

به نام خدای مهربان

طراحی شده  
ویژه امتحان  
نهایی ۱۴۰۳

بانک سؤالات امتحانی

پایه دهم

مجموعه کتاب‌های  
پرسوال

ریاضی و آمار

با خیال راحت (۲۰) شو!

فاطمه ایلخانی

ناظر محتوایی: امیر زراندوز

• برای دریافت آموزش  
محتوای تکمیلی  
این کد رو اسکن کن.



هومان

مهروماه

# فهرست

## فصل سوم: کار با داده‌های آماری



۷۷

### درس ۱: گردآوری داده‌ها

درسنامه	۷۸
سؤالات امتحانی	۸۳
پاسخنامه	۱۷۸

### درس ۲: معیارهای گرایش به مرکز

درسنامه	۸۸
سؤالات امتحانی	۹۱
پاسخنامه	۱۸۰

### درس ۳: معیارهای پراکنندگی

درسنامه	۹۵
سؤالات امتحانی	۱۰۰
پاسخنامه	۱۸۵

## فصل چهارم: نمایش داده‌ها



۱۰۵

### درس ۱: نمودارهای یک متغیره

درسنامه	۱۰۶
سؤالات امتحانی	۱۱۱
پاسخنامه	۱۹۱

### درس ۲: نمودارهای چند متغیره

درسنامه	۱۱۸
سؤالات امتحانی	۱۲۲
پاسخنامه	۱۹۴

## فصل اول:

### معادله درجه دوم



۵

### درس ۱: معادله و مسائل توصیفی

درسنامه	۹
سؤالات امتحانی	۱۱
پاسخنامه	۱۴۴

### درس ۲: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درسنامه	۱۳
سؤالات امتحانی	۲۴
پاسخنامه	۱۴۶

### درس ۳: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

درسنامه	۲۹
سؤالات امتحانی	۳۲
پاسخنامه	۱۵۳

## فصل دوم:

### تابع



۳۵

### درس ۱: مفهوم تابع

درسنامه	۳۶
سؤالات امتحانی	۴۰
پاسخنامه	۱۵۸

### درس ۲: ضابطه جبری تابع

درسنامه	۴۵
سؤالات امتحانی	۵۲
پاسخنامه	۱۶۱

### درس ۳: نمودار تابع خطی

درسنامه	۵۷
سؤالات امتحانی	۶۲
پاسخنامه	۱۶۵

### درس ۴: نمودار تابع درجه ۲

درسنامه	۶۶
سؤالات امتحانی	۷۱
پاسخنامه	۱۷۱

۱۲۹

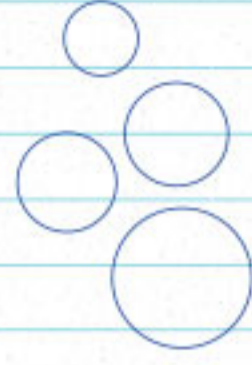
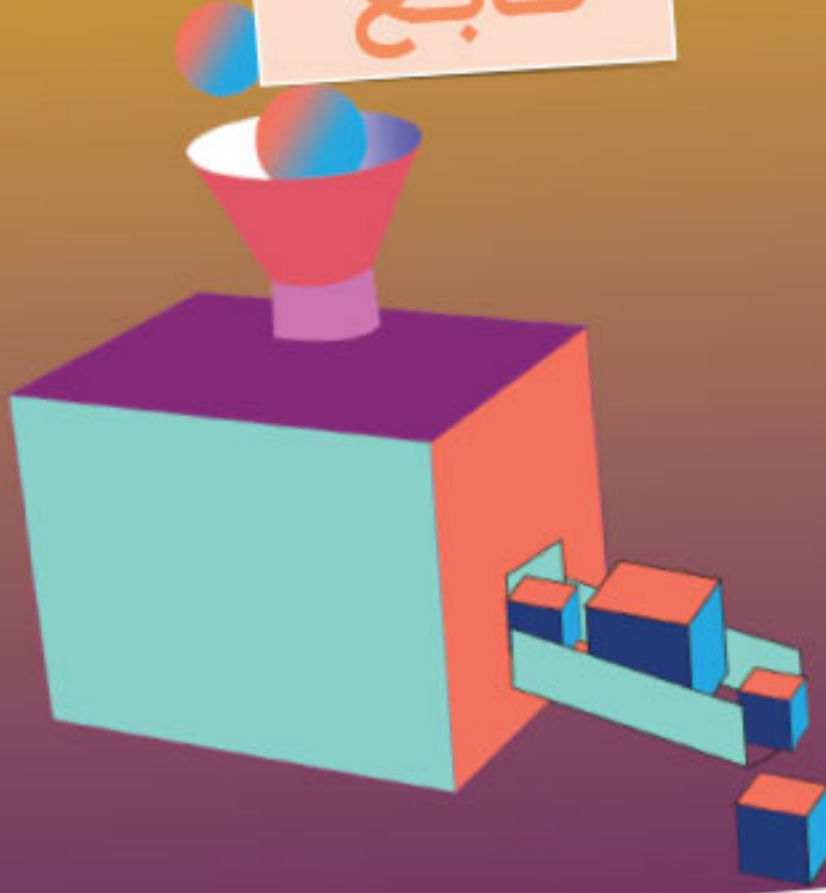
## آزمون‌ها



آزمون‌های نوبت اول	۱۳۰
آزمون‌های نوبت دوم	۱۳۴
پاسخ	۲۹۸

فصل دوم

تابع

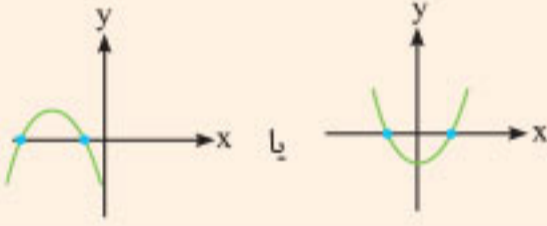
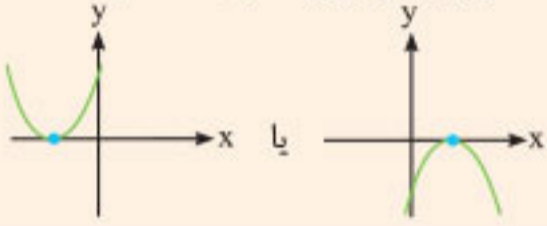
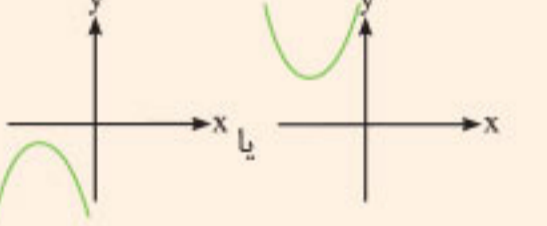


# درس چهارم

## نمودار تابع درجه ۲ (سهمی)

### تابع درجه دوم (سهمی)

ظاهر تابع درجه دوم خیلی شبیه معادله درجه دومه: یعنی به شکل  $y = ax^2 + bx + c$  هست (نباید صفر باشه) ویژگی‌های سهمی به صورت جدول زیره:

خواص	اگر $a < 0$ باشه	اگر $a > 0$ باشه
خواص	رأس سهمی محور تقارن	محور تقارن رأس سهمی S
غیرمشترک	۱. جهت سهمی رو به پایین است. ۲. سهمی ماکزیمم داره (رأسش، بیشترین عرض رو داره). ۳. رأس سهمی از همه نقاط بالاتره.	۱. جهت سهمی رو به بالاست. ۲. سهمی مینیمم داره (رأسش، کمترین عرض رو داره). ۳. رأس سهمی از همه نقاط پایین‌تره.
مشترک	۴. طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{2a}$ است. معادله محور تقارن هم $x = \frac{-b}{2a}$ است.	
	۵. عرض رأس سهمی $y = \frac{-\Delta}{4a}$ است. البته راه دیگه پیدا کردن عرض رأس، اینه که $x = \frac{-b}{2a}$ رو در ضابطه تابع قرار بدیم.	
	۶. اگر $\Delta > 0$ باشه، سهمی محور Xها رو در دو نقطه قطع می‌کنه.	۷. اگر $\Delta = 0$ باشه، سهمی محور Xها رو در یک نقطه قطع می‌کنه که اصطلاحاً می‌گیم سهمی بر محور Xها مماس است.
مشترک	 یا	 یا
	۸. اگر $\Delta < 0$ باشه، سهمی محور Xها رو قطع نمی‌کنه.	 یا

**مثال:** مختصات رأس و معادله محور تقارن سهمی‌های زیر را به دست آورید و نمودار آن‌ها را رسم کنید و بگویید هر سهمی از کدام نواحی محورهای مختصات عبور می‌کند؟

**الف**  $y = x^2 - 2x + 4$

**ب**  $y = -2x^2 - 8x$

**حل:** ابتدا از فرمول  $x = \frac{-b}{2a}$  طول رأس رو که معادله محور تقارن هم هست به دست میاریم:

طول رأس (معادله محور تقارن)  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$

حالا برای یافتن عرض رأس، دو راه وجود داره یا می‌تونیم عدد ۱ رو که به دست آوردیم رو در تابع قرار بدیم یا اینکه از فرمول  $y = \frac{-\Delta}{4a}$  استفاده کنیم. ما هر دو راه رو انجام می‌دیم:

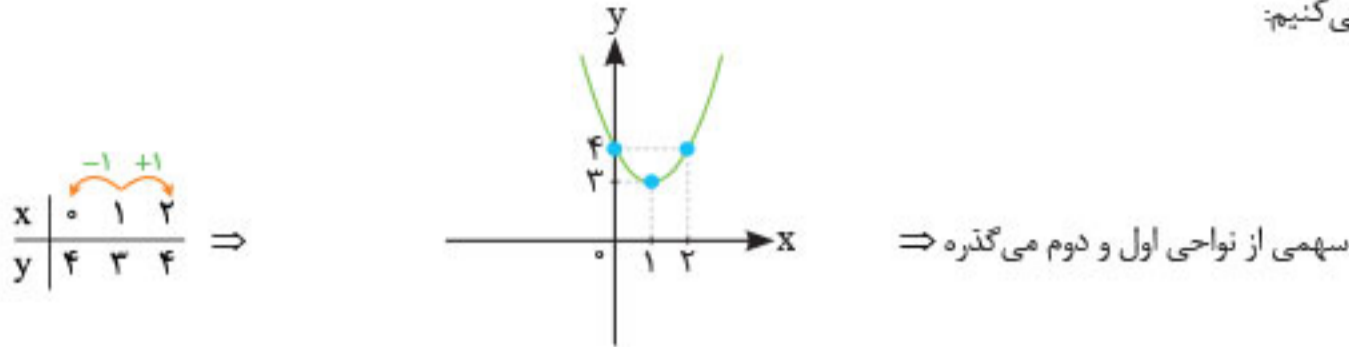
• روش اول:

$y = x^2 - 2x + 4 \xrightarrow{x=1} y = 1^2 - 2(1) + 4 = 3$

• روش دوم:

$y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-((-2)^2 - 4(1)(4))}{4(1)} = \frac{-(-12)}{4} = 3$

پس مختصات رأس سهمی  $S(1, 3)$  است، ضمناً سهمی مینیمم داره چون ضریب  $x^2$  مثبت، پس جهت سهمی رو به بالاست. حالا برای رسم نمودار، از دو نقطه کمکی در دو طرف  $S$  استفاده می‌کنیم:

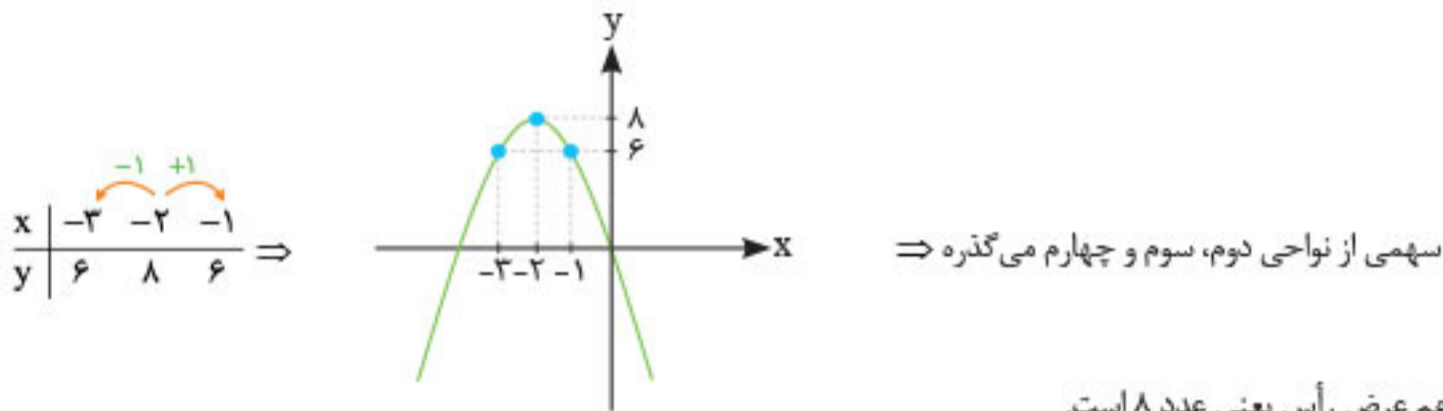


شاید براتون سؤال باشه که اون دو تا ۴ در جدول از کجا اومدن؟ ما یکبار در تابع  $y = x^2 - 2x + 4$  به جای  $x$ ها عدد صفر رو گذاشتیم و بار دیگه عدد ۲ رو. البته همیشه جواب‌ها مساوی می‌شن (چون فاصله طولی  $x = 0$  و  $x = 2$  تا رأس، یکسانه) پس لازم نیست  $x = 2$  رو در تابع بنویسیم، چون می‌دونیم جوابش حتماً ۴ است.

ضمناً کمترین مقدار تابع، همون عرض رأس یعنی ۳ است. کلاً هر جا صحبت از کمترین مقدار یا بیشترین مقدار شد، حواستون باشه که باید عرض رأس سهمی رو حساب کنین.

عرض رأس  $y = -2(-2)^2 - 8(-2) = -8 + 16 = 8$  ب

ضمناً این سهمی ماکزیمم داره چون ضریب  $x^2$  منفیه و جهت سهمی رو به پایینه. حالا اون رو رسم می‌کنیم:



الان بیشترین مقدار تابع، باز هم عرض رأس یعنی عدد ۸ است.

### • یک سؤال مهم: دهانه سهمی رو چقدر باز یا بسته رسم کنیم؟

گاهی اوقات آدم نمی‌دونه دهانه سهمی رو چقدر باز یا بسته بکشه، چون در بعضی سؤالا این موضوع مهمه. مثلاً در همین مثال آخر که حل کردیم چرا سهمی دقیقاً از مبدأ گذشت؟ جواب اینه: هر وقت در یک سؤال گفته بشه سهمی از کدوم نواحی می‌گذره (یا نمی‌گذره) و موقع رسم شک داشتیم که سهمی از بالای مبدأ می‌گذره یا خود مبدأ یا پایین مبدأ، کافیه  $f(0)$  رو هم حساب کنیم ( $f(0)$  در واقع عرض از مبدأ سهمیه) اگه مثبت شد، سهمی از بالای مبدأ می‌گذره، اگه صفر شد، از خود مبدأ و اگه منفی شد از پایین مبدأ. در مثال آخر ببینیم  $f(0)$  چقدر می‌شه:

$$y = -2x^2 - 8x \xrightarrow{x=0} f(0) = -2(0)^2 - 8(0) = 0$$

چون  $f(0)$  برابر صفر شد، سهمی دقیقاً از خود مبدأ گذشت.

### بررسی یک نوع سهمی خاص

گاهی اوقات ضابطه سهمی به شکل  $y = a(x-h)^2 + k$  به ما داده می‌شه ( $a, h, k$  عدد هستن) یعنی  $x$  داخل پرانتزیه که توان ۲ داره و ضمناً بیرون پرانتز،  $k$ ای مشاهده نمی‌کنیم. در این حالت برای یافتن طول رأس، کافیه عبارت داخل پرانتز رو مساوی صفر بنویسیم تا ریشه اون به دست بیاد:  $x - h = 0 \Rightarrow x = h$  عددی هم که با پرانتز جمع یا تفریق می‌شه (در اینجا  $k$ ) همون عرض رأس خواهد بود.

در نهایت اینکه از علامت  $a$  متوجه می‌شیم که سهمی ماکزیمم داره یا مینیمم. اگه  $a$  مثبت باشه، سهمی  $\min$  داره و اگه منفی باشه  $\max$  داره. مثلاً در سهمی  $y = 4(x - \frac{1}{4})^2$  طول رأس برابر  $x = \frac{1}{4}$  و عرض رأس برابر  $y = 0$  است و سهمی  $\min$  داره چون عدد ۴ که در پرانتز ضرب شده، مثبت است.

**مثال:** مختصات رأس سهمی‌های زیر را به دست آورید. سپس نمودار آن‌ها را رسم کرده و بگویید از کدام نواحی می‌گذرنند؟

الف  $y = (x-3)^2 + 1$

ب  $y = -2(x+1)^2 - 5$

ج  $y = x^2 + 4$

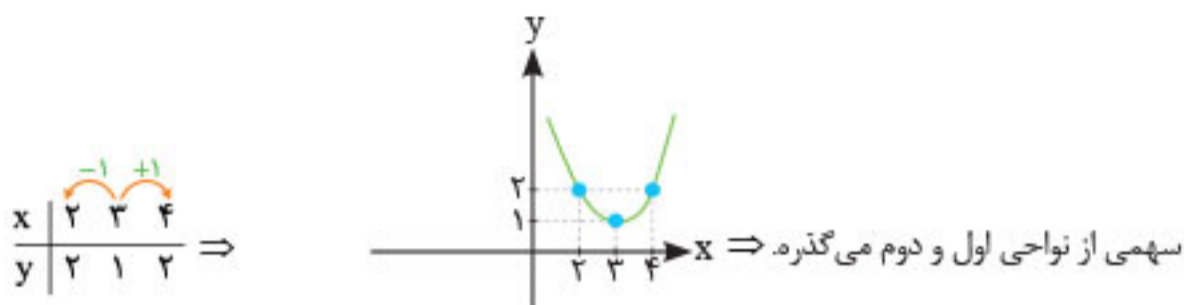
د  $y = -3x^2 + 2$

**حل: الف** ریشه داخلی پاراتز، طول رأس یا همون معادله محور تقارن است، عددی هم که با پاراتز جمع می‌شه (عدد +1)، عرض رأس است.

$$y = (x-3)^2 + 1 \Rightarrow S(3, 1)$$

$$\begin{array}{l} x-3= \\ \downarrow \\ x=3 \text{ طول رأس} \end{array}$$

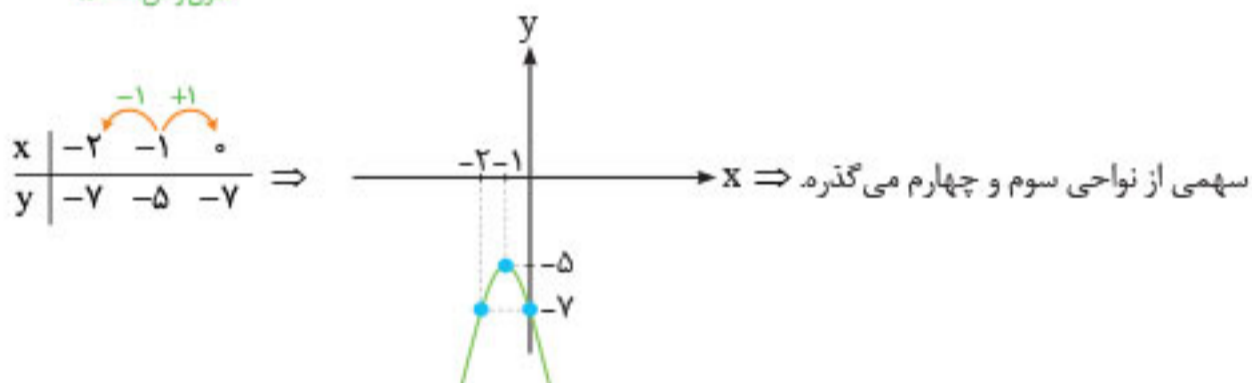
ضمناً سهمی مینیمم داره چون علامت پشت پاراتز، مثبتیه. حالا با نقطه یابی سهمی رو رسم می‌کنیم:



$$y = -2(x+1)^2 - 5 \Rightarrow S(-1, -5)$$

$$\begin{array}{l} x+1= \\ \downarrow \\ x=-1 \text{ طول رأس} \end{array}$$

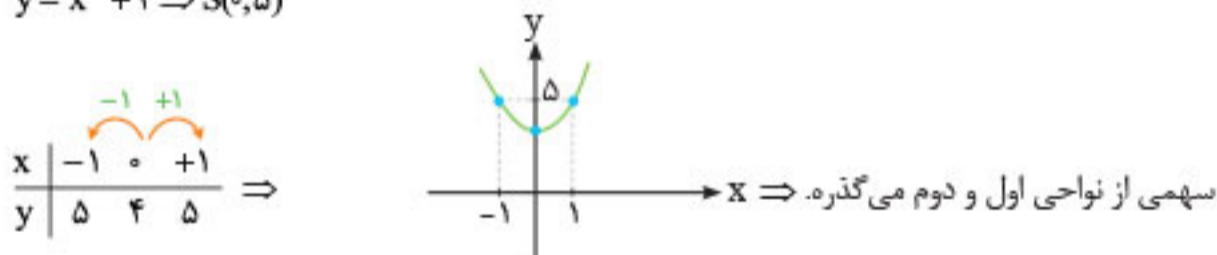
**ب** این سهمی ماکزیمم داره چون علامت پشت پاراتز، منفیه.



**ج** در اینجا هیچ پاراتزی نداریم، این جور مواقع خیلی سریع می‌گیریم طول رأس صفره ( $x=0$ ) عرض رأس هم که برابر +4 است. ضمناً سهمی مینیمم

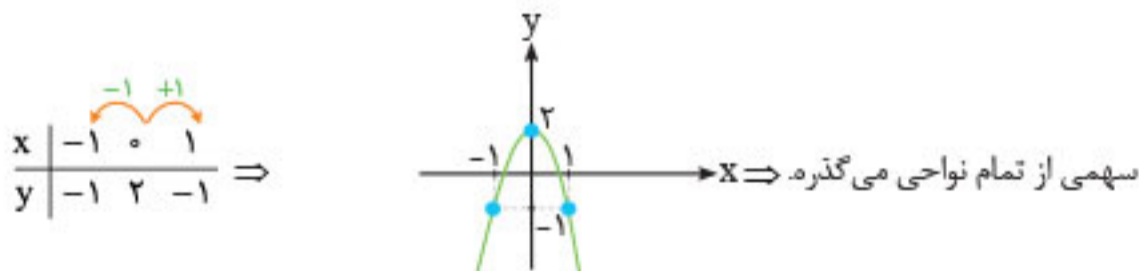
$$y = x^2 + 4 \Rightarrow S(0, 4)$$

داره چون ضریب  $x^2$  مثبتیه.



**د** باز هم پاراتز نداریم، پس طول رأس برابر  $x=0$  است. عرض رأس هم  $y=2$  است و سهمی ماکزیمم داره چون ضریب  $x^2$  منفیه:

$$y = -3x^2 + 2 \Rightarrow S(0, 2)$$



● **پیدا کردن محل تلاقی (برخورد) دو سهمی:** اگه ضابطه‌های دو سهمی رو به ما داده باشن، برای یافتن نقطه یا نقاط احتمالی تلاقی، ضابطه‌هاشون رو با

هم مساوی قرار می‌دیم و معادله حاصل رو حل می‌کنیم: یعنی اگه معادلات این دو سهمی رو  $y_1 = f(x)$  و  $y_2 = g(x)$  فرض کنیم، معادله  $f(x) = g(x)$  رو

حل می‌کنیم (به این معادله، می‌گیریم معادله تلاقی). اگه معادله تلاقی جواب داشت، یک یا دو تا  $x$  پیدا می‌شه، حالا این یک یا دو تا  $x$  رو در یکی از ضابطه‌ها ( $f$  یا  $g$ )

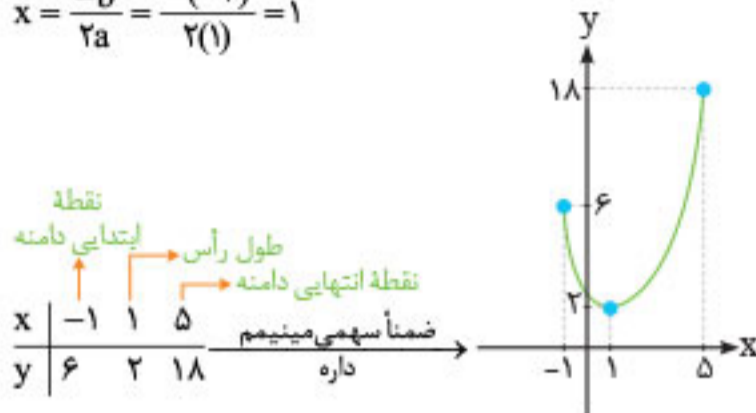
قرار می‌دیم تا عرض نقطه یا نقاط برخورد هم پیدا بشه. اگه هم معادله تلاقی جواب نداشت که می‌گیریم دو سهمی نقطه برخورد ندارند. برای یافتن محل برخورد

خط و سهمی نیز همین کار رو می‌کنیم

## رسم سهمی با دامنه‌ای به جز $\mathbb{R}$

حالا فرض کنیم شانس تون بد بود و امتحان نهایی سخت باشه. در این صورت ممکنه طراح بگه: «دانش‌آموز عزیز، لطفاً سهمی  $y = x^2 - 2x + 3$  را با دامنه  $-1 \leq x \leq 5$  رسم کن» اینجاست که فقط بچه‌هایی که مفهوم دامنه رو خوب یاد گرفتن، می‌تونن این سؤال رو حل کنن. آگه دامنه  $\mathbb{R}$  نبود (که الان نیست) شما اول طول رأس رو پیدا کن:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$$

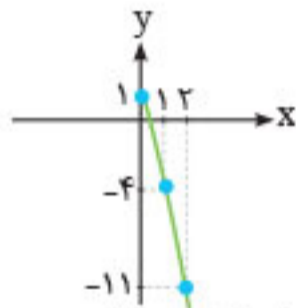


عدد ۱ در دامنه  $-1 \leq x \leq 5$  وجود داره، پس قبولش می‌کنیم. حالا ۱ رو در جدول نقطه‌یابی قرار می‌دهیم و ضمناً از دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی دامنه استفاده می‌کنیم:

حالا به سهمی  $y = -x^2 - 4x + 1$  توجه کنین. می‌خوایم نمودارش رو با دامنه  $x \geq 0$  رسم کنیم. اول طول رأس رو پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

x	0	1	2
y	1	-4	-11



ولی -۲ در دامنه تابع یعنی در  $x \geq 0$  قرار نداره، پس حذفش می‌کنیم بره پی کارش. حالا خودمون سه تا نقطه از دامنه  $x \geq 0$  رو انتخاب می‌کنیم (برای رسم خط به دو نقطه و برای سهمی به سه نقطه نیاز داریم) ولی یادتون باشه چون  $x = 0$  نقطه شروع دامنه است، حتماً باید ازش استفاده کنیم (کلاً نقاط شروع و پایان خیلی مهم هستن).

البته تا حالا همچین سوالایی که دامنه سهمی رو محدود کرده باشن نیومده، ولی گفتیم که یاد بگیرین، به نفع‌تونه.

**مثال:** دو سهمی  $y_1 = x^2 + 3x + 4$  و  $y_2 = -x^2 + 3x + 6$  در چه تقاطعی با هم تلاقی (برخورد) دارند؟

**حل:** قطعاً آگه بخوایم این جور سؤالات رو با روش رسم نمودار حل کنیم کاری بسیار زمان‌بر است و به جواب‌های دقیقی هم نمی‌رسیم. پس بهتره از روش جبری استفاده کنیم. یعنی ضابطه این سهمی‌ها رو با هم مساوی قرار بدیم و معادله تلاقی رو حل کنیم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^2 + 3x + 4 = -x^2 + 3x + 6 \Rightarrow x^2 + x^2 = 6 - 4 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{\text{جذرمی‌گیریم}} x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

حالا برای یافتن عرض نقاط برخورد، باید در یکی از سهمی‌ها (مهم نیست کدام سهمی) یک‌بار به جای  $x$  ها عدد ۱ و بار دیگه عدد -۱ رو قرار بدیم:

$$y = x^2 + 3x + 4 \xrightarrow{x=1} y = 1^2 + 3(1) + 4 = 8 \Rightarrow A(1, 8)$$

$$y = x^2 + 3x + 4 \xrightarrow{x=-1} y = (-1)^2 + 3(-1) + 4 = 1 - 3 + 4 = 2 \Rightarrow B(-1, 2)$$

## مسائل بهینه‌سازی

### ماکزیمم یا مینیمم کردن یک عبارت

در این قسمت از ما خواسته می‌شه کاری کنیم که حاصل یک عبارت جبری، ماکزیمم یا مینیمم بشه: یعنی بیشترین یا کمترین مقدار خودش رو داشته باشه.

گام‌های حل مسائل بهینه‌سازی	حل هم‌زمان یک سؤال: اگر $2x - y = 10$ باشد، مقدار مینیمم $4xy$ را به دست آورید.
۱. از رابطه داده‌شده، یک متغیر رو بر حسب متغیر دیگه به دست میاریم. (معمولاً $y$ رو بر حسب $x$ می‌نویسیم).	$2x - y = 10 \Rightarrow y = 2x - 10$
۲. متغیر به دست اومده رو در رابطه‌ای قرار می‌دیم که می‌خوایم ماکزیمم یا مینیمم بشه. (به این عبارت، می‌گیم عبارت اصلی)	در عبارت $4xy$ به جای $y$ مقدارش رو که در مرحله قبل به دست آوردیم، قرار می‌دیم: $4xy = 4x(2x - 10) = 8x^2 - 40x$
۳. حالا به معادله یک سهمی می‌رسیم و از فرمول $x_S = \frac{-b}{2a}$ استفاده می‌کنیم، بعدش $y$ رو هم به دست میاریم.	$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-40)}{2(8)} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$ $y_S = 2x - 10 \xrightarrow{x_S = \frac{5}{2}} y_S = 2\left(\frac{5}{2}\right) - 10 = 5 - 10 = -5$
۴. $x$ و $y$ به دست اومده رو در عبارت اصلی قرار می‌دیم.	عبارت اصلی $4xy = 4\left(\frac{5}{2}\right)(-5) = -50$

**توجه:** در مرحله آخر می‌تونستیم مقدار مینیمم رو با جای‌گذاری  $x = \frac{5}{4}$  در تابع  $(8x^2 - 40x)$  به دست بیاریم:

$$8x^2 - 40x = 8\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 40\left(\frac{5}{4}\right) = 8\left(\frac{25}{16}\right) - 100 = 50 - 100 = -50$$

**مثال:** اگر  $2x + y = 100$  باشد،  $x$  و  $y$  را طوری بیابید که حاصل عبارت  $xy$  یعنی حاصل ضربشان ماکزیمم شود.

**حل:** ابتدا از رابطه  $2x + y = 100$  متغیر  $y$  رو بر حسب  $x$  پیدا می‌کنیم (یعنی  $y$  در سمت چپ، تنها بشه).

$$2x + y = 100 \Rightarrow y = -2x + 100$$

$$\text{عبارت اصلی} = xy = x(-2x + 100) = -2x^2 + 100x$$

حالا به معادله یک سهمی رسیدیم، پس خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = \frac{100}{4} = 25 \\ y = -2x + 100 \xrightarrow{x=25} y = -2(25) + 100 = 50 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{بیشترین مقدار } xy = 25 \times 50 = 1250$$

البته برای پیدا کردن بیشترین مقدار  $xy$  می‌تونستیم در معادله سهمی  $(-2x^2 + 100x)$  عبارت اصلی) به جای  $x$  عدد  $25$  رو قرار بدیم:

$$\text{بیشترین مقدار } xy = -2x^2 + 100x = -2(25)^2 + 100(25) = 1250$$

**مثال:** بیشترین مقدار اختلاف ۴ برابر مربع عددی از هشت برابر همان عدد کدام است؟

**حل:** عدد خواسته شده رو  $x$  فرض می‌کنیم و کل عبارت متن سؤال رو به زبان ریاضی می‌نویسیم و اون رو  $y$  در نظر می‌گیریم. ۴ برابر مربع  $x$  برابر می‌شه

با  $4x^2$  و هشت برابر  $x$  یعنی  $8x$ ، لذا داریم:

$$y = 8x - 4x^2 \xrightarrow{\text{بهرتره جمله‌ای که } x^2 \text{ داره اول باشه}} y = -4x^2 + 8x$$


$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-4)} = 1$$

چون یک تابع درجه دو (سهمی) ایجاد شد، از فرمول طول رأس استفاده می‌کنیم:

$$y = -4x^2 + 8x \xrightarrow{x=1} y = -4(1)^2 + 8(1) = 4$$

حالا این عدد رو در تابع به جای  $x$ ها قرار می‌دیم تا عرضش هم پیدا شه:

پس بیشترین مقدار تابع داده شده برابر ۴ است. حالا شاید پرسین آگه در متن همین سؤال، گفته می‌شد «کمترین مقدار» باید چیکار می‌کردیم؟ من می‌گم

در این سؤال، محاله که «کمترین مقدار» ازتون خواسته بشه. چون در سهمی  $y = -4x^2 + 8x$  ضرب  $x^2$  عددی منفی است و سهمی به شکل  هست که دارای بیشترین مقدار است نه کمترین مقدار.

### ماکزیمم کردن سود یک شرکت

در فصل قبلی یاد گرفتین که چطوری تابع درآمد و تابع سود رو تشکیل بدین. حالا می‌خوایم ببینیم باید چیکار کنیم که سود یک شرکت به حداکثر مقدار خودش برسه.

برای ماکزیمم کردن مقدار سود، طبق جدول و مثال زیر عمل می‌کنیم:

گام‌های حل مسائل سود	حل هم‌زمان یک سؤال: اگر معادلات درآمد و هزینه یک شرکت به ترتیب $R = -2x^2 + 10x$ و $C = 3 + 2x$ باشند، حداکثر سود شرکت را به دست آورید.
۱. ابتدا تابع سود رو تشکیل می‌دیم، یعنی درآمد رو منهای هزینه می‌کنیم.	$P = R - C = -2x^2 + 10x - 3 - 2x \Rightarrow P = -2x^2 + 8x - 3$
۲. تعداد کالاها (مقدار کالاها) برای ماکزیمم شدن سود رو از فرمول $x_s = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌اریم.	$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = 2$
۳. به دست اومده رو در تابع سود قرار می‌دیم تا بیشترین مقدار سود به دست بیاد. (اگه تعداد کالاها رو نخواهیم به دست بیاریم، می‌تونیم ماکزیمم سود رو مستقیماً از فرمول $y = \frac{-\Delta}{4a}$ محاسبه کنیم).	$P = -2x^2 + 8x - 3$ سود ماکزیمم $= -2(2)^2 + 8(2) - 3 = -8 + 16 - 3 = 5$





**مثال:** در یک کارخانه، تابع درآمد به صورت  $R(x) = \frac{-1}{3}x^2 + 30x$  و تابع هزینه به صورت  $C(x) = 18x + 40$  است. ماکزیم مقدار سود را به دست آورید. (x تعداد کالاهاست.)

**حل:** تابع سود  $P(x) = R(x) - C(x) = (\frac{-1}{3}x^2 + 30x) - (18x + 40) = \frac{-1}{3}x^2 + 30x - 18x - 40 = \frac{-1}{3}x^2 + 12x - 40$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(\frac{-1}{3})} = 12$$

طول رأس (تعداد کالاها)

یعنی اگر کارخانه ۱۲ عدد کالا تولید کند، سودش ماکزیم می‌شود. حالا مقدار این سود ماکزیم رو به دست میاریم. کافیه  $x = 12$  رو در تابع سود قرار بدیم:

$$P = \frac{-1}{3}(12)^2 + 12(12) - 40 = \frac{-1}{3} \times 144 + 144 - 40 = \frac{-144}{3} + 144 - 40 = -48 + 144 - 40 = 56$$

**نکته:** از رابطه  $y = \frac{-\Delta}{4a}$  هم می‌تونستیم مقدار سود ماکزیم رو به دست بیاریم.

**مثال:** در یک شرکت، نوعی لامپ تولید می‌شود. اگر هر لامپ به مبلغ ۳۰۰ تومان به فروش برسد و تابع هزینه  $C(x) = x^2 + 6x + 500$  باشد، چه تعداد لامپ باید تولید شود تا سود شرکت، ماکزیم شود؟ (x تعداد لامپ‌ها است.)

**حل:** تابع درآمد  $R = xp = x \times 300 = 300x$

$$P = R - C = 300x - x^2 - 6x - 500 = -x^2 + 294x - 500$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-294}{2(-1)} = 147$$

طول رأس

پس اگر ۱۴۷ عدد لامپ تولید بشه، سود به حداکثر مقدار خودش می‌رسه. دقت کنین در این تست اگر خود سود ماکزیم هم خواسته می‌شد، باید ۱۴۷ رو به جای xها در تابع سود (P) قرار می‌دادیم.

**نکته:** اگر k عددی ثابت و  $x + y = k$  باشه، عبارت  $xy$  وقتی ماکزیم است که  $x = y = \frac{k}{2}$  باشه. البته در امتحان نهایی، فقط اگر سؤال تستی یا به شکل جای خالی یا درست نادرست باشه، می‌تونیم از این جور نکات استفاده کنیم.

**مثال:** اگر  $2x + 3y = 60$  باشد، x و y را طوری پیدا کنید که  $xy$  ماکزیم شود.

**حل:**

$$2x + 3y = 60 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{60}{3} \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10 \\ 3y = \frac{60}{2} \Rightarrow 3y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{3} = 10 \end{cases}$$

## سؤالات امتحان

**الف** درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۳۵۰. هر تابع که معادله آن به شکل  $y = ax^2 + bx + c$  باشد (با فرض  $a \neq 0$ ) یک تابع درجه دوم یا سهمی نام دارد.

۳۵۱. اگر نمودار سهمی به شکل  باشد،  $a > 0$  است.

۳۵۲. مختصات رأس سهمی  $y = -(x+2)^2 + 3$ ،  $S(2, 3)$  است.

۳۵۳. برای یافتن عرض نقطه سهمی از فرمول  $-\frac{b}{2a}$  استفاده می‌کنیم.

۳۵۴. محل تلاقی سهمی  $y = x^2 + 6x - 2$  با محور عرض‌ها -۳ است.

۳۵۵. معادله محور تقارن  $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 1$ ، برابر با  $x = 3$  است.

۳۵۶. سهمی  $y = 2(x-2)^2 + 4$ ، از ناحیه اول و دوم می‌گذرد.


۳۵۷. سهمی  $y = x^2$  را ۲ واحد به راست و ۴ واحد به بالا منتقل کنیم، معادله سهمی جدید  $y = (x+4)^2 + 2$  است.

۳۵۸. اگر تابع درآمد به صورت  $y = -\frac{1}{3}x^2 + 14x$  و تابع هزینه  $y = 10x + 14$  باشد، معادله سود به صورت  $P(x) = \frac{-1}{3}x^2 + 4x - 14$  است.

۳۵۹. سهمی  $y = 5(x+1)^2 - 4$  محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.



## ب جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

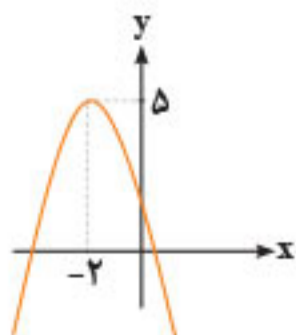
۳۶۰. طول رأس سهمی  $y = x^2 - 2x + 4$  ..... است.
۳۶۱. مختصات رأس سهمی  $y = -2(x-1)^2 + 7$  ..... است.
۳۶۲. اگر نمودار سهمی  $y = x^2$  را سه واحد به راست منتقل کنیم، ضابطه سهمی جدید ..... است.
۳۶۳. اگر نمودار سهمی  $y = x^2$  را چهار واحد به بالا منتقل کنیم، به ضابطه ..... می‌رسیم.
۳۶۴. نمودار دو سهمی به معادلات  $y = x^2 + x + 1$  و  $y = -x^2 + x + 3$  در نقاطی به طول ..... و ..... مشترک هستند.
۳۶۵. در یک کارخانه تابع درآمد  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 40x$  و تابع هزینه به صورت  $y = 20x + 60$  است. معادله سود ..... است.
۳۶۶. اگر معادله سود یک کارخانه به صورت  $P(x) = -x^2 + 120x - 80$  باشد، به ازای تولید ..... کالا، سودش ماکزیمم می‌شود.
۳۶۷. اگر نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  به صورت  باشد،  $a$  ..... است.
۳۶۸. محل تلاقی سهمی به معادله  $y = x^2 - 5x - 6$  با محور  $x$ ها ..... و ..... است.
۳۶۹. تابع اختلاف مربع ثلث عددی از چهار برابر آن عدد به صورت ..... است.

## ج گزینه درست را انتخاب کنید.

۳۷۰. مختصات رأس سهمی به معادله  $y = 2x^2 - 4x + 1$  کدام است؟  
 (۱) (-۱)  (۲) (۲)  (۳) (-۱)  (۴) (-۱)  (۲)
۳۷۱. مختصات رأس سهمی به معادله  $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$  کدام است؟  
 (۱) (۲)  (۲) (-۲)  (۳) (-۱)  (۴) (-۱)  (-۵)
۳۷۲. معادله محور تقارن منحنی  $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1$  کدام است؟  
 (۱)  $x = -6$   (۲)  $x = -3$   (۳)  $x = 3$   (۴)  $x = 6$
۳۷۳. سهمی  $y = 2(x-1)^2 + 3$  از کدام نواحی می‌گذرد؟  
 (۱) اول و دوم  (۲) دوم، سوم و چهارم  
 (۳) سوم و چهارم  (۴) اول، دوم و سوم
۳۷۴. اگر رأس سهمی  $y - 2 = -3(x+a)^2 + b$  نقطه  $(2, 5)$  باشد، حاصل  $a \times b$  کدام است؟  
 (۱) -۲  (۲) -۶  (۳) ۳  (۴) ۶
۳۷۵. رأس سهمی به معادله  $y = -x^2 + ax + 5$  بر روی خط به معادله  $x = 2$  قرار دارد. این سهمی از کدام نقطه می‌گذرد؟  
 (۱) (-۱)  (۲) (-۱)  (۳) (۱)  (۴) (۱)  (۰)
۳۷۶. به ازای کدام مقدار  $a$ ، بیشترین مقدار تابع  $f(x) = ax^2 + 20x - 120$  برابر ۱۸۰ است؟  
 (۱)  $-\frac{1}{4}$   (۲)  $-\frac{1}{3}$   (۳)  $\frac{1}{3}$   (۴)  $\frac{1}{4}$

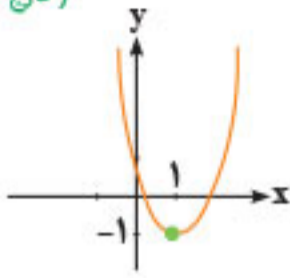
(سراسری ۹۷)

(سراسری ۹۴)



- (۱)  $y = x^2 + 4x + 3$
- (۲)  $y = -x^2 - 2x + 4$
- (۳)  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$
- (۴)  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

(خارج ۹۴)



۳۷۸. شکل مقابل نمودار کدام تابع را نشان می‌دهد؟

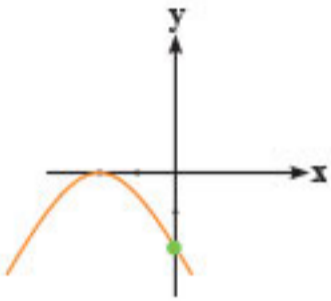
$$y = 2x^2 + 4x + 1 \quad (1) \quad \square$$

$$y = 2x^2 - 2x + 1 \quad (2) \quad \square$$

$$y = 2x^2 - 4x + 1 \quad (3) \quad \square$$

$$y = -2x^2 + 4x + 1 \quad (4) \quad \square$$

(سراسری ۹۵)



۳۷۹. شکل مقابل نمودار کدام تابع را نشان می‌دهد؟

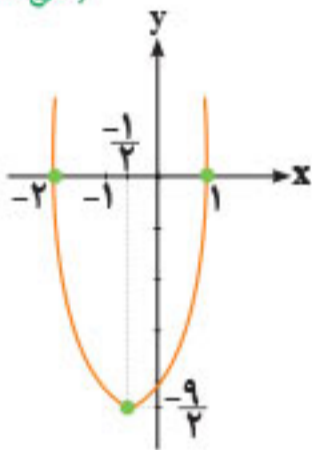
$$y = -2x^2 + 4x - 2 \quad (1) \quad \square$$

$$y = -2x^2 - 4x - 2 \quad (2) \quad \square$$

$$y = -x^2 - 2x - 2 \quad (3) \quad \square$$

$$y = 2x^2 + 4x - 2 \quad (4) \quad \square$$

(خارج ۹۶)


 ۳۸۰. در شکل روبه‌رو نمودار تابع  $y = 2x^2 + ax + b$  است. مقدار  $b$  کدام است؟

$$-4 \quad (1) \quad \square$$

$$-3/5 \quad (2) \quad \square$$

$$-3 \quad (3) \quad \square$$

$$-2/5 \quad (4) \quad \square$$

 ۳۸۱. سهمی  $y = -2(x+2)^2 - 3$  محور  $y$ ها را در چه عرضی قطع می‌کند؟

$$7 \quad (4) \quad \square$$

$$5 \quad (3) \quad \square$$

$$-11 \quad (2) \quad \square$$

$$-8 \quad (1) \quad \square$$

 ۳۸۲. تعداد نقاط برخورد نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + 5x - 2$  با محورهای مختصات برابر است با:

$$3 \quad (4) \quad \square$$

$$2 \quad (3) \quad \square$$

$$1 \quad (2) \quad \square$$

$$\text{صفر} \quad (1) \quad \square$$

 ۳۸۳. اگر محور تقارن سهمی  $y = 4x^2 - (k+1)x + 3c$  خط  $x = -1$  باشد و سهمی محور  $y$ ها را در نقطه  $-3$  قطع کند، رأس سهمی کدام است؟

$$(-1, -7) \quad (2) \quad \square$$

$$(-1, -5) \quad (1) \quad \square$$

$$(-1, -15) \quad (4) \quad \square$$

$$(1, -1) \quad (3) \quad \square$$

 ۳۸۴. سهمی  $y = -\frac{1}{4}x^2 + ax + b$  با خط  $y = 13 - x$  در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۸ متقاطع‌اند. مختصات رأس این سهمی کدام است؟ (سراسری ۹۹)

$$(3, 9) \quad (2) \quad \square$$

$$(1, 9) \quad (1) \quad \square$$

$$(4, 13) \quad (4) \quad \square$$

$$(3, 12) \quad (3) \quad \square$$

 ۳۸۵. نقطه  $(-1, -4)$  رأس سهمی به معادله  $y = 3x^2 + ax + b$  است. این سهمی محور  $y$ ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (سراسری ۹۰)

$$2 \quad (4) \quad \square$$

$$-1 \quad (3) \quad \square$$

$$-2 \quad (2) \quad \square$$

$$-3 \quad (1) \quad \square$$

۳۸۶. بیشترین مقدار اختلاف مربع نصف همدی، از شش برابر همان عدد کدام است؟ (خارج ۹۴)

$$48 \quad (4) \quad \square$$

$$42 \quad (3) \quad \square$$

$$38 \quad (2) \quad \square$$

$$36 \quad (1) \quad \square$$

 ۳۸۷. بیشترین مقدار تفاضل  $\frac{1}{9}$  مربع عددی از ۶ برابر آن عدد کدام است؟ (سراسری ۹۴)

$$81 \quad (4) \quad \square$$

$$72 \quad (3) \quad \square$$

$$63 \quad (2) \quad \square$$

$$54 \quad (1) \quad \square$$

۳۸۸. محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکزیمم مساحت این مستطیل چقدر است؟ (سراسری ۱۴۰)

$$11/25 \quad (4) \quad \square$$

$$56/25 \quad (3) \quad \square$$

$$20/9 \quad (2) \quad \square$$

$$225 \quad (1) \quad \square$$



۳۸۹. می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۵۶ متر، زمینی به شکل مستطیل، که یک طرف آن دیوار است، محصور کنیم. بیشترین مساحت زمین محصور شده کدام است؟

(سراسری ۹۸)

۳۶۴ (۱) ۳۷۸ (۲) ۳۹۲ (۳) ۴۰۶ (۴) 

۳۹۰. سهمی  $y = x^2$  را ۱ واحد به راست و ۴ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. معادله سهمی جدید کدام است؟

$$y = x^2 - 2x \quad (۲) \quad \text{□}$$

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (۱) \quad \text{□}$$

$$y = (x-1)^2 + 4 \quad (۴) \quad \text{□}$$

$$y = (x+1)^2 - 4 \quad (۳) \quad \text{□}$$

د. به سوالات زیر پاسخ کامل دهید.

۳۹۱. مختصات رأس سهمی‌های زیر را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

$$y = x^2 - 6x + 2 \quad \text{الف}$$

$$y = -(x-3)^2 + 4 \quad \text{ب}$$

۳۹۲. محل تلاقی سهمی به معادله  $y = x^2 + 4x - 5$  با محورهای مختصات را پیدا کنید.

۳۹۳. نقطه یا نقاط برخورد دو سهمی  $y = x^2 + 1$  و  $y = 2x^2 + 2x + 2$  را پیدا کنید.

۳۹۴. در یک کارخانه، توابع درآمد و هزینه بر حسب میلیون تومان عبارت‌اند از:  $C = 8x + 1$  و  $R = -\frac{1}{4}x^2 + 12x$

الف) با تولید چه تعداد کالا، سود به حداکثر مقدارش می‌رسد؟

ب) ماکزیمم سود چقدر است؟

۳۹۵. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با  $x$  و مساحت آن را با  $S$  نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب  $x$  رسم کنید و سپس به کمک نمودار مشخص کنید به‌ازای چه مقداری از  $x$  مساحت مستطیل ماکزیمم می‌شود.

(تمرین کتاب درسی)

۳۹۶. اگر  $2x + a = 100$  باشد،  $x$  و  $a$  را طوری بیابید که  $y = xa$  ماکزیمم شود.

۳۹۷. در یک تولیدی، نوعی لامپ برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در

هر روز  $x$  واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر  $C(x) = x^2 + 40x + 100$  باشد:

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

ج) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

۳۹۸. اگر تابع درآمد به صورت  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$  و تابع هزینه به صورت  $y = 18x + 40$  باشد، ماکزیمم مقدار سود را مشخص کنید. (تمرین کتاب درسی)

۳۹۹. بیشترین مقدار تفاضل مربع عددی از سه برابر همان عدد را به دست آورید.

۴۰۰. اگر طول رأس سهمی  $y = -x^2 - 4mx + 4$  برابر  $-3$  باشد، بیشترین مقدار تابع را به دست آورید.

۴۰۱. اگر داشته باشیم  $8x + 4y = 24$ ، بیشترین مقدار (ماکزیمم) عبارت  $2xy$  را به دست آورید.

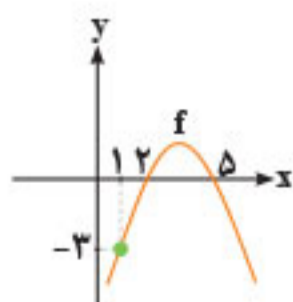
۴۰۲. بیشترین مقدار اختلاف ۴ برابر مربع عددی از هشت برابر همان عدد را به دست آورید.

۴۰۳. می‌خواهیم با یک طناب به طول ۶۰ متر، یک زمین مستطیل شکل را یک طرف آن رودخانه است، محصور کنیم. بیشترین مساحت این زمین چیست؟

۴۰۴. نمودار سهمی  $y = x^2$  را ۴ واحد به راست و سپس ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطه سهمی جدید را به دست آورید.

۴۰۵. مختصات رأس یک سهمی  $S(2,6)$  می‌باشد و سهمی از نقطه  $A(-1,3)$  هم عبور می‌کند. محل برخورد سهمی با محور  $y$ ها را به دست آورید.

۴۰۶. با توجه به نمودار سهمی مقابل، ضابطه تابع  $f$  را به دست آورید.

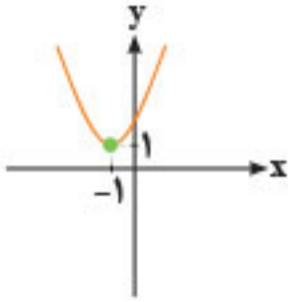


۴۰۷. نمودار سهمی  $f$  از نقاط  $A(0,1)$ ،  $B(-1,2)$  و  $C(4,3)$  می‌گذرد. طول رأس سهمی کدام است؟

۴۰۸. مستطیلی‌هایی با ابعاد متفاوت موجود است. باریک‌ترین آن‌ها به ابعاد ۲۰ و ۶۰ می‌باشد. به‌ازای هر یک واحد که به عرض آن اضافه شود، ۲ واحد از طول آن کم می‌شود. بیشترین مساحت این مستطیل‌ها کدام است؟

۴۰۹. در یک شرکت، نوعی لامپ تولید می‌شود. اگر هر لامپ به مبلغ ۳۰۰ تومان به فروش برسد و تابع هزینه  $C(x) = x^2 + 60x + 500$  باشد، چه تعداد لامپ باید تولید شود تا سود شرکت ماکزیمم شود؟

۴۱۰. نمودار مقابل، مربوط به تابع  $y = x^2 - kx + 2m - 1$  است. حاصل  $m \times k$  کدام است؟



### • • • • • یک گام فراتر • • • • •

۴۱۱. خط  $x = -1$  محور تقارن سهمی  $y = ax^2 + 3x + c$  است. اگر رأس سهمی روی خط  $y = 1$  قرار داشته باشد. مقدار  $ac$  کدام است؟

- (۱)  $5/75$  (۲)  $3/75$  (۳)  $-3/25$  (۴)  $-5/25$

۴۱۲. به‌ازای چند مقدار  $m$ ، تابع  $y = (1-18m)x^2 + 8(m^2+1)x + 11$  در نقطه‌ای به طول  $\frac{1}{4}$  دارای ماکزیمم است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ مقدار  $m$  (۴) تمام مقادیر  $m$

۴۱۳. شیب خط  $y = ax + b$ ،  $-1/5$  برابر شیب خط  $y = cx + d$  است. اگر دو خط در  $x = -2$  روی محور  $x$ ها یکدیگر را قطع کنند، محور تقارن

(دی ۱۴۰۱)  $f(x) = (\frac{c}{4}x + d)^2 - (ax + b)^2$  کدام است؟

- (۱)  $x = -2$  (۲)  $x = -3$  (۳)  $x = -\frac{3}{4}$  (۴)  $x = -\frac{7}{4}$

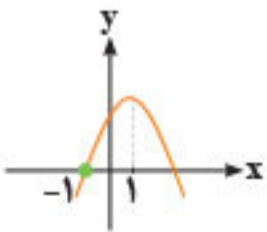
۴۱۴. به‌ازای چه محدوده‌ای از  $m$  تابع  $y = (m-1)x^2 - mx + \frac{1}{4}m$  دارای مینیمم است و نمودار آن محور  $x$ ها را قطع نمی‌کند؟

- (۱)  $m < 0$  (۲)  $m > 1$  (۳)  $\mathbb{R}$  (۴)  $\emptyset$

۴۱۵. اگر کمترین مقدار تابع  $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2ax + 1$  برابر  $-2$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

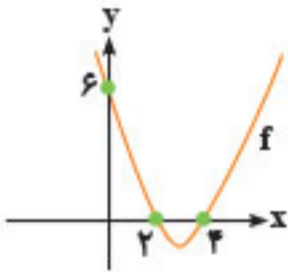
- (۱)  $\pm\sqrt{6}$  (۲)  $\frac{\pm 6}{2}$  (۳)  $\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$  (۴)  $\pm\sqrt{6}$

۴۱۶. شکل روبه‌رو نمودار تابع  $y = -2x^2 + ax + b$  است. مقدار  $b$  را محاسبه کنید.

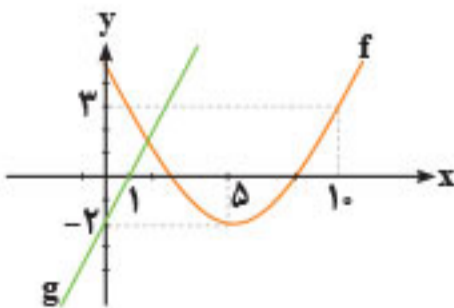


۴۱۷. نمودار یک سهمی در نقطه  $(4,1)$  بیشترین عرض را دارد. اگر این سهمی از نقطه  $(1,-1)$  هم عبور کند، محل برخورد این سهمی با محور  $y$ ها را تعیین کنید.

۴۱۸. طبق شکل داده‌شده مقدار  $f(10)$  را به دست آورید.



۴۱۹. مجموع طول نقاط برخورد خط و سهمی زیر را به دست آورید.



۴۲۰. اگر  $4a + 2b = 48$  باشد، مقدار  $a - b$  کدام مقدار باشد تا مقدار  $8ab$  ماکزیمم شود؟

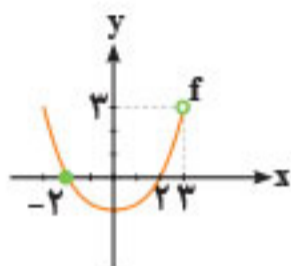
۴۲۱. اگر  $2x + a = 8$  باشد، کمترین مقدار عبارت  $y = x^2 + a^2$  را به دست آورید.

۴۲۲. از بین مربع‌هایی که عدد مساحت آن‌ها از عدد محیط کمتر است، بیشترین مقدار فزونی عدد محیط از عدد مساحت را به دست آورید.

۴۲۳. در تعدادی مثلث، مجموع یک قاعده و ۳ برابر ارتفاع وارد بر آن برابر ۴۸ می‌باشد. بیشترین مساحت این مثلث‌ها را به دست آورید.



۴۲۴. در یک قطعه زمین اگر ۲۰ درخت میوه با فاصله‌های مساوی کاشته شود، پس از رشد کافی از هر درخت به طور متوسط ۶۰ کیلوگرم میوه برداشت می‌شود و به‌ازای هر درخت اضافی که کاشته شود، دو کیلوگرم از متوسط محصول هر درخت کم می‌شود. حداکثر برداشت میوه را به دست آورید.
۴۲۵. در یک کارگاه تولیدی، یکی از کارگران متعهد شده است که در پایان هر هفته ۸۰ قطعه با دستمزد هر قطعه ۴۵۰ تومان تحویل دهد. به‌ازای هر قطعه اضافه بر تعهد، مبلغ ۵ تومان از دستمزد هر قطعه تحویلی کسر می‌شود، بیشترین دستمزد هفته این کارگر چند تومان است؟
۴۲۶. در یک شرکت خودکارسازی، هر خودکار مبلغ ۳۰۰۰ تومان به فروش می‌رود. اگر تابع هزینه این شرکت برابر  $C(x) = x^2 + 600x + 1000$  باشد، وقتی که سود ماکزیمم است، مقدار درآمد چقدر است؟
۴۲۷. نمودار خط  $y = 3 - k$  و سهمی  $y = x^2 - 2x$  فقط در یک نقطه با هم برخورد دارند. خط  $y = 2k$  از کدام نواحی محورهای مختصات عبور می‌کند؟
۴۲۸. نمودار سهمی  $y = x^2 - 4x + 3$  محور  $x$  را در نقاط  $A$  و  $B$  و محور  $y$  را در نقطه  $C$  قطع می‌کند. مساحت مثلث  $ABC$  را به دست آورید.
۴۲۹. سهمی  $f$  را ۱ واحد به راست و ۳ واحد به بالا منتقل می‌کنیم. اگر سهمی جدید را  $y = ax^2 + bx + c$  فرض کنیم، مقدار  $a + b + c$  کدام است؟



۴۳۰. با چه تغییراتی می‌توانیم سهمی  $y = -(x-1)^2 - 3$  را به سهمی  $y = x^2$  تبدیل کنیم؟
۴۳۱. نمودار سهمی  $y = x^2 - 4x$  را ۲ واحد به چپ منتقل کرده و سپس نسبت به محور  $x$  قرینه می‌کنیم. معادله سهمی جدید را پیدا کنید.

سؤالات امتحانی نوبت اول		تألیفی
ردیف	سؤالات	تاریخ: / /
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) معادله <math>x^2 + ax - 1 = 0</math> به ازای هر مقدار <math>a</math> همواره جوابهای حقیقی دارد.</p> <p>ب) اندازه ضلع مربعی با قطر ۸ برابر <math>\sqrt{32}</math> است.</p> <p>ج) معادله <math>\frac{1}{x} + 2 = \frac{-3}{x^2}</math> دارای یک ریشه حقیقی است.</p> <p>د) رابطه <math>A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}</math> یک تابع است.</p>	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
۲	<p>جاهای خالی را با عبارتهای مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) شرط داشتن دو ریشه حقیقی متفاوت در یک معادله درجه دوم این است که دلتا ..... باشد.</p> <p>ب) رابطه‌ای که به هر ابراتی کدملی او را نسبت می‌دهد، یک ..... است.</p> <p>ج) حاصل جمع ریشه‌های معادله <math>2x^2 + 3x - 5 = 0</math> برابر ..... است.</p> <p>د) هر خط موازی محور عرض‌ها، باید حداکثر ..... از نمودار را قطع کند تا شرط تابع بودن برقرار باشد.</p>	
۳	<p>گزینه درست را انتخاب کنید.</p> <p>الف) تجزیه شده عبارت <math>x^2 - 5x - 6</math> کدام یک از عبارتهای زیر است؟</p> <p>(۱) <math>x(x-5)</math>  (۲) <math>(x-2)(x-3)</math>  (۳) <math>(x-3)^2</math>  (۴) <math>(x+1)(x-6)</math></p> <p>ب) در رابطه <math>f = \{(3, 2), (4, 5), (\dots, 5)\}</math> در جای خالی چه عددی قرار دهیم که <math>f</math> تابع نباشد؟</p> <p>(۱) ۲  (۲) ۳  (۳) ۴  (۴) ۱</p> <p>ج) معادله <math>(x-1)^2 = k</math> به ازای کدام مقدار <math>k</math> ریشه حقیقی دارد؟</p> <p>(۱) <math>k=0</math>  (۲) <math>k=-2</math>  (۳) <math>k=-5</math>  (۴) تمام مقادیر <math>k</math></p> <p>د) یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و داریم: <math>f(2) = 5</math>. مقدار تابع در نقطه <math>x=4</math> چقدر است؟</p> <p>(۱) ۱۰  (۲) ۲/۵  (۳) ۰/۴  (۴) ۲۰</p>	
۴	<p>معادلات مقابل را به کمک تجزیه حل کنید.</p> <p>الف) <math>x^2 + 3x - 10 = 0</math></p> <p>ب) <math>4y^2 - 4 = 0</math></p>	۱/۵
۵	<p>برای عبارت زیر یک معادله بنویسید و سپس آن را حل کنید.</p> <p>«عددی را بیابید که اگر به سه برابر آن، ۵ واحد اضافه کنیم، برابر همان عدد منهای ۷ شود.»</p>	۰/۵
۶	<p>معادله‌های زیر را به روش خواسته شده حل کنید.</p> <p>الف) <math>x^2 + 8x + 15 = 0</math> (روش مربع کامل)</p> <p>ب) <math>2x^2 + 3x - 5 = 0</math> (روش دلخواه)</p>	۲/۵
۷	<p>اگر یکی از جوابهای معادله <math>x^2 - ax + 6 = 0</math> برابر ۲ باشد، جواب دیگر آن را به دست آورید.</p>	۱/۵
۸	<p>معادله مقابل را حل کنید.</p> <p><math>\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1} = 0</math></p>	۱/۵



## تألیفی

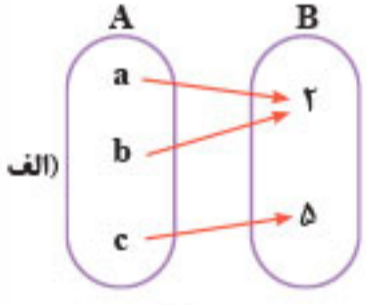
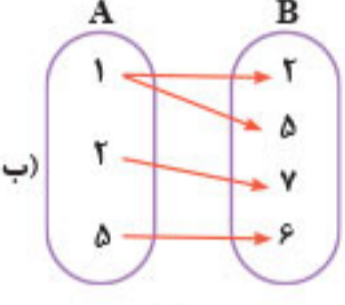
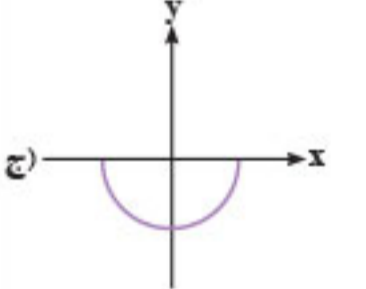
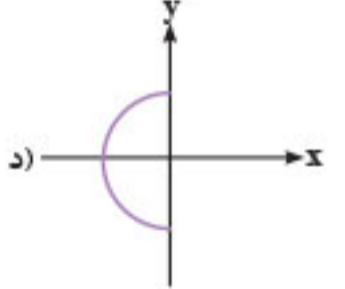
## سؤالات امتحانی نوبت اول

تاریخ: / /

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

رشته: علوم انسانی

درس: ریاضی و آمار (دهم)

ردیف	سؤالات	نمره															
۹	با فرض اینکه روابط زیر تابع باشند، مقادیر $x$ و $y$ را به دست آورید. الف) $A = \{(3, 2), (3, 2x+1), (-2, y), (-2, -6)\}$ ب) $B = \{(5, 2x+y), (6, 3x-2y), (5, 2), (6, x+1)\}$	۲															
۱۰	یک فروشگاه تابع هزینه $C(x) = 300 + 400x$ و تابع درآمد $R(x) = 600x - 10x^2$ را برای ارائه کالایی به قیمت $x$ تومان دارد. به پرسش‌های زیر پاسخ دهید: الف) $P(x)$ (تابع سود) حاصل از فروش این کالا در فروشگاه را بیابید. ب) اگر این فروشگاه ۱۰ کالا بفروشد، چقدر سود می‌کند؟	۱															
۱۱	با توجه به رابطه $y = 2x - 3$ ، جدول را کامل کنید و نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی مربوط به آن را رسم کنید.	۱/۵															
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>-۱</td> <td></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>y</td> <td></td> <td>-۳</td> <td></td> <td>۱</td> </tr> <tr> <td>(x,y)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	x	-۱		$\frac{1}{2}$		y		-۳		۱	(x,y)					
x	-۱		$\frac{1}{2}$														
y		-۳		۱													
(x,y)																	
۱۲	تابع بودن یا نبودن هر یک از روابط زیر را تعیین کنید و علت آن را بنویسید. الف)  ب)  ج)  د) 	۲															
۲۰	موفق و مؤید باشید. جمع نمره																








## درس ۴

## پاسخ سؤالات فصل دوم

۳۵۰. درست: در معادله  $y = ax^2 + bx + c$ ،  $a \neq 0$  است، زیرا اگر  $a = 0$  باشد  $x^2$  از بین می‌رود و یک معادله درجه یک داریم.

۳۵۱. نادرست: در سهمی اگر نمودار سهمی به شکل  باشد، دهانه سهمی رو به پایین و  $\max$  داریم (یعنی  $a < 0$ ).

۳۵۲. نادرست: اگر معادله سهمی به شکل  $y = a(x-h)^2 + k$  باشد، ریشه داخل پرانتز، طول رأس و عددی که با اون پرانتز جمع یا تفریق می‌شود، عرض رأس خواهد بود.  $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow S(-2, 3)$

۳۵۳. نادرست: برای یافتن عرض نقطه سهمی از فرمول  $y = \frac{-\Delta}{4a}$  استفاده می‌کنیم.

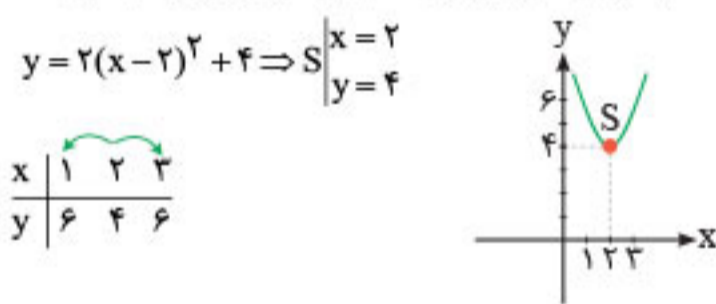
۳۵۴. نادرست: کافیست به جای  $x$ ها صفر بذاریم تا محل تلاقی با محور عرض‌ها رو پیدا کنیم.  $y = x^2 + 6x - 2 \xrightarrow{x=0} y = (0)^2 + 6(0) - 2 \Rightarrow y = -2$

۳۵۵. درست: در سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  می‌دونیم که محور تقارن از فرمول  $x = -\frac{b}{2a}$  به دست میاد.

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{-(-3)}{2(\frac{1}{2})} = \frac{3}{1} = 3$$

۳۵۶. درست: کافیست رأس سهمی رو پیدا کنیم و سهمی رو رسم کنیم.



۳۵۷. نادرست  $y = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow (x-2)}$  واحد به راست  $y = (x-2)^2$

$\xrightarrow{\text{واحد به بالا}}$  یعنی کل تابع رو به علاوه ۴ می‌کنیم  $y = (x-2)^2 + 4$

۳۵۸. درست: برای به دست آوردن تابع سود کافیست تابع هزینه رو از تابع درآمد کم کنیم.  $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 14x - (10x + 14)$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 14x - 10x - 14 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 14$$

۳۵۹. درست: کافیست به جای  $y$ ، صفر بذاریم و  $x$  رو به دست بیاریم.

$$y = 5(x+1)^2 - 4 = 5(x^2 + 2x + 1) - 4$$

$$\Rightarrow y = 5x^2 + 10x + 5 - 4 \Rightarrow y = 5x^2 + 10x + 1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (10)^2 - 4(5)(1) = 80$$

چون  $\Delta > 0$  است، پس معادله دو ریشه حقیقی دارد.

۳۶۰. ۱: اگر معادله سهمی به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  باشد، طول رأس سهمی از فرمول  $x = -\frac{b}{2a}$  به دست میاد.

$$y = x^2 - 2x + 4 \quad x = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$$

۳۴۵. اگر نمودار تابع خطی از نقطه‌ای عبور کند، مختصات اون نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کنه. این تابع از نقاط  $(3, -2)$  و  $(5, 0)$  عبور می‌کنه. پس خواهیم داشت:

$$f(x) = (3k-1)x + 2m$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(3,-2)} -2 = (3k-1)3 + 2m \Rightarrow -2 = 9k - 3 + 2m \\ \Rightarrow 9k + 2m = -2 + 3 \Rightarrow 9k + 2m = 1 \quad (1) \\ \xrightarrow{(5,0)} (3k-1)(5) + 2m = 0 \\ \Rightarrow 0 = 15k - 5 + 2m \Rightarrow 15k + 2m = 5 \quad (2) \end{cases}$$

معادله‌های (۱) و (۲) رو در دستگاه قرار داده و حل می‌کنیم:

$$(-1) \times \begin{cases} 9k + 2m = 1 \\ 15k + 2m = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9k - 2m = -1 \\ 15k + 2m = 5 \end{cases}$$

$$6k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$9k + 2m = 1 \xrightarrow{k = \frac{2}{3}} 9(\frac{2}{3}) + 2m = 1 \Rightarrow 6 + 2m = 1$$

$$\Rightarrow m = -\frac{5}{2} \Rightarrow 3k + m = 3(\frac{2}{3}) + (-\frac{5}{2}) = -\frac{1}{2}$$

۳۴۶. ابتدا دستگاه دو معادله و دو مجهول رو حل می‌کنیم تا نقطه تلاقی دو خط به دست بیاد.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 6y = -12 \end{cases}$$

$$7y = -7 \Rightarrow y = -1$$

$$2x + y = 5 \xrightarrow{y = -1} 2x - 1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

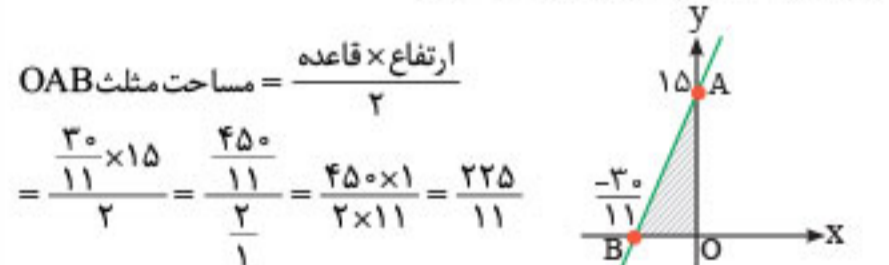
پس نقطه تلاقی  $(3, -1)$  است. اکنون با داشتن دو نقطه  $A(-2, 4)$  و  $B(3, -1)$  شیب خط  $d$  رو محاسبه می‌کنیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 4}{3 - (-2)} = \frac{-5}{5} = -1$$

۳۴۷. برای یافتن محل برخورد با محور  $y$ ها به جای  $x$  برای یافتن محل برخورد با محور  $x$ ها به جای  $y$  صفر می‌ذاریم:

$$\frac{y-3x}{5} - \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow \frac{y}{5} = 3 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 15 \\ 0 \end{vmatrix} \\ y=0 \Rightarrow \frac{-3x}{5} - \frac{x}{2} = 3 \xrightarrow{\times 10} -6x - 5x = 30 \\ \Rightarrow -11x = 30 \Rightarrow x = -\frac{30}{11} \Rightarrow B \begin{vmatrix} -\frac{30}{11} \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

پس نمودار خط به شکل زیر خواهد بود.



۳۴۸. با توجه به فرض سؤال، اگر به ۳ برابر دمای جسم بر حسب سانتی‌گراد ۲۰ واحد اضافه بشه، دمای جسم بر حسب فارنهایت به دست میاد: یعنی  $F = 3C + 20$  از طرفی می‌دونیم که  $F = \frac{1}{8}C + 32$  است، حال این دو رابطه رو با هم برابر قرار می‌دیم تا دمای جسم رو بر حسب سانتی‌گراد بیابیم:

$$\frac{1}{8}C + 32 = 3C + 20 \Rightarrow \frac{1}{8}C - 3C = 20 - 32$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}C = -12 \Rightarrow C = \frac{-12}{-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$$

۳۴۹. در این جور سؤالات کافیست ضریب  $C$  یعنی  $\frac{9}{5}$  رو در مقابل افزایش یا کاهش دما بر حسب سانتی‌گراد ضرب کنیم.

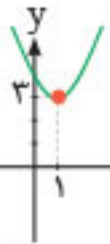
$$\text{جواب مطلوب} = \frac{9}{5} \times 30 = 9 \times 6 = 54$$



۳۷۲. گزینه «۳»: می‌دونیم محور تقارن هر سهمی، خطی به معادله  $x = -\frac{b}{2a}$  است، بنابراین:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \text{محور تقارن } x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(\frac{1}{4})} = \frac{3}{1} = 3$$

۳۷۳. گزینه «۱»: اگر معادله سهمی به شکل  $y = a(x-h)^2 + k$  باشد، ریشه داخلی پراتنز، طول رأس خواهد بود.  $(x-h=0 \Rightarrow x=h)$  ضمناً عددی که پراتنز با اون جمع یا تفریق می‌شه، عرض رأس خواهد بود (که در اینجا برابر  $k$  هست) علامت  $a$  هم نشون می‌ده سهمی رو به بالاست یا پایین. اگر  $a > 0$  باشد، سهمی رو به بالا و اگر  $a < 0$  باشد، سهمی رو به پایین.



$$y = 2(x-1)^2 + 3 \Rightarrow S \left| \frac{1}{2} \right.$$

پس سهمی فقط از نواحی اول و دوم می‌گذره.

گزینه «۲»

$$y - 2 = -3(x+a)^2 + b \xrightarrow{\text{به راست}} y = -3(x+a)^2 + b + 2$$

از طرفی در متن سؤال گفته شده که طول رأس ۲ و عرض رأس ۵ است. بنابراین داریم:

$$x = -a \xrightarrow{\text{طبق فرض } x=2} -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$y = b + 2 \xrightarrow{\text{طبق فرض } y=5} b + 2 = 5 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a \times b = (-2)(3) = -6$$

۳۷۵. گزینه «۳»: چون رأس سهمی بر روی خط عمودی  $x = 2$  قرار داره، بنابراین طول رأس سهمی برابر با  $x = 2$  است:

$$y = -x^2 + ax + 5 \Rightarrow \text{طول رأس سهمی } x = \frac{-b}{2a} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{2(-1)} = 2 \Rightarrow \frac{-a}{-2} = 2 \Rightarrow -a = -4 \Rightarrow a = 4$$

پس معادله سهمی به صورت  $y = -x^2 + 4x + 5$  خواهد بود. حالا مختصات نقاط داده شده در گزینه‌ها رو در معادله سهمی قرار می‌دیم. فقط مختصات نقطه مربوط به گزینه «۳» در اون صدق می‌کنه، بنابراین سهمی از نقطه  $(1, 8)$  می‌گذره (یعنی اگر در سهمی به جای  $x$  عدد ۱ رو بذاریم  $y$  می‌شه ۸).

۳۷۶. گزینه «۲»: می‌دونیم در تابع درجه دوم به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  بیشترین مقدار یا کمترین مقدار تابع برابر  $\frac{-\Delta}{4a}$  است. (همون عرض رأس سهمی است.)

$$\frac{-\Delta}{4a} = 180 \Rightarrow \frac{fac - b^2}{4a} = 180$$

با توجه به معادله تابع  $a = a$ ،  $b = 20$  و  $c = -120$  هستن، بنابراین داریم:

$$\frac{4a(-120) - (20)^2}{4(a)} = 180 \Rightarrow \frac{-480a - 400}{4a} = 180$$

حالا طرفین وسطین انجام می‌دیم:

$$720a = -480a - 400 \Rightarrow 1200a = -400 \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$$

۳۷۷. گزینه «۴»: با توجه به نمودار تابع، جهت نمودار رو به پایین ( $a < 0$ ) پس گزینه «۱» سریع حذف می‌شه. این تابع از نقطه  $(-2, 5)$  می‌گذره، یعنی اگر به جای  $x$ ها در گزینه‌ها عدد  $-2$  رو قرار بدیم، حاصل باید برابر ۵ بشه که در این صورت فقط گزینه «۴» درست خواهد بود.

۳۶۱.  $S(1, 7)$ : اگر معادله سهمی به شکل  $y = a(x-h)^2 + k$  باشه، ریشه داخلی پراتنز، طول رأس و عددی که با اون پراتنز جمع یا تفریق می‌شه، عرض رأس خواهد بود.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y = -2(x-1)^2 + 7 \Rightarrow \text{عرض رأس}$$

$$y = (x-3)^2 \quad 362$$

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{به راست یعنی } x \rightarrow x-3} y = (x-3)^2$$

$$y = x^2 + 4 \quad 363$$

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{یعنی کل تابع رو با 4 جمع کنیم. واحد به بالا}} y = x^2 + 4$$

۳۶۴.  $\pm 1$ : اول ضابطه‌های دو سهمی رو با هم مساوی قرار می‌دیم تا  $x$  یا  $x$ ها به دست بیان.

$$x^2 + x + 1 = -x^2 + x + 3 \Rightarrow x^2 + x^2 = 3 - 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

۳۶۵.  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 20x - 60$ : برای پیدا کردن تابع سود کافیه معادله هزینه راز درآمد کم کنیم.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 40x - (20x + 60)$$

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 20x - 60$$

۳۶۶. ۶۰: تعداد کالاها رو برای ماکزیمم شدن سود از فرمول  $x = -\frac{b}{2a}$  به دست می‌اریم.

$$P(x) = -x^2 + 120x - 80 \begin{cases} a = -1 \\ b = 120 \\ c = -80 \end{cases}$$

$$x = \frac{-120}{2(-1)} = 60$$

۳۶۷. مثبت: دهانه سهمی رو به بالاست و سهمی مینیمم داره.

۳۶۸.  $+6$  و  $-1$ : کافیه جای  $y$ ، صفر بذاریم و معادله درجه دو رو حل کنیم تا  $x$ ها به دست بیان.

$$y = x^2 - 5x - 6 \xrightarrow{y=0} x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-6=0 \Rightarrow x=6 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

۳۶۹.  $y = 4x - (\frac{x}{3})^2$ : عدد رو  $x$  فرض کرده و کل عبارت خواسته شده رو  $y$  فرض می‌کنیم. مربع ثلث عددی، برابر می‌شه با  $(\frac{x}{3})^2$  و چهار برابر  $x$  برابر می‌شه با  $4x$  و اختلاف هم یعنی تفریق یا منهای، پس تابع ما به صورت  $y = 4x - (\frac{x}{3})^2$  می‌شه.

۳۷۰. گزینه «۱»: در تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، طول رأس سهمی  $x = \frac{-b}{2a}$  بوده و برای به دست آوردن عرض رأس سهمی کافیه که طول به دست اومده رو در تابع جای گذاری کنیم (عرض رأس = طول رأس  $f$ )

$$y = 2x^2 - 4x + 1$$

$$\text{طول رأس سهمی } x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{عرض رأس } y = f(\text{طول رأس}) = f(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 1 = -1$$

بنابراین مختصات رأس سهمی، نقطه  $S(1, -1)$  است.

۳۷۱. گزینه «۲»: در هر سهمی به فرم کلی  $f(x) = a(x-m)^2 + n$  نقطه  $(m, n)$  رأس سهمی است (ریشه داخلی پراتنز). در تابع  $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$  ریشه داخلی پراتنز  $-2$  بوده و در نتیجه رأس سهمی نقطه  $(-2, 5)$  است.



تعداد کل نقاط برخورد سه تانگست (دو نقطه برخورد با محور طولها و یک نقطه برخورد با محور عرضها). دقت داریم که هر سهمی، محور  $y$ ها رو همیشه در یک نقطه قطع می‌کنه.

۳۸۳. گزینه «۲»: در سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  محل برخورد با محور  $y$ ها نقطه  $A \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$  بوده و معادله محور تقارن به صورت  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ برخورد با محور } y \text{ ها} \quad y = fx^2 - (k+1)x + 3c \rightarrow 3c = -3 \Rightarrow c = -1$$

$$\text{محور تقارن: } x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{k+1}{2 \times 4} = -1 \Rightarrow k+1 = -2 \Rightarrow k = -3$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ k = -3 \end{cases} \text{ در معادله سهمی قرار می‌دهیم} \rightarrow y = 4x^2 + 8x - 3$$

$$S \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(4)} = -1 \\ y = 4(-1)^2 + 8(-1) - 3 = -7 \end{cases} \quad S(-1, -7)$$

۳۸۴. گزینه «۴»: برای یافتن نقاط تلاقی دو نمودار کافیست ضابطه‌های اون‌ها رو با هم مساوی قرار بدیم:

$$\text{ضابطه خط} = \text{ضابطه سهمی} \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + ax + b = 13 - x$$

طول نقاط برخورد داده شده، پس در رابطه بالا یک بار به جای  $x$ ها عدد ۲ و بار دیگر عدد ۸ رو قرار می‌دهیم و دستگاه حاصل رو حل می‌کنیم.

$$\xrightarrow{x=2} -\frac{1}{4}(2)^2 + a(2) + b = 13 - 2 \Rightarrow 2a + b = 13$$

$$\xrightarrow{x=8} -\frac{1}{4}(8)^2 + a(8) + b = 13 - 8 \Rightarrow 8a + b = 27$$

$$\times(-1) \begin{cases} 2a + b = 13 \\ 8a + b = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = -13 \\ 8a + b = 27 \end{cases} \\ \hline 6a = 24 \Rightarrow a = 4$$

$$2a + b = 13 \xrightarrow{a=4} 2(4) + b = 13 \Rightarrow b = 5$$

$$\text{سهمی: } y = -\frac{1}{4}x^2 + 4x + 5$$

$$\text{طول رأس سهمی: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-\frac{1}{4})} = 4$$

$$\text{در تابع سهمی قرار می‌دهیم} \rightarrow y = -\frac{1}{4}(4)^2 + 4(4) + 5 = 13$$

۳۸۵. گزینه «۳»: رأس سهمی داده شده، پس اول سراغ طول رأس می‌ریزم:

$$y = 3x^2 + ax + b, \quad x_S = -1$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -1 = \frac{-a}{2(3)} \Rightarrow a = 6$$

حالا طول و عرض رأس رو در معادله سهمی قرار می‌دهیم تا  $b$  هم پیدا بشه.

$$y = 3x^2 + 6x + b$$

$$\xrightarrow{\substack{y=-4 \\ x=-1}} -4 = 3(-1)^2 + 6(-1) + b$$

$$-4 = 3 - 6 + b \Rightarrow b = -1$$

$$\text{معادله سهمی: } y = 3x^2 + 6x - 1$$

$$\text{محل تلاقی با محور } y \text{ ها} \quad x=0 \text{ یعنی} \rightarrow y = 3(0)^2 + 6(0) - 1 = -1$$



$$۲ \quad y = -x^2 - 2x + 4 \xrightarrow{x=-2} y = 4 \quad \times$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$۳ \quad y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 \xrightarrow{x=-2} y = 7 \quad \times$$

$$۴ \quad y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{x=-2} y = 5 \quad \checkmark$$

۳۷۸. گزینه «۳»: با توجه به نمودار تابع، جهت نمودار رو به بالاست ( $a > 0$ ) پس زود گزینه «۴» رو حذف می‌کنیم. این تابع از نقطه  $(1, -1)$  می‌گذره. یعنی اگه به جای  $x$ ها در گزینه‌ها عدد ۱ رو قرار بدیم، حاصل باید  $-1$  بشه که فقط گزینه «۳» درست خواهد بود.

$$۱ \quad y = 2x^2 + 4x + 1 \xrightarrow{x=1} y = 7 \quad \times$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$۲ \quad y = 2x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{x=1} y = 1 \quad \times$$

$$۳ \quad y = 2x^2 - 4x + 1 \xrightarrow{x=1} y = -1 \quad \checkmark$$

۳۷۹. گزینه «۲»: از نمودار مشخص می‌شه که: الف) ضریب  $x^2$  باید یک عدد منفی باشه چرا که جهت نمودار رو به پایینه، بنابراین گزینه «۴» حذف می‌شه.

ب) طول رأس نمودار یعنی  $x = -\frac{b}{2a}$  باید یک عدد منفی باشه.

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$۱ \quad y = -2x^2 + 4x - 2 \Rightarrow \text{طول رأس: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = +1 \quad \times$$

$$۲ \quad y = -2x^2 - 4x - 2 \Rightarrow \text{طول رأس: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-4} = -1 \quad \checkmark$$

$$۳ \quad y = -x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \text{طول رأس: } x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1 \quad \checkmark$$

ج) نمودار محور  $x$ ها رو در یک نقطه قطع کرده (مماس بر محور  $x$ هاست). بنابراین معادله  $y = 0$  باید یک جواب داشته باشه. یعنی باید  $\Delta = 0$  باشه که در گزینه‌های «۲» و «۳» اون رو بررسی می‌کنیم.

$$۲ \quad y = -2x^2 - 4x - 2 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$= (-4)^2 - 4(-2)(-2) = 16 - 16 = 0 \quad \checkmark$$

$$۳ \quad y = -x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4 \quad \times$$

۳۸۰. گزینه «۱»: با توجه به شکل، طول رأس سهمی  $-\frac{1}{4}$  است. بنابراین

خواهیم داشت:  $x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -\frac{1}{4} = \frac{-a}{2(2)} \Rightarrow a = 2$

چون تابع از نقطه  $(1, 0)$  می‌گذره، می‌تونیم این نقطه رو در ضابطه تابع جای گذاری کنیم:

$$y = 2x^2 + ax + b \xrightarrow{\substack{a=2 \\ \text{نقطه } (1,0)}} 2(1)^2 + 2(1) + b = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 2 + b = 0 \Rightarrow b = -4$$

۳۸۱. گزینه «۲»: برخورد با محور  $y$ ها در نقطه‌ای رخ می‌ده که  $x = 0$  باشه.

$$y = -2(x+2)^2 - 3 \xrightarrow{x=0} y = -2(0+2)^2 - 3 = -2(4) - 3 = -11$$

۳۸۲. گزینه «۴»: نقطه برخورد نمودار با محورهای مختصات شامل دو قسمت می‌شه. برخورد با محور عرضها و برخورد با محور طولها.

برای یافتن نقطه برخورد نمودار با محور  $x$ ها به جای  $y$  یا همان  $f(x)$  صفر گذاشته و معادله رو حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(-1)(-2) = 25 - 8 = 17 > 0$$

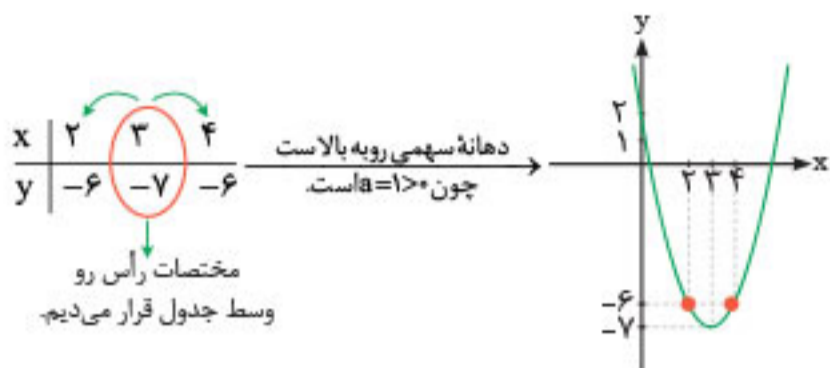
چون  $\Delta > 0$  شد، پس معادله دو جواب داره، بنابراین سهمی محور  $x$ ها رو در دو نقطه قطع می‌کنه.



۳۹۱ الف ابتدا رأس سهمی رو با فرمول  $x = -\frac{b}{2a}$  به دست میاریم.

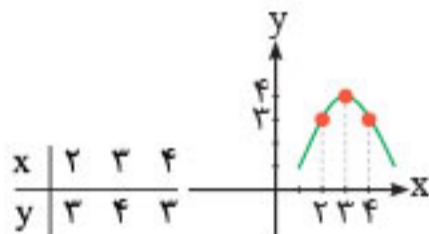
$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x=3 \text{ رو در تابع جای گذاری می کنیم} \rightarrow y = (3)^2 - 6(3) + 2 = -7 \Rightarrow S \begin{cases} x=3 \\ y=-7 \end{cases}$$



ب ابتدا رأس سهمی رو به دست میاریم.

ریشه داخل پرانتز، طول رأس یا همون معادله محور تقارن است، عددی که با پرانتز جمع می شه (+4) هم عرض رأس است.  $y = -(x-3)^2 + 4 \Rightarrow S(3, 4)$   
ضمناً سهمی ماکزیمم داره چون علامت پشت پرانتز، منفیه. حالا با نقطه یابی سهمی رو رسم می کنیم:



۳۹۲  $y = x^2 + 4x - 5$  یافتن محل برخورد با محور x ها  $\rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

تجزیه یا اتحاد جمله مشترک  $\rightarrow (x-1)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$

A | 1      B | -5

$y = x^2 + 4x - 5$  یافتن محل برخورد با محور y ها  $\rightarrow y = (0)^2 + 4(0) - 5 \Rightarrow C | -5$

۳۹۳ برای یافتن نقطه یا نقاط احتمالی تلاقی، ضابطه هاشون رو با هم مساوی قرار می دیم و معادله حاصل رو حل می کنیم.

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 2x + 2 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 2x + 2 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x + 2 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

برای یافتن عرض نقطه برخورد، عدد ۱- رو در یکی از دو فرمول سهمی قرار می دیم.

$$y = 2x^2 + 2x + 2 \xrightarrow{x=-1} y = 2(-1)^2 + 2(-1) + 2 = 2$$

۳۹۴ الف ابتدا تابع سود رو تشکیل می دیم و سپس از فرمول طول رأس، تعداد کالاها رو پیدا می کنیم:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 8x - 1 = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 1$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-\frac{1}{4})} = 4$$

یعنی اگه ۴ عدد کالا تولید شه، سود شرکت ماکزیمم می شه.

۳۸۶ گزینه «۱»: عدد مورد نظر رو X در نظر می گیریم. در این صورت مربع نصف اون برابر می شه با  $\frac{x^2}{4} = (\frac{x}{2})^2$  و شش برابر اون، برابر می شه با ۶X بنابراین اختلاف مربع نصف عدد از ۶ برابر همون عدد به صورت  $6x - \frac{x^2}{4}$  نمایش داده می شه.

عبارت  $y = 6x - \frac{x^2}{4}$  در واقع معادله یک سهمی است.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{1}{4})} = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} = 12$$

حالا ۱۲ رو به جای X ها در تابع سهمی قرار می دیم.

$$y = \frac{-x^2}{4} + 6x \xrightarrow{x=12} y = -\frac{(12)^2}{4} + 6(12) = -\frac{144}{4} + 72 = -36 + 72 = 36$$

۳۸۷ گزینه «۴»: عدد رو X گرفته، پس مربعش می شه  $x^2$  و  $\frac{1}{9}$  مربع اون، برابر می شه با  $\frac{1}{9}x^2$ ، ۶ برابر عدد هم می شه ۶X، حالا تابع خواسته شده رو تشکیل می دیم و اسمش رو می ذاریم y:

$$y = 6x - \frac{1}{9}x^2 \xrightarrow{\text{مرتب می کنیم}} y = -\frac{1}{9}x^2 + 6x$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{1}{9})} = 27$$

$$\xrightarrow{\text{در تابع قرار می دیم}} y = -\frac{1}{9}(27)^2 + 6(27) = -\frac{1}{9} \times 27 \times 27 + 6 \times 27 = 81$$

۳۸۸ گزینه «۳»: محیط مستطیل  $2(a+b)$  و مساحت آن ab است.

$$2(a+b) = 30 \Rightarrow a+b = 15 \Rightarrow b = 15-a$$

$$\text{مساحت} = ab = a(15-a) = -a^2 + 15a$$

برای بهینه سازی این عبارت، رأس سهمی معادله رو به دست میاریم. توجه کنیم که طول رأس سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  برابر  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

$$a_{\text{بهینه}} = \frac{-15}{-2} = \frac{15}{2}$$

حالا  $a = \frac{15}{2}$  رو در عبارت قرار می دیم.

$$-\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 15\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{-225}{4} + \frac{225}{2} = \frac{225}{4} = 56\frac{1}{4}$$

۳۸۹ گزینه «۳»: طول مستطیل رو X و عرضش رو Y فرض کرده و از روش نصف کردن استفاده می کنیم:

$$y \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} y$$

$$\text{طول سیم: } x + 2y = 56$$

$$\xrightarrow{\text{عدد ثابت رو نصف می کنیم}} \begin{cases} x = 28 \\ 2y = 28 \Rightarrow y = \frac{28}{2} = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{بیشترین مساحت} = xy = 28 \times 14 = 392$$

۳۹۰ گزینه «۱»

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به راست یعنی}} y = (x-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به پایین یعنی کل تابع رو منهای ۴ می کنیم}} y = (x-1)^2 - 4$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد رو باز می کنیم}} y = x^2 - 2x + 1 - 4 \Rightarrow y = x^2 - 2x - 3$$



$$y = -x^2 - 4mx + 4 \quad 400$$

$$x = -\frac{b}{2a} \quad x = -2 \rightarrow -2 = \frac{-(-4m)}{2(-1)} = -2m \Rightarrow m = \frac{2}{2}$$

$$y = -x^2 - 4mx + 4 \xrightarrow{m=\frac{2}{2}} y = -x^2 - 6x + 4$$

$$\xrightarrow{x=-2} y = -(-2)^2 - 6(-2) + 4 = -9 + 12 + 4 = 13$$

پس بیشترین مقدار تابع (عرض رأس سهمی) برابر با ۱۳ است.

۴۰۱. ابتدا  $y$  یا  $x$  رو تنها می‌کنیم.

$$8x + 4y = 24 \Rightarrow 4y = -8x + 24 \Rightarrow y = -2x + 6$$

$$\text{عبارت اصلی} = 2xy = 2x(-2x + 6) = -4x^2 + 12x$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{2(-4)} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -2x + 6$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2} \text{ رو جای گذاری می‌کنیم}} y = -2\left(\frac{3}{2}\right) + 6 = 3$$

$$2xy \text{ بیشترین مقدار} = 2\left(\frac{3}{2}\right)(3) = 9$$

۴۰۲. عدد مورد نظر رو  $x$  و کل عبارت خواسته شده رو  $y$  فرض می‌کنیم. ۴ برابر مربع  $x$  برابر می‌شه با  $4x^2$  و ۸ برابر  $x$  برابر با  $8x$  می‌شه، پس تابع ما به صورت مقابل خواهد بود.

$$y = 8x - 4x^2 \xrightarrow{\text{مرتب می‌کنیم}} y = -4x^2 + 8x$$

$$x \text{ طول رأس} = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-4)} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{در تابع بالا قرار می‌دیم}} y = -4(1)^2 + 8(1) = 4$$

۴۰۳. یک طرف زمین، رودخونه‌اس. پس مستطیل ما

سه ضلع داره و طبق فرض، مجموع این سه ضلع (که در واقع همون محیط مستطیل) برابر ۶۰ هست.

$$y + x + y = 60 \Rightarrow x + 2y = 60 \xrightarrow{\text{از روش نصف کردن می‌ریزم}} \begin{cases} x = 30 \\ 2y = 30 \Rightarrow y = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{بیشترین مقدار مساحت مستطیل} = xy = 30 \times 15 = 450$$

۴۰۴. ابتدا  $x$  رو به  $(x-4)$  تبدیل می‌کنیم:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}} y = (x-4)^2$$

$$y = (x-4)^2 \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} y = (x-4)^2 - 2 = x^2 - 8x + 14$$

$$y = a(x-x_s)^2 + y_s \Rightarrow y = a(x-2)^2 + 6 \quad 405$$

$$\xrightarrow{A \begin{cases} 1 \rightarrow x \\ 3 \rightarrow y \end{cases}} 3 = a(-1-2)^2 + 6 \Rightarrow 3 = 9a + 6$$

$$\Rightarrow 9a = -3 \Rightarrow a = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

پس معادله سهمی به این شکل خواهد بود:

$$y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 6$$

محل برخورد با محور  $y$ ها یعنی جایی که  $x=0$  است، لذا:

$$y = -\frac{1}{3}(0-2)^2 + 6 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{1}{3}(0-2)^2 + 6 = \frac{14}{3}$$



ب. حالا عدد ۴ رو در تابع سود به جای  $x$  ها قرار می‌دیم.

$$P = \frac{-1}{2}x^2 + 4x - 1 \xrightarrow{x=4} P_{\max} = -\frac{1}{2}(4)^2 + 4(4) - 1$$

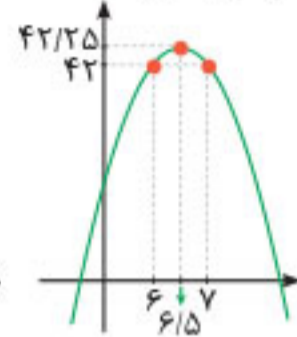
$$= -\frac{1}{2}(16) + 16 - 1 = -8 + 16 - 1 = 7$$

ماکزیم سود برابر ۷ است.

۳۹۵. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن رو با  $x$  و ضلع دیگر رو با  $y$  نشون بدیم، محیط مستطیل به صورت  $2(x+y)$  هست.

$$2(x+y) = 26 \Rightarrow x+y = 13 \Rightarrow y = 13-x$$

$$S = xy = x(13-x) = 13x - x^2 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-13}{2(-1)} = \frac{13}{2} = 6.5$$



$x$	6	6.5	7
$y$	42	42.25	42

۳۹۶. ابتدا  $a$  رو تنها می‌کنیم.

$$2x + a = 1000 \Rightarrow a = 1000 - 2x$$

$$y = x.a \Rightarrow y = x(1000 - 2x) = -2x^2 + 1000x$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(1000)}{2(-2)} = \frac{1000}{4} = 250$$

$$a = 1000 - 2x \Rightarrow a = 1000 - 2(250) = 500$$

$$x.a \text{ بیشترین مقدار} = 250 \times 500 = 125000$$

۳۹۷. ابتدا تابع درآمد رو به دست میاریم:  $R(x) = x.p$  تابع درآمد

$$R(x) = x.200 \Rightarrow R(x) = 200x$$

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow 200x - (x^2 + 40x + 1000)$$

$$\Rightarrow P(x) = -x^2 + 160x - 1000$$

ب. تعداد کالاهایی که سود رو ماکزیم کنه.  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{2(-1)} = 80$

ج. برای بیشترین سود کافیه عدد ۸۰ رو در معادله سود جای گذاری کنیم:

$$P(80) = -(80)^2 + 160(80) - 1000 = 6300$$

۳۹۸. ابتدا تابع سود رو به دست میاریم:

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 30x - 18x - 40$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 40 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-\frac{1}{2})} = 12$$

$$\Rightarrow P(12) = -\frac{1}{2}(12)^2 + (12)(12) - 40 = 32$$

۳۹۹. عدد مورد نظر رو  $x$  فرض کرده و تابع خواسته شده رو تشکیل می‌دیم.

مربع عدد می‌شه  $x^2$  و سه برابر آن عدد برابر می‌شه با  $3x$ . در نتیجه تفاضل مربع عدد از سه برابر اون برابر  $3x - x^2$  است. لذا داریم:

$$y = 3x - x^2 \xrightarrow{\text{بهتره استاندارد بنویسیم}} y = -x^2 + 3x$$

چون به تابع درجه دو رسیدیم، بهتره از فرمول طول رأس سهمی استفاده کنیم.

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(-1)} = \frac{3}{2}$$

حالا در تابع به جای  $x$ ها عدد  $\frac{3}{2}$  رو قرار می‌دیم.

$$y = -x^2 + 3x = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$$

۴۱۱. گزینه ۲: محور تقارن  $y = ax^2 + bx + c$  به صورت  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

$$y = ax^2 + 2x + c \Rightarrow x = -\frac{2}{2a} = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

عرض رأس سهمی  $y = 1$  است. پس  $S(-1, 1)$  در تابع صدق می‌کند.

$$y = \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \xrightarrow{S(-1,1)} 1 = \frac{3}{2} - 2 + c$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{2} \Rightarrow ac = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

۴۱۲. گزینه ۲: اگر  $a < 0$  تابع  $y = ax^2 + bx + c$  دارای ماکزیمم بوده و

$$\text{طول آن } x = \frac{-b}{2a} \text{ باشد. } 1 - 18m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{18}$$

$$x = \frac{-\lambda(m^2 + 1)}{2(1 - 18m)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 16m^2 - 36m + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (4m - 6)(4m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

هر دو مقدار بزرگ‌تر از  $\frac{1}{18}$  هستن و قابل پذیرش‌اند.

۴۱۳. گزینه ۴:  $a = -1/5c$  طبق فرض  $y = ax + b \Rightarrow$  شیب =  $a$

$$y = cx + d \Rightarrow \text{شیب} = c$$

محل برخورد دو خط، نقطه  $A(-2, 0)$  است. پس این نقطه رو در هر دو معادله خط قرار می‌دیم:

$$y = ax + b \xrightarrow{A(-2,0)} a(-2) + b = 0 \Rightarrow -2a + b = 0$$

$$\xrightarrow{a = -1/5c} -2(-1/5c) + b = 0 \Rightarrow 2c + b = 0 \Rightarrow c = \frac{-b}{2} \quad (1)$$

$$y = cx + d \xrightarrow{A(-2,0)} c(-2) + d = 0 \Rightarrow c = \frac{d}{2} \quad (2)$$

مقدار  $c$  به دست اومده از دو رابطه (۱) و (۲) رو با هم مساوی قرار می‌دیم:

$$\frac{-b}{2} = \frac{d}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2b = -2d \Rightarrow b = -d$$

حالا تابع  $f(x)$  رو نوشته و ضابطه اون رو تا جای ممکن ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \left(\frac{c}{2}x + d\right)^2 - (ax + b)^2 = \frac{c^2x^2}{4} + d^2 + cdx - a^2x^2 - 2abx - b^2$$

$$= \left(\frac{c^2}{4} - a^2\right)x^2 + (cd - 2ab)x + d^2 - b^2$$

$$\text{محور تقارن: } x = \frac{-b}{2a} = -\frac{(cd - 2ab)}{2\left(\frac{c^2}{4} - a^2\right)}$$

$$= \frac{-\left(\frac{d}{2}\right)d + 2\left(-1/5\frac{d}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}d\right)}{2\left(\frac{d^2}{16} - \left(-1/5\frac{d}{2}\right)^2\right)} = \frac{-\frac{d^2}{2} + \frac{3/5d^2}{2}}{\frac{d^2}{8} - \frac{2 \times 3/5d^2}{4}}$$

$$= \frac{d^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3/5}{2}\right)}{d^2\left(\frac{1}{8} - \frac{3/5}{4}\right)} = \frac{3/5}{-1} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$y = (m-1)x^2 - mx + \frac{1}{4}m \quad \text{گزینه ۴}$$

$$m > 1 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow \text{ضریب } x^2 > 0 \Rightarrow \text{سهمی مینیمم داره}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(m-1)\left(\frac{1}{4}m\right) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - m^2 + m < 0 \Rightarrow m < 0$$

هیچ مقداری برای  $m$  وجود نداره  $\Rightarrow \emptyset$  اشتراک  $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$

۴۰۶. طول نقاط برخورد با محور  $x$ ها داده شده‌اند:

پس اون‌ها رو در فرمولی که گفتیم، قرار می‌دیم.

$$y = a(x-2)(x-5) \xrightarrow{\text{حالا مختصات } A \text{ رو به جای } x \text{ و } y \text{ می‌ذاریم}} -3 = a(1-2)(1-5)$$

$$\Rightarrow -3 = 4a \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

پس اون‌ها رو در فرمولی که گفتیم، قرار می‌دیم. پس ضابطه یا فرمول سهمی

برابر می‌شه با:

$$y = -\frac{3}{4}(x-2)(x-5)$$

۴۰۷

$$A \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 2 \Rightarrow a - b = 1 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} a(4)^2 + b(4) + 1 = 3 \Rightarrow 16a + 4b = 2 \end{cases}$$

حالا با حل دستگاه مقادیر  $a$  و  $b$  هم به دست میان، برای حل دستگاه کافیه

$a - b$  رو در عدد ۴ ضرب کنیم

$$\times(4) \begin{cases} a - b = 1 \\ 16a + 4b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 4b = 4 \\ 16a + 4b = 2 \end{cases}$$

$$20a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$a - b = 1 \xrightarrow{a = \frac{3}{10}} \frac{3}{10} - b = 1 \Rightarrow b = -\frac{7}{10}$$

$$y = \frac{3}{10}x^2 - \frac{7}{10}x + 1$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-\frac{7}{10}\right)}{2\left(\frac{3}{10}\right)} = \frac{7/10}{6/10} = \frac{7}{6}$$

۴۰۸. همزمان که عرض مستطیل زیاد می‌شه، طولش کم می‌شه، پس به صورت

زیر عمل می‌کنیم:

$$y = (60 - 2x) \times (20 + x) = 1200 + 60x - 40x - 2x^2$$

$$\Rightarrow y = -2x^2 + 20x + 1200 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-2)} = 5$$

$$y = -2x^2 + 20x + 1200 \xrightarrow{x=5} y_S = -2(5)^2 + 20(5) + 1200 = 1250$$

۴۰۹. تابع درآمد:  $R = x.p = x.300 = 300x$

$$\text{تابع سود: } P(x) = R(x) - C(x) = 300x - x^2 - 60x - 500 = -x^2 + 240x - 500$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-240}{2(-1)} = 120$$

پس اگه ۱۲۰ عدد لامپ تولید بشه، سود به حداکثر مقدار خودش می‌رسه.

۴۱۰. همیشه اول می‌ریم سراغ طول رأس، در شکل داده شده، طول رأس سهمی برابر ۱- هست. پس خواهیم داشت:

$$y = x^2 - kx + 2m - 1 \quad a = 1, b = -k$$

$$\text{طول رأس: } x = \frac{-b}{2a} \xrightarrow{x=-1} -1 = \frac{-(-k)}{2(1)} \Rightarrow k = -2$$

حالا مختصات رأس یعنی  $S(-1, 1)$  رو در ضابطه تابع قرار می‌دیم تا  $m$  هم به دست بیاد.

$$y = x^2 + 2x + 2m - 1 \xrightarrow{S(-1,1)} 1 = (-1)^2 + 2(-1) + 2m - 1$$

$$\Rightarrow 2m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow m \times k = \frac{3}{2} \times (-2) = -3$$



حالا باید معادله تلاقی خط و سهمی رو تشکیل بدیم. یعنی فرمول شون رو با هم مساوی قرار می‌دیم:

$$f = g \Rightarrow \frac{1}{5}(x-5)^2 - 2 = 2x - 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}(x^2 - 10x + 25) = 2x$$

$$\xrightarrow{\times 5} x^2 - 10x + 25 = 10x \Rightarrow x^2 - 20x + 25 = 0$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-20)}{1} = 20$$

۴۲۰. از روش نصف کردن استفاده می‌کنیم:

$$fa + 2b = 48 \Rightarrow \begin{cases} fa = 24 \Rightarrow a = 6 \\ 2b = 24 \Rightarrow b = 12 \end{cases} \Rightarrow a - b = 6 - 12 = -6$$

$$2x + a = 8 \Rightarrow a = -2x + 8$$

$$\Rightarrow y = x^2 + a^2 = x^2 + (-2x + 8)^2 = x^2 + 4x^2 - 32x + 64$$

$$y = 5x^2 - 32x + 64 \Rightarrow \text{کمترین مقدار} = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$= \frac{-(32^2 - 4(5)(64))}{4(5)} = \frac{-(1024 - 1280)}{20} = 12.8$$

۴۲۲. (فکر کنم طراح این سؤال معلم ادبیات هم بوده، چون بیانش به کم عجیب غریبه) ضلع مربع رو  $x$  فرض می‌کنیم، عبارت «فزوننی محیط از مساحت» یعنی باید محیط رو منهای مساحت کنیم:

$$y = 4x - x^2 \xrightarrow[\text{استاندارد بنویسیم}]{\text{بهرتره به شکل}} y = -x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

$$\xrightarrow[\text{قرار می‌دیم}]{x=2 \text{ در تابع}} y_s = -2^2 + 4(2) = -4 + 8 = 4$$

البته می‌تونیم بدون محاسبه طول رأس، مستقیماً عرض رأس رو از فرمول

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} \text{ به دست بیاریم.} \quad y_s = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-16}{-4} = 4$$

۴۲۳. اگه قاعده مثلث رو  $x$  و ارتفاعش رو  $y$  فرض کنیم، با توجه به اطلاعات

مسئله، می‌شه این طوری نوشت:

$$x + 3y = 48 \xrightarrow[\text{کردن}]{\text{روش نصف}} \begin{cases} x = \frac{48}{2} = 24 \text{ قاعده} \\ 3y = \frac{48}{2} = 24 \Rightarrow y = 8 \text{ ارتفاع} \end{cases}$$

$$\text{بیشترین مساحت مثلثها} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{24 \times 8}{2} = 96$$

۴۲۴. با زیاد شدن تعداد درخت‌ها، مقدار محصول کم می‌شه، پس از روشی

که در درسنامه گفتیم، استفاده می‌کنیم: مقدار محصول تعداد درخت

$$y = (20 + 1x)(60 - 2x) = 1200 - 40x + 60x - 2x^2$$

$$\Rightarrow y = -2x^2 + 20x + 1200 \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-2)} = 5$$

$$\xrightarrow[\text{در تابع قرار می‌دیم}]{y} y = -2(5)^2 + 20(5) + 1200 = 1250$$

۴۲۵. باز هم سوآلی شبیه سوآل قبلی داریم. در اینجا با زیاد شدن تعداد

قطعه‌ها مقدار دستمزد کم می‌شه، پس به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$y = (80 + 1x)(450 - 5x) = 36000 - 400x + 450x - 5x^2$$

$$= -5x^2 + 50x + 36000 \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2(-5)} = 5$$

$$\xrightarrow[\text{در تابع قرار می‌دیم}]{y} y_s = -5(5)^2 + 50(5) + 36000 = 36125$$

$$y = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow -2 = \frac{-(fa^2 - 4(\frac{1}{2})(1))}{4(\frac{1}{2})}$$

۴۱۵. گزینه ۲

$$\Rightarrow 4a^2 - 2 = 4 \Rightarrow 4a^2 = 6 \Rightarrow a^2 = \frac{6}{4}$$

$$\Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{6}{4}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۴۱۶. طول رأس سهمی از رابطه  $x = -\frac{b}{2a}$  به دست میاد که با توجه به نمودار +۱ است، بنابراین:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 1 = \frac{-a}{2(-2)} \Rightarrow 1 = \frac{-a}{-4} \Rightarrow a = 4$$

حالا با توجه به اینکه سهمی از نقطه  $(-1)$  می‌گذره، مختصات این نقطه باید در ضابطه تابع صدق کنه:

$$y = -2x^2 + 4x + b \xrightarrow{x=-1, y=0} 0 = -2(-1)^2 + 4(-1) + b$$

$$\Rightarrow 0 = -2 - 4 + b \Rightarrow b = 6$$

۴۱۷. رأس سهمی نقطه  $S(4, 1)$  هست و سهمی از نقطه  $A(1, -1)$  هم می‌گذره. چون رأس رو داریم، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow y = a(x - 4)^2 + 1$$

$$\xrightarrow[A \begin{matrix} \uparrow x \\ \uparrow y \end{matrix}]{-1} -1 = a(1 - 4)^2 + 1 \Rightarrow -1 = 9a + 1$$

$$\Rightarrow 9a = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{9}$$

$$y = \frac{-2}{9}(x - 4)^2 + 1 \xrightarrow[\text{یعنی}]{\text{محل برخورد با محور } y} y = \frac{-2}{9}(-4)^2 + 1$$

$$= \frac{-2}{9} \times 16 + 1 = \frac{-32}{9} + 1 = \frac{-23}{9}$$

پس محل برخورد با محور  $y$ ها نقطه  $B \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{23}{9} \end{pmatrix}$  است.

۴۱۸. طول نقاط برخورد با محور  $x$ ها به ما داده شده، یعنی  $\alpha = 2$  و  $\beta = 4$ .

لذا معادله سهمی به شکل زیر است:

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta) \Rightarrow y = a(x - 2)(x - 4)$$

حالا مختصات نقطه  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  رو هم در معادله بالا قرار می‌دیم:

$$6 = a(0 - 2)(0 - 4) \Rightarrow 6 = 8a \Rightarrow a = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ضابطه سهمی: } y = \frac{3}{4}(x - 2)(x - 4)$$

$$\xrightarrow{x=1} y = \frac{3}{4}(1)(6) = 3.6$$

۴۱۹. ابتدا معادله خط  $g$  رو به دست میاریم:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-2)}{1 - 0} = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x - 2$$

حالا سراغ سهمی  $f$  می‌رویم. رأس  $S \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  و یک نقطه از سهمی رو داریم، لذا:

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow y = a(x - 5)^2 - 2$$

$$\xrightarrow[C \begin{matrix} \uparrow x \\ \uparrow y \end{matrix}]{3} 3 = a(1 - 5)^2 - 2 \Rightarrow 3 = 25a - 2$$

$$\Rightarrow 25a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

پس معادله سهمی به صورت روبه‌رو است:

$$y = \frac{1}{5}(x - 5)^2 - 2$$



$$\begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{-6}{5} \\ c = \frac{6}{5} \end{cases}$$

با معادله داده شده مقایسه‌اش می‌کنیم

$$\Rightarrow a+b+c = \frac{3}{5} - \frac{6}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$$

۴۲۰. اول می‌ایم اون (-۱) داخل پرانتز رو از بین می‌بریم:

$$y = -(x-1)^2 - 3 \xrightarrow{\text{واحد به چپ}} y = -(x+1-1)^2 - 3 = -x^2 - 3$$

$$\xrightarrow{\text{حالا اون ۳- رو با ۳ واحد حرکت به بالا ناپود می‌کنیم}} y = -x^2 - 3 + 3 = -x^2$$

$$\xrightarrow{\text{حالا منفی پشت x رو با قرینه کردن نسبت به محور x ها ناپود می‌کنیم}} y = x^2$$

$$y = x^2 - 4x \xrightarrow{\text{واحد به چپ یعنی}} y = (x+2)^2 - 4(x+2) \quad ۴۲۱$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها یعنی به کل تابع منفی بدیم}} y = -x^2 - 4x - 4 + 4x + 8 = -x^2 + 4$$

## پاسخ سوالات فصل سوم درس ۱

۴۲۲. نادرست: چون صفر اون قراردادی نیست.

۴۲۳. درست: درست که رتبه‌ها با عدد بیان می‌شن ولی کیفی هستن نه کمی. چون قابل اندازه‌گیری یا شمارش نیستن، ضمناً قابل مقایسه و مرتب کردن هستن، پس مقیاس اندازه‌گیری اون‌ها ترتیبی.

۴۲۴. نادرست: متغیر کیفی به دو دسته ترتیبی و اسمی تقسیم‌بندی می‌شه. درست

۴۲۵. درست: پارامتر ثابت و آماره متغیر است.

۴۲۶. نادرست: طبق متن کتاب دادگان شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده‌اند.

۴۲۷. درست: پارامتر ثابت و آماره‌ها از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کنه.

۴۲۸. نادرست: داده‌ها واقعیت‌هایی درباره یک چیزند که در محاسبه، استنباط یا برنامه‌ریزی به کار میرن.

۴۲۹. درست: طبق متن کتاب درسی درست است.

۴۳۰. درست: گروه خونی و شماره دانش آموزی قابل اندازه‌گیری نیستن، پس متغیر کیفی هستن و از طرفی ترتیبی در اون‌ها وجود نداره.

۴۳۱. نادرست: طبق متن کتاب تعریف نمونه‌اس.

۴۳۲. درست

۴۳۳. درست: بعضی از سازمان‌ها دادگان‌ها اطلاعات ثبتی خودشون رو در اختیار همگان قرار نمی‌دن و هماهنگی بسیار سخته.

۴۳۴. نادرست: متغیرهای فیزیکی مانند نمره، وزن و قد دانش‌آموزان نسبتی هستن، در این مقیاس صفر به معنای نبود ویژگی در فرد یا شیء است.

۴۳۵. نادرست: در این مقیاس صفر قراردادی است.

۴۳۶. داده‌ها

۴۳۷. واحد آماری

۴۳۸. جامعه آماری

۴۳۹. نمونه

۴۴۰. نمونه تصادفی

۴۴۱. دادگان‌ها

۴۴۲. مشاهده

$$R(x) = 3000x$$

۴۲۶

$$P(x) = R(x) - C(x) = 3000x - x^2 - 600x - 1000$$

$$= -x^2 + 2400x - 1000$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2400}{2(-1)} = 1200$$

$$\xrightarrow{\text{در تابع درآمد قرار می‌دیم}} R = 3000 \times 1200 = 3600000 \text{ تومان}$$

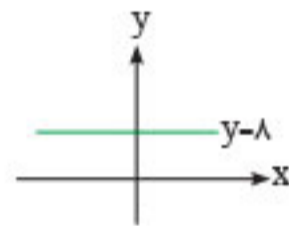
۴۲۷. گزینه «۴»: ضابطه دو تابع رو با هم مساوی قرار می‌دیم تا معادله برخورد (تلاقی) به دست بیاد. سپس دلتای معادله حاصل رو برابر صفر قرار می‌دیم. چون گفته شده خط و سهمی فقط در یک نقطه با هم تلاقی دارن.

$$x^2 - 2x = 3 - k \Rightarrow x^2 - 2x - 3 + k = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4(1)(-3+k) = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 12 - 4k = 0 \Rightarrow 4k = 16 \Rightarrow k = 4$$

پس خط  $y = 2k$  به صورت  $y = 8$  درمیاد که از نواحی اول و دوم می‌گذره.



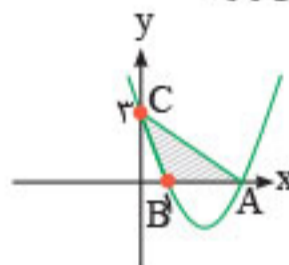
$$y = x^2 - 4x + 3 \xrightarrow{\text{تلاقی با محور y ها یعنی}} y = (0)^2 - 4(0) + 3 = 3 \quad ۴۲۸$$

$$\Rightarrow C \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$

$$y = x^2 - 4x + 3 \xrightarrow{\text{تلاقی با محور x ها یعنی}} x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \quad A \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases} \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad B \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

پس نمودار سهمی به شکل زیره.



$$ABC \text{ مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{AB \times OC}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$$

۴۲۹. اول باید فرمول سهمی داده شده رو به دست بیاریم. نقاط برخورد سهمی با محور xها و یک نقطه دیگر داده شده‌اند، لذا:

$$y = a(x-\alpha)(x-\beta) \xrightarrow{\alpha=-2, \beta=2} y = a(x+2)(x-2)$$

$$\xrightarrow{A \begin{cases} 3 \rightarrow x \\ 3 \rightarrow y \end{cases}} 3 = a(3+2)(3-2) \Rightarrow 5a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

$$\text{معادله سهمی} y = \frac{3}{5}(x+2)(x-2) = \frac{3}{5}(x^2-4) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{12}{5} \xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = \frac{3}{5}(x-1)^2 - \frac{12}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = \frac{3}{5}(x-1)^2 - \frac{12}{5} + 3 = \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}$$



۴.  $x^2 + 3x - 1 = 0 \rightarrow (x+5)(x-2) = 0$  (تجزیه با جمله مشترک) (۰/۲۵) الف

$\Rightarrow \begin{cases} x+5=0 \Rightarrow x=-5 & (۰/۲۵) \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 & (۰/۲۵) \end{cases}$

ب.  $4y^2 - 4 = 0 \rightarrow (2y-2)(2y+2) = 0$  (تجزیه با مزدوج) (۰/۲۵)

$\Rightarrow \begin{cases} 2y=2 \Rightarrow y=1 & (۰/۲۵) \\ 2y=-2 \Rightarrow y=-1 & (۰/۲۵) \end{cases}$

$3x+5 = x-7 \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow x = -6$  (۰/۲۵)

الف.  $x^2 + 8x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x = -15$  (۰/۲۵)

$x^2 + 8x + 16 = 16 - 15 \Rightarrow (x+4)^2 = 1$  (۰/۲۵)

$\Rightarrow (x+4) = \pm 1$  (۰/۲۵)

$\Rightarrow \begin{cases} x+4=1 \Rightarrow x=-3 & (۰/۲۵) \\ x+4=-1 \Rightarrow x=-5 & (۰/۲۵) \end{cases}$

ب.  $2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(-5) = +49$  (۰/۲۵)

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+7}{4} = +1 & (۰/۲۵) \checkmark \\ x_2 = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2} & (۰/۲۵) \checkmark \end{cases}$

۷.  $x=2$  در معادله صدق می‌کند، یعنی:

$4 - 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$  (۰/۲۵)

$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-3)(x-2) = 0$  (تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک) (۰/۲۵)  $\Rightarrow \begin{cases} x=3 & (۰/۲۵) \\ x=2 & (۰/۲۵) \end{cases}$

۸.  $\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1} = 0 \rightarrow \frac{5(x-1) + 3(x+3)}{(x+3)(x-1)} = 0$  (مخرج مشترک گیری) (۰/۵)

$\Rightarrow \frac{5x - 5 + 3x + 9}{(x+3)(x-1)} = 0 \rightarrow \frac{8x + 4}{(x+3)(x-1)} = 0$  (طرفین وسطین) (۰/۲۵)

$\Rightarrow 8x = -4 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$  (۰/۲۵)

الف.  $\begin{cases} 2 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} & (۰/۲۵) \\ y = -6 & (۰/۲۵) \end{cases}$

ب.  $\begin{cases} 2x + y = 2 & (۰/۲۵) \\ 3x - 2y = x + 1 & (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 & (۰/۲۵) \\ 2x - 2y = 1 & (۰/۲۵) \end{cases}$

$\begin{cases} 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} & (۰/۲۵) \\ 2x + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} & (۰/۲۵) \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} & (۰/۲۵) \end{cases}$

تابع هزینه - تابع درآمد = تابع سود الف

$P(x) = 600x - 10x^2 - (300 + 400x)$  (۰/۲۵)

$P(x) = 600x - 10x^2 - 400x - 300$

$\Rightarrow P(x) = -10x^2 + 200x - 300$  (۰/۵)

ب.  $P(10) = -10(10)^2 + 200(10) - 300$

$= -1000 + 2000 - 300 = 700$  (۰/۲۵)

۷۸۸. اگر تعداد متغیرها رو در حالت اول  $x$  در نظر بگیریم، تعداد متغیرها در حالت دوم  $2x$  خواهد شد. زاویه بین هر دو محور متوالی در نمودار راداری از رابطه مقابل به دست میاد:  $\frac{360}{\text{تعداد متغیرها}} = \text{زاویه بین هر دو محور متوالی}$

$\frac{360}{x} = \text{زاویه بین هر دو محور متوالی در حالت اول}$

$\frac{360}{2x} = \frac{180}{x} = \text{زاویه بین هر دو محور متوالی در حالت دوم}$

۵. زاویه حالت دوم رو از حالت اول کم می‌کنیم و برابر  $30^\circ$  قرار می‌دیم تا  $x$  به دست بیاد:

$\frac{360}{x} - \frac{180}{x} = 30 \Rightarrow \frac{360 - 180}{x} = 30 \Rightarrow \frac{180}{x} = 30$

$\Rightarrow 30x = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{30} = 6$

تعداد متغیرها در حالت اول:  $x = 6$

تعداد متغیرها در حالت دوم:  $2x = 2(6) = 12$

۷۸۹. اگر تعداد متغیرهای اولیه رو  $N$  بگیریم، خواهیم داشت:  $\alpha = \frac{360}{N}$  حالا دو متغیر کم می‌شه و زاویه  $\alpha$  جدید برابر می‌شه با:

$\alpha_f = \frac{360}{N} \Rightarrow \alpha + 2 = \frac{360}{N-2} \Rightarrow \frac{360}{N} + 2 = \frac{360}{N-2}$

ضرب تمام جملات در  $N(N-2)$ :  $360(N-2) + 2N(N-2) = 360N$

$360N - 720 + 2N^2 - 4N = 360N \Rightarrow 2N^2 - 4N - 720 = 0$

$\xrightarrow{+2} N^2 - 2N - 360 = 0 \rightarrow (N-20)(N+18) = 0$  (تجزیه با جمله مشترک)

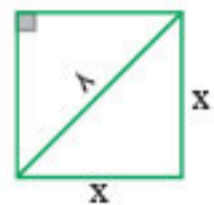
$\begin{cases} N=20 & \checkmark \\ N=-18 & \times \end{cases}$

پاسخ آزمون شماره ۱ نوبت اول / تألیفی

۱. الف درست (۰/۵) زیرا مقدار دلتا همواره عددی مثبت:

$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(1)(-1) = a^2 + 4$

ب درست (۰/۵) رابطه فیثاغورث رو در یکی از مثلث‌ها می‌نویسیم:



۹.  $x^2 + x^2 = 2^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

ج نادرست (۰/۵) زیرا:  $\frac{1}{x} + 2 = -\frac{3}{x^2} \rightarrow x + 2x^2 = -3$

$2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23$

پس این معادله ریشه ندارد.

د درست (۰/۵)

۲. الف مثبت (۰/۵) ب تابع (۰/۵) ج  $\frac{-3}{2}$  (۰/۵) د یک نقطه (۰/۵)

۳. الف گزینه «۴» (۰/۵) ب گزینه «۲» (۰/۵) ج گزینه «۱» (۰/۵)

د گزینه «۱» (۰/۵)

$f(x) = ax + b$

$f(0) = 0 \Rightarrow b = 0, f(2) = 5 \Rightarrow 2a + b = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

$f(x) = \frac{5}{2}x \xrightarrow{x=4} f(4) = \frac{20}{2} = 10$

۵. الف  $x(\Delta x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (۰/۲۵)} \\ \Delta x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\Delta} \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$

ب  $3x^2 + 2x = 1 \xrightarrow{+2} x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$   
 $(\frac{b}{a})^2 = \frac{1}{9}$  رو به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم:

$\Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$   
 $\Rightarrow (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9} \xrightarrow{\text{جذر}} x + \frac{1}{3} = \pm \sqrt{\frac{2}{9}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (۰/۲۵)} \\ x = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$

ج  $4x^2 + 3x - 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(4)(-7) = 121$   
 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+11}{8} = 1 \text{ (۰/۲۵)} \\ x_2 = \frac{-3-11}{8} = \frac{-14}{8} = \frac{-7}{4} \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$

۶.  $(x+3)(x+2) = 3(x-2) \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 3x - 6$   
 $\Rightarrow x^2 + 2x + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(1)(12) = -44$   
 دلتای معادله کوچک‌تر از صفره، در نتیجه این معادله ریشه حقیقی ندارد. (۰/۲۵)

۷. الف تابع نیست، چون از عدد ۲، دو پیکان خارج شده. (۰/۵) تابع است، (۰/۵) تابع نیست، چون از عدد ۲، دو پیکان خارج شده. (۰/۵) تابع است، چون به ازای هر ورودی، همون ورودی رو به عنوان خروجی به ما تحویل می‌ده. (۰/۵)

۸.  $\begin{cases} x+y=4 \text{ (۰/۲۵)} \\ x-y=2 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 2x=6 \Rightarrow x=3 \text{ (۰/۵)} \\ 2+y=4 \Rightarrow y=2 \text{ (۰/۵)} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 + 4 = 13 \text{ (۰/۵)}$

۹. برای اینکه معادله درجه ۲، دارای ریشه مضاعف باشه، باید دلتای معادله برابر صفر باشه.  
 یعنی:

$\Delta = 0 \Rightarrow (2k)^2 - 4(1)(9) = 0 \Rightarrow 4k^2 - 36 = 0 \Rightarrow 4k^2 = 36 \Rightarrow k^2 = 9 \xrightarrow{\text{جذر}} k = \pm 3 \text{ (۰/۵)}$

۱۰. زمان پر شدن استخر توسط شیر A رو با a و توسط شیر B رو با b و توسط هر دو شیر با هم رو با t نمایش می‌دیم، طبق فرض سؤال رابطه  $a = b - 10$  بین a و b برقراره. حالا داریم:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{b-10} + \frac{1}{b} = \frac{1}{12} \text{ (۰/۲۵)}$   
 تمام جملات رو در  $b(b-10)$  ضرب می‌کنیم

$\Rightarrow 12b + 12b - 120 = b^2 - 10b$   
 $\Rightarrow b^2 - 24b + 120 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (b-30)(b-4) = 0 \text{ (۰/۲۵)}$

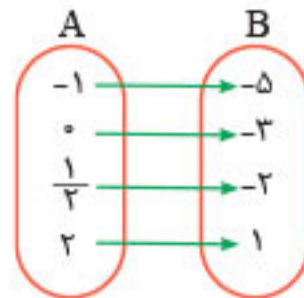
$\begin{cases} b = 30 \text{ (۰/۲۵)} \\ b = 4 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$

محاله که یکی از شیرها استخر رو در ۴ ساعت پر کنه چون با هم در ۱۲ ساعت استخر رو پر می‌کنن.

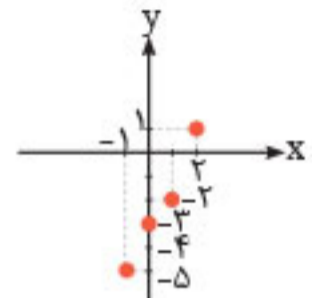
$x$	-1	0	$\frac{1}{2}$	2
$y$	-5	-3	-2	1
$(x, y)$	(-1, -5)	(0, -3)	( $\frac{1}{2}$ , -2)	(2, 1)

$y = 2x - 3$

(هر جای خالی ۰/۲۵)



(نمودار پیکانی) (۰/۲۵)



(نمودار مختصاتی) (۰/۲۵)

۱۲. الف تابع است، زیرا از هر یک از اعضای مجموعه A تنها یک پیکان خارج شده. (۰/۵) ب تابع نیست، زیرا از عدد یک دو پیکان خارج شده. (۰/۵) ج تابع است، زیرا هر خط عمود بر محور طول‌ها (موازی محور عرض‌ها)، نمودار رو حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنه. (۰/۵) د تابع نیست، زیرا خط عمود بر محور طول‌ها (موازی محور عرض‌ها)، نمودار رو در بیشتر از یک نقطه قطع می‌کنه. (۰/۵)

پاسخ آزمون شماره ۲ نوبت اول / تألیفی

۱. الف درست (۰/۵): زیرا:  $x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$

ب نادرست (۰/۵): زیرا اگه به جای آنها عدد -۳ رو بنذاریم، خواهیم داشت:

$\frac{4 - (-3)}{2 - 2(-3)} = \frac{2(-3)^2 + k}{((-3)^2 + 1)^2 - 68} \Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{27+k}{\cancel{4}}$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 27 + k = 28 \Rightarrow k = 1$

ج درست (۰/۵)

د نادرست (۰/۵): چون به کمک تجزیه یا اتحادها نمی‌تونیم عبارت  $x^2 + 3x - 5$  رو تجزیه کنیم.

۲. الف درجه اول (۰/۵) ب  $x^2 = x + 1$  (۰/۵) ج اول (۰/۵): زیرا اگه اتحاد رو باز کنیم، خواهیم داشت:  $x^2 - 2x + 1 - x^2 = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0$   
 د ۱۱ (۰/۵)

۳. الف گزینه ۱۱ (۰/۵)  $16 - 4m - m = 1 \Rightarrow 5m = 15 \Rightarrow m = 3$   
 ب گزینه ۱۱ (۰/۵) ج گزینه ۱۱ (۰/۵) د گزینه ۱۳ (۰/۵)

۴. الف اگه ریشه‌های معادله درجه دومی  $\alpha$  و  $\beta$  باشن، خود اون معادله به شکل  $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$  است، لذا:  $(x-1)(x+3) = 0$   
 ضرب می‌کنیم

$\Rightarrow x^2 + 3x - x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ (۰/۲۵)}$

ب اگه  $x = \alpha$  ریشه مضاعف یک معادله درجه دوم باشه، خود اون معادله به صورت  $(x - \alpha)^2 = 0$  است (۰/۲۵)، پس الان با توجه به اینکه  $x = 4$  ریشه مضاعف است، داریم:

$\xrightarrow{\text{می‌تونیم اتحاد رو باز کنیم}} x^2 - 8x + 16 = 0 \text{ (۰/۲۵)}$

