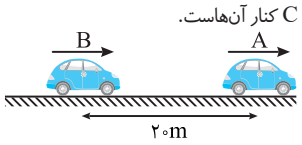
۷ بنابراین دو متحرک در لحظهٔ $t''=۱۲$ به یکدیگر می‌رسند و اختلاف سرعت متحرک یعنی Δv برابر است با:

$$\Delta v=۲+۲\times۱=۴m/s$$

B ۳ ۴۶۸

خط فکری سه متحرک همزمان شروع به حرکت کرده‌اند و در یک لحظه از کنار هم می‌گذرند. بنابراین شما باید ابتدا زمان رسیدن متحرک B به متحرک A را به‌دست بیاورید. سپس معادلهٔ متحرک C و متحرک A را نوشته برابر قرار دهید.

۱ متحرک B با سرعت ثابت حرکت می‌کند و در هر ثانیه ۲ متر به متحرک A نزدیک می‌شود، بنابراین بعد از $۱۰s$ فاصلهٔ $۲۰m$ بین A و B را جبران خواهد کرد و در این لحظه متحرک C کنار آن‌هاست.

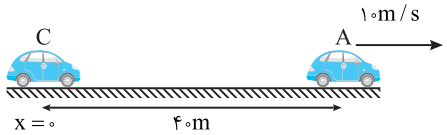


۲ معادلهٔ حرکت A و C را نوشته برابر قرار می‌دهیم.

$$x_C=\frac{۱}{۲}at^۲\xrightarrow{t=۱۰s}x_{C'}=۵۰a$$

$$x_A=v_At+x_۰\Rightarrow x_A=۱۰t+۴۰\xrightarrow{t=۱۰s}x_A=۱۴۰m$$

در لحظهٔ $t=۱۰s$: $x_C=x_A\Rightarrow ۵۰a=۱۴۰\Rightarrow a=۲/۸m/s^۲$



C ۲ ۴۶۹

نکته می‌توان ثابت کرد که هرگاه دو متحرک خلاف جهت هم با سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$ حرکت کنند چنانچه یکی از آن‌ها را ساکن فرض کنیم، سرعت دیگری نسبت به آن از جمع اندازهٔ سرعت‌ها به‌دست می‌آید.

$$v=v_۱+v_۲$$

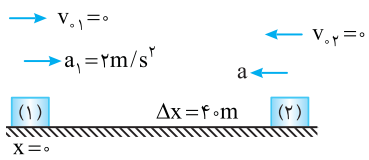
نکته می‌توان ثابت کرد که هرگاه شتاب دو متحرک در خلاف جهت هم باشد می‌توان یکی از آن‌ها را ساکن فرض کرده و شتاب دیگری را نسبت به آن از جمع اندازهٔ شتاب‌ها به‌دست آورد.

با توجه به شکل می‌توان فرض کرد یکی از آن‌ها ساکن است و دیگری پس از طی مسیر $۴۰m$ به اولی می‌رسد.

چون شتاب‌ها در خلاف جهت هم هستند: $a_{\text{نسبی}}=a_۱+a_۲=۲+a$

حال می‌توان روابط نسبی را به کار برد. $v^۲_{\text{نسبی}}-v^۲_{۰_{\text{نسبی}}}=۲a_{\text{نسبی}}\Delta x$

$$\Rightarrow ۲۰^۲-۰=۲(۲+a)\times۴۰\Rightarrow۴۰۰=۸۰(۲+a)\Rightarrow a=۳m/s^۲$$



پنجره ۳ روبه‌روی ۴

B ۴ ۴۶۹

۱ در ابتدا بردار سرعت و بردار شتاب مطلق شکل در خلاف جهت هم بوده و حرکت کندشونده است. اما دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد. حالت اول اینکه متحرک پس از مدتی می‌ایستد و دیگر به حرکت خود ادامه نمی‌دهد. مانند توپی که روی سطح زمین پرتاب شده و بعد از مدتی می‌ایستد و گزینهٔ (۱) درست است.

حالت دوم اینکه متحرک پس از توقف در خلاف جهت شروع به حرکت کند، در این حالت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. مانند توپی که رو به بالا پرتاب می‌شود در ابتدا حرکتش کندشونده است، متوقف می‌شود و برمی‌گردد. بنابراین گزینهٔ (۳) نیز می‌تواند درست باشد. اما گزینهٔ (۲) قطعاً نادرست است.

B ۴۶۹ ۳

۲ سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 و t_2 برابر است با:

$$v=\frac{۳}{۲}t^۲ \Rightarrow v_۱=\frac{۳}{۲}t_۱^۲ , v_۲=\frac{۳}{۲}t_۲^۲$$

فرمول شتاب متوسط را نوشته مقدار v_1 و v_2 را در آن قرار می‌دهیم.

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}=\frac{\frac{۳}{۲}(t_۲^۲-t_۱^۲)}{t_۲-t_۱} \Rightarrow a_{av}=\frac{۳}{۲}\frac{(t_۲-t_۱)(t_۲+t_۱)}{(t_۲-t_۱)}=\frac{۳}{۲}(t_۲+t_۱)$$

نمای ۱۶

B ۴۶۹ ۳

نکته ۳ در هر نقطه از مسیر بردار سرعت بر مسیر حرکت مماس است.

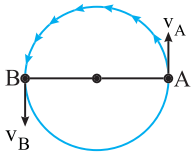
۱ محیط دایره ۱۲m است. شعاع آن را حساب می‌کنیم.

$$۲\pi R=۱۲ \xrightarrow{\pi=۳} R=۲m$$

۲ متحرک در مدت ۶s، $\frac{۳}{۴}$ محیط دایره را طی می‌کند. با یک تناسب ساده، مسافتی که در ۴s طی می‌کند را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{matrix}۶s & \frac{۳}{۴}\times(\text{محیط}) \\ ۴s & \ell\end{matrix} \Rightarrow \ell=\frac{۱}{۲}\times \text{محیط}$$

۳ بنابراین اگر متحرک در نقطهٔ A باشد پس از ۴s نصف دایره را دور می‌زند و به نقطهٔ B می‌رود و جابه‌جایی آن برابر قطر AB است.



$$\Delta x=AB=۲R \Rightarrow \Delta x=۲\times ۲=۴m$$

۴ سرعت متوسط خواهد شد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۴}{۴}=۱ m/s$$

۵ تندی حرکت را به‌دست می‌آوریم. در هر ۶s، متحرک $\frac{۳}{۴}$ محیط را طی می‌کند.

بنابراین:

$$v=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow v=\frac{\frac{۳}{۴}\times ۱۲}{۶} \Rightarrow v=۱/۵m/s$$

۶ اگر سرعت در نقطهٔ A را $+۱/۵m/s$ در نظر بگیریم، سرعت در نقطهٔ B، $-۱/۵m/s$ است و اندازهٔ تغییر سرعت خواهد شد:

$$|\Delta v|=|-۱/۵-۱/۵|=۳m/s$$

۷ شتاب متوسط حرکت را حساب می‌کنیم.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵m/s^۲$$

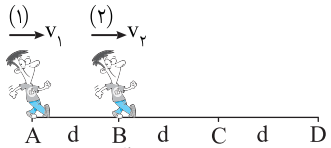
نمای ۱۵

B ۴۶۹ ۲

خط فکری ۴ دو نفر در نقطهٔ C به هم می‌رسند. نقطهٔ A را مبدأ و سمت راست را جهت مثبت بگیرید. معادله‌های حرکت را بنویسید و در نقطهٔ C با هم برابر قرار دهید تا رابطه‌ای بین v_1 و v_2 به‌دست بیاورید.

۱ شخص (۲)، ۲۰s پس از شخص (۱) راه افتاده است. بنابراین اگر شخص (۱) مدت t در حرکت باشد، شخص (۲) مدت $t-۲۰$ در حرکت خواهد بود. با دانستن این مطلب معادلهٔ حرکت هر شخص خواهد شد.

$$x=vt+x_۰ \Rightarrow \begin{cases} (۱)\ \text{شخص}\ x_۱=v_۱t+۰ & (I) \\ (۲)\ \text{شخص}\ x_۲=v_۲(t-۲۰)+d & (II) \end{cases}$$



۲ وقتی دو متحرک به C می‌رسند مکان‌های آن‌ها با هم برابر می‌شود. بنابراین:

$$x_۱=v_۱t \Rightarrow ۲d=v_۱t \Rightarrow t=\frac{۲d}{v_۱}$$

$$x_۲=v_۲(t-۲۰)+d \Rightarrow ۲d=v_۲(t-۲۰)+d \Rightarrow d=v_۲(\frac{۲d}{v_۱}-۲۰) \Rightarrow \frac{d}{v_۲}=\frac{۲d}{v_۱}-۲۰$$

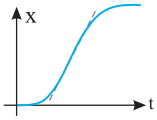
شخص (۱) فاصلهٔ C تا D را در $t_1=\frac{d}{v_1}$ و شخص (۲) فاصله B تا O را در $t_2=\frac{d}{v_2}$ طی می‌کند، بنابراین اختلاف زمانی رسیدن دو شخص به D خواهد شد:

$$\Delta t=|\frac{d}{v_۲}-\frac{d}{v_۱}|=\frac{۲d}{v_۱}-۲۰-\frac{d}{v_۱}=\frac{d}{v_۱}-۲۰$$

نمای ۱۱

B ۴۶۹ ۱

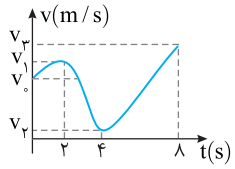
نکته ۵ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر سرعت لحظه‌ای است و هرگاه متحرک بدون سرعت اولیه باشد، باید نمودار مکان - زمان در مبدأ زمان بر محور t مماس باشد. متحرک از حال سکون حرکت کرده بنابراین نمودار مکان زمان در $t=۰$ باید بر محور زمان مماس باشد، سپس سرعت ثابت مانده و باید نمودار مکان زمان خط راست مایلی باشد که بر نمودار سهمی قسمت اول مماس باشد هم‌چنین بر نمودار سهمی قسمت کندشوندهٔ حرکت نیز باید مماس باشد تا سرعت در این لحظات با هم برابر شود، بنابراین گزینهٔ (۱) درست و گزینهٔ (۲) نادرست است.



به شکل روبه‌رو دقت کنید، شیب خط راست و شیب خط مماس بر دو منحنی یکسان است. نمای ۲۱

B ۴۶۹ ۲

خط فکری ۶ در حل این مسئله باید به فاصلهٔ سرعت‌ها کاملاً دقت کنید. یعنی باید بدانید که با توجه به نمودار $|v_۲-v_۱|>|v_۱-v_۰|$ است بازهٔ زمانی‌ها



یکسان بوده پس با توجه به اینکه $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است پس شتاب متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s بزرگ‌تر از صفر تا ۲s است. در بازهٔ ۴s تا ۸s بازهٔ زمانی دو برابر بازهٔ زمانی ۲s تا ۴s است. تغییرات سرعت در بازهٔ ۴s تا ۸s بیشتر از ۲s تا ۴s بوده اما دو برابر این بازه نیست و تغییرات سرعت در بازهٔ ۴s تا ۸s کمتر از دو برابر بازهٔ ۲s تا ۴s است و شتاب متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s بیشتر از ۴s تا ۸s است. بازهٔ ۴s تا ۸s هم بازهٔ زمانی بیشتری از ۲s تا ۴s داشته و هم تغییرات سرعت آن کوچک‌تر است. پس شتاب متوسط در بازهٔ ۲s تا ۴s از شتاب متوسط در بازهٔ ۲s تا ۸s بیشتر است. نمای ۱۸

B ۴۶۹ ۳

خط فکری ۷ زمان واکنش راننده ۰/۵s است. یعنی از لحظه‌ای که راننده مانع را می‌بیند تا لحظه‌ای که پدال ترمز را می‌فشرد ۰/۵s طول می‌کشد و در این مدت خودرو با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد شما باید جابه‌جایی در این ۰/۵s را حساب کنید. سپس، جابه‌جایی خودرو را در قسمت کندشونده به‌دست بیاورید اگر جمع این دو جابه‌جایی از فاصله خودرو تا مانع کمتر بود برخوردی صورت نمی‌گیرد اما اگر جمع جابه‌جایی تا توقف از فاصلهٔ خودرو تا مانع بیشتر باشد، خودرو قبل از توقف به مانع برخورد می‌کند. حال به سراغ حل مسئله بروید.

در مدت زمان واکنش راننده، خودرو با تندی ثابت $v=۷۲km/h=۲۰m/s$ به حرکت ادامه می‌دهد و مسافت Δx_1 را طی می‌کند. $\Delta x_۱=vt=۲۰\times ۰/۵=۱۰m$

پس از ترمز، خودرو با تندی اولیهٔ $۲۰m/s$ و شتاب $-۴m/s^۲$ با حرکت کندشونده می‌ایستد.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-۴۰۰=۲(-۴)\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲=۵۰m$$

بنابراین اگر مانعی در کار نبود، خودرو پس از $۱۰+۵۰=۶۰m$ متوقف می‌شد اما فاصلهٔ خودرو از مانع $۵۲m$ است یعنی خودرو پس از $۵۲-۱۰=۴۲m$ جابه‌جایی در قسمت کندشونده حرکت به مانع برخورد می‌کند بنابراین سرعت برخورد آن به مانع خواهد شد.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow v^۲-۴۰۰=۲(-۴)\times ۴۲ \Rightarrow v^۲=۶۴ \Rightarrow v=۸m/s$$

یعنی خودرو با تندی $۸m/s$ به مانع برخورد می‌کند. نمای ۲۷

B ۴۶۹ ۳

۸

خط فکری دو متحرک در یک لحظه از یک مبدأ به سوی یک مقصد به راه افتاده‌اند. یعنی جابه‌جایی دو متحرک از ابتدا تا انتهای مسیر یکسان است $(\Delta x_1 = \Delta x_2)$ اما متحرک دوم که دارای شتاب بزرگ‌تری است ۴s زودتر به مقصد می‌رسد. یعنی اگر زمان متحرک اول t_1 باشد زمان متحرک دوم $t_2 = t_1 - 4$ است. بنابراین شما معادلهٔ حرکت دو متحرک را نسبت به مبدأ حرکت بنویسید و آن‌ها را با هم برابر قرار دهید.

معادلهٔ حرکت دو متحرک خواهد شد:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow[v_0 = 0]{x_0 = 0} \begin{cases} \xrightarrow{\text{متحرک اول}} x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + 0 \\ \xrightarrow{\text{متحرک دوم}} x_2 = \frac{1}{2}a_2 (t_1 - 4)^2 + 0 \end{cases}$$

دو معادله را برابر قرار می‌دهیم.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}a_2 (t_1 - 4)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}a_1\right)(t_1 - 4)^2$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}(t_1 - 4) \Rightarrow 2t_1 = 3t_1 - 12 \Rightarrow t_1 = 12s$$

بنابراین زمان حرکت متحرکی که زودتر به مقصد می‌رسد خواهد شد.

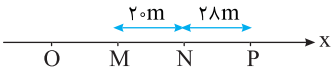
$$t_2 = t_1 - 4 \Rightarrow t_2 = 12 - 4 = 8s$$

نمای ۳۴

B ۴۶۹ ۲

۹

به روش حل دقت کنید. شتاب ثابت است. بنابراین اگر شتاب را a در نظر بگیریم و سرعت در نقطهٔ N را v فرض کنیم با توجه به تعریف شتاب که برابر تغییر سرعت در هر ثانیه است، سرعت ۴s قبل از N خواهد شد: $(v_M = v - 4a)$ و سرعت ۴s بعد از N خواهد شد. $(v_P = v + 4a)$



۱ اکنون به سراغ فرمول مستقل از شتاب می‌رویم:

$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2}t \Rightarrow 20 + 28 = \frac{v_P + v_M}{2} \times 8 \Rightarrow 48 = (v - 4a + v + 4a) \times 4$$

$$\Rightarrow v = 6m/s$$

۲ مجدداً فرمول مستقل از شتاب را برای جابه‌جایی MN می‌نویسیم.

$$MN = \frac{v_M + v_N}{2}t_{MN} \Rightarrow 20 = \frac{6 - 4a + 6}{2} \times 4 \Rightarrow 10 = 12 - 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}m/s^2$$

۳ سرعت در مکان M خواهد شد: $v_M = v - 4a = 6 - 4 \times \frac{1}{2} = 4m/s$

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان فاصلهٔ OM را حساب می‌کنیم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_M^2 - 0 = 2a(OM) \Rightarrow 4^2 = 2 \times \frac{1}{2}OM \Rightarrow OM = 16m$$

مبانبر برای به‌دست آوردن شتاب می‌توانستید از نکتهٔ زیر استفاده کنید:

نکته در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست در بازه‌های زمانی یکسان t جابه‌جایی‌ها دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت at^2 تشکیل می‌دهند.

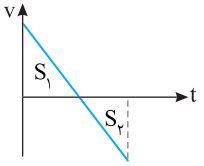
$$d_2 - d_1 = at^2 \xrightarrow[t = 4s]{d_1 = 20m,\ d_2 = 28m} 8 = a(4)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}m/s^2$$

نمای ۲۸

B ۴۶۹ ۳

۱۰

نکته در نمودار v−t سطح زیر نمودار مسافت و جابه‌جایی متحرک را مشخص می‌کند:

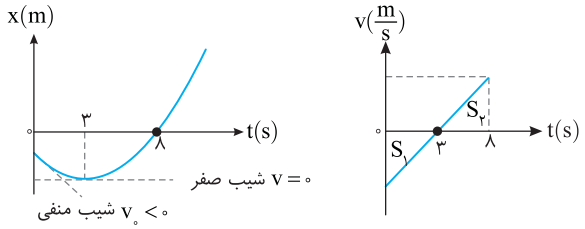


$$\Delta x = S_1 + S_2 \ ;\ S_1 > 0, S_2 < 0$$

$$\ell = S_1 + |S_2|$$

خط فکری برای به‌دست آوردن مسافت و تندی متوسط بهتر است نمودار v−t رسم شود. در گام اول از روی نمودار x−t باید نمودار v−t رسم شود.

با توجه به اینکه شیب خط مماس بر منحنی x−t نشان‌دهندهٔ سرعت لحظه‌ای است، سرعت اولیهٔ متحرک منفی و سرعت در لحظهٔ t=۳s برابر صفر است. از طرفی چون دهانه منحنی x−t رو به بالاست، شتاب حرکت مثبت است و شیب نمودار v−t مثبت خواهد بود پس:



یادآوری ریاضی نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با مجذور نسبت تشابه آن‌ها است.

با توجه به نمودار v−t و با استفاده از تشابه مثلث‌ها نسبت مساحت‌های S_1 و S_2 محاسبه می‌شود.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(8-3)^2}{3^2} = \frac{25}{9} \Rightarrow S_2 = \frac{25}{9}S_1$$

با توجه به نکته ابتدایی سؤال از روی S_1 و S_2 جابه‌جایی و مسافت مشخص می‌شود. دقت کنید که S_1 زیر محور افقی بوده و در جابه‌جایی علامت منفی باید لحاظ شود.

$$\left.\begin{array}{l} \text{مسافت } \ell = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{25}{9}S_1 = \frac{34}{9}S_1 \\ \text{جابه‌جایی } \Delta x = S_2 - S_1 = \frac{25}{9}S_1 - S_1 = \frac{16}{9}S_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\ell} = \frac{\frac{16}{9}S_1}{\frac{34}{9}S_1} = \frac{8}{17}$$

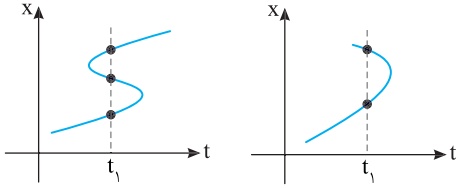
نمای ۲۹

پنجره ۵

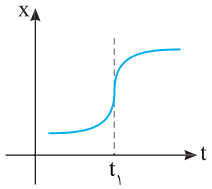
B ۴۷۰ ۳

خط فکری دقت کنید که نمودار مکان - زمان به ما در هر لحظه مکان متحرک را نشان می‌دهد و یک متحرک در یک لحظه نمی‌تواند در دو مکان مختلف باشد از این‌رو یک خط عمود بر محور زمان (t) رسم کنید اگر نمودار را در دو یا چند نقطه قطع کند این نمودار نمی‌تواند نمودار مکان - زمان باشد. از طرفی در هیچ نقطه‌ای خط مماس بر نمودار نباید بر محور زمان عمود شود زیرا در این صورت شیب خط مماس که برابر سرعت لحظه‌ای است بی‌نهایت می‌شود حال با توجه به این نکات گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

متحرک نمی‌تواند در یک لحظه در دو مکان باشد، پس گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.



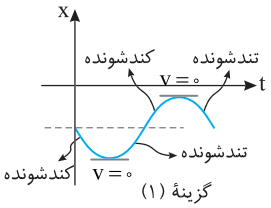
شیب خط مماس بر نمودار x−t برابر سرعت متحرک است، در لحظهٔ نشان داده شده خط مماس در نمودار گزینهٔ (۲) خط قائم است که شیب آن ∞ می‌باشد، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.



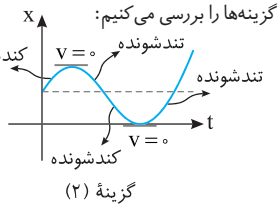
B ۴ ۴۷۱

نکته هرگاه متحرک تغییر جهت بدهد، سرعت آن صفر می‌شود و برای ادامهٔ حرکت باید نوع حرکت آن تغییر کند. یعنی قبل از صفر شدن سرعت، باید حرکت کندشونده و بعد از آن تندشونده باشد.

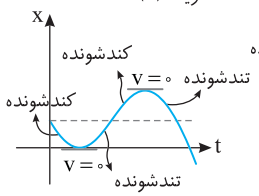
گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



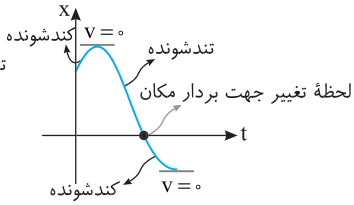
گزینهٔ (۱)



گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)

در گزینهٔ (۱) مطابق شکل، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده و نمودار محور - زمان را قطع نمی‌کند یعنی بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۱) نادرست است.

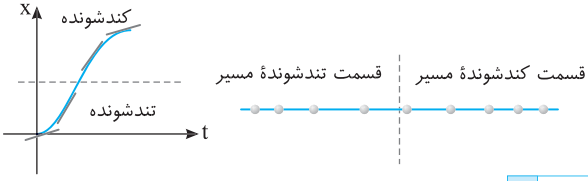
در گزینهٔ (۲) متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده و یک بار مکان آن صفر می‌شود $(x=۰)$ اما بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۲) نادرست است.

در گزینهٔ (۳) نیز متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد و نوع حرکت ۳ بار تغییر کرده اما از مبدأ مکان $(x=۰)$ نمی‌گذرد و بردار مکان تغییر جهت نمی‌دهد و گزینهٔ (۳) نادرست است.

در گزینهٔ (۴) نوع حرکت دو بار تغییر کرده و نمودار یک بار محور زمان را قطع می‌کند، یعنی بردار مکان یک بار تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۴) درست است.

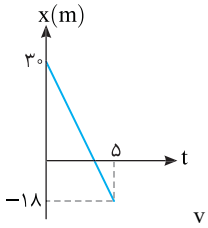
B ۳ ۴۷۲

با توجه به نمودار $x-t$ ابتدا حرکت تندشونده و سپس کندشونده است، بنابراین در قسمت اول حرکت در فاصله‌های زمانی یکسان متحرک مسافت بیشتری طی می‌کند و در قسمت دوم حرکت در فاصله‌های زمانی یکسان متحرک مسافت کمتری را طی می‌کند.



A ۴ ۴۷۳

نمودار مکان - زمان خط راست و متحرک دارای سرعت ثابت است. از این‌رو سرعت متحرک برابر شیب نمودار است.



۱ به کمک داده‌های روی نمودار سرعت را به‌دست می‌آوریم.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{-۱۸-۳۰}{۵-۰}=\frac{-۴۸}{۵}\Rightarrow v=-۹/۶m/s$$

۲ معادله حرکت خواهد شد: $x=vt+x_{۰}\Rightarrow x=-۹/۶t+۳۰$

۳ در $t=۳s$ مکان را حساب می‌کنیم:

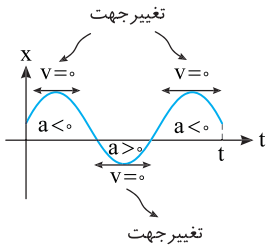
$$x=-۹/۶\times۳+۳۰=-۲۸/۸+۳۰\Rightarrow x=+۱/۲m$$

۴ جابه‌جایی در مدت ۳s خواهد شد: $\Delta x=v\Delta t\Rightarrow \Delta x=-۹/۶\times۳=-۲۸/۸m$

A ۴ ۴۷۴

یادآوری ۱ در نقاط کمینه و بیشینه نمودار مکان - زمان، سرعت صفر بوده و متحرک تغییر جهت می‌دهد (به شرط تغییر علامت شیب خط مماس بر نمودار)

۲ هرگاه دهانهٔ (تقعر) نمودار مکان - زمان رو به بالا باشد، شتاب مثبت و اگر رو به پایین باشد شتاب منفی است.



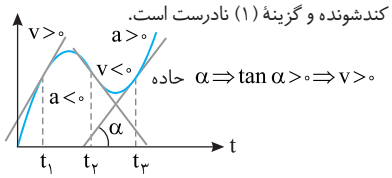
نمودار دارای سه نقطه بیشینه و کمینه است و سه بار متحرک تغییر جهت می‌دهد و گزینهٔ (۱) درست و گزینهٔ (۳) نادرست است.

ابتدا شتاب منفی سپس شتاب مثبت و سرانجام شتاب منفی شده است.

بنابراین شتاب دو بار تغییر علامت داده است و گزینهٔ (۲) درست است.

A ۳ ۴۷۵

در لحظهٔ $t_۱$، شیب خط مماس بر نمودار مثبت است، پس سرعت مثبت است. اما جهت تقعر نمودار رو به پایین است، پس شتاب منفی است و در لحظهٔ $t_۱$، $av<۰$ است و حرکت کندشونده و گزینهٔ (۱) نادرست است.



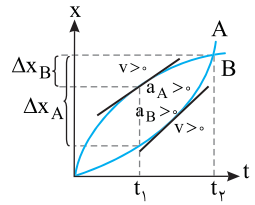
حاده $\alpha\Rightarrow\tan\alpha>۰\Rightarrow v>۰$

در لحظهٔ $t_۲$، سرعت منفی است زیرا شیب خط مماس بر نمودار منفی است (خط مماس در لحظهٔ $t_۲$ با محور زمان زاویهٔ منفرجه می‌سازد) اما در مورد علامت شتاب نمی‌توان اظهارنظر کرد یعنی جایی که جهت تقعر منحنی و در نتیجه علامت شتاب عوض می‌شود، مشخص نیست پس نوع حرکت در لحظهٔ $t_۲$ مشخص نیست و گزینهٔ (۲) نادرست است. در لحظهٔ $t_۳$ جهت تقعر رو به بالا است، پس شتاب مثبت و شیب خط مماس بر نمودار نیز مثبت است و حرکت تندشونده است و گزینهٔ (۳) درست است.

در لحظهٔ $t_۳$ حرکت تندشونده $(av>۰)\Rightarrow a_۳>۰\ ,\ v_۳>۰$

B ۳ ۴۷۶

برای بررسی و مقایسه سرعت متوسط دو متحرک در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ باید جابه‌جایی دو متحرک را بررسی کنید. در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ جابه‌جایی A از B بیشتر بوده و سرعت متوسط A از سرعت متوسط B بزرگ‌تر است و گزینهٔ (۱) و (۴) نادرست است.

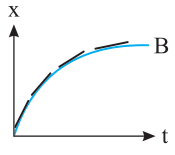


برای بررسی نوع حرکت دو راه وجود دارد.

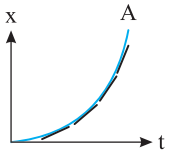
۱ علامت شتاب و سرعت را در بازهٔ زمانی داده شده مشخص کنید. اگر هم‌علامت باشند حرکت تندشونده و اگر مختلف‌العلامت باشند حرکت کندشونده است.

جهت تقعر نمودار A رو به بالا بوده پس شتاب آن مثبت است و اگر در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ بر منحنی A مماس رسم شود، شیب خط مماس مثبت بوده در نتیجه سرعت نیز مثبت است، بنابراین حرکت تندشونده $(av>۰)$ است. اما جهت تقعر نمودار B رو به پایین بوده پس شتاب آن منفی است و شیب خط مماس بر نمودار B در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ مثبت بوده درنتیجه سرعت مثبت است، بنابراین حرکت B کندشونده $(av<۰)$ است و گزینهٔ (۲) نادرست و گزینهٔ (۳) درست است.

۲ روش دوم این است که تعدادی خط مماس بر نمودار رسم کنید اگر خط مماس به سمت افقی شدن برود حرکت کندشونده و اگر به سمت قائم شدن برود حرکت تندشونده است.



حرکت B کندشونده است



حرکت A تندشونده است

جامع فیزیک پایه تجربی (جلد ۱ و ۲)



مؤلفان: رضا خالو، امیرعلی میری

- درس‌نامهٔ کاربردی بر اساس مفاهیم کتاب درسی
- تقسیم هر فصل به ۵ پنجره و هر پنجره به چندین نما
- بیش از ۲۵۰۰ تست با چینش آموزشی (ساده به سخت)
- ارائهٔ تست‌های چالشی در پنجرهٔ دو جداره
- ۴ پنجرهٔ روبه‌رو و ۱ پنجرهٔ تودرتو بدون طبقه‌بندی در هر فصل برای عمق بخشیدن به یادگیری
- مشخص کردن تست‌های مهم برای جمع‌بندی سریع
- تست‌های مشابه با عنوان بازی با سؤال در برخی پاسخ‌ها
- پاسخ‌های تشریحی با ارائهٔ خط فکری برای حل مسائل
- راه‌حل‌های کوتاه و خلاقانه با عنوان میانبر در پاسخ‌ها

