جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع ریاضی + موج آزمون

رشتهٔ ریاضی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

نشر الگو

فهرست

فصل اول: پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

فصل دوم: پاسخ آزمون‌ها

فصل اول

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

پاسخ سؤال‌های دست گرمی

۱- گزینهٔ ۲ از تساوی دو زوج مرتب نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}a+2b=-1\\2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a-b=2$$

۲- گزینهٔ ۳ از هریک از عددهای ۱ و ۲ دو پیکان خارج شده است، پس $a+b=2$ و $a-b=6$ که نتیجه می‌شود $a=4$ و $b=-2$. بنابراین $ab=-8$.

۳- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(3,4)$ و $(3,m^2)$ نتیجه می‌شود $m^2=4$، پس $m=\pm2$. با توجه به زوج‌های مرتب $(4,m+n)$ و $(4,2n+1)$ نتیجه می‌شود $m+n=2n+1$، پس $n=m-1$. اگر $m=2$، آن‌گاه $n=1$ و $f=\{(3,4),(3,2),(4,3)\}$ که به خاطر دو زوج مرتب $(3,4)$ و $(3,2)$ که عضو رابطه هستند، این رابطه، تابع نیست. اگر $m=-2$، آن‌گاه $n=-3$ و $f=\{(3,4),(-9,-2),(4,-5)\}$. بنابراین رابطهٔ f، تابع است، پس $mn=6$.

۴- گزینهٔ ۱ برای اینکه برد تابع f تک‌عضوی باشد باید اعداد ۶، $3m$ و $2m+n$ یکسان باشند:

$$3m=6\Rightarrow m=2,\quad 2m+n=6\xrightarrow{m=2}4+n=6\Rightarrow n=2$$

بنابراین $mn=4$.

۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=4x+4\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{x}{2})=4(\frac{x}{2})+4=2x+4\\f(\frac{x}{4})=4(\frac{x}{4})+4=x+4\end{cases}$$

بنابراین $f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})=2x+4-(x+4)=x$.

۶- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $\frac{2}{x-1}=t$، آن‌گاه $t\neq0$ و $\frac{x-1}{2}=\frac{1}{t}$، پس $x=\frac{2}{t}+1=\frac{2+t}{t}$. به این ترتیب

$$f(\frac{2}{x-1})=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f(t)=\frac{\frac{2+t}{t}+1}{\frac{2+t}{t}-1}=\frac{2+2t}{2}=t+1$$

بنابراین اگر $x\neq0$، آن‌گاه $f(x)=x+1$.

۷- گزینهٔ ۴ چون $f(2)-f(4)=\frac{2}{5}$، پس ابتدا مقادیر $f(2)$ و $f(4)$ را حساب می‌کنیم:

$$2<4\Rightarrow f(2)=k\times2+4=2k+4,\quad 4\geq4\Rightarrow f(4)=\frac{2}{5}\times4=\frac{8}{5}$$

بنابراین

$$f(2)-f(4)=\frac{2}{5}\Rightarrow2k+4-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow2k=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}-4=-2$$

پس $2k=-2$، یعنی $k=-1$.

۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابع ثابت باشد، باید فقط یک عضو در برد آن وجود داشته باشد. با توجه به آنکه $f(1)=2$، پس $\begin{cases}a-b=2\\3a-7b=2\end{cases}$. بنابراین $a=3$ و $b=1$. در نتیجه $a+b=4$.

۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون تابع f همانی است، پس $f(x-4)=x-4$. بنابراین

$$(2a-7)x+b+1=x-4\Rightarrow\begin{cases}2a-7=1\Rightarrow a=4\\b+1=-4\Rightarrow b=-5\end{cases}$$

در نتیجه $f(a+b)=f(-1)=-1$.

راه‌حل دوم اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=\frac{1}{2}$، به‌دست می‌آید

$$f(-\frac{7}{2})=(2a-7)\times\frac{1}{2}+b+1\Rightarrow-\frac{7}{2}=a-\frac{7}{2}+b+1\Rightarrow a+b=-1$$

۱۰- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=ax^2-3ax+x^2-bx+b=(a+1)x^2-(3a+b)x+b$$

برای اینکه تابع f خطی باشد، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس

$$a+1=0\Rightarrow a=-1\Rightarrow f(x)=(3-b)x+b$$

در نتیجه $f(1)=3-b+b=3$.

۱۱- گزینهٔ ۲ مقادیر $x=3$، $x=2$ و $x=0$ را در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$$f(3)=9a+3b+c,\quad f(2)=4a+2b+c,\quad f(0)=c$$

بنابراین

$$f(3)-2f(2)+2f(0)=9a+3b+c-8a-4b-2c+2c=a-b+c=f(-1)$$

۱۲- گزینهٔ ۴ تساوی را به شکل $2x+f(x)=4x\times f(x)-12$ می‌نویسیم. در نتیجه $(4x-1)\times f(x)=2x+12$، پس $f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$.

۱۳- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$، $x=-\frac{b}{2a}$ است. بنابراین طبق معادلهٔ داده شده $x=-\frac{2}{2a}$ طول رأس سهمی است. پس $\frac{-2}{2a}=1$ و در نتیجه $a=-1$. مختصات رأس سهمی در معادلهٔ آن صدق می‌کند، پس

$$-1=a+2+b\xrightarrow{a=-1}-1=-1+2+b\Rightarrow b=-2$$

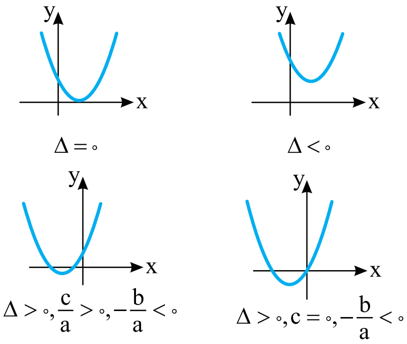
بنابراین $ab=2$.

۱۴- گزینهٔ ۱ چون سهمی در نقاطی به طول ۱− و ۵ محور طول‌ها را قطع کرده است، این نقاط عرض یکسان دارند. پس معادلهٔ محور تقارن به‌صورت $x=\frac{5-1}{2}=2$ است که نقاط $(-1,0)$ و $(5,0)$ نسبت به آن قرینهٔ یکدیگرند.

۱۵- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که $c=5$. همچنین با توجه به معادلهٔ داده شده، طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{b}{2}$ است، پس $-\frac{b}{2}=-2$. بنابراین $b=4$، در نتیجه $b-c=-1$.

۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که محور تقارن سهمی مورد نظر خط $x=-\frac{b}{۲a}$ است. چون علامت a و b فرق می‌کند، پس $-\frac{b}{۲a}>۰$ و در نتیجه محور تقارن از ناحیه‌های اول و چهارم می‌گذرد (گزینه‌های (۱) و (۳)). همچنین، اگر سهمی از مبدأ مختصات بگذرد، آن‌گاه $c=۰$، که درست نیست. بنابراین سهمی مورد نظر می‌تواند به‌صورت گزینهٔ (۳) باشد.

۱۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع در حالت‌های زیر از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد:



بنابراین Δ را حساب می‌کنیم: $\Delta=m^۲-۴(۴-m^۲)=۵m^۲-۱۶$. اکنون توجه کنید که

حالت‌های اول و دوم: $\Delta\le ۰\Rightarrow ۵m^۲-۱۶\le ۰\Rightarrow -\frac{۴}{\sqrt{۵}}\le m\le \frac{۴}{\sqrt{۵}}$

حالت‌های سوم و چهارم: $\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow ۵m^۲-۱۶>۰\Rightarrow m<-\frac{۴}{\sqrt{۵}} \text{ یا } m>\frac{۴}{\sqrt{۵}}\\ \frac{c}{a}\ge ۰\Rightarrow ۴-m^۲\ge ۰\Rightarrow -۲\le m\le ۲\\ -\frac{b}{a}<۰\Rightarrow -m<۰\Rightarrow m>۰\end{cases}$

$$\xrightarrow[\text{بازه‌های به‌دست آمده}]{\text{اشتراک گیری از}} \frac{۴}{\sqrt{۵}}<m\le ۲$$

اجتماع محدوده‌های به‌دست آمده در همهٔ حالت‌ها برابر است با

$$-\frac{۴}{\sqrt{۵}}\le m\le ۲$$

۱۸- گزینهٔ ۲ محیط شکل برابر است با

$$۴x+۴y=۴۰\Rightarrow y=۱۰-x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S=۲xy+xy=۳xy=۳x(۱۰-x)=-۳x^۲+۳۰x$$

بیشترین مقدار این عبارت درجهٔ دوم برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است. بنابراین

$$S_{max}=-\frac{۹۰۰}{۴(-۳)}=۷۵$$

۱۹- گزینهٔ ۳ اعدادی که جواب معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ باشند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. با توجه به معادله مجموع این اعداد برابر $S=-\frac{b}{a}=۳$ است.

۲۰- گزینهٔ ۴ اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^۲+kx+۱=۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \Delta=k^۲-۴<۰$$

$$k^۲<۴\Rightarrow |k|<۲\Rightarrow -۲<k<۲$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینهٔ (۴) درست است.

۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_f=\{x|۹-x^۲\ge ۰, x^۲-۱>۰\}$$

$$۹-x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲\le ۹\Rightarrow -۳\le x\le ۳$$

$$x^۲-۱>۰\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

از اشتراک ناحیه‌های فوق معلوم می‌شود که $D_f=[-۳,-۱)\cup(۱,۳]$. پس عددهای صحیح ±۳ و ±۲ در دامنهٔ تابع هستند.

۲۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از $-۴\le x\le ۴$ نتیجه می‌گیریم $-۸\le -۲x\le ۸$، پس $-۵=۳-۸\le ۳-۲x\le ۳+۸=۱۱$. بنابراین برد تابع f بازهٔ $[-۵,۱۱]$ است.

راه‌حل دوم چون $f(x)=-۲x+۳$ یک تابع خطی است که ضریب x در آن منفی است برد آن با توجه به دامنه برابر $[f(۴),f(-۴)]$ است که برابر $[-۵,۱۱]$ می‌شود.

۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=x^۲+۲x-۲=(x+۱)^۲-۳$.
از طرف دیگر، اگر $x\in[-۴,۵]$، آن‌گاه

$$-۴\le x\le ۵\Rightarrow -۳\le x+۱\le ۶\Rightarrow ۰\le (x+۱)^۲\le ۳۶\Rightarrow -۳\le (x+۱)^۲-۳\le ۳۳$$

بنابراین بزرگ‌ترین عضو برد f برابر ۳۳ است.

۲۴- گزینهٔ ۴ در مورد گزینهٔ (۴)، $D_f=D_g=[۰,۱]$ و اگر $x\in[۰,۱]$، آن‌گاه $f(x)=g(x)$. بنابراین این دو تابع برابرند. در مورد گزینه‌های دیگر، یا دامنهٔ تابع‌ها برابر نیست، یا $f(x)\ne g(x)$.

گزینهٔ (۱) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}, D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\ne D_g$

گزینهٔ (۲) $D_f=D_g=\mathbb{R},\quad f(x)=|x|, g(x)=x\Rightarrow f(x)\ne g(x)$

گزینهٔ (۳) $D_f=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty), D_g=[۱,+\infty)\Rightarrow D_f\ne D_g$

۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $S=\pi r^۲$ و در نتیجه $r=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}$. بنابراین

$$P=۲\pi r=۲\pi(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}})\Rightarrow P(S)=۲\sqrt{\pi}\sqrt{S}=۲\sqrt{\pi S}$$

۲۶- گزینهٔ ۱ اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم، شعاع دایره $\frac{a}{۲}$ و محیط مربع برابر ۴a می‌شود. بنابراین

$$P=۴a\Rightarrow a=\frac{P}{۴},\quad \text{مساحت دایره}=\pi\frac{a^۲}{۴},\quad \text{مساحت مربع}=a^۲$$

$$\text{مساحت قسمت‌های رنگ شده}=a^۲-\frac{\pi a^۲}{۴}=a^۲(\frac{۴-\pi}{۴})$$

$$=\frac{P^۲}{۱۶}(\frac{۴-\pi}{۴})=(\frac{۴-\pi}{۶۴})P^۲$$

۲۷- گزینهٔ ۳ معادلهٔ نیم‌دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow y^۲=۱-x^۲ \xrightarrow{y\ge ۰} y=\sqrt{۱-x^۲}$$

بنابراین طول مستطیل ۲x و عرض آن $\sqrt{۱-x^۲}$ می‌شود و محیط آن برابر است با $P(x)=۲(۲x+\sqrt{۱-x^۲})=۴x+۲\sqrt{۱-x^۲}$.

۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{matrix}(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=-۱-۲=-۳\\ (f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۲-(-۱)=۳\end{matrix}\Rightarrow \frac{(f+g)(۲)}{(f-g)(۱)}=\frac{-۳}{۳}=-۱$$

۲۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_{\frac{f}{g}}=\{x|x\in D_f\cap D_g\ ,\ g(x)\neq ۰\}=\{۱,۲,۳\}$$

بنابراین

$$(\frac{f}{g})(۱)=\frac{f(۱)}{g(۱)}=\frac{۶}{-۱}=-۶,\quad (\frac{f}{g})(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۳}{۱}=۳$$

$$(\frac{f}{g})(۳)=\frac{f(۳)}{g(۳)}=\frac{۰}{۹}=۰$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $\frac{f}{g}$ برابر -۳ است.

۳۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^۲+۳x+۲)-(x^۲+۲x+۱)=x+۱$$

بنابراین $(f-g)(x-۱)=x-۱+۱=x$.

راه‌حل دوم چون $f(۱)=۶$ و $g(۱)=۴$، پس $(f-g)(۱)=۶-۴=۲$. اکنون اگر در عبارت $(f-g)(x-۱)$ به‌جای x قرار دهیم ۲، $(f-g)(۱)$ به‌دست می‌آید که برابر ۲ است. تنها در عبارت گزینهٔ (۱)، با قرار دادن $x=۲$، حاصل ۲ می‌شود.

۳۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** دامنهٔ تابع f به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}۸-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۸\\ x-۳>۰\Rightarrow x>۳\end{cases}\Rightarrow ۳<x\leq ۸\Rightarrow D_f=(۳,۸]$$

دامنهٔ تابع g به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

x	$-\infty$		۳		۵		$+\infty$
$\frac{x-۳}{۵-x}$		$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	

$$\Rightarrow D_g=[۳,۵)$$

بنابراین دامنهٔ تابع $f\times g$ به‌صورت زیر است

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(۳,۸]\cap[۳,۵)=(۳,۵)$$

راه‌حل دوم با توجه به گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که آیا عدد ۶ در دامنهٔ تابع $f\times g$ قرار دارد یا نه. چون $x=۶$ عبارت زیر رادیکال در تابع g را منفی می‌کند، پس $x=۶$ در دامنهٔ تابع g نیست و در نتیجه در دامنهٔ $f\times g$ هم نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نمی‌توانند جواب باشند.

۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=|x-۱|=\begin{cases}x-۱ & x\geq ۱\\ -x+۱ & x<۱\end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}۲x-۱-(x-۱) & x\geq ۱\\ ۳x+۱-(-x+۱) & x<۱\end{cases}=\begin{cases}x & x\geq ۱\\ ۴x & x<۱\end{cases}$$

۳۳- گزینهٔ ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(-۱)=۲$$
$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(-۱)=۲$$
$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۳)=۲$$
$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(-۲)=۴$$

بنابراین $gof=\{(۱,۲),(۲,۲),(-۱,۲),(۳,۴)\}$.

۳۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(fof)(۳)=f(f(۳))$. از طرف دیگر،

$$f(۳)=۳^۲+۴=۱۳\ ,\quad f(f(۳))=f(۱۳)=\frac{۱۳-۱}{۲}=۶$$

بنابراین $(fof)(۳)=۶$.

۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا $(fog)(a)$ و $(gof)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(a)=f(g(a))=f(۳a-۲)=۲(۳a-۲)+۳=۶a-۱$$
$$(gof)(a)=g(f(a))=g(۲a+۳)=۳(۲a+۳)-۲=۶a+۷$$

بنابراین معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$۶a-۱+۶a+۷=۲a\Rightarrow ۱۰a=-۶\Rightarrow a=-\frac{۳}{۵}$$

۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲+۲x)=a(x^۲+۲x)+۱=ax^۲+۲ax+۱$$

بنابراین باید مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+۲ax+۱=۲$ دوعضوی باشد. یعنی باید Δ ی معادلهٔ $ax^۲+۲ax-۱=۰$ مثبت باشد:

$$\Delta=(۲a)^۲-۴a(-۱)=۴a^۲+۴a>۰\Rightarrow ۴a(a+۱)>۰\Rightarrow a>۰ \text{ یا } a<-۱$$

۳۷- گزینهٔ ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(fog)(-۳)=f(g(-۳))=f(۱)=\sqrt{۳}$$
$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۰)=۲$$
$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۱)=\sqrt{۳}$$
$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۳) \text{ تعریف نشده}$$

بنابراین $fog=\{(-۳,\sqrt{۳}),(-۲,۲),(-۱,\sqrt{۳})\}$.

۳۸- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq ۲,-۱\leq ۵-۲x\leq ۳\}$$

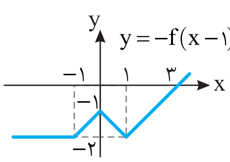
از نامعادلهٔ $-۱\leq ۵-۲x\leq ۳$ نتیجه می‌شود $-۶\leq -۲x\leq -۲$ پس $۱\leq x\leq ۳$.
بنابراین $D_{fog}=\{۰\leq x\leq ۲,۱\leq x\leq ۳\}=[۱,۲]$.

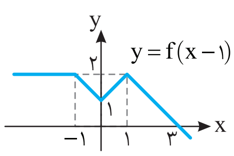
۳۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به‌ترتیب $D_f=[۱,+\infty)$ و $D_g=[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}]$ است. بنابراین

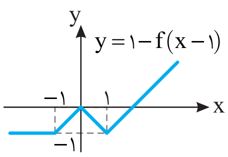
$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x|\ x\geq ۱,-\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}\}$$

از نامعادلهٔ $-\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}$ نتیجه می‌شود $x-۱\leq ۳$ پس $x\leq ۴$.
بنابراین $D_{gof}=\{x|x\geq ۱,\ x\leq ۴\}=[۱,۴]$.

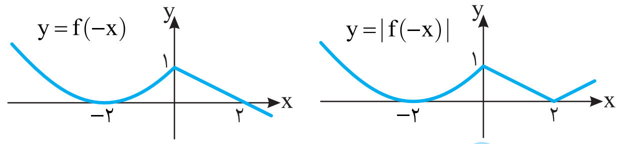
۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x-۱)$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۱-f(x-۱)$ به‌دست بیاید.



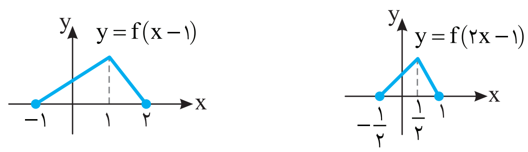




۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم کردن نمودار تابع $y=|f(-x)|$، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

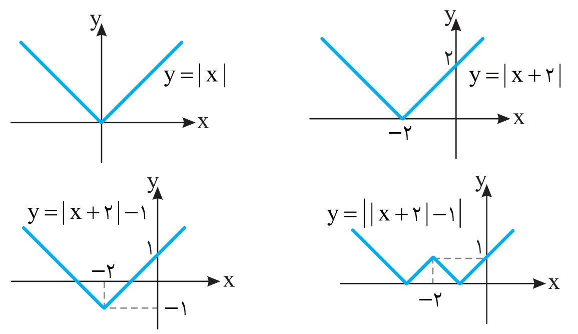


۴۲- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع $y=f(2x-1)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x-1)$ به‌دست آید. توجه کنید که با این کار نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود.



۴۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=f(2x)-1$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(2(x-1))-1$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(2(2x-1))-1=f(4x-2)-1$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2(f(4x-2)-1)$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده به‌صورت $y=2f(4x-2)-2$ است.

۴۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می‌کنیم و آن را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+2|$ به‌دست آید. این نمودار را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+2|-1$ رسم شود. اکنون قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x قرینه می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=||x+2|-1|$ رسم شود.



۴۵- گزینهٔ ۳ در تابع $\{(1,3),(2,4),(5,7),(6,1)\}$ هر مؤلفهٔ دوم متناظر دقیقاً یک مؤلفهٔ اول است. یعنی هیچ دو زوج مرتبی مؤلفهٔ دوم یکسان ندارند، پس این تابع یک‌به‌یک است.

۴۶- گزینهٔ ۲ چون مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(a,1)$ و $(4-a,1)$ یکسان هستند، پس باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشند.

$$4-a=a\Rightarrow a=2$$

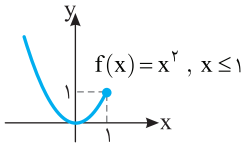
به همین ترتیب باید مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب $(10,3)$ و $(1+b,3)$ برابر باشند.

$$10=1+b\Rightarrow b=9$$

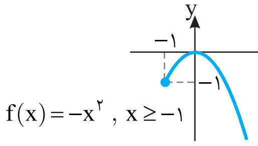
بنابراین $a+b=11$.

۴۷- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار تابع‌های داده شده، واضح است که تابع $f(x)=1-x^2, x\le 0$ یک‌به‌یک است.

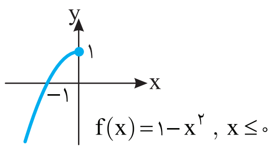
گزینهٔ (۱)



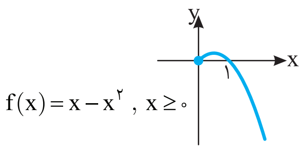
گزینهٔ (۲)



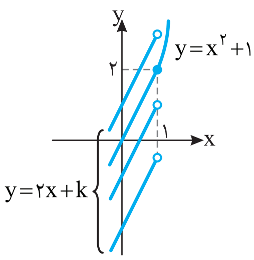
گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)



۴۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نمودار تابع به ازای مقادیر مختلف k به شکل زیر است



واضح است که بیشترین مقدار تابع $y=2x+k$ به ازای $x<1$ نباید از ۲ بیشتر باشد، پس

$$2+k\le 2\Rightarrow k\le 0$$

راه‌حل دوم اگر $x\ge 1$، آن‌گاه تابع $g(x)=x^2+1$ یک‌به‌یک است و $R_g=[2,+\infty)$ و اگر $x<1$، آن‌گاه تابع $h(x)=2x+k$ یک‌به‌یک است و $R_h=(-\infty,2+k)$. در نتیجه برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد باید $R_g\cap R_h=\varnothing$، پس $2+k\le 2\Rightarrow k\le 0$

۴۹- گزینهٔ ۳ تابع گزینهٔ (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-3<-1$، اما $f(-3)<f(-1)$. تابع گزینهٔ (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا $0<1$، اما $f(0)=f(1)$. تابع گزینهٔ (۳) اکیداً نزولی است، زیرا $-3<-1<1$ و $f(-3)>f(-1)>f(1)$. تابع گزینهٔ (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-2<-1$، اما $f(-2)=f(-1)$.

۵۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f نزولی است و $1<2<3$، پس

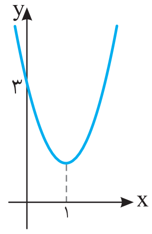
$$f(1)\ge f(2)\ge f(3)\Rightarrow 2a+1\ge a-2\ge 2-a$$

اکنون توجه کنید که

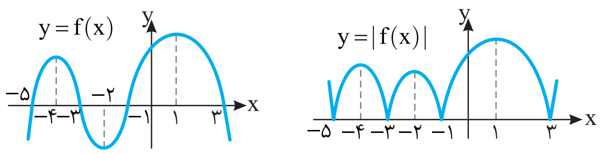
$$2a+1\ge a-2\Rightarrow a\ge -3 \quad (1), \quad a-2\ge 2-a\Rightarrow a\ge 2 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $a\ge 2$.

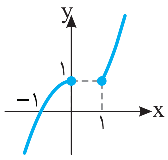
۵۱- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $y=۲x^۲-۴x+۳$ برابر است با $-\dfrac{b}{۲a}=۱$. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ و هر زیر مجموعهٔ آن اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(۱,۲)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.



۵۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار تابع $y=f(x-۱)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف کنیم، نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌دست می‌آید. از روی این نمودار معلوم است که تابع $y=|f(x)|$ روی بازهٔ $(-۲,-۱)$ اکیداً نزولی است.

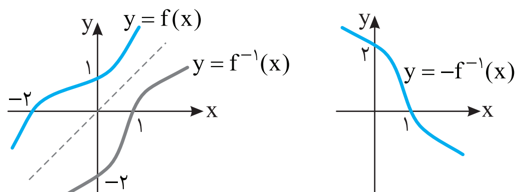


۵۳- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار، تابع f صعودی است.



۵۴- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابعی وارون‌پذیر باشد، باید یک‌به‌یک باشد. تابع گزینهٔ (۱) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۱)=f(۳)=۲$. تابع گزینهٔ (۲) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۲)=f(۵)=۳$. تابع گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک است، زیرا $f(۱)=-۱$، $f(۲)=-۲$، $f(۳)=-۴$ و $f(۴)=-۵$، بنابراین مقادیر تابع f متمایزند. تابع گزینهٔ (۴) هم یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۱)=f(۳)=۰$.

۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار f را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم. سپس نمودار تابع $-f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار تابع $f^{-۱}$ را نسبت به محور x رسم کنیم.



۵۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f^{-۱}og)(۲)=f^{-۱}(g(۲))=f^{-۱}(۱)=۴$$

$$(g^{-۱}of)(۳)=g^{-۱}(f(۳))=g^{-۱}(۴)=۳$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(۱)=۲$، پس $f^{-۱}(۲)=۱$. به این ترتیب، $f(۱)+f^{-۱}(۲)=۳$.

۵۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $y=(x-۲)^۲-۴$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$(x-۲)^۲=y+۴\Rightarrow|x-۲|=\sqrt{y+۴}\xrightarrow{x<۲}$$

$$۲-x=\sqrt{y+۴}\Rightarrow x=۲-\sqrt{y+۴}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$$

راه‌حل دوم چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(-۳,۲۱)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۲۱,-۳)$ عبور می‌کند. اکنون گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

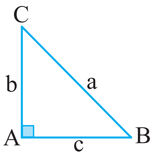
گزینهٔ (۱) $f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۲۵}=-۳$

گزینهٔ (۲) $f^{-۱}(۲۱)=-۲+\sqrt{۲۵}=۳$

گزینهٔ (۳) $f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۱۷}$

گزینهٔ (۴) $f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۱۷}$

۵۹- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل،



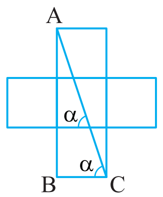
$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}=\frac{c}{a}\Rightarrow c=\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}a$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=۲۵+(\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}a)^۲\Rightarrow a^۲=۲۵+\frac{۲۴}{۴۹}a^۲$$

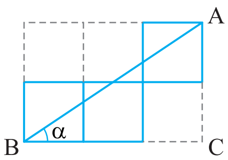
$$\frac{۲۵}{۴۹}a^۲=۲۵\Rightarrow a^۲=۴۹\Rightarrow a=۷$$

۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat{C}B$. در نتیجه،



$$\tan\alpha=\tan A\hat{C}B=\frac{AB}{BC}=\frac{۳}{۱}=۳$$

۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا شکل را به‌صورت مقابل کامل می‌کنیم. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،



$$AB^۲=AC^۲+BC^۲=۲^۲+۳^۲=۱۳\Rightarrow AB=\sqrt{۱۳}$$

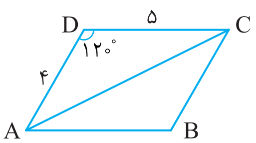
در نتیجه، $\triangle ABC:\ \sin\alpha=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{۲}{\sqrt{۱۳}}$.

۶۲- گزینهٔ ۴ صورت کسر برابر است با

$$۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۳-۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=۰$$

بنابراین $A=۰$.

۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که



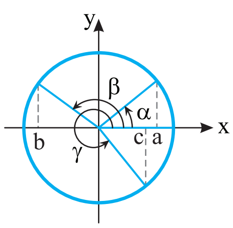
$$S_{ABCD}=۲S_{ADC}$$

$$=۲(\frac{۱}{۲}DC\times AD\times\sin\hat{D})$$

$$=۵\times۴\times\sin۱۲۰^\circ=۲۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۰\sqrt{۳}$$

۶۴- گزینهٔ ۲ اگر $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

۶۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b<۰$ و $a>c$. بنابراین $a>c>b$.



۶۶- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin\alpha\cos\alpha>0$، مشخص است که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم‌علامت هستند. با توجه به $\cos\alpha\cot\alpha<0$، مشخص است که مقادیر $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ مختلف‌العلامت هستند. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد. در این ناحیه،

$$\sin\alpha<0,\quad \cos\alpha<0,\quad \cot\alpha>0$$

۶۷- گزینهٔ ۱ چون $90°\le\alpha\le180°$، پس $0\le\sin\alpha\le1$ و در نتیجه

$$0\le\frac{m}{2}-1\le1\Rightarrow1\le\frac{m}{2}\le2\Rightarrow2\le m\le4$$

۶۸- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $-1\le\sin x\le1$، بنابراین $0\le\sin^2 x\le1$، پس $0\le3\sin^2 x\le3$ و در نتیجه $2\le2+3\sin^2 x\le5$. بنابراین کمترین مقدار عبارت ۲ و بیشترین مقدار آن ۵ است، که حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۰ می‌شود.

۶۹- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه محور طول‌ها با خط مورد نظر زاویهٔ مثلثاتی $30°$ تشکیل می‌دهد، شیب خط برابر $\tan30°$ یا همان $\frac{\sqrt3}{3}$ است.

پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=\frac{\sqrt3}{3}x+b$ است و چون خط از نقطهٔ $(6,\sqrt3)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:

$$\sqrt3=\frac{\sqrt3}{3}\times6+b\Rightarrow b=-\sqrt3$$

پس معادلهٔ خط $y=\frac{\sqrt3}{3}x-\sqrt3$ یا همان $x-\sqrt3y-3=0$ است.

۷۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{1-\tan x}{\tan x}=2\Rightarrow1-\tan x=2\tan x\Rightarrow\tan x=\frac13$$

بنابراین $\cot x=\frac{1}{\tan x}=3$. در نتیجه $\frac{\cot x}{\cot x-1}=\frac{3}{3-1}=\frac32$.

۷۱- گزینهٔ ۲ با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha\cot\alpha=1$ می‌توان نوشت

$$\left(\frac{1}{2m-1}\right)(m+2)=1\Rightarrow2m-1=m+2\Rightarrow m=3$$

بنابراین $\tan\alpha=\frac15$ و $\cot\alpha=5$ و در نتیجه

$$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=\frac{1}{25}+25=\frac{626}{25}$$

۷۲- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ می‌توان نوشت

$$\left(\frac35\right)^2+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac45$$

با توجه به اینکه $90°<\alpha<180°$، مقدار $\cos\alpha$ باید منفی باشد، پس $\cos\alpha=-\frac45$. با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، به‌دست می‌آید $\tan\alpha=\frac{\frac35}{-\frac45}=-\frac34$. بنابراین $\tan\alpha-\cos\alpha=-\frac34+\frac45=\frac{1}{20}$.

۷۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ و $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$ به‌دست می‌آید

$$A=\frac{\tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}}+\frac{\cot^2 x}{\frac{1}{\sin^2 x}}=\tan^2 x\cos^2 x+\cot^2 x\sin^2 x$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\times\cos^2 x+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\times\sin^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

۷۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\sin^4\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^4\theta}{\sin^4\theta}=\frac{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta}{\sin^4\theta}=\frac{\cos^2\theta-\cos^4\theta}{\sin^4\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\sin^4\theta}=\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^4\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\cot^2\theta$$

راه‌حل دوم اگر در عبارت داده شده به جای θ مقدار $30°$ را قرار دهیم، مقدار عبارت برابر است با $\frac{1}{\frac{1}{16}}-\frac{1}{\frac14}-9=16-4-9=3$. اگر در گزینه‌ها به جای θ مقدار $30°$ را قرار دهیم، فقط $\cot^2\theta$ برابر ۳ می‌شود. تنها گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۷۵- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی $\tan\alpha+\cot\alpha=3$ را به توان دو می‌رسانیم: $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2\tan\alpha\cot\alpha=9$.

چون $\tan\alpha\cot\alpha=1$، پس

$$\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2=9\Rightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=7$$

۷۶- گزینهٔ ۱ دو طرف تساوی داده شده را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم:

$$3+\frac{2\cos x}{\sin x}=\frac{3}{\sin x}\Rightarrow3+2\cot x=\frac{3}{\sin x}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$9+12\cot x+4\cot^2 x=\frac{9}{\sin^2 x}=9(1+\cot^2 x)$$

$$9+12\cot x+4\cot^2 x=9+9\cot^2 x\Rightarrow5\cot^2 x-12\cot x=0$$

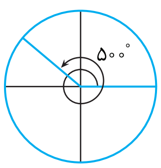
$$\cot x=0\ ,\ \cot x=\frac{12}{5}$$

چون $\cos x\neq0$، پس $\cot x\neq0$ و در نتیجه $\cot x=\frac{12}{5}$.

۷۷- گزینهٔ ۴ در تساوی $\frac{D}{180°}=\frac{R}{\pi}$ قرار می‌دهیم $D=75°$:

$$\frac{75°}{180°}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{5\pi}{12}$$

۷۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** $500°$ را می‌توان ۵ تا $90°$ به علاوهٔ $50°$ در نظر گرفت. ۵ تا $90°$ یعنی ۵ تا ربع دایره، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ $500°$ در ناحیهٔ دوم قرار دارد.



راه‌حل دوم $500°=360°+140°$ و $90°\le140°\le180°$، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی $500°$ در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

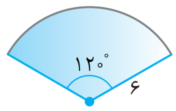
۷۹- گزینهٔ ۳ ابتدا اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

$$\frac{D}{180°}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{20°}{180°}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{9}$$

طول مسیر ماهواره برابر طول کمان AB است که برابر است با

$$l=r\times\theta\Rightarrow\widehat{AB}=36000\times\frac{\pi}{9}=4000\pi\ \text{کیلومتر}$$

۸۰- گزینهٔ ۱ ناحیهٔ مورد نظر قطاعی از دایرهٔ به شعاع ۶ است، که اندازهٔ زاویهٔ قطاع برحسب درجه ۱۲۰° است. ابتدا اندازهٔ زاویهٔ قطاع را برحسب رادیان حساب می‌کنیم. اگر این اندازه θ باشد، آن‌گاه



$$\frac{۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{\theta}{\pi}\Rightarrow\theta=\frac{۲\pi}{۳}$$

مساحت قطاعی که در آن $r=۶$ و $\theta=\frac{۲\pi}{۳}$ برابر است با

$$\frac{۱}{۲}r^۲\theta=\frac{۱}{۲}\times۶^۲\times\frac{۲\pi}{۳}=۱۲\pi\ m^۲$$

۸۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\ ,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

بنابراین

$$A=\frac{-۲\sin\alpha-۴\sin\alpha}{-۳\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{-۶\sin\alpha}{-۲\cos\alpha}=۳\tan\alpha$$

۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha\ ,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\ ,$$
$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha\ ,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha\ ,$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha-\sin\alpha}=\frac{-۲\cos\alpha}{-۲\sin\alpha}=\cot\alpha$$

۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin۱۳۵^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=\sin۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos۱۲۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\cos۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{\sin۱۳۵^\circ-\cos۱۲۰^\circ}{\sin۱۳۵^\circ+\cos۱۲۰^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}$$
$$=\frac{(\sqrt{۲}+۱)^۲}{۲-۱}=(\sqrt{۲}+۱)^۲=۳+۲\sqrt{۲}$$

۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{۷\pi}{۶}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۴}=\tan(\pi+\frac{\pi}{۴})=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\cot\frac{۷\pi}{۴}=\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۳}=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $A=-\frac{۱}{۲}\times۱-۱\times\frac{۱}{۲}=-۱$.

۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{\pi}{۸}+\frac{۷\pi}{۸}=\pi\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۸}=-\cos\frac{۷\pi}{۸}$$

$$\frac{۳\pi}{۸}+\frac{۵\pi}{۸}=\pi\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{۸}=-\cos\frac{۵\pi}{۸}$$

بنابراین

$$\cos^۳\frac{\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۳\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}$$
$$=-\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}-\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}=۰$$

۸۶- گزینهٔ ۱ از رابطه‌های نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه‌ها نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos۲۰^\circ\cos۴۰^\circ-\sin۲۰^\circ\sin۴۰^\circ}{\sin۲۰^\circ\cos۴۰^\circ+\sin۴۰^\circ\cos۲۰^\circ}=\frac{\cos(۲۰^\circ+۴۰^\circ)}{\sin(۲۰^\circ+۴۰^\circ)}=\cot۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

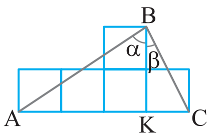
۸۷- گزینهٔ ۴ چون $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$، پس

$$\sin۳x\cos۲x+\cos۳x\sin۲x=\sin(۳x+۲x)=\sin۵x$$

بنابراین مقدار عددی عبارت مورد نظر به ازای $x=\frac{\pi}{۱۵}$ برابر می‌شود با

$$\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۸۸- گزینهٔ ۲ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. در این صورت، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$\triangle AKB: AB^۲=AK^۲+BK^۲=۳^۲+۲^۲=۱۳\Rightarrow AB=\sqrt{۱۳}$$

$$\triangle BKC: BC^۲=BK^۲+CK^۲=۲^۲+۱^۲=۵\Rightarrow BC=\sqrt{۵}$$

اکنون توجه کنید که $A\hat{B}C=\alpha+\beta$، در نتیجه

$$\cos(A\hat{B}C)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۲}{\sqrt{۵}}-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{۴}{\sqrt{۶۵}}-\frac{۳}{\sqrt{۶۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۶۵}}=\frac{\sqrt{۶۵}}{۶۵}$$

۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin۲۵^\circ+\cos۲۵^\circ=\sqrt{۲}\sin(۲۵^\circ+۴۵^\circ)=\sqrt{۲}\sin۷۰^\circ$$

در نتیجه، چون $\sin۷۰^\circ=\cos۲۰^\circ$، پس

$$\frac{\sin۲۵^\circ+\cos۲۵^\circ}{\cos۲۰^\circ}=\frac{\sqrt{۲}\sin۷۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}=\frac{\sqrt{۲}\cos۲۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}=\sqrt{۲}$$

۹۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$A=۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin۱۵^\circ+\frac{۱}{۲}\cos۱۵^\circ)$$
$$=۲(\cos۳۰^\circ\sin۱۵^\circ+\sin۳۰^\circ\cos۱۵^\circ)$$
$$=۲\sin(۳۰^\circ+۱۵^\circ)=۲\sin(۴۵^\circ)=\sqrt{۲}$$

۹۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin\alpha$ مقداری منفی است. پس

$$\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\Rightarrow\frac{۱}{۳}=۱-۲\sin^۲\alpha\Rightarrow۲\sin^۲\alpha=\frac{۲}{۳}$$

$$\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-\sqrt{۳}}{۳},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\ (\text{غ.ق.ق})$$

۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$. پس

$$\frac{۱-۲\sin^۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)}{\cos x}$$
$$=\frac{\sin۲x}{\cos x}=\frac{۲\sin x\cos x}{\cos x}=۲\sin x$$

۹۳- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\sin^2 15^\circ}+\frac{1}{\cos^2 15^\circ}=\frac{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ\cos^2 15^\circ}$$

$$=\frac{1}{(\sin 15^\circ\cos 15^\circ)^2}=\frac{1}{(\frac{1}{2}\sin 30^\circ)^2}=\frac{1}{(\frac{1}{4})^2}=16$$

۹۴- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه $\frac{3\pi}{8}$ رادیان، نصف $\frac{3\pi}{4}$ رادیان است، در تساوی $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ قرار می‌دهیم $\alpha=\frac{3\pi}{8}$ و در نتیجه

$$\cos(2\times\frac{3\pi}{8})=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1\Rightarrow\cos\frac{3\pi}{4}=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$$

$$\cos(\pi-\frac{\pi}{4})=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$$

$$2\cos^2\frac{3\pi}{8}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos^2\frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

۹۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 105^\circ=\cos(90^\circ+15^\circ)=-\sin 15^\circ$$

$$\sin 105^\circ=\sin(90^\circ+15^\circ)=\cos 15^\circ$$

بنابراین

$$3\cos^2 105^\circ+\sin^2 105^\circ=3\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ$$

$$=2\sin^2 15^\circ+(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ)=2\sin^2 15^\circ+1$$

$$=1-\cos(2\times 15^\circ)+1=2-\cos 30^\circ=2-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$$

۹۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$\frac{\sin 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ}-\frac{\cos 22.5^\circ}{\sin 22.5^\circ}=\frac{\sin^2 22.5^\circ-\cos^2 22.5^\circ}{\sin 22.5^\circ\times\cos 22.5^\circ}$$

$$=\frac{-\cos(2\times 22.5^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(2\times 22.5^\circ)}=\frac{-\cos 45^\circ}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ}=-2$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$، بنابراین

$$\tan 22.5^\circ-\cot 22.5^\circ=-(\cot 22.5^\circ-\tan 22.5^\circ)$$

$$=-2\cot 45^\circ=-2$$

۹۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}=\frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{1}{\cos^2 15^\circ}}=\sin 15^\circ\cos 15^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$، پس

$$\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}$$

۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{4}+x)=7\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=7\Rightarrow\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=7$$

$$1+\tan x=7-7\tan x\Rightarrow 8\tan x=6\Rightarrow\tan x=\frac{3}{4}$$

بنابراین

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos x=\frac{4}{5}$$

پس

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{\sin x}{\frac{4}{5}}\Rightarrow\sin x=\frac{3}{5}$$

۹۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan 285^\circ=\tan(180^\circ+105^\circ)=\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)$$

$$=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3}$$

$$=\frac{1+3+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$$

۱۰۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $\alpha=a-b$ و $\beta=a+b$. در این صورت $2b=\beta-\alpha$ و در نتیجه

$$\tan 2b=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3+4}{1-12}=-\frac{7}{11}$$

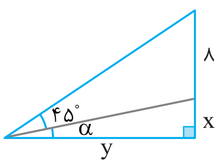
پس $\cot 2b=-\frac{11}{7}$.

۱۰۱- گزینهٔ ۲ چون $\tan(\alpha+35^\circ)=\frac{1}{2}$، پس

$$\tan(10^\circ-\alpha)=\tan(45^\circ-(\alpha+35^\circ))=\frac{\tan 45^\circ-\tan(\alpha+35^\circ)}{1+\tan 45^\circ\tan(\alpha+35^\circ)}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

۱۰۲- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل،



$\tan\alpha=\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ و

$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{8+x}{y}$$

از طرف دیگر،

$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{\tan 45^\circ+\tan\alpha}{1-\tan 45^\circ\tan\alpha}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

بنابراین

$$\frac{8+x}{y}=3\ ,\quad\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2x$$

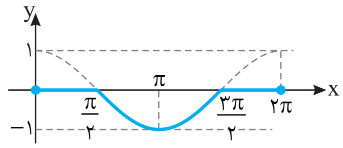
در نتیجه

$$\frac{8+x}{2x}=3\Rightarrow 6x=8+x\Rightarrow x=\frac{8}{5}=1.6$$

۱۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos x}{2} & \cos x\geq 0\\[2mm] \dfrac{\cos x+\cos x}{2} & \cos x<0\end{cases}=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2} \text{ یا } \dfrac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\\[2mm] \cos x & \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

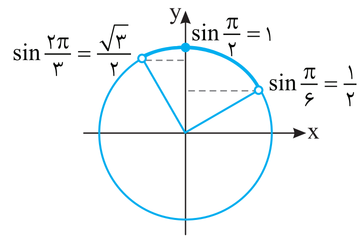
بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو رسم می‌شود:

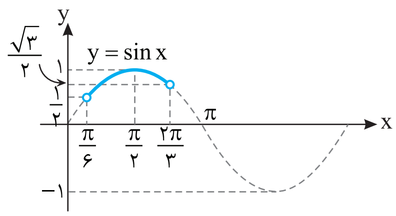


۱۰۴- گزینهٔ ۲ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{3}$، آن‌گاه $\frac{1}{2}<\sin x\leq 1$ و می‌توان نوشت

$$\frac{1}{2}<\frac{m-1}{4}\leq 1\Rightarrow 2<m-1\leq 4\Rightarrow 3<m\leq 5$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ۴ و ۵ باشد.





۱۰۵- گزینهٔ ۳ می‌دانیم دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)$ و $y=a\cos(bx+c)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است. پس $T_f=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ و $T_g=\frac{2\pi}{|-a|}=\frac{2\pi}{|a|}$. بنابراین

$$T_f=2T_g\Rightarrow 4=\frac{4\pi}{|a|}\Rightarrow |a|=\pi\Rightarrow a=\pm\pi$$

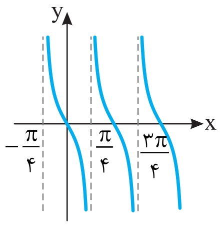
۱۰۶- گزینهٔ ۱ چون $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=\sin^2 x+12=\frac{1-\cos 2x}{2}+12=\frac{25-\cos 2x}{2}$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$.

نکته دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin^2(bx+c)$ و $y=a\cos^2(bx+c)$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

۱۰۷- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=-\tan 2x$ روی بازه‌های به صورت $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$ که $k\in\mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



۱۰۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع تانژانت روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan(-\frac{\pi}{4})<\tan x<\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow -1<\tan x<1$$

$$-1<\frac{2m-3}{5}<1\Rightarrow -1<m<4$$

۱۰۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos x$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+x\Rightarrow 2k\pi=-\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-x\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8}\ ,k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را مشخص می‌کنیم:

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$ (غ.ق.ق)

بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۱۱۰- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت $\tan(x-\frac{\pi}{6})=\tan 2x$ می‌نویسیم و جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$2x=k\pi+x-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ را به‌دست می‌آوریم. به دو روش می‌توان این کار را انجام داد.

راه‌حل اول

k	0	1	2	−1
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$ (غ.ق.ق)	$-\frac{7\pi}{6}$ (غ.ق.ق)

راه‌حل دوم

$$-\pi<k\pi-\frac{\pi}{6}<\pi\Rightarrow -\frac{5\pi}{6}<k\pi<\frac{7\pi}{6}\Rightarrow -\frac{5}{6}<k<\frac{7}{6},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0,1\}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ دو جواب دارد.

۱۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$ ، بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\sin(\frac{\pi}{6}-2x)=\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{6}-2x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{6}-2x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-k\pi-\frac{\pi}{12}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{(2k+1)}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۱۱۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$3\tan^2 x=1\Rightarrow\tan^2 x=\frac{1}{3}\Rightarrow\tan x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $x=k\pi-\frac{\pi}{6}$ هستند.

۱۱۳- گزینهٔ ۴ جایی که نمودار تابع f خط $y=-1$ را قطع می‌کند، $f(x)=-1$ است، پس

$$\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=0\Rightarrow\frac{\pi}{4}-2x=k\pi\Rightarrow2x=-k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$x=-\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ عبارت‌اند از

k	0	1	2	-1	-2
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

بنابراین نمودار تابع خط $y=-1$ را در پنج نقطه از بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ قطع می‌کند.

۱۱۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

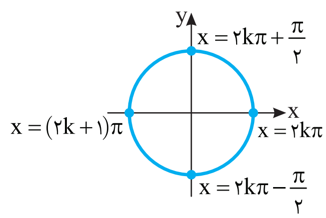
$$\sin^3 x-\sin x=0\Rightarrow\sin x(\sin^2 x-1)=0$$

$$\sin x(\sin x-1)(\sin x+1)=0$$

$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

نقاط انتهایی کمان‌های نظیر جواب‌ها را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله را می‌توان به صورت $x=\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ نوشت.



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\sin^3 x-\sin x=0\Rightarrow\sin x(\sin^2 x-1)=0\Rightarrow-\sin x\cos^2 x=0$$

$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{2}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌ها به‌صورت مضارب زوج و مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ هستند که می‌توان آن‌ها را به‌صورت جواب کلی $x=\frac{k\pi}{2}\ ,k\in\mathbb{Z}$ نوشت.

۱۱۵- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1-\cos^2 x)+5\cos x=4\Rightarrow2\cos^2 x-5\cos x+2=0$$

$$(\cos x-2)(2\cos x-1)=0\Rightarrow\cos x=2,\cos x=\frac{1}{2}$$

معادلهٔ $\cos x=2$ جواب ندارد، پس $\cos x=\frac{1}{2}$. جواب‌های معادله که در بازهٔ $[0,2\pi]$ قرار دارند، $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi-\frac{\pi}{3}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر 2π است.

۱۱۶- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow2\sin x\cos^2 x=\sin x$$

$$\sin x(2\cos^2 x-1)=0\Rightarrow\sin x\cos2x=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos2x=0\Rightarrow2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ عبارت‌اند از π ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$.

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۱۱۷- گزینهٔ ۱ در یک همسایگی محذوف ۱، مقادیر f منفی هستند. بنابراین در این همسایگی $|f(x)|=-f(x)$ ، پس

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|f(x)|}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{-f(x)}=-1$$

۱۱۸- گزینهٔ ۴ اگر $x\to1^+$ ، آن‌گاه $f(x)\to(-1)^-$. بنابراین

$$\lim_{x\to1^+}f(f(x))=\lim_{t\to(-1)^-}f(t)=2$$

۱۱۹- گزینهٔ ۴ مقادیر حد راست و حد چپ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(x^3+2x)=8+4=12$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^2-3x)=4-6=-2$$

بنابراین مقدار حد راست تابع در $x=2$ ، ۱۴ واحد از مقدار حد چپ آن در این نقطه بیشتر است.

۱۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{3x+a}{2x-3}=\frac{3\times2+a}{2\times2-3}=6+a$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(x^2+ax+b)=2^2+a(2)+b=4+2a+b$$

چون $\lim_{x\to2}f(x)=4$ ، پس هر یک از حدهای بالا برابر با ۴ است:

$$\begin{cases}6+a=4\\4+2a+b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases}\Rightarrow a+b=2$$

۱۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim_{x\to -1} f(x)$ وجود دارد. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to-1}(x^2-x+1-xf(x))=6 \Rightarrow (-1)^2-(-1)+1-(-1)\lim_{x\to-1}f(x)=6$$

پس $\lim_{x\to-1}f(x)=3$.

۱۲۲- گزینهٔ ۲ اگر $x\to 2^+$ ، آن‌گاه $\sqrt{2x}\to 2\sqrt{2}^+$. در نتیجه $[\sqrt{2x}]=2$. پس $\lim_{x\to2^+}(x[\sqrt{2x}])=\lim_{x\to2^+}(2x)=4$.

۱۲۳- گزینهٔ ۲ عامل $x-3$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم، سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{x}{x+3}=\frac{3}{6}=\frac12$$

۱۲۴- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac00$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^3-64}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x^2+4x+16)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x+4}{x^2+4x+16}=\frac{4+4}{4^2+4\times4+16}=\frac16$$

۱۲۵- گزینهٔ ۱ وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $3x-4$ از سمت چپ به -1 نزدیک می‌شود، پس $[3x-4]=-2$. از طرف دیگر وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $|x-1|=-(x-1)$. بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to1^-}([3x-4]+\frac{|x-1|}{x-1})=\lim_{x\to1^-}(-2+\frac{-(x-1)}{x-1})=-2-1=-3$$

۱۲۶- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac00$ است. توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج، $x-9=(\sqrt{x})^2-3^2=(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$. در نتیجه

$$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac16$$

۱۲۷- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to7}\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x^2-49}=\lim_{x\to7}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x^2-49}\times\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to7}\left(\frac{x+1-8}{(x-7)(x+7)}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{1}{(x+7)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4)}=\frac{1}{14(4+4+4)}=\frac{1}{168}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to2\pi}\frac{1-\cos^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to2\pi}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to2\pi}(1+\cos x)=1+1=2$$

راه‌حل دوم اگر $x-2\pi=t$ ، آن‌گاه $x=2\pi+t$. همچنین اگر $x\to2\pi$ ، آن‌گاه $t\to0$. بنابراین

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2(2\pi+t)}{1-\cos(2\pi+t)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2t}{1-\cos t}=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\frac{t^2}{2}}=2$$

۱۲۹- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos2x}{\sin x+\cos x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-(\frac{-\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$$

۱۳۰- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد $\cos2x=1-2\sin^2x$ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos2x}{\sin^2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-(1-2\sin^2x)}{\sin^2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2x}{\sin^2x}=2$$

۱۳۱- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+\sin2x}{x-\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x+2\frac{\sin2x}{2x}}{1-\frac{\sin^2x}{x}}=\frac{0+2\times1}{1-0}=2$$

۱۳۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^4-16}=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+4}=1\times\frac18=\frac18$$

۱۳۳- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos2x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1+\frac{(2x)^2}{2}}{x(x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}+2x^2}{x^2}=-\frac12+2=\frac32$$

۱۳۴- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $4x-\pi=t$. در این صورت $x=\frac{\pi+t}{4}$ و اگر $x\to\frac{\pi}{4}$ ، آن‌گاه $t\to0$. بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos2x}{4x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\cos2(\frac{\pi+t}{4})}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2})}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\frac{t}{2}}{t}=-\frac12$$

۱۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(2)=1$ و

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(x-\frac{x-2}{x-2})=2-1=1$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x+\frac{x-2}{x-2})=2+1=3$$

بنابراین تابع در $x=2$ فقط پیوستگی راست دارد.

۱۳۶- گزینهٔ ۴ چون تابع در نقطهٔ ۳ پیوسته است، حدهای چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۱۶-ax^۲)=۱۶-۹a$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(۲x+a)=۶+a$$

بنابراین $۱۶-۹a=۶+a$ و در نتیجه $a=۱$. به این ترتیب

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۳ \\ ۱۶-x^۲ & x<۳ \end{cases}$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱}(۱۶-x^۲)=۱۶-۱^۲=۱۵$.

۱۳۷- گزینهٔ ۳ بایـد مخرج هیچ‌جـا صفر نشـود، در نتیجه بایـد دلتای معادلهٔ $x^۲-۲mx+m+۶=۰$ منفی باشد

$$\Delta=(-۲m)^۲-۴(m+۶)<۰\Rightarrow ۴m^۲-۴(m+۶)<۰$$

$$m^۲-m-۶<۰\Rightarrow (m-۳)(m+۲)<۰\Rightarrow -۲<m<۳$$

بنابرایـن تابـع f بـه ازای چهار مقـدار صحیح ۱−، ۰، ۱ و ۲ بـرای m روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۳۸- گزینهٔ ۱ در نقاطی که مقدار $\frac{۱}{x}$ عددی صحیح شود، تابع $y=[\frac{۱}{x}]$ ناپیوسته است. این نقاط به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{۱}{x}=k\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{۱}{k}$$

در بازهٔ $(\frac{۱}{۱۰},۱)$، $\frac{۱}{۱۰}<\frac{۱}{k}<۱\Rightarrow ۱<k<۱۰\Rightarrow ۲\leq k\leq ۹$

یعنی در هشت نقطه تابع ناپیوسته است.

۱۳۹- گزینهٔ ۱ توجـه کنیـد که وقتی x از سـمت چپ بـه ۲− نزدیک می‌شود، $x+۲$ از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۱}{x+۲}=-\infty$$

۱۴۰- گزینهٔ ۴

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-۱}{x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۰}{x}=\lim_{x\to ۰^-}۰=۰$$

۱۴۱- گزینهٔ ۱ اگـر $x\to ۳$، آن‌گاه $(x-۳)^۲\to ۰^+$، بنابرایـن بـرای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x\to ۳}(ax^۳+۳)<۰\Rightarrow ۲۷a+۳<۰\Rightarrow a<-\frac{۱}{۹}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۴ برای اینکه نمودار تابع شـبیه شکل مورد نظر شود، وقتی $x\to ۲^-$ و $x\to ۲^+$، باید $f(x)\to -\infty$. فقط در گزینهٔ (۴)،

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=-\infty$$

۱۴۳- گزینهٔ ۳ توجـه کنید که $\lim\limits_{x\to ۱^+} x^۲=۱$ و اگـر $x\to ۱^+$، مقادیر $x-۱$ مثبت‌انـد و بـه صفـر میـل می‌کننـد. بنابرایـن $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x^۲}{x-۱}=+\infty$. همین‌طـور $\lim\limits_{x\to ۱^-} x^۲=۱$ و اگـر $x\to ۱^-$، مقادیر $x-۱$ منفی‌انـد و به صفر میـل می‌کننـد. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{x^۲}{x-۱}=-\infty$. به این ترتیب، نمـودار تابع f در همسایگی نقطهٔ $x=۱$ به شکل گزینهٔ (۳) است.

۱۴۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to ۱^-$، آن‌گاه $\frac{۱}{x}\to ۱^+$، پس

$$t=\frac{x+۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}\Rightarrow t\to ۲^+$$

پس $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(\frac{x+۱}{x})=\lim\limits_{t\to ۲^+} f(t)=+\infty$.

۱۴۵- گزینهٔ ۲ اگـر $x\to(\frac{\pi}{۲})^+$، آن‌گاه $\tan x\to -\infty$. همچنیـن چون $۴x\to(۲\pi)^+$، پس $\cos ۴x\to ۱^-$، و در نتیجه $(\cos ۴x-۱)\to ۰^-$.

بنابراین $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{\cos ۴x-۱}=+\infty$.

۱۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۲} x=۲$ و چون حد چپ و حد راست تابـع در نقطـهٔ $x=۲$ برابـر $+\infty$ اسـت، باید $x=۲$ ریشـهٔ مضاعف مخرج باشـد. به عبارت دیگر مخرج باید به صورت $(x-۲)^۲$ باشد. زیرا فقط در این صورت مقادیر تابع در دو طرف $x=۲$ هم‌علامت خواهند بود. پس

$$x^۲+۲ax+b=(x-۲)^۲\Rightarrow x^۲+۲ax+b=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۲\ ,\ b=۴$$

پس $a+b=۲$.

۱۴۷- گزینهٔ ۲ صـورت و مخرج کسـر را تجزیه، سـپس کسر را سـاده می‌کنیـم: $f(x)=\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۱)(x-۲)(x+۲)}=\frac{x+۱}{(x-۱)(x+۲)}$. پـس $x=۱$ و $x=-۲$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند.

۱۴۸- گزینهٔ ۱ در حالتی که مخرج ریشهٔ مضاعف دارد، نمودار تابع یک مجانب قائم دارد: $\Delta=۰\Rightarrow m^۲-۸m=۰\Rightarrow m=۰, m=۸$

در حالـت $m=۰$، تنهـا مجانب قائـم $x=۰$ و در حالت $m=۸$، تنها مجانب قائـم $x=۲$ اسـت. همچنین اگر $x=۳$ ریشـهٔ مخرج باشـد، مخـرج عامل $x-۳$ دارد که با صورت کسـر سـاده می‌شود. در این‌صورت مخرج درجهٔ اول است و تنها یک ریشه دارد. در نتیجه نمودار تابع یک مجانب قائم دارد:

$$۲(۳)^۲-۳m+m=۰\Rightarrow m=۹\ ,\quad f(x)=\frac{x-۳}{(x-۳)(۲x-۳)}=\frac{۱}{۲x-۳}$$

پـس $x=\frac{۳}{۲}$ مجانـب قائم نمودار تابع اسـت. بنابراین به‌ازای سـه مقدار m، نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

۱۴۹- گزینهٔ ۳ مخـرج توابـع $y=\frac{x}{x^۲+۱}$ و $y=\frac{x}{\sqrt{x+۱}}$ ریشـه ندارد، پس نمودار این توابع مجانب قائم ندارد. همچنین ریشهٔ مخرج تابع $y=\frac{\sqrt{x-۱}}{x}$، $x=۰$ اسـت که تابع در اطراف آن تعریف نشـده اسـت. پس نمـودار این تابع نیز مجانب قائم ندارد. $x=۰$ مجانب قائم نمودار تابع $y=\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{x}$ است:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{x}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{x}=+\infty$$

۱۵۰- گزینهٔ ۲ ریشه‌های مخرج در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{5\pi}{4}$ که $x=\frac{5\pi}{4}$ ریشهٔ صورت کسر نیست، پس خط $x=\frac{5\pi}{4}$ مجانب قائم نمودار تابع است. با اینکه $x=\frac{\pi}{4}$ ریشهٔ صورت نیز هست، ولی خط $x=\frac{\pi}{4}$ مجانب قائم نمودار تابع است، زیرا

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sqrt{2}(x-\frac{\pi}{4})}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4}(x-\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2}(x-\frac{\pi}{4})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}(x-\frac{\pi}{4})^{\frac{2}{3}}}=+\infty$$

پس نمودار تابع f دو مجانب قائم دارد.

۱۵۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

بنابراین خط‌های $\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند.

پس خط‌های $x=2k\pi+\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ مجانب‌های قائم نمودار این تابع هستند.

۱۵۲- گزینهٔ ۲ از روی شکل معلوم است که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

۱۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to1^+}(fof)(x)=\lim_{x\to1^+}f(f(x))=\lim_{t\to+\infty}f(t)=2$$

۱۵۴- گزینهٔ ۴ بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^2$ برابر x^2 است. همچنین بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$ برابر x^3 است. پس

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^3+(x-1)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{2x^3}=1$$

۱۵۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر $x+1$ و $3-x$ به‌ترتیب منفی و مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a|x+1|+3x-1}{|3-x|+ax-15}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(-x-1)+3x-1}{3-x+ax-15}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-a+3)x-a-1}{(a-1)x-12}=\frac{3-a}{a-1}$$

در نتیجه $\frac{3-a}{a-1}=2$، بنابراین $a=\frac{5}{3}$.

۱۵۶- گزینهٔ ۳ برای آنکه حد مورد نظر برابر صفر شود، باید درجهٔ مخرج بیشتر از درجهٔ صورت باشد. مخرج از درجهٔ اول است، پس باید ضریب جملات درجهٔ دوم و سوم در صورت برابر صفر باشند:

$$\begin{cases}a-1=0\Rightarrow a=1\\2a-b=0\Rightarrow 2a=b\end{cases}\Rightarrow b=2$$

بنابراین $a+b=3$.

۱۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow[\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}]=[0]=0$$

از طرف دیگر، اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $-1<\frac{1}{x}<0$، بنابراین $[\frac{1}{x}]=-1$، پس $\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)=-1$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -1 است.

۱۵۸- گزینهٔ ۲ چون خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f است، پس $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ یا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{(a-1)x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{(a-1)x}=\frac{a}{a-1}$$

(همین‌طور وقتی که $x\to-\infty$)

بنابراین $\frac{a}{a-1}=2$، پس $a=2$ و در نتیجه $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$. بنابراین $x=2$ ریشهٔ مخرج و خط $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

۱۵۹- گزینهٔ ۴ چون

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

پس خط $y=2$ مجانب افقی تابع f است. برای پیدا کردن محل برخورد نمودار تابع با مجانب افقی آن، باید معادلهٔ $f(x)=2$ را حل کنیم:

$$\frac{2x^2}{x^2+x+1}=2\Rightarrow 2x^2=2x^2+2x+2\Rightarrow x=-1$$

چون $f(-1)=2$، پس نقطهٔ مورد نظر $(-1,2)$ است.

۱۶۰- گزینهٔ ۱ خط $y=-1$ مجانب افقی نمودار تابع $y=\frac{-x+1}{x+1}$ است. برای یافتن رفتار این تابع در اطراف مجانب افقی باید ببینیم وقتی $x\to+\infty$ یا وقتی $x\to-\infty$، مقادیر تابع بیشتر از -1 هستند یا کمتر از آن:

$$y=\frac{-x+1}{x+1}=\frac{-(x+1)+2}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y>-1\\x\to-\infty\Rightarrow y<-1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

۱۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به‌صورت

$$f(x)=\frac{x^2-4x+7}{x^2-4}=1+\frac{-4x+11}{x^2-4}$$

می‌نویسیم تا بتوان آن را راحت‌تر بررسی کرد. پس وقتی $x\to+\infty$،

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1,\quad f(x)<1$$

و وقتی $x\to-\infty$،

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1,\quad f(x)>1$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

۱۶۲- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=3$ برابر $f'(3)=2$ است. پس شیب خط عمود بر این خط، که همان خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=-1$ است، برابر $-\frac{1}{2}$ است. پس $f'(-1)=-\frac{1}{2}$.

۱۶۳- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های $x=a$ و $x=c$ صفر، در نقطهٔ $x=b$ منفی و در نقطهٔ $x=d$ مثبت است.

۱۶۴- گزینهٔ ۲ با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=1$،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+2}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}(-2)=-1$$

۱۶۵- گزینهٔ ۱ تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=5$ را می‌نویسیم:

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-5)-0}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to 5}((x-1)(x-2)(x-3)(x-4))=4\times 3\times 2\times 1=24$$

۱۶۶- گزینهٔ ۲ با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=1$ مقدار $f'(1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{(x-1)\cos^3(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{4})}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^3(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{4})}=\frac{\cos^3\pi}{\tan\frac{\pi}{4}}=-1$$

۱۶۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر تابع f در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}=(m-n)f'(x_0)$. بنابراین

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{3h}=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{h}$$
$$=\frac{1}{3}(2-(-2))f'(2)=\frac{4}{3}f'(2)$$

۱۶۸- گزینهٔ ۳ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x^2+1}=1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+1)}{x^2+1}=-1$$

بنابراین مقدار مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ به اندازهٔ ۲ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

۱۶۹- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطه‌های ۳−، ۱ و ۵ پیوسته نیست، پس در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. همین‌طور، در نقطه‌های ۱− و ۳ مشتق چپ و مشتق راست تابع f برابر نیستند، پس تابع f در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. تابع f در نقطه‌های ۲− و ۴ مشتق‌پذیر است. بنابراین تابع f در پنج نقطهٔ صحیح از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست.

۱۷۰- گزینهٔ ۴ بنابر تعریف مشتق، $g(x)=f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. بنابراین

$$g(8)=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$$

۱۷۱- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

پس $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)=\frac{f'(-1)g(-1)-g'(-1)f(-1)}{g^2(-1)}$. از طرف دیگر،

$$\begin{cases}f(x)=x^3+x-1\\ f'(x)=3x^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(-1)=-3\\ f'(-1)=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}g(x)=x^4+1\\ g'(x)=4x^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g(-1)=2\\ g'(-1)=-4\end{cases}$$

بنابراین $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)=\frac{4\times 2-(-4)(-3)}{(2)^2}=-1$.

۱۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=x(x^4-1)(x^4+1)$$
$$=x(x^8-1)=x^9-x$$

بنابراین $f'(x)=9x^8-1$. پس $f'(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})=9(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})^8-1=0$.

۱۷۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مقدار عبارت $4x-x^2$ در اطراف نقطهٔ $x=-2$ منفی است و مقدار عبارت $x+1$ هم در اطراف $x=-2$ منفی است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^2-4x-x-1=x^2-5x-1$$
$$f'(x)=2x-5\Rightarrow f'(-2)=-9$$

همچنین توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=5$ مقدار عبارت‌های $4x-x^2$ و $x+1$ به‌ترتیب منفی و مثبت است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^2-4x+x+1=x^2-3x+1\Rightarrow f'(x)=2x-3\Rightarrow f'(5)=7$$

در نتیجه $f'(5)+f'(-2)=-2$.

۱۷۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(\sin x+x\cos x-\sin x)(x\cos x-\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$
$$-\frac{(\cos x-x\sin x-\cos x)(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$
$$=\frac{x\cos x(x\cos x-\sin x)+x\sin x(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{(-1)^2}=\frac{\pi^2}{4}$.

۱۷۵- گزینهٔ ۳ در نقطهٔ $x=\pi$، عبارت $\sin x$ عامل صفرکننده است، بنابراین کافی است فقط مشتق آن را در نقطهٔ $x=\pi$ حساب کنیم و در بقیهٔ عبارت ضرب کنیم:

$$f'(\pi)=\cos(\pi)\times\cos^8(\pi)=\cos^9(\pi)=-1$$

۱۷۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=4(2x^2+3)'(2x^2+3)^{4-1}=4(4x)(2x^2+3)^3=16x(2x^2+3)^3$$

بنابراین $f'(-1)=16(-1)(2(-1)^2+3)^3=-16\times 5^3$.

۱۷۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{۲\sqrt{g}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳+۱}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۳\times۴}{۲\sqrt{۹}}=۲$$

۱۷۸- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(۹x^۲-۴x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۳x^۳-۲x^۲+۱)}{(x+۱)^۴}$$

در نتیجه $f'(۱)=\frac{۳}{۴}$.

۱۷۹- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $f(-۳x+۵)=۲x^۳+۴x-۶$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$(-۳x+۵)'f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴$$

$$-۳f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴\xrightarrow{x=۱}-۳f'(۲)=۱۰\Rightarrow f'(۲)=-\frac{۱۰}{۳}$$

۱۸۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(۲x)g'(f(۲x))=\frac{۱}{۲}(g(f(۲x)))'=(\frac{۱}{۲}g(f(۲x)))'$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))$ را به‌دست می‌آوریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))=\frac{۱}{۲}g(۸x^۳+۱)=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۱-(۸x^۳+۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{-۸x^۳}=-x$$

در نتیجه $y'=-۱$.

۱۸۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^۲)'=۲g'g$. بنابراین

$$f'(x)=۲(\tan x)'(\tan x)=۲(۱+\tan^۲ x)(\tan x)$$

در نتیجه

$$f'(\frac{\pi}{۳})=۲(۱+۳)(\sqrt{۳})=۸\sqrt{۳}$$

۱۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$. بنابراین

$$f'(x)=۳(\sin x^۲)'\sin^۲ x^۲=۳(x^۲)'\cos x^۲\times\sin^۲ x^۲$$

$$=۳(۲x)\cos x^۲\times\sin^۲ x^۲=۶x\sin^۲ x^۲\cos x^۲$$

در نتیجه

$$f'(\frac{\sqrt{\pi}}{۲})=۶\times\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳}{۴}\sqrt{۲\pi}$$

۱۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۱\\ ۳x^۲+۲ & x>۱\end{cases}$$

بنابراین $f'(-۱)+f'(۲)=-۳+۱۴=۱۱$.

۱۸۴- گزینهٔ ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است:

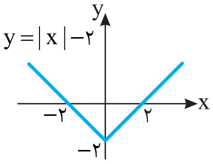
$$f(۱)=\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)\Rightarrow a+۲=۱+۲b\Rightarrow a-۲b=-۱$$

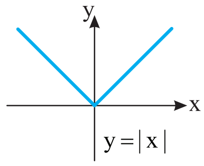
همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

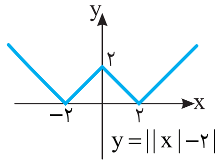
$$f'(x)=\begin{cases}۲ax+۲ & x>۱\\ ۳x^۲+۲b & x<۱\end{cases}\Rightarrow ۲a+۲=۳+۲b\Rightarrow ۲a-۲b=۱$$

$$\begin{cases}a-۲b=-۱\\ ۲a-۲b=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{۷}{۲}$$

۱۸۵- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم می‌شود:







در نقاط $x=۰$، $x=۲$ و $x=-۲$ نمودار تابع نقطهٔ گوشه‌ای دارد و تابع در این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۲\}$.

۱۸۶- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست، پس مقدار $x^۲+ax-۱۲$ به‌ازای $x=۳$ صفر است: $۹+۳a-۱۲=۰\Rightarrow a=۱$

بنابراین $f(x)=|x^۲+x-۱۲|$. در نزدیکی نقطهٔ -۲ علامت عبارت $x^۲+x-۱۲$ منفی است، بنابراین

$$f(x)=-(x^۲+x-۱۲)\Rightarrow f'(x)=-۲x-۱\Rightarrow f'(-۲)=۳$$

۱۸۷- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر $(x_۰,y_۰)$ باشد. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_۰)$ است، که چون خط مماس موازی محور x است، پس $f'(x_۰)=۰$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۶x+۳=۳(x-۱)^۲$$

$$f'(x_۰)=۰\Rightarrow ۳(x_۰-۱)^۲=۰\Rightarrow x_۰=۱$$

بنابراین $y_۰=f(x_۰)=f(۱)=-۱$.

۱۸۸- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس مورد نظر برابر $f'(-۲)$ است:

$$f(x)=\frac{۲x}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(-۲)=۲$$

از طرف دیگر $f(-۲)=۴$، پس خط مماس از نقطهٔ $(-۲,۴)$ می‌گذرد.

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-۴=۲(x+۲)\Rightarrow y=۲x+۸$$

۱۸۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ بر نمودار تابع، که سهمی است، مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق f به‌ازای $x=x_۰$ برابر با شیب خط $y=x+۵$ است. بنابراین

$$y'=۴x-۴\Rightarrow ۴x_۰-۴=۱\Rightarrow x_۰=\frac{۵}{۴}$$

چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی سهمی $y=۲x^۲-۴x+۶$ است، پس

$$y_۰=۲x_۰^۲-۴x_۰+۶=۲\times(\frac{۵}{۴})^۲-۴\times\frac{۵}{۴}+۶=\frac{۳۳}{۸}$$

بنابراین خط مورد نظر از نقطهٔ $(\frac{۵}{۴},\frac{۳۳}{۸})$ می‌گذرد و شیب آن ۱ است، پس معادله‌اش به‌صورت $y-\frac{۳۳}{۸}=x-\frac{۵}{۴}$، یعنی $۸y-۸x-۲۳=۰$ است.

۱۹۰- گزینهٔ ۲ نقطهٔ تماس را $(a,\frac{۱}{\sqrt{a}})$ فرض می‌کنیم. شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-\frac{1}{\sqrt a}=-\frac{1}{2a\sqrt a}(x-a)$ است.

نقطهٔ $(3,0)$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$0-\frac{1}{\sqrt a}=\frac{-1}{2a\sqrt a}(3-a)\Rightarrow 2a=3-a\Rightarrow a=1$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ است. در نتیجه عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۹۱- گزینهٔ ۲ مقدار دو آهنگ تغییر را حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [1,4]=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{3}=-\frac{1}{6}=A_1$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [4,4.41]=\frac{f(4.41)-f(4)}{4.41-4}$$

$$=\frac{\frac{1}{2.1}-\frac{1}{2}}{0.41}=\frac{\frac{2-2.1}{4.2}}{\frac{41}{100}}=\frac{-\frac{1}{42}}{\frac{41}{100}}=-\frac{50}{41\times 21}=A_2$$

بنابراین $\frac{A_1}{A_2}=\frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{50}{41\times 21}}=\frac{41\times 21}{6\times 50}=\frac{41\times 7}{2\times 50}=\frac{287}{100}=2.87$.

۱۹۲- گزینهٔ ۱ مقدار آهنگ تغییر متوسط را در بازهٔ $[1,2]$ حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{1-(-1)}{1}=2$$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ مورد نظر همان مشتق تابع در این نقطه است که باید برابر ۲ باشد. پس

$$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}=2\Rightarrow \frac{2}{x^2}=1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=-\sqrt{2}\ (\text{غ.ق.ق}),\ x=\sqrt{2}$$

۱۹۳- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع همان مشتق آن است. پس مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=-3x^2+6x-6$. بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c\ (a<0)$ برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است، پس بیشترین مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با $-\frac{36-4(-3)(-6)}{4(-3)}=-3$.

۱۹۴- گزینهٔ ۴ مشتق اول و دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=2ax+b\Rightarrow f''(x)=2a$$

بنابراین

$$f''(2)=-2\Rightarrow 2a=-2\Rightarrow a=-1$$

$$f'(2)=-2\Rightarrow 4a+b=-2\Rightarrow b=2$$

در نتیجه $a-b=-3$.

۱۹۵- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=6x^2+6x-2\Rightarrow f''(x)=12x+6$$

بنابراین

$$f''(a)=0\Rightarrow 12a+6=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۱۹۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3}\Rightarrow f''(-1)=-2$$

۱۹۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2\cos 2x\Rightarrow f''(x)=-4\sin 2x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{12})=-4(\frac{1}{2})=-2$$

۱۹۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=1-\sin 2x$. بنابراین

$$f'(x)=-2\cos 2x\Rightarrow f''(x)=-2(-2\sin 2x)=4\sin 2x$$

۱۹۹- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-3x^2+5}{x^3+3x^2-2}=\lim_{x\to -1}\frac{6x^2-6x}{3x^2+6x}=\frac{6+6}{3-6}=-4$$

۲۰۰- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-x}{x^2-7x+12}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}-1}{2x-7}=\frac{\frac{3}{2\times 3}-1}{6-7}=\frac{1}{2}$$

۲۰۱- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{f'(1+h)+f'(1-h)}{1}=f'_+(1)+f'_-(1)$$

اکنون تابع مشتق را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x>1\\ 4x^3 & x<1\end{cases}$.

واضح است که $f'_+(1)=3$ و $f'_-(1)=4$، بنابراین $L=3+4=7$.

۲۰۲- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۰۳- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر $f'(x)\ge 0$ و نقاطی که $f'(x)=0$، تشکیل یک بازه ندهند تابع اکیداً صعودی است. روی بازهٔ $(-\infty,3]$ نمودار تابع مشتق بالای محور x یا مماس بر آن است و فقط در نقطهٔ $x=1$ و $x=3$ مشتق برابر صفر است. پس تابع روی بازهٔ $(-\infty,3]$ اکیداً صعودی است.

بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر ۳ است.

۲۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=x^2-1$، پس

$$f'(x)\ge 0\Rightarrow x^2-1\ge 0\Rightarrow x\le -1 \text{ یا } x\ge 1$$

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-1]$ و $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازهٔ $(-1,2)$ اکیداً صعودی نیست.

۲۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=-3x^2+2x=x(-3x+2)$.

بنابراین

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

در نتیجه تابع f روی بازهٔ $(0,\frac{2}{3})$ اکیداً صعودی است. بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر $\frac{2}{3}$ است.

۲۰۶- گزینهٔ ۴ مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=-x^3+mx^2-12x+1 \Rightarrow f'(x)=-3x^2+2mx-12$$

باید مشتق تابع نامثبت باشد، یعنی $f'(x)\le 0$، در نتیجه $-3x^2+2mx-12\le 0$.

برای اینکه این نابرابری همواره درست باشد، باید

$$\Delta\le 0\Rightarrow 4m^2-144\le 0\Rightarrow m^2\le 36\Rightarrow -6\le m\le 6$$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\}$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

۲۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$. از طرف دیگر،

$$x\in(\pi,\frac{3\pi}{2})\Rightarrow 2x\in(2\pi,3\pi)\Rightarrow \sin 2x>0$$

$$x\in(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6})\Rightarrow 2x\in(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3})\Rightarrow \sin 2x<0$$

$$x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})\Rightarrow 2x\in(\frac{\pi}{3},\pi)\Rightarrow \sin 2x>0$$

$$x\in(-\frac{5\pi}{8},-\frac{7\pi}{12})\Rightarrow 2x\in(-\frac{5\pi}{4},-\frac{7\pi}{6})\Rightarrow \sin 2x>0$$

بنابراین f' فقط روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6})$ اکیداً نزولی است.

۲۰۸- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=-6x^2+6x=0\Rightarrow x=0,\ x=1$$

پس $(0,0)$ و $(1,1)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر $\sqrt{2}$ است.

۲۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4-x^2 & x\ge -2\\ -2x-4-x^2 & x<-2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2-2x & x>-2\\ -2-2x & x<-2\end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x=-2$ مشتق ندارد، پس نقطه به طول -2 نقطهٔ بحرانی تابع است. از طرف دیگر،

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}2-2x=0\Rightarrow x=1\\ -2-2x=0\Rightarrow x=-1 \quad (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین نقطه به طول ۱ نقطهٔ بحرانی تابع است. مجموع عرض‌های نقاط بحرانی برابر است با $f(-2)+f(1)=-4+5=1$.

۲۱۰- گزینهٔ ۳ ریشه‌های صورت و مخرج تابع مشتق اگر در دامنهٔ تابع باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x)=2x\sqrt[3]{x}+\frac{(x^2-4)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{6x^2+x^2-4}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-4}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مشخص است که صورت کسر دو ریشه و مخرج آن یک ریشه دارد که همگی در دامنهٔ تابع هستند (دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است)، بنابراین تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۲۱۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[1,3]$ و

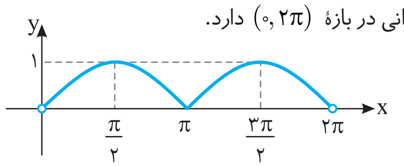
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

تابع f در نقاط $x=1$ و $x=3$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{3-x}\Rightarrow x-1=3-x\Rightarrow x=2$$

پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\{1,2,3\}$ است که دارای سه عضو است.

۲۱۲- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. در $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ مشتق تابع f برابر صفر است و در $x=\pi$ تابع f مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای). پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.



۲۱۳- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطه‌های -1 و ۲ مینیمم نسبی دارد. مجموع این عددها برابر ۱ است.

۲۱۴- گزینهٔ ۳ جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است. بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x=-2$ دارد.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

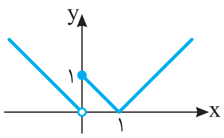
۲۱۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=8x^3-3x^2=x^2(8x-3)$.

بنابراین جدول تغییرات تابع f به‌صورت زیر است:

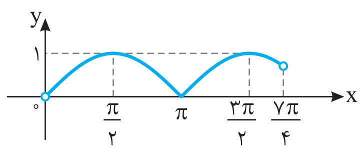
x	$-\infty$		0		$\frac{3}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$	

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۲۱۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به شکل مقابل است. این تابع در نقطهٔ $x=0$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=1$ مینیمم نسبی دارد.



۲۱۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است و تابع در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=\pi$ مینیمم نسبی دارد.



۲۱۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=1-2\cos x$

$$f'(x)=0\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

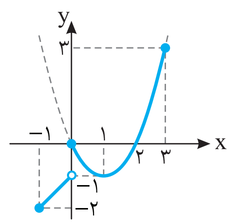
بنابراین تابع f در نقاط $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ اکسترمم نسبی دارد.

۲۱۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=4x-8$. بنابراین

$$f'(x)=0\Rightarrow x=2$$

اکنون توجه کنید که چون $f(0)=1$، $f(2)=-7$ و $f(5)=11$. پس مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به‌ترتیب برابر ۱۱ و -7 و اختلاف آن‌ها برابر $11-(-7)=18$ است.

۲۲۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حداکثر مقدار تابع برابر ۳ و حداقل مقدار آن برابر −۲ است و اختلاف این دو مقدار برابر ۵ است.



۲۲۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\ ,\quad x>0$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x=1\ ,\ x=-1\ (\text{غ.ق.ق})$$

از طرف دیگر، $f(1)=\frac{1}{2}$، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر است با $f(1)=\frac{1}{2}$.

۲۲۲- گزینهٔ ۲ نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=-2\sin 2x+2\cos x=0\Rightarrow -4\sin x\cos x+2\cos x=0$$

$$2\cos x(1-2\sin x)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\ ,\ x=\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

اکنون مقادیر تابع در نقاط زیر را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{\pi}{2})=1\ ,\quad f(\frac{\pi}{6})=\frac{3}{2}\ ,\quad f(\frac{5\pi}{6})=\frac{3}{2}\ ,\quad f(0)=1\ ,\quad f(\pi)=1$$

در نتیجه بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است.

۲۲۳- گزینهٔ ۳ چون $y=2x-a$، پس

$$A(x)=xy=x(2x-a)=2x^2-ax$$

$$A'(x)=0\Rightarrow 4x-a=0\Rightarrow x=\frac{a}{4}$$

بنابراین کمترین مقدار xy برابر است با $2(\frac{a}{4})^2-a\times\frac{a}{4}=-\frac{a^2}{8}$.

۲۲۴- گزینهٔ ۱ طول اضلاع قائمهٔ مثلث را a و b فرض می‌کنیم. می‌خواهیم بیشترین مقدار مساحت، یعنی $S=\frac{1}{2}ab$ را به‌دست آوریم. توجه کنید که $a^2+b^2=16$. پس $b=\sqrt{16-a^2}$، در نتیجه

$$S(a)=\frac{1}{2}a\sqrt{16-a^2}$$

$$S'(a)=\frac{1}{2}\sqrt{16-a^2}-\frac{a^2}{2\sqrt{16-a^2}}\Rightarrow S'(a)=0\Rightarrow a=2\sqrt{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{1}{2}(2\sqrt{2})\sqrt{8}=4$.

۲۲۵- گزینهٔ ۴ نقطهٔ $B(x,y)$ را روی نمودار در نظر می‌گیریم. پس $y=\sqrt{2x+9}$. بنابراین

$$d(x)=AB=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-4)^2+2x+9}=\sqrt{x^2-6x+25}$$

$$d'(x)=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+25}}\ ,\quad d'(x)=0\Rightarrow x=3$$

بنابراین کمترین مقدار d به‌ازای $x=3$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۴.

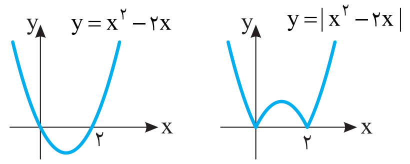
۲۲۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که مساحت مستطیل ABCD برابر است با $(3x-1)(1-2x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=(3x-1)(1-2x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=3(1-2x)+(3x-1)(-2)=-12x+5$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -12x+5=0\Rightarrow x=\frac{5}{12}$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و بیشترین مقدار آن به ازای $x=\frac{5}{12}$ به‌دست می‌آید، که برابر است با $\frac{1}{24}$. در نتیجه بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD برابر $\frac{1}{24}$ است.

۲۲۷- گزینهٔ ۲ نمودار تابع را رسم می‌کنیم. جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,0)$ رو به بالا، روی بازهٔ $(0,2)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(2,+\infty)$ رو به بالاست. پس دوبار جهت تقعر نمودار تابع f تغییر کرده است.



۲۲۸- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^4-6x^2+x-1\Rightarrow f'(x)=4x^3-12x+1\Rightarrow f''(x)=12x^2-12$$

برای اینکه جهت تقعر نمودار تابع رو به پایین باشد، باید علامت مشتق دوم تابع منفی باشد:

$$12x^2-12<0\Rightarrow x^2<1\Rightarrow -1<x<1$$

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-1,1)$ رو به پایین است. پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $1-(-1)=2$.

۲۲۹- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+12)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2(x^2+12)^2+8x^2(x^2+12)}{(x^2+12)^4}=\frac{6x^2-24}{(x^2+12)^3}$$

پس

$$f''(x)=0\Rightarrow x=\pm 2$$

با توجه به جدول زیر، جهت تقعر f روی بازهٔ $(-2,2)$ رو به پایین است. پس بیشترین مقدار a برابر ۲ است.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

۲۳۰- گزینهٔ ۱ باید مشتق دوم تابع روی $\mathbb{R}$ نامنفی باشد. پس

$$f'(x)=8x^3-6mx^2+6x$$

$$f''(x)=24x^2-12mx+6=6(4x^2-2mx+1)\geq 0$$

در نتیجه باید

$$\Delta\leq 0\Rightarrow 4m^2-16\leq 0\Rightarrow m^2\leq 4\Rightarrow -2\leq m\leq 2$$

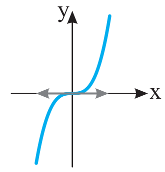
۲۳۱- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f''(x)=۲-\frac{۱}{۴\sqrt{x^۳}}=\frac{۸\sqrt{x^۳}-۱}{۴\sqrt{x^۳}}$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow ۸\sqrt{x^۳}=۱\Rightarrow x^۳=(\frac{۱}{۸})^۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

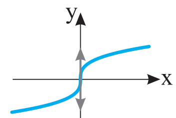
چون مخرج کسر $f''(x)$ روی بازهٔ مورد نظر مثبت است، علامت $f''(x)$ و صورت کسر یکسان است. بنابراین روی بازهٔ $(۰,\frac{۱}{۴})$، $f''(x)<۰$ و روی بازهٔ $(\frac{۱}{۴},۱)$، $f''(x)>۰$. پس جهت تقعر نمودار تابع f ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

۲۳۲- گزینهٔ ۳ نمودار توابع به شکل زیر است:



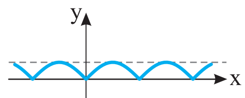
$y=x^۳$

در $x=۰$ نقطهٔ عطف دارد.



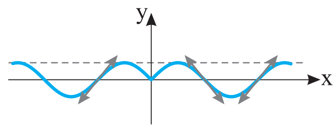
$y=\sqrt[۳]{x}$

در $x=۰$ نقطهٔ عطف دارد.



$y=|\sin x|$

نقطهٔ عطف ندارد.



$y=\sin|x|$

در تمام نقاط برخورد با محور طول‌ها به جز $x=۰$ نقطهٔ عطف دارد.

۲۳۳- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=x^۴-x^۳\Rightarrow f''(x)=۴x^۳-۳x^۲=x^۲(۴x-۳)$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow x=۰,\frac{۳}{۴}$$

x	$-\infty$		۰		$\frac{۳}{۴}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	۰	−	۰	+	
f		∩		∩	نقطهٔ عطف	∪	

مشتق دوم در $x=\frac{۳}{۴}$ تغییر علامت می‌دهد و تابع در این نقطه مشتق دارد، یعنی خط مماس دارد. پس $x=\frac{۳}{۴}$ طول تنها نقطهٔ عطف نمودار تابع است.

۲۳۴- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{x^۲-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-x^۲-۱}{(x^۲-۱)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{۲x(x^۲+۳)}{(x^۲-۱)^۳}$$

x	$-\infty$		−۱		۰		۱		$+\infty$
$f''(x)$		−	ت ن	+	۰	−	ت ن	+	
f(x)		∩		∪	نقطهٔ عطف	∩		∪	

جهت تقعر نمودار در $x=۰$، $x=۱$ و $x=-۱$ تغییر می‌کند ولی فقط در نقطهٔ $x=۰$ خط مماس وجود دارد. پس نمودار تابع فقط یک نقطهٔ عطف دارد.

۲۳۵- گزینهٔ ۴ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$y'=۴x^۳+۳ax^۲+۱۲x\Rightarrow y''=۱۲x^۲+۶ax+۱۲=۶(۲x^۲+ax+۲)$$

برای اینکه نمودار تابع نقطهٔ عطف نداشته باشد، باید مشتق دوم تغییر علامت ندهد، یعنی معادلهٔ $۲x^۲+ax+۲=۰$ نباید ریشهٔ ساده داشته باشد. پس

$$\Delta\le ۰\Rightarrow a^۲-۴\times ۲\times ۲\le ۰\Rightarrow a^۲\le ۱۶\Rightarrow -۴\le a\le ۴$$

۲۳۶- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۳ax^۲+۲x+b\Rightarrow f''(x)=۶ax+۲$$

در نقطهٔ $x=۱$ که طول نقطهٔ عطف نمودار تابع است، مقدار مشتق دوم موجود و برابر صفر است. پس

$$f''(۱)=۰\Rightarrow ۶a+۲=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

از طرف دیگر مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند. پس

$$f(۱)=۱\Rightarrow -\frac{۱}{۳}(۱)^۳+(۱)^۲+b+۱=۱\Rightarrow -\frac{۱}{۳}+۱=-b\Rightarrow b=-\frac{۲}{۳}$$

۲۳۷- گزینهٔ ۳ نمودار در نقطهٔ $x=-۱$ بر محور طول‌ها مماس شده است. پس در این نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع هر دو صفر هستند:

$$f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۲\Rightarrow f(-۱)=-۱+a-b+۲=۰$$

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax+b\Rightarrow f'(-۱)=۳-۲a+b=۰$$

$$\begin{cases}a-b=-۱\\-۲a+b=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\b=۵\end{cases}\Rightarrow ab=۲۰$$

۲۳۸- گزینهٔ ۳ مجانب‌های نمودار تابع $x=-۲$ و $y=\frac{a}{۲}$ هستند. پس محل برخورد آن‌ها نقطهٔ $(-۲,\frac{a}{۲})$ است که مختصات آن در معادلهٔ خط $y=۲x+۱$ صدق می‌کنند:

$$\frac{a}{۲}=۲(-۲)+۱\Rightarrow a=-۶$$

۲۳۹- گزینهٔ ۳ مجانب قائم تابع $x=a$ است که نباید در بازهٔ $(۲,+\infty)$ قرار بگیرد. پس $a\le ۲$. از طرف دیگر، مشتق تابع باید منفی باشد تا تابع اکیداً نزولی باشد:

$$f'(x)=\frac{-۲a-a-۳}{(x-a)^۲}<۰\Rightarrow -۳a-۳<۰\Rightarrow a>-۱$$

بنابراین $-۱<a\le ۲$. توجه کنید که اگر $a=-۱$، آن‌گاه $f(x)=۲$. این تابع نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

۲۴۰- گزینهٔ ۴ طبق نمودار $f(۰)=\frac{۱}{۲}$، چون $f(۰)=\frac{b}{۲}$، پس $b=۱$. در نتیجه $f(x)=\frac{x^۲+ax+۱}{x^۲+x+۲}$. از اینکه نمودار بر محور x (در قسمت $x<۰$) مماس است، نتیجه می‌گیریم معادلهٔ $x^۲+ax+۱=۰$ ریشهٔ مضاعف منفی دارد:

$$\Delta=۰\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm ۲\xrightarrow{\text{ریشهٔ منفی}}a=۲\Rightarrow a+b=۳$$

۲۴۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس $f(۰)=۰$، در نتیجه $a=۰$. همچنین $x=۱$ مجانب قائم نمودار تابع است و چون $\lim_{x\to ۱}f(x)=+\infty$، پس $x=۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج است. بنابراین،

$$۲x^۲+bx+c=۲(x-۱)^۲=۲x^۲-۴x+۲\Rightarrow b=-۴,\ c=۲$$

پس $f(x)=\frac{x}{۲x^۲-۴x+۲}$، در نتیجه $f(۲)=۱$.

۲۴۲- گزینهٔ (۱) خط $y=۰$ مجانب افقی نمودار تابع است، پس درجهٔ صورت باید کمتر از درجهٔ مخرج باشد. بنابراین $a=۰\Rightarrow f(x)=\frac{bx+۱}{x^۲+۱}$

تابع در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ ماکزیمم نسبی دارد و مشتق آن در این نقطه صفر است:

$$f'(x)=\frac{b(x^۲+۱)-۲x(bx+۱)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-bx^۲-۲x+b}{(x^۲+۱)^۲}$$

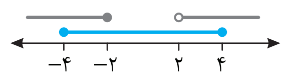
$$f'(\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow -\frac{b}{۴}-۱+b=۰\Rightarrow b=\frac{۴}{۳}$$

۲۴۳- گزینهٔ (۱) تابع در $x=-۱$ و $x=۱$ تعریف نشده است. پس این اعداد باید ریشهٔ مخرج باشند: $\begin{cases}۱+b+c=۰\\ ۱-b+c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=۰\\ c=-۱\end{cases}$. در $x=۱$ حفره وجود دارد، پس باید صورت کسر هم در این نقطه صفر باشد:

$$۱+a-۲=۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow a+b+c=۰$$

۲۴۴- گزینهٔ (۲) در نقطه‌ای که f ناپیوسته است، f' تعریف نمی‌شود. پس گزینهٔ (۴) نادرست است. اگر نقطهٔ ناپیوستگی f را $x=a$ بنامیم، نمودار f روی بازهٔ $(-\infty,a)$ نزولی است، پس f' روی این بازه منفی است و گزینهٔ (۱) نادرست است. در نقطه‌ای از بازهٔ $(-\infty,a)$ جهت تقعر نمودار f تغییر می‌کند (از رو به بالا به رو به پایین)، پس نمودار f' در این نقطه باید از حالت صعودی به حالت نزولی تغییر کند. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۴۵- گزینهٔ (۲) به کمک شکل زیر، مجموعهٔ داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم: $A=[-۴,-۲]\cup(۲,۴]$. بنابراین اعداد صحیح -۴، -۳، -۲، ۳ و ۴ در مجموعهٔ A قرار دارند.



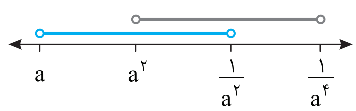
۲۴۶- گزینهٔ (۲) عدد ۲ باید در نامساوی‌های زیر صدق کند:

$$۲a\le ۲\Rightarrow a\le ۱\,,\quad ۲<۳+a\Rightarrow a>-۱$$

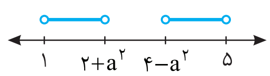
بنابراین $-۱<a\le ۱$ و در نتیجه $a\in(-۱,۱]$.

۲۴۷- گزینهٔ (۴) چون $-۱<a<۰$، پس $a<a^۲<\frac{۱}{a^۲}<\frac{۱}{a^۴}$. بنابراین با توجه به شکل زیر،

$$(a,\frac{۱}{a^۲})\cap(a^۲,\frac{۱}{a^۴})=(a^۲,\frac{۱}{a^۲})$$



۲۴۸- گزینهٔ (۳) در حالت زیر اشتراک بازه‌ها تهی خواهد بود:



پس $۴-a^۲\ge ۲+a^۲\Rightarrow a^۲\le ۱\Rightarrow -۱\le a\le ۱$

یعنی $a\in[-۱,۱]$

۲۴۹- گزینهٔ (۳) ابتدا مجموعهٔ A را با نوشتن اعضایش مشخص می‌کنیم. توجه کنید برای آنکه $\frac{۱۰}{x}$ عددی صحیح شود، مقادیر صحیحی که x می‌تواند اختیار کند، شامل مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۰ یعنی $\pm۱,\pm۲,\pm۵,\pm۱۰$ است. بنابراین $A=\{\pm۱,\pm۲,\pm۵,\pm۱۰\}$. در نتیجه A مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعهٔ B شامل اعداد صحیحی است که معکوسشان از ۱ بزرگ‌ترند. می‌دانیم معکوس همهٔ عددهای صحیح (به جز صفر)، از ۱ کوچک‌ترند پس مجموعهٔ B تهی است. بنابراین مجموعهٔ B نیز مجموعه‌ای متناهی است.

۲۵۰- گزینهٔ (۴) اگر تعداد محدودی از اعضای مجموعهٔ نامتناهی A را که در مجموعهٔ متناهی B نیز قرار دارند، حذف کنیم، باز هم مجموعه‌ای نامتناهی باقی می‌ماند. یعنی $A-B$ نامتناهی است.

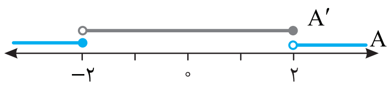
بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) اگر $A=\mathbb{W}$ و $B=\mathbb{N}$، آن‌گاه $A-B=\{۰\}$. پس $A-B$ متناهی است ولی A و B نامتناهی‌اند.

گزینهٔ (۲) اگر $A=\mathbb{Z}$ و $B=\{۱\}$، آن‌گاه $A-B=\mathbb{Z}-\{۱\}$. پس $A-B$ نامتناهی است ولی B متناهی است.

گزینهٔ (۳) اگر $A=\{\frac{۱}{۲}\}$ و $B=\mathbb{Z}$، آن‌گاه $A-B=\varnothing$. پس A متناهی و B نامتناهی است ولی $A-B$ متناهی است.

۲۵۱- گزینهٔ (۳) با توجه به شکل زیر، $A'=(-۲,۲]$. بنابراین اعداد صحیح -۱، صفر، ۱ و ۲ عضو A' هستند، که مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



۲۵۲- گزینهٔ (۳) مجموعهٔ علاقه‌مندان به فوتبال را با A و مجموعهٔ علاقه‌مندان به والیبال را با B نشان می‌دهیم. در این صورت $n(A)=۳۰$، $n(B)=۳۵$. از طرف دیگر ۴۰ نفر حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند. پس $n(A\cup B)=۴۰$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۴۰=۳۰+۳۵-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۲۵$$

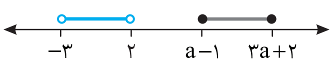
پس ۲۵ نفر به هر دو رشته علاقه دارند.

۲۵۳- گزینهٔ (۲)

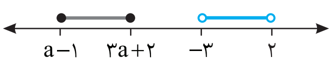
$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A-B)+n(B-A)$$

$$۲۰-۴=n(A-B)+n(B-A)\Rightarrow n(A-B)+n(B-A)=۱۶$$

۲۵۴- گزینهٔ (۱) توجه کنید که در دو حالت زیر این دو بازه جدا از هم هستند:



$$a-۱\ge ۲\Rightarrow a\ge ۳$$



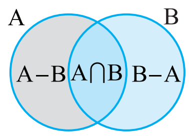
$$۳a+۲\le -۳\Rightarrow a\le -\frac{۵}{۳}$$

از طرف دیگر برای اینکه $[a-۱,۳a+۲]$ بازه باشد باید $a-۱<۳a+۲$ و در نتیجه $a>-\frac{۳}{۲}$. بنابراین

$$a\in([۳,+\infty)\cup(-\infty,-\frac{۵}{۳}])\cap(-\frac{۳}{۲},+\infty)$$

اگر $a\ge ۳$، دو بازهٔ مورد نظر جدا از هم هستند.

۲۵۵- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل مجموعه‌های $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ دو به دو جدا از هم هستند.



۲۵۶- گزینهٔ ۱ توجه‌کنید که در شکل اول، ۶ دایرهٔ رنگی وجود دارد. در شکل دوم، ۴ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، در شکل سوم، ۴×۲ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، ... در شکل اُمn، $4\times(n-1)$ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد دایره‌های رنگی در شکل اُمn را a_n بگیریم، $a_n=6+4(n-1)=4n+2$ (توجه کنید که شکل اُمn، n دایرهٔ خاکستری دارد). بنابراین

$$a_{20}=4\times20+2=82$$

۲۵۷- گزینهٔ ۱ جملهٔ عمومی الگو $t_n=an+b$ است، پس

$$\begin{cases}t_4=16\\t_{16}=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+b=16\\16a+b=28\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به‌دست می‌آید $a=1$ و $b=12$. بنابراین

$$t_n=n+12\Rightarrow t_2=14$$

۲۵۸- گزینهٔ ۲ شکل اُمn از $(n+2)^2$ مربع کوچک تشکیل شده است که اگر n زوج باشد، $2(n+2)$ مربع کوچک سفید و اگر n فرد باشد، $2(n+2)-1=2n+3$ مربع کوچک سفید در شکل وجود دارد. بنابراین در شکل هجدهم، $(20)^2$ مربع کوچک وجود دارد که ۴۰تای آن‌ها سفید هستند. پس در شکل هجدهم ۳۶۰ مربع کوچک رنگی وجود دارد.

۲۵۹- گزینهٔ ۳ باید ببینیم به ازای کدام مقدار n تساوی $\frac{4n-3}{n+3}=3$ برقرار می‌شود. پس

$$4n-3=3n+9\Rightarrow n=12$$

بنابراین جملهٔ دوازدهم دنباله برابر ۳ است.

۲۶۰- گزینهٔ ۴ عدد آخر دستهٔ اول 2^2، عدد آخر دستهٔ دوم 4^2، عدد آخر دستهٔ سوم 6^2 و ... عدد آخر دستهٔ اُمn برابر $(2n)^2$ است. پس عدد آخر دستهٔ دهم 20^2 است. بنابراین عدد اول دستهٔ یازدهم ۴۰۲ است.

۲۶۱- گزینهٔ ۴ از رابطهٔ داده شده $a_n=a_{n-1}-3$ به‌دست می‌آید. یعنی هر جملهٔ دنباله از جمع کردن ۳− با جملهٔ قبلی آن به‌دست می‌آید. پس یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳− و جملهٔ اول ۴− داریم که جملهٔ بیستم آن برابر است با $a_{20}=a_1+19d=-4+19(-3)=-61$.

۲۶۲- گزینهٔ ۱ فرض کنید جملهٔ اول این دنباله، a_1 و قدرنسبت آن d باشد. در این‌صورت

$$a_4=5\Rightarrow a_1+(4-1)d=5\Rightarrow a_1+3d=5 \quad (1)$$

$$a_9=30\Rightarrow a_1+(9-1)d=30\Rightarrow a_1+8d=30 \quad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید $5d=25$، پس $d=5$. اکنون اگر این مقدار d را در تساوی (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید $a_1=-10$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی مورد نظر، برابر است با

$$a_n=a_1+(n-1)d=-10+(n-1)(5)=5n-15$$

۲۶۳- گزینهٔ ۲ این اعداد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند که متناهی بوده و قدرنسبت آن ۷ است. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۱۰۵ و بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۹۹۴ است. پس تعداد این اعداد $\frac{994-105}{7}+1$ است که برابر است با ۱۲۸.

۲۶۴- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{1}{2}$ واسطهٔ حسابی $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+2}$ است، پس

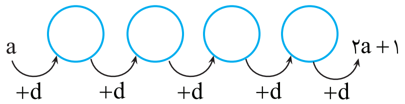
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\Rightarrow1=\frac{x+2+x}{x(x+2)}$$

در نتیجه

$$x^2+2x=2x+2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

۲۶۵- گزینهٔ ۲ چون $a>0$، پس $2a+1>a$. اکنون قدرنسبت دنباله را به‌دست می‌آوریم $d=\frac{2a+1-a}{4+1}=\frac{a+1}{5}$. اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهایی که درج کرده‌ایم برابر $3d$ است و در نتیجه

$$\frac{3(a+1)}{5}=9\Rightarrow3a+3=45\Rightarrow3a=42\Rightarrow a=14$$



۲۶۶- گزینهٔ ۳ جملات دنبالهٔ حسابی را به‌صورت $a-d,a,a+d$ درنظر می‌گیریم. مجموع آن‌ها $3a$ است. پس $3a=21$ و در نتیجه $a=7$. از طرف دیگر،

$$(a-d)(a)(a+d)=168\Rightarrow7(49-d^2)=168$$

$$49-d^2=24\Rightarrow d^2=25\Rightarrow d=\pm5\Rightarrow 2,7,12 \text{ یا } 12,7,2$$

پس نسبت بزرگ‌ترین عدد به کوچک‌ترین عدد برابر ۶ است.

۲۶۷- گزینهٔ ۳ فرض‌کنید قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی r باشد $(r>0)$. در این‌صورت

$$a_1+a_5=30\Rightarrow a_1+a_1r^4=30\Rightarrow a_1(1+r^4)=30 \quad (1)$$

$$a_3+a_7=120\Rightarrow a_1r^2+a_1r^6=120\Rightarrow a_1r^2(1+r^4)=120 \quad (2)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید $r^2=4$؛ پس $r^4=16$. به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_1=\frac{30}{17}$.

۲۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $3+9=5+7=4+8$ پس

$$a_3a_9=a_5a_7=a_4a_8$$

در نتیجه $a_3a_5a_7a_9=(a_4a_8)^2=9$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a_4=a_1r^3,\quad a_8=a_1r^7\Rightarrow a_4a_8=a_1^2r^{10}=3$$

پس

$$a_3a_5a_7a_9=a_1r^2a_1r^4a_1r^6a_1r^8=a_1^4r^{20}=(a_1^2r^{10})^2=9$$

۲۶۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$a_1a_2\cdots a_8=\sqrt{(a_1a_8)^8}\Rightarrow81=\sqrt{(a_1a_8)^8}\Rightarrow a_1a_8=\pm3$$

از طرف دیگر،

$$2+7=1+8\Rightarrow a_2a_7=a_1a_8\,,\quad 4+5=1+8\Rightarrow a_4a_5=a_1a_8$$

پس $a_2a_4a_5a_7=(a_2a_7)(a_4a_5)=(a_1a_8)^2=9$.

۲۷۰- گزینهٔ ۲ اگر جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a و قدرنسبت آن d باشد، جملات دوم، چهارم و نهم به‌ترتیب $a+d$، $a+3d$ و $a+8d$ هستند. پس $a+3d$ واسطهٔ هندسی $a+d$ و $a+8d$ است و درنتیجه

$$(a+3d)^2=(a+d)(a+8d)\Rightarrow a^2+6ad+9d^2=a^2+9ad+8d^2$$

$$d^2=3ad\Rightarrow d=3a$$

پس قدرنسبت دنبالهٔ حسابی ۳ برابر جملهٔ اول آن است.

۲۷۱- گزینهٔ ۴ در این دنباله $a_1=-7$ و $d=2$، بنابراین

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2\times(-7)+9\times2)=20$$

۲۷۲- گزینهٔ ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_{15}=\frac{15}{2}(2a_1+14d)=300\Rightarrow a_1+7d=20$$

بنابراین $a_8=a_1+7d=20$.

۲۷۳- گزینهٔ ۳ جملهٔ اول دنباله برابر ۹ و قدرنسبت آن ۸ است. بنابراین مجموع n جملهٔ نخست دنباله برابر است با

$$\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2\times9+8(n-1))=\frac{n}{2}(18+8n-8)=4n^2+5n$$

در نتیجه $4n^2+5n=636\Rightarrow 4n^2+5n-636=0$

$$(4n+53)(n-12)=0\Rightarrow n=-\frac{53}{4}\ (\text{غ.ق.ق}),\ n=12$$

بنابراین باید دوازده جملهٔ نخست دنباله را جمع کنیم.

۲۷۴- گزینهٔ ۲ با قرار دادن $n=1$ جملهٔ نخست به‌دست می‌آید

$$a_1=S_1=5-4=1$$

با قرار دادن $n=2$ مجموع جمله‌های اول و دوم به‌دست می‌آید، سپس جملهٔ دوم را حساب می‌کنیم:

$$S_2=a_1+a_2=5\times2^2-4\times2=12\Rightarrow a_2=12-a_1=12-1=11$$

بنابراین $d=a_2-a_1=11-1=10$

۲۷۵- گزینهٔ ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_3=a_1\frac{q^3-1}{q-1}=195\Rightarrow 135(q^3-1)=195(q-1)$$

$$135(q-1)(q^2+q+1)=195(q-1)\Rightarrow 9q^2+9q+9=13$$

$$9q^2+9q-4=0\Rightarrow(3q-1)(3q+4)=0\Rightarrow q=\frac{1}{3},\ q=-\frac{4}{3}$$

۲۷۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$. در این دنباله $a_1=\frac{2}{9}$ و $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}}=-\frac{3}{2}$. بنابراین

$$S_n=\frac{55}{72}\Rightarrow\frac{55}{72}=\frac{2}{9}\times\frac{(-\frac{3}{2})^n-1}{-\frac{3}{2}-1}\Rightarrow(-\frac{3}{2})^n=-\frac{243}{32}=(-\frac{3}{2})^5$$

بنابراین $n=5$. یعنی باید پنج جملهٔ نخست دنبالهٔ موردنظر را با هم جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{55}{72}$ شود.

۲۷۷- گزینهٔ ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_5=5a_1\Rightarrow a_1\frac{q^5-1}{q-1}=5a_1\Rightarrow q^5-1=5(q-1)\qquad(1)$$

$$S_{15}=100\Rightarrow a_1\frac{q^{15}-1}{q-1}=100\Rightarrow a_1(q^{15}-1)=100(q-1)\qquad(2)$$

دو طرف تساوی (۲) را بر دو طرف تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1(q^{15}-1)}{q^5-1}=\frac{100(q-1)}{5(q-1)}\Rightarrow\frac{a_1(q^5-1)(q^{10}+q^5+1)}{q^5-1}=20$$

پس $a_1q^{10}+a_1q^5+a_1=20$، بنابراین $a_1+a_6+a_{11}=20$.

۲۷۸- گزینهٔ ۲ چون $x<0$، پس $\sqrt[4]{x^4}=|x|=-x$. در نتیجه

$$3\sqrt[3]{x^3}+2\sqrt[4]{x^4}=3x+2(-x)=x$$

۲۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$b\sqrt[6]{a^6}-a=0\Rightarrow b|a|-a=0\Rightarrow b|a|=a$$

بنابراین اگر $a>0$، $b=1$ و اگر $a<0$، $b=-1$. در نتیجه $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{b^6}=|a|+|b|=|a|+1$ که اگر a مثبت باشد برابر با $1+a$ و اگر a منفی باشد، برابر با $1-a$ است.

۲۸۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{2^n}}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{8}}}\Rightarrow\sqrt[4\times2\times2]{2^n}=\sqrt[3\times4\times2]{8}\Rightarrow2^{\frac{n}{4\times2\times2}}=2^{\frac{3}{3\times4\times2}}$$

$$2^{\frac{n}{16}}=2^{\frac{1}{8}}\Rightarrow\frac{n}{16}=\frac{1}{8}\Rightarrow n=2$$

۲۸۱- گزینهٔ ۳ از $a>\sqrt{a}$ نتیجه می‌شود $a>1$. بنابراین $a^2<a^3$ و در نتیجه $\sqrt[3]{a^2}<\sqrt[3]{a^3}$. یعنی $\sqrt[3]{a^2}<a$. همچنین $\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$ پس

$$a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}>\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین نابرابری داده شده در گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a^{\frac{3}{5}}=16\Rightarrow(a^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}}=16^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=16^{\frac{5}{3}}$$

بنابراین $a^{\frac{3}{4}}=(16^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{4}}=16^{\frac{5}{3}\times\frac{3}{4}}=16^{\frac{5}{4}}=(2^4)^{\frac{5}{4}}=2^5=32$.

۲۸۳- گزینهٔ ۳ با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به‌دست می‌آید

$$\sqrt{3\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{3}}=\sqrt{3\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{3^{\frac{19}{12}}}=3^{\frac{19}{24}}$$

بنابراین $a=\frac{19}{24}$.

۲۸۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $4a^2+\frac{9}{a^2}=(2a+\frac{3}{a})^2-12$. از طرف دیگر، بنابر فرض $a+\frac{3}{2a}=4$. اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید $2a+\frac{3}{a}=8$. بنابراین، حاصل عبارت موردنظر برابر است با $8^2-12=52$.

۲۸۵- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\div\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{3-2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6-2\sqrt{5}}}\times\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6+2\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{3^2-(2\sqrt{2})^2}{6^2-(2\sqrt{5})^2}}=\sqrt{\frac{9-8}{36-20}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$$

۲۸۶- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(-ab-bc+ca)\qquad(1)$$

از طرف دیگر، $ab+bc-ca=8\Rightarrow-ab-bc+ca=-8$

در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$36=a^2+b^2+c^2-16\Rightarrow a^2+b^2+c^2=52$$

۲۸۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ و $(x-4)(x+1)=x^2-3x-4$. بنابراین

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x+1)=(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)$$
$$=(7+2)(7-4)=27$$

۲۸۸- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=x^3-6x^2+12x-8-(8x^3-12x^2+6x-1)$$
$$=-7x^3+6x^2+6x-7$$

بنابراین ضریب x^2 برابر ۶ است.

۲۸۹- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به کمک اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$A=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)+1$$
$$=((x-1)(x^2+x+1))((x+1)(x^2-x+1))+1$$
$$=(x^3-1)(x^3+1)+1=x^6-1+1=x^6$$

حال قرار می‌دهیم $x=\sqrt[12]{2}$ و نتیجه می‌شود $A=(\sqrt[12]{2})^6=\sqrt{2}$.

۲۹۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$x^2-y^2-6x-8y-7=(x^2-6x+9)-(y^2+8y+16)$$
$$=(x-3)^2-(y+4)^2=(x-3-(y+4))(x-3+y+4)$$
$$=(x-y-7)(x+y+1)$$

بنابراین $x+y+1$ عامل عبارت مورد نظر است.

۲۹۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^4+3x^2+4=x^4+4x^2+4-x^2=(x^2+2)^2-x^2$$
$$=(x^2+2-x)(x^2+2+x)$$

بنابراین x^2-x+2 عاملی از عبارت مورد نظر است.

۲۹۲- گزینهٔ ۳ صورت کسر اول برابر است با

$$3y^3+3=3(y^3+1)=3(y+1)(y^2-y+1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{3(y+1)(y^2-y+1)}{y-x}\times\frac{x(y-x)}{x(1-y+y^2)}=3(y+1)$$

۲۹۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد جملهٔ مشترک، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a^2+ab+ac+bc=a^2+a(b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

توجه کنید که $a+c=a+b+c-b=3+2=5$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $3\times5=15$.

۲۹۴- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^2)^3-1}{a^2(a^2-1)}=\frac{(a^2-1)((a^2)^2+a^2+1)}{a^2(a^2-1)}$$
$$=\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=\frac{a^4}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+1$$
$$=(a-\frac{1}{a})^2+2+1=\sqrt{5}^2+3=8$$

۲۹۵- گزینهٔ ۱ مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-5=\frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-5=\frac{4\sqrt{3}+4+6+2\sqrt{3}}{3-1}-5$$
$$=\frac{10+6\sqrt{3}}{2}-5=5+3\sqrt{3}-5=3\sqrt{3}$$

۲۹۶- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر داده شده را در $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

اکنون صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

۲۹۷- گزینهٔ ۴ ابتدا مخرج طرف چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}\times\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{(\sqrt[3]{3})^3-1}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}+\frac{1}{2}$$

بنابراین $a=\frac{1}{2}$.

۲۹۸- گزینهٔ ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر است با $P(2)=2^5-4(2)^3+3(2)^2-2+1=11$.

۲۹۹- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ برابر است با $P(1)=3-4a-5=-4a-2$. چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-4a-2=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۳۰۰- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر با $P(-4)$ است و چون بنابر فرض، این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(-4)=16$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{13}+bx^{97}-5\Rightarrow P(-4)=a(-4)^{13}+b(-4)^{97}-5$$
$$16=-4^{13}a-4^{97}b-5\Rightarrow 4^{13}a+4^{97}b=-21 \quad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-4$ برابر با $P(4)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(4)=4^{13}a+4^{97}b-5\xrightarrow{\text{بنابر تساوی (1)}}P(4)=-21-5=-26$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر -26 است.

۳۰۱- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر با ۴ است، پس $P(2)=4$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(4x)$ بر $2x-1$ برابر است با $P(4\times\frac{1}{2})=P(2)=4$.

۳۰۲- گزینهٔ ۱ جواب‌های معادله برابر هستند با

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\times13}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{12}}{2}=4\pm\sqrt{3}$$

۳۰۳- گزینهٔ ۳ معادلهٔ گزینهٔ (۳) به ازای هر مقدار m جواب حقیقی دارد، زیرا معادله‌ای که به‌ازای هر m، دلتای مربوط به آن همیشه مثبت باشد، جواب این تست است.

$$mx^2-x-m=0 \Rightarrow \Delta=1+4m^2>0$$

توجه کنید که اگر $m=0$، آن‌گاه معادله به یک معادلهٔ درجهٔ اول تبدیل می‌شود که باز هم دارای جواب حقیقی است. بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) $x^2-2x+m=0 \Rightarrow \Delta=4-4m \Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

گزینهٔ (۲) $x^2-x+m^2=0 \Rightarrow \Delta=1-4m^2 \Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

گزینهٔ (۴) $mx^2-x+1=0 \Rightarrow \Delta=1-4m \Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

۳۰۴- گزینهٔ ۱ باید $\Delta \ge 0$، پس

$$x^2-(k+1)x+1=0 \Rightarrow \Delta=(k+1)^2-4 \ge 0$$

$$(k+1)^2 \ge 4 \xrightarrow{k>0} k+1 \ge 2 \Rightarrow k \ge 1$$

پس حداقل مقدار مثبت k برابر ۱ است.

۳۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که چون مجموع ضریب‌های معادلهٔ $92x^2-167x+75=0$ برابر با صفر است، پس یکی از جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۱ و جواب دیگر آن $\frac{75}{92}$ است. چون $\frac{75}{92}<1$، پس کوچک‌ترین جواب $\frac{75}{92}$ است.

۳۰۶- گزینهٔ ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{3})(x-2\sqrt{2})=0 \xrightarrow{x_1<x_2} x_1=\sqrt{3}, \quad x_2=2\sqrt{2}$$

بنابراین $x_1^4+x_2^2=(\sqrt{3})^4+(2\sqrt{2})^2=9+8=17$.

۳۰۷- گزینهٔ ۳ این دو عدد فرد را x و $x+2$ فرض می‌کنیم. بنابراین

$$x^2+(x+2)^2=130 \Rightarrow 2x^2+4x+4=130 \Rightarrow x^2+2x-63=0$$

$$(x+9)(x-7)=0 \Rightarrow x=-9 \ (\text{غ.ق.ق}), \ x=7$$

بنابراین دو عدد مورد نظر، ۷ و ۹ هستند و اختلاف مربع‌های آن‌ها برابر ۸۱−۴۹ یعنی ۳۲ است.

۳۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)$$

از طرف دیگر، $x_1+x_2=4$ و $x_1x_2=-1$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $(-1)(4)=-4$.

۳۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=2$ و $\alpha\beta=-5$. بنابراین

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=8-3\times(-5)\times2=38$$

۳۱۰- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=-\frac{1}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=-1$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2}=-1 \Rightarrow m-1=-2 \Rightarrow m=-1$$

۳۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_1+x_2=-5$ و چون $2x_1-x_2=17$، پس با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها به‌دست می‌آید $x_1=4$. چون x_1 جواب معادلهٔ مورد نظر است، پس ۴ در این معادله صدق می‌کند:

$$4^2+5(4)-4m+16=0 \Rightarrow m=13$$

۳۱۲- گزینهٔ ۴ β جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2-\beta-7=0 \Rightarrow 2\beta^2=\beta+7$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$. بنابراین $\alpha+2\beta^2=\alpha+\beta+7=\frac{1}{2}+7=\frac{15}{2}$.

۳۱۳- گزینهٔ ۳ مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها را حساب می‌کنیم

$$S=\alpha+\beta=2-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}=5$$

$$P=\alpha\beta=(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-5x+3-\sqrt{3}=0$$

۳۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x_1+x_2=1$ و $x_1x_2=-1$. بنابراین

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_2+1+x_1+1}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{x_1+x_2+2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{1+2}{1+1-1}=3$$

$$\frac{1}{x_1+1}\times\frac{1}{x_2+1}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{1}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{1}{1+1-1}=1$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^2-3x+1=0$ است.

۳۱۵- گزینهٔ ۲ برای اینکه جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ مختلف‌العلامت باشند، کافی است $\frac{c}{a}<0$. توجه کنید که در این حالت $\Delta>0$. بنابراین

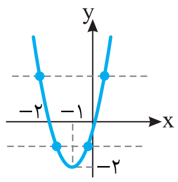
$$\frac{m+2}{m}<0 \Rightarrow -2<m<0$$

۳۱۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** برای اینکه معادلهٔ مورد نظر دو جواب منفی داشته باشد، باید $\Delta>0$، مجموع جواب‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. در نتیجه

$$\Delta>0 \Rightarrow 16-4(-2)(a)>0 \Rightarrow a>-2, \quad \frac{4}{-2}=-2<0, \quad \frac{a}{-2}>0 \Rightarrow a<0$$

بنابراین $-2<a<0$.

راه‌حل دوم ابتدا معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت $2x^2+4x=a$ می‌نویسیم. اکنون سهمی به معادلهٔ $y=2x^2+4x$ و خط $y=a$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. بنابراین اگر $-2<a<0$، معادله دو جواب منفی دارد و اگر $a>0$، معادله یک جواب منفی و یک جواب مثبت دارد.



توجه کنید که $x=0$ و $x=-2$ طول نقاط برخورد سهمی با محور x هستند و رأسش که نقطهٔ مینیمم آن است نقطهٔ $(-1,-2)$ است.

۳۱۷- گزینهٔ ۱ شرط داشتن دو جواب، مثبت بودن Δ است. پس

$$\Delta=(a+1)^2-64>0 \Rightarrow (a+1)^2>64 \Rightarrow \begin{cases} a+1>8 \Rightarrow a>7 \\ \text{یا} \\ a+1<-8 \Rightarrow a<-9 \end{cases} \quad (1)$$

شرط مثبت بودن دو جواب این است که مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها مثبت باشند. حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر ۴ است که مثبت است و مجموع جواب‌ها برابر $-\frac{a+1}{2}$ است. پس

$$-\frac{a+1}{2}>0 \Rightarrow a+1<0 \Rightarrow a<-1 \quad (2)$$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a<-9$.

۳۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و یکی منفی است، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها منفی است:

$$\frac{5(k-2)}{k+6}<0\Rightarrow k\in(-6,2)$$

از طرف دیگر چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع جواب‌ها منفی است

$$-\frac{17(k+1)}{k+6}<0\Rightarrow\frac{k+1}{k+6}>0\Rightarrow k\in(-\infty,-6)\cup(-1,+\infty)$$

بنابراین $k\in(-1,2)$.

۳۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x=-1$ یک جواب معادله است.

$$(-1)^3-(-1)^2-3(-1)-1=0$$

بنابراین معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x^3+x^2-2x^2-3x-1=0\Rightarrow x^2(x+1)-(2x^2+3x+1)=0$$

$$x^2(x+1)-(x+1)(2x+1)=0\Rightarrow(x+1)(x^2-2x-1)=0$$

پس جواب‌های دیگر از حل معادلهٔ $x^2-2x-1=0$ به دست می‌آیند که عبارت‌اند از $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$. در نتیجه مجموع جواب‌های منفی معادله برابر است با $-1+(1-\sqrt{2})=-\sqrt{2}$.

۳۲۰- گزینهٔ ۴ چون $x=2$ یکی از جواب‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند: $8+4a+2+6=0$ پس $a=-4$. چون $x-2$ عاملی از x^3-4x^2+x+6 است، بنابراین $x^3-4x^2+x+6=(x-2)Q(x)$.

برای به دست آوردن $Q(x)$ چندجمله‌ای x^3-4x^2+x+6 را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود $Q(x)=x^2-2x-3$. بنابراین

$$x^3-4x^2+x+6=(x-2)(x^2-2x-3)=(x-2)(x+1)(x-3)$$

پس به غیر از $x=2$ جواب‌های دیگر معادله -1 و 3 هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها 10 است.

۳۲۱- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^2\ge0$، معادله به‌صورت $t^2-3t-1=0$ در می‌آید که جواب‌های آن $t=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ است. عدد $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ منفی است و قابل قبول نیست. بنابراین

$$x^2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با

$$-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}=-\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

۳۲۲- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^2=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$ و $t\ge0$. همچنین معادله به شکل $t^2-2t+m^2-1=0$ در می‌آید. اگر این معادله دو جواب مثبت داشته باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. بنابراین در معادلهٔ $t^2-2t+m^2-1=0$ باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$\Delta>0\Rightarrow 4-4(m^2-1)>0\Rightarrow m^2<2\Rightarrow-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$$

$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow 2>0$ ، $\frac{c}{a}>0\Rightarrow m^2-1>0\Rightarrow m<-1$ یا $m>1$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$ باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. این مجموعه را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت

$$m\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})-[-1,1]$$

۳۲۳- گزینهٔ ۳ معادله را به شکل $(x^2-x)^2+2(x^2-x)-3=0$ می‌نویسیم. با قرار دادن $x^2-x=t$ به‌دست می‌آید

$$t^2+2t-3=0\Rightarrow t=-3\,,\,t=1$$

$x^2-x=-3\Rightarrow x^2-x+3=0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow$ معادله جواب ندارد

$x^2-x=1\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow$ مجموع جواب‌ها $=1$

۳۲۴- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=0\Rightarrow x\left(\frac{2(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)=0$$

$$x\left(\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}\right)=0\Rightarrow\frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)}=0$$

جواب‌های این معادله ۰ و ۳- هستند که هر دو قابل قبول هستند و مجموع آن‌ها ۳- است.

۳۲۵- گزینهٔ ۳ دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرهای دو طرف که برابر $3(x-3)(x+3)$ است ضرب می‌کنیم:

$$3(x-3)(x+3)\frac{x+3}{x-3}+3(x-3)(x+3)\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}\times3(x-3)(x+3)$$

$$3(x+3)^2+3(x-3)^2=10(x-3)(x+3)$$

$$3(x^2+6x+9)+3(x^2-6x+9)=10(x^2-9)$$

$$6x^2+54=10x^2-90\Rightarrow 4x^2=144\Rightarrow x=\pm6$$

چون ۶- و ۶ هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۳۶- است.

۳۲۶- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{2x-2a+x+3}{(x+3)(x-a)}=4\Rightarrow\frac{3x-2a+3}{(x+3)(x-a)}=4$$

$$3x-2a+3=4x^2+(12-4a)x-12a$$

$$4x^2+(9-4a)x-10a-3=0$$

بنابراین مجموع جواب‌ها $=\frac{4a-9}{4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 4a-9=-1\Rightarrow a=2$

اگر $a=2$، آن‌گاه معادله به‌صورت $4x^2+x-23=0$ درمی‌آید که چون $\Delta>0$ پس معادله دو جواب دارد. ($x=2$ و $x=-3$ که هر کدام مخرج یکی از کسرها را در معادلهٔ اولیه صفر می‌کنند، هیچ کدام جواب معادلهٔ بالا نیستند پس هر دو جواب این معادله قابل قبول هستند.)

۳۲۷- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را در $x(x+a)$ ضرب می‌کنیم

$$x+a+3x=2x^2+2ax\Rightarrow 2x^2+(2a-4)x-a=0$$

برای اینکه معادله جواب داشته باشد باید $\Delta\ge0$. پس

$$(2a-4)^2+8a\ge0\Rightarrow 4a^2-16a+16+8a\ge0\Rightarrow a^2-2a+4\ge0$$

عبارت a^2-2a+4 همواره مثبت است، پس معادله به‌ازای تمام مقادیر a جواب دارد.

۳۲۸- گزینهٔ ۲ سمت راست معادلهٔ داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{15}{x^2+x+1}=2(x^2+x+1)-1$$

اگر فرض کنیم $x^2+x+1=t$، این معادله می‌شود

$$\frac{15}{t}=2t-1\Rightarrow 15=2t^2-t\Rightarrow 2t^2-t-15=0\Rightarrow t=-\frac{5}{2}\,,\,t=3$$

به این ترتیب

$$x^2+x+1=-\frac{5}{2}\Rightarrow x^2+x+\frac{7}{2}=0$$ جواب ندارد $(\Delta<0)$

$$x^2+x+1=3\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=-2\,,\,x=1$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۳۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=(x-\frac{1}{x})^2+4$$

پس معادلهٔ مورد نظر به معادلهٔ $(x-\frac{1}{x})^2=\frac{3}{2}(x-\frac{1}{x})$ تبدیل می‌شود.

بنابراین یا $x-\frac{1}{x}=0$، یعنی $x^2-1=0$، که مجموع جواب‌هایش صفر است، یا $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$، یعنی $x^2-\frac{3}{2}x-1=0$ که مجموع جواب‌هایش $\frac{3}{2}$ است.

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر با $\frac{3}{2}$ است.

۳۳۰- گزینهٔ ۴ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4\Rightarrow x+1=4x^2\Rightarrow 4x^2-x-1=0$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $-\frac{1}{4}$ است.

۳۳۱- گزینهٔ ۳ اگر ماشین کندتر به تنهایی در t ساعت کار را تمام کند، ماشین سریع‌تر به تنهایی در $\frac{t}{3}$ ساعت کار را تمام می‌کند. پس ماشین کندتر به تنهایی در یک ساعت $\frac{1}{t}$ کار و ماشین سریع‌تر به تنهایی در یک ساعت $\frac{3}{t}$ کار را انجام می‌دهد. از طرف دیگر دو ماشین با هم در یک ساعت $\frac{1}{6}$ کار را انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t}+\frac{3}{t}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{4}{t}=\frac{1}{6}\Rightarrow t=24$$

بنابراین ماشین کندتر به تنهایی در ۲۴ ساعت کار را انجام می‌دهد.

۳۳۲- گزینهٔ ۳ با توجه به جدول تعیین علامت باید $a-b<0$، پس $a<b$. همچنین $x=b$ ریشهٔ عبارت است، بنابراین

$$(a-b)b-2a+2b=0\Rightarrow(a-b)b-2(a-b)=0$$

$$(a-b)(b-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\Rightarrow a=b & (\text{غ.ق.ق})\\ b-2=0\Rightarrow b=2\end{cases}$$

چون a عددی طبیعی است، پس

$$a<b=2\Rightarrow a=1$$

بنابراین $a+b=3$.

۳۳۳- گزینهٔ ۲ با توجه به جدول تعیین علامت، مشخص است که عبارت مورد نظر باید چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس $a-2=0$ و در نتیجه $a=2$. بنابراین عبارت به صورت $y=-(2+b)x+4$ است. چون $x=4$ ریشهٔ عبارت است، پس

$$-(2+b)\times4+4=0\Rightarrow b=-1$$

بنابراین $a-b=3$.

۳۳۴- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y=\frac{(x-1)(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)^3}$$

اکنون آن را ساده می‌کنیم $y=\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-2)^2}$. چون عبارت‌های $(x-1)^2$ و $(x-2)^2$ نامنفی هستند، علامت عبارت اخیر را با توجه به علامت $x+1$ تعیین می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	+	ت	+	

۳۳۵- گزینهٔ ۲ دو نامعادلهٔ $3x-2<5x+6$ و $4x-1<3x-2$ را حل می‌کنیم:

$$3x-2<5x+6\Rightarrow-2x<8\Rightarrow x>-4$$

$$4x-1<3x-2\Rightarrow x<-1$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های فوق یعنی $-4<x<-1$ جواب مسئله است. پس $a=-4$ و $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-5$.

۳۳۶- گزینهٔ ۱ باید شرایط $\Delta<0$ و $a>0$ برقرار باشند. پس

$$m-1>0\Rightarrow m>1\quad(1)$$

$$\Delta=8-4m(m-1)<0\Rightarrow m^2-m-2>0\Rightarrow(m+1)(m-2)>0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر باید

$m<-1$ یا $m>2$ (۲)

از دو شرط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m>2$.

m	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
m^2-m-2		+	۰	−	۰	+	

۳۳۷- گزینهٔ ۴ ابتدا جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{(1-x)^2(x+2)^3}{x|x|(2-x)^5}$ را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
y		+	۰	−	ت	+	۰	+	ت	−	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-2]\cup(0,2)$ است.

۳۳۸- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x-\frac{2}{x}-1\geq0\Rightarrow\frac{x^2-x-2}{x}\geq0$$

به کمک تعیین علامت مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$\frac{x^2-x-2}{x}$		−	۰	+	ت	−	۰	+	

این مجموعه به‌صورت $[-1,+\infty)-[0,2)$ است. پس $a=-1$ و $b=2$. در نتیجه $a+b=1$.

۳۳۹- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$x-۱=x^۲-۴x+۴\Rightarrow x^۲-۵x+۵=۰$$

جواب‌های این معادله به‌صورت $x=\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ و $x=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ هستند. ولی $\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند زیرا این عدد کوچک‌تر از ۲ است و در معادلهٔ $\sqrt{x-۱}=x-۲$ اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه سمت چپ معادله، نامنفی و سمت راست آن منفی است که قابل قبول نیست. بنابراین فقط $x=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله است.

۳۴۰- گزینهٔ ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x+۱}+۱=\sqrt{۲x+۳}$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+۱+۱+۲\sqrt{x+۱}=۲x+۳\Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}=x+۱$$

دوباره طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴(x+۱)=(x+۱)^۲\Rightarrow ۴x+۴=x^۲+۲x+۱$$

$$x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow x=-۱\,,\,x=۳$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس مجموع جواب‌ها برابر ۲ است.

۳۴۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را این‌طور می‌نویسیم:

$$x^۲+۵x+۲۸-۲۴-۵\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=۰$$

اکنون اگر فرض کنیم $\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=t$، این معادله می‌شود

$$t^۲-۲۴-۵t=۰\Rightarrow (t-۸)(t+۳)=۰\Rightarrow t=۸\,,\,t=-۳$$

چون $t\geq ۰$، پس $t=۸$، یعنی

$$\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=۸\Rightarrow x^۲+۵x+۲۸=۶۴\Rightarrow x^۲+۵x-۳۶=۰$$

$$(x-۴)(x+۹)=۰\Rightarrow x=۴\,,\,x=-۹$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -۳۶ است.

۳۴۲- گزینهٔ ۲ اگر این عدد را x فرض کنیم، آن‌گاه

$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{۲}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}\frac{x^۲}{۴}=x\Rightarrow x^۲=۴x$$

$$x=۰,\ x=۴$$

چون هر دو عدد در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند، بنابراین دو عدد با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۳۴۳- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم است که $a>۱$. چون $x=۱$ جواب معادله است، پس

$$۲\times ۱^۲-۱=|۱-a|\Rightarrow |۱-a|=۱\xrightarrow{a>۱}a-۱=۱$$

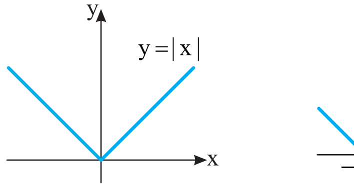
بنابراین $a=۲$.

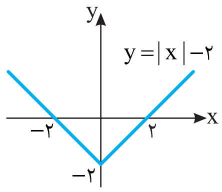
۳۴۴- گزینهٔ ۴ اگر خط و سهمی نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، باید معادلهٔ $x^۲+۲kx+k+۱=-x$ جواب نداشته باشد. بنابراین معادلهٔ $x^۲+(۲k+۱)x+k+۱=۰$ جواب ندارد، یعنی

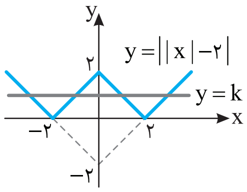
$$\Delta=(۲k+۱)^۲-۴(k+۱)<۰\Rightarrow ۴k^۲+۴k+۱-۴k-۴<۰$$

$$k^۲<\frac{۳}{۴}\Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲}<k<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۴۵- گزینهٔ ۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر، تعداد نقطه‌های برخورد نمودار تابع‌های $y=||x|-۲|$ و $y=k$ است. نمودار $y=||x|-۲|$ را در شکل زیر رسم کرده‌ایم:

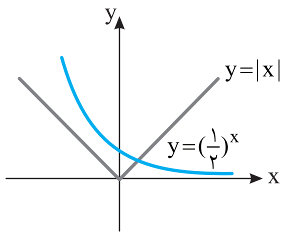






از روی شکل معلوم است که اگر خط $y=k$ نمودار $y=||x|-۲|$ را در چهار نقطه قطع کرده باشد، باید $۰<k<۲$.

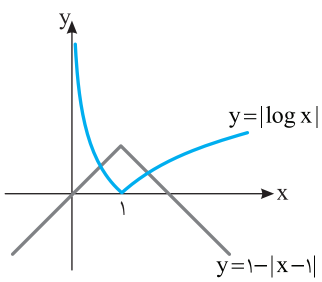
۳۴۶- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $|x|=(\frac{۱}{۲})^x$ می‌نویسیم و نمودار تابع‌های $y=|x|$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم می‌کنیم. نمودارها یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، پس معادله یک جواب دارد.



۳۴۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$|\log x|=۱-|x-۱|$$

و نمودار تابع‌های $y=۱-|x-۱|$ و $y=|\log x|$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.



۳۴۸- گزینهٔ ۱

(چون $۱+a<۰$) $\quad |۳+|۲-|۱+a|||=|۳+|۲-(-(۱+a))||$

(چون $۳+a<۰$) $\quad =|۳+|۳+a||=|۳-(۳+a)|$

(چون $a<۰$) $\quad =|-a|=-a$

۳۴۹- گزینهٔ ۴ چون a منفی است، پس $|a|=-a$، در نتیجه
$$||a|-b|=|-a-b|$$
اکنون توجه کنید که $b<|a|=-a\Rightarrow a+b<۰$

بنابراین $||a|-b|=|-a-b|=-a-b$. از طرف دیگر،
$$|b-|۲a||=|b-۲|a||=|b+۲a|$$
چون $b+۲a=\underbrace{b+a}_{<۰}+\underbrace{a}_{<۰}<۰$، در نتیجه $|b+۲a|=-b-۲a$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-a-b-(-b-۲a)=a$.

۳۵۰- گزینهٔ ۳ چون $۱<x<۲$، پس
$$\frac{|x-۲|}{x-۲}=\frac{۲-x}{x-۲}=-۱,\quad \frac{x-۱}{|x-۱|}=\frac{x-۱}{x-۱}=۱,\quad \frac{|x|}{x}=۱$$
بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-۱-۱+۱=-۱$.

۳۵۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x^۲<x\Rightarrow x^۲-x=x(x-۱)<۰$

در نتیجه $۰<x<۱$. بنابراین $|x+۱|=x+۱$، $|۱-x|=۱-x$ و $|x|=x$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $x+۱-(۱-x)+x=۳x$.

۳۵۲- گزینهٔ ۱ عبارت A را می‌توان به صورت زیر نوشت
$$A=|۲x-۶|+|۷-۲x|$$
با توجه به نابرابری مثلث، $A\ge|۲x-۶+۷-۲x|\Rightarrow A\ge۱$

پس کمترین مقدار عبارت A برابر ۱ است.

۳۵۳- گزینهٔ ۴ معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:
$$|x-۲|=۳\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۳\\x-۲=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\x=-۱\end{cases}$$
بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ است.

۳۵۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که $|-x|=|x|$ و $|۳x|=۳|x|$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود
$$|x|+|x|+۳|x|=۱۵\Rightarrow ۵|x|=۱۵\Rightarrow|x|=۳\Rightarrow x=-۳\ ,\ x=۳$$
بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر صفر است.

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر x جواب معادلهٔ مورد نظر باشد، $-x$ هم جواب این معادله است. بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر صفر است.

۳۵۵- گزینهٔ ۴ از تساوی $|۳x-x^۲|=|x-۱|$ تساوی‌های زیر نتیجه می‌شوند
$$۳x-x^۲=x-۱\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰\qquad(۱)$$
$$۳x-x^۲=-(x-۱)\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰\qquad(۲)$$
مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر ۲ و مجموع جواب‌های معادلهٔ (۲) برابر ۴ است. پس مجموع جواب‌های معادلهٔ اصلی برابر ۶ است (توجه کنید که معادله‌های به‌دست آمده، جواب مشترک ندارند).

۳۵۶- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:
$$-۳\le۲x-a\le۳\Rightarrow a-۳\le۲x\le a+۳\Rightarrow\frac{a-۳}{۲}\le x\le\frac{a+۳}{۲}$$
بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، بازهٔ $[\frac{a-۳}{۲},\frac{a+۳}{۲}]$ است. پس
$$\frac{a-۳}{۲}=-a\Rightarrow a-۳=-۲a\Rightarrow a=۱\ ,\qquad \frac{a+۳}{۲}=b\Rightarrow b=۲$$

۳۵۷- گزینهٔ ۲ نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم:
$$||x|-۲|<۶\Rightarrow-۶<|x|-۲<۶\Rightarrow-۴<|x|<۸$$
نابرابری $-۴<|x|$ همواره برقرار است، پس کافی است نامعادلهٔ $|x|<۸$ را حل کنیم: $|x|<۸\Rightarrow-۸<x<۸$

بنابراین اعداد صحیح -۷ تا ۷ در نامعادله صدق می‌کنند که تعداد آن‌ها ۱۵ تا است.

۳۵۸- گزینهٔ ۲ ابتدا نامعادله را به‌صورت $۲|x|>|x-۲|$ می‌نویسیم.

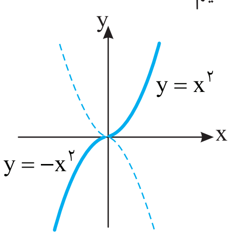
اکنون دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:
$$۴x^۲>(x-۲)^۲\Rightarrow(۲x)^۲-(x-۲)^۲>۰$$
در نتیجه $(۲x-(x-۲))(۲x+x-۲)>۰$ یا به طور معادل
$$(x+۲)(۳x-۲)>۰$$
بنابراین مجموعهٔ جواب‌های مورد نظر برابر است با $(-\infty,-۲)\cup(\frac{۲}{۳},+\infty)$.

۳۵۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $x-۲+x-۴=۲x-۶$، در نتیجه
$$|x-۲|+|x-۴|=|x-۲+x-۴|$$
بنابراین، حالت تساوی نابرابری مثلث پیش آمده است. در نتیجه
$$(x-۲)(x-۴)\ge۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}-(۲,۴)$$
پس تنها عدد صحیحی که تساوی مورد نظر به‌ازای آن برقرار نیست ۳ است.

۳۶۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که
$$f(\sqrt{۳}-۱)+f(\sqrt{۵}-۲)=۵|۳(\sqrt{۳}-۱)-۲|-۳|۵(\sqrt{۳}-۱)-۲|$$
$$+۵|۳(\sqrt{۵}-۲)-۲|-۳|۵(\sqrt{۵}-۲)-۲|=۵|\underbrace{۳\sqrt{۳}-۵}_{+}|-۳|\underbrace{۵\sqrt{۳}-۷}_{+}|$$
$$+۵|\underbrace{۳\sqrt{۵}-۸}_{-}|-۳|\underbrace{۵\sqrt{۵}-۱۲}_{-}|=-۴+۴=۰$$

۳۶۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع f به شکل $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge۰\\-x^۲ & x\le۰\end{cases}$ است.

پس باید برای $x\ge۰$ نمودار تابع $y=x^۲$ را رسم کنیم و برای $x\le۰$ نمودار تابع $y=-x^۲$ را رسم کنیم.



۳۶۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{|x-۱|}{x-۱}=\begin{cases}۱ & x>۱\\-۱ & x<۱\end{cases}$. بنابراین $f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x>۱\\x^۲-۱ & x<۱\end{cases}$. در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینهٔ (۱) است.

۳۶۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که
$$f(x)=\begin{cases}-(x+۱)+x & x\le-۱\\x+۱+x & -۱<x\le۰\\x+۱-x & x>۰\end{cases}=\begin{cases}-۱ & x\le-۱\\۲x+۱ & -۱<x\le۰\\۱ & x>۰\end{cases}$$
در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینهٔ (۳) است.

۳۶۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$[\frac{1}{2}]=0\ ,\ [\frac{2}{2}]=[\frac{3}{2}]=1\ ,\ [\frac{4}{2}]=[\frac{5}{2}]=2\ ,\ \cdots\ ,\ [\frac{18}{2}]=[\frac{19}{2}]=9\ ,\ [\frac{20}{2}]=10$$

از جمع تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

$$[\frac{1}{2}]+[\frac{2}{2}]+[\frac{3}{2}]+\cdots+[\frac{20}{2}]=2(1+2+\cdots+9)+10=90+10=100$$

۳۶۵- گزینهٔ ۴ ابتدا با حل نامعادله، محدودهٔ x را می‌یابیم:

$$x^2+x<0\Rightarrow x(x+1)<0\Rightarrow -1<x<0$$

اگر عددی بین ۱- و صفر باشد و به توان هر عدد فردی برسد، در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد، عددی بین صفر و ۱ می‌شود، یعنی

$$-1<x<0\Rightarrow\begin{cases}0<x^{2k}<1\Rightarrow[x^{2k}]=0\\-1<x^{2k+1}<0\Rightarrow[x^{2k+1}]=-1\end{cases}$$

$$[x]+[x^2]+\cdots+[x^{10}]=5\times0+5\times(-1)=-5$$

۳۶۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از نابرابری $n^3<n^3+3n^2<(n+1)^3$، نتیجه می‌گیریم $n<\sqrt[3]{n^3+3n^2}<n+1$، بنابراین $[\sqrt[3]{n^3+3n^2}]=n$.

راه‌حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای $n=2$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=2$، آن‌گاه

$$[\sqrt[3]{n^3+3n^2}]=[\sqrt[3]{20}]=2$$

از طرف دیگر فقط عبارت گزینهٔ (۱) به ازای $n=2$ برابر ۲ می‌شود.

۳۶۷- گزینهٔ ۳ چون $[x]$ عدد صحیح است، معادله را به‌صورت $[x]+[x]=[x]-[x]-2$ می‌نویسیم. بنابراین $[x]=-1\Rightarrow -1\le x<0$

۳۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(-\frac{1}{2})=|[-\frac{5}{2}]+[-\frac{7}{2}]|=|-3+(-4)|=7$$

۳۶۹- گزینهٔ ۱ به جای x در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم $x+1$، پس

$$f(x+1)=4(x+1)-[x+1]-[3(x+1)]=4x+4-[x]-1-[3x]-3$$
$$=4x-[x]-[3x]=f(x)$$

۳۷۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که باید

$$[x]-2\ge0\Rightarrow[x]\ge2\Rightarrow x\ge2$$

بنابراین $D_f=[2,+\infty)$.

۳۷۱- گزینهٔ ۲ مقادیری از x که مخرج $f(x)$ را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. اکنون توجه کنید که

$$[\frac{x}{3}]-2=0\Rightarrow[\frac{x}{3}]=2\Rightarrow 2\le\frac{x}{3}<3\Rightarrow 6\le x<9$$

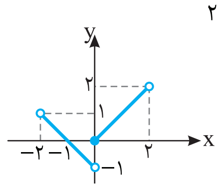
بنابراین $D_f=\mathbb{R}-[6,9)$. پس $a=6$، $b=9$ و در نتیجه $a+b=15$.

۳۷۲- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است

$$-2<x<0\Rightarrow -1<\frac{x}{2}<0\Rightarrow[\frac{x}{2}]=-1\Rightarrow f(x)=-x-1$$

$$0\le x<2\Rightarrow 0\le\frac{x}{2}<1\Rightarrow[\frac{x}{2}]=0\Rightarrow f(x)=x$$

پس نمودار تابع به شکل مقابل است



۳۷۳- گزینهٔ ۲ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0)=-\frac{3}{4}\Rightarrow 4^a+b=-\frac{3}{4}$$

$$f(1)=0\Rightarrow 4^{1+a}+b=0\Rightarrow 4\times4^a+b=0$$

اگر رابطهٔ اول را از رابطهٔ دوم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$3\times4^a=\frac{3}{4}\Rightarrow a=-1$$

$$4^{-1}+b=-\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}+b=-\frac{3}{4}\Rightarrow b=-1$$

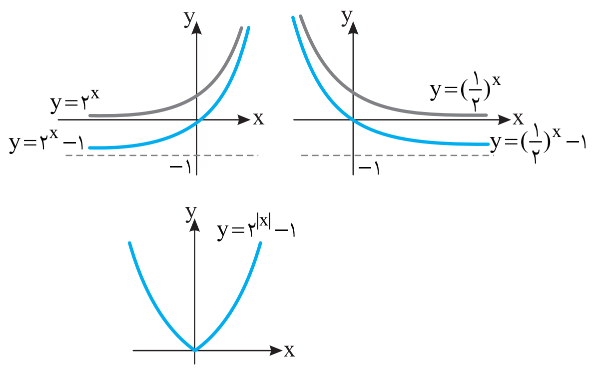
در نتیجه $a+b=-2$.

۳۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا $f(-x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{2^x}-1}{\frac{1}{2^x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}$$

بنابراین $f(x)+f(-x)=\frac{2^x-1}{1+2^x}+\frac{1-2^x}{1+2^x}=\frac{2^x-1+1-2^x}{1+2^x}=0$.

۳۷۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\ge0\\2^{-x}-1 & x<0\end{cases}$ یعنی $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\ge0\\(\frac{1}{2})^x-1 & x<0\end{cases}$. بنابراین نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.



۳۷۶- گزینهٔ ۱ اگر تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $a>1$. بنابراین $3k+1>1$، پس $k>0$.

۳۷۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{81}{16}=(\frac{3}{2})^4=(\frac{2}{3})^{-4}$، بنابراین

$$(\frac{2}{3})^{x+2}=(\frac{81}{16})^{x-1}\Rightarrow(\frac{2}{3})^{x+2}=((\frac{3}{2})^4)^{x-1}=(\frac{2}{3})^{-4(x-1)}$$

در نتیجه $x+2=-4(x-1)$، پس $x=\frac{2}{5}$.

۳۷۸- گزینهٔ ۱ با فاکتورگیری از 5^x معادله را حل می‌کنیم

$$5^x(1+3\times5^{-2})=140\Rightarrow5^x(1+\frac{3}{25})=140\Rightarrow5^x\times\frac{28}{25}=140$$

$$5^x=\frac{25\times140}{28}=125=5^3\Rightarrow x=3$$

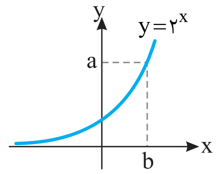
پس معادله یک جواب دارد.

۳۷۹- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار تابع $y=۲^x$، معادلهٔ $۲^x=a$ در صورتی که $a>۰$، دقیقاً یک جواب دارد $(x=b)$ و اگر $a\le ۰$، جواب ندارد. بنابراین

$۲^x-۵=۰\Rightarrow$ یک جواب دارد. ، $۲^x-۶=۰\Rightarrow$ یک جواب دارد.

$۲^x+۶=۰\Rightarrow$ جواب ندارد. ، $۲^x+۵=۰\Rightarrow$ جواب ندارد.

چون تابع $y=۲^x$ یک‌به‌یک است، پس معادلهٔ اصلی دو جواب دارد.



۳۸۰- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $۳^x=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۳\times۹\times۹^x-۶\times۳^x-۱=۰\Rightarrow ۲۷t^۲-۶t-۱=۰\Rightarrow t=-\frac{۱}{۹}, t=\frac{۱}{۳}$$

چون $t>۰$، پس $t=\frac{۱}{۳}$، یعنی $۳^x=\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}$، پس $x=-۱$. در نتیجه معادله یک جواب دارد.

۳۸۱- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $۰<a<۱$ و $a^{f(x)}<a^{g(x)}$، آن‌گاه $f(x)>g(x)$ و بالعکس. چون $۰<\frac{۱}{۲}<۱$، پس

$$۳-x>x-۳\Rightarrow x<۳$$

۳۸۲- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $۵^x=t$، نامعادلهٔ داده شده را می‌توان این‌طور نوشت

$$۲۵^x+۲۴\times۵^{x-۱}<۱\Rightarrow t^۲+۲۴\times\frac{t}{۵}<۱\Rightarrow ۵t^۲+۲۴t<۵$$

$$۵t^۲+۲۴t-۵<۰\Rightarrow (t+۵)(t-\frac{۱}{۵})<۰$$

چون $t+۵>۰$، پس $t-\frac{۱}{۵}<۰$، یعنی $۵^x<\frac{۱}{۵}=۵^{-۱}$، در نتیجه $x<-۱$.

۳۸۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sqrt[۵]{۷\sqrt[۴]{۷}}=۷^{\frac{۱}{۵}}\times۷^{\frac{۱}{۵\times۴}}=۷^{\frac{۱}{۴}}$. اکنون اگر از ویژگی $\log_a x^n=n\log_a x$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$\log_۷\sqrt[۵]{۷\sqrt[۴]{۷}}=\log_۷ ۷^{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۴}\log_۷ ۷=\frac{۱}{۴}$$

۳۸۴- گزینهٔ ۳ با استفاده از تساوی $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$ به‌دست می‌آید

$$\log_۴(\sqrt{۳}-۱)+\log_۴(\sqrt{۳}+۱)=\log_۴((\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱))=\log_۴ ۲=\frac{۱}{۲}$$

۳۸۵- گزینهٔ ۱ چون $\log_x a=\frac{۱}{\log_a x}$، پس

$$\frac{۱}{\log_۴ ۶}+\frac{۱}{\log_۹ ۶}=\log_۶ ۴+\log_۶ ۹=\log_۶(۴\times۹)$$

$$=\log_۶ ۳۶=\log_۶ ۶^۲=۲\log_۶ ۶=۲$$

۳۸۶- گزینهٔ ۳ به کمک تساوی $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ می‌توان نوشت

$$۳^{\log_۹ ۶}=۶^{\log_۹ ۳}=۶^{\log_{۳^۲}۳}=۶^{\frac{۱}{۲}\log_۳ ۳}=۶^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۶}$$

۳۸۷- گزینهٔ ۲ از تساوی $\log ۴=a$ نتیجه می‌شود

$$\log ۲^۲=a\Rightarrow ۲\log ۲=a\Rightarrow \log ۲=\frac{a}{۲}$$

بنابراین $\log ۱۲۵=\log ۵^۳=۳\log ۵=۳\log\frac{۱۰}{۲}=۳(\log ۱۰-\log ۲)$

$$=۳(۱-\frac{a}{۲})=۳-\frac{۳a}{۲}$$

۳۸۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\log ۳۰=a\Rightarrow\log(۳\times۱۰)=a\Rightarrow\log ۳+\log ۱۰=a\Rightarrow\log ۳=a-۱$$

$$\log ۵۰=b\Rightarrow\log(۵\times۱۰)=b\Rightarrow\log ۵+\log ۱۰=b\Rightarrow\log ۵=b-۱$$

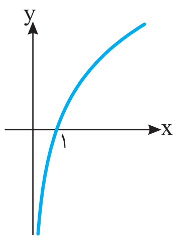
بنابراین $\log_۵ ۳=\frac{\log ۳}{\log ۵}=\frac{a-۱}{b-۱}$.

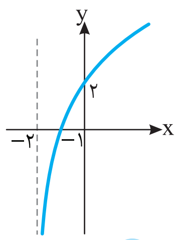
۳۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $۳^{x+۲}=۳^۲\times۳^x=۹\times۳^x=۴$. بنابراین

$$۳^x=\frac{۴}{۹}\Rightarrow x=\log_۳\frac{۴}{۹}$$

۳۹۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید که نمودار f از روی نمودار $y=\log_a x$ به‌دست آمده باشد. معلوم است که نمودار $y=\log_a x$، دو واحد به سمت چپ منتقل شده است تا نمودار f به‌دست آید. بنابراین ضابطهٔ تابع f می‌تواند $f(x)=\log_a(x+۲)$ باشد. از طرف دیگر $f(۰)=۲$، پس $\log_a ۲=۲$، یعنی $a^۲=۲$. بنابراین $a=\sqrt{۲}$ (توجه کنید که $a>۰$). بنابراین

$$f(x)=\log_{\sqrt{۲}}(x+۲)$$





۳۹۱- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$f(x)=۴+\log(۲x-۴)=۶\Rightarrow\log(۲x-۴)=۲\Rightarrow ۲x-۴=۱۰^۲\Rightarrow x=۵۲$$

بنابراین $f(۵۲)=۶$، پس $f^{-۱}(۶)=۵۲$.

۳۹۲- گزینهٔ ۲

۳۹۳- گزینهٔ ۲ لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود، پس

$$۹-x^۲>۰\Rightarrow x^۲<۹\Rightarrow -۳<x<۳\Rightarrow D_f=(-۳,۳)$$

بنابراین اعداد صحیح ±۲، ±۱ و صفر در دامنهٔ تابع هستند.

۳۹۴- گزینهٔ ۴ اگر $y=۳^{۵x-۱}$، آن‌گاه

$$\log_۳ y=۵x-۱\Rightarrow x=\frac{\log_۳ y+۱}{۵}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{\log_۳ x+۱}{۵}$.

۳۹۵- گزینهٔ ۲ ابتدا x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y=\log_۳(x-۲)\Rightarrow ۳^y=x-۲\Rightarrow x=۳^y+۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=۳^x+۲$.

۳۹۶- گزینهٔ ۱ کافی است معادلهٔ $x^۲-۷x=x$ را حل کنیم:

$$x^۲-۸x=۰\Rightarrow x=۰, x=۸$$

واضح است که $x=۰$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۳۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_۲ \sqrt{x} = \log_۲ x^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log_۲ x$$

$$\log_۴(x-۶) = \log_{۲^۲}(x-۶) = \frac{۱}{۲}\log_۲(x-۶)$$

در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{۱}{۲}\log_۲ x + \frac{۱}{۲}\log_۲(x-۶) = ۲ \Rightarrow \log_۲ x + \log_۲(x-۶) = ۴$$

$$\log_۲(x(x-۶)) = ۴ \Rightarrow x(x-۶) = ۲^۴ \Rightarrow x^۲ - ۶x - ۱۶ = ۰$$

$$(x-۸)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۸, \quad x=-۲ \text{ (غ.ق.ق)}$$

دقت کنید که $x=-۲$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند، بنابراین غیرقابل قبول است.

۳۹۸- گزینهٔ ۴ با استفاده از تعریف لگاریتم معادله را به‌صورت $(۲x-۱)^۲ = x$ می‌نویسیم. بنابراین

$$۴x^۲-۴x+۱=x \Rightarrow ۴x^۲-۵x+۱=۰$$

$$(۴x-۱)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}, x=۱$$

پایهٔ لگاریتم عبارت $۲x-۱$ است که به ازای $x=۱$ برابر ۱ و به ازای $x=\frac{۱}{۴}$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ می‌شود. ولی می‌دانیم که پایهٔ لگاریتم باید مثبت و مخالف ۱ باشد. پس هیچ‌کدام از مقدارهای به‌دست آمده قابل قبول نیستند و معادله جواب ندارد.

۳۹۹- گزینهٔ ۴ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\log_۳(۱۰-x) \le \log_۳ ۹$$

نتیجه می‌گیریم

$$۱۰-x \le ۹ \Rightarrow x \ge ۱$$

از طرف دیگر عبارت $\log_۳(۱۰-x)$ وقتی معنادار است که $۱۰-x>۰$ و در نتیجه $x<۱۰$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[۱,۱۰)$ است.

۴۰۰- گزینهٔ ۲ از نامعادلهٔ $\log(x+۲) > \log(۲x+۱)$ نتیجه می‌شود

$$x+۲>۲x+۱ \Rightarrow x<۱$$

عبارت $\log(x+۲)$ برای $x>-۲$ و عبارت $\log(۲x+۱)$ برای $x>-\frac{۱}{۲}$ معنادار است. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\frac{۱}{۲},۱)$ است.

۴۰۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $x-۲>۰$، یعنی $x>۲$. از طرف دیگر، باید

$$\log_{۰/۵}(x-۲) \ge ۰ = \log_{۰/۵} ۱$$

در نتیجه (چون $۰/۵<۱$)

$$x-۲ \le ۱ \Rightarrow x \le ۳$$

بنابراین $D_f=(۲,۳]$. به این ترتیب $a=۲$ و $b=۳$، پس $ab=۶$.

۴۰۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$AB=AC \Rightarrow \sqrt{(a+۱)^۲+(۱-۱)^۲} = \sqrt{(a-۳)^۲+(۱-۵)^۲}$$

$$\sqrt{a^۲+۲a+۱+۰} = \sqrt{a^۲-۶a+۹+۱۶}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a^۲+۲a+۱ = a^۲-۶a+۲۵ \Rightarrow ۸a=۲۴ \Rightarrow a=۳$$

۴۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $AB=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۰-۰)^۲}=۳$. بنابراین

$$AC=۳ \Rightarrow \sqrt{(۰-a)^۲+(۰-b)^۲}=۳ \Rightarrow a^۲+b^۲=۹ \quad (۱)$$

$$BC=۳ \Rightarrow \sqrt{(۳-a)^۲+(۰-b)^۲}=۳ \Rightarrow (۳-a)^۲+b^۲=۹$$

$$۹-۶a+a^۲+b^۲=۹ \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $۹-۶a=۰$، پس $a=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید $b^۲=۹-a^۲=۹-\frac{۹}{۴}=\frac{۲۷}{۴}$، بنابراین

$$|b|=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۴۰۴- گزینهٔ ۱ وسط ضلع BC نقطهٔ $(\frac{۳+۱}{۲},\frac{-۲+۴}{۲})$ یعنی نقطهٔ $(۲,۱)$ است. طول میانهٔ نظیر رأس A برابر با فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ وسط ضلع BC است، یعنی برابر است با $\sqrt{(۲-۱)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۰}$.

۴۰۵- گزینهٔ ۳ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(۳,a)$ و $(۲,۷)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{a-۷}{۳-۲}=a-۷$. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-۱,۴)$ و $(۱,۸)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۴-۸}{-۱-۱}=۲$. اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است، پس

$$(a-۷)(۲)=-۱ \Rightarrow a=\frac{۱۳}{۲}$$

۴۰۶- گزینهٔ ۳ طول عمود وارد از نقطهٔ $(۳,۱)$ بر خط $۴x+۳y+۲۰=۰$ فاصلهٔ این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|۴\times۳+۳\times۱+۲۰|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۳۵}{۵}=۷$$

۴۰۷- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط $ax+by+c=۰$ ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد، چون شیب این خط -۱ است، پس $-\frac{a}{b}=-۱$، در نتیجه $a=b$. از طرف دیگر، چون فاصلهٔ مبدأ از این خط برابر با ۵ است، پس

$$\frac{|a\times۰+a\times۰+c|}{\sqrt{a^۲+a^۲}}=۵ \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{۲}|a|}=۵ \Rightarrow |c|=۵\sqrt{۲}|a| \Rightarrow c=\pm۵\sqrt{۲}a$$

بنابراین خط‌های راست مورد نظر $ax+ay+۵\sqrt{۲}a=۰$ و $ax+ay-۵\sqrt{۲}a=۰$ هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت $x+y+۵\sqrt{۲}=۰$ و $x+y-۵\sqrt{۲}=۰$ نوشت.

فصل دوم

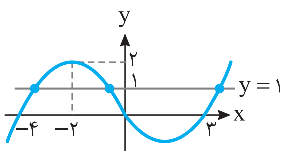
پاسخ آزمون‌ها

۱- گزینهٔ ۲ چون f فقط یک زوج مرتب دارد، پس تساوی‌های $۲a-b=۱$ ، $۲b+c=۲$ و $۲a=۲$ برقرار است که نتیجه می‌شود $a=۱$ ، $b=۱$ و $c=۰$ ، پس $a+b+c=۲$.

۲- گزینهٔ ۴ از عدد ۲ دو پیکان خارج شده است، پس دو عدد $a^۲$ و $a+۲$ باید یکسان باشند. پس $a^۲=a+۲$ که نتیجه می‌شود $a=-۱$ یا $a=۲$. اگر $a=۲$ ، باید داشته باشیم $b=a^۲=۴$ ، پس $a+b=۶$. اگر $a=-۱$ ، باید داشته باشیم $b=۲b+۱$ ، پس $b=-۱$ و در نتیجه $a+b=-۲$. پس حاصل $a+b$ برابر ۶ یا ۲- است.

۳- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\{۱,۳,۵\}$ است که ۳ عضو دارد. برد تابع مجموعهٔ $\{۳,۵,a^۲\}$ است که باید تعداد اعضای آن کمتر از ۳ باشد. یعنی یا باید $a^۲=۳$ یا باید $a^۲=۵$. بنابراین $a=\pm\sqrt{۵}$ یا $a=\pm\sqrt{۳}$ پس ۴ مقدار مختلف برای a وجود دارد.

۴- گزینهٔ ۴ تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۱$ برابر با تعداد نقطه‌های برخورد خط $y=۱$ با نمودار تابع f است. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که تعداد این نقطه‌ها سه تا است.



۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x^۲-۴x)=۸x-۲x^۲+۱۲=-۲(x^۲-۴x)+۱۲$$

بنابراین، اگر x عددی حقیقی باشد که $x^۲-۴x=۳$ (چنین xای وجود دارد، زیرا دلتای معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۴x-۳=۰$ مثبت است)، آن‌گاه

$$f(۳)=-۲(۳)+۱۲=۶$$

۶- گزینهٔ ۴ در ضابطهٔ تابع به جای x ، مقدار $x-۱$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x-۱)=(x-۱)^۲-۲(x-۱)=x^۲-۴x+۳$$

در ضابطهٔ تابع به جای x مقدار $x+۱$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x+۱)=(x+۱)^۲-۲(x+۱)=x^۲-۱$$

بنابراین $f(x-۱)+f(x+۱)=۲x^۲-۴x+۲=۲(x^۲-۲x)+۲=۲f(x)+۲$.

۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $\frac{x+۱}{x-۲}=t$ و در نتیجه

$$tx-۲t=x+۱\Rightarrow tx-x=۲t+۱\Rightarrow(t-۱)x=۲t+۱\Rightarrow x=\frac{۲t+۱}{t-۱},\ t\neq۱$$

در رابطهٔ داده شده به جای x قرار می‌دهیم $\frac{۲t+۱}{t-۱}$:

$$f(t)=۲(\frac{۲t+۱}{t-۱})-۱=\frac{۴t+۲-t+۱}{t-۱}=\frac{۳t+۳}{t-۱}$$

در نتیجه اگر $x\neq۱$ ، آن‌گاه $f(x)=\frac{۳x+۳}{x-۱}$.

راه‌حل دوم اگر در رابطهٔ داده شده قرار دهیم $x=-۱$ ، به‌دست می‌آید

$$f(۰)=-۳$$

اکنون در توابع داده شده در گزینه‌ها به جای x مقدار صفر را قرار می‌دهیم. تنها تابعی که در آن $f(۰)=-۳$ تابع گزینهٔ (۱) است.

۸- گزینهٔ ۳ برای $x=۲$ از ضابطهٔ اول به‌دست می‌آید

$$f(۲)=۴m-۲$$

و از ضابطهٔ دوم $f(۲)=۸-m$. برای اینکه رابطه، تابع باشد، باید فقط یک مقدار برای $f(۲)$ وجود داشته باشد. یعنی $۴m-۲=۸-m$ ، پس $m=۲$. بنابراین باید $f(۲)$ را محاسبه کنیم که برابر است با $f(۲)=۸-۲=۶$.

۹- گزینهٔ ۳ اگر $n\in\mathbb{N}$ آن‌گاه عدد $\sqrt[۴]{n}$ وقتی که n توان چهارم عددی طبیعی باشد، گویا خواهد بود. پس $\sqrt[۴]{۱۶}$ و $\sqrt[۴]{۸۱}$ ، اعدادی گویا هستند و بقیهٔ اعداد داده شده گنگ هستند. بنابراین

$$f(\sqrt[۴]{۲})+f(\sqrt[۴]{۳})+\cdots+f(\sqrt[۴]{۱۰۰})=۲\times۱+۹۷\times۰=۲$$

۱۰- گزینهٔ ۲ رابطهٔ $(y-۱)^۳=|x-۱|$ را می‌توان به‌صورت $y=\sqrt[۳]{|x-۱|}+۱$ نوشت. برای هر x دقیقاً یک مقدار y وجود دارد که در تساوی فوق صدق می‌کند. بنابراین در این رابطه y تابعی از x است. بقیهٔ گزینه‌ها را می‌توان با مثال نقض رد کرد:

$$|y|=|x|,\ x=۱\Rightarrow y=\pm۱$$

$$|y|=x^۲+۱,\ x=۲\Rightarrow y=\pm\sqrt{۵}$$

$$|y^۳|=x-۱,\ x=۲\Rightarrow y=\pm۱$$

۱۱- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(۲,۰)$ و $(۲,m^۳-m)$ نتیجه می‌شود:

$$m^۳-m=۰\Rightarrow m=۰,۱,-۱$$

اگر $m=۰$ ، $f=\{(۲,۰),(۰,۱),(۰,۲)\}$ و f تابع نیست.

اگر $m=۱$ ، $f=\{(۲,۰),(۱,۱),(۰,۲),(۲,۱)\}$ و f تابع نیست.

اگر $m=-۱$ ، $f=\{(۲,۰),(-۱,۱),(۰,۲),(-۲,۱)\}$ و f تابع است.

پس m فقط می‌تواند برابر ۱- باشد.

۱۲- گزینهٔ ۳ چون $f(۱)=۲$ و $f(۴)=۲$ ، پس $f(a)=۱$ یا $f(a)=۴$. از $f(a)=۱$ نتیجه می‌شود $a=۳$ و از $f(a)=۴$ نتیجه می‌شود $a=۵$. بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۸ است.

۱۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، جواب نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت $[-۵,-۲]\cup[۴,۵]$ است. بنابراین ۶ عدد صحیح (۵-، ۴-، ۳-، ۲-، ۴ و ۵) در این نامعادله صدق می‌کنند.

۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا $x=۲$ را در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

$$f(۲)-۲f(۲)=۴-۶+۴\Rightarrow f(۲)=-۲$$

پس $f(x)=x^۲-۳x$ ، در نتیجه $f(-۲)=۱۰$.

۱۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=x^۲+۱$ ، آن‌گاه $x^۲=t-۱$ و $t\geq۱$ بنابراین

$$f(x^۲+۱)=(x^۲)^۲-x^۲\Rightarrow f(t)=(t-۱)^۲-(t-۱)=t^۲-۳t+۲$$

بنابراین اگر $x\geq۱$ ، آن‌گاه $f(x)=x^۲-۳x+۲$.

۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^۳+۶x^۲+۱۲x=(x+۲)^۳-۸$$

$$x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱۰=(x+۲)^۳+۲$$

بنابراین $f(x+۲)=\frac{(x+۲)^۳-۸}{(x+۲)^۳+۲}$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم x−۲ ، به‌دست می‌آید $f(x)=\frac{x^۳-۸}{x^۳+۲}$.

۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $۰<-x\le ۱$ ، آن‌گاه $-۱\le x<۰$ ، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{۱-(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{۱+x}}{-x}=-f(x)$$

و اگر $-۱\le -x<۰$ ، آن‌گاه $۰<x\le ۱$ ، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{۱+(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{۱-x}}{-x}=-f(x)$$

بنابراین همواره $f(-x)=-f(x)$.

۱۸- گزینهٔ ۲ چون

$$f(-۱)=a\times(-۱)+b=b-a,\quad f(۶)=a\times(۶)+۴b=۶a+۴b$$

پس

$$f(-۱)+f(۶)=-۱۰\Rightarrow b-a+۶a+۴b=-۱۰$$

$$۵(a+b)=-۱۰\Rightarrow a+b=-۲$$

در نتیجه $f(۱)=a+۴b=(a+b)+۳b=۳b-۲$.

۱۹- گزینهٔ ۴ اگر ضابطهٔ داده شده، متعلق به یک تابع باشد باید در $x=۲$ مقدار $f(x)$ منحصربه‌فرد باشد. یعنی مقدار $f(۲)$ در ضابطهٔ اول با مقدار آن در ضابطهٔ دوم برابر باشد. اگر $f(x)=۲x^۲+a$ ، آن‌گاه $f(۲)=۸+a$. اگر $f(x)=ax^۳-۲$ ، آن‌گاه $f(۲)=۸a-۲$. بنابراین

$$۸+a=۸a-۲\Rightarrow ۷a=۱۰\Rightarrow a=\frac{۱۰}{۷}$$

و در نتیجه

$$۷f(۷a)=۷f(۱۰)=۷(۲\times۱۰^۲+\frac{۱۰}{۷})=۱۴۱۰$$

۲۰- گزینهٔ ۱ رابطهٔ $y^۳+۳y^۲+۳y-x^۳=۰$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(y+۱)^۳-۱-x^۳=۰\Rightarrow (y+۱)^۳=۱+x^۳$$

$$y+۱=\sqrt[۳]{۱+x^۳}\Rightarrow y=-۱+\sqrt[۳]{۱+x^۳}$$

واضح است که در این رابطه به‌ازای هر مقدار x دقیقاً یک مقدار y وجود دارد، پس y تابعی از x است. برای رابطه‌های دیگر می‌توان مثال‌های نقض زیر را در نظر گرفت:

$$y^۲-۲y+x^۲=۰,\ x=۰\Rightarrow y=۰,\ y=۲$$

$$y^۳-xy+x^۳=۴,\ x=\sqrt[۳]{۴}\Rightarrow y=۰,\ y=\pm\sqrt[۳]{۲}$$

$$y^۲+xy+x^۲=۹,\ x=۳\Rightarrow y=۰,\ y=-۳$$

۲۱- گزینهٔ ۲ برد تابع ثابت، یک عضو دارد. بنابراین

$$m-۲=۴\Rightarrow m=۶$$

$$m+۲n=۴\xrightarrow{m=۶}۶+۲n=۴\Rightarrow n=-۱$$

$$mn+k=۴\xrightarrow{m=۶,\,n=-۱}-۶+k=۴\Rightarrow k=۱۰$$

۲۲- گزینهٔ ۲ اگر f تابعی ثابت باشد، باید ضرایب $x^۲$ و x برابر با صفر باشند:

$$۴-a=۰\Rightarrow a=۴,\ ۳+b=۰\Rightarrow b=-۳$$

در این صورت $f(x)=ab+۱۹=۴\times(-۳)+۱۹=۷$.

بنابراین

$$f(a+b)=f(۱)=۷$$

۲۳- گزینهٔ ۳ در تابع همانی، ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=x$ است.

بنابراین

$$f(-۴)=m-۲n=-۴,\quad f(۶)=m+n=۶$$

$$\begin{cases}m-۲n=-۴\\ m+n=۶\end{cases}\Rightarrow m=\frac{۸}{۳},\quad n=\frac{۱۰}{۳}$$

از طرف دیگر $f(\frac{m}{n})=k=\frac{m}{n}$ ، بنابراین $k=\frac{m}{n}=\frac{۴}{۵}$.

۲۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^۲-۴)+۲ax+۴a}{x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)+۲a(x+۲)}{x+۲}$$

$$=\frac{(x+۲)(x-۲+۲a)}{x+۲}=x-۲+۲a,\quad x\neq-۲$$

ضابطهٔ تابع همانی $f(x)=x$ است. بنابراین باید $۲a-۲=۰$ و در نتیجه $a=۱$ ، پس $f(-a)=f(-۱)=-۱$.

راه‌حل دوم چون تابع f همانی است، پس $f(۰)=۰$ ، بنابراین

$$\frac{۴a-۴}{۲}=۰\Rightarrow a=۱$$

در نتیجه $f(-a)=f(-۱)=-۱$.

۲۵- گزینهٔ ۱ چون f تابعی خطی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ است، بنابراین

$$f(۲)-۳f(-۲)=۲a+b-۳(-۲a+b)=۸a-۲b=۴۶$$

$$f(۳)-۳f(۱)=۳a+b-۳(a+b)=-۲b=۲۲$$

در نتیجه $a=۳$ ، $b=-۱۱$ و $f(x)=۳x-۱۱$. بنابراین $f(-۲)=-۱۷$.

۲۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f(x-۱)=a(x-۱)+b=ax-a+b$$

$$۲f(x+۲)=۲(a(x+۲)+b)=۲(ax+۲a+b)=۲ax+۴a+۲b$$

پس $f(x-۱)+۲f(x+۲)=۳ax+۳a+۳b=-۹x+۲۱$. بنابراین

$$\begin{cases}۳a=-۹\\ ۳a+۳b=۲۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\ b=۱۰\end{cases}\Rightarrow f(x)=-۳x+۱۰$$

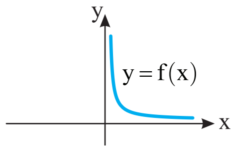
راه‌حل دوم تساوی داده شده به‌ازای هر x برقرار است، پس $x=۱$ را در این تساوی قرار می‌دهیم: $f(۰)+۲f(۳)=۱۲$. فقط در تابع گزینهٔ (۳) این شرط برقرار است.

۲۷- گزینهٔ ۱ ابتدا $f(-۱)$ و $f(۲)$ را حساب می‌کنیم تا مقادیر a و b به‌دست آید:

$$\begin{cases}f(-۱)=a+b=۳\\ f(۲)=۴a-۲b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}$$

بنابراین $f(x)=x^۲-۲x$ و در نتیجه $f(۱)=-۱$.

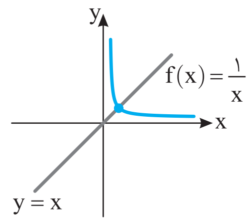
۲۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x>0$، آن‌گاه $|x|=x$، پس $f(x)=\frac{1}{x}$. همچنین اگر $x\le 0$، آن‌گاه $|x|=-x$ و $x+|x|=0$. در نتیجه تابع به‌ازای $x\le 0$ تعریف نمی‌شود، بنابراین $D_f=(0,+\infty)$. بنابراین نمودار این تابع به‌صورت مقابل خواهد بود:



۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$ و

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x}$$

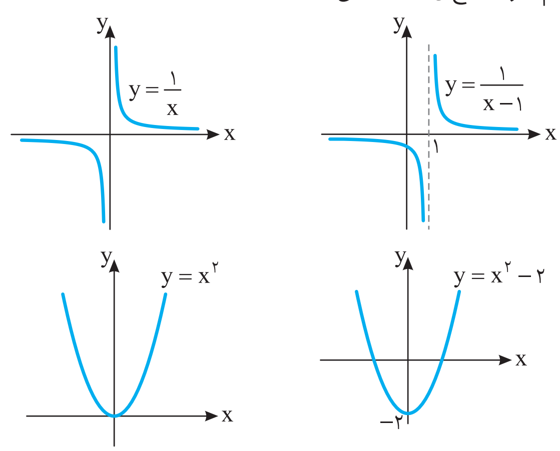
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است و خط $y=x$ را در یک نقطه قطع می‌کند.



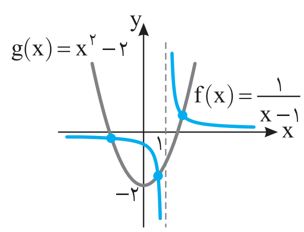
۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x-1}$$

بنابراین اگر نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع f به‌دست می‌آید. همچنین اگر نمودار تابع $y=x^2$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع g به‌دست می‌آید.



مطابق شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}$ در سه نقطه نمودار تابع $g(x)=x^2-2$ را قطع می‌کند.



۳۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ این تابع $f(x)=x$ است. پس $f(2)=2$. در نتیجه

$$14-2k=2\Rightarrow 2k=12\Rightarrow k=6$$

بنابراین باید $f(14-3\times 6)$ را حساب کنیم: $f(14-3\times 6)=f(-4)=-4$.

۳۲- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=kmx-kx^2-2m+2x+2x^2=(2-k)x^2+(2+km)x-2m$$

در تابع ثابت، مقدار تابع به x بستگی ندارد. پس در ضابطه نباید x وجود داشته باشد. یعنی ضرایب x و x^2 باید صفر باشند. پس

$$2-k=0\Rightarrow k=2$$

$$2+km=0\xrightarrow{k=2}2+2m=0\Rightarrow m=-1$$

بنابراین $k+m=1$.

۳۳- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است. بنابراین

$$a-2=0,\quad b-3=1,\quad a+b-c=0$$

در نتیجه $a=2$، $b=4$ و $c=a+b=2+4=6$.

۳۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=k$ است. بنابراین

$$\frac{2x+1}{ax-3}=k\Rightarrow 2x+1=kax-3k$$

تساوی فوق یک اتحاد است. پس باید تساوی‌های $ka=2$ و $1=-3k$ برقرار باشند. بنابراین $k=-\frac{1}{3}$ و $a=-6$.

راه‌حل دوم با توجه به اینکه $f(0)=-\frac{1}{3}$ و تابع ثابت است، پس $f(1)=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه

$$f(1)=\frac{2+1}{a-3}=-\frac{1}{3}\Rightarrow 9=-a+3\Rightarrow a=-6$$

۳۵- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=2mx-mx^2+x^2-4x-m=(1-m)x^2+(2m-4)x-m$$

ضابطهٔ توابع خطی به شکل $f(x)=ax+b$ است. یعنی یک چندجمله‌ای درجهٔ اول است. بنابراین باید $m=1$ تا ضابطهٔ تابع یک چندجمله‌ای درجهٔ اول شود، یعنی

$$m=1\Rightarrow f(x)=-2x-1$$

بنابراین $f(m)=f(1)=-3$.

۳۶- گزینهٔ ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطهٔ داده شده ساده شوند. یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+1$ است. یعنی

$$x^2+mx+2=(x+1)(x+a)\Rightarrow x^2+mx+2=x^2+(a+1)x+a$$

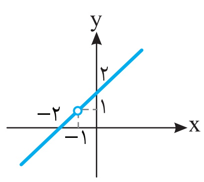
برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

$$a=2,\quad m=a+1\xrightarrow{a=2}m=3$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}=x+2,\quad x\neq -1$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۳۷- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$f(۱)=a+b\Rightarrow f(f(۱))=f(a+b)=a(a+b)+b=a^۲+ab+b=۱$$

$$f(-۱)=-a+b\Rightarrow f(f(-۱))=f(-a+b)=a(-a+b)+b$$

$$=-a^۲+ab+b=-۷$$

اگر طرفین تساوی‌های اخیر را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^۲+ab+b-(-a^۲+ab+b)=۱-(-۷)\Rightarrow ۲a^۲=۸\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm ۲$$

$$a^۲+ab+b=۱\Rightarrow\begin{cases}a=۲\Rightarrow ۴+۲b+b=۱\Rightarrow b=-۱\Rightarrow f(x)=۲x-۱\\ a=-۲\Rightarrow ۴-۲b+b=۱\Rightarrow b=۳\Rightarrow f(x)=-۲x+۳\end{cases}$$

بنابراین $f(۰)=-۱$ یا $f(۰)=۳$.

۳۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** در ضابطهٔ تابع به‌جای x مقدار $x-۱$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x-۱)=a(x-۱)^۲-b(x-۱)+۲=ax^۲-۲ax-bx+a+b+۲$$

بنابراین از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$f(x-۱)-f(x)=ax^۲-۲ax-bx+a+b+۲-ax^۲+bx-۲=۶x+۲$$

بنابراین $-۲ax+a+b=۶x+۲$. چون این رابطه به ازای هر x برقرار است، پس

$$\begin{cases}-۲a=۶\\ a+b=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\ b=۵\end{cases}\Rightarrow a-b=-۸$$

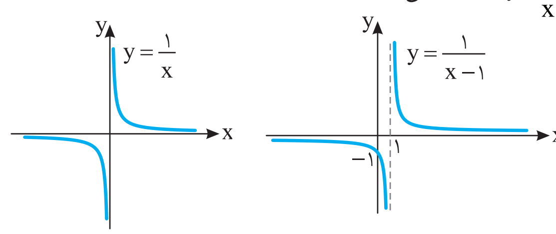
راه‌حل دوم چون رابطهٔ $f(x-۱)-f(x)=۶x+۲$ به ازای هر مقدار x برقرار است، پس به ازای $x=۱$ هم برقرار است:

$$f(۰)-f(۱)=۸\Rightarrow ۲-(a-b+۲)=۸\Rightarrow ۲-a+b-۲=۸\Rightarrow a-b=-۸$$

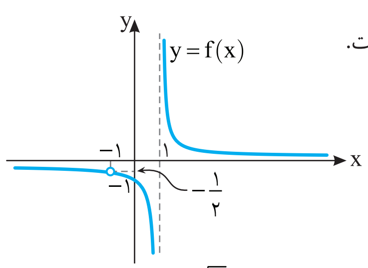
۳۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+۱}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{۱}{x-۱},\quad D_f=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$$

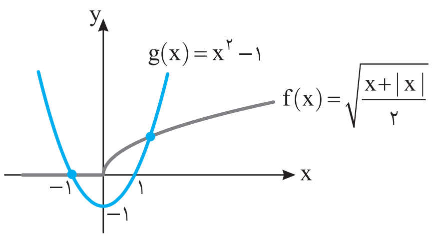
اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ به‌دست می‌آید.



بنابراین نمودار تابع f به‌صورت شکل رسم شده است که خطوط $y=۰$ و $y=-\frac{۱}{۲}$ را قطع نمی‌کند. پس k فقط می‌تواند مقادیر ۰ و $-\frac{۱}{۲}$ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.



۴۰- گزینهٔ ۲ برای $x\geq ۰$، $|x|=x$ و $f(x)=\sqrt{x}$ و برای $x<۰$، $|x|=-x$ و $f(x)=۰$. نمودار تابع‌های f و g را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی این شکل معلوم می‌شود که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

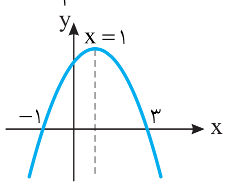


۴۱- گزینهٔ ۴ چون سهمی ماکزیمم دارد، باید ضریب $x^۲$ منفی باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. با توجه به شکل داده‌شده طول رأس سهمی عددی منفی است. در گزینهٔ (۳) طول رأس سهمی $x=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲$ و در گزینهٔ (۴) طول رأس سهمی $x=-\frac{-۴}{۲(-۱)}=-۲$ است. پس گزینهٔ (۴) درست است.

۴۲- گزینهٔ ۳ طول رأس سهمی $x=-\frac{-۲}{۲k}=\frac{۱}{k}$ است. عرض رأس سهمی را پیدا می‌کنیم: $y=k(\frac{۱}{k})^۲-۲(\frac{۱}{k})+۲=۲-\frac{۱}{k}$. چون رأس سهمی روی خط $y=-۲x$ است، پس $۲-\frac{۱}{k}=-۲(\frac{۱}{k})$ در نتیجه $k=\frac{-۱}{۲}$.

۴۳- گزینهٔ ۲ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=mx^۲+۲m^۲x+۳m$ خط $x=-\frac{۲m^۲}{۲m}=-m$ است. بنابراین $-m=۲$، یعنی $m=-۲$. به این ترتیب، معادلهٔ سهمی می‌شود $y=-۲x^۲+۸x-۶$، که عرض رأس آن برابر است با $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴\times(-۲)(-۶)-۸^۲}{۴(-۲)}=۲$.

۴۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با توجه به شکل محور تقارن سهمی داده شده از وسط نقاط $(۳,۰)$ و $(-۱,۰)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن $x=\frac{۳-۱}{۲}=۱$ است. از طرف دیگر با توجه به معادلهٔ داده شده، طول رأس سهمی $x=\frac{b}{۲a}$ است. بنابراین $\frac{b}{۲a}=۱$. در نتیجه $\frac{b}{a}=۲$.



راه‌حل دوم سهمی از نقطهٔ $(-۱,۰)$ عبور کرده است، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$۰=a(-۱)^۲-b(-۱)+c\Rightarrow a+b+c=۰\quad (۱)$$

همچنین سهمی از نقطهٔ $(۳,۰)$ عبور کرده است، پس

$$۹a-۳b+c=۰\quad (۲)$$

دو طرف معادلهٔ (۱) را از دو طرف معادلهٔ (۲) کم می‌کنیم:

$$۹a-۳b+c-a-b-c=۰\Rightarrow ۸a-۴b=۰\Rightarrow ۸a=۴b\Rightarrow\frac{b}{a}=۲$$

راه‌حل سوم مجموع جواب‌های معادلهٔ $ax^۲-bx+c=۰$ برابر $\frac{b}{a}$ است. از طرف دیگر با توجه به شکل، جواب‌های این معادله $x=-۱$ و $x=۳$ هستند. بنابراین $\frac{b}{a}=۳+(-۱)=۲$.

۴۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با توجه به نمودار داده شده، c و $-2c$ جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ هستند. بنابراین

$$\begin{cases} c-2c=-\frac{b}{a} \\ c(-2c)=\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\frac{b}{a} \Rightarrow b=ac \\ -2c=\frac{1}{a} \Rightarrow ac=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ac+b=-1$$

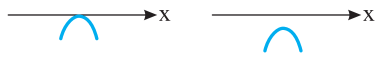
راه‌حل دوم با توجه به نمودار داده شده، c یکی از جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ است. بنابراین

$$ac^2+bc+c=0 \xrightarrow{c\neq 0} ac+b+1=0 \Rightarrow ac+b=-1$$

۴۶- گزینهٔ ۱ برای آنکه نمودار یک سهمی، محور x را در دو طرف مبدأمختصات قطع کند، باید حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $y=0$ منفی باشد. پس

$$\frac{m-2}{m}<0 \Rightarrow 0<m<2$$

۴۷- گزینهٔ ۲ در حالت‌های زیر نمودار تابع درجهٔ دوم از ناحیه‌های اول و دوم صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند.



بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$ حداکثر یک جواب دارد و ضریب x^2 در این معادله منفی است.

$$a=m-1<0 \Rightarrow m<1 \quad (1)$$

$$\Delta\leq 0 \Rightarrow 1-4(m-1)^2\leq 0 \Rightarrow (m-1)^2\geq \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} m-1\geq \frac{1}{2} \Rightarrow m\geq \frac{3}{2} \\ \text{یا} \\ m-1\leq -\frac{1}{2} \Rightarrow m\leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

از اشتراک ناحیه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m\leq \frac{1}{2}$.

۴۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$-\frac{\Delta}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}=5 \Rightarrow \frac{4(2m)-36}{4}=5 \Rightarrow 2m-9=5 \Rightarrow m=7$$

۴۹- گزینهٔ ۳ مجموع طول نرده‌های استفاده شده برابر با $3y+4x=200$ است. پس $4x=200-3y$. همچنین مساحت کل زمین برابر است با $A=2xy$. در نتیجه

$$A=2xy=\frac{1}{2}\times 4xy=\frac{1}{2}(200-3y)y=\frac{1}{2}(200y-3y^2)$$

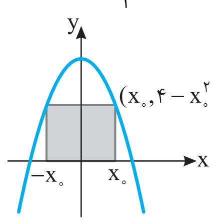
بنابراین

$$2A=200y-3y^2=-3\left(y^2-\frac{200y}{3}\right)=-3\left(\left(y-\frac{100}{3}\right)^2-\frac{10000}{9}\right)$$

$$=\frac{10000}{3}-3\left(y-\frac{100}{3}\right)^2\leq \frac{10000}{3}$$

بنابراین $A\leq \frac{5000}{3}$، یعنی حداکثر مساحت اصطبل برابر $\frac{5000}{3}$ است.

۵۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر می‌توان نتیجه گرفت محیط مستطیل برابر است با



$$2(2x_0+4-x_0^2)=-2x_0^2+4x_0+8$$

$$=-2(x_0^2-2x_0+1)+10$$

$$=-2(x_0-1)^2+10\leq 10$$

در نتیجه بیشترین محیط مستطیل برابر است با ۱۰.

۵۱- گزینهٔ ۴ مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x=-\frac{-2}{2\times 3}=\frac{1}{3} \Rightarrow y=3\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{3}\right)+1=\frac{2}{3}$$

بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ است و چون ضریب x^2 عددی مثبت است، پس سهمی دارای پایین‌ترین نقطه است، یعنی گزینهٔ (۴) درست است.

۵۲- گزینهٔ ۳ رأس سهمی $y=ax^2-2ax+2$ نقطهٔ $(1,2-a)$ است که روی سهمی $y=bx^2+2bx+1$ قرار دارد. پس

$$2-a=b+2b+1 \Rightarrow a+3b-1=0 \quad (1)$$

رأس سهمی $y=bx^2+2bx+1$ نقطهٔ $(-1,1-b)$ است که روی سهمی $y=ax^2-2ax+2$ قرار دارد. پس

$$1-b=a+2a+2 \Rightarrow b=-3a-1 \quad (2)$$

اگر در معادلهٔ (۱) مقدار b را از معادلهٔ (۲) قرار دهیم، آن‌گاه $a+3(-3a-1)-1=0$

در نتیجه $a=-\frac{1}{2}$. بنابراین $b=\frac{1}{2}$ و در نتیجه $a+b=0$.

۵۳- گزینهٔ ۱ معادلهٔ محور تقارن سهمی $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت $x=-\frac{b}{2a}$ است. در نتیجه

$$-\frac{m-2}{2(3m-4)}=\frac{1}{2} \Rightarrow 3m-4=-m+2 \Rightarrow 4m=6 \Rightarrow m=\frac{3}{2}$$

۵۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که چون $OA<OB$، پس محور تقارن سهمی پاره‌خط OB را قطع می‌کند. در نتیجه، $-\frac{b}{2a}>0$، یعنی علامت a و b فرق می‌کند. از طرف دیگر، چون سهمی پایین‌ترین نقطه دارد، پس $a>0$، در نتیجه $b<0$. از طرف دیگر، عرض نقطهٔ تلاقی سهمی و محور y منفی است، پس $c<0$. به این ترتیب، $bc>0$.

۵۵- گزینهٔ ۲ سهمی از نقطهٔ $(0,0)$ عبور می‌کند، پس $c=0$. طول رأس سهمی برابر $x=1$ است. پس $-\frac{b}{2a}=1$ در نتیجه $b=-2a$. عرض رأس سهمی برابر است با $y=-1$، بنابراین

$$a\times 1^2+b\times 1=-1 \xrightarrow{b=-2a} a-2a=-1 \Rightarrow a=1$$

بنابراین $b=-2$.

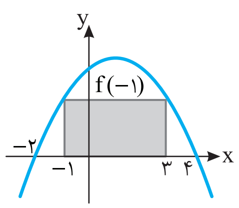
۵۶- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه سهمی محور طول‌ها را در $x=4$ و $x=-2$ قطع کرده است، معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=k(x+2)(x-4)$ است. از طرف دیگر مساحت مستطیل برابر $4f(-1)$ است. بنابراین

$$4f(-1)=8 \Rightarrow f(-1)=2$$

پس

$$k(-1+2)(-1-4)=2 \Rightarrow k=-\frac{2}{5}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=-\frac{2}{5}(x+2)(x-4)$ یا $f(x)=-\frac{2}{5}x^2+\frac{4}{5}x+\frac{16}{5}$ است و در نتیجه $c=\frac{16}{5}$.

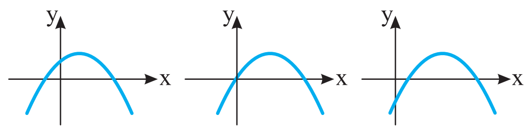


۵۷- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود ضریب $x^۲$ و عرض نقطهٔ تقاطع سهمی با محور y مثبت است. در نتیجه

$$m+۲>۰\,,\quad m>۰ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، چون مجموع ضرایب صفر است، بنابراین، جواب‌های معادلهٔ $y=۰$ اعداد $\frac{m}{m+۲}$ و ۱ هستند، که با توجه به شرط (۱) هر دو مثبت هستند. بنابراین حدود m بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

۵۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع f یک سهمی است که ماکزیمم دارد. بنابراین در حالت کلی باید به‌صورت‌های زیر باشد تا از ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات عبور کند.



بنابراین باید معادلهٔ $f(x)=۰$ دو جواب داشته باشد که هر دو منفی نباشند یا اینکه یکی صفر و دیگری منفی نباشد. اگر یکی از جواب‌ها $x=۰$ باشد، آن‌گاه $m=۰$ و معادله به صورت $f(x)=-x^۲$ در می‌آید که از ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند. پس شرط داشتن دو جواب منفی $(\Delta>۰\,,-\frac{b}{a}<۰\,,\frac{c}{a}>۰)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta>۰\Rightarrow m^۲+۸m>۰\Rightarrow\begin{cases}m>۰\\ \text{یا}\\ m<-۸\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}\frac{c}{a}>۰\Rightarrow -۲m>۰\Rightarrow m<۰\\ -\frac{b}{a}<۰\Rightarrow m<۰\end{cases}$$

پس $m<۰$، نباید برقرار باشد و در نتیجه $m>۰$.

۵۹- گزینهٔ ۱ جواب‌های معادله را با α و β نشان می‌دهیم. در این صورت طبق فرض مسئله، $\alpha+\beta=۲\alpha\beta$، چون $\alpha+\beta=-(k-۲)$ و $\alpha\beta=-k$، بنابراین $-k+۲=-۲k$ پس $k=-۲$. بنابراین

$$f(x)=-۲x^۲-۴x+۱=-۲(x^۲+۲x)+۱=-۲(x+۱)^۲+۳\le ۳$$

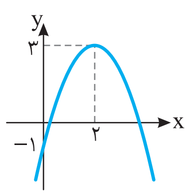
پس بیشترین مقدار $f(x)$ برابر ۳ است.

۶۰- گزینهٔ ۲ طول اضلاع قائمه را با b و c نشان می‌دهیم. در این صورت $b+c=۸$. از طرف دیگر،

$$S=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}b(۸-b)=\frac{۱}{۲}(۸b-b^۲)$$

بیشترین مقدار عبارت $۸b-b^۲$ به ازای $b=\frac{-۸}{۲(-۱)}=۴$ به‌دست می‌آید. در نتیجه، بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{۱}{۲}(۸\times۴-۴^۲)=\frac{۱۶}{۲}=۸$.

۶۱- گزینهٔ ۲ سهمی از نقطهٔ $(۰,-۱)$ عبور می‌کند، طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۱)}=۲$ و عرض آن $y=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(-۱)(-۱)-۱۶}{۴(-۱)}=۳$ است، در نتیجه رأس سهمی نقطهٔ $(۲,۳)$ و نمودار آن به شکل زیر است. بنابراین این سهمی از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.



۶۲- گزینهٔ ۱ سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۲x$ دارای پایین‌ترین نقطه به مختصات $x=۱$ و $y=-۱$ است. پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ از نقطهٔ $(۰,-۲)$ عبور می‌کند و رأس آن $(۱,-۱)$ است. بنابراین

$$-۲=۰+۰+c\Rightarrow c=-۲$$

$$\text{طول رأس سهمی}: x=-\frac{b}{۲a}=۱\Rightarrow b=-۲a$$

$$\text{عرض رأس سهمی}: y=a(۱)^۲+b(۱)-۲=-۱\Rightarrow a+b=۱$$

$$\xrightarrow{b=-۲a} a-۲a=۱\Rightarrow a=-۱,\ b=۲$$

بنابراین $abc=(-۱)(۲)(-۲)=۴$.

۶۳- گزینهٔ ۲ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۴x+۱$ خط $x=۲$ است و محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲-a^۳x$ خط $x=\frac{a^۲}{۲}$ است. پس

$$\frac{a^۲}{۲}=۲\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲$$

۶۴- گزینهٔ ۴ ابتدا نابرابری $\frac{b^۲}{۴a}>c$ را به‌صورت $\frac{b^۲-۴ac}{۴a}>۰$ می‌نویسیم. می‌دانیم عرض رأس سهمی مورد نظر برابر $-\frac{b^۲-۴ac}{۴a}$ است، که منفی است. در نتیجه باید عرض رأس سهمی مورد نظر منفی باشد، بنابراین در بین گزینه‌های داده شده گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۶۵- گزینهٔ ۴ معادلهٔ سهمی $y=ax^۲+bx+c$ است. مختصات نقاط داده شده را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$$x=-۱\,,\ y=۰\Rightarrow ۰=a-b+c \qquad (۱)$$

$$x=۱\,,\ y=۴\Rightarrow ۴=a+b+c \qquad (۲)$$

$$x=۲\,,\ y=۹\Rightarrow ۹=۴a+۲b+c \qquad (۳)$$

اگر دو طرف معادلهٔ (۱) را از دو طرف معادلهٔ (۲) کم کنیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۴-۰=a+b+c-(a-b+c)\Rightarrow ۴=۲b\Rightarrow b=۲$$

در معادله‌های (۱) و (۳) به جای b مقدار ۲ را قرار می‌دهیم و دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}a-۲+c=۰\\ ۴a+۴+c=۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=۲\\ ۴a+c=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ c=۱\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی $y=x^۲+۲x+۱$ است. این سهمی از نقطهٔ $(-۲,۱)$ عبور می‌کند.

۶۶- گزینهٔ ۱ چون سهمی ماکزیمم دارد، پس

$$m+۱<۰\Rightarrow m<-۱$$

همچنین، سهمی محور x را قطع نمی‌کند، در نتیجه دلتای معادلهٔ آن منفی است:

$$\Delta=(m+۱)^۲+۱۶(m+۱)<۰$$

بنابراین به نامعادلهٔ $(m+۱)(m+۱۷)<۰$ می‌رسیم. می‌دانیم $m+۱<۰$، در نتیجه $m+۱۷>۰$، پس $m>-۱۷$. بنابراین $m\in(-۱۷,-۱)$.

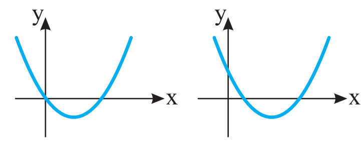
۶۷- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع f فقط از ناحیهٔ سوم عبور نکند، آن‌گاه از ناحیه‌های اول، دوم و چهارم عبور می‌کند. (توجه کنید که ضریب $x^۲$ مثبت است و سهمی کمترین مقدار دارد.) پس باید معادلهٔ $f(x)=۰$ دو جواب داشته باشد که یا هر دو مثبت باشند یا یکی مثبت و دیگری صفر باشد. بنابراین

$\Delta>۰\Rightarrow m^۲+۴m>۰\Rightarrow m\in(-\infty,-۴)\cup(۰,+\infty)$ (۱)

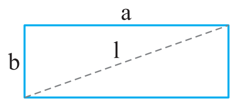
$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow -m>۰\Rightarrow m\in(-\infty,۰)$ (۲)

$\frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow -m\geq۰\Rightarrow m\in(-\infty,۰]$ (۳)

از اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $m\in(-\infty,-۴)$.



۶۸- گزینهٔ ۳ از شکل روبه‌رو و فرض مسئله نتیجه می‌شود



$۲(a+b)=۲۴\Rightarrow a+b=۱۲\Rightarrow b=۱۲-a$

اکنون توجه کنید که $l^۲=a^۲+b^۲=a^۲+(۱۲-a)^۲=۲a^۲-۲۴a+۱۴۴$.

کمترین مقدار $l^۲$ برابر است با $-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(-۲۴)^۲-۴\times۲\times۱۴۴}{۴\times۲}=۷۲$. بنابراین

$$l^۲\geq۷۲\Rightarrow l\geq۶\sqrt{۲}$$

۶۹- گزینهٔ ۳ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۰,-۲)$ گذشته است، پس

$$f(۰)=-۲\Rightarrow c=-۲$$

از طرف دیگر، $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $-x^۲+bx+c=۰$ هستند. در نتیجه $x_۱+x_۲=b$ و $x_۱x_۲=-c=۲$. بنابراین

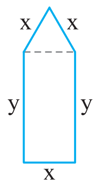
$$x_۱^۲+x_۲^۲-\frac{۳}{۲}x_۱x_۲=۴۲\Rightarrow(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲-\frac{۳}{۲}x_۱x_۲=۴۲$$

$$b^۲-\frac{۷}{۲}\times۲=۴۲\Rightarrow b^۲=۴۹$$

عرض رأس سهمی برابر است با $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$. در نتیجه بیشترین مقدار تابع f برابر است با $\frac{۴(-۱)(-۲)-۴۹}{۴(-۱)}=\frac{۴۱}{۴}$.

۷۰- گزینهٔ ۲ از فرض مسئله، معلوم می‌شود که

محیط شکل $=۳x+۲y=۴$



باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن شود. در نتیجه مساحت پنجره را حساب می‌کنیم:

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲+xy\Rightarrow ۴S=\sqrt{۳}x^۲+۴xy$$

چون $۲y=۴-۳x$، پس

$$۴S=\sqrt{۳}x^۲+۲x\times۲y=\sqrt{۳}x^۲+۲x(۴-۳x)=(\sqrt{۳}-۶)x^۲+۸x$$

چون $\sqrt{۳}-۶<۰$، بیشترین مقدار عبارت فوق به ازای $x=\frac{-۸}{۲(\sqrt{۳}-۶)}=\frac{۴}{۶-\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید.

۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱,\quad ۱-\frac{۱}{x+۱}=۰\Rightarrow\frac{x}{x+۱}=۰\Rightarrow x=۰$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۰,-۱\}$.

۷۲- گزینهٔ ۳ ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۴-۳x^۲+۲=۰\Rightarrow(x^۲-۱)(x^۲-۲)=۰$$

$$x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱,\quad x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{\pm۱,\pm\sqrt{۲}\}$. پس چهار عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۷۳- گزینهٔ ۲ مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$۲|x|-|x-۱|=۰\Rightarrow۲|x|=|x-۱|$$

$$۲x=x-۱\Rightarrow x=-۱,\quad ۲x=-x+۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,\frac{۱}{۳}\}$. بنابراین دو عدد ۱- و $\frac{۱}{۳}$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۲}{۳}$ است.

۷۴- گزینهٔ ۱ برای اینکه $\mathbb{R}$ دامنهٔ تابع باشد، باید مخرج کسر ضابطهٔ تابع ریشه نداشته باشد. بنابراین

$$\Delta=m^۲-۱۶<۰\Rightarrow m^۲<۱۶\Rightarrow -۴<m<۴$$

۷۵- گزینهٔ ۲ باید نامعادلهٔ $\frac{۹-x}{x+۲}\geq۰$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به‌صورت $-۲<x\leq۹$ است.

x	$-\infty$		-۲		۹		$+\infty$
$\frac{۹-x}{x+۲}$		$-$	ت	$+$	۰	$-$	

پس $D_f=(-۲,۹]$. در نتیجه $a=-۲$، $b=۹$ و $a-b=-۱۱$.

۷۶- گزینهٔ ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنه وجود دارد:

$$x-۱\geq۰\Rightarrow x\geq۱,\quad ۷-x\geq۰\Rightarrow x\leq۷$$

$$\sqrt{x-۱}-\sqrt{۷-x}\neq۰\Rightarrow\sqrt{x-۱}\neq\sqrt{۷-x}\Rightarrow x-۱\neq۷-x\Rightarrow x\neq۴$$

بنابراین $D_f=[۱,۷]-\{۴\}$. پس عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، ۵، ۶ و ۷ در دامنهٔ تابع قرار دارند.

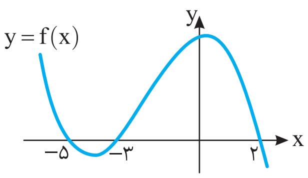
۷۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=\{x|x^۲+۲x+۲-m^۲\geq۰\}$.

برای اینکه همواره $x^۲+۲x+۲-m^۲\geq۰$، باید $\Delta\leq۰$،

$$\Delta=۲^۲-۴(۲-m^۲)\leq۰\Rightarrow۴-۸+۴m^۲\leq۰\Rightarrow m^۲\leq۱\Rightarrow-۱\leq m\leq۱$$

بنابراین کمترین مقدار ممکن m برابر ۱- و بیشترین مقدار آن برابر ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۲ است.

۷۸- گزینهٔ ۲ برای اینکه از نمودار تابع $y=f(x-۲)$ به نمودار تابع $y=f(x)$ برسیم، کافی است آن را دو واحد به چپ منتقل کنیم.



برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$، عبارت $\frac{x}{f(x)}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۵		-۳		۰		۲		$+\infty$
f(x)		$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
x		$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$\frac{x}{f(x)}$		$-$	ت	$+$	ت	$-$	۰	$+$	ت	$-$	

بنابراین $D_g=(-۵,-۳)\cup[۰,۲)$. پس دامنهٔ تابع g شامل سه عدد صحیح است.

۷۹- گزینهٔ ۲ تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:

$$(۱,۲a)=(۱,۸)\Rightarrow a=۴$$

$$(۲,۲a+b)=(۲,۵)\Rightarrow ۲a+b=۵\xrightarrow{a=۴}۸+b=۵\Rightarrow b=-۳$$

$$(a+c,۳)=(۵,۳)\Rightarrow a+c=۵\xrightarrow{a=۴}۴+c=۵\Rightarrow c=۱$$

بنابراین $a+b+c=۲$.

۸۰- گزینهٔ ۲ تابع‌های $f(x)=\sqrt{۶x-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{۶-x}$ برابرند، زیرا

$$D_f=D_g=[۰,۶],\ f(x)=\sqrt{۶x-x^۲}=\sqrt{x(۶-x)}=\sqrt{x}\sqrt{۶-x}=g(x)$$

تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲-۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۳}$ و همین‌طور تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲+۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+۳}$ دامنهٔ یکسان ندارند، پس برابر نیستند. تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ و $g(x)=x-۳$ دامنهٔ یکسان دارند، اما ضابطهٔ برابر ندارند، زیرا

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\sqrt{(x-۳)^۲}=|x-۳|\neq g(x)$$

۸۱- گزینهٔ ۴ سه کسر در ضابطهٔ تابع وجود دارد. مخرج هر یک را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱,\quad x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

$$۱-\frac{۴}{x+۱}=۰\Rightarrow x+۱-۴=۰\Rightarrow x=۳$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۲,۳\}$. پس حاصل‌ضرب عددهایی که در دامنهٔ تابع قرار ندارند برابر -۶ است.

۸۲- گزینهٔ ۳ مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۳-۲x^۲-x+۲=۰\Rightarrow x^۳-x-۲x^۲+۲=۰$$

$$x(x^۲-۱)-۲(x^۲-۱)=۰\Rightarrow (x^۲-۱)(x-۲)=۰$$

$$(x-۱)(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱, x=-۱, x=۲$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۱,۲\}$. پس سه عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۸۳- گزینهٔ ۳ چون $x=۴$ در دامنهٔ تابع نیست، پس مخرج حداقل یکی از کسرهای ضابطهٔ تابع را صفر می‌کند. بنابراین

$$x-a=۰\xrightarrow{x=۴}۴-a=۰\Rightarrow a=۴$$

$$x-\frac{a+۱}{x-a}=۰\xrightarrow{x=۴}۴-\frac{a+۱}{۴-a}=۰\Rightarrow a=۳$$

پس حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای a برابر ۷ است.

۸۴- گزینهٔ ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس معادلهٔ $m^۲x^۲+x+۱=۰$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=۱-۴m^۲=۰\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

در این حالت $x=-۲$ ریشهٔ مخرج است، در نتیجه $n=-۲$.

حالت دوم مخرج عبارت درجهٔ اول باشد، یعنی ضریب $x^۲$ برابر صفر باشد. در این حالت $m=۰$ و $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-۱$.

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n، ۲ است.

۸۵- گزینهٔ ۱ باید $x=-۱$ و $x=۲$ جواب‌های معادلهٔ $a|x|-bx+۱=۰$ باشند، بنابراین

$$a|x|-bx+۱=۰\xrightarrow{x=-۱}a+b+۱=۰$$

$$a|x|-bx+۱=۰\xrightarrow{x=۲}۲a-۲b+۱=۰$$

بنابراین $a=-\frac{۳}{۴}$ و $b=-\frac{۱}{۴}$ و در نتیجه $ab=\frac{۳}{۱۶}$.

۸۶- گزینهٔ ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنهٔ تابع وجود دارند:

$$۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳,\quad x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲$$

$$\sqrt{x+۲}-۲\neq ۰\Rightarrow \sqrt{x+۲}\neq ۲\Rightarrow x+۲\neq ۴\Rightarrow x\neq ۲$$

بنابراین $D_f=[-۲,۳]-\{۲\}$ و عددهای صحیح -۲، -۱، ۰، ۱ و ۳ در دامنهٔ تابع قرار دارند.

۸۷- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-۳,۲]$ است. بنابراین عبارت $ax^۲+bx+۲a^۲$ باید روی این بازه نامنفی باشد و روی بازهٔ $\mathbb{R}-(-۳,۲)$ منفی باشد. پس $x=۲$ و $x=-۳$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+۲a^۲=۰$ هستند. یعنی اگر به جای x یک بار ۲ و بار دیگر -۳ قرار دهیم مقدار عبارت برابر صفر خواهد شد:

$$\begin{aligned}&۳\times\begin{cases}۴a+۲b+۲a^۲=۰\\ ۹a-۳b+۲a^۲=۰\end{cases}\quad (I)\quad\Rightarrow +\begin{cases}۱۲a+۶b+۶a^۲=۰\\ ۱۸a-۶b+۴a^۲=۰\end{cases}\\ &۲\times\end{aligned}$$

$$۳۰a+۱۰a^۲=۰$$

$$۱۰a(۳+a)=۰\Rightarrow a=۰, a=-۳$$

اگر $a=۰$ از معادلهٔ (I) نتیجه می‌شود $b=۰$ و اگر $a=-۳$ از معادلهٔ (I) نتیجه می‌شود $-۱۲+۲b+۱۸=۰\Rightarrow b=-۳$

اگر $a=b=۰$ آن‌گاه $f(x)=۰$ و $D_f=\mathbb{R}$. پس فقط $a=b=-۳$ قابل قبول است و در نتیجه $a+b=-۶$.

۸۸- گزینهٔ ۴ باید نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{x^۲-x}\geq ۰$ راحل کنیم. مطابق جدول تعیین علامت زیر جواب نامعادله به‌صورت $۱<x\leq ۲$ یا $۰<x<۱$ یا $x=-۱$ است.

بنابراین $D_g=\{-۱\}\cup(۰,۱)\cup(۱,۲]$.

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
$f(x)$				$-$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$			
$x^۲-x$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	
$\frac{f(x)}{x^۲-x}$				$-$	۰	$-$	ت ن	$+$	ت ن	$+$			

۸۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $g(x)=ax+b$ و تابع f با تابع g برابر باشد. در این صورت به ازای هر $x\neq ۳$ تساوی $\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}=ax+b$ برقرار است. پس

$$x^۲-mx+۳=۳ax+۳b-ax^۲-bx=-ax^۲+(۳a-b)x+۳b$$

تساوی بالا به ازای هر $x\neq ۳$ برقرار است. بنابراین

$$a=-۱,\quad ۳=۳b\Rightarrow b=۱,\quad -m=۳a-b\xrightarrow[b=۱]{a=-۱}m=۴$$

بنابراین $g(x)=-x+۱$. همچنین باید تساوی $f(۳)=g(۳)$ درست باشد. پس

$$f(۳)=n,\quad g(۳)=-۳+۱=-۲\Rightarrow n=-۲$$

در نتیجه $m+n=۲$.

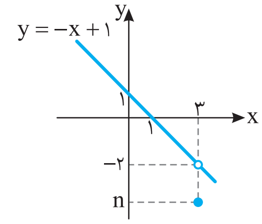
راه‌حل دوم برای اینکه تابع f خطی باشد، باید کسر $\frac{x^2-mx+3}{3-x}$ ساده شود. یعنی باید صورت کسر عامل $3-x$ داشته باشد. پس صورت کسر به ازای $x=3$ صفر می‌شود.

$$9-3m+3=0 \Rightarrow m=4$$

$$\frac{x^2-mx+3}{3-x}=\frac{x^2-4x+3}{3-x}=\frac{(x-1)(x-3)}{-(x-3)}=-x+1$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & x\neq 3\\ n & x=3\end{cases}$$



واضح است که اگر $n\neq -2$ آن‌گاه تابع f خطی نیست. پس $n=-2$، بنابراین

$$m+n=2$$

۹۰- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{bx+2}{8x+b}=c \Rightarrow 8cx+bc=bx+2$$

$$\begin{cases}8c=b\\ bc=2\end{cases} \Rightarrow c\times 8c=2 \Rightarrow \begin{cases}c=\frac{1}{2}, b=4\\ c=-\frac{1}{2}, b=-4\end{cases}$$

اگر $b=4$، آن‌گاه $f(x)=\frac{4x+2}{8x+4}$. بنابراین $x=-\frac{1}{2}$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد و در دامنهٔ تابع g نیز نباید قرار داشته باشد. پس $a=-\frac{1}{2}$ و در نتیجه $\frac{ab}{c}=-4$. در حالت $b=-4$، $f(x)=\frac{-4x+2}{8x-4}$ که نتیجه می‌شود $a=\frac{1}{2}$ و $\frac{ab}{c}=4$.

۹۱- گزینهٔ ۱ عددهایی که مخرج ضابطهٔ تابع را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس $x=2$ جواب معادلهٔ $x^3-(a+1)x+a=0$ است. پس

$$8-2(a+1)+a=0 \Rightarrow a=6$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{1}{x^3-7x+6}$ است. دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$x^3-7x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x-3)=0 \Rightarrow x=2, x=1, x=-3$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{1,2,-3\}$.

۹۲- گزینهٔ ۳ شرایط زیر برای تعیین دامنهٔ تابع وجود دارد:

$$2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$$

$$4-\sqrt{2x-1}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1}\leq 4 \Rightarrow 2x-1\leq 16 \Rightarrow x\leq \frac{17}{2}$$

بنابراین $D_f=[\frac{1}{2},\frac{17}{2}]$. پس $a=\frac{1}{2}$، $b=\frac{17}{2}$ و $a+b=9$.

۹۳- گزینهٔ ۳ هر دو عبارت رادیکالی باید بامعنی باشند. در نتیجه $\frac{16-x^2}{x}\geq 0$ و $\frac{-x}{x+5}\geq 0$. با توجه به جدول‌های تعیین علامت زیر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول $(-\infty,-4]\cup(0,4]$ و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم $(-5,0]$ است. بنابراین دامنهٔ تابع f برابر است با

$$((-\infty,-4]\cup(0,4])\cap(-5,0]=(-5,-4]$$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$16-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{16-x^2}{x}$		$+$	0	$-$	ت ن	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
$\frac{-x}{x+5}$		$-$	ت ن	$+$	0	$-$	

بنابراین $a=-5$، $b=-4$ و $a+b=-9$.

۹۴- گزینهٔ ۳ شرط تعیین دامنه به‌صورت زیر است

$$(a+2)x^2+ax+b\geq 0$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق نمی‌تواند به‌صورت $(-\infty,3]$ باشد، مگر اینکه عبارت $(a+2)x^2+ax+b$ درجهٔ اول باشد، یعنی $a+2=0$. در نتیجه $a=-2$. پس نامعادله به‌صورت $-2x+b\geq 0$ درمی‌آید:

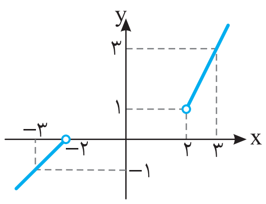
$$-2x+b\geq 0 \Rightarrow x\leq \frac{b}{2} \Rightarrow D_f=(-\infty,\frac{b}{2}]$$

بنابراین $\frac{b}{2}=3$ و در نتیجه $b=6$.

۹۵- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ $-x^3f(x)\geq 0$ به‌دست می‌آید. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله $\{-1,0\}\cup[1,2]$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$				$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$			
$-x^3f(x)$				$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$			

۹۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که برد تابع $\mathbb{R}-[0,1]$ است. پس $a=0$ و $b=1$. در نتیجه $a+b=1$.



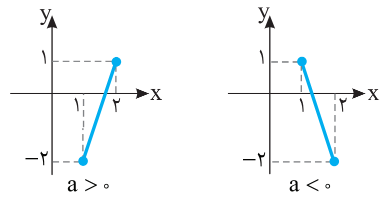
راه‌حل دوم اگر $x>2$، آن‌گاه $2x>4 \Rightarrow 2x-3>1 \Rightarrow f(x)>1$

اگر $x<-2$، آن‌گاه $x+2<0 \Rightarrow f(x)<0$

پس $R_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)=\mathbb{R}-[0,1]$. پس $a=0$ و $b=1$. در نتیجه

$$a+b=1$$

۹۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $f(x)=ax+b$. نمودار تابع f در دو حالت $a>۰$ و $a<۰$ را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم.



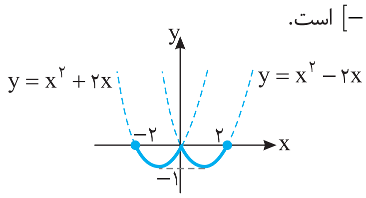
اگر $a>۰$، آن‌گاه $f(۱)=-۲$ و $f(۲)=۱$. پس

$$\begin{cases}a+b=-۲\\ ۲a+b=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۳\\ b=-۵\end{cases}\Rightarrow f(x)=۳x-۵\Rightarrow f(\frac{۴}{۳})=-۱$$

اگر $a<۰$، آن‌گاه $f(۱)=۱$ و $f(۲)=-۲$، پس

$$\begin{cases}a+b=۱\\ ۲a+b=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\ b=۴\end{cases}\Rightarrow f(x)=-۳x+۴\Rightarrow f(\frac{۴}{۳})=۰$$

۹۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که برد تابع f بازهٔ $[-۱,۰]$ است.

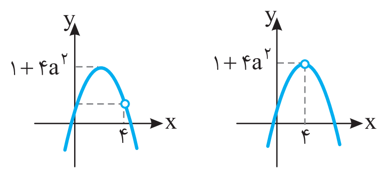


۹۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر دامنهٔ تابع $f(x)=-x^۲-۴ax+۱$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، برد آن بازهٔ $(-\infty,۱+۴a^۲]$ است. در این حالت نمودار تابع f یک سهمی است و با حذف یک عدد از دامنه مطابق شکل زیر، عددی از برد حذف نمی‌شود، مگر اینکه طول رأس سهمی را حذف کنیم. بنابراین طول رأس سهمی برابر ۴ و عرض آن برابر $۱+۴a^۲$ است:

$$\text{طول رأس سهمی}=x=-\frac{-۴a}{۲(-۱)}=۴\Rightarrow a=-۲$$

$$\text{عرض رأس سهمی}=y=۱+۴a^۲=۱+۱۶\Rightarrow b=۱۷$$

بنابراین $a+b=۱۵$.



۱۰۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x\neq ۱\Rightarrow g(x)=\frac{x^۴-۱}{x-۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)}{x-۱}=x^۳+x^۲+x+۱$$

$$g(x)=f(x)\Rightarrow a=۱$$

از طرف دیگر،

$$x=۱\Rightarrow g(x)=g(۱)=b,\quad f(۱)=۴,\quad g(۱)=f(۱)\Rightarrow b=۴$$

بنابراین $a+b=۵$.

راه‌حل دوم با استفاده از نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ مقادیر a و b به راحتی به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} f(۰)=g(۰)\Rightarrow a=۱\\ f(۱)=g(۱)\Rightarrow ۳+a=b\xrightarrow{a=۱}۴=b\end{cases}\Rightarrow a+b=۵$$

۱۰۱- گزینهٔ ۴ طول مستطیل را x و عرض آن را $x-۲$ در نظر می‌گیریم، پس محیط آن برابر است با $P(x)=۲(x+x-۲)=۴x-۴$.

۱۰۲- گزینهٔ ۴ اگر r شعاع دایره باشد، $P=۲\pi r$ و در نتیجه $r=\frac{P}{۲\pi}$.

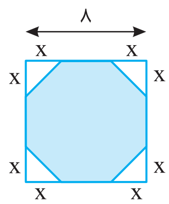
از طرف دیگر $S=\pi r^۲$. بنابراین $S=\pi(\frac{P}{۲\pi})^۲=\frac{\pi P^۲}{۴\pi^۲}\Rightarrow S(P)=\frac{۱}{۴\pi}P^۲$

۱۰۳- گزینهٔ ۲ ابعاد مستطیل x و $۲-\frac{x}{۲}$ هستند، پس محیط آن به‌صورت $P(x)=۲(x+۲-\frac{x}{۲})=x+۴$ به‌دست می‌آید.

۱۰۴- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل درمی‌یابیم که اندازهٔ شعاع ربع دایره و ضلع مربع برابر r است. از طرف دیگر، اگر مساحت ربع دایره را از مساحت مربع کم کنیم، مساحت قسمت رنگی به‌دست می‌آید، بنابراین

$$S(r)=r^۲-\frac{۱}{۴}\pi r^۲=(\frac{۴-\pi}{۴})r^۲$$

۱۰۵- گزینهٔ ۳ مقدار x باید مثبت باشد و مقدار بریده شده یعنی ۲x باید از ۸ کمتر باشد. پس $۰<۲x<۸$ در نتیجه $۰<x<۴$. بنابراین دامنهٔ این تابع بازهٔ $(۰,۴)$ است.



۱۰۶- گزینهٔ ۴ از روی شکل معلوم است که نقطهٔ A از یک طرف تا محل برخورد خط با محور x، یعنی نقطهٔ $(۶,۰)$، و از طرف دیگر تا مبدأ مختصات می‌تواند حرکت کند. بنابراین، دامنهٔ این تابع بازهٔ $(۰,۶)$ است.

۱۰۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حجم مخزن برابر است با

$$V=\text{حجم استوانه}+۲\times\text{حجم نیم کره}$$

$$=\pi(r^۲)(۲۰)+۲\times\frac{۲}{۳}\pi(r^۳)=\frac{۴\pi}{۳}r^۳+۲۰\pi r^۲$$

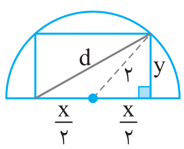
۱۰۸- گزینهٔ ۲ مطابق شکل زیر، با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس،

$$(\frac{x}{۲})^۲+y^۲=۲^۲\Rightarrow y^۲=۴-\frac{x^۲}{۴}$$

همچنین طول قطر مستطیل از رابطهٔ فیثاغورس قابل محاسبه است:

$$d=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+۴-\frac{x^۲}{۴}}$$

بنابراین $d(x)=\sqrt{\frac{۳}{۴}x^۲+۴}$ ضابطهٔ تابع مورد نظر است.



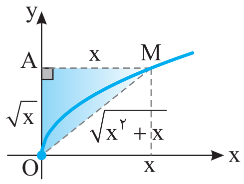
۱۰۹- گزینهٔ ۳ شیب خطی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(x,۰)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{۳-۰}{۲-x}$ است. شیب خطی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۰,y)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{y-۳}{۰-۲}$ است. چون نقطه‌های $(۲,۳)$، $(x,۰)$ و $(۰,y)$ روی یک خط واقع‌اند، پس برابری $\frac{۳-۰}{۲-x}=\frac{y-۳}{۰-۲}$ برقرار است. بنابراین

$$y-۳=\frac{-۶}{۲-x}\Rightarrow y=۳-\frac{۶}{۲-x}\Rightarrow y=\frac{۳x}{x-۲}$$

۱۱۰- گزینهٔ ۴ مطابق شکل زیر طول ضلع OM به کمک قضیهٔ فیثاغورس برابر است با $\sqrt{AM^۲+OA^۲}=\sqrt{x^۲+(\sqrt{x})^۲}=\sqrt{x^۲+x}$.

پس محیط مثلث OAM برابر است با

$$P(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt{x^۲+x}$$



۱۱۱- گزینهٔ ۲ اشتراک دامنه‌های f و g مجموعهٔ $\{۲,۳,۴\}$ است که دامنهٔ تابع $f+g$ است. پس این تابع به شکل زیر است.

$$f+g=\{(۲,۲),(۳,۱۱),(۴,-۱)\}$$

بنابراین $R_{f+g}=\{۲,۱۱,-۱\}$ و مجموع اعضای برد $f+g$ برابر ۱۲ است.

۱۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=\{۱,۳,۵,-۱\},\quad D_g=\{۱,۲,۵,۴\}$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{۱,۵\}$$

راه‌حل اول بنابراین a یکی از مقادیر ۱ یا ۵ است. از طرف دیگر،

$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+۴=۶$$

$$(f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۲-۴=-۲$$

$$(f+g)(۵)=f(۵)+g(۵)=۶+۲=۸$$

$$(f-g)(۵)=f(۵)-g(۵)=۶-۲=۴$$

پس $(f+g)(۵)=۲(f-g)(۵)$ و در نتیجه $a=۵$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$(f+g)(a)=۲(f-g)(a)\Rightarrow f(a)+g(a)=۲f(a)-۲g(a)\Rightarrow f(a)=۳g(a)$$

$$f(۱)=۲,\ g(۱)=۴\Rightarrow f(۱)\neq ۳g(۱)$$

$$f(۵)=۶,\ g(۵)=۲\Rightarrow f(۵)=۳g(۵)\Rightarrow a=۵$$

۱۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=(-\infty,۰]\cup[۳,+\infty)$ و $D_g=\{-۱,۱,۰,۲,۴\}$. بنابراین $D_{۲g-f}=D_g\cap D_f=\{-۱,۰,۴\}$.

بنابراین a باید یکی از مقدارهای ۱- یا ۰ یا ۴ باشد:

$$(۲g-f)(-۱)=۲g(-۱)-f(-۱)=۴-۲=۲$$

$$(۲g-f)(۰)=۲g(۰)-f(۰)=۲-۰=۲$$

$$(۲g-f)(۴)=۲g(۴)-f(۴)=۶-۲=۴$$

پس $(۲g-f)(۴)=۴$. بنابراین $a=۴$ و در نتیجه $f(-a)=f(-۴)=\sqrt{۲۸}$.

۱۱۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}+\frac{x^۴-x^۲}{x^۲+۱}=\frac{x^۲-۱+x^۴-x^۲}{x^۲+۱}$$

$$=\frac{x^۴-۱}{x^۲+۱}=\frac{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}{x^۲+۱}=x^۲-۱$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۰)=-۱$ و $g(۰)=۰$. پس $(f+g)(۰)=-۱$. با توجه به گزینه‌ها فقط در گزینهٔ (۳) به ازای $x=۰$ حاصل ۱- است.

۱۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow f(x)+g(x)=x^۲-۱$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow f(x)-g(x)=x-۳$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم

$$f(x)+g(x)+f(x)-g(x)=x^۲-۱+x-۳\Rightarrow f(x)=\frac{x^۲+x-۴}{۲}$$

پس باید حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{x^۲+x-۴}{۲}=۲$ را به‌دست آوریم

$$x^۲+x-۴=۴\Rightarrow x^۲+x-۸=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ بالا برابر $\frac{c}{a}=-۸$ است.

۱۱۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{۳\}$.

از طرف دیگر،

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x|f(x)=۰\}=(\mathbb{R}-\{۲,۳\})-\{x|\frac{x+۴}{x-۲}=۰\}$$

$$=\mathbb{R}-\{۲,۳,-۴\}$$

پس مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ قرار ندارند برابر ۱ است.

۱۱۷- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x)+g(x)=x^۲-۴x,\quad f(x)-g(x)=x^۲-۶x-۱۲$$

با جمع طرفین دو تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$۲f(x)=۲x^۲-۱۰x-۱۲\Rightarrow f(x)=x^۲-۵x-۶$$

بنابراین

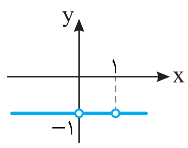
$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x|f(x)=۰\}$$

$$=(\mathbb{R}\cap\mathbb{R})-\{x|x^۲-۵x-۶=۰\}=\mathbb{R}-\{-۱,۶\}$$

۱۱۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$، پس $D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$. از طرف دیگر،

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+۱}{x^۲-x}-\frac{x^۲+۱}{x^۲-x}=\frac{x-x^۲}{x^۲-x}=-۱$$

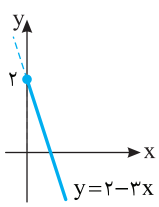
بنابراین باید نمودار تابع $y=-۱$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ رسم کنیم که به‌صورت زیر است.



۱۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=D_g=[۰,+\infty)$، پس $D_{g-f}=D_f\cap D_g=[۰,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$(g-f)(x)=g(x)-f(x)=۲-\sqrt{x}-(۳x-\sqrt{x})=۲-۳x$$

پس نمودار تابع $g-f$ به‌صورت روبه‌رو است و برد آن بازهٔ $(-\infty,۲]$ است.



۱۲۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

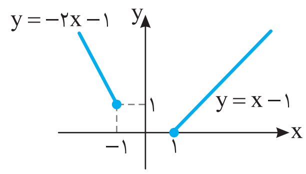
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}۲x-(x+۱) & x\ge ۱\\ x-۱-۳x & x\le -۱\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-۱ & x\ge ۱\\ -۲x-۱ & x\le -۱\end{cases}$$

اکنون برد تابع $f-g$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}x\ge ۱\Rightarrow x-۱\ge ۰\Rightarrow y\ge ۰\\ x\le -۱\Rightarrow -۲x\ge ۲\Rightarrow -۲x-۱\ge ۱\Rightarrow y\ge ۱\end{cases}$$

بنابراین برد تابع $f-g$ بازهٔ $[۰,+\infty)$ است. از روی نمودار تابع $f-g$ هم می‌توان برد آن را به‌دست آورد.



۱۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_{f-۲g}=D_f\cap D_g=\{۰,۱,۲\}$. بنابراین

$$(f-۲g)(۰)=f(۰)-۲g(۰)=۱-۲(-۱)=۳$$

$$(f-۲g)(۱)=f(۱)-۲g(۱)=۴-۲(-۲)=۸$$

$$(f-۲g)(۲)=f(۲)-۲g(۲)=-۶-۲(۳)=-۱۲$$

بنابراین مجموع مقدارهای تابع $f-۲g$ برابر -۱ است.

۱۲۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=۲x+۱\Rightarrow (f+g)(۲)=۲\times ۲+۱=۵\Rightarrow f(۲)+g(۲)=۵ \quad (۱)$$

$$(f-g)(x)=۱-x\Rightarrow (f-g)(۲)=۱-۲=-۱\Rightarrow f(۲)-g(۲)=-۱ \quad (۲)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دست می‌آید $f(۲)=۲$ و $g(۲)=۳$. بنابراین $(f\times g)(۲)=f(۲)\times g(۲)=۲\times ۳=۶$.

۱۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_f=(-\infty,۴]-\{۰\},\quad D_g=\{-۲,-۱,۰,۳,۴,۵\}$$

بنابراین

$$D_{\frac{f}{g}}=(D_f\cap D_g)-\{x|g(x)=۰\}=\{-۲,-۱,۳,۴\}-\{-۱\}=\{-۲,۳,۴\}$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ سه زوج مرتب دارد.

۱۲۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=|x-۱|+|x|=\begin{cases}-۲x+۱ & x\le ۰\\ ۱ & ۰\le x\le ۱\\ ۲x-۱ & x\ge ۱\end{cases}$$

در بازهٔ $[۰,۱]$ تابع $f+g$ ثابت است. در این بازه،

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=|\underbrace{x-۱}_{-}|-|\underbrace{x}_{+}|=-x+۱-x=-۲x+۱$$

۱۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f+۲g)(x)=f(x)+۲g(x)\Rightarrow f(x)+۲g(x)=۱-x$$

$$f(x)=۱-x-۲g(x)$$

$$(۲f-g)(x)=۲f(x)-g(x)\Rightarrow ۲f(x)-g(x)=x^۲$$

بنابراین $۲(۱-x-۲g(x))-g(x)=x^۲\Rightarrow -۵g(x)+۲-۲x=x^۲$

$$g(x)=\frac{۱}{۵}(-x^۲-۲x+۲)$$

۱۲۶- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۵-x}{x-۱}\ge ۰\Rightarrow ۱<x\le ۵\Rightarrow D_f=(۱,۵]$$

$$\frac{x-۱}{۴-x}\ge ۰\Rightarrow ۱\le x<۴\Rightarrow D_g=[۱,۴)$$

بنابراین

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(۱,۵]\cap[۱,۴)=(۱,۴)$$

۱۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{x}{(x+۱)^۲} \quad (۱)$$

$$(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=x\Rightarrow g(x)=xf(x) \quad (۲)$$

اگر به جای $g(x)$ در تساوی (۱) معادل آن یعنی $xf(x)$ را از تساوی (۲) قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$f(x)\times xf(x)=\frac{x}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f^۲(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

بنابراین $g^۲(x)=x^۲f^۲(x)=\frac{x^۲}{(x+۱)^۲}$، در نتیجه

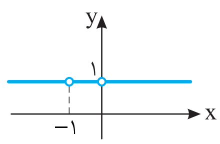
$$(f^۲-g^۲)(x)=f^۲(x)-g^۲(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۲}-\frac{x^۲}{(x+۱)^۲}=\frac{۱-x}{۱+x}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x}+\frac{x}{x+۱}+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x+۱}+\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۱}{x+۱}=۱$$

پس اگر $x\ne -۱$ و $x\ne ۰$، آن‌گاه $(f+g)(x)=۱$. بنابراین نمودار تابع $f+g$ به‌صورت زیر است.



۱۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=D_g=[۴,+\infty)$$

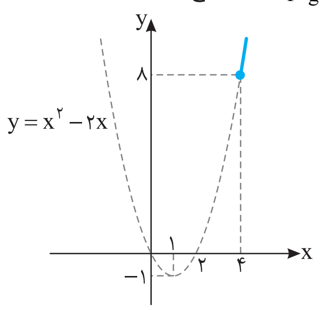
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^۲+\sqrt{x-۴}-۲x-\sqrt{x-۴}$$

$$=x^۲-۲x=(x-۱)^۲-۱$$

برای تعیین برد تابع $f-g$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$x\ge ۴\Rightarrow x-۱\ge ۳\Rightarrow (x-۱)^۲\ge ۹\Rightarrow (x-۱)^۲-۱\ge ۸\Rightarrow (f-g)(x)\ge ۸$$

پس $R_{f-g}=[۸,+\infty)$. برد تابع $f-g$ از روی نمودار آن هم مشخص است.



۱۳۰- گزینهٔ ۴ اگر $x>۱$، آن‌گاه

$$f(x)=۱\,,\,g(x)=-۲\Rightarrow(f-g)(x)=۱-(-۲)=۳$$

اگر $۰<x\le ۱$، آن‌گاه

$$f(x)=۱\,,\,g(x)=۲\Rightarrow(f-g)(x)=۱-۲=-۱$$

اگر $-۱\le x\le ۰$، آن‌گاه

$$f(x)=-۱\,,\,g(x)=۲\Rightarrow(f-g)(x)=-۱-۲=-۳$$

اگر $x<-۱$، آن‌گاه

$$f(x)=-۱\,,\,g(x)=-۲\Rightarrow(f-g)(x)=-۱-(-۲)=۱$$

بنابراین $R_{f-g}=\{۳,-۱,-۳,۱\}$.

۱۳۱- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g به شکل زیر است:

$$D_g=D_f-\{x|f(x)=۲\}=\{۱,۴,۳,۵\}-\{۴,۳\}=\{۱,۵\}$$

از طرف دیگر،

$$g(۱)=\frac{f(۱)}{۲-f(۱)}=\frac{-۱}{۲-(-۱)}=-\frac{۱}{۳}\ ,\quad g(۵)=\frac{f(۵)}{۲-f(۵)}=\frac{۱}{۲-۱}=۱$$

بنابراین $g=\{(۱,-\frac{۱}{۳}),(۵,۱)\}$.

۱۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $f(a)$ و $g(a)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-g)(a)=۲\Rightarrow f(a)-g(a)=۲\Rightarrow f(a)=g(a)+۲\quad(۱)$$

$$(f\times g)(a)=۸\Rightarrow f(a)g(a)=۸\xrightarrow{(۱)}(g(a)+۲)g(a)=۸$$

$$g^۲(a)+۲g(a)-۸=۰\Rightarrow(g(a)+۴)(g(a)-۲)=۰$$

$$\begin{cases}g(a)=-۴\xrightarrow{(۱)}f(a)=-۲\\ g(a)=۲\xrightarrow{(۱)}f(a)=۴\end{cases}$$

بنابراین

$$(\frac{f}{g})(a)=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{۴}{۲}=۲,\quad(\frac{f}{g})(a)=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۳۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=[-۳,۳]\,,\quad D_g=\{۱,-۱,۳,-۳,-۴\}$$

$$f(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۹-x^۲}=۰\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm ۳$$

بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\}=\{۱,-۱,۳,-۳\}-\{۳,-۳\}=\{۱,-۱\}$$

از طرف دیگر،

$$(\frac{g}{f})(۱)=\frac{g(۱)}{f(۱)}=\frac{۲}{\sqrt{۸}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\quad(\frac{g}{f})(-۱)=\frac{g(-۱)}{f(-۱)}=\frac{۲}{\sqrt{۸}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین $\frac{g}{f}=\{(۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲}),(-۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲})\}$ و در نتیجه برد تابع $\frac{g}{f}$ فقط یک عضو دارد.

۱۳۴- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع‌های f و g مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ است. پس

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$$

اکنون ضابطهٔ تابع $f-g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲-x}$$

$$=\frac{x+x-۱-۱}{x^۲-x}=\frac{۲(x-۱)}{x(x-۱)}=\frac{۲}{x}$$

۱۳۵- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}۴-x^۲\ge ۰\Rightarrow -۲\le x\le ۲\\ x+۴\ge ۰\Rightarrow x\ge -۴\end{cases}\Rightarrow D_f=[-۲,۲]$$

$$\begin{cases}۴-x^۲\ge ۰\Rightarrow -۲\le x\le ۲\\ ۱-x\ge ۰\Rightarrow x\le ۱\end{cases}\Rightarrow D_g=[-۲,۱]$$

بنابراین $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۲,۱]$. پس $a=-۲$، $b=۱$ و در نتیجه

$$a+b=-۱$$

۱۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۱}{(ax+۲)^۲},\quad g(x)=\frac{۱}{(x+۱)(x+b)}$$

چون فقط $x=-۱$ در دامنهٔ تابع $f+g$ قرار ندارد، پس تنها $x=-۱$ می‌تواند ریشهٔ مخرج در تابع‌های f و g باشد. بنابراین باید $b=۱$. برای a دو حالت وجود دارد:

حالت اول اگر $x=-۱$ ریشهٔ مخرج $f(x)$ باشد، آن‌گاه $a=۲$.

حالت دوم اگر مخرج $f(x)$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه $a=۰$.

بنابراین $a+b$ می‌تواند ۱ یا ۳ باشد.

۱۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$ax-a+۱\ge ۰\Rightarrow ax\ge a-۱$$

اگر $a>۰$، آن‌گاه $x\ge\frac{a-۱}{a}$. اگر $a<۰$، آن‌گاه $x\le\frac{a-۱}{a}$. اگر $a=۰$، آن‌گاه $x\in\mathbb{R}$. با توجه به این موضوع و اینکه $D_{f\times g}=[۲,۵]$ و $D_g=[۲,+\infty)$ باید $D_f=(-\infty,\frac{a-۱}{a}]$، در نتیجه

$$\frac{a-۱}{a}=۵\Rightarrow a-۱=۵a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

پس $f(x)=\sqrt{-\frac{۱}{۴}x+\frac{۵}{۴}}$ و در نتیجه $f(۳)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۱۳۸- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع $(f+g)^۲$ را به‌دست می‌آوریم (توجه کنید که $x\ge ۱$):

$$(f+g)^۲(x)=f^۲(x)+g^۲(x)+۲f(x)g(x)$$

$$=x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+۲\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}=۲x+۲\sqrt{x^۲-x}$$

با توجه به اینکه $f(x)$ و $g(x)$ عبارت‌هایی مثبت هستند، پس $(f+g)(x)$ هم مثبت است. بنابراین $(f+g)(x)=\sqrt{۲x+۲\sqrt{x^۲-x}}$. پس $a=۲$، $b=۱$ و در نتیجه $a+b=۳$.

۱۳۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به‌صورت زیر است:

$$x-۲\ge ۰\Rightarrow x\ge ۲\Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$$

$$a-x\ge ۰\Rightarrow x\le a\Rightarrow D_g=(-\infty,a]$$

چون $D_{f-g}=D_f\cap D_g=[۲,۴]$. پس $a=۴$. از طرف دیگر،

$$(f+g)(۳)=۵\Rightarrow f(۳)+g(۳)=\sqrt{۳-۲}+\sqrt{۴-۳}+b=۵$$

$$۲+b=۵\Rightarrow b=۳$$

در نتیجه $a+b=۷$.

۱۴۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}2-x & x\le 0\\ x+2 & 0<x<1\\ x+2 & x\ge 1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}2x+3 & x\le 0\\ 2x+3 & 0<x<1\\ 3x+2 & x\ge 1\end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}-3x-1 & x\le 0\\ -x-1 & 0<x<1\\ -2x & x\ge 1\end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(2)=4$ و $g(2)=8$، پس

$$(f-g)(2)=4-8=-4$$

همچنین $f(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$ و $g(\frac{1}{2})=4$، پس $(f-g)(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}$.

همچنین $f(-1)=3$ و $g(-1)=1$، پس $(f-g)(-1)=3-1=2$.

همهٔ این شرایط فقط در تابع گزینهٔ (۲) وجود دارد.

۱۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-2)=f(g(-2))=f(2)=3$$

$$(gof)(-1)=g(f(-1))=g(-3)=-2$$

بنابراین $(fog)(-2)-(gof)(-1)=3-(-2)=5$.

۱۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $(fog)(-2)=f(g(-2))$. از طرف دیگر، $g(-2)=-2+6=4$ و $f(g(-2))=f(4)=4^2+2=18$.

۱۴۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=3g(x)-2=3(4x+3)-2=12x+7$$

بنابراین $(fog)(x-1)=12(x-1)+7=12x-5$.

راه‌حل دوم دقت کنید که

$$(fog)(x-1)=f(g(x-1))=f(4(x-1)+3)$$

$$=f(4x-1)=3(4x-1)-2=12x-5$$

۱۴۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))$.

بنابراین

$$(gof)(x)=g\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\frac{2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)-2}{\frac{2x+1}{x-1}+2}=\frac{4x+2-2x+2}{2x+1+2x-2}=\frac{2x+4}{4x-1}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(gof)(0)=g(f(0))=g(-1)=-4$. فقط در گزینهٔ (۴)، تساوی بالا برقرار است.

۱۴۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2-6x+15)=5x^2-3x+2$$

بنابراین $f((x-3)^2+6)=5x^2-3x+2$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$، به‌دست می‌آید $f(6)=38$.

۱۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$D_{fof}=\{x|x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_f\}=\{1\le x\le 2\ ,\ 1\le 4-2x\le 2\}$$

از نامعادلهٔ $1\le 4-2x\le 2$ نتیجه می‌شود $-3\le -2x\le -2$، پس $1\le x\le \frac{3}{2}$.

بنابراین $D_{fof}=\{1\le x\le 2, 1\le x\le \frac{3}{2}\}=[1,\frac{3}{2}]$.

۱۴۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $g(x)=x^2$. تابع $f(x^2)$، تابع fog است. بنابراین می‌توان نوشت

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ ,1\le x^2\le 4\}$$

از نامعادله‌های $1\le x^2\le 4$ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}x^2\le 4\Rightarrow -2\le x\le 2\\ 1\le x^2\Rightarrow x\le -1\ ,\ x\ge 1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} -2\le x\le -1\ ,1\le x\le 2$$

بنابراین $D_{f(x^2)}=[-2,-1]\cup[1,2]$.

۱۴۸- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع gof را با توجه به $D_f=[-2,2]$ و $D_g=\mathbb{R}$ به‌دست می‌آوریم

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{-2\le x\le 2\ ,\ \sqrt{4-x^2}\in\mathbb{R}\}=[-2,2]$$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{4-x^2})=(\sqrt{4-x^2})^2+1=5-x^2$$

برای محاسبهٔ برد از دامنهٔ تابع کمک می‌گیریم

$$-2\le x\le 2\Rightarrow 0\le x^2\le 4\Rightarrow -4\le -x^2\le 0$$

$$1\le 5-x^2\le 5\Rightarrow 1\le (gof)(x)\le 5$$

بنابراین $R_{gof}=[1,5]$.

۱۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\ge a\ ,0\le |x-1|\le 3\}$$

$$=\{x|x\ge a\ ,-3\le x-1\le 3\}=\{x|x\ge a\ ,-2\le x\le 4\}$$

بنابراین $D_{fog}=[a\ ,+\infty)\cap[-2,4]=[-2,4]$. برای اینکه این تساوی برقرار باشد، باید $a\le -2$. یعنی حداکثر مقدار a برابر -2 است.

۱۵۰- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}2g(x)-1 & g(x)<0\\ g(x)+4 & g(x)\ge 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(3x-6)-1 & 3x-6<0\\ 3x-6+4 & 3x-6\ge 0\end{cases}=\begin{cases}6x-13 & x<2\\ 3x-2 & x\ge 2\end{cases}$$

۱۵۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-1)=f(g(-1))=f(3)=7\ ,\quad (fog)(1)=f(g(1))=f(2)=5$$

$$(fog)(3)=f(g(3))=f(0)=-1\ ,\quad (fog)(5)=f(g(5))=f(1)=0$$

بنابراین $fog=\{(-1,7),(1,5),(3,-1),(5,0)\}$.

۱۵۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(2)=3$. در نتیجه

$$(gof)(2)=g(f(2))=g(3)=3m+2=8\Rightarrow m=2$$

۱۵۳- گزینهٔ ۴ ابتدا $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=\frac{1}{2x+1-1}=\frac{1}{2x}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2}{x-1}+1=\frac{x+1}{x-1}$$

بنابراین

$$(fog)(x)+(gof)(x)=\frac{1}{2x}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2x^2+2x}{2x(x-1)}=\frac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x}$$

۱۵۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(fof)(x)=f(f(x))=f^{۲}(x)+۳f(x)+۲$$

بنابراین

$$(fof)(x)=۶\Rightarrow f^{۲}(x)+۳f(x)+۲=۶$$

$$f^{۲}(x)+۳f(x)-۴=۰\Rightarrow(f(x)-۱)(f(x)+۴)=۰$$

$$\begin{cases} f(x)=۱\Rightarrow x^{۲}+۳x+۲=۱\Rightarrow x^{۲}+۳x+۱=۰ & (۱)\\ f(x)=-۴\Rightarrow x^{۲}+۳x+۲=-۴\Rightarrow x^{۲}+۳x+۶=۰ & (۲)\end{cases}$$

معادلهٔ (۲) جواب ندارد $(\Delta<۰)$. در معادلهٔ (۱) حاصل‌جمع جواب‌ها برابر -۳ است. پس حاصل‌جمع جواب‌های معادلهٔ $(fof)(x)=۶$ برابر -۳ است.

۱۵۵- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$g(x-۱)=\frac{x+۲}{۳}\xrightarrow{x\to x+۱}g(x)=\frac{(x+۱)+۲}{۳}=\frac{x+۳}{۳}$$

بنابراین $(fog)(x)=۶x+۵\Rightarrow f(g(x))=۶x+۵\Rightarrow f(\frac{x+۳}{۳})=۶x+۵$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۰$، به‌دست می‌آید $f(۱)=۵$.

۱۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$$

$$=\{-\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳},\sqrt{۳-x^{۲}}\in\{-۳,۰,۱,۲\}\}$$

$$\sqrt{۳-x^{۲}}=-۳\quad(\text{غ.ق.ق})$$

$$\sqrt{۳-x^{۲}}=۰\Rightarrow ۳-x^{۲}=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۳-x^{۲}}=۱\Rightarrow ۳-x^{۲}=۱\Rightarrow x^{۲}=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۳-x^{۲}}=۲\Rightarrow ۳-x^{۲}=۴\Rightarrow x^{۲}=-۱\quad(\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین

$$D_{gof}=\{-\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳},x\in\{\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}\}=\{\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}$$

پس حاصل‌ضرب اعضای دامنهٔ تابع gof برابر ۶ است.

۱۵۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $g(x)=۲^{x}$، تابع $y=f(۲^{x})$، تابع $y=(fog)(x)$ است. دامنهٔ تابع g، $\mathbb{R}$ است، پس

$$D_{fog}=\{x|\ x\in D_g,g(x)\in D_f\}=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ ,\ ۱\le ۲^{x}\le ۴\}$$

از نامعادله‌های $۱\le ۲^{x}\le ۴$ نتیجه می‌شود $۰\le x\le ۲$، پس $D_{f(۲^{x})}=[۰,۲]$.

۱۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$ و

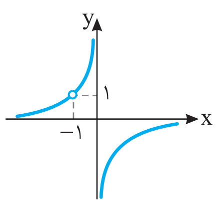
$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}=\{x\neq-۱\ ,\ \frac{x-۱}{x+۱}\neq-۱\}$$

$$\frac{x-۱}{x+۱}=-۱\Rightarrow x-۱=-x-۱\Rightarrow x=۰$$

بنابراین $D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$. اکنون ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)-۱}{f(x)+۱}=\frac{\frac{x-۱}{x+۱}-۱}{\frac{x-۱}{x+۱}+۱}=\frac{x-۱-x-۱}{x-۱+x+۱}=\frac{-۱}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل مقابل است.



۱۵۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f,f(x)\in D_g\}=\{x|-۲\le x\le ۳,۱\le x^{۲}-۳\le ۱۳\}$$

از حل نامعادلهٔ $۱\le x^{۲}-۳\le ۱۳$ نتیجه می‌شود $۲\le x\le ۴$ یا $-۴\le x\le -۲$.

بنابراین $D_{gof}=[۲,۳]\cup\{-۲\}$.

۱۶۰- گزینهٔ ۴ تابع gof به شکل زیر است

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}۳-f(x) & f(x)>۰\\ ۲-f(x) & f(x)<۰\end{cases}$$

کافی است نامعادله‌های $f(x)>۰$ و $f(x)<۰$ را حل کنیم.

حل $f(x)>۰$: اگر $x\ge ۰$، آن‌گاه

$$f(x)=x+۱>۰\Rightarrow x>-۱\Rightarrow x\ge ۰$$

اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$f(x)=x-۱>۰\Rightarrow x>۱\Rightarrow x\in\varnothing$$

حل $f(x)<۰$: اگر $x\ge ۰$، آن‌گاه

$$f(x)=x+۱<۰\Rightarrow x<-۱\Rightarrow x\in\varnothing$$

اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$f(x)=x-۱<۰\Rightarrow x<۱\Rightarrow x<۰$$

بنابراین $(gof)(x)=\begin{cases}۳-(x+۱) & x\ge ۰\\ ۲-(x-۱) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲-x & x\ge ۰\\ ۳-x & x<۰\end{cases}$.

۱۶۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۴)=۱\Rightarrow a=۱$$

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=۲\Rightarrow b=۲$$

$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۳)=۴\Rightarrow c=۴$$

$$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۲)=۳\Rightarrow d=۳$$

بنابراین $a-b+c-d=۰$.

۱۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا مقادیر $(fog)(۲)$ و $(gof)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۲)=۴+a$$

$$(gof)(a)=g(f(a))=g(۳a)=۶-۶a$$

بنابراین باید معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$۴+a-(۶-۶a)=۳\Rightarrow ۷a=۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۷}$$

۱۶۳- گزینهٔ ۴ باید $(fof)(x)$ را به‌دست آوریم

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)+۲}{f(x)-۲}=\frac{\frac{x+۲}{x-۲}+۲}{\frac{x+۲}{x-۲}-۲}=\frac{x+۲+۲x-۴}{x+۲-۲x+۴}$$

$$=\frac{۳x-۲}{-x+۶}$$

۱۶۴- گزینهٔ ۴ با توجه به ضابطهٔ تابع f،

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-۱}$$

بنابراین

$$\frac{g(x)}{g(x)-۱}=\frac{x}{۲x+۱}\Rightarrow ۲xg(x)+g(x)=xg(x)-x$$

$$(x+۱)g(x)=-x\Rightarrow g(x)=\frac{-x}{x+۱}$$

۱۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{۴f(x)-۱۹}$$

بنابراین $\sqrt{۴f(x)-۱۹}=\sqrt{۴g(x)+x}\Rightarrow ۴f(x)-۱۹=۴g(x)+x$

$$f(x)-g(x)=\frac{x+۱۹}{۴}\Rightarrow (f-g)(x)=\frac{x+۱۹}{۴}$$

در نتیجه $(f-g)(۵)=\frac{۵+۱۹}{۴}=۶$.

۱۶۶- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به شکل زیر است:

$$D_f=[۱,+\infty)\,,\quad D_g=[۰,۳]$$

بنابراین $D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\ge ۱\,|\,۰\le\sqrt{x-۱}\le ۳\}$.

از نامعادله‌های $۰\le\sqrt{x-۱}\le ۳$ نتیجه می‌شود $x-۱\le ۹\Rightarrow x\le ۱۰$

بنابراین $D_{gof}=\{x\,|\,x\ge ۱, x\le ۱۰\}=[۱,۱۰]$.

۱۶۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $g(x)=\frac{۱}{x}+۳$، آن‌گاه $D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ و $h(x)=f(g(x))=(fog)(x)$. بنابراین

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\,|\,۲\le\frac{۱}{x}+۳\le ۴\}$$

باید نامعادله‌های $۲\le\frac{۱}{x}+۳\le ۴$ را حل کنیم:

$$-۱\le\frac{۱}{x}\le ۱\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{x}-۱\le ۰\Rightarrow\frac{۱-x}{x}\le ۰ & (۱)\\ \frac{۱}{x}+۱\ge ۰\Rightarrow\frac{۱+x}{x}\ge ۰ & (۲)\end{cases}$$

از حل نامعادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$ و از حل نامعادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$. از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده دامنهٔ تابع h مشخص می‌شود: $D_h=\mathbb{R}-(-۱,۱)$.

۱۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا دامنهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\ge ۱, \sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\}=[۱,+\infty)$$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-۱})=(\sqrt{x-۱})^۲+۶=x-۱+۶=x+۵$$

اکنون با توجه به دامنهٔ تابع gof که شرط $x\ge ۱$ را دارد، برد آن را پیدا می‌کنیم:

$$x\ge ۱\Rightarrow x+۵\ge ۶\Rightarrow (gof)(x)\ge ۶\Rightarrow R_{gof}=[۶,+\infty)$$

راه‌حل دوم چون $f(x)=\sqrt{x-۱}$، پس $f(x)\ge ۰$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(f(x))=f^۲(x)+۶\ge ۶$$

بنابراین $R_{gof}=[۶,+\infty)$.

۱۶۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-۲\}$ و

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{x\ne -۲, \frac{۲x-۴}{x+۲}\ne -۲\}$$

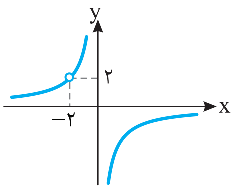
$$\frac{۲x-۴}{x+۲}\ne -۲\Rightarrow ۲x-۴\ne -۲x-۴\Rightarrow x\ne ۰$$

بنابراین $D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-۲,۰\}$. اکنون ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=(fof)(x)=f(f(x))=\frac{۲f(x)-۴}{f(x)+۲}$$

$$=\frac{۲(\frac{۲x-۴}{x+۲})-۴}{\frac{۲x-۴}{x+۲}+۲}=\frac{۴x-۸-۴x-۸}{۲x-۴+۲x+۴}=-\frac{۴}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل زیر است و برد تابع g برابر است با $\mathbb{R}-\{۰,۲\}$.



۱۷۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=۳f(x)+۲=\begin{cases}۶x-۱ & x<۰\\ ۳x-۴ & x\ge ۰\end{cases}$$

۱۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(۱)=۴\,,\quad f(۲)=۳\,,\quad f(۳)=۲\,,\quad f(۴)=۱\,,\quad f(۵)=۵$$

$$f(g(۱))=۲\,,\ f(g(۲))=۵\,,\ f(g(۳))=۱\,,\ f(g(۴))=۴\,,\ f(g(۵))=۳$$

اکنون توجه کنید که

$$f(g(۱))=f(۳)\Rightarrow g(۱)=۳\,,\quad f(g(۲))=f(۵)\Rightarrow g(۲)=۵$$

$$f(g(۳))=f(۴)\Rightarrow g(۳)=۴\,,\quad f(g(۴))=f(۱)\Rightarrow g(۴)=۱$$

$$f(g(۵))=f(۲)\Rightarrow g(۵)=۲$$

بنابراین $g=\{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۱),(۵,۲)\}$.

۱۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$۵=(gof)(a)=g(f(a))=g(a+\sqrt{a})$$

از طرف دیگر $g(۶)=۵$، پس

$$a+\sqrt{a}=۶\Rightarrow a=۴\Rightarrow g(a)=g(۴)=۱$$

۱۷۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(-۵x+۲a)$$

$$=۲(-۵x+۲a)-a+۱=-۱۰x+۳a+۱$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x-a+۱)$$

$$=-۵(۲x-a+۱)+۲a=-۱۰x+۷a-۵$$

چون $(fog)(x)=(gof)(x)$ همواره برقرار است، پس

$$۷a-۵=۳a+۱\Rightarrow ۴a=۶\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

راه‌حل دوم تساوی داده شده به‌ازای $x=۰$ برقرار است. پس

$$(fog)(۰)=(gof)(۰)\Rightarrow f(g(۰))=g(f(۰))\Rightarrow f(۲a)=g(-a+۱)$$

$$۴a-a+۱=-۵(-a+۱)+۲a\Rightarrow ۳a+۱=۷a-۵\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

۱۷۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{x+۱}{x-۲})$.

بنابراین

$$g(\frac{x+۱}{x-۲})=\frac{۱}{x+۲}\qquad (*)$$

اگر فرض کنیم $t=\frac{x+۱}{x-۲}$، آن‌گاه

$$tx-۲t=x+۱\Rightarrow (t-۱)x=۲t+۱\Rightarrow x=\frac{۲t+۱}{t-۱}$$

در تساوی $(*)$ به جای x قرار می‌دهیم $\frac{۲t+۱}{t-۱}$ و نتیجه می‌شود

$$g(t)=\frac{۱}{\frac{۲t+۱}{t-۱}+۲}=\frac{t-۱}{۲t+۱+۲t-۲}=\frac{t-۱}{۴t-۱}\Rightarrow g(x)=\frac{x-۱}{۴x-۱}$$

۱۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(gof)(x)=x^{۲}+f(x)\Rightarrow g(f(x))=x^{۲}+f(x)$$

$$f^{۲}(x)-۳f(x)+۴=x^{۲}+f(x)$$

$$f^{۲}(x)-۴f(x)-x^{۲}+۴=۰\Rightarrow (f(x)-۲)^{۲}=x^{۲}$$

چون f تابعی چندجمله‌ای است، پس $f(x)-۲=-x$ یا $f(x)-۲=x$. پس

$$f(x)=-x+۲ \text{ یا } f(x)=x+۲$$

۱۷۶- گزینهٔ ۲ چون f خطی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ است. پس

$$(fof)(x)=f(f(x))=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^{۲}x+ab+b$$

$$a^{۲}x+ab+b=۴x-۳\Rightarrow \begin{cases} a^{۲}=۴ \\ ab+b=-۳ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=-۲, b=۳ \\ a=۲, b=-۱ \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=-۲x+۳$ یا $f(x)=۲x-۱$ که نتیجه می‌شود $f(۰)=۳$ یا $f(۰)=-۱$.

۱۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $((fof)og)(x)=f(f(g(x)))$. از طرف دیگر، می‌توان نوشت $f(g(x))=f(|x|)=||x|+۲|-۴$. چون $|x|+۲>۰$، پس $f(g(x))=|x|+۲-۴=|x|-۲$ و

$$f(f(g(x)))=f(|x|-۲)=||x|-۲+۲|-۴=||x||-۴=|x|-۴$$

۱۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$۴x-x^{۲}\geq ۰\Rightarrow x(۴-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۴\Rightarrow D_f=[۰,۴]$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq ۴ | ۰\leq \sqrt{۴x-x^{۲}}-۱\leq ۴\}$$

پس

$$۱\leq \sqrt{۴x-x^{۲}}\leq ۵\Rightarrow ۱\leq ۴x-x^{۲}\leq ۲۵\Rightarrow -۳\leq ۴x-x^{۲}-۴\leq ۲۱$$

$$-۳\leq -(x-۲)^{۲}\leq ۲۱\Rightarrow -۲۱\leq (x-۲)^{۲}\leq ۳\Rightarrow |x-۲|\leq \sqrt{۳}$$

$$-\sqrt{۳}\leq x-۲\leq \sqrt{۳}\Rightarrow ۲-\sqrt{۳}\leq x\leq ۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین $D_{fof}=\{۰\leq x\leq ۴, ۲-\sqrt{۳}\leq x\leq ۲+\sqrt{۳}\}=[۲-\sqrt{۳}, ۲+\sqrt{۳}]$.

۱۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[k,+\infty)$ و $D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$.

بنابراین

$$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}=\{x\neq ۰ | \frac{۱}{x}+۳\geq k\}$$

نامعادلهٔ $\frac{۱}{x}+۳\geq k$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x}+۳-k\geq ۰\Rightarrow \frac{۱+(۳-k)x}{x}\geq ۰$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق یا به‌صورت $(۰,\frac{۱}{k-۳}]$ یا به‌صورت $(-\infty,\frac{۱}{k-۳}]\cup(۰,+\infty)$ است. باتوجه به فرض مسئله

$$D_{fog}=(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$$

بنابراین

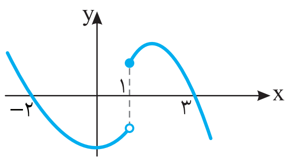
$$\frac{۱}{k-۳}=-۱\Rightarrow k-۳=-۱\Rightarrow k=۲$$

۱۸۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

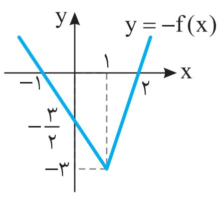
$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases} g^{۲}(x)-۱ & g(x)<۰ \\ ۳g(x)+۴ & ۰\leq g(x)<۲ \\ ۵ & g(x)\geq ۲ \end{cases}$$

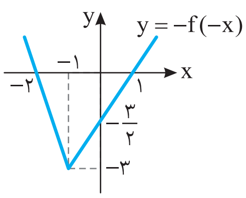
$$=\begin{cases} (x+۱)^{۲}-۱ & x+۱<۰ \\ ۳(x+۱)+۴ & ۰\leq x+۱<۲ \\ ۵ & x+۱\geq ۲ \end{cases}=\begin{cases} x^{۲}+۲x & x<-۱ \\ ۳x+۷ & -۱\leq x<۱ \\ ۵ & x\geq ۱ \end{cases}$$

۱۸۱- گزینهٔ ۱ برای رسم کردن نمودار تابع $-f$ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.

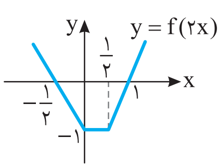


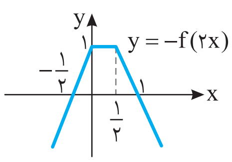
۱۸۲- گزینهٔ ۳ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x)$ به‌دست بیاید. سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست بیاید.



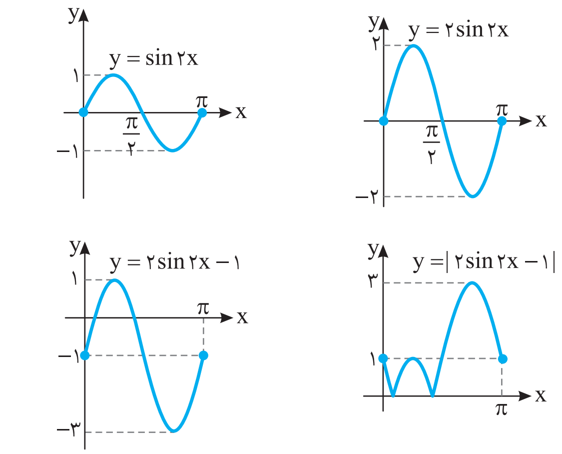


۱۸۳- گزینهٔ ۲ ابتدا طول نقاط روی نمودار f را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ به‌دست بیاید. اکنون قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۲x)$ به‌دست بیاید.





۱۸۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sin ۲x$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ رسم می‌کنیم. برای این کار، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم. سپس عرض هر نقطه روی نمودار به‌دست آمده را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\sin ۲x$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست بیاید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=۲\sin ۲x-۱$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست می‌آید. در آخر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.



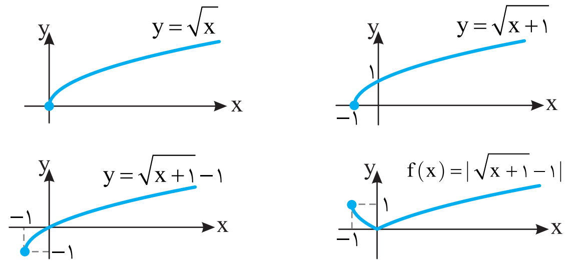
۱۸۵- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را a واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به‌دست می‌آید. چون نمودار اخیر از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس $g(۰)=۰$. در نتیجه

$$g(۰)=f(-a)+a=۰\Rightarrow a^{۲}-۷a+۹+a=۰$$

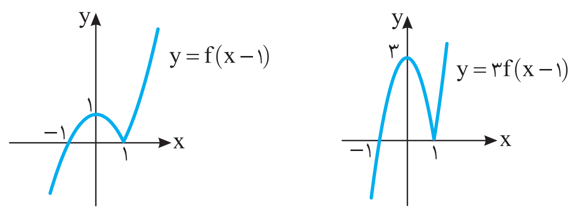
$$a^{۲}-۶a+۹=۰\Rightarrow (a-۳)^{۲}=۰\Rightarrow a=۳$$

۱۸۶- گزینهٔ ۲ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x-۱}{۲})$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲})$ به‌دست می‌آید.

۱۸۷- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}$ به‌دست آید، سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}-۱$ به‌دست آید. اکنون قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f رسم شود.



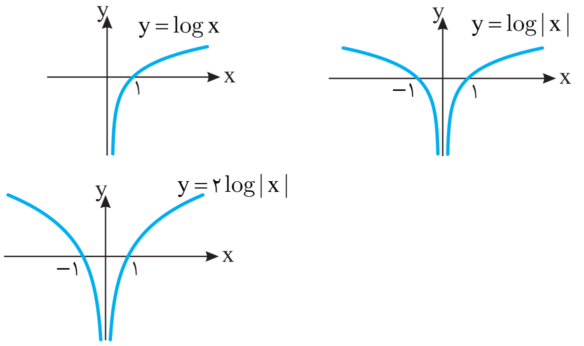
۱۸۸- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳f(x-۱)$ به‌دست بیاید.



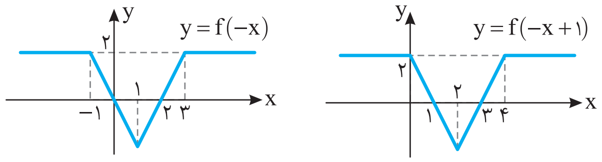
۱۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log x^{۲}=\log|x|^{۲}=۲\log|x|$$

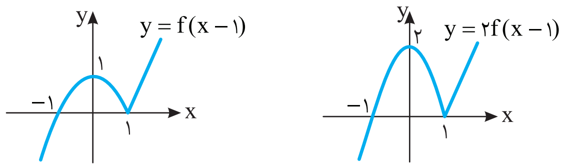
پس ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و قرینهٔ آن نسبت به محور عرض‌ها را به نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log|x|$ به‌دست آید. اکنون عرض نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\log|x|$ به‌دست آید.



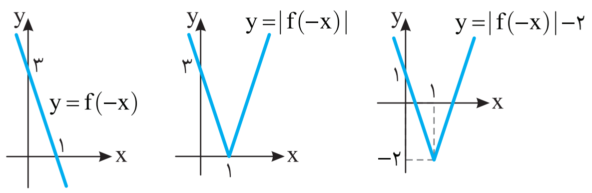
۱۹۰- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(-(x-۱))=f(-x+۱)$ به‌دست می‌آید.



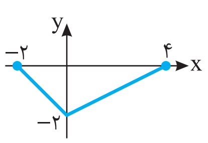
۱۹۱- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲f(x-۱)$ به‌دست بیاید.



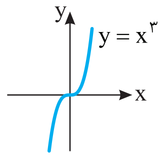
۱۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. در آخر، نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(-x)|-۲$ به‌دست بیاید.

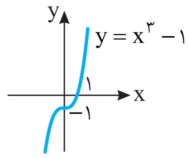


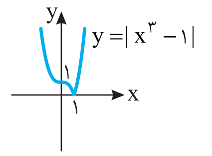
۱۹۳- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار تابع $y=۲f(\frac{x}{۲})$ باید در نمودار f طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم. همچنین باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.



۱۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^{۳}$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=x^{۳}-۱$ به‌دست آید. اکنون قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم، سپس قسمتی را که پایین محور طول‌ها است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x^{۳}-۱|$ به‌دست آید.







۱۹۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۱)+۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین باید جواب‌های معادلهٔ $f(x-۱)+۲=۰$ را به‌دست آوریم:

$$-(x-۱)^{۲}+(x-۱)-۲+۲=۰\Rightarrow -x^{۲}+۲x-۱+x-۱=۰$$

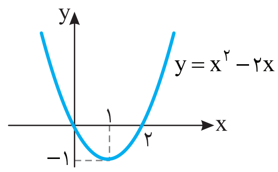
$$x^{۲}-۳x+۲=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱,x=۲$$

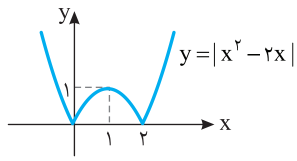
۱۹۶- گزینهٔ ۱ اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را سه برابر کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲x)$ رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(x+۲))$ رسم می‌شود. پس اکنون نمودار تابع $y=۳f(۲x+۴)$ به‌دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=۳f(-۲x+۴)$ به‌دست می‌آید.

۱۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

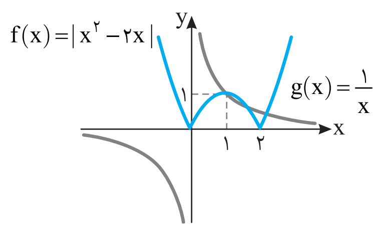
$$f(x)=|x||x-۲|=|x(x-۲)|=|x^{۲}-۲x|$$

بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^{۲}-۲x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

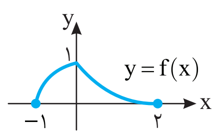


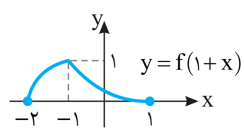


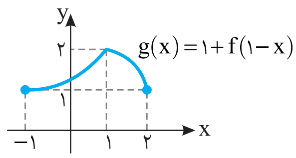
مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در سه نقطه متقاطع‌اند.

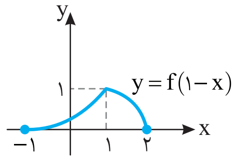


۱۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱+x)$ رسم شود. سپس نمودار این تابع را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱-x)$ رسم شود. در آخر نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $g(x)=۱+f(۱-x)$ رسم شود.

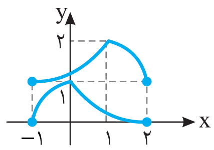




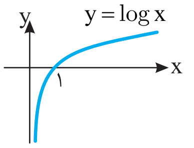


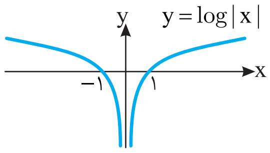


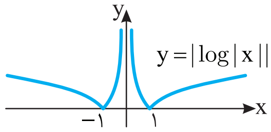
نمودار تابع‌های f و g را در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید که نقطهٔ مشترکی ندارند.



۱۹۹- گزینهٔ ۳ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم





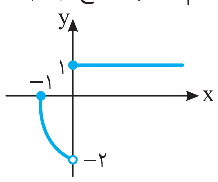


۲۰۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $h(x)=x-|x|$. در این صورت دامنهٔ تابع g با دامنهٔ تابع foh برابر است:

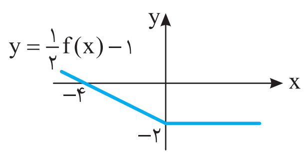
$$D_{foh}=\{x\in D_h \mid h(x)\in D_f\}=\{x \mid -۲\le x-|x|\le ۲\}=[-۱,+\infty)$$

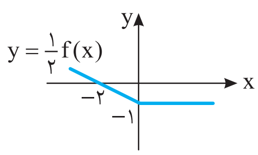
اکنون توجه کنید که $x<۰\Rightarrow g(x)=-f(۲x)$ ، $x\ge ۰\Rightarrow g(x)=-f(۰)$

پس $g(x)=\begin{cases} ۱ & x\ge ۰ \\ -f(۲x) & -۱\le x<۰ \end{cases}$. پس در بازهٔ $[۰,+\infty)$ باید نمودار تابع $y=۱$ را رسم کنیم و در بازهٔ $[-۱,۰)$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۲x)$ رسم شود.



۲۰۱- گزینهٔ ۳ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $\frac{۱}{۲}f$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ به‌دست بیاید.



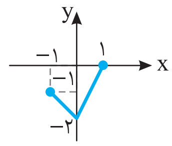


توجه کنید که اگر $x<۰$، نمودار f خطی است که از نقطه‌های $(۰,-۲)$ و $(-۲,۰)$ می‌گذرد، بنابراین اگر $x<۰$، ضابطهٔ f به صورت $f(x)=-x-۲$ است. در نتیجه اگر $x<۰$ و $\frac{۱}{۲}f(x)-۱=۰$، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}(-x-۲)-۱=۰$، پس $x=-۴$. یعنی نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ محور x را در نقطه‌ای به طول -۴ قطع می‌کند.

۲۰۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(-(x-1))$ به‌دست می‌آید. پس نمودار نهایی نمودار تابع $y=f(-x+1)$ است.

۲۰۳- گزینهٔ ۴ برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم و عرض نقاط را در $-\frac{1}{2}$ ضرب کنیم.

بنابراین نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود و در راستای محور عرض‌ها علاوه‌بر اینکه منقبض می‌شود، نسبت به محور طول‌ها قرینه هم می‌شود.



۲۰۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را a واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به‌دست می‌آید. این نمودار باید از مبدأ مختصات عبور کند، پس $g(0)=0$ و در نتیجه $f(-a)+a=0$. اگر $f(x)=-x^2+3x-2$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=0\Rightarrow -a^2-3a-2+a=0\Rightarrow a^2+2a+2=0$$

اگر $f(x)=x^2+1$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=0\Rightarrow a^2+1+a=0\Rightarrow a^2+a+1=0$$

اگر $f(x)=-x^2-1$، آن‌گاه

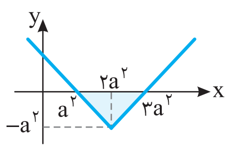
$$f(-a)+a=0\Rightarrow -a^2-1+a=0\Rightarrow a^2-a+1=0$$

معادله‌های بالا جواب ندارند، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) جواب نیستند.
اگر $f(x)=x^2+5x+4$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=0\Rightarrow a^2-5a+4+a=0\Rightarrow a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0\Rightarrow a=2$$

۲۰۵- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را $2a^2$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-2a^2|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را a^2 واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=|x-2a^2|-a^2$ به‌دست می‌آید. با توجه به نمودار این تابع مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با $S=\frac{1}{2}a^2(2a^2)=a^4$. بنابراین $a^4=4$، پس $a=\pm\sqrt{2}$.

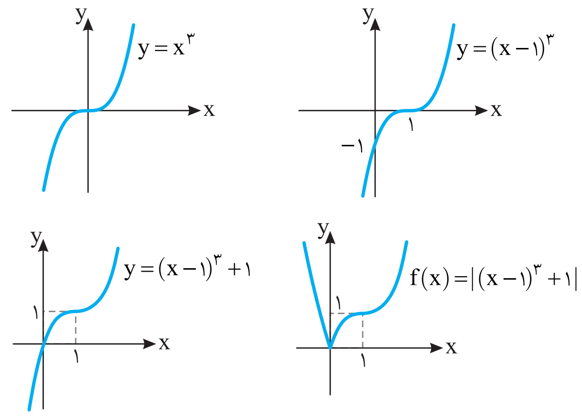


۲۰۶- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=f(x-2)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-1-2)=f(x-3)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-3)-1$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(x-3)+1$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x-3)+1$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر طول نقاط روی نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=-f(-2x-3)+1$ به‌دست می‌آید.

۲۰۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=|x^3-3x^2+3x|=|(x-1)^3+1|$$

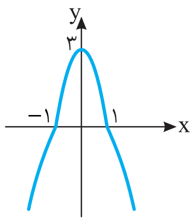
بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه کنیم و در آخر قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.



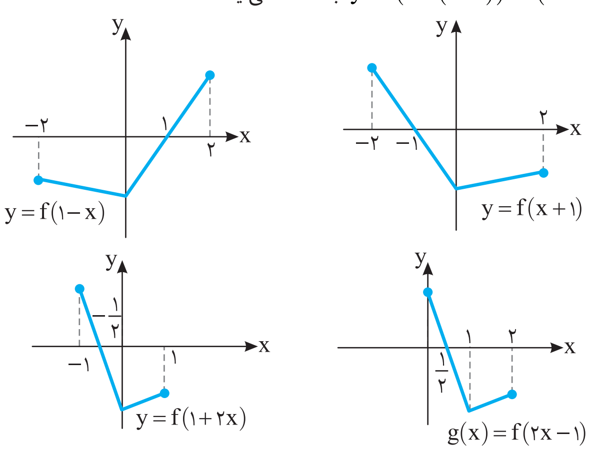
۲۰۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$g(x)=-2f(x)+|f(x)|=\begin{cases}-2f(x)+f(x) & f(x)\ge 0\\ -2f(x)+(-f(x)) & f(x)<0\end{cases}=\begin{cases}-f(x) & f(x)\ge 0\\ -3f(x) & f(x)<0\end{cases}$$

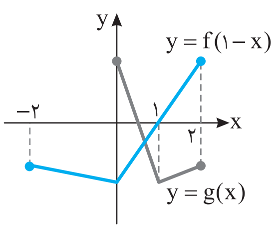
بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f منفی است، یعنی در بازهٔ $(-1,1)$، عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، در بقیهٔ جاها نمودار g قرینهٔ نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.



۲۰۹- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=f(1-x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(1+x)$ به‌دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(1+2x)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(1+2(x-1))=f(2x-1)$ به‌دست می‌آید.



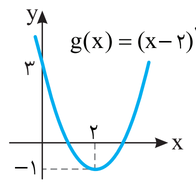
با توجه به شکل مقابل نمودار توابع $y=g(x)$ و $y=f(1-x)$ یک نقطهٔ برخورد دارند.

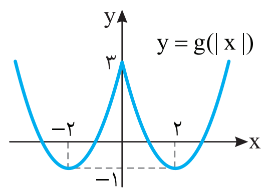


۲۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=x^2-4|x|+3=|x|^2-4|x|+3$$

پس اگر فرض کنیم $g(x)=x^2-4x+3$، آن‌گاه $f(x)=g(|x|)$. به این ترتیب، کافی است نمودار $y=g(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، ابتدا نمودار تابع g را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

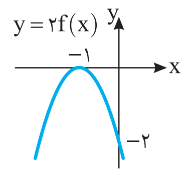


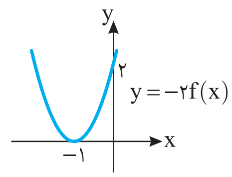


۲۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که همواره $f(x)\le 0$. بنابراین

$$y=|f(x)|-f(x)=-f(x)-f(x)=-2f(x)$$

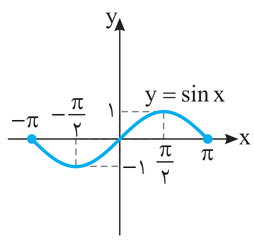
برای رسم کردن نمودار $y=-2f(x)$، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2f(x)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-2f(x)$ به‌دست بیاید.

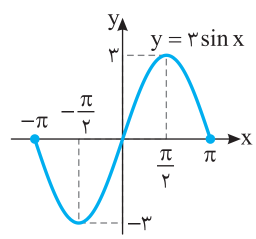


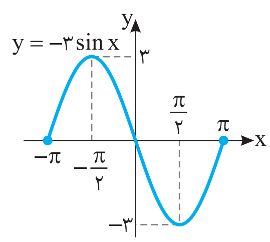


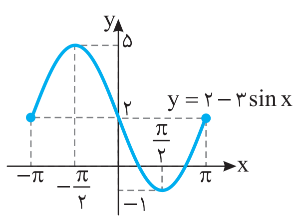
۲۱۲- گزینهٔ ۴ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x+1}{2})$ به‌دست می‌آید. پس نمودار مورد نظر متعلق به تابع $y=f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$ است.

۲۱۳- گزینهٔ ۴ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=3\sin x$ به‌دست بیاید. سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-3\sin x$ به‌دست بیاید. در آخر، نمودار تابع $y=-3\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=2-3\sin x$ به‌دست بیاید.

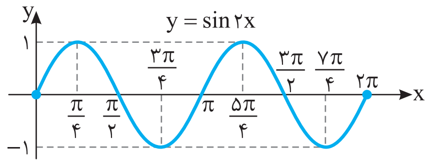


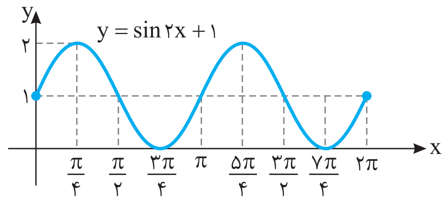






۲۱۴- گزینهٔ ۱ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[0,4\pi]$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sin 2x$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌دست بیاید. سپس، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.





۲۱۵- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که a عددی مثبت است. از طرف دیگر،

$$f(0)=|a|-2=a-2,\quad f(a)=-2$$

$$f(x)=0\Rightarrow|x-a|-2=0\Rightarrow\begin{cases}x-a=2\Rightarrow x=a+2\\ x-a=-2\Rightarrow x=a-2\end{cases}$$

بنابراین با توجه به شکل زیر

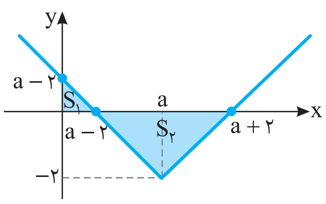
$$S_1=\frac{(a-2)^2}{2},\quad S_2=\frac{2(a+2-(a-2))}{2}=4$$

$$S_1+S_2=\frac{9}{2}\Rightarrow\frac{(a-2)^2}{2}+4=\frac{9}{2}\Rightarrow a^2-4a+4+8=9$$

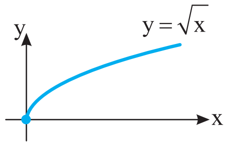
$$a^2-4a+3=0\Rightarrow(a-3)(a-1)=0\Rightarrow a=3,\ a=1\ \text{(غ.ق.ق)}$$

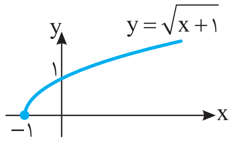
اگر $a=1$، آن‌گاه $f(x)=|x-1|-2$ و در نتیجه $f(0)=-1$ ولی در نمودار رسم شده مقدار $f(0)$ عددی مثبت است. پس $a=1$ قابل قبول نیست. در نتیجه

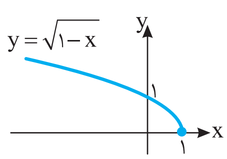
$$f(x)=|x-3|-2\Rightarrow f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{3})=|\frac{1}{3}-3|-2=\frac{2}{3}$$

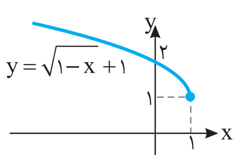


۲۱۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را به شکل زیر رسم می‌کنیم. بنابراین اگر نمودار نهایی را دو واحد به پایین ببریم، هر دو محور مختصات را قطع می‌کند.

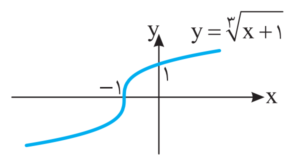


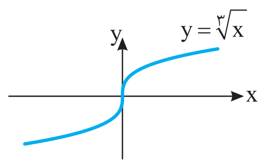


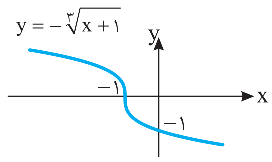




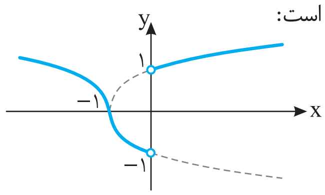
۲۱۷- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1} & x>0\\ -\sqrt[3]{x+1} & x<0\end{cases}$ است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y=\sqrt[3]{x+1}$ و $y=-\sqrt[3]{x+1}$ به‌صورت زیر است:







بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است:



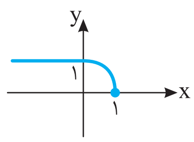
۲۱۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید $h(x)=x+|x|$. در این صورت دامنهٔ تابع g با دامنهٔ تابع foh برابر است:

$$D_{foh}=\{x\in D_h|h(x)\in D_f\}=\{x|-2\le x+|x|\le 2\}=(-\infty,1]$$

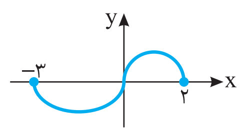
اکنون توجه کنید که

$$x\le 0\Rightarrow g(x)=-f(x-x)=-f(0)=1$$
$$0<x\le 1\Rightarrow g(x)=-f(x+x)=-f(2x)$$

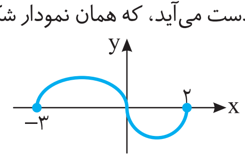
پس $g(x)=\begin{cases}1 & x\le 0\\ -f(2x) & 0<x\le 1\end{cases}$. پس در بازهٔ $(-\infty,0]$ باید نمودار تابع $y=1$ را رسم کنیم و در بازهٔ $[0,1]$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f واقع در بازهٔ $[0,2]$ را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم.



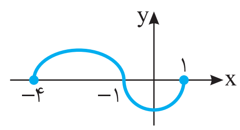
۲۱۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=-f(-(x+1))$ به‌دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.



$y=f(-x)$



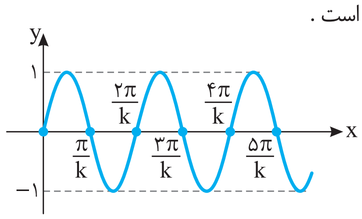
$y=-f(-x)$



$y=-f(-x-1)$

راه‌حل دوم در شکل (۲)، نقطهٔ $(-4,0)$ روی نمودار تابع است. در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌ازای $x=-4$ مقادیر $f(5)$ و $f(-5)$ ظاهر می‌شوند اما با توجه به شکل (۱)، عددهای ۵ و ۵- در دامنهٔ تابع f نیستند، پس این سه گزینه رد می‌شوند.

۲۲۰- گزینهٔ ۳ مطابق شکل باید $\frac{4\pi}{k}\le\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{k}$ تا نمودار تابع پنج بار محور طول‌ها را روی بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ قطع کند. بنابراین $8\le k<10$، پس حداقل مقدار k برابر ۸ است.



۲۲۱- گزینهٔ ۳ چون مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(9,1)$ و $(a^2,1)$ مساوی هستند، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم مساوی باشند:

$$a^2=9\Rightarrow a=\pm 3$$

به همین ترتیب باید مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های $(6,2)$ و $(3a+b,2)$ نیز مساوی باشند، پس $3a+b=6$، بنابراین $b=6-3a$.

اگر $a=3$، آن‌گاه $b=-3$ و تابع به‌صورت زیر است:

$$f=\{(9,1),(6,2),(3,9)\}$$

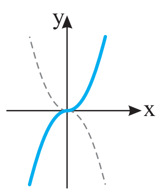
اگر $a=-3$، آن‌گاه $b=15$ و تابع به‌صورت زیر است:

$$f=\{(9,1),(6,2),(-3,-45)\}$$

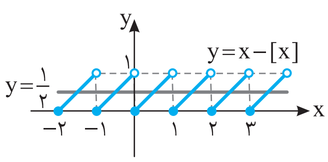
پس $a-b=6$ یا $a-b=-18$.

۲۲۲- گزینهٔ ۳ توابع $y=x^2$، $y=|x|$ و $y=[x]$ یک‌به‌یک نیستند، چون خطی موازی محور طول‌ها وجود دارد که نمودار آن‌ها را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. ولی نمودار تابع $y=x|x|$ به‌صورت زیر است و هر خط موازی محور طول‌ها آن را در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است.

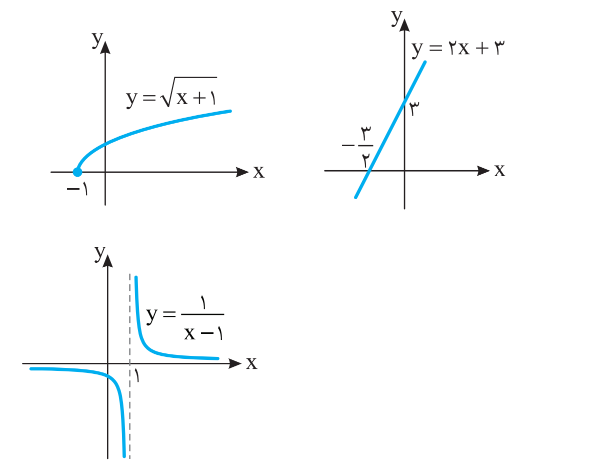
$$y=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x\le 0\end{cases}$$



۲۲۳- گزینهٔ ۴ توابع $y=\sqrt{x+1}$، $y=2x+3$ و $y=\frac{1}{x-1}$ یک‌به‌یک هستند چون هر خط موازی محور طول‌ها نمودار آن‌ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. تابع $y=x-[x]$ یک‌به‌یک نیست. چون مثلاً خط $y=\frac{1}{2}$ نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



نمودار سایر توابع به‌صورت زیر است:



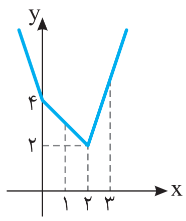
۲۲۴- گزینه ۱ تابع $f(x)=x^3-\sqrt{x}$ یک‌به‌یک نیست. زیرا

$$f(0)=f(1)=0$$

۲۲۵- گزینه ۴ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}3x-4 & x\geq 2\\ -x+4 & 0\leq x\leq 2\\ -3x+4 & x\leq 0\end{cases}$$

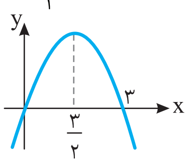
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. این تابع روی بازه‌های $(-\infty,2]$ و $[2,+\infty)$ و $[0,2]$ یک‌به‌یک است ولی روی بازهٔ $[1,3]$ یک‌به‌یک نیست.



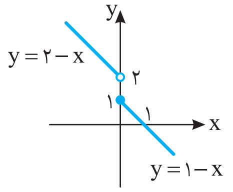
۲۲۶- گزینه ۱ شرط یک‌به‌یک نبودن این تابع $-2a-3=0$ است. پس $a=-\frac{3}{2}$. توجه کنید که در این صورت تابع f با یک تابع ثابت برابر است

$$f(x)=\frac{ax+3}{x-2}=\frac{-\frac{3}{2}x+3}{x-2}=\frac{-3x+6}{2x-4}=\frac{-3(x-2)}{2(x-2)}=-\frac{3}{2}\Rightarrow f(3)=-\frac{3}{2}$$

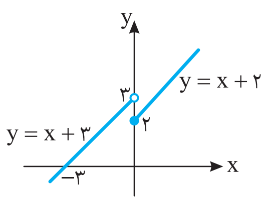
۲۲۷- گزینه ۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. از روی شکل معلوم است که تابع روی بازهٔ $(-\infty,\frac{3}{2}]$ یک‌به‌یک است. اما اگر $a>\frac{3}{2}$، خطی موازی با محور طول‌ها وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{3}{2}$ است.



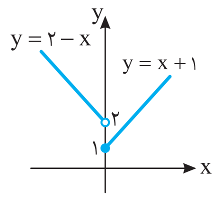
۲۲۸- گزینه ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به‌صورت روبه‌رو است. هر خط موازی محور طول‌ها نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است. نمودار تابع‌های سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:



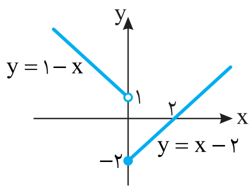
گزینهٔ (۱)



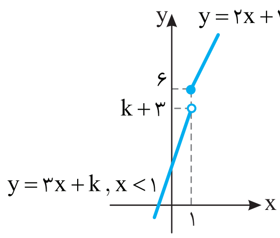
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



۲۲۹- گزینه ۳ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌صورت زیر است. مطابق شکل واضح است که با شرط $k+3\leq 6$ تابع f یک‌به‌یک است. پس $k\leq 3$.



راه‌حل دوم اگر $x\geq 1$، آن‌گاه تابع $g(x)=2x+4$ یک‌به‌یک است. همچنین اگر $x<1$، تابع $h(x)=3x+k$ یک‌به‌یک است. از طرف دیگر

$$x\geq 1\Rightarrow 2x\geq 2\Rightarrow 2x+4\geq 6\Rightarrow g(x)\geq 6\Rightarrow R_g=[6,+\infty)$$

$$x<1\Rightarrow 3x<3\Rightarrow 3x+k<k+3\Rightarrow h(x)<k+3\Rightarrow R_h=(-\infty,k+3)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد، باید

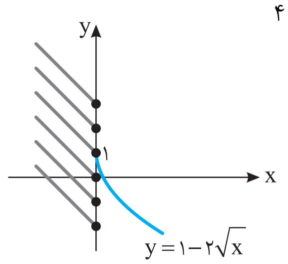
$$R_g\cap R_h=\varnothing\Rightarrow[6,+\infty)\cap(-\infty,k+3)=\varnothing\Rightarrow k+3\leq 6\Rightarrow k\leq 3$$

پس حداکثر مقدار ممکن k برابر ۳ است.

۲۳۰- گزینه ۱ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌ازای مقدارهای مختلف k به شکل زیر است. برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، باید کمترین مقدار عبارت $4k-x$ به‌ازای $x\leq 0$ از ۱ کمتر نباشد:

$$x\leq 0\Rightarrow -x\geq 0\Rightarrow 4k-x\geq 4k$$

یعنی $4k\geq 1$، پس $k\geq\frac{1}{4}$.



راه‌حل دوم اگر $x>0$، آن‌گاه تابع $g(x)=1-2\sqrt{x}$ یک‌به‌یک است و اگر $x\leq 0$، آن‌گاه تابع $h(x)=4k-x$ یک‌به‌یک است و

$$x>0\Rightarrow\sqrt{x}>0\Rightarrow -2\sqrt{x}<0\Rightarrow 1-2\sqrt{x}<1\Rightarrow R_g=(-\infty,1)$$

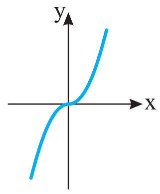
$$x\leq 0\Rightarrow -x\geq 0\Rightarrow 4k-x\geq 4k\Rightarrow R_h=[4k,+\infty)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک شود، باید $R_g\cap R_h=\varnothing$. پس

$$4k\geq 1\Rightarrow k\geq\frac{1}{4}$$

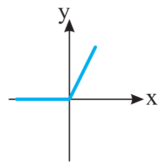
۲۳۱- گزینهٔ ۳ در گزینهٔ (۱)، $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$. پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینهٔ (۲)، $x\neq ۰$ ، $f(x)=|x|$. پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینهٔ (۴) مثلاً $f(۱)=f(-۱)$ پس تابع یک‌به‌یک نیست. در گزینهٔ (۳) نمودار تابع به‌صورت زیر است و تابع یک‌به‌یک است.

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$$

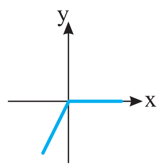


۲۳۲- گزینهٔ ۳ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

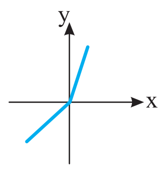
گزینهٔ (۱): $f(x)=x+|x|=\begin{cases}۰ & x<۰\\ ۲x & x\ge ۰\end{cases}$ $\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



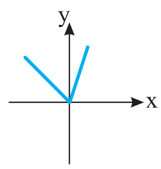
گزینهٔ (۲): $f(x)=x-|x|=\begin{cases}۲x & x<۰\\ ۰ & x\ge ۰\end{cases}$ $\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



گزینهٔ (۳): $f(x)=۲x+|x|=\begin{cases}x & x<۰\\ ۳x & x\ge ۰\end{cases}$ $\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک است



گزینهٔ (۴): $f(x)=x+۲|x|=\begin{cases}-x & x<۰\\ ۳x & x\ge ۰\end{cases}$ $\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



۲۳۳- گزینهٔ ۱ در تابع گزینهٔ (۲)، $f(۰)=f(۱)=f(-۱)=۰$.

در تابع گزینهٔ (۳)، اگر $x\le ۰$ ، آن‌گاه $f(x)=۰$.

در تابع گزینهٔ (۴)، $f(۰)=f(۲)=۰$.

بنابراین گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) رد می‌شوند. توجه کنید که می‌توانید ثابت کنید تابع گزینهٔ (۱) یک‌به‌یک است. اگر $(x_۱,f(x_۱))$ و $(x_۲,f(x_۲))$ دو زوج مرتب از تابع f باشند که $f(x_۱)=f(x_۲)$ ، آن‌گاه

$$x_۱^۳+x_۱+۱=x_۲^۳+x_۲+۱\Rightarrow x_۱^۳-x_۲^۳+x_۱-x_۲=۰$$

$$(x_۱-x_۲)(x_۱^۲+x_۱x_۲+x_۲^۲)+(x_۱-x_۲)=۰$$

$$(x_۱-x_۲)\underbrace{(x_۱^۲+x_۱x_۲+x_۲^۲+۱)}_{A}=۰ \qquad (۱)$$

اکنون توجه کنید که $A=(x_۱+\frac{۱}{۲}x_۲)^۲+\frac{۳}{۴}x_۲^۲+۱>۰$

بنابراین از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود $x_۱-x_۲=۰$ ، پس $x_۱=x_۲$ و تابع f یک‌به‌یک است.

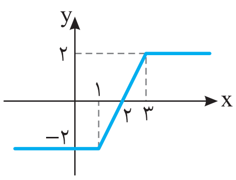
۲۳۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x\ge ۳\Rightarrow f(x)=x-۱-x+۳=۲$$

$$۱\le x\le ۳\Rightarrow f(x)=x-۱+x-۳=۲x-۴$$

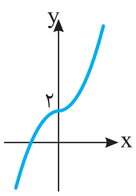
$$x\le ۱\Rightarrow f(x)=-x+۱+x-۳=-۲$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و این تابع روی بازهٔ $[۱,۳]$ یک‌به‌یک است. توجه کنید که تابع f روی هر بازهٔ $[c,d]$ که $c\ge ۱$ و $d\le ۳$ نیز یک‌به‌یک است. پس حداکثر مقدار ممکن برای b برابر ۳ و حداقل مقدار ممکن برای a برابر ۱ است و در نتیجه حداکثر مقدار ممکن برای $b-a$ برابر ۲ است.

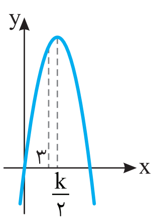


۲۳۵- گزینهٔ ۳ تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq ۰$ یک‌به‌یک است و اگر $ad-bc=۰$ ، آن‌گاه تابع f برابر یک تابع ثابت است که یک‌به‌یک نیست. پس اگر $k^۳-۴k=۰$ ، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک نیست. از معادلهٔ اخیر به‌دست می‌آید $k=۰$ و $k=\pm ۲$. پس به‌ازای سه مقدار مختلف k تابع f یک‌به‌یک نیست.

۲۳۶- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}۲-x^۲ & x<۰\\ x^۲+۲ & x\ge ۰\end{cases}$ به شکل زیر است. واضح است که تابع یک‌به‌یک است. بقیهٔ گزینه‌ها را می‌توانید با رسم نمودار یا آوردن مثال نقض، رد کنید.



۲۳۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $y=-x^۲+kx$ به شکل مقابل است. اگر $x=۳$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع در بازهٔ $(-\infty,۳]$ یک‌به‌یک است. بنابراین



$$۳\le \frac{k}{۲}\Rightarrow k\ge ۶$$

۲۳۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که اگر $f(x_1)=f(x_2)$، آن‌گاه

$$x_1-k\sqrt{x_1}=x_2-k\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1-x_2-k(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})=0$$
$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})-k(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})=0$$
$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-k)=0$$

اگر $k<0$، آن‌گاه $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-k\neq 0$ و در نتیجه

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0\Rightarrow x_1=x_2$$

پس تابع یک‌به‌یک است.

به‌ازای $k=0$ هم تابع به‌صورت $f(x)=x$ است و یک‌به‌یک است. اما اگر $k>0$، آن‌گاه از $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-k=0$ می‌توان مقدار x_1 را برحسب x_2 به‌دست آورد و از $f(x_1)=f(x_2)$ لزوماً $x_1=x_2$ نتیجه نمی‌شود. پس در این حالت تابع یک‌به‌یک نیست.

راه‌حل دوم (این راه‌حل پس از مطالعهٔ فصل کاربرد مشتق قابل استفاده است.) تابع f روی بازهٔ $[0,+\infty)$ پیوسته است. پس در صورتی که یک‌به‌یک باشد، اکیداً یکنواست. اکنون توجه کنید که $f'(x)=1-\frac{k}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-k}{2\sqrt{x}}$.

اگر $k\le 0$، آن‌گاه $f'(x)>0$ و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است و یک‌به‌یک است. اگر $k>0$، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $[0,\frac{k^2}{4}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[\frac{k^2}{4},+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازهٔ $[0,+\infty)$ غیریکنواست.

۲۳۹- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $f(x^3+3)=f(x^2+1)$ می‌نویسیم. چون f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$x^3+3=x^2+1\Rightarrow x^3-x^2+2=0$$

واضح است که $x=-1$ یکی از جواب‌های معادله است، به کمک تقسیم عبارت x^3-x^2+2 را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-x^2+2=(x+1)(x^2-2x+2)=0$$

معادلهٔ $x^2-2x+2=0$ جواب ندارد. پس $x=-1$ تنها جواب معادله است.

۲۴۰- گزینهٔ ۲ تابع $g(x)=f(|x|)$ قطعاً یک‌به‌یک نیست، زیرا

$$x=a\Rightarrow g(a)=f(|a|),\quad x=-a\Rightarrow g(-a)=f(|-a|)=f(|a|)$$

بنابراین $g(-a)=g(a)$ و در نتیجه این تابع یک‌به‌یک نیست.

۲۴۱- گزینهٔ ۲ تابع گزینهٔ (۱) صعودی نیست، زیرا $1<2$، اما $f(1)>f(2)$.
تابع گزینهٔ (۲) صعودی است، زیرا $2<4<5$ و $f(2)=f(4)<f(5)$.
تابع گزینهٔ (۳) صعودی نیست، زیرا $2<3$، اما $f(2)>f(3)$.
تابع گزینهٔ (۴) هم صعودی نیست، زیرا $-2<3$، اما $f(-2)>f(3)$.

۲۴۲- گزینهٔ ۲ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$1<2<3\Rightarrow f(1)<f(2)<f(3)\Rightarrow a^2-1<a+1<3a-1$$
$$a^2-1<a+1\Rightarrow (a+1)(a-2)<0\Rightarrow -1<a<2 \qquad (1)$$
$$a+1<3a-1\Rightarrow a>1 \qquad (2)$$

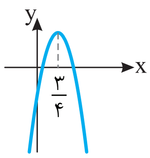
اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $1<a<2$.

۲۴۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل سؤال تابع f روی بازهٔ $[-2,3]$ و هر بازهٔ $[a,b]$ که $-2\le a<b\le 3$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۵ است.

۲۴۴- گزینهٔ ۱ در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $a>1$، آن‌گاه تابع صعودی است. بنابراین

$$k^2-3>1\Rightarrow k^2>4\Rightarrow |k|>2$$

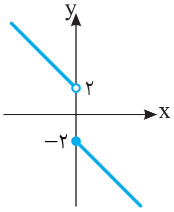
۲۴۵- گزینهٔ ۱ طول رأس سهمی به معادلهٔ $f(x)=-4x^2+6x-1$ برابر است با $-\frac{b}{2a}=\frac{3}{4}$.



از روی نمودار این سهمی معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(\frac{3}{4},+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۲۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به‌صورت زیر است و این تابع نزولی است.

$$f(x)=\begin{cases}-x-2 & x\ge 0\\ -x+2 & x<0\end{cases}$$



با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آن‌ها را رد کنید.

۲۴۷- گزینهٔ ۱ شرط صعودی بودن تابع f آن است که همهٔ مقادیر تابع $y_2=2x+1$ کوچک‌تر از یا مساوی با کمترین مقدار تابع $y_1=x+a$ باشد:

$$\begin{cases}x\ge 1\Rightarrow x+a\ge 1+a\Rightarrow y_1\ge 1+a\\ x<1\Rightarrow 2x+1<3\Rightarrow y_2<3\end{cases}$$

بنابراین $3\le 1+a$. پس $a\ge 2$.

۲۴۸- گزینهٔ ۲ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$2m-1\ge m+1\Rightarrow m\ge 2$$

۲۴۹- گزینهٔ ۲ برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $f(x)\ge 0$ را حل کنیم. چون $f(0)=0$ و اگر $x<0$، آن‌گاه $f(x)<f(0)$، پس باید نامعادلهٔ $f(x)\ge f(0)$ را حل کنیم که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x\ge 0$. پس $D_g=[0,+\infty)$.

۲۵۰- گزینهٔ ۱ مجموع دو تابع صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$، تابعی صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. بنابراین مجموع دو تابع $f+g$ و $f-g$، یعنی تابع $2f$ صعودی است، پس تابع f نیز صعودی است.

۲۵۱- گزینهٔ ۴ تابع f اکیداً صعودی، تابع g اکیداً نزولی، تابع h ثابت (هم صعودی و هم نزولی) و تابع k غیریکنواست.

۲۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$-2<0<1\Rightarrow 4x\le x^2+3\le 7x-x^2$$
$$4x\le x^2+3\Rightarrow x^2-4x+3\ge 0\Rightarrow x\le 1 \text{ یا } x\ge 3 \qquad (1)$$
$$x^2+3\le 7x-x^2\Rightarrow 2x^2-7x+3\le 0$$
$$(2x-1)(x-3)\le 0\Rightarrow \frac{1}{2}\le x\le 3 \qquad (2)$$

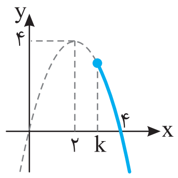
با توجه به شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود اگر $x=3$ یا $\frac{1}{2}\le x\le 1$، آن‌گاه تابع f صعودی است. پس به‌ازای مقادیر صحیح ۳ و ۱ تابع f صعودی است.

۲۵۳- گزینهٔ ۳ تابع $-f$ روی بازه‌هایی اکیداً صعودی است که تابع f روی آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع f روی بازهٔ $[-3,1]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع $-f$ روی این بازه اکیداً صعودی است.

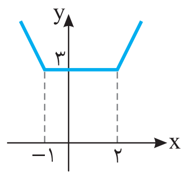
۲۵۴- گزینهٔ ۳ باید مبنای لگاریتم بین صفر و ۱ باشد. پس

$$0<k-1<1 \Rightarrow 1<k<2$$

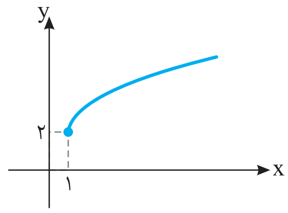
۲۵۵- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به شکل مقابل است. برای اینکه تابع نزولی باشد، باید دامنهٔ آن زیرمجموعهٔ بازهٔ $[2,+\infty)$ باشد، بنابراین $k\ge 2$.



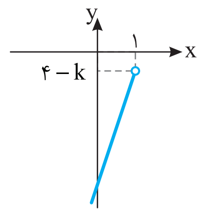
۲۵۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. چون تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ هم صعودی است هم نزولی، پس روی این بازه تابعی ثابت است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[-1,2]$ تابعی ثابت است، همین‌طور روی هر بازه‌ای مانند $[a,b]$ که $-1\le a<b\le 2$. بنابراین بیشترین مقدار ممکن $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=-1$ و $b=2$، که در این صورت $b-a=3$.



۲۵۷- گزینهٔ ۳ توابع $y=\sqrt{x-1}+2$ و $y=4x-k$ صعودی هستند.



$y=\sqrt{x-1}+2$



$y=4x-k,\ x<1$

مطابق شکل‌های بالا کافی است $4-k$ بیشتر از ۲ نباشد تا تابع f صعودی باشد. پس $4-k\le 2$، در نتیجه $k\ge 2$.

۲۵۸- گزینهٔ ۳ با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی،

$$a^2-3<2a \Rightarrow a^2-2a-3<0 \Rightarrow (a+1)(a-3)<0 \Rightarrow -1<a<3$$

۲۵۹- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x-2)-2\ge 0 \Rightarrow f(x-2)\ge 2 \Rightarrow f(x-2)\ge f(1)$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f نتیجه می‌شود

$$x-2\le 1 \Rightarrow x\le 3$$

بنابراین $D_g=(-\infty,3]$.

۲۶۰- گزینهٔ ۲ توابع $y=x$ و $y=f(x)$ صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها صعودی است. یعنی تابع $y=x+f(x)$ صعودی است.

۲۶۱- گزینهٔ ۳ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$1<2<3 \Rightarrow f(1)\le f(2)\le f(3) \Rightarrow m-1\le 2m\le m+3$$

$$m-1\le 2m \Rightarrow m\ge -1, \quad 2m\le m+3 \Rightarrow m\le 3$$

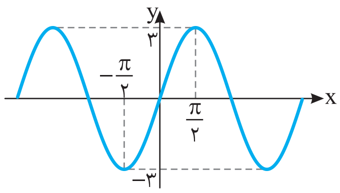
بنابراین $-1\le m\le 3$ و در نتیجه m می‌تواند پنج مقدار صحیح ۳، ۲، ۱، ۰ و ۱− را داشته باشد.

۲۶۲- گزینهٔ ۴ تابعی که هم صعودی است و هم نزولی، تابعی ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین

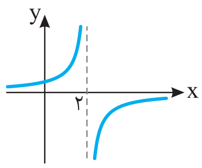
$$f(1)=f(2)=f(3), \quad a-2=3a+6=4a-b, \quad a=-4, \quad b=-10$$

در نتیجه $a+b=-14$.

۲۶۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم و عرض هر نقطهٔ آن را سه برابر کنیم، نمودار تابع $f(x)=3\sin x$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و هر بازهٔ دیگر به‌صورت $[-\frac{\pi}{2},a]$ که $-\frac{\pi}{2}\le a\le\frac{\pi}{2}$ صعودی است. پس حداکثر مقدار a برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

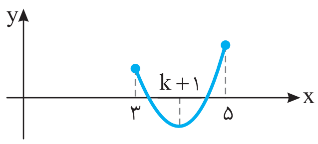


۲۶۴- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{1}{-x}$ را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{-(x-2)}=\frac{1}{-x+2}$ به‌دست بیاید. اکنون از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,2)$ و هر بازهٔ دیگری مانند $(-\infty,a)$ که $a\le 2$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

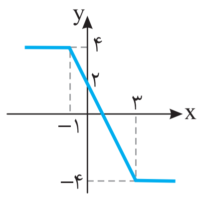


۲۶۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع باید به شکل زیر باشد، یعنی اگر طول رأس سهمی که $x=k+1$ است، در بازهٔ $(3,5)$ باشد، آن‌گاه تابع غیریکنوا می‌شود. پس

$$3<k+1<5 \Rightarrow 2<k<4$$



۲۶۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[-1,3]$ و هر بازه‌ای به صورت $[a,b]$ که $-1\le a<b\le 3$ اکیداً نزولی است. بنابراین، بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=-1$ و $b=3$، که در این صورت $b-a=4$.



۲۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=kx+|x-1|=\begin{cases}(k+1)x-1 & x\ge 1\\(k-1)x+1 & x<1\end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید هر دو خط موجود در ضابطهٔ تابع صعودی باشند، یعنی شیب نامنفی داشته باشند. پس

$$\begin{cases}k+1\ge 0\\k-1\ge 0\end{cases} \Rightarrow k\ge 1$$

۲۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$x>۶\Rightarrow f(x)>f(۶)\Rightarrow f(x)>۰$$

$$x<۶\Rightarrow f(x)<f(۶)\Rightarrow f(x)<۰$$

برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $\frac{۴-x^۲}{f(x)}\ge ۰$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به‌صورت زیر است:

$$x\in(-\infty,-۲]\cup[۲,۶)$$

بنابراین در دامنهٔ تابع g چهار عدد طبیعی قرار دارد.

x	$-\infty$		-۲		۲		۶		$+\infty$
$۴-x^۲$		−	۰	+	۰	−		−	
$f(x)$		−		−		−	۰	+	
$\frac{۴-x^۲}{f(x)}$		+	۰	−	۰	+	ت ن	−	

۲۶۹- گزینهٔ ۲ تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است، پس تابع $y=\sqrt{x}+۱$ نیز صعودی است. همچنین مقادیر تابع $y=\sqrt{x}+۱$ همواره مثبت هستند.

بنابراین تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}$ نزولی است.

۲۷۰- گزینهٔ ۳ تابع‌های $y=x$ و $y=x^۳$ صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها یعنی $y=x^۳+x$ صعودی است. توابع سه گزینهٔ دیگر غیریکنوا هستند.

۲۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا از تساوی $(f^{-۱}og^{-۱})(a)=-۱$ مقدار a را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-۱}(g^{-۱}(a))=-۱\Rightarrow f(-۱)=g^{-۱}(a)$$

$$۴=g^{-۱}(a)\Rightarrow g(۴)=a\Rightarrow a=-۲$$

بنابراین مقدار $f^{-۱}(-۲)$ را می‌خواهیم که با توجه به تساوی $f(۳)=-۲$ نتیجه می‌گیریم $f^{-۱}(-۲)=۳$.

۲۷۲- گزینهٔ ۴ تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-۱}=\{(۲,-۱),(۵,۳),(۳,-۲),(-۱,۵)\}$$

در نتیجه $gof^{-۱}=\{(۲,۴),(۵,۰)\}$.

۲۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $g(۳)=۲$، پس $g^{-۱}(۲)=۳$. بنابراین

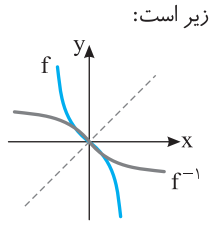
$$f^{-۱}(a)+g^{-۱}(۲)=۶\Rightarrow f^{-۱}(a)+۳=۶$$

$$f^{-۱}(a)=۳\Rightarrow f(۳)=a\Rightarrow a=۲$$

در نتیجه $g(a)=g(۲)=۴$.

۲۷۴- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۹,۱۱)$ عبور می‌کند، نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۱۱,۹)$ عبور می‌کند.

۲۷۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f^{-۱}$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که به شکل زیر است:



۲۷۶- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ همان برد تابع f است. پس برد تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+۱)^۲-۱$$

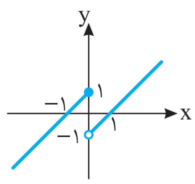
$$-۱\le x\le ۲\Rightarrow ۰\le x+۱\le ۳$$

$$۰\le (x+۱)^۲\le ۹\Rightarrow -۱\le (x+۱)^۲-۱\le ۸\Rightarrow -۱\le f(x)\le ۸$$

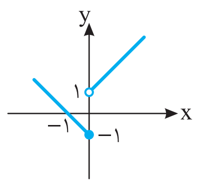
بنابراین $D_{f^{-۱}}=R_f=[-۱,۸]$.

۲۷۷- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

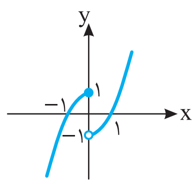
گزینهٔ (۱)



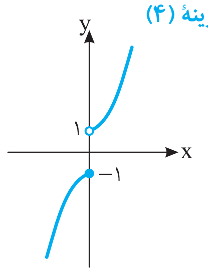
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)



با توجه به نمودارها واضح است که تابع گزینهٔ (۴) وارون‌پذیر است.

۲۷۸- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم نمودار تابع $f^{-۱}$ به‌دست می‌آید. بنابراین باید تابع وارون تابع $f(x)=۳x-۴$ را به‌دست آوریم.

$$y=۳x-۴\Rightarrow y+۴=۳x\Rightarrow x=\frac{y+۴}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ خط جدید $y=\frac{x+۴}{۳}$ است.

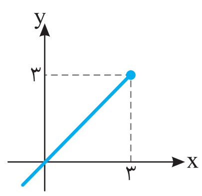
۲۷۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از تساوی $y=\sqrt{x-۱}+۲$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y-۲=\sqrt{x-۱}\Rightarrow (y-۲)^۲=x-۱\Rightarrow x=(y-۲)^۲+۱\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=x^۲-۴x+۵$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۱)=۲$، پس $f^{-۱}(۲)=۱$ که فقط در تابع گزینهٔ (۳) صدق می‌کند.

۲۸۰- گزینهٔ ۲ برای هر $x\in D_f$ تساوی $(f^{-۱}of)(x)=x$ برقرار است. پس تابع g به‌صورت $g(x)=x\,,\,x\le ۳$ است و نمودار آن به شکل روبه‌رو است.



۲۸۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=\{۱,۲,۳,۵\}$ و

$$f^{-۱}=\{(۳,۱),(۴,۲),(۲,۳),(۱,۵)\}\Rightarrow D_{f^{-۱}}=\{۳,۴,۲,۱\}$$

بنابراین

$$D_{f\times f^{-1}}=D_f\cap D_{f^{-1}}=\{۱,۲,۳\}$$

$$(f\times f^{-1})(۱)=f(۱)\times f^{-1}(۱)=۳\times ۵=۱۵$$

$$(f\times f^{-1})(۲)=f(۲)\times f^{-1}(۲)=۴\times ۳=۱۲$$

$$(f\times f^{-1})(۳)=f(۳)\times f^{-1}(۳)=۲\times ۱=۲$$

بنابراین تابع $f\times f^{-1}$ به‌صورت زیر است

$$f\times f^{-1}=\{(۱,۱۵),(۲,۱۲),(۳,۲)\}$$

۲۸۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید $f^{-1}(۳)=a$. پس $f(a)=۳$ و در نتیجه

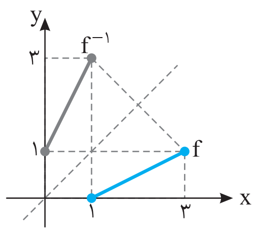
$$\frac{a}{a-۱}=۳\Rightarrow a=۳a-۳\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

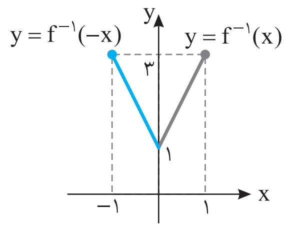
یعنی $f^{-1}(۳)=\frac{۳}{۲}$.

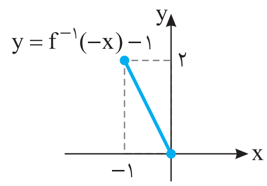
۲۸۳- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۸,۹)$ عبور می‌کند، نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(۹,۸)$ عبور می‌کند:

$$f(۸)=۸+\sqrt[۳]{۸}-۱=۹\Rightarrow f^{-1}(۹)=۸$$

۲۸۴- گزینهٔ ۴ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ به‌دست بیاید. در آخر نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)-۱$ به‌دست بیاید.







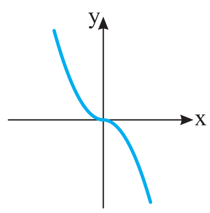
۲۸۵- گزینهٔ ۳ برد تابع f^{-1} برابر دامنهٔ تابع f است. پس دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$۴x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۴-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۴\ ,\quad x-۱\neq ۰\Rightarrow x\neq ۱$$

پس $R_{f^{-1}}=D_f=[۰,۱)\cup(۱,۴]$. بنابراین اعداد صحیح صفر، ۲، ۳ و ۴ در برد تابع f^{-1} قرار دارند.

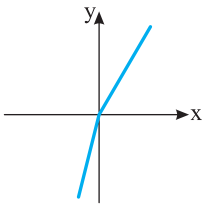
۲۸۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌های چهار گزینه به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱)



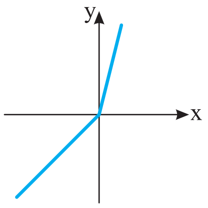
$$f(x)=-x|x|=\begin{cases}x^۲ & x<۰\\ -x^۲ & x\geq ۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۲)



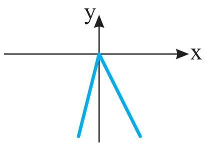
$$f(x)=۳x-|x|=\begin{cases}۴x & x<۰\\ ۲x & x\geq ۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۳)



$$f(x)=۲x+|x|=\begin{cases}x & x<۰\\ ۳x & x\geq ۰\end{cases}$$

گزینهٔ (۴)



$$f(x)=x-۳|x|=\begin{cases}۴x & x<۰\\ -۲x & x\geq ۰\end{cases}$$

با توجه به نمودارها، تابع $f(x)=x-۳|x|$ وارون‌پذیر نیست.

۲۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$y=a-۳x\Rightarrow ۳x=a-y\Rightarrow x=\frac{a-y}{۳}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{a-x}{۳}$$

بنابراین باید معادلهٔ $x^۲=\frac{a-x}{۳}$ فقط یک جواب داشته باشد

$$۳x^۲+x-a=۰\ ,\quad \Delta=۱+۱۲a=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۱۲}$$

۲۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۴x+۲=(x-۲)^۲-۲,\ D_f=[۲,+\infty)$$

بنابراین f تابعی یک‌به‌یک است. توجه کنید که

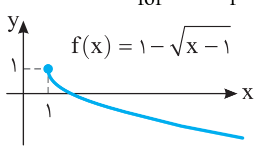
$$y=(x-۲)^۲-۲\Rightarrow(x-۲)^۲=y+۲\Rightarrow|x-۲|=\sqrt{y+۲}$$

$$\xrightarrow{x\geq ۲}x-۲=\sqrt{y+۲}\Rightarrow x=\sqrt{y+۲}+۲$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\sqrt{x+۲}+۲$.

۲۸۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f$.

از طرف دیگر با توجه به نمودار تابع f، $R_f=(-\infty,۱]$، بنابراین دامنهٔ تابع fof^{-1} برابر $(-\infty,۱]$ است.



۲۹۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f^{-1}og)^{-1}(x)=\frac{x-۲}{۲}\Rightarrow(g^{-1}of)(x)=\frac{x-۲}{۲}\Rightarrow g^{-1}(f(x))=\frac{x-۲}{۲}$$

$$g^{-1}(x-۱)=\frac{x-۲}{۲}\xrightarrow{(x\to x+۱)}g^{-1}(x)=\frac{x-۱}{۲}\Rightarrow g(x)=۲x+۱$$

راه‌حل دوم اگر تابع‌های وارون دو طرف تساوی $(f^{-1}og)^{-1}(x)=\frac{x-۲}{۲}$ را پیدا کنیم به‌دست می‌آید

$$(f^{-1}og)(x)=۲x+۲\quad(۱)$$

از طرف دیگر، $f^{-1}(x)=x+۱$، پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f^{-1}(g(x))=۲x+۲\Rightarrow g(x)+۱=۲x+۲\Rightarrow g(x)=۲x+۱$$

۲۹۱- گزینهٔ ۱ ابتدا f^{-1} و g^{-1} را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,-۲),(۱,۴)\}$$

$$g^{-1}=\{(۲,۲),(۱,۳),(-۱,۴),(-۲,۱)\}$$

اکنون $g^{-1}of^{-1}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۲\xrightarrow{f^{-1}}۱\xrightarrow{g^{-1}}۳$$

$$۳\longrightarrow۲\longrightarrow۲$$

$$۴\longrightarrow-۲\longrightarrow۱$$

$۱\longrightarrow۴\longrightarrow$ تعریف نشده

$$g^{-1}of^{-1}=\{(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

توجه کنید که می‌توان ابتدا fog را حساب کرد، سپس با استفاده از تساوی $g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}$ مسئله را حل کرد.

۲۹۲- گزینهٔ ۱ اگر نقطه‌های $(۷,a)$ و $(-۱,b)$ روی نمودار تابع وارون تابع f باشند، نقطه‌های $(a,۷)$ و $(b,-۱)$ روی تابع f هستند. اما از طرف دیگر نمی‌دانیم a و b بزرگ‌تر از یک هستند یا کوچک‌تر از آن. پس با فرض $x<۱$ به‌دست می‌آید:

$$x+۳=۷\Rightarrow x=۴\ (\text{غ.ق.ق}),\quad x+۳=-۱\Rightarrow x=-۴\ (\text{ق.ق})$$

همچنین با فرض $x\geq۱$،

$$۳x+۱=۷\Rightarrow x=۲\ (\text{ق.ق}),\quad ۳x+۱=-۱\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$f(-۴)=-۱\Rightarrow f^{-۱}(-۱)=-۴,\quad f(۲)=۷\Rightarrow f^{-۱}(۷)=۲$$

بنابراین $f^{-۱}(۷)+f^{-۱}(-۱)=۲-۴=-۲$.

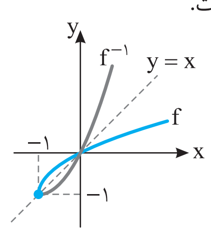
۲۹۳- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(۳,۲)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع f از نقطهٔ $(۲,۳)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(۲)=۳\Rightarrow ۸+۲+a=۳\Rightarrow a=-۷$$

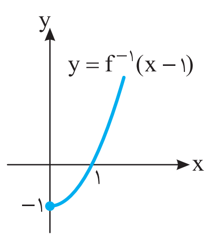
در نتیجه

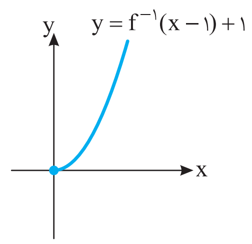
$$f(x)=x^۳+x-۷\Rightarrow f(۳)=۲۷+۳-۷=۲۳$$

۲۹۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به خط $y=x$ است.



اگر نمودار $y=f^{-۱}(x)$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x-۱)+۱$ رسم می‌شود.





۲۹۵- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطهٔ $(۱,۲)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(۱,۲)\in f\Rightarrow f(۱)=۲\Rightarrow\sqrt{a+b}=۲$$

$$(۱,۲)\in f^{-1}\Rightarrow(۲,۱)\in f\Rightarrow f(۲)=۱\Rightarrow\sqrt{۲a+b}=۱$$

در نتیجه

$$\begin{cases}a+b=۴\\ ۲a+b=۱\end{cases}\Rightarrow a=-۳,\ b=۷$$

بنابراین $ab=-۲۱$.

۲۹۶- گزینهٔ ۲ چون f تابعی خطی است، فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$.

در این صورت

$$f(۱)=۳\Rightarrow a+b=۳\quad(۱)$$

$$f^{-۱}(۱۱)=۳\Rightarrow f(۳)=۱۱\Rightarrow ۳a+b=۱۱\quad(۲)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دست می‌آید $a=۴$ و $b=-۱$.

بنابراین $f(x)=۴x-۱$ و در نتیجه $f(-۳)=-۱۳$.

۲۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم که وارون تابع $f^{-1}(x)$ است:

$$y=۲x+k\Rightarrow ۲x=y-k\Rightarrow x=\frac{y-k}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{x-k}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ $x^۲=\frac{x-k}{۲}$ نباید جواب داشته باشد

$$۲x^۲=x-k\Rightarrow ۲x^۲-x+k=۰,\quad \Delta<۰\Rightarrow ۱-۸k<۰\Rightarrow k>\frac{۱}{۸}$$

۲۹۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x+۱)^۳-۱$. بنابراین تابع f یک‌به‌یک است. از طرف دیگر،

$$y=(x+۱)^۳-۱\Rightarrow(x+۱)^۳=y+۱\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{y+۱}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y+۱}-۱$$

در نتیجه $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$.

۲۹۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f^{-۱}(x)=\frac{x+a}{x-۲}$. بنابراین $f^{-۱}(۳)=\frac{۳+a}{۳-۲}=a+۳$. پس

$$(f^{-۱}of^{-۱})(۳)=\frac{۹}{۴}\Rightarrow f^{-۱}(f^{-۱}(۳))=\frac{۹}{۴}$$

$$f^{-۱}(a+۳)=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{(a+۳)+a}{a+۳-۲}=\frac{۹}{۴}$$

$$\frac{۲a+۳}{a+۱}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow ۸a+۱۲=۹a+۹\Rightarrow a=۳$$

۳۰۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_{f^{-۱}of}=D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$.

۳۰۱- گزینهٔ ۲ ابتدا به تابع‌های f^{-1} و g^{-1} توجه کنید:

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,-۱),(-۲,۲),(۱,۴)\}$$

$$g^{-۱}=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۲),(۱,۱)\}$$

$$D_{f^{-۱}-g^{-۱}}=D_{f^{-۱}}\cap D_{g^{-۱}}=\{۲,۳,-۲,۱\}\cap\{۲,۳,۴,۱\}=\{۲,۳,۱\}$$

اکنون می‌توانیم تابع $f^{-1}-g^{-1}$ را به‌دست آوریم:

$$f^{-۱}-g^{-۱}=\{(۲,۱-۳),(۳,-۱-۴),(۱,۴-۱)\}$$

$$=\{(۲,-۲),(۳,-۵),(۱,۳)\}$$

مجموع عضوهای دامنه و برد تابع $f^{-1}-g^{-1}$ برابر است با

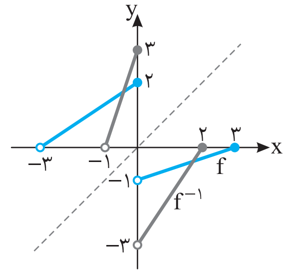
$$۲+(-۲)+۳+(-۵)+۱+۳=۲$$

۳۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۹)=\sqrt[۳]{۹-۱}+۲=۲+۲=۴$. پس $f^{-۱}(۴)=۹$ و در نتیجه $f(۹)+f^{-۱}(۴)=۱۳$.

۳۰۳- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۸,۱۳)$ عبور می‌کند، نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۱۳,۸)$ می‌گذرد:

$$f(۸)=۲\times۸+\sqrt[۳]{۸}-۵=۱۳\Rightarrow f^{-۱}(۱۳)=۸$$

۳۰۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f^{-۱}$ رسم شود. بنابر شکل زیر، نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ در دو نقطه متقاطع‌اند.



۳۰۵- گزینهٔ ۳ چون $(۱,۲)$ نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ است، پس $(۱,۲)\in f$ و $(۱,۲)\in f^{-۱}$، یعنی $(۲,۱)\in f$. بنابراین

$$\begin{cases} f(۱)=۲\Rightarrow a\sqrt{b-۳}=۲\\ f(۲)=۱\Rightarrow a\sqrt{b-۶}=۱\end{cases}\Rightarrow \sqrt{b-۳}=۲\sqrt{b-۶}\Rightarrow b-۳=۴b-۲۴\Rightarrow b=۷$$

پس $a=۱$ و در نتیجه $a+b=۸$.

۳۰۶- گزینهٔ ۳ در تساوی $f(۲x-۱)=g(۳x)-۱$ قرار می‌دهیم $x=۲$:

$$f(۳)=g(۶)-۱\Rightarrow g(۶)=f(۳)+۱$$

از طرف دیگر، $f^{-۱}(۲)=۳$ پس $f(۳)=۲$. در نتیجه $g(۶)=۲+۱=۳$.

۳۰۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $y=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱$ می‌نویسیم. حالا x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y+۱=(\sqrt{x}+۱)^۲\Rightarrow\sqrt{y+۱}=\sqrt{x}+۱$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{y+۱}-۱\Rightarrow x=(\sqrt{y+۱}-۱)^۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲=x+۱+۱-۲\sqrt{x+۱}=x+۲-۲\sqrt{x+۱}$.

راه‌حل دوم $f(۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۱$

در بین گزینه‌های داده شده فقط اگر در عبارت داده شده در گزینهٔ (۲)، به جای x قرار دهیم ۳، حاصل ۱ می‌شود.

۳۰۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} x\ge۱\Rightarrow f(x)=x+۲-x+۱-۲x=-۲x+۳\\ -۲\le x\le۱\Rightarrow f(x)=x+۲+x-۱-۲x=۱\\ x\le-۲\Rightarrow f(x)=-x-۲+x-۱-۲x=-۲x-۳\end{cases}$$

بنابراین تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}-[-۲,۱]$ وارون‌پذیر است. توجه کنید که تابع f روی $\mathbb{R}-[a,b]$ که در آن $a\le-۲$ و $b\ge۱$ هم وارون‌پذیر است ولی برای اینکه $b-a$ کمترین مقدار باشد دامنه را $\mathbb{R}-[-۲,۱]$ در نظر می‌گیریم.

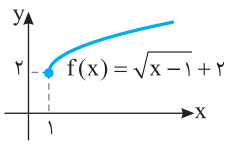
$$x>۱\Rightarrow y=-۲x+۳\Rightarrow x=\frac{۳-y}{۲}\Rightarrow\begin{cases}f^{-۱}(x)=\frac{۳-x}{۲}\\ \frac{۳-y}{۲}>۱\Rightarrow y<۱\end{cases}$$

$$x<-۲\Rightarrow y=-۲x-۳\Rightarrow x=\frac{-y-۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases}f^{-۱}(x)=\frac{-x-۳}{۲}\\ \frac{-y-۳}{۲}<-۲\Rightarrow y>۱\end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{۳-x}{۲} & x<۱\\ \frac{-x-۳}{۲} & x>۱\end{cases}$.

۳۰۹- گزینهٔ ۲ برای هر $x\in R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. با توجه به نمودار تابع f، $R_f=[۲,+\infty)$. پس برای هر $x\ge۲$، $g(x)=x+۳$. بنابراین

$$x\ge۲\Rightarrow x+۳\ge۵\Rightarrow g(x)\ge۵\Rightarrow R_g=[۵,+\infty)$$



۳۱۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع وارون تابع‌های f و g را پیدا می‌کنیم که به‌صورت زیر هستند:

$$f^{-۱}(x)=(x-۱)^۳+۲,\quad g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}+۱$$

بنابراین $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=f^{-۱}(g^{-۱}(x))=f^{-۱}(\sqrt[۳]{x}+۱)$

$$=(\sqrt[۳]{x}+۱-۱)^۳+۲=x+۲$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=(gof)^{-۱}(x)$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(۱+\sqrt[۳]{x-۲})=(۱+\sqrt[۳]{x-۲}-۱)^۳=x-۲$$

و $(gof)^{-۱}(x)=x+۲$. بنابراین $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=x+۲$.

۳۱۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(fog^{-۱})(a)=a$. بنابراین $f(g^{-۱}(a))=a$. چون $f(c)=a$، پس $g^{-۱}(a)=c$ و در نتیجه $g(c)=a$. به همین ترتیب

$$(fog^{-۱})(b)=c\Rightarrow f(g^{-۱}(b))=c\xrightarrow{f(b)=c}$$

$$g^{-۱}(b)=b\Rightarrow g(b)=b$$

$$(fog^{-۱})(c)=d\Rightarrow f(g^{-۱}(c))=d\xrightarrow{f(d)=d}$$

$$g^{-۱}(c)=d\Rightarrow g(d)=c$$

$$(fog^{-۱})(d)=b\Rightarrow f(g^{-۱}(d))=b\xrightarrow{f(a)=b}$$

$$g^{-۱}(d)=a\Rightarrow g(a)=d$$

پس $g=\{(a,d),(b,b),(c,a),(d,c)\}$.

۳۱۲- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۱)=a$، در این صورت

$$f(a)=۱\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{a+۲}+۲}=۱\Rightarrow a+\sqrt{a+۲}+۲=۱$$

$$\sqrt{a+۲}=-a-۱\quad(*)\Rightarrow a+۲=a^۲+۲a+۱$$

$$a^۲+a-۱=۰\Rightarrow a=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲},\ a=\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

از تساوی $(*)$ واضح است که $-a-۱\ge۰$، پس $a\le-۱$. بنابراین $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول نیست.

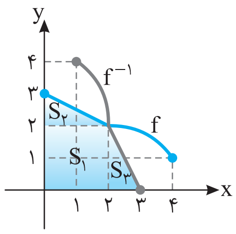
۳۱۳- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم طول نقطهٔ برخورد a باشد. در این صورت عرض آن $a+1$ است. پس نقطهٔ $(a,a+1)$ روی نمودار تابع f^{-1} است. در نتیجه نقطهٔ $(a+1,a)$ روی نمودار تابع f است. پس

$$f(a+1)=a\Rightarrow (a+1)^3+2(a+1)+9=a$$

$$a^3+3a^2+4a+12=0\Rightarrow (a+3)(a^2+4)=0\Rightarrow a=-3$$

پس عرض نقطهٔ برخورد $a+1=-2$ است.

۳۱۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f^{-1} قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که در شکل رسم شده است. بنابراین مساحت قسمت رنگی مورد نظر است که از دو مثلث و یک مربع تشکیل شده است:



$$S=S_1+S_2+S_3\Rightarrow S=2\times2+\frac{1\times2}{2}+\frac{1\times2}{2}=6$$

۳۱۵- گزینهٔ ۲ اگر (m,n) نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} باشد، نتیجه می‌شود $f(n)=m$ و $f(m)=n$. بنابراین

$$f(-1)=\frac{1}{3}\Rightarrow 1-a+b=\frac{1}{3},\quad f(\frac{1}{3})=-1\Rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{a}{3}+b=-1$$

در نتیجه

$$\begin{cases}-a+b=-\frac{2}{3}\\ a+3b=-\frac{26}{9}\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{2}{9}\ ,\ b=-\frac{8}{9}$$

پس $a+b=-\frac{10}{9}$.

۳۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(g^{-1}of)(-1)=g^{-1}(f(-1))=g^{-1}(3)$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(3)=s$. در این صورت $g(s)=3$ و اگر در تساوی $g(x)=1-f(x+1)$ قرار دهیم $x=s$، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}g(s)=1-f(s+1)\\ g(s)=3\end{cases}\Rightarrow f(s+1)=-2$$

بنابراین، چون تابع f یک‌به‌یک است، $s+1=4$، پس $s=3$. یعنی $g^{-1}(3)=3$.

۳۱۷- گزینهٔ ۳ از تساوی $y=\frac{2x+a}{x+b}$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$yx+by=2x+a\Rightarrow (y-2)x=a-by\Rightarrow x=\frac{a-by}{y-2}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{a-bx}{x-2}$ و در نتیجه $a=-4$، $b=-3$ و $ab=12$.

۳۱۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}3x+(-(x-1)) & x<1\\ 3x+(x-1) & x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}2x+1 & x<1\\ 4x-1 & x\ge 1\end{cases}$$

فرض کنید برای $x<1$، $g(x)=2x+1$ و برای $x\ge1$، $h(x)=4x-1$. بنابراین

$$x<1\Rightarrow 2x+1<3\Rightarrow g(x)<3,\quad g(x)=2x+1\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

$$x\ge1\Rightarrow 4x-1\ge3\Rightarrow h(x)\ge3,\quad h(x)=4x-1\Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{x+1}{4}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & x<3\\ \frac{x+1}{4} & x\ge3\end{cases}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0)=1$ و $f(2)=7$، پس $f^{-1}(1)=0$ و $f^{-1}(7)=2$. این شرایط فقط در تابع گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۳۱۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون f و f^{-1} تابع‌هایی برابرند، پس دامنهٔ آن‌ها برابر است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(a+1)x+4}{3x-1}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3x-(a+1)}\Rightarrow D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{\frac{a+1}{3}\}$$

بنابراین $\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}=\mathbb{R}-\{\frac{a+1}{3}\}$. پس $\frac{a+1}{3}=\frac{1}{3}$، در نتیجه $a=0$.

توجه کنید که اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3x-1}$.

راه‌حل دوم در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $f=f^{-1}$، آن‌گاه $a=-d$. بنابراین در اینجا $a+1=-(-1)$، در نتیجه $a=0$.

۳۲۰- گزینهٔ ۳ برای هر $x\in D_{f^{-1}}=R_f$ تساوی $(fof^{-1})(x)=x$ برقرار است. برد تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x-1}\ge0\Rightarrow \sqrt{x-1}+2\ge2\Rightarrow f(x)\ge2\Rightarrow R_f=[2,+\infty)$$

پس برای هر $x\ge2$، $g(x)=2x$. بنابراین

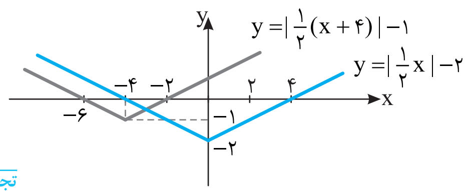
$$x\ge2\Rightarrow 2x\ge4\Rightarrow g(x)\ge4\Rightarrow R_g=[4,+\infty)$$

۳۲۱- گزینهٔ ۲ نمودار اولیه و نمودار انتقال یافته را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقطهٔ برخورد نمودارها جواب معادلهٔ زیر است:

$$|\frac{1}{2}(x+4)|-1=|\frac{1}{2}x|-2 \qquad (1)$$

توجه کنید که x منفی و $x+4$ مثبت است. بنابراین معادلهٔ (۱) می‌شود

$$\frac{1}{2}(x+4)-1=-\frac{1}{2}x-2\Rightarrow x=-3$$



تجربی - ۹۳

۳۲۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $(gof)(a)=g(f(a))=g(a+\sqrt{a})$.

از طرف دیگر $g(6)=5$، پس $a+\sqrt{a}=6\Rightarrow a=4$

تجربی - ۹۱

۳۲۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{2x-1}{x+1})=\frac{2(\frac{2x-1}{x+1})+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}}=\frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}}=2x$$

تجربی - ۹۶

۳۲۴- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$g(f(x))=g(۲x+۳)=۸x^{۲}+۲۲x+۲۰$$

فرض می‌کنیم $۲x+۳=t$. در این صورت $x=\frac{t-۳}{۲}$ و

$$g(t)=۸(\frac{t-۳}{۲})^{۲}+۲۲(\frac{t-۳}{۲})+۲۰$$
$$=۲t^{۲}-۱۲t+۱۸+۱۱t-۳۳+۲۰=۲t^{۲}-t+۵$$

بنابراین $g(x)=۲x^{۲}-x+۵$ و

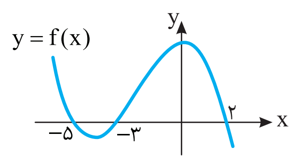
$$(fog)(x)=f(g(x))=۲g(x)+۳=۲(۲x^{۲}-x+۵)+۳=۴x^{۲}-۲x+۱۳$$

ریاضی - ۹۲

۳۲۵- گزینهٔ ۴ برای اینکه از نمودار $y=f(x-۲)$ به نمودار $y=f(x)$ برسیم، کافی است آن را مطابق شکل زیر دو واحد به چپ منتقل کنیم. برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$، عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

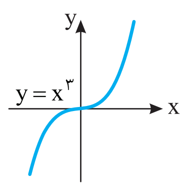
x	$-\infty$		-۵		-۳		۰		۲		$+\infty$
f(x)		+	۰	−	۰	+		+	۰	−	
x		−		−		−	۰	+		+	
xf(x)		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−	

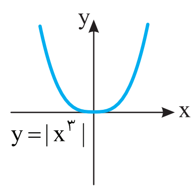
بنابراین $D_g=[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$.



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۳۲۶- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با توجه به نمودار تابع $y=|x^{۳}|$ معلوم می‌شود که این تابع یک‌به‌یک نیست، بنابراین وارون‌ناپذیر است.





راه‌حل دوم سه نقطهٔ $(۱,۱)$، $(-۱,۱)$ و $(۰,۰)$ روی نمودار این تابع هستند، پس این تابع صعودی، نزولی، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۳۲۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(f^{-۱}og)(a)=f^{-۱}(g(a))=۶$. بنابراین $g(a)=f(۶)=۱۲-۵=۷$. باتوجه به اینکه $g(۴)=۷$ نتیجه می‌شود

$$a=۴$$

ریاضی - ۹۳

۳۲۸- گزینهٔ ۳ اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$y=-\sqrt{-x}\Rightarrow -x=y^{۲}\Rightarrow x=-y^{۲}\xrightarrow{y<۰}x=y|y|$$

و اگر $x\geq۰$، آن‌گاه

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^{۲}\xrightarrow{y\geq۰}x=y|y|$$

بنابراین در هر حالتی $x=y|y|$ و ضابطهٔ تابع وارون تابع f به‌صورت $f^{-۱}(x)=x|x|$ است.

تجربی - ۹۶

۳۲۹- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$y=\frac{x+۴}{x-۲}\Rightarrow xy-۲y=x+۴\Rightarrow x(y-۱)=۲y+۴\Rightarrow x=\frac{۲y+۴}{y-۱}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۴}{x-۱}$. اکنون با حل معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$ نقطه‌های برخورد دو تابع را می‌یابیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱}\Rightarrow x^{۲}+۳x-۴=۲x^{۲}-۸$$
$$x^{۲}-۳x-۴=۰\Rightarrow(x+۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x=-۱,x=۴$$

راه‌حل دوم کافی است طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع f و خط $y=x$ را بیابیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=x\Rightarrow x^{۲}-۲x=x+۴\Rightarrow x^{۲}-۳x-۴=۰\Rightarrow x=-۱,x=۴$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۳۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$ax+by=۸\Rightarrow y=\frac{۸-ax}{b},\quad ۲x-۳y=b\Rightarrow y=\frac{۲x-b}{۳}$$

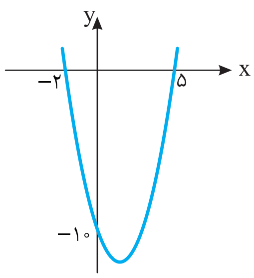
چون خط‌های داده شده نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم قرینهٔ یکدیگر هستند، پس تابع‌های $y=\frac{۸-ax}{b}$ و $y=\frac{۲x-b}{۳}$ وارون یکدیگرند. از طرف دیگر، وارون تابع $y=\frac{۲x-b}{۳}$ می‌شود $y=\frac{۳x+b}{۲}$. بنابراین $\frac{۸}{b}=\frac{b}{۲}$ و $\frac{-a}{b}=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه $b^{۲}=۱۶$، یعنی $b=\pm۴$. در نتیجه

$$b=-۴\Rightarrow\frac{-a}{-۴}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=۶\Rightarrow a+b=۲$$
$$b=۴\Rightarrow\frac{-a}{۴}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=-۶\Rightarrow a+b=-۲$$

بنابراین $a+b=\pm۲$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۳۳۱- گزینهٔ ۳ طول نقاط تلاقی نمودار تابع مورد نظر با محور x جواب‌های معادلهٔ $x^{۲}-۳x-۱۰=۰$ هستند. جواب‌های این معادله $x=-۲$ و $x=۵$ هستند. بنابراین نمودار تابع مورد نظر به‌صورت مقابل است. از روی این شکل معلوم است که باید نمودار تابع را حداقل دو واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد.



خارج از کشور تجربی - ۹۳

۳۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دقت کنید که

$$f(۲x-۳)=۲x-۳-[۲x-۳]=۲x-۳-[۲x]+۳=۲x-[۲x]$$

پس $g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)=۲x-[۲x]-۲x+۲[x]=۲[x]-[۲x]$.

اکنون فرض می‌کنیم k عدد صحیح دلخواهی باشد. در این صورت اگر $k\leq x<k+\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه $[x]=k$ و

$$۲k\leq۲x<۲k+۱\Rightarrow[۲x]=۲k$$

بنابراین $g(x)=۲k-۲k=۰$. اگر $k+\frac{۱}{۲}\leq x<k+۱$، آن‌گاه $[x]=k$ و

$$۲k+۱\leq۲x<۲k+۲\Rightarrow[۲x]=۲k+۱$$

بنابراین $g(x)=۲k-۲k-۱=-۱$. در نتیجه $R_g=\{-۱,۰\}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۳۳- گزینهٔ ۲ ابتدا $(fog)(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+۲)=(۲x+۴-۳)^۲=(۲x+۱)^۲$$

اکنون معادلهٔ $(fog)(x)=f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$(۲x+۱)^۲=(۲x-۳)^۲\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۴x^۲-۱۲x+۹$$

$$۱۶x=۸\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

تجربی - ۹۲

۳۳۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{۲x+۳}{۲-x})=\frac{۱-۳(\frac{۲x+۳}{۲-x})}{\frac{۲x+۳}{۲-x}+۲}$$

$$=\frac{\frac{۲-x-۶x-۹}{۲-x}}{\frac{۲x+۳+۴-۲x}{۲-x}}=\frac{-۷x-۷}{۷}=-x-۱$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}$.

از طرف دیگر، $D_f=\mathbb{R}-\{\pm۱\}$ و $D_g=[۰,۱]$. در نتیجه

$$D_{gof}=\{x|x\neq\pm۱,\ ۰\le\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\le ۱\}$$

$$\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\le ۱\Rightarrow\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}-۱=\frac{۱+x^۲-۱+x^۲}{۱-x^۲}\le ۰$$

$$\frac{۲x^۲}{۱-x^۲}\le ۰\Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x=۰ \text{ یا } x>۱$$

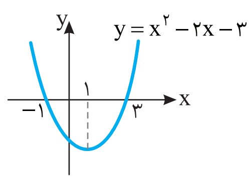
$$\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\ge ۰\Rightarrow ۱-x^۲>۰\Rightarrow -۱<x<۱$$

از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده دامنهٔ تابع gof به‌دست می‌آید، بنابراین

$$D_{gof}=\{۰\}$$

ریاضی - ۹۶

۳۳۶- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع از نامساوی $-۲<x-۱<۲$ به‌دست می‌آید، پس $D_f=(-۱,۳)$. با توجه به نمودار تابع $y=x^۲-۲x-۳$، در بازهٔ $(-۱,۳)$ مقدار تابع f همواره منفی است و این تابع نه صعودی است و نه نزولی.



ریاضی - ۹۱

۳۳۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از تساوی $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ نتیجه می‌شود

$$g^{-۱}(f^{-۱}(a))=۸\Rightarrow g(۸)=f^{-۱}(a)$$

بنابراین

$$\sqrt{۵\times۸+۹}=f^{-۱}(a)\Rightarrow f^{-۱}(a)=۷$$

پس $a=f(۷)$، یعنی $a=۳$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $(g^{-۱}of^{-۱})(x)=(fog)^{-۱}(x)$. چون $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$، بنابراین $(fog)^{-۱}(a)=۸$. یعنی $(fog)(۸)=a$. در نتیجه

$$f(g(۸))=a\Rightarrow f(۷)=a\Rightarrow a=۳$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۳۸- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases}۴x-۴ & x\le ۲\\ ۴ & x>۲\end{cases}$$

می‌نویسیم. تابع f در بازهٔ $(-\infty,۲]$ وارون‌پذیر است. فرض می‌کنیم $y=۴x-۴$، در این صورت $x=\frac{y+۴}{۴}$. از طرف دیگر،

$$x\le۲\Rightarrow ۴x-۴\le۴\Rightarrow y\le ۴$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱,\ x\le۴$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۳۹- گزینهٔ ۱ ابتدا برای $۰<x<۱$ ضابطهٔ تابع وارون تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}=\frac{x}{x}\sqrt{۱-x^۲}=\sqrt{۱-x^۲}$$

$$y^۲=۱-x^۲\Rightarrow x^۲=۱-y^۲\Rightarrow x=\sqrt{۱-y^۲}$$

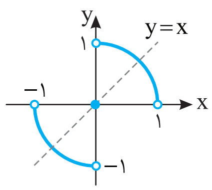
$$f^{-۱}(x)=\sqrt{۱-x^۲}=f(x)$$

به همین ترتیب برای $-۱<x<۰$:

$$y=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}=\frac{-x}{x}\sqrt{۱-x^۲}=-\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow y^۲=۱-x^۲$$

$$x^۲=۱-y^۲\Rightarrow x=-\sqrt{۱-y^۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{۱-x^۲}=f(x)$$

همچنین $f(۰)=۰$، در نتیجه $f^{-۱}(۰)=۰$. پس در هر صورت می‌توان نوشت $f^{-۱}(x)=f(x)$. توجه کنید که نمودار تابع به شکل مقابل است که از دو ربع دایره و یک نقطه تشکیل شده و نسبت به خط $y=x$ متقارن است، بنابراین وارون آن با خودش برابر است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۳۴۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(x+۱)^۲\Rightarrow x+۱=\sqrt{y}\Rightarrow x=\sqrt{y}-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x}-۱$$

اکنون محل برخورد نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

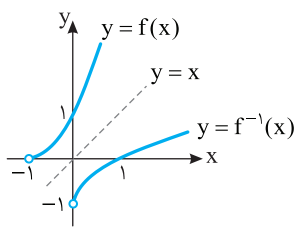
$$f(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow(x+۱)^۲+۱=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{x\ge۰}(x+۱)^۴+۲(x+۱)^۲+۱=x$$

$$(x+۱)^۴+۲x^۲+۳x+۳=۰$$

معادلهٔ بالا با توجه به اینکه مجموع چند مقدار نامنفی است، جواب ندارد.

راه‌حل دوم نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y=x$، نمودار $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. واضح است که دو نمودار نقطهٔ برخوردی ندارند.



ریاضی - ۹۲

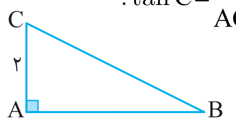
۳۴۱- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل زیر،

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{۲}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BC=۶$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس

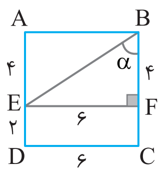
$$BC^{۲}=AC^{۲}+AB^{۲}\Rightarrow ۶^{۲}=۲^{۲}+AB^{۲}\Rightarrow AB^{۲}=۳۲$$

یعنی $AB=۴\sqrt{۲}$. بنابراین $\tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$.



۳۴۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که طول ضلع مربع ABCD برابر ۶ است. مطابق شکل زیر، پاره‌خط EF را موازی DC رسم می‌کنیم. در این صورت، $EF=DC=۶$ و $BF=AE=۴$. در نتیجه،

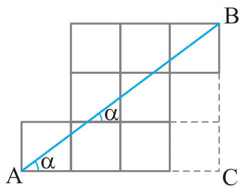
$$\triangle BFE:\ \tan\alpha=\frac{EF}{BF}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$



۳۴۳- گزینهٔ ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=B\hat{A}C$ ، در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan B\hat{A}C=\frac{BC}{AC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{۴}{۳}$$

پس $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۳}=\frac{۲۵}{۱۲}$.



۳۴۴- گزینهٔ ۱ مطابق شکل داده شده، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، چون $C\hat{A}B=۴۵^\circ$ پس این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD ، $B\hat{A}D=۶۰^\circ$. پس

$$\tan ۶۰^\circ=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{x+y}{y}=\frac{x}{y}+۱\Rightarrow\frac{x}{y}=\sqrt{۳}-۱$$

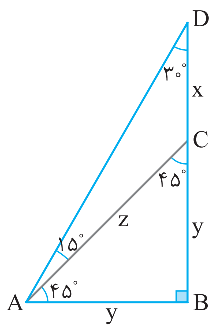
اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC ،

$$AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}$$

$$z^{۲}=y^{۲}+y^{۲}\Rightarrow z=y\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$\frac{DC}{AC}=\frac{x}{\sqrt{۲}y}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$$



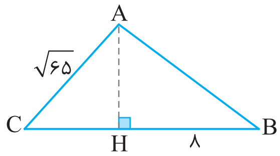
۳۴۵- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB ، در مورد زاویهٔ B می‌دانیم

$$\tan\hat{B}=\frac{AH}{HB}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{AH}{۸}\Rightarrow AH=۶$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع CH را حساب کنیم:

$$AC^{۲}=CH^{۲}+AH^{۲}$$

$$۶۵=CH^{۲}+۳۶\Rightarrow CH=\sqrt{۲۹}$$



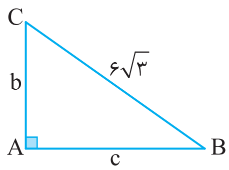
۳۴۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل $\cot\hat{B}=\frac{c}{b}=\sqrt{۲}$. بنابراین $c=b\sqrt{۲}$. از طرف دیگر طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$b^{۲}+c^{۲}=(۶\sqrt{۳})^{۲}\Rightarrow b^{۲}+(b\sqrt{۲})^{۲}=(۶\sqrt{۳})^{۲}$$

$$b^{۲}+۲b^{۲}=۳۶\times۳\Rightarrow b^{۲}=۳۶\Rightarrow b=۶$$

بنابراین $c=۶\sqrt{۲}$ و در نتیجه

$$S=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}\times۶\times۶\sqrt{۲}=۱۸\sqrt{۲}$$



۳۴۷- گزینهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC، $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$. همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH، $H\hat{O}C+\hat{C}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{B}=H\hat{O}C=\alpha$.

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،

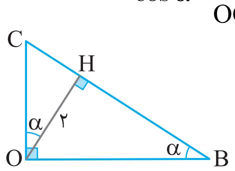
$$\sin\alpha=\sin\hat{B}=\frac{OH}{OB}=\frac{۲}{OB}\Rightarrow OB=\frac{۲}{\sin\alpha}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH،

$$\cos\alpha=\frac{OH}{OC}=\frac{۲}{OC}\Rightarrow OC=\frac{۲}{\cos\alpha}$$

بنابراین

$$OB+OC=\frac{۲}{\sin\alpha}+\frac{۲}{\cos\alpha}$$



۳۴۸- گزینهٔ ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، $\sin\alpha=\frac{y}{۴}$. بنابراین باید مقدار y را به‌دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH ، $x^{۲}+y^{۲}=۹$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ،

$$y^{۲}+(۶-x)^{۲}=۱۶\Rightarrow y^{۲}+x^{۲}-۱۲x+۳۶=۱۶$$

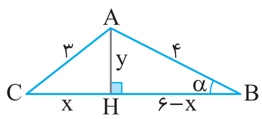
با جای‌گذاری $x^{۲}+y^{۲}=۹$ به‌دست می‌آید

$$۹-۱۲x+۳۶=۱۶\Rightarrow ۱۲x=۲۹\Rightarrow x=\frac{۲۹}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{x^{۲}+y^{۲}=۹}\left(\frac{۲۹}{۱۲}\right)^{۲}+y^{۲}=۹\Rightarrow y^{۲}=\frac{۴۵۵}{۱۴۴}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۱۲}$$

و در نتیجه

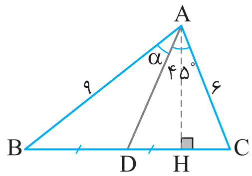
$$\sin\alpha=\frac{\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۱۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۴۸}$$



۳۴۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که چون مثلث‌های ABD و ACD در ارتفاع وارد از رأس A مشترک‌اند، پس $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{1}{2}AH\times BD}{\frac{1}{2}AH\times CD}=\frac{BD}{CD}=1$. بنابراین

$$S_{ABD}=S_{ACD}\Rightarrow\frac{1}{2}AB\times AD\times\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\times AD\times\sin45^\circ$$

$$AB\times\sin\alpha=AC\times\sin45^\circ\Rightarrow9\times\sin\alpha=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

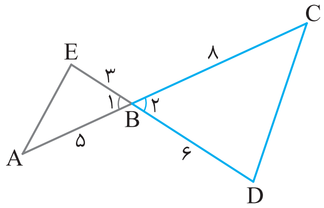


۳۵۰- گزینهٔ ۱ دقت کنید که در شکل زیر $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ ، از طرف دیگر،

$$S_{ABE}=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin\hat{B}_1\ ,\quad S_{BCD}=\frac{1}{2}\times6\times8\times\sin\hat{B}_2$$

بنابراین

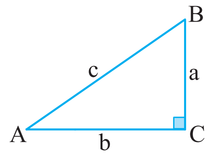
$$\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}=\frac{5}{16}$$



۳۵۱- گزینهٔ ۲ مطابق شکل،

$$\sin\hat{B}=\frac{b}{c}=\frac{4}{5}\Rightarrow c=\frac{5}{4}b$$

از طرف دیگر $b+c=7$. بنابراین



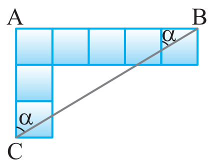
$$b+\frac{5}{4}b=7\Rightarrow\frac{9b}{4}=7\Rightarrow b=\frac{28}{9}\ ,\ c=\frac{5}{4}\times\frac{28}{9}=\frac{35}{9}$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow(\frac{35}{9})^2=a^2+(\frac{28}{9})^2$$

$$a^2=\frac{35^2-28^2}{9^2}=\frac{(35-28)(35+28)}{9^2}=\frac{7\times63}{9^2}=\frac{7\times7}{9}=\frac{49}{9}\Rightarrow a=\frac{7}{3}$$

۳۵۲- گزینهٔ ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat{C}B$. در نتیجه



$$\tan\alpha=\tan A\hat{C}B=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}$$

۳۵۳- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ،

$$\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin45^\circ=\frac{AH}{\sqrt{6}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AH}{\sqrt{6}}\Rightarrow AH=\sqrt{3}$$

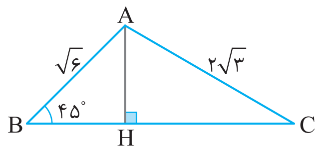
از طرف دیگر چون $\tan\hat{B}=\tan45^\circ=\frac{AH}{BH}$ ، پس $\frac{\sqrt{3}}{BH}=1$ ، بنابراین $BH=\sqrt{3}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC ، طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$AH^2+HC^2=AC^2$$

$$(\sqrt{3})^2+HC^2=(2\sqrt{3})^2$$

$$HC^2=9\Rightarrow HC=3$$

بنابراین $\frac{HC}{BH}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

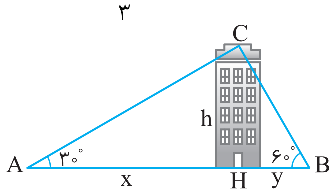


۳۵۴- گزینهٔ ۲ ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH ،

$$\tan30^\circ=\frac{h}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\sqrt{3}h\ ,\quad \tan60^\circ=\frac{h}{y}=\sqrt{3}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}h$$

بنابراین $x+y=\frac{4\sqrt{3}}{3}h$. از طرف دیگر $x+y=24$ ، بنابراین

$$24=\frac{4\sqrt{3}}{3}h\Rightarrow h=6\sqrt{3}$$

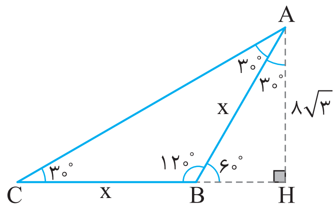


۳۵۵- گزینهٔ ۲ ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ،

$$\tan60^\circ=\frac{AH}{BH}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{BH}\Rightarrow BH=8$$

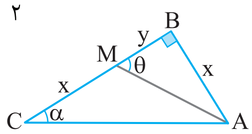
از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ،

$$\sin A\hat{B}H=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin60^\circ=\frac{8\sqrt{3}}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{x}\Rightarrow x=16$$



۳۵۶- گزینهٔ ۱ فرض کنید $CM=AB=x$ و $MB=y$. طبق فرض $\tan\theta=3\tan\alpha$ ، بنابراین $\frac{x}{y}=\frac{3x}{x+y}$. پس $x+y=3y$ ، در نتیجه $x=2y$. از این‌رو $\tan\alpha=\frac{2}{3}$ و $\tan\theta=2$. بنابراین $\cot\alpha=\frac{3}{2}$ و $\cot\theta=\frac{1}{2}$ و در نتیجه

$$\cot\alpha+\cot\theta=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$



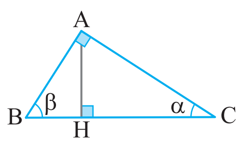
۳۵۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH،

$$\begin{cases}\cos\beta=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=\cos\beta\times AB\\ \cos\alpha=\frac{CH}{AC}\Rightarrow CH=\cos\alpha\times AC\end{cases}\Rightarrow\frac{BH}{HC}=\frac{AB\cos\beta}{AC\cos\alpha}$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ،

$$\cos\beta=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{4}\ ,\quad \cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{4}$$

بنابراین $\frac{BH}{HC}=(\frac{AB}{AC})^2=\tan^2\alpha$.



راه‌حل دوم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{۴}\Rightarrow AB=۴\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{۴}\Rightarrow AC=۴\cos\alpha$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC،

$$\cos\alpha=\frac{HC}{AC}\Rightarrow HC=AC\cos\alpha=۴\cos^۲\alpha$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

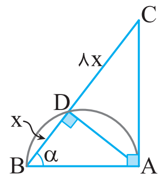
$$\cos\beta=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=AB\cos\beta=۴\sin\alpha\cos\beta$$

چون α و β متمم هستند، پس $\cos\beta=\sin\alpha$ و در نتیجه $BH=۴\sin^۲\alpha$. بنابراین $\frac{BH}{HC}=\frac{۴\sin^۲\alpha}{۴\cos^۲\alpha}=\tan^۲\alpha$.

۳۵۸- گزینه ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $\cos\alpha=\frac{BD}{AB}=\frac{x}{AB}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\cos\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{x+۸x}=\frac{AB}{۹x}$. بنابراین

$$\frac{x}{AB}=\frac{AB}{۹x}\Rightarrow AB^۲=۹x^۲\Rightarrow AB=۳x$$

در نتیجه $\cos\alpha=\frac{x}{AB}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$.



۳۵۹- گزینه ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times\sin ۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۸\times BC\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}BC \qquad (۱)$$

همین‌طور،

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}AB\times BC \qquad (۲)$$

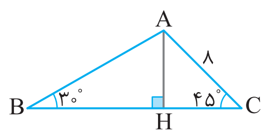
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$۲\sqrt{۲}BC=\frac{۱}{۴}AB\times BC\Rightarrow AB=۸\sqrt{۲}$$

راه‌حل دوم ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر در مثلث AHC،

$$\sin\hat{C}=\sin ۴۵^\circ=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AH}{۸}\Rightarrow AH=۴\sqrt{۲}$$

در مثلث ABH، $\sin\hat{B}=\sin ۳۰^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}}{AB}\Rightarrow AB=۸\sqrt{۲}$



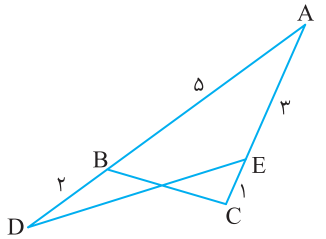
۳۶۰- گزینه ۳ توجه کنید که

$$S_{ADE}=\frac{۱}{۲}AD\times AE\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۳\times\sin\hat{A}=\frac{۲۱}{۲}\sin\hat{A}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۴\times\sin\hat{A}=۱۰\sin\hat{A}$$

بنابراین $S_{ADE}+S_{ABC}=(\frac{۲۱}{۲}+۱۰)\sin\hat{A}=\frac{۴۱}{۲}\sin\hat{A}$. پس

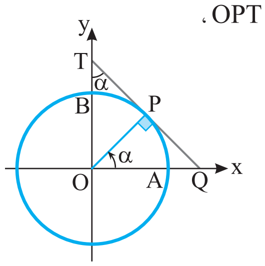
$$\frac{۴۱}{۲}\sin\hat{A}=\frac{۴۱}{۴}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\alpha\ \text{حاده است.}}\hat{A}=۳۰^\circ$$



۳۶۱- گزینه ۴ انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۲۳۰° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin ۲۳۰^\circ$ و $\cos ۲۳۰^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۳۱۰° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin ۳۱۰^\circ$ عددی منفی و $\cos ۳۱۰^\circ$ عددی مثبت است.

۳۶۲- گزینه ۴ از تساوی $\cos x\sqrt{۱+\tan^۲ x}=۱$ واضح است که باید $\cos x>۰$. بنابراین از تساوی $\tan x=-\frac{\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{\cos x}$، نتیجه می‌شود که $\tan x<۰$. بنابراین انتهای کمان زاویهٔ x در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

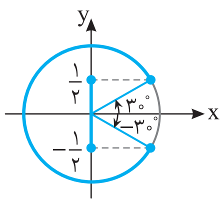
۳۶۳- گزینه ۴ توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ POQ و OTQ در زاویهٔ حادهٔ رأس Q مشترک‌اند، پس زاویهٔ حادهٔ دیگر آن‌ها نیز برابر است، یعنی $O\hat{T}Q=P\hat{O}Q=\alpha$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPT،



$$\sin\alpha=\frac{OP}{OT}=\frac{۱}{OB+BT}=\frac{۱}{۱+BT}$$

$$۱+BT=\frac{۱}{\sin\alpha}\Rightarrow BT=\frac{۱}{\sin\alpha}-۱$$

۳۶۴- گزینه ۴ از $-۱۵^\circ\le\alpha\le۱۵^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-۳۰^\circ\le۲\alpha\le۳۰^\circ$. با توجه به شکل مقابل $-\frac{۱}{۲}\le\sin ۲\alpha\le\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $-\frac{۱}{۲}\le\frac{m}{۴}\le\frac{۱}{۲}$، یعنی $-۲\le m\le۲$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ±۲، ±۱ و صفر باشد.



۳۶۵- گزینه ۱ می‌دانیم حداکثر مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\beta$ برابر ۱ است. بنابراین از تساوی $۲\sin\alpha+۵\cos\beta=۷$ نتیجه می‌شود $\sin\alpha=۱$ و $\cos\beta=۱$. بنابراین $۳\sin\alpha-۴\cos\beta=۳-۴=-۱$.

۳۶۶- گزینه ۳ از $۰^\circ\le\alpha\le۱۸۰^\circ$ نتیجه می‌شود $۰\le\sin\alpha\le۱$. بنابراین

$$۰\le۲\sin\alpha\le۲\Rightarrow۱\le۲\sin\alpha+۱\le۳$$

$$\frac{۱}{۳}\le\frac{۲\sin\alpha+۱}{۳}\le۱\Rightarrow۱\le\frac{۳}{۲\sin\alpha+۱}\le۳$$

پس حداکثر مقدار عبارت برابر ۳ است.

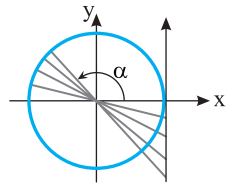
۳۶۷- گزینه ۱ فرض کنید زاویهٔ بین این دو ضلع α باشد. چون $\sin\alpha\le۱$، پس

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\times\sqrt{۶}\sin\alpha=\sqrt{۳}\sin\alpha\le\sqrt{۳}$$

اگر زاویهٔ بین این دو ضلع ۹۰° باشد، مساحت مثلث برابر $\sqrt{۳}$ می‌شود. بنابراین بیشترین مقدار ممکن مساحت مثلث مورد نظر برابر $\sqrt{۳}$ است.

۳۶۸- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $۹۰^\circ<\alpha\leq ۱۸۰^\circ$، آن‌گاه $\tan\alpha\leq ۰$. بنابراین

$$۲m+۱\leq ۰\Rightarrow m\leq -\frac{۱}{۲}$$



۳۶۹- گزینهٔ ۳ چون خط از نقطهٔ $(۰,۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:

$$۳\times ۰-a\times ۲+۲\sqrt{۳}=۰\Rightarrow a=\sqrt{۳}$$

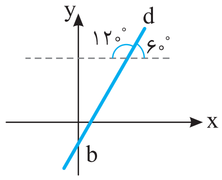
بنابراین معادلهٔ خط به‌صورت $۳x-\sqrt{۳}y+۲\sqrt{۳}=۰$ یا همان $y=\sqrt{۳}x+۲$ است که شیب آن $\sqrt{۳}$ است. پس $\tan\alpha=\sqrt{۳}$. بنابراین

$$\alpha=۶۰^\circ\Rightarrow \sin\alpha=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۷۰- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل رسم شده شیب خط برابر $\tan ۶۰^\circ$ است و عرض از مبدأ آن برابر b است. از طرف دیگر در خط به معادلهٔ $y=ax-۲a+\sqrt{۳}$ شیب خط برابر a و عرض از مبدأ آن برابر $-۲a+\sqrt{۳}$ است.

بنابراین

$$a=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}\ ,\quad b=-۲a+\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=-\sqrt{۳}$$



۳۷۱- گزینهٔ ۱ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های ۷۰°، ۱۷۰°، ۱۹۰° و ۲۶۰° به‌ترتیب در ناحیه‌های اول، دوم، سوم و سوم مثلثاتی است. پس $\tan ۱۷۰^\circ$ عددی منفی است و $\tan ۱۹۰^\circ$، $\cot ۷۰^\circ$ و $\cot ۲۶۰^\circ$ اعدادی مثبت هستند.

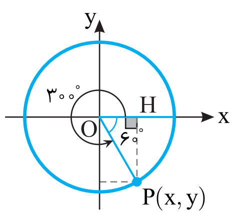
۳۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در مثلث OPH،

$$\sin ۶۰^\circ=\frac{PH}{OP}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{PH}{۱}\Rightarrow PH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ=\frac{OH}{OP}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{OH}{۱}\Rightarrow OH=\frac{۱}{۲}$$

از طرف دیگر $x=OH$ و $y=-PH$. بنابراین

$$x=\frac{۱}{۲}\ ,\ y=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{y}{x-۱}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}-۱}=\sqrt{۳}$$

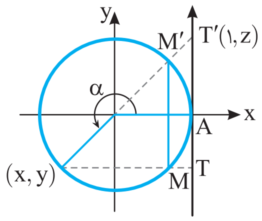


۳۷۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر واضح است که $\sin\alpha=y$ و $\tan\alpha=z$. بنابراین طول پاره‌خط TT' برابر است با

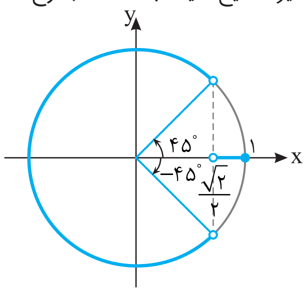
$$TT'=AT+AT'=|y|+|z|=-y+z=-\sin\alpha+\tan\alpha$$

از طرف دیگر، $MM'=۲|y|=-۲y=-۲\sin\alpha$. بنابراین

$$TT'-MM'=\tan\alpha-\sin\alpha-(-۲\sin\alpha)=\tan\alpha+\sin\alpha$$



۳۷۴- گزینهٔ ۳ وقتی $-۹۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$، $-۴۵^\circ<\frac{\alpha}{۲}<۴۵^\circ$ و مطابق شکل زیر، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos\frac{\alpha}{۲}\leq ۱$. در نتیجه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\frac{m}{۴}\leq ۱$، یعنی $۲\sqrt{۲}<m\leq ۴$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۳ یا ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.



۳۷۵- گزینهٔ ۳ به جای $\cos^{۲}x$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^{۲}x$. پس عبارت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A=۴(۱-\sin^{۲}x)-۲\sin x=-۴\sin^{۲}x-۲\sin x+۴$$

$$=-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۱۷}{۴}$$

اکنون دو راه‌حل ارائه می‌کنیم.

راه‌حل اول چون $-۱\leq\sin x\leq ۱$، پس

$$-۲\leq ۲\sin x\leq ۲\Rightarrow -\frac{۳}{۲}\leq ۲\sin x+\frac{۱}{۲}\leq\frac{۵}{۲}$$

$$۰\leq(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^{۲}\leq\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow -\frac{۲۵}{۴}\leq -(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^{۲}\leq ۰$$

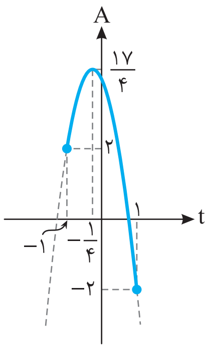
$$-۲\leq\frac{۱۷}{۴}-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^{۲}\leq\frac{۱۷}{۴}\Rightarrow -۲\leq A\leq\frac{۱۷}{۴}$$

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر $\frac{۱۷}{۴}-(-۲)=\frac{۲۵}{۴}$ است.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $t=\sin x$، آن‌گاه

$$A=-(۲t+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۱۷}{۴},\quad -۱\leq t\leq ۱$$

نمودار A برحسب t به‌صورت مقابل است.



واضح است که $-۲\leq A\leq\frac{۱۷}{۴}$.

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر $\frac{۱۷}{۴}-(-۲)=\frac{۲۵}{۴}$ است.

۳۷۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{۳\cos\alpha+۱}{\cos\alpha+۳}=\frac{۳\cos\alpha+۹}{\cos\alpha+۳}-\frac{۸}{\cos\alpha+۳}=۳-\frac{۸}{\cos\alpha+۳}$$

از $-۱\le\cos\alpha\le۱$ نتیجه می‌شود

$$۲\le\cos\alpha+۳\le۴\Rightarrow\frac{۱}{۴}\le\frac{۱}{\cos\alpha+۳}\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow-۴\le\frac{-۸}{\cos\alpha+۳}\le-۲$$

$$-۱\le۳-\frac{۸}{\cos\alpha+۳}\le۱\Rightarrow-۱\le A\le۱$$

بنابراین A نمی‌تواند برابر $\frac{۹}{۸}$ شود.

راه‌حل دوم اگر قرار دهیم $A=\frac{۹}{۸}$، آن‌گاه

$$\frac{۳\cos\alpha+۱}{\cos\alpha+۳}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow ۲۴\cos\alpha+۸=۹\cos\alpha+۲۷$$

$$۱۵\cos\alpha=۱۹\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۱۹}{۱۵}$$

چون مقدار $\cos\alpha$ نمی‌تواند برابر $\frac{۱۹}{۱۵}$ باشد، پس مقدار A هم نمی‌تواند برابر $\frac{۹}{۸}$ باشد.

۳۷۷- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر $۰^\circ<\alpha<۴۵^\circ$ آن‌گاه $\sin\alpha<\cos\alpha$ و اگر $۴۵^\circ<\alpha<۹۰^\circ$، آن‌گاه $\sin\alpha>\cos\alpha$. بنابراین $\sin۲۰^\circ<\cos۲۰^\circ$ و $\sin۷۰^\circ>\cos۷۰^\circ$. در نتیجه

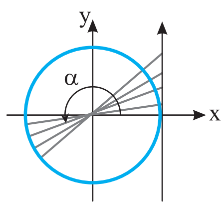
$$A=|\underbrace{\sin۲۰^\circ-\cos۲۰^\circ}_{-}|-|\underbrace{\sin۷۰^\circ-\cos۷۰^\circ}_{+}|$$

$$=-\sin۲۰^\circ+\cos۲۰^\circ-(\sin۷۰^\circ-\cos۷۰^\circ)$$

$$=-\sin۲۰^\circ+\cos۲۰^\circ-\sin۷۰^\circ+\cos۷۰^\circ$$

چون زاویه‌های ۲۰° و ۷۰° متمم یکدیگرند، پس $\sin۲۰^\circ=\cos۷۰^\circ$ و $\cos۲۰^\circ=\sin۷۰^\circ$ و در نتیجه $A=۰$.

۳۷۸- گزینهٔ ۳ از $۱۸۰^\circ\le\alpha<۲۷۰^\circ$ نتیجه می‌شود $\tan\alpha\ge۰$ و در نتیجه $m^۳+m^۲\ge۰$، یعنی $m^۲(m+۱)\ge۰$. چون $m^۲\ge۰$ همواره درست است، پس کافی است $m+۱\ge۰$ که در نتیجه $m\ge-۱$.

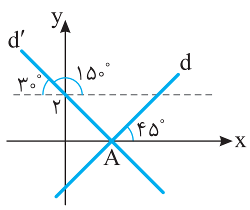


۳۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که شیب خط d' برابر $\tan۱۵۰^\circ$ و عرض از مبدأ آن برابر ۲ است. پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}x+۲$ است. بنابراین طول نقطهٔ A که محل برخورد خط d' با محور x است، به‌صورت روبه‌رو به‌دست می‌آید: $۰=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}x_A+۲\Rightarrow x_A=۲\sqrt{۳}$

از طرف دیگر شیب خط d برابر $\tan۴۵^\circ$ است و این خط از نقطهٔ A می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت $y=x+b$ است و اگر مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ این خط قرار دهیم، نتیجه می‌شود

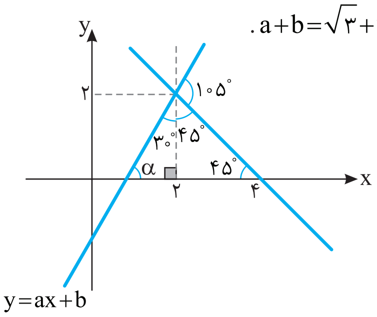
$$۰=۲\sqrt{۳}+b\Rightarrow b=-۲\sqrt{۳}$$

پس معادلهٔ خط d به‌صورت $y=x-۲\sqrt{۳}$ است.



۳۸۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر، واضح است که $\alpha=۶۰^\circ$ و در نتیجه $a=\tan\alpha=\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳}$، یعنی معادلهٔ خط $y=\sqrt{۳}x+b$ است و چون نقطهٔ $(۲,۲)$ روی خط قرار دارد، پس $۲=\sqrt{۳}\times۲+b\Rightarrow b=۲-۲\sqrt{۳}$

بنابراین $a+b=\sqrt{۳}+۲-۲\sqrt{۳}=۲-\sqrt{۳}$.



۳۸۱- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\frac{۱}{۵}}=۵\Rightarrow\tan^۲\alpha=۴\Rightarrow\tan\alpha=\pm۲$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم است، پس $\tan\alpha<۰$، در نتیجه $\tan\alpha=-۲$. بنابراین $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۱}{۲}$، پس

$$\tan\alpha-\cot\alpha=-۲+\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

۳۸۲- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲m}(m+۳)=۱\Rightarrow m+۳=۲m\Rightarrow m=۳$$

بنابراین $\cot\alpha=۶$ و به کمک اتحاد $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ مقدار $\sin^۲\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+۶^۲=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۳۷}$$

۳۸۳- گزینهٔ ۴ مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\sin۱۰^\circ}+\frac{۱}{۱-\sin۱۰^\circ}=\frac{۱-\sin۱۰^\circ+۱+\sin۱۰^\circ}{(۱+\sin۱۰^\circ)(۱-\sin۱۰^\circ)}$$

$$=\frac{۲}{۱-\sin^۲۱۰^\circ}=\frac{۲}{\cos^۲۱۰^\circ}$$

۳۸۴- گزینهٔ ۳ در صورت کسر از $\sin۱۵^\circ$ و در مخرج کسر از $\cos۱۵^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{\sin۱۵^\circ(۱-\sin^۲۱۵^\circ)}{\cos۱۵^\circ(۱-\cos^۲۱۵^\circ)}=\frac{\sin۱۵^\circ\times\cos^۲۱۵^\circ}{\cos۱۵^\circ\times\sin^۲۱۵^\circ}=\frac{\cos۱۵^\circ}{\sin۱۵^\circ}=\cot۱۵^\circ$$

۳۸۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** در تساوی $۳\sin^۲x=۱+۴\cos^۲x$ به جای $\sin^۲x$ قرار می‌دهیم $۱-\cos^۲x$ و مقدار $\cos^۲x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۳(۱-\cos^۲x)=۱+۴\cos^۲x\Rightarrow۳-۳\cos^۲x=۱+۴\cos^۲x$$

$$۷\cos^۲x=۲\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۲}{۷}$$

اکنون به کمک اتحاد $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$ مقدار $\tan^۲x$ را حساب می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\frac{۲}{۷}}\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۵}{۲}$$

راه‌حل دوم ابتدا دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$3\sin^2 x=1+4\cos^2 x\Rightarrow 3\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}+4$$

چون $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$، پس

$$3\tan^2 x=1+\tan^2 x+4\Rightarrow 2\tan^2 x=5\Rightarrow \tan^2 x=\frac{5}{2}$$

۳۸۶- گزینهٔ ۴ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}=\frac{\sin\alpha(1+\frac{1}{\cos\alpha})}{\cos\alpha(1+\frac{1}{\sin\alpha})}=\tan\alpha\left(\frac{\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}}\right)$$

$$=\tan^2\alpha\left(\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)$$

واضح است که عبارت‌های $1+\cos\alpha$، $1+\sin\alpha$ و $\tan^2\alpha$ همگی همواره نامنفی هستند. پس در هر چهار ناحیه، عبارت فوق نامنفی است.

۳۸۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$$

۳۸۸- گزینهٔ ۲ عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A=\cot^2 x+\underbrace{\cot^2 x\tan^2 x}_{1}+\tan^2 x+\underbrace{\tan^2 x\cot^2 x}_{1}$$

$$=\tan^2 x+\cot^2 x+2=(\tan x+\cot x)^2$$

بنابراین $\sqrt{A}=\sqrt{(\tan x+\cot x)^2}=|\tan x+\cot x|$. چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\tan x<0$ و $\cot x<0$. در نتیجه $\tan x+\cot x<0$. بنابراین $\sqrt{A}=-\tan x-\cot x$

۳۸۹- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$$

$$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$$

بنابراین

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-2(\frac{3}{8})^2=\frac{23}{32}$$

۳۹۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

پس

$$\frac{2}{3}=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Rightarrow\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{6}$$

$$(\sin\alpha\cos\alpha)^2=\frac{1}{6}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع دوم است، پس $\sin\alpha>0$ و $\cos\alpha<0$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<0$. پس $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{-\sqrt{6}}{6}$.

۳۹۱- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$ مقدار $\sin x$ را حساب می‌کنیم:

$$1+(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow\sin^2 x=\frac{9}{13}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{3}{\sqrt{13}}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ سوم است، پس $\sin x<0$، بنابراین $\sin x=-\frac{3}{\sqrt{13}}$. اکنون با استفاده از اتحاد $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ مقدار $\cos x$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{2}{3}=\frac{\cos x}{-\frac{3}{\sqrt{13}}}\Rightarrow\cos x=-\frac{2}{\sqrt{13}}$$

بنابراین $2\cos x-\sin x=-\frac{4}{\sqrt{13}}-(-\frac{3}{\sqrt{13}})=-\frac{1}{\sqrt{13}}$.

۳۹۲- گزینهٔ ۱ از اتحاد $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sqrt{k-1})^2+(\sqrt{2k-3})^2=1\Rightarrow k-1+2k-3=1\Rightarrow 3k=5\Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

بنابراین $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$، $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$ و در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\sqrt{2}$$

۳۹۳- گزینهٔ ۴

$$\frac{(1+\tan20^\circ)(1-\cot20^\circ)}{(1+\cot20^\circ)(1-\tan20^\circ)}=\frac{1-\cot20^\circ+\tan20^\circ-\tan20^\circ\cot20^\circ}{1-\tan20^\circ+\cot20^\circ-\tan20\cot20^\circ}$$

$$=\frac{1-\cot20^\circ+\tan20^\circ-1}{1-\tan20^\circ+\cot20^\circ-1}=\frac{\tan20^\circ-\cot20^\circ}{\cot20^\circ-\tan20^\circ}=-1$$

۳۹۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cot x=\frac{1}{\tan x}$. بنابراین

$$\frac{1+\cot^2 x}{\cot x}=\frac{1+\frac{1}{\tan^2 x}}{\frac{1}{\tan x}}=\frac{\tan^2 x+1}{\tan x}$$

در نتیجه $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\times\frac{1+\cot^2 x}{\cot x}=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\times\frac{\tan^2 x+1}{\tan x}=1$.

۳۹۵- گزینهٔ ۱ تساوی داده شده را به‌صورت $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sin\alpha$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\cos\alpha=\sin^2\alpha\quad(*)$$

با استفاده از اتحاد $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ تساوی داده شده به‌صورت $\cos\alpha=1-\cos^2\alpha$ درمی‌آید. پس

$$\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

از تساوی $(*)$ مشخص است که $\cos\alpha$ عددی مثبت است، پس

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

۳۹۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر دو طرف تساوی فرض مسئله را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۹}=(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$. اکنون توجه کنید که

$$\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $\frac{۹}{۴}$ است.

۳۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^۲+(\sin x+\cos x)^۲=۲(\sin^۲ x+\cos^۲ x)=۲$$

در نتیجه $(\frac{۳}{۴})^۲+(\sin x+\cos x)^۲=۲$. بنابراین $(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۲۳}{۱۶}$.

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x>۰$ و $\sin x>۰$. بنابراین

$$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۲۳}}{۴}$$

۳۹۸- گزینهٔ ۳ دوطرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x+\cot x)^۲=(\sqrt{۵})^۲\Rightarrow \tan^۲ x+\cot^۲ x+۲\underbrace{\tan x\cot x}_{۱}=۵$$

$$\tan^۲ x+\cot^۲ x+۲=۵$$

پس $\tan^۲ x+\cot^۲ x=۳$. اکنون دوطرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan^۲ x+\cot^۲ x)^۲=۳^۲\Rightarrow \tan^۴ x+\cot^۴ x+۲\underbrace{\tan^۲ x\cot^۲ x}_{۱}=۹$$

$$\tan^۴ x+\cot^۴ x+۲=۹$$

پس $\tan^۴ x+\cot^۴ x=۷$.

۳۹۹- گزینهٔ ۳ عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\cos\alpha-\sqrt{\tan^۲\alpha(۱-\cos^۲\alpha)}$$

$$=\cos\alpha-\sqrt{\tan^۲\alpha\sin^۲\alpha}=\cos\alpha-|\tan\alpha\sin\alpha|$$

چون $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$، پس $\sin\alpha<۰$ و $\tan\alpha>۰$. در نتیجه $\sin\alpha\tan\alpha<۰$. بنابراین

$$A=\cos\alpha+\tan\alpha\sin\alpha=\cos\alpha+\frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۱}{\cos\alpha}$$

۴۰۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲\alpha-\cos^۴\alpha}}=\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲\alpha(۱-\cos^۲\alpha)}}$$

$$=\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲\alpha\sin^۲\alpha}}=\sqrt{۱+۲|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون $۳۱۵^\circ<\alpha<۳۶۰^\circ$، پس $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$. بنابراین $\sin\alpha\cos\alpha<۰$، پس

$$A=\sqrt{۱-۲\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲}=|\sin\alpha-\cos\alpha|$$

چون $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$، پس $\sin\alpha-\cos\alpha<۰$ و در نتیجه

$$A=-\sin\alpha+\cos\alpha$$

۴۰۱- گزینهٔ ۳ از تساوی $\frac{۵\sin x}{۲\sin x+\cos x}=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود $۱۰\sin x=۲\sin x+\cos x$. بنابراین $۸\sin x=\cos x$ و در نتیجه $\frac{\cos x}{\sin x}=۸$، پس $\cot x=۸$.

۴۰۲- گزینهٔ ۱ از اتحاد $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ نتیجه می‌شود

$$۱+(\sqrt{\frac{m+۲}{۲m+۵}})^۲=\frac{۱}{(\sqrt{\frac{m+۲}{۳m+۷}})^۲}$$

$$۱+\frac{m+۲}{۲m+۵}=\frac{۳m+۷}{m+۲}\Rightarrow\frac{۲m+۵+m+۲}{۲m+۵}=\frac{۳m+۷}{m+۲}$$

$$\frac{۳m+۷}{۲m+۵}=\frac{۳m+۷}{m+۲}\Rightarrow ۲m+۵=m+۲\Rightarrow m=-۳$$

(توجه کنید که $۳m+۷$ نمی‌تواند صفر باشد). بنابراین

$$\tan x=\sqrt{\frac{-۳+۲}{۲(-۳)+۵}}=۱$$

۴۰۳- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ و مخرج مشترک‌گیری به‌دست می‌آید

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha(۱+\cos\alpha)}=\frac{۱}{\sin\alpha}$$

۴۰۴- گزینهٔ ۴ چون $\sin^۲ ۱۵^\circ+\cos^۲ ۱۵^\circ=۱$، می‌توان نوشت

$$\frac{\sin^۲ ۱۵^\circ}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ}{۱+\sin ۱۵^\circ}+\cos ۱۵^\circ=\frac{۱-\cos^۲ ۱۵^\circ}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{۱-\sin^۲ ۱۵^\circ}{۱+\sin ۱۵^\circ}+\cos ۱۵^\circ$$

$$=\frac{(۱-\cos ۱۵^\circ)(۱+\cos ۱۵^\circ)}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{(۱-\sin ۱۵^\circ)(۱+\sin ۱۵^\circ)}{۱+\sin ۱۵^\circ}+\cos ۱۵^\circ$$

$$=۱-\cos ۱۵^\circ-(۱-\sin ۱۵^\circ)+\cos ۱۵^\circ=\sin ۱۵^\circ$$

۴۰۵- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر A را بر $\cos^۳ x$ تقسیم می‌کنیم و از اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{\sin^۳ x}{\cos^۳ x}-\frac{۲\cos x}{\cos^۳ x}}{\frac{۴\sin x}{\cos^۳ x}-\frac{\cos^۳ x}{\cos^۳ x}}=\frac{\tan^۳ x-\frac{۲}{\cos^۲ x}}{\frac{۴\tan x}{\cos^۲ x}-۱}$$

$$=\frac{\tan^۳ x-۲(۱+\tan^۲ x)}{۴\tan x(۱+\tan^۲ x)-۱}=\frac{۳^۳-۲(۱+۳^۲)}{۴\times۳(۱+۳^۲)-۱}=\frac{۷}{۱۱۹}=\frac{۱}{۱۷}$$

۴۰۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x=(\sin x-\cos x)(\sin^۲ x+\sin x\cos x+\cos^۲ x)$$

$$=(\sin x-\cos x)(۱+\sin x\cos x)$$

بنابراین باید حاصل $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۵}{۱۸}$. در این صورت حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $\sin^۳ x-\cos^۳ x=(\frac{۲}{۳})(۱+\frac{۵}{۱۸})=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۳}{۱۸}=\frac{۲۳}{۲۷}$.

راه‌حل دوم طرفین تساوی $\sin x-\cos x=\frac{2}{3}$ را به توان سه می‌رسانیم

$$(\sin x-\cos x)^3=(\frac{2}{3})^3$$

$$\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x+3\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=\frac{8}{27}$$

$$\sin^3 x-\cos^3 x-3\sin x\cos x(\sin x-\cos)=\frac{8}{27}$$

بنابراین باید حاصل $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{4}{9}$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{5}{18}$، در نتیجه

$$\sin^3 x-\cos^3 x-3\times\frac{5}{18}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}\Rightarrow\sin^3 x-\cos^3 x=\frac{23}{27}$$

۴۰۷- گزینهٔ ۴ از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^3 x-\cot^3 x=(\tan x-\cot x)^3+3\tan x\cot x(\tan x-\cot x)$$

چون $\tan x\cot x=1$ و $\tan x-\cot x=3$، پس

$$\tan^3 x-\cot^3 x=3^3+3\times1\times3=36$$

۴۰۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\tan\alpha$، آن‌گاه $\cot\alpha=\frac{1}{t}$ و معادلهٔ داده شده به‌صورت $t-\frac{2}{t}=\sqrt{2}$ درمی‌آید. دو طرف این معادله را در t ضرب کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$t^2-2=\sqrt{2}t\Rightarrow t^2-\sqrt{2}t-2=0\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{2}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع اول است، پس $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}<0$ قابل قبول نیست، در نتیجه $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$.

بنابراین $\tan\alpha=\sqrt{2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$، در نتیجه

$$\tan^2\alpha=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{2}=3+\sqrt{5}$$

۴۰۹- گزینهٔ ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر دوم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$1-2\sin^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\cos^2 x(1-\tan^2 x)=\cos^2 x(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})=\cos^2 x-\sin^2 x$$

در نتیجه دومین کسر برابر با ۱ است. بنابراین حاصل عبارت برابر است با

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+1=\frac{2\sin x}{\sin x-\cos x}$$

با تقسیم صورت و مخرج این کسر بر $\cos x$ معلوم می‌شود که کسر برابر است با $\frac{2\tan x}{\tan x-1}$.

۴۱۰- گزینهٔ ۳ به جای $\cos^2 x$ قرار می‌دهیم $1-\sin^2 x$. عبارت به شکل زیر است:

$$A=1-\sin^2 x-2\sin x=1-(\sin^2 x+2\sin x+1-1)$$

$$=1-(\sin x+1)^2+1=2-(\sin x+1)^2$$

چون $-1\le\sin x\le1$، پس

$$0\le\sin x+1\le2\Rightarrow0\le(\sin x+1)^2\le4\Rightarrow-4\le-(\sin x+1)^2\le0$$

$$-2\le2-(\sin x+1)^2\le2\Rightarrow-2\le A\le2$$

بنابراین اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر ۴ واحد است.

۴۱۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از تساوی $\tan x=\frac{1}{3}$ نتیجه می‌شود $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{3}$، یعنی $\cos x=3\sin x$. در عبارت A به جای $\cos x$ قرار می‌دهیم $3\sin x$. در این صورت $A=\frac{2\sin x+3\sin x}{\sin x+9\sin x}=\frac{5\sin x}{10\sin x}=\frac{1}{2}$.

راه‌حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا A برحسب $\tan x$ نوشته شود:

$$A=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{3\cos x}{\cos x}}=\frac{2\tan x+1}{\tan x+3}$$

اکنون با قرار دادن $\frac{1}{3}$ به جای $\tan x$ در عبارت فوق، مقدار A به‌دست می‌آید $A=\frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}+3}=\frac{1}{2}$.

۴۱۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که $\tan15^\circ=\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}$ و $\cot15^\circ=\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ}$. بنابراین

$$A=\frac{\cot^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}=\frac{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}-\cos^2 15^\circ}{\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}-\sin^2 15^\circ}$$

$$=\frac{\frac{\cos^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ\sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\cos^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}}=\frac{\frac{\cos^2 15^\circ(1-\sin^2 15^\circ)}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ(1-\cos^2 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ}}$$

$$=\frac{\frac{\cos^4 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^4 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}}=\frac{\cos^6 15^\circ}{\sin^6 15^\circ}=\cot^6 15^\circ$$

راه‌حل دوم کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{\cot^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}=\frac{\cot^2 15^\circ(1-\sin^2 15^\circ)}{\tan^2 15^\circ(1-\cos^2 15^\circ)}$$

$$=\frac{\cot^2 15^\circ\cos^2 15^\circ}{\frac{1}{\cot^2 15^\circ}(\sin^2 15^\circ)}=\cot^4 15^\circ(\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ})$$

$$=\cot^4 15^\circ\cot^2 15^\circ=\cot^6 15^\circ$$

۴۱۳- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$(\frac{1}{\cos 20^\circ}+\tan 20^\circ)(1-\sin 20^\circ)=(\frac{1}{\cos 20^\circ}+\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ})(1-\sin 20^\circ)$$

$$=\frac{1}{\cos 20^\circ}(1+\sin 20^\circ)(1-\sin 20^\circ)=\frac{1}{\cos 20^\circ}(1-\sin^2 20^\circ)$$

$$=\frac{1}{\cos 20^\circ}(\cos^2 20^\circ)=\cos 20^\circ$$

۴۱۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید

$$B=\sqrt{1+\cos 36^\circ}+\sqrt{1-\cos 36^\circ}$$

در نتیجه

$$B^2=1+\cos 36^\circ+1-\cos 36^\circ+2\sqrt{(1-\cos 36^\circ)(1+\cos 36^\circ)}$$

$$=2+2\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}=2+2\sqrt{\sin^2 36^\circ}=2+2\sin 36^\circ$$

چون $B>0$، پس $B=\sqrt{2(1+\sin 36^\circ)}$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با $\sqrt{2}$ است.

راه‌حل دوم می‌دانیم (درس هفتم این فصل را ببینید)

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x,\quad 1-\cos 2x=2\sin^2 x$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{1+\cos 36^\circ}+\sqrt{1-\cos 36^\circ}}{\sqrt{1+\sin 36^\circ}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\cos^2 18^\circ}+\sqrt{2\sin^2 18^\circ}}{\sqrt{\sin^2 18^\circ+\cos^2 18^\circ+2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\cos 18^\circ+\sin 18^\circ)}{\sqrt{(\sin 18^\circ+\cos 18^\circ)^2}}=\frac{\sqrt{2}(\cos 18^\circ+\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ+\cos 18^\circ}=\sqrt{2}$$

۴۱۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$3(1-\cos^2\alpha)-5\cos\alpha+5=0\Rightarrow 3\cos^2\alpha+5\cos\alpha-8=0$$

اگر فرض کنیم $t=\cos\alpha$، می‌توانیم معادله را به شکل $3t^2+5t-8=0$ بنویسیم که چون مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $t=1$ و دیگری $t=\frac{-8}{3}$ است. چون $\cos\alpha=-\frac{8}{3}$ قابل قبول نیست، پس $\cos\alpha=1$ و در نتیجه $\cos^6\alpha=1$.

راه‌حل دوم $\alpha=0$ در معادله صدق می‌کند، پس کافی است مقدار $\cos^6\alpha$ را به ازای $\alpha=0$ حساب کنیم، که برابر ۱ می‌شود.

۴۱۶- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x+\cot x)^2=(\sqrt{5})^2\Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x+2\underbrace{\tan x\cot x}_{1}=5$$

$$\tan^2 x+\cot^2 x+2=5$$

پس $\tan^2 x+\cot^2 x=3$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان سه می‌رسانیم:

$$(\tan^2 x+\cot^2 x)^3=3^3$$

$$\tan^6 x+3\tan^4 x\cot^2 x+3\tan^2 x\cot^4 x+\cot^6 x=27$$

$$\tan^6 x+\cot^6 x+3\tan^2 x\cot^2 x(\tan^2 x+\cot^2 x)=27$$

با توجه به اینکه $\tan^2 x\cot^2 x=1$ و $\tan^2 x+\cot^2 x=3$ نتیجه می‌شود

$$\tan^6 x+\cot^6 x+9=27\Rightarrow \tan^6 x+\cot^6 x=18$$

۴۱۷- گزینهٔ ۲ دو طرف تساوی داده‌شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2}{\cos^2 x}$$

با توجه به اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$، تساوی قبلی را طوری می‌نویسیم که در آن فقط $\tan x$ وجود داشته باشد:

$$\tan^2 x+3-2\tan x=2(1+\tan^2 x)\Rightarrow \tan^2 x+2\tan x-1=0$$

بنابراین $\tan x=-1\pm\sqrt{2}$.

۴۱۸- گزینهٔ ۲ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=\sqrt{1-2\sqrt{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}}=\sqrt{1-2\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}$$

$$=\sqrt{1-2\sqrt{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}}=\sqrt{1-2|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون $\alpha=200^\circ$، پس $\sin\alpha<0$، $\cos\alpha<0$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha>0$.

بنابراین عبارت A به شکل زیر درمی‌آید:

$$A=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=|\sin 200^\circ-\cos 200^\circ|$$

توجه کنید که $\sin 200^\circ-\cos 200^\circ>0$. بنابراین $A=\sin 200^\circ-\cos 200^\circ$.

۴۱۹- گزینهٔ ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

صورت کسر

$$\sin^3 40^\circ-\cos^3 40^\circ$$

$$=(\sin 40^\circ-\cos 40^\circ)(\sin^2 40^\circ+\sin 40^\circ\cos 40^\circ+\cos^2 40^\circ)$$

$$=(\sin 40^\circ-\cos 40^\circ)(1+\sin 40^\circ\cos 40^\circ)$$

مخرج کسر

$$\cos 40^\circ+\cos^2 40^\circ\sin 40^\circ=\cos 40^\circ(1+\cos 40^\circ\sin 40^\circ)$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با

$$\frac{\sin 40^\circ-\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}-1=\tan 40^\circ-1$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر $\tan 40^\circ$ است.

۴۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{\tan^3 x-\cot^3 x}{\tan x-\cot x}$$

$$=\frac{(\tan x-\cot x)(\tan^2 x+\tan x\cot x+\cot^2 x)}{\tan x-\cot x}$$

$$=\tan^2 x+1+\cot^2 x=7$$

بنابراین $\tan^2 x+\cot^2 x=6$. در نتیجه

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=1+\cot^2 x+1+\tan^2 x$$

$$=2+\tan^2 x+\cot^2 x=2+6=8$$

۴۲۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که 36° برابر با $\frac{36^\circ}{180^\circ}\pi=\frac{\pi}{5}$ رادیان است. بنابراین اندازهٔ زاویهٔ سوم مثلث برابر است با $\pi-(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10})=\frac{\pi}{2}$ که این زاویه از بقیه بزرگ‌تر است.

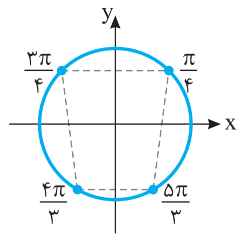
۴۲۲- گزینهٔ ۴ اگر اندازهٔ زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه $D\times R=\frac{۵\pi}{۴}$، بنابراین $R=\frac{۵\pi}{۴D}$.

از طرف دیگر، $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$. بنابراین

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۵\pi}{۴D}}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{۵}{۴D}\Rightarrow D^۲=\frac{۹۰۰^\circ}{۴}\Rightarrow D=۱۵^\circ$$

بنابراین اندازهٔ این زاویه برابر ۱۵° است.

۴۲۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل زیر، چهارضلعی حاصل ذوزنقه است.



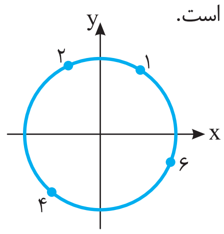
۴۲۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر به زاویه‌ای مضرب‌های زوج π را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویهٔ جدید، با زاویهٔ اولیه هم‌انتها است. اکنون توجه کنید که

$$-۵۶۰^\circ+۴\pi=-۵۶۰^\circ+۷۲۰^\circ=۱۶۰^\circ$$

از طرف دیگر، چون اختلاف -۵۶۰° با هیچ‌یک از زاویه‌های داده شدهٔ دیگر مضربی زوج از π نیست، پس با هیچ‌یک از آن‌ها هم‌انتها نیست.

۴۲۵- گزینهٔ ۴ زاویهٔ بین هر دو کابین متوالی $\frac{۲\pi}{۲۰}=\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان است. از طرف دیگر، $\frac{۴۸\pi}{۵}=۸\pi+\frac{۸\pi}{۵}=۸\pi+۱۶\times\frac{\pi}{۱۰}$. وقتی چرخ‌وفلک ۴ دور کامل می‌زند، یعنی ۸π رادیان می‌چرخد، هر کابین در جای اولیهٔ خود قرار می‌گیرد. سپس چرخ‌وفلک به اندازهٔ $۱۶\times\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان دیگر دوران می‌کند که کابین شمارهٔ یک به مکان فعلی ۱۶ کابین جلوتر، یعنی کابین هفدهم منتقل می‌شود.

۴۲۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان نظیر زاویهٔ ۴ رادیان است، کوچک‌تر از عرض بقیهٔ نقاط است، پس $\sin ۴$ از بقیه کوچک‌تر است.



۴۲۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** در هر ساعت عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{۱}{۱۲}$ دور می‌چرخد که معادل $\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. بنابراین

$$\frac{۶۰}{x}=\frac{\frac{\pi}{۶}}{\frac{۵\pi}{۸}}\Rightarrow x=۲۲۵ \text{ دقیقه}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم در هر دقیقه، عقربهٔ ساعت‌شمار $(۰/۵)^\circ$ یا $\frac{\pi}{۳۶۰}$ رادیان طی می‌کند، پس $\frac{۱}{x}=\frac{\frac{\pi}{۳۶۰}}{\frac{۵\pi}{۸}}$، بنابراین $x=\frac{\frac{۵\pi}{۸}}{\frac{\pi}{۳۶۰}}=۲۲۵$ دقیقه.

۴۲۸- گزینهٔ ۲ طول کمان AB برابر است با $۴\pi\alpha$. از طرف دیگر طول کمان ACB برابر است با محیط دایره منهای طول کمان AB یعنی $۸\pi^۲-۴\pi\alpha$. بنابراین

$$۸\pi^۲-۴\pi\alpha=۴\pi\alpha+\pi\Rightarrow ۸\alpha=۸\pi-۱\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{۱}{۸}$$

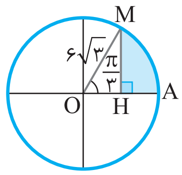
۴۲۹- گزینهٔ ۱ ۱۶ کابین در این چرخ‌وفلک وجود دارد. پس زاویهٔ بین دو کابین متوالی برابر $\frac{۲\pi}{۱۶}=\frac{\pi}{۸}$ است. بنابراین زاویهٔ متناظر به کمان $P_۰P_۱$ برابر $\frac{۷\pi}{۸}$ است. بنابراین

$$\overset{\frown}{P_۰P_۱}=r\theta=۴۰\times\frac{۷\pi}{۸}=۳۵\pi \text{ متر}$$

۴۳۰- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر،

$$MH=۶\sqrt{۳}\sin\frac{\pi}{۳}=۹,\qquad \overset{\frown}{AM}=۶\sqrt{۳}\times\frac{\pi}{۳}=۲\sqrt{۳}\pi$$

$$OH=۶\sqrt{۳}\cos\frac{\pi}{۳}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow AH=۶\sqrt{۳}-۳\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$$



بنابراین اندازهٔ محیط قسمت رنگی برابر است با

$$۹+۳\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}\pi=۹+\sqrt{۳}(۳+۲\pi)$$

۴۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا ۴۰۰° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۴۰۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۲۰\pi}{۹}$$

بنابراین اگر اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر برحسب رادیان برابر x و اندازهٔ زاویهٔ کوچک‌تر برحسب رادیان برابر y باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} x+y=\frac{۲۰\pi}{۹} \\ x-y=\frac{۴\pi}{۹} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{۴\pi}{۳} \\ y=\frac{۸\pi}{۹} \end{cases}$$

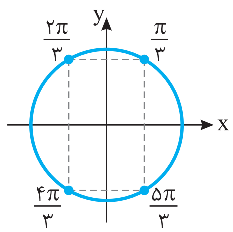
پس اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر برحسب رادیان $\frac{۴\pi}{۳}$ است.

۴۳۲- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم اندازهٔ زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $R=\frac{\pi}{۸۰}D-\frac{۵\pi}{۳۶}$. از طرف دیگر، $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$، بنابراین

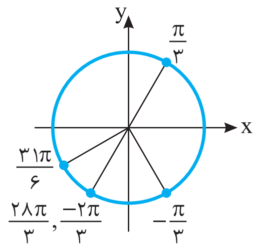
$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{\pi}{۸۰}D-\frac{۵\pi}{۳۶}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۱۸۰^\circ}{۸۰}D-\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۳۶}$$

$$\frac{۵}{۴}D=۲۵^\circ\Rightarrow D=۲۰^\circ$$

۴۳۳- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل، چهارضلعی حاصل مستطیل است.



۴۳۴- گزینهٔ ۳ اگر به زاویه‌ای مضربی زوج از π را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویهٔ جدید با زاویهٔ اولیه هم‌انتها است. اکنون توجه کنید که $\frac{۲۸\pi}{۳}=۹\pi+\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۳۱\pi}{۶}=۵\pi+\frac{\pi}{۶}$. بنابراین انتهای کمان‌های نظیر زاویه‌های داده شده مانند شکل روبه‌رو است. از روی شکل معلوم است که انتهای کمان نظیر زاویه‌های $\frac{۲۸\pi}{۳}$ و $\frac{-۲\pi}{۳}$ یکسان است.



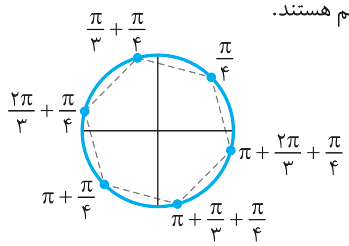
۴۳۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$k=۳s \Rightarrow \alpha=\frac{۳s\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=s\pi+\frac{\pi}{۴}$$

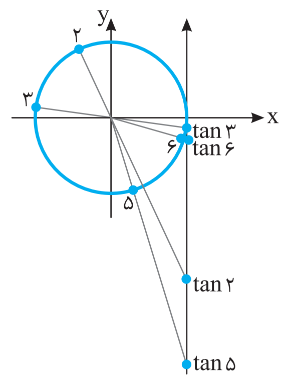
$$k=۳s+۱ \Rightarrow \alpha=\frac{(۳s+۱)\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=s\pi+\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

$$k=۳s+۲ \Rightarrow \alpha=\frac{(۳s+۲)\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}=s\pi+\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین انتهای کمان نظیر زاویه‌های مورد نظر مطابق شکل زیر رأس‌های یک شش‌ضلعی منتظم هستند.



۴۳۶- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $\tan ۳$ بزرگ‌تر از اعداد دیگر است.



۴۳۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** چون عقربهٔ ساعت‌شمار در هر ساعت $\frac{۱}{۱۲}$ دایره را طی می‌کند، پس در هر ساعت $\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$ رادیان را طی می‌کند. بنابراین در هر ۲۰ دقیقه، $\frac{۲۰}{۶۰}\times\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۱۸}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی از ساعت ۹ تا ساعت $۱۰:۲۰'$ که یک ساعت و ۲۰ دقیقه زمان گذشته است، عقربهٔ ساعت‌شمار زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۱۸}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۹}$ رادیان.

راه‌حل دوم می‌دانیم عقربهٔ ساعت‌شمار در هر دقیقه $(۰/۵)^\circ$ یا $\frac{\pi}{۳۶۰}$ رادیان طی می‌کند. از طرف دیگر از ساعت ۹ تا ساعت $۱۰:۲۰'$ برابر ۸۰ دقیقه است، پس

$$\frac{۱}{۸۰}=\frac{\frac{\pi}{۳۶۰}}{x}\Rightarrow x=۸۰\times\frac{\pi}{۳۶۰}=\frac{۲\pi}{۹}\,\text{rad}$$

۴۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{۲۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۵\pi}{۳۶}\,\text{rad}$$

بنابراین $\overset{\frown}{AB}=۶\times\frac{۵\pi}{۳۶}$ و $\overset{\frown}{CD}=۹\times\frac{۵\pi}{۳۶}$. پس

$$\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AB}=\frac{۴۵\pi}{۳۶}-\frac{۳۰\pi}{۳۶}=\frac{۱۵\pi}{۳۶}=\frac{۵\pi}{۱۲}$$

۴۳۹- گزینهٔ ۴ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان AB را α فرض می‌کنیم. مساحت قسمت رنگی از تفاضل مساحت مثلث OAC و قطاع OAB به‌دست می‌آید:

$$\triangle OAC:\tan\alpha=\frac{AC}{۲\pi}\Rightarrow AC=۲\pi\tan\alpha$$

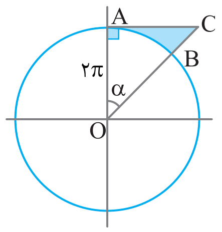
$$S_{OAC}=\frac{OA\times AC}{۲}=\frac{۲\pi\times۲\pi\tan\alpha}{۲}=۲\pi^۲\tan\alpha$$

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{۱}{۲}r^۲\alpha=\frac{۱}{۲}(۲\pi)^۲\alpha=۲\pi^۲\alpha$$

بنابراین $S_{\text{رنگی}}=۲\pi^۲\tan\alpha-۲\pi^۲\alpha=۲\pi^۲(\tan\alpha-\alpha)$، پس

$$۲\pi^۲(\tan\alpha-\alpha)=۲\pi^۲(۱-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow\tan\alpha-\alpha=۱-\frac{\pi}{۴}$$

پس $\alpha=\frac{\pi}{۴}$، در نتیجه طول کمان AB برابر است با $L=r\alpha=۲\pi\times\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi^۲}{۲}$.



۴۴۰- گزینهٔ ۴ با جابه‌جایی نقطهٔ A به اندازهٔ ۲۰° یا $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، ریسمان به اندازهٔ $l=r\theta=۸\times\frac{\pi}{۹}=\frac{۸\pi}{۹}$ سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود. در نتیجه اگر فرض کنیم چرخ کوچک به اندازهٔ α رادیان جابه‌جا شده است، معلوم می‌شود

$$\frac{۸\pi}{۹}=۶\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{۴\pi}{۲۷}$$

بنابراین اندازه‌ای که چرخ کوچک‌تر جابه‌جا شده است برحسب درجه برابر است با

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow D=۱۸۰^\circ\times\frac{R}{\pi}=۱۸۰^\circ\times\frac{۴}{۲۷}=\frac{۸۰^\circ}{۳}$$

۴۴۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

بنابراین

$$A=-\tan\alpha\cot\alpha+(-\sin\alpha)^۲+\cos^۲\alpha$$

$$=-\tan\alpha\cot\alpha+\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=-۱+۱=۰$$

۴۴۲- گزینهٔ ۲ چون $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، پس

$$\cos(x-90^\circ)=\cos(90^\circ-x)=\sin x$$

همچنین، $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$، پس

$$\cot(-x-180^\circ)=-\cot(180^\circ+x)=-\cot x$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sin x(-\cot x)=-\cos x$$

۴۴۳- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$A=\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)+\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)+\sin(3\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cot\theta$$

بنابراین $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tan\theta}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 0/4}=-\frac{3}{4}$.

۴۴۴- گزینهٔ ۲ چون $x+3y=\frac{\pi}{2}$، در نتیجه $2x+3y=\frac{\pi}{2}+x$. پس

$$\tan(2x+3y)=\tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x$$

۴۴۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\cos(\frac{3\pi}{2}-x)=-\sin x$ و $\sin(\frac{5\pi}{2}+x)=\cos x$. در نتیجه

$$-\sin x=2\cos x\Rightarrow\tan x=-2$$

۴۴۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\cos 510^\circ=\cos(360^\circ+150^\circ)=\cos 150^\circ$$

$$=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۴۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos\frac{43\pi}{6}=\cos(7\pi+\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۴۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{23\pi}{6}=\sin(4\pi-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{16\pi}{3}=\cos(5\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{35\pi}{4}=\tan(9\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\cot(-\frac{43\pi}{4})=-\cot\frac{43\pi}{4}=-\cot(11\pi-\frac{\pi}{4})=-(-\cot\frac{\pi}{4})=1$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-1)(1)=-\frac{1}{4}$.

۴۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$، آن‌گاه $\sin\alpha=\sin\beta$.

بنابراین

$$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi\Rightarrow\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}\ ,\quad \frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\pi\Rightarrow\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}$$

در نتیجه $A=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}}=-1$.

۴۵۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$، آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$، در نتیجه $\cos\alpha+\cos\beta=0$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi\Rightarrow\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$$

$$\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\pi\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=0$$

پس $A=0$.

۴۵۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(3\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \sin(4\pi+\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \sin(5\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

بنابراین $A=3\sin\alpha+4\sin\alpha-5\sin\alpha=2\sin\alpha$.

۴۵۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha\ ,\qquad \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha\ ,\qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$

بنابراین $A=\frac{3\cot\alpha-\cot\alpha}{2\tan\alpha-\tan\alpha}=\frac{2\cot\alpha}{\tan\alpha}=2\cot^2\alpha$.

۴۵۳- گزینهٔ ۴ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)+2\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)-2\cos(3\pi+\alpha)}=3\Rightarrow\frac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{-\sin\alpha+2\cos\alpha}=3$$

$$\cos\alpha-2\sin\alpha=-3\sin\alpha+6\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha=5\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=5$$

بنابراین $\tan(\alpha-\frac{5\pi}{2})=-\tan(\frac{5\pi}{2}-\alpha)=-\cot\alpha=-\frac{1}{5}$.

۴۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\alpha=\frac{3\pi}{2}+\beta\Rightarrow\cot\alpha=\cot(\frac{3\pi}{2}+\beta)=-\tan\beta$$

بنابراین

$$\frac{1}{1-\cot\alpha}+\frac{1}{1+\cot\beta}=\frac{1}{1+\tan\beta}+\frac{1}{1+\cot\beta}=\frac{1+\cot\beta+1+\tan\beta}{(1+\tan\beta)(1+\cot\beta)}$$

$$=\frac{2+\tan\beta+\cot\beta}{1+\cot\beta+\tan\beta+\tan\beta\cot\beta}=\frac{2+\tan\beta+\cot\beta}{2+\tan\beta+\cot\beta}=1$$

۴۵۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$. در نتیجه

از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$. اکنون توجه کنید که

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{169}{144}\Rightarrow\tan^2\alpha=\frac{25}{144}$$

چون α در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\tan\alpha<0$. بنابراین $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$.

۴۵۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos(-600^\circ)=\cos 600^\circ=\cos(2\times 360^\circ-120^\circ)$$

$$=\cos 120^\circ=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cot 675^\circ=\cot(2\times 360^\circ-45^\circ)=-\cot 45^\circ=-1$$

$$\tan 945^\circ=\tan(3\times 360^\circ-135^\circ)=-\tan 135^\circ=\tan 45^\circ=1$$

$$\sin(-330^\circ)=-\sin 330^\circ=-\sin(360^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

بنابراین حاصل کسر مورد نظر برابر است با $\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}}=-3$.

۴۵۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan 75^\circ=\tan(90^\circ-15^\circ)=\cot 15^\circ=\frac{1}{a}$$

$$\tan 105^\circ=\tan(90^\circ+15^\circ)=-\cot 15^\circ=-\frac{1}{a}$$

$$\tan 165^\circ=\tan(180^\circ-15^\circ)=-\tan 15^\circ=-a$$

$$\tan 255^\circ=\tan(270^\circ-15^\circ)=\cot 15^\circ=\frac{1}{a}$$

بنابراین $A=\dfrac{2(\frac{1}{a})-\frac{1}{a}}{3(-a)-\frac{1}{a}}=\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{-3a^2-1}{a}}=\dfrac{1}{-3a^2-1}=\dfrac{-1}{3a^2+1}$.

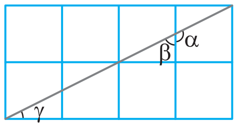
۴۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\frac{101\pi}{3}=\sin(\frac{102\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\sin(34\pi-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{98\pi}{3}=\cos(\frac{99\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\cos(33\pi-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین $A=4(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-2(-\frac{1}{2})=3+1=4$.

۴۵۹- گزینهٔ ۳ از نماد گذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که



$$\tan\alpha=\tan(180^\circ-\beta)=-\tan\beta$$

از طرف دیگر $\beta+\gamma=90^\circ$، پس $\tan\beta=\cot\gamma$. اکنون توجه کنید که $\cot\gamma=\frac{4}{2}=2$. بنابراین $\tan\alpha=-2$.

۴۶۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\tan\beta=\cot\alpha$ و در نتیجه $\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha\times\cot\alpha=1$.

بنابراین

$$\frac{\pi}{14}+\frac{6\pi}{14}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{14}\tan\frac{6\pi}{14}=1$$

$$\frac{2\pi}{14}+\frac{5\pi}{14}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\frac{2\pi}{14}\tan\frac{5\pi}{14}=1$$

$$\frac{3\pi}{14}+\frac{4\pi}{14}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\frac{3\pi}{14}\tan\frac{4\pi}{14}=1$$

پس $A=1$.

۴۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

بنابراین $A=\dfrac{-\tan\alpha+3\tan\alpha}{-\tan\alpha-\tan\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{-2\tan\alpha}=-1$.

۴۶۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\qquad \tan(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(\frac{7\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2},\qquad \cot(\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین $A=\dfrac{4(\frac{1}{2})-2(\frac{1}{2})}{3(\frac{\sqrt{3}}{3})-6(-\frac{\sqrt{3}}{3})}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

۴۶۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ یکی از زوایا 90° است. مثلاً فرض کنید $\hat{A}=90^\circ$. پس $\sin\hat{A}=1$ و $\cos\hat{A}=0$. در این صورت زاویه‌های B و C متمم یکدیگرند، پس $\sin^2\hat{C}=\cos^2\hat{B}$، بنابراین ساده شدهٔ عبارت به شکل زیر است:

$$\frac{\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}}{\sin^2\hat{A}+\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}}=\frac{0+\sin^2\hat{C}+\cos^2\hat{C}}{1+\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم مثلث ABC را با زاویه‌های زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{A}=90^\circ,\quad \hat{B}=45^\circ,\quad \hat{C}=45^\circ$$

در این صورت $\dfrac{\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}}{\sin^2\hat{A}+\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}}=\dfrac{0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

۴۶۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin a=\sin(\frac{5\pi}{2}-b)=\cos b,\qquad \tan a=\tan(\frac{5\pi}{2}-b)=\cot b$$

بنابراین

$$\frac{\sin a+\tan a\tan b-1}{\sin b-\cos^2 a-\cos^2 b+1}=\frac{\cos b+\cot b\tan b-1}{\sin b-\cos^2 a-\sin^2 a+1}=\frac{\cos b+1-1}{\sin b-1+1}=\frac{\cos b}{\sin b}=\cot b$$

۴۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$3a+2b=\pi\Rightarrow a+2(a+b)=\pi\Rightarrow\frac{a}{2}+(a+b)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}-(a+b)$$

بنابراین $\sin\frac{a}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-(a+b))=\cos(a+b)=\frac{3}{5}$.

۴۶۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin 410^\circ=\sin(360^\circ+50^\circ)=\sin 50^\circ=\sin(90^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ$$

$$\sin 400^\circ=\sin(360^\circ+40^\circ)=\sin 40^\circ$$

بنابراین

$$\sin^2 410^\circ+\sin^2 400^\circ=\cos^2 40^\circ+\sin^2 40^\circ=1$$

همچنین $\tan 731^\circ=\tan(2\times360^\circ+11^\circ)=\tan 11^\circ$. بنابراین

$$\tan 731^\circ\times\cot 11^\circ=\tan 11^\circ\times\cot 11^\circ=1$$

بنابراین مقدار کسر مورد نظر برابر است با ۱.

۴۶۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\cos 115^\circ=\cos(90^\circ+25^\circ)=-\sin 25^\circ$$

$$\cos 155^\circ=\cos(180^\circ-25^\circ)=-\cos 25^\circ$$

$$\cos 295^\circ=\cos(270^\circ+25^\circ)=\sin 25^\circ$$

$$\cos 335^\circ=\cos(360^\circ-25^\circ)=\cos 25^\circ$$

بنابراین $A=\dfrac{-\sin 25^\circ+3\cos 25^\circ}{3\sin 25^\circ+\cos 25^\circ}$. صورت و مخرج کسر A را بر $\sin 25^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{-\frac{\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ}+\frac{3\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}{\frac{3\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ}+\frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}}=\frac{-1+3\cot 25^\circ}{3+\cot 25^\circ}=\frac{-1+3a}{3+a}=\frac{3a-1}{a+3}$$

۴۶۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan(\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\cot\frac{9\pi}{4}=\cot(2\pi+\frac{\pi}{4})=\cot\frac{\pi}{4}=1$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

بنابراین $A=-\frac{1}{2}\times 1-1\times\frac{1}{2}=-1$.

۴۶۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$، آنگاه $\sin\beta=\cos\alpha$. بنابراین

$$\frac{\pi}{16}+\frac{7\pi}{16}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{7\pi}{16}=\sin\frac{\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{16}+\frac{5\pi}{16}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{5\pi}{16}=\sin\frac{3\pi}{16}$$

پس

$$A=\cos^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}+\sin^2\frac{3\pi}{16}+\sin^2\frac{\pi}{16}$$

$$=(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16})+(\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16})=1+1=2$$

۴۷۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=180^\circ$، آنگاه $\cos\beta=-\cos\alpha$. بنابراین

$$\cos 179^\circ=-\cos 1^\circ\ ,\quad \cos 178^\circ=-\cos 2^\circ,\ \dots\ ,$$

$$\cos 92^\circ=-\cos 88^\circ\ ,\quad \cos 91^\circ=-\cos 89^\circ$$

پس $A=\dfrac{\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\dots+\cos 89^\circ}{-\cos 1^\circ-\cos 2^\circ-\dots-\cos 89^\circ}=-1$.

۴۷۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$. در نتیجه

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

۴۷۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\cos\hat{A}>0$ و $\sin\hat{B}<0$. اما از طرف دیگر،

$$\cos\hat{A}=\sqrt{1-\sin^2\hat{A}}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$$

$$\sin\hat{B}=-\sqrt{1-\cos^2\hat{B}}=-\sqrt{1-(-\frac{5}{13})^2}=-\frac{12}{13}$$

بنابراین

$$\cos(\hat{A}+\hat{B})=\cos\hat{A}\cos\hat{B}-\sin\hat{A}\sin\hat{B}$$

$$=\frac{4}{5}\times(-\frac{5}{13})-\frac{3}{5}\times(-\frac{12}{13})=\frac{16}{5\times 13}=\frac{16}{65}$$

۴۷۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\frac{3}{10}=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\frac{1}{2}=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

اگر این تساوی‌ها را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{2}=2\sin\alpha\cos\beta\Rightarrow\sin\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$$

۴۷۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

بنابراین

$$\sin 75^\circ+\cos 75^\circ=\sqrt{2}\sin(75^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 120^\circ$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

۴۷۵- گزینهٔ ۳ از فرض مسئله نتیجه می‌شود $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$، در نتیجه $\sin(\alpha-\beta)>0$، همچنین $\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$، بنابراین $\cos(\alpha+\beta)<0$، درنتیجه

$$\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\sin 2\alpha=\sin((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=(-\frac{3}{5})(\frac{12}{13})+(-\frac{4}{5})(\frac{5}{13})=\frac{-36-20}{65}=-\frac{56}{65}$$

۴۷۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$61^\circ+29^\circ=90^\circ\Rightarrow\sin 29^\circ=\cos 61^\circ$$

$$31^\circ+59^\circ=90^\circ\Rightarrow\sin 59^\circ=\cos 31^\circ$$

بنابراین صورت کسر مورد نظر برابر است با

$$\sin 61^\circ\sin 31^\circ+\cos 61^\circ\cos 31^\circ=\cos(61^\circ-31^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

از طرف دیگر، مخرج کسر مورد نظر برابر است با

$$\sin 12^\circ\cos 18^\circ+\sin 18^\circ\cos 12^\circ=\sin(12^\circ+18^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

بنابراین، کسر مورد نظر برابر است با $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

۴۷۷- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$A=2(\frac{1}{2}\sin 15^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15^\circ)$$

و در نتیجه

$$A=2(\cos 60^\circ\sin 15^\circ-\sin 60^\circ\cos 15^\circ)$$

$$=2\sin(15^\circ-60^\circ)=-2\sin 45^\circ=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

۴۷۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\qquad \cos(\pi+x)=-\cos x$$

همچنین

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$$

بنابراین عبارت موردنظر برابر است با

$$\frac{\sin x-(-\cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)}=\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)}=\sqrt{2}$$

۴۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle ADE: DE=\sqrt{AE^۲-AD^۲}=\sqrt{۵^۲-۴^۲}=۳$$

$$\triangle ABC: AC=\sqrt{AB^۲+BC^۲}=\sqrt{۱۲^۲+۵^۲}=۱۳$$

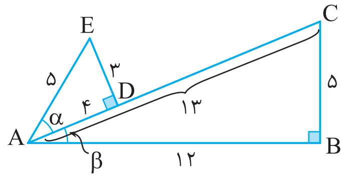
اکنون توجه کنید که

$$\cos\alpha=\frac{۴}{۵},\quad \sin\alpha=\frac{۳}{۵},\quad \cos\beta=\frac{۱۲}{۱۳},\quad \sin\beta=\frac{۵}{۱۳}$$

بنابراین

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{۴}{۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}-\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۱۳}$$

$$=\frac{۳۳}{۵\times۱۳}=\frac{۳۳}{۶۵}$$



۴۸۰- گزینهٔ ۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. در این صورت بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

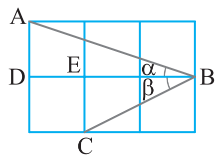
$$\triangle ABD: AB^۲=AD^۲+DB^۲\Rightarrow AB=\sqrt{۱۰}$$

$$\triangle BCE: BC^۲=BE^۲+CE^۲\Rightarrow BC=\sqrt{۵}$$

با توجه به شکل زیر $A\hat{B}C=\alpha+\beta$. بنابراین

$$\cos(A\hat{B}C)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{۲}{\sqrt{۵}}-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



۴۸۱- گزینهٔ ۴ به کمک اتحادهای نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه، به‌دست می‌آید

$$\sin(x+\frac{\pi}{۳})-\cos(x+\frac{\pi}{۶})$$

$$=\sin x\cos\frac{\pi}{۳}+\sin\frac{\pi}{۳}\cos x-\cos x\cos\frac{\pi}{۶}+\sin x\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}\sin x=\sin x$$

۴۸۲- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $\cos\alpha$ و $\sin\beta$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\frac{۱}{۵}+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۴}{۵}$$

$$\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi}\cos\alpha=-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\sin^۲\beta+\cos^۲\beta=۱\Rightarrow\sin^۲\beta+\frac{۹}{۲۵}=۱\Rightarrow\sin^۲\beta=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{\frac{۳\pi}{۲}<\beta<۲\pi}\sin\beta=-\frac{۴}{۵}$$

بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\times\frac{۳}{۵}+(-\frac{۴}{۵})(-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})=\frac{۱۱\sqrt{۵}}{۲۵}$$

۴۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{۱}{۳}=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$-\frac{۱}{۴}=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

اگر دو طرف تساوی‌های بالا را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}=۲\cos\alpha\cos\beta$$

بنابراین $\cos\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲۴}$.

۴۸۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\cos۶۵^\circ=\cos(۹۰^\circ-۲۵^\circ)=\sin۲۵^\circ$$

$$\sin۵۵^\circ=\sin(۹۰^\circ-۳۵^\circ)=\cos۳۵^\circ$$

در نتیجه

$$\sin۳۵^\circ\cos۲۵^\circ+\cos۶۵^\circ\sin۵۵^\circ$$

$$=\sin۳۵^\circ\cos۲۵^\circ+\sin۲۵^\circ\cos۳۵^\circ$$

$$=\sin(۳۵^\circ+۲۵^\circ)=\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴۸۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x+\cos x)$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x)$$

در نتیجه فرض مسئله به تساوی زیر تبدیل می‌شود

$$\sin x+\cos x=۳(\cos x-\sin x)$$

بنابراین

$$۴\sin x=۲\cos x\Rightarrow\tan x=\frac{۱}{۲}$$

۴۸۶- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را بر $۲\sqrt{۳}$ تقسیم می‌کنیم

$$۳\cos x+\sqrt{۳}\sin x=۳\Rightarrow\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}\cos x+\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}\sin x=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۶}\cos x+\sin\frac{\pi}{۶}\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴۸۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sqrt{۳}=\tan۶۰^\circ=\frac{\sin۶۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}$.

بنابراین

$$\cos۱۰^\circ+\sqrt{۳}\sin۱۰^\circ=\cos۱۰^\circ+\frac{\sin۶۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}\sin۱۰^\circ$$

$$=\frac{\cos۶۰^\circ\cos۱۰^\circ+\sin۶۰^\circ\sin۱۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}=\frac{\cos(۶۰^\circ-۱۰^\circ)}{\frac{۱}{۲}}=۲\cos۵۰^\circ$$

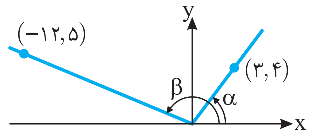
بنابراین $\frac{\cos۱۰^\circ+\sqrt{۳}\sin۱۰^\circ}{\cos۵۰^\circ}=\frac{۲\cos۵۰^\circ}{\cos۵۰^\circ}=۲$.

۴۸۸- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل معلوم می‌شود که

$$\sin\alpha=\frac{۴}{۵},\quad \cos\alpha=\frac{۳}{۵},\quad \sin\beta=\frac{۵}{۱۳},\quad \cos\beta=-\frac{۱۲}{۱۳}$$

بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{۴}{۵}\times(-\frac{۱۲}{۱۳})+\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۱۳}=-\frac{۳۳}{۶۵}$$



۴۸۹- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل، از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

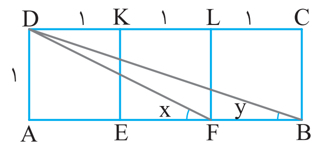
$$DF=\sqrt{AF^{۲}+AD^{۲}}=\sqrt{۵}\,,\quad DB=\sqrt{AB^{۲}+AD^{۲}}=\sqrt{۱۰}$$

بنابراین

$$\sin x=\frac{۱}{\sqrt{۵}},\quad \cos x=\frac{۲}{\sqrt{۵}},\quad \sin y=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}},\quad \cos y=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

در نتیجه

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}-\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}$$



۴۹۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر معلوم می‌شود که $\theta+\alpha+\beta+\frac{\pi}{۲}=۲\pi$. در نتیجه $\theta=\frac{۳\pi}{۲}-(\alpha+\beta)$. بنابراین

$$\cos\theta=\cos(\frac{۳\pi}{۲}-(\alpha+\beta))=-\sin(\alpha+\beta)$$

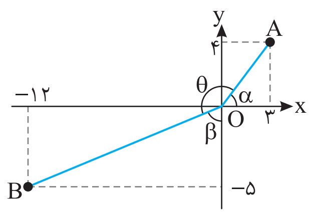
از طرف دیگر، $OA=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵$ و $OB=\sqrt{۵^{۲}+۱۲^{۲}}=۱۳$. پس

$$\sin\alpha=\frac{۴}{۵},\quad \cos\alpha=\frac{۳}{۵},\quad \sin\beta=\frac{۱۲}{۱۳},\quad \cos\beta=\frac{۵}{۱۳}$$

بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{۴}{۵}\times\frac{۵}{۱۳}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}=\frac{۵۶}{۶۵}$$

در نتیجه $\cos\theta=-\frac{۵۶}{۶۵}$.



۴۹۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** صورت کسر A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=۲\cos\alpha\cos\beta$$

مخرج کسر A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=۲\cos\alpha\sin\beta$$

بنابراین $A=\frac{۲\cos\alpha\cos\beta}{۲\cos\alpha\sin\beta}=\cot\beta$.

راه‌حل دوم فرض کنید $\alpha=۰$. در این صورت

$$A=\frac{\cos(-\beta)+\cos\beta}{\sin\beta-\sin(-\beta)}=\frac{۲\cos\beta}{۲\sin\beta}=\cot\beta$$

راه‌حل سوم اگر $\beta=۰$، عبارت A تعریف نمی‌شود و تنها گزینه‌ای که به ازای $\beta=۰$ تعریف نشده، گزینهٔ (۴) است.

۴۹۲- گزینهٔ ۴ چون $\theta\in(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$، پس $\sin\theta<۰$. بنابراین

$$\sin^{۲}\theta=۱-\cos^{۲}\theta=۱-(\frac{-۱۲}{۱۳})^{۲}=\frac{۲۵}{۱۶۹}$$

پس $\sin\theta=-\frac{۵}{۱۳}$. اکنون می‌توان نوشت

$$\cos(\theta+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-\frac{۱۲}{۱۳}+\frac{۵}{۱۳})=-\frac{۷\sqrt{۲}}{۲۶}$$

۴۹۳- گزینهٔ ۲ از تساوی‌های داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=۴\Rightarrow\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{۴}=\frac{\frac{۳}{۸}}{۴}=\frac{۳}{۳۲}$$

بنابراین $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{۳}{۳۲}-\frac{۳}{۸}=-\frac{۹}{۳۲}$.

۴۹۴- گزینهٔ ۱

$$(\sin x+\cos y)^{۲}+(\cos x+\sin y)^{۲}$$
$$=\underbrace{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}_{۱}+\underbrace{\sin^{۲}y+\cos^{۲}y}_{۱}+۲(\sin x\cos y+\cos x\sin y)$$
$$=۱+۱+۲\sin(x+y)=۲(۱+\sin(x+y))=۲(۱+\sin\frac{۵\pi}{۶})=۲(۱+\frac{۱}{۲})=۳$$

۴۹۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$$
$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha-\sin\alpha)\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$
$$=\frac{۱}{۲}(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{۱}{۲}(\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha)$$

در نتیجه $\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha=\frac{۱}{۴}$. از طرف دیگر، $\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha=۱$.

در نتیجه $\sin^{۲}\alpha=\frac{۳}{۸}$ و $\cos^{۲}\alpha=\frac{۵}{۸}$. بنابراین

$$\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha=(\frac{۳}{۸})^{۲}+(\frac{۵}{۸})^{۲}=\frac{۹+۲۵}{۶۴}=\frac{۱۷}{۳۲}$$

۴۹۶- گزینهٔ ۳ چون α و β حاده هستند، پس $۰<\alpha,\beta<\frac{\pi}{۲}$.

بنابراین $۰<\alpha+\beta<\pi$. در نتیجه $\sin(\alpha+\beta)>۰$. اکنون توجه کنید که

$$\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}=\frac{۳}{۵},\quad \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{۱-\cos^{۲}(\alpha+\beta)}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین

$$\sin\beta=\sin((\alpha+\beta)-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$$
$$=\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}-\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۷}{۲۵}$$

۴۹۷- گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که چون $\cos\hat{A}>0$ و $\cos\hat{B}>0$، بنابراین زاویه‌های A و B حاده هستند پس $\sin\hat{A}$ و $\sin\hat{B}$ اعدادی مثبت هستند، پس

$$\sin^2\hat{A}+\cos^2\hat{A}=1\Rightarrow\sin^2\hat{A}+\frac{9}{25}=1\Rightarrow\sin^2\hat{A}=\frac{16}{25}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{4}{5}$$

$$\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}=1\Rightarrow\sin^2\hat{B}+\frac{1}{9}=1\Rightarrow\sin^2\hat{B}=\frac{8}{9}\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

از طرف دیگر،

$$\cos\hat{C}=\cos(\pi-(\hat{A}+\hat{B}))=-\cos(\hat{A}+\hat{B})$$
$$=-\cos\hat{A}\cos\hat{B}+\sin\hat{A}\sin\hat{B}$$

بنابراین $\cos\hat{C}=-\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}-3}{15}$.

پس $15\cos\hat{C}=8\sqrt{2}-3$.

۴۹۸- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\sin a-\cos a=4\sin b\sin(a+b)+4\cos b\cos(a+b)$$
$$=4(\cos((a+b)-b))=4\cos a$$

بنابراین $\sin a=5\cos a\Rightarrow\tan a=5$

۴۹۹- گزینه ۳ با توجه به شکل معلوم می‌شود که

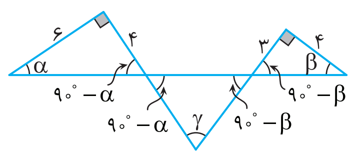
$$\gamma=\alpha+\beta\Rightarrow\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$$

توجه کنید که

$$\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{16+36}}=\frac{4}{\sqrt{52}},\quad\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{52}}$$
$$\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{9+16}}=\frac{3}{5},\quad\cos\beta=\frac{4}{5}$$

بنابراین

$$\sin\gamma=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{4}{\sqrt{52}}\times\frac{4}{5}+\frac{6}{\sqrt{52}}\times\frac{3}{5}=\frac{34}{5\sqrt{52}}=\frac{17}{5\sqrt{13}}$$



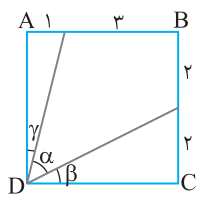
۵۰۰- گزینه ۴ با نامگذاری شکل زیر $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$.

بنابراین $\alpha=90^\circ-(\beta+\gamma)$، توجه کنید که

$$\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{16+4}}=\frac{2}{\sqrt{20}},\quad\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{20}}$$
$$\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{16+1}}=\frac{1}{\sqrt{17}},\quad\cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{16+1}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

و در نتیجه

$$\cos\alpha=\cos(90^\circ-(\beta+\gamma))=\sin(\beta+\gamma)=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$$
$$=\frac{2}{\sqrt{20}}\times\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{20}}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{12}{\sqrt{20}\sqrt{17}}=\frac{6}{\sqrt{85}}$$



۵۰۱- گزینه ۴ توجه کنید که

$$2\cos(a+b)=3\cos(a-b)$$
$$2(\cos a\cos b-\sin a\sin b)=3(\cos a\cos b+\sin a\sin b)$$

در نتیجه $\cos a\cos b=-5\sin a\sin b$. بنابراین

$$\frac{\cos b}{\sin b}=-5\frac{\sin a}{\cos a}\Rightarrow\cot b=-5\tan a=-1$$

۵۰۲- گزینه ۲ توجه کنید $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$.

بنابراین $24\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{24}{\sqrt{2}}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{24}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{4}=3\sqrt{2}$.

۵۰۳- گزینه ۱ توجه کنید که

$$\sin a-\cos b=\frac{2}{3}\Rightarrow(\sin a-\cos b)^2=\frac{4}{9}$$
$$\sin^2 a+\cos^2 b-2\sin a\cos b=\frac{4}{9}\quad(1)$$

همین‌طور،

$$\cos a-\sin b=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow(\cos a-\sin b)^2=\frac{5}{9}$$
$$\cos^2 a+\sin^2 b-2\cos a\sin b=\frac{5}{9}\quad(2)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$(\sin^2 a+\cos^2 a)+(\sin^2 b+\cos^2 b)$$
$$-2(\sin a\cos b+\cos a\sin b)=1$$

بنابراین $1+1-2\sin(a+b)=1$. پس $\sin(a+b)=\frac{1}{2}$.

۵۰۴- گزینه ۲ ابتدا دو طرف هر تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم تا رابطه‌های زیر به‌دست آید

$$\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y=\frac{1}{4}\\ \sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y=\frac{1}{16}\end{cases}$$

با جمع کردن طرفین این دو تساوی معلوم می‌شود

$$\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 y+\cos^2 y+2\underbrace{(\sin x\sin y+\cos x\cos y)}_{\cos(x-y)}$$
$$=\frac{5}{16}\Rightarrow2+2\cos(x-y)=\frac{5}{16}\Rightarrow\cos(x-y)=-\frac{27}{32}$$

۵۰۵- گزینه ۳ می‌توان نوشت

$$\cos17^\circ=\cos(45^\circ-28^\circ)=\cos45^\circ\cos28^\circ+\sin45^\circ\sin28^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos28^\circ+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin28^\circ=\frac{\cos28^\circ+\sin28^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{k^3}{\sqrt{2}}$$

۵۰۶- گزینه ۱ از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\cos(\hat{A}+\hat{B})=-\frac{1}{2}$.

در نتیجه $\cos\hat{C}=\cos(180^\circ-(\hat{A}+\hat{B}))=-\cos(\hat{A}+\hat{B})=\frac{1}{2}$.

۵۰۷- گزینه ۲ توجه کنید که

$$\cos(\hat{A}+\hat{B})=\cos\hat{A}\cos\hat{B}-\sin\hat{A}\sin\hat{B}=0$$

بنابراین $\hat{A}+\hat{B}=90^\circ$ و در نتیجه $\hat{C}=90^\circ$. به این ترتیب $\cos\hat{B}=\sin\hat{A}$ و $\sin\hat{C}=1$ و در نتیجه مقدار عبارت مورد نظر برابر است با ۲.

۵۰۸- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل زیر

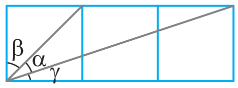
$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{9+1}}=\frac{3}{\sqrt{10}},\qquad \sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

با نمادگذاری شکل زیر، $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$. بنابراین $\alpha=90^\circ-(\beta+\gamma)$ و در نتیجه

$$\sin\alpha=\sin(90^\circ-(\beta+\gamma))=\cos(\beta+\gamma)=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$



۵۰۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که عبارت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$A=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

بنابراین $-1\le\sin(x-\frac{\pi}{6})\le1$، در نتیجه $-2\le2\sin(x-\frac{\pi}{6})\le2$. پس حداقل مقدار عبارت برابر -2 و حداکثر مقدار آن برابر ۲ است.

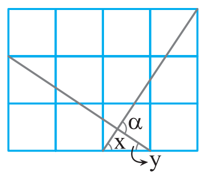
۵۱۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\alpha=x+y$. همچنین با توجه به شکل زیر $\cos x=\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$ و $\sin x=\frac{3}{\sqrt{13}}$. همچنین

$$\sin y=\frac{2}{\sqrt{13}},\qquad \cos y=\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

راه‌حل اول می‌توان نوشت

$$\sin\alpha=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$$

$$=\frac{3}{\sqrt{13}}\times\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{2}{\sqrt{13}}\times\frac{2}{\sqrt{13}}=1$$



راه‌حل دوم با توجه به اینکه $\sin x=\cos y$ و $\sin y=\cos x$، پس زاویه‌های x و y متمم‌اند، بنابراین $\alpha=90^\circ$.

۵۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$. بنابراین

$$\frac{\cos2x}{1-\tan^2x}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}=\cos^2x$$

۵۱۲- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\cos^4\frac{\pi}{8}-\sin^4\frac{\pi}{8}=\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=1\times\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵۱۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $15^\circ+75^\circ=90^\circ$، بنابراین

$$\cos15^\circ=\sin75^\circ$$

در نتیجه $\cos15^\circ\sin75^\circ=\cos15^\circ\cos15^\circ=\cos^2 15^\circ$

از طرف دیگر، $\cos2x=2\cos^2x-1$، پس

$$\cos30^\circ=2\cos^2 15^\circ-1\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos^2 15^\circ-1$$

پس $\cos^2 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$. در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$.

۵۱۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\frac{16}{25}+\cos^2\theta=1$$

$$\cos^2\theta=\frac{9}{25}\xrightarrow{\frac{\pi}{2}<\theta<\pi}\cos\theta=-\frac{3}{5}$$

بنابراین

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$

۵۱۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحادهای $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ نتیجه می‌شود

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin2\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}=8$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin2\alpha}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\frac{1}{4}}=8$$

۵۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin2x=2\sin x\cos x$ و $1+\cos2x=2\cos^2x$، پس

$$A=\frac{\sin2x}{1+\cos2x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=\frac{1}{\cot x}=\frac{1}{3}$$

۵۱۷- گزینهٔ ۳ از اتحاد $1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\frac{1-\cos40^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{2\sin^2 20^\circ}{2\sin20^\circ\cos20^\circ}=\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\tan20^\circ$$

۵۱۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$، بنابراین

$$\frac{\cos80^\circ}{\cos40^\circ-\sin40^\circ}-\sin40^\circ=\frac{\cos(2\times40^\circ)}{\cos40^\circ-\sin40^\circ}-\sin40^\circ$$

$$=\frac{\cos^2 40^\circ-\sin^2 40^\circ}{\cos40^\circ-\sin40^\circ}-\sin40^\circ=(\cos40^\circ+\sin40^\circ)-\sin40^\circ$$

$$=\cos40^\circ$$

۵۱۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\sin^4x+\cos^4x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

بنابراین

$$A=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$$

۵۲۰- گزینه ۳ توجه کنید که $\sin 2x=2\sin x\cos x$، بنابراین

$$\frac{\sin^3 x}{2\sin x-\sin 2x}=\frac{\sin^3 x}{2\sin x-2\sin x\cos x}=\frac{\sin^2 x}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{1-\cos^2 x}{2(1-\cos x)}=\frac{1+\cos x}{2}$$

بنابراین $\frac{1+\cos x}{2}=\frac{2}{3}$ پس $\cos x=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$. در نتیجه

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=\frac{2}{9}-1=-\frac{7}{9}$$

۵۲۱- گزینه ۲ می‌دانیم $\sin 86^\circ=\cos 4^\circ$ و $\sin 78^\circ=\cos 12^\circ$.

بنابراین

$$\frac{\sin 78^\circ}{\sin 86^\circ}-\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}=\frac{\cos 12^\circ}{\cos 4^\circ}-\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}$$

$$=\frac{\sin 4^\circ\cos 12^\circ-\sin 12^\circ\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{\sin(4-12)^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}$$

$$=\frac{-\sin 8^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{-2\sin 4^\circ\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=-2$$

۵۲۲- گزینه ۴ توجه کنید که $2\cos^2 x-1=\cos 2x$ و $2\sin x\cos x=\sin 2x$. بنابراین

$$\sin\frac{\pi}{12}\left(2\cos^2\frac{\pi}{24}-1\right)=\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{2\pi}{24}$$

$$=\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

۵۲۳- گزینه ۱ توجه کنید که $\sin\frac{3\pi}{8}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$.

بنابراین $\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}$.

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. پس

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

۵۲۴- گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x},\quad \cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

بنابراین $\sin 2x+\cos 2x=\frac{2\tan x+1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)+1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{7}{5}$.

۵۲۵- گزینه ۲ توجه کنید که

$$9\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta}=10\Rightarrow 9\cos^2\theta+1=10\cos\theta$$

$$9\cos^2\theta-10\cos\theta+1=0\Rightarrow \cos\theta=1\ (\text{غ.ق.})\ \text{یا}\ \cos\theta=\frac{1}{9}$$

بنابراین $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{1}{9}\right)^2-1=-\frac{79}{81}$.

۵۲۶- گزینه ۳ توجه کنید که $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ و

$$\sin 84^\circ=\sin(90^\circ-6^\circ)=\cos 6^\circ=\cos(2\times 3^\circ)=2\cos^2 3^\circ-1=2a^2-1$$

۵۲۷- گزینه ۱ تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{2}{3}$$

$$\sin^2 2\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow \sin 2\alpha=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

با توجه به اینکه $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع چهارم است، پس $\sin\alpha<0$ و $\cos\alpha>0$، در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<0$. یعنی $\sin 2\alpha<0$. پس $\sin 2\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

۵۲۸- گزینه ۱ توجه کنید که $\sin 50^\circ=\sin(90^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ$ و $2\sin x\cos x=\sin 2x$. بنابراین

$$\frac{\sin 50^\circ\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 40^\circ\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(90^\circ-10^\circ)}{\cos 10^\circ}=\frac{1}{2}\times\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{1}{2}$$

۵۲۹- گزینه ۴ توجه کنید که اگر $x=\frac{\pi}{24}$، آن‌گاه

$$10x+2x=12x=\frac{\pi}{2}$$

پس $\cos 10x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x$، در نتیجه

$$\cos 10x\cos 2x=\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 4x$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(4\times\frac{\pi}{24}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

۵۳۰- گزینه ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\tan 50^\circ=\tan(90^\circ-40^\circ)=\cot 40^\circ$$

بنابراین

$$\tan 50^\circ-\tan 40^\circ=\cot 40^\circ-\tan 40^\circ=\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}-\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}$$

$$=\frac{\cos^2 40^\circ-\sin^2 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\cos(2\times 40^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(2\times 40^\circ)}=\frac{2\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$=2\cot 80^\circ=2\cot(90^\circ-10^\circ)=2\tan 10^\circ$$

بنابراین $\frac{\tan 50^\circ-\tan 40^\circ}{2}=\tan 10^\circ$.

راه‌حل دوم از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan 50^\circ-\tan 40^\circ}{2}=\frac{\cot 40^\circ-\tan 40^\circ}{2}=\frac{2\cot 80^\circ}{2}=\tan 10^\circ$$

۵۳۱- گزینه ۱ از عبارت $\sin x\cos x$ فاکتور می‌گیریم

$$A=\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

۵۳۲- گزینه ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$$

$$1+\sin 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin 2x=-\frac{3}{4}$$

۵۳۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}\qquad(\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi)$$

به این ترتیب

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۴}{۵})(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱=۲\times\frac{۹}{۲۵}-۱=-\frac{۷}{۲۵}$$

بنابراین $\tan ۲\alpha=\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=\frac{۲۴}{۷}$.

۵۳۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** بنابر فرض $\sin x=\frac{۵}{۲}\cos x$. دو طرف این تساوی را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin^{۲}x=\frac{۵}{۲}\cos x\sin x\qquad(۱)$$

همچنین، بنابر فرض، $\cos x=\frac{۲}{۵}\sin x$. دو طرف این تساوی را در $\cos x$ ضرب می کنیم:

$$\cos^{۲}x=\frac{۲}{۵}\sin x\cos x\qquad(۲)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$۱=\frac{۵}{۲}\sin x\cos x+\frac{۲}{۵}\sin x\cos x\Rightarrow ۱=\frac{۲۹}{۱۰}\sin x\cos x$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{۱۰}{۲۹}$ و در نتیجه $\sin ۲x=\frac{۲۰}{۲۹}$.

راه‌حل دوم دو طرف تساوی $۲\sin x=۵\cos x$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴\sin^{۲}x=۲۵\cos^{۲}x$$

با توجه به $\sin^{۲}x+\cos^{۲}x=۱$ نتیجه می‌شود

$$۴\sin^{۲}x=۲۵(۱-\sin^{۲}x)\Rightarrow ۲۹\sin^{۲}x=۲۵\Rightarrow\sin^{۲}x=\frac{۲۵}{۲۹}$$

$$\cos^{۲}x=۱-\frac{۲۵}{۲۹}=\frac{۴}{۲۹}\Rightarrow\sin^{۲}x\cos^{۲}x=\frac{۱۰۰}{۲۹^{۲}}$$

$$\sin x\cos x=\frac{۱۰}{۲۹}\Rightarrow\sin ۲x=\frac{۲۰}{۲۹}$$

توجه کنید که با توجه به فرض مسئله $\sin x$ و $\cos x$ هم‌علامت هستند و $\sin x\cos x$ مقداری مثبت دارد.

راه‌حل سوم از $۲\sin x=۵\cos x$ نتیجه می‌شود $\tan x=\frac{۵}{۲}$، پس

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}=\frac{۲\times\frac{۵}{۲}}{۱+\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۲۰}{۲۹}$$

۵۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sin ۲x}{\sin ۲y}=\frac{۲\sin x\cos x}{۲\sin y\cos y}=\frac{\sin x}{\sin y}\times\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{۴\sin y}{\sin y}\times\frac{\cos x}{۳\cos x}=\frac{۴}{۳}$$

۵۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x-\cos x)^{۲}=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow\sin^{۲}x+\cos^{۲}x-۲\sin x\cos x=\frac{۱۶}{۹}$$

$$-۲\sin x\cos x=\frac{۷}{۹}\Rightarrow\sin x\cos x=-\frac{۷}{۱۸}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$A=\frac{\cos^{۳}x+\sin^{۳}x}{\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos^{۲}x+\sin^{۲}x-\sin x\cos x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\frac{۱-\sin x\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{۱+\frac{۷}{۱۸}}{-\frac{۴}{۳}}=-\frac{۲۵}{۲۴}$$

۵۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin ۱۱۰^\circ=\sin(۹۰^\circ+۲۰^\circ)=\cos ۲۰^\circ$

و $\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha=\cos ۲\alpha$، بنابراین

$$\frac{\sin^{۲}۱۱۰^\circ-\sin^{۲}۲۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}=\frac{\cos^{۲}۲۰^\circ-\sin^{۲}۲۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}=\frac{\cos(۲\times ۲۰^\circ)}{\sin ۵۰^\circ}=\frac{\cos ۴۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos ۴۰^\circ=\cos(۹۰^\circ-۵۰^\circ)=\sin ۵۰^\circ$. بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۵۳۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $۱+\cos ۲x=۲\cos^{۲}x$، بنابراین $۱+\cos ۴۰^\circ=۲\cos^{۲}۲۰^\circ$. از طرف دیگر، $۵۵^\circ+۳۵^\circ=۹۰^\circ$، پس $\cos ۵۵^\circ=\sin ۳۵^\circ$. به این ترتیب

$$\frac{۱+\cos ۴۰^\circ}{\cos ۵۵^\circ\cos ۳۵^\circ}=\frac{۲\cos^{۲}۲۰^\circ}{\sin ۳۵^\circ\cos ۳۵^\circ}=\frac{۲\cos^{۲}۲۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\times ۳۵^\circ)}=\frac{۴\cos^{۲}۲۰^\circ}{\sin ۷۰^\circ}$$

اکنون توجه کنید که $۲۰^\circ+۷۰^\circ=۹۰^\circ$، پس $\cos ۲۰^\circ=\sin ۷۰^\circ$. در نتیجه کسر مورد نظر برابر است با $\frac{۴\cos^{۲}۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=۴\cos ۲۰^\circ$.

۵۳۹- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos a\cos ۲a=\frac{۱}{۱۶\sin a}\Rightarrow ۲\sin a\cos a\cos ۲a=\frac{۱}{۸}$$

$$\sin ۲a\cos ۲a=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sin ۴a=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\sin ۴a=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه $\cos ۸a=۱-۲\sin^{۲}۴a=۱-۲(\frac{۱}{۴})^{۲}=\frac{۷}{۸}$.

۵۴۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^{۶}x+\cos^{۶}x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x$$

$$\frac{۴}{۵}=۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x\Rightarrow\sin^{۲}۲x=\frac{۴}{۱۵}$$

بنابراین $\cos^{۲}۲x=۱-\sin^{۲}۲x=۱-\frac{۴}{۱۵}=\frac{۱۱}{۱۵}$.

۵۴۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم

$$\tan ۷۵^\circ-\tan ۱۵^\circ=\frac{\sin ۷۵^\circ}{\cos ۷۵^\circ}-\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}$$

$$=\frac{\sin ۷۵^\circ\cos ۱۵^\circ-\sin ۱۵^\circ\cos ۷۵^\circ}{\cos ۷۵^\circ\cos ۱۵^\circ}=\frac{\sin(۷۵^\circ-۱۵^\circ)}{\sin ۱۵^\circ\times\cos ۱۵^\circ}$$

$$=\frac{\sin ۶۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\tan 75^\circ-\tan 15^\circ=\cot 15^\circ-\tan 15^\circ=2\cot 30^\circ=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

۵۴۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ و $1+\cos 2x=2\cos^2 x$. بنابراین

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=2\Rightarrow\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=2\Rightarrow\tan^2 x=2\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{2}$$

چون $\frac{\pi}{2}<x<\pi$، مقدار $\sqrt{2}$ قابل قبول نیست. پس

$$\tan x=-\sqrt{2}\Rightarrow\cot x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه $\tan x+2\cot x=-\sqrt{2}-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$.

۵۴۳- گزینهٔ ۲ اگر در اتحاد $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ قرار دهیم $\alpha=\frac{x}{2}$، اتحاد $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ به‌دست می‌آید. پس

$$A=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{8}}}=\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{8})}}=\sqrt{2+\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\frac{\pi}{8}}{2}}}$$

$$=\sqrt{2+2\left|\cos\frac{\pi}{16}\right|}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{16}}=\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{16})}$$

$$=\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\pi}{32}}=2\left|\cos\frac{\pi}{32}\right|=2\cos\frac{\pi}{32}$$

۵۴۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sin^4\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{2\pi}{12}$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

۵۴۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\tan^2 x+\cot^2 x=(\tan x+\cot x)^2-2\tan x\cot x$$

$$=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2-2=\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}\right)^2-2$$

$$=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}\right)^2-2=\frac{4}{\sin^2 2x}-2$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=\frac{\pi}{8}$، به‌دست می‌آید

$$\tan^2\frac{\pi}{8}+\cot^2\frac{\pi}{8}=\frac{4}{\sin^2\frac{\pi}{4}}-2=\frac{4}{\frac{1}{2}}-2=6$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^2\frac{\pi}{8}+\cot^2\frac{\pi}{8}=(\tan\frac{\pi}{8}+\cot\frac{\pi}{8})^2-2=\left(\frac{2}{\sin\frac{2\pi}{8}}\right)^2-2$$

$$=\frac{4}{\frac{1}{2}}-2=8-2=6$$

۵۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha\,,\quad \cot\alpha+\tan\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین، اگر اتحادهای فوق را برای $\alpha=\frac{x}{2}$ استفاده کنیم، می‌توان نوشت

$$A=\tan^2\frac{x}{2}-\cot^2\frac{x}{2}=(\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2})(\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2})$$

$$=\frac{2}{\sin x}\times(-2\cot x)=-\frac{4\cot x}{\sin x}$$

از طرف دیگر،

$$1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}\xrightarrow{\cot x=\frac{1}{\tan x}=\frac{3}{4}}1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x=\frac{16}{25}\xrightarrow{0<x<\frac{\pi}{2}}\sin x=\frac{4}{5}$$

بنابراین $A=\dfrac{-4\times\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}=-\frac{15}{4}$.

۵۴۷- گزینهٔ ۳ از اتحاد $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{2}\cos 10^\circ+1}+1=\frac{2\cos^2 10^\circ-1}{\sqrt{2}\cos 10^\circ+1}+1$$

$$=\frac{(\sqrt{2}\cos 10^\circ+1)(\sqrt{2}\cos 10^\circ-1)}{\sqrt{2}\cos 10^\circ+1}+1=\sqrt{2}\cos 10^\circ-1+1$$

$$=\sqrt{2}\cos 10^\circ=\sqrt{2}\cos(90^\circ-80^\circ)=\sqrt{2}\sin 80^\circ$$

۵۴۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $2m-1$ است. بنابراین

$$\tan\alpha\cot\alpha=2m-1\Rightarrow 1=2m-1\Rightarrow m=1$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $m+3$ است. پس

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m+3=4\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=4$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=4\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=4\Rightarrow\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم برای تعیین $\sin 2\alpha$ می‌توانیم از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m+3=4\Rightarrow\frac{2}{\sin 2\alpha}=4\Rightarrow\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$$

۵۴۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** تساوی داده شده را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^2 x+\cot^2 x=5\Rightarrow(\tan x+\cot x)^2-2\tan x\cot x=5$$

$$(\tan x+\cot x)^2=7\Rightarrow\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=7$$

$$\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\right)^2=7\Rightarrow\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}\right)^2=7$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x}=7\Rightarrow\sin^2 2x=\frac{4}{7}$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^2 x+\cot^2 x=5\Rightarrow(\tan x+\cot x)^2-2=5$$

$$\left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2-2=5\Rightarrow\frac{4}{\sin^2 2x}=7\Rightarrow\sin^2 2x=\frac{4}{7}$$

۵۵۰- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای

$$\begin{cases}\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\\ \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{1+\sin 40^\circ-\cos 40^\circ}{1+\sin 40^\circ+\cos 40^\circ}=\frac{1+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ-(1-2\sin^2 20^\circ)}{1+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+2\cos^2 20^\circ-1}$$

$$=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+2\sin^2 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+2\cos^2 20^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ(\cos 20^\circ+\sin 20^\circ)}{2\cos 20^\circ(\sin 20^\circ+\cos 20^\circ)}$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\tan 20^\circ$$

۵۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$. بنابراین

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt3}{3}}{1+\frac{\sqrt3}{3}}=\frac{3-\sqrt3}{3+\sqrt3}$$

$$=\frac{(3-\sqrt3)^2}{3^2-3}=\frac{9+3-6\sqrt3}{6}=2-\sqrt3$$

۵۵۲- گزینهٔ ۲ با توجه به رابطه $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{6}{7}$$

۵۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مقدار m را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow 3-\frac{2}{m}=\frac{m+\frac{2}{m}}{1-m\left(\frac{2}{m}\right)}$$

$$3-\frac{2}{m}=-m-\frac{2}{m}\Rightarrow m=-3$$

بنابراین $\tan\alpha=-3$، $\tan\beta=-\frac{2}{3}$ و در نتیجه

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3+\frac{2}{3}}{1-3\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{7}{9}$$

۵۵۴- گزینهٔ ۳ از روابط مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-5x-2=0$ نتیجه می‌شود $\tan\alpha+\tan\beta=5$ و $\tan\alpha\tan\beta=-2$.

بنابراین $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{1+2}=\frac{5}{3}$.

۵۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$A=\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 75^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 75^\circ}$$

بنابراین

$$A=\tan(45^\circ+75^\circ)=\tan 120^\circ=-\tan 60^\circ=-\sqrt3$$

۵۵۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan(50^\circ+\alpha)=\tan(45^\circ+(5^\circ+\alpha))=\frac{\tan 45^\circ+\tan(5^\circ+\alpha)}{1-\tan 45^\circ\tan(5^\circ+\alpha)}=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$$

۵۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $20^\circ+25^\circ=45^\circ$. اگر از دو طرف این تساوی تانژانت بگیریم، نتیجه می‌شود

$$1=\tan(20^\circ+25^\circ)=\frac{\tan 20^\circ+\tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ\tan 25^\circ}$$

$$1-\tan 20^\circ\tan 25^\circ=\tan 20^\circ+\tan 25^\circ$$

$$\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ=1$$

از طرف دیگر،

$$(1+\tan 20^\circ)(1+\tan 25^\circ)=1+\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ$$

$$=1+1=2$$

۵۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\cot\hat{A}=3\Rightarrow\tan\hat{A}=\frac{1}{3}\ ,\quad \cot\hat{B}=\frac{1}{2}\Rightarrow\tan\hat{B}=2$$

از طرف دیگر، $\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})$، در نتیجه

$$\tan\hat{C}=\tan(180^\circ-(\hat{A}+\hat{B}))=-\tan(\hat{A}+\hat{B})$$

$$=-\frac{\tan\hat{A}+\tan\hat{B}}{1-\tan\hat{A}\tan\hat{B}}=-\frac{\frac{1}{3}+2}{1-\frac{1}{3}\times 2}=-7$$

۵۵۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\tan\alpha=4$ و $\tan\beta=\frac{2}{3}$.

بنابراین $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4+\frac{2}{3}}{1-4\times\frac{2}{3}}=-\frac{14}{5}$.

۵۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

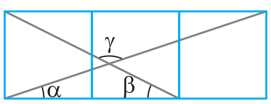
$$\tan\alpha=\frac{1}{3},\quad \tan\beta=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1$$

از طرف دیگر، چون $0<\tan\alpha,\tan\beta<1$ و تابع تانژانت روی بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است، پس $0^\circ<\alpha,\beta<45^\circ$، در نتیجه $0^\circ<\alpha+\beta<90^\circ$.

بنابراین $\alpha+\beta=45^\circ$. در نتیجه $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)=135^\circ$.



۵۶۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3}=\frac{1+3+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$$

۵۶۲- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow 3=\frac{2-\tan\beta}{1+2\tan\beta}$$

$$3+6\tan\beta=2-\tan\beta\Rightarrow 7\tan\beta=-1\Rightarrow\tan\beta=-\frac{1}{7}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $\beta=\alpha-(\alpha-\beta)$. بنابراین

$$\tan\beta=\tan(\alpha-(\alpha-\beta))=\frac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{2-3}{1+2\times3}=-\frac{1}{7}$$

۵۶۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\tan(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan x-1}{1+\tan x}$، بنابراین

$$\frac{\tan x-1}{1+\tan x}=4\Rightarrow 4+4\tan x=\tan x-1\Rightarrow\tan x=-\frac{5}{3}$$

۵۶۴- گزینهٔ ۱ از رابطهٔ مربوط به حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود

$$\cot\alpha\cot\beta=-2\Rightarrow\frac{1}{\tan\alpha}\times\frac{1}{\tan\beta}=-2\Rightarrow\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{2}$$

از رابطهٔ مربوط به مجموع جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود

$$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=6$$

پس

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=6\xrightarrow{\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{2}}\tan\alpha+\tan\beta=-3$$

بنابراین

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3}{1-(-\frac{1}{2})}=-2$$

پس $\cot(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$.

۵۶۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cot 50^\circ=\cot(90^\circ-40^\circ)=\tan 40^\circ$. بنابراین

$$\frac{\tan 50^\circ-\cot 50^\circ}{1+\tan 50^\circ\cot 50^\circ}=\frac{\tan 50^\circ-\tan 40^\circ}{1+\tan 50^\circ\tan 40^\circ}=\tan(50^\circ-40^\circ)=\tan 10^\circ$$

۵۶۶- گزینهٔ ۱ ابتدا از دو طرف تساوی $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\frac{1}{3}}=1\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=\frac{4}{3}$$

اکنون باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=\frac{4}{3}\\ \tan\alpha\tan\beta=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $\tan\beta=\frac{4}{3}-\tan\alpha$ که اگر در معادلهٔ دوم به جای $\tan\beta$ مقدار مساوی آن، یعنی $\frac{4}{3}-\tan\alpha$ را قرار دهیم، معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\tan\alpha(\frac{4}{3}-\tan\alpha)=\frac{-1}{3}\Rightarrow 3\tan^2\alpha-4\tan\alpha-1=0$$

پس $\tan\alpha=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ که از حاده بودن α نتیجه می‌شود $\tan\alpha=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

۵۶۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از دو طرف تساوی $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$ تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=-1\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=-1+\tan\alpha\tan\beta$$

$$\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta=-1$$

از طرف دیگر،

$$A=(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=1-\tan\beta-\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta$$

$$=1-(\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta)=1-(-1)=2$$

۵۶۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$5x+7y=2(2x+3y)+x+y=180^\circ+x+y$$

بنابراین

$$\tan(5x+7y)=\tan(180^\circ+x+y)=\tan(x+y)$$

$$=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{2+3}{1-2\times3}=-1$$

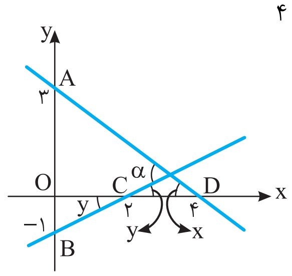
۵۶۹- گزینهٔ ۲ با نمادگذاری شکل زیر نتیجه می‌شود که $\alpha=x+y$.

از طرف دیگر،

$$\triangle AOD:\tan x=\frac{3}{4}\ ,\qquad\triangle OBC:\tan y=\frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{3}{8}}=2$$



۵۷۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cot x-\tan x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2\cot 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cot 2x=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه

$$\tan 2x=-4$$

بنابراین

$$\tan 4x=\frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x}=\frac{-8}{1-16}=\frac{8}{15}$$

۵۷۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید $\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۶}$. بنابراین

$$\tan\frac{۵\pi}{۱۲}=\tan(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۶})=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan\frac{\pi}{۶}}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}\tan\frac{\pi}{۶}}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}$$

$$=\frac{(۳+\sqrt{۳})^۲}{(۳-\sqrt{۳})(۳+\sqrt{۳})}=\frac{۹+۳+۶\sqrt{۳}}{۹-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

۵۷۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که از $\cot a\cot b=۳$ نتیجه می‌شود $\tan a\tan b=\frac{۱}{۳}$. از طرف دیگر

$$\cot(a-b)=\frac{۱}{\tan(a-b)}=\frac{۱+\tan a\tan b}{\tan a-\tan b}=\frac{۱+\frac{۱}{۳}}{۲}=\frac{۲}{۳}$$

۵۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow\tan^۲ x=\frac{۱۶}{۹}\xrightarrow{\text{x حاده است}}\tan x=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

$$\tan(\frac{\pi}{۴}+x)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan x}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}\tan x}=\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}=\frac{۱+\frac{۴}{۳}}{۱-\frac{۴}{۳}}=-۷$$

۵۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin x=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\xrightarrow[\text{است}]{\text{x حاده}}\cos x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\tan x=\frac{۳}{۴}$$

$$\sin y=\frac{۵}{۱۳}\Rightarrow\cos^۲ y=۱-\sin^۲ y=\frac{۱۴۴}{۱۶۹}$$

$$\xrightarrow[\text{است}]{\text{y منفرجه}}\cos y=-\frac{۱۲}{۱۳}\Rightarrow\tan y=-\frac{۵}{۱۲}$$

در نتیجه $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}=\frac{\frac{۳}{۴}-\frac{۵}{۱۲}}{۱+\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۱۶}{۶۳}$.

۵۷۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴})=۲\Rightarrow\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}=۲\Rightarrow\frac{\tan x+۱}{۱-\tan x}=۲$$

$$\tan x+۱=۲-۲\tan x\Rightarrow ۳\tan x=۱\Rightarrow\tan x=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین

$$\tan(x+\frac{\pi}{۶})=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{۶}}{۱-\tan x\tan\frac{\pi}{۶}}=\frac{\frac{۱}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۳+۳\sqrt{۳}}{۹-\sqrt{۳}}$$

$$=\frac{(۳+۳\sqrt{۳})(۹+\sqrt{۳})}{(۹-\sqrt{۳})(۹+\sqrt{۳})}=\frac{۲۷+۳\sqrt{۳}+۲۷\sqrt{۳}+۹}{۸۱-۳}=\frac{۶+۵\sqrt{۳}}{۱۳}$$

۵۷۶- گزینهٔ ۳ از تساوی $\alpha-\beta=\frac{۷\pi}{۴}$ نتیجه می‌شود

$$\tan(\alpha-\beta)=-۱$$

بنابراین

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}=-۱\Rightarrow\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱-۶}=-۱\Rightarrow\tan\alpha-\tan\beta=۵$$

اکنون باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}\tan\alpha-\tan\beta=۵\\ \tan\alpha\tan\beta=-۶\end{cases}$$

اگر از معادلهٔ اول $\tan\beta$ را برحسب $\tan\alpha$ نوشته و در معادلهٔ دوم جای‌گذاری کنیم، به معادلهٔ $\tan\alpha(\tan\alpha-۵)=-۶$ می‌رسیم. پس

$$\tan^۲\alpha-۵\tan\alpha+۶=۰\Rightarrow\tan\alpha=۲ \text{ یا } \tan\alpha=۳$$

۵۷۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که عبارت $\tan x+\tan y$ در صورت بسط $\tan(x+y)$ آمده است. بنابراین خوب است که عبارت $\tan(۲۰^\circ+۲۵^\circ)$ را تشکیل دهیم:

$$\tan(۲۰^\circ+۲۵^\circ)=\frac{\tan ۲۰^\circ+\tan ۲۵^\circ}{۱-\tan ۲۰^\circ\tan ۲۵^\circ}\Rightarrow ۱=\frac{\tan ۲۰^\circ+\tan ۲۵^\circ}{۱-\tan ۲۰^\circ\tan ۲۵^\circ}$$

اگر این تناسب را طرفین - وسطین کنیم، به‌دست می‌آید

$$\tan ۲۰^\circ+\tan ۲۵^\circ=۱-\tan ۲۰^\circ\tan ۲۵^\circ$$

$$\tan ۲۰^\circ+\tan ۲۵^\circ+\tan ۲۰^\circ\tan ۲۵^\circ=۱$$

۵۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که از $\sin(\alpha+\beta)=۲\sin\alpha\sin\beta$، نتیجه می‌شود که $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=۲\sin\alpha\sin\beta$. اگر طرفین را بر $\sin\alpha\cos\beta$ تقسیم کنیم، می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=۲\Rightarrow\frac{۱}{\tan\beta}+\frac{۱}{\tan\alpha}=۲$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=۲\tan\alpha\tan\beta\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=-۶$$

بنابراین $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-۶}{۱-(-۳)}=-\frac{۳}{۲}$.

۵۷۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

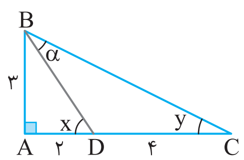
$$\tan\beta=\tan((\alpha+\beta)-\alpha)=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{۱+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{-۱-۳}{۱-۳}=۲$$

بنابراین $\tan ۲\beta=\frac{۲\tan\beta}{۱-\tan^۲\beta}=\frac{۴}{۱-۴}=-\frac{۴}{۳}$.

۵۸۰- گزینهٔ ۴ با نمادگذاری شکل زیر، $x=\alpha+y$، پس $\alpha=x-y$.

از طرف دیگر $\triangle ABC:\tan y=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$, $\triangle ABD:\tan x=\frac{۳}{۲}$

بنابراین $\tan\alpha=\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{۱+\tan x\tan y}=\frac{\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۴}{۷}$.



۵۸۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cot(\alpha+\beta)=\frac{۱}{\tan(\alpha+\beta)}$. بنابراین

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{۱}{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}}=\frac{۱-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

$$=\frac{۱-\frac{۱}{\cot\alpha}\times\frac{۱}{\cot\beta}}{\frac{۱}{\cot\alpha}+\frac{۱}{\cot\beta}}=\frac{\cot\alpha\cot\beta-۱}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

۵۸۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\cot a-\cot b=۲\Rightarrow\frac{۱}{\tan a}-\frac{۱}{\tan b}=۲\Rightarrow\frac{\tan b-\tan a}{\tan a\tan b}=۲$$

چون $\tan a\tan b=۳$، پس

$$\frac{\tan b-\tan a}{۳}=۲\Rightarrow\tan a-\tan b=-۶$$

بنابراین $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{۱+\tan a\tan b}=\frac{-۶}{۱+۳}=-\frac{۳}{۲}$.

۵۸۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=۲\alpha$. بنابراین

$$\tan ۲\alpha=\tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{-۲+۳}{۱-(-۲)(۳)}=\frac{۱}{۷}$$

۵۸۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\tan x+۱}{۱-\tan x}$$

$$\tan(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{۴}}{۱+\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\tan x-۱}{۱+\tan x}$$

در نتیجه

$$\cot(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\tan(x+\frac{\pi}{۴})}=\frac{۱-\tan x}{\tan x+۱}$$

$$\cot(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\tan(x-\frac{\pi}{۴})}=\frac{۱+\tan x}{\tan x-۱}$$

بنابراین

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴})+\tan(x-\frac{\pi}{۴})=-(\cot(x+\frac{\pi}{۴})+\cot(x-\frac{\pi}{۴}))$$

و مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱− است.

۵۸۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\frac{\pi}{۹}-\alpha)+(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶})=\frac{\pi}{۴}$، بنابراین

$$\frac{\pi}{۹}-\alpha=\frac{\pi}{۴}-(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶})\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{۹}-\alpha)=\tan(\frac{\pi}{۴}-(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶}))$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶})}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶})}=\frac{۱-\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

۵۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\tan ۴۰^\circ+۲\tan ۱۰^\circ=\tan ۴۰^\circ+۲\tan(۵۰^\circ-۴۰^\circ)$$

$$=\tan ۴۰^\circ+۲\times\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۱+\tan ۵۰^\circ\tan ۴۰^\circ}$$

$$=\tan ۴۰^\circ+۲\times\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۱+\cot ۴۰^\circ\tan ۴۰^\circ}$$

$$=\tan ۴۰^\circ+۲\times\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}=\tan ۵۰^\circ$$

۵۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$. بنابراین

$$\tan(۸۰^\circ-۲۰^\circ)=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\tan ۸۰^\circ-\tan ۲۰^\circ}{۱+\tan ۲۰^\circ\tan ۸۰^\circ}=\sqrt{۳}$$

$$\tan ۸۰^\circ-\tan ۲۰^\circ=\sqrt{۳}+\sqrt{۳}\tan ۲۰^\circ\tan ۸۰^\circ$$

$$\tan ۸۰^\circ-\tan ۲۰^\circ-\sqrt{۳}\tan ۲۰^\circ\tan ۸۰^\circ=\sqrt{۳}$$

پس

$$\tan ۲۰^\circ-\tan ۸۰^\circ+\sqrt{۳}\tan ۲۰^\circ\tan ۸۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

۵۸۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{۴}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+۱}{۱-\tan\alpha}=\frac{\tan\alpha-۱+۲}{۱-\tan\alpha}$$

$$=-۱+\frac{۲}{۱-\tan\alpha}$$

چون $\frac{۱}{۲}\leq\tan\alpha<۱$، بنابراین

$$-۱<-\tan\alpha\leq-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰<۱-\tan\alpha\leq\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰<\frac{۱-\tan\alpha}{۲}\leq\frac{۱}{۴}$$

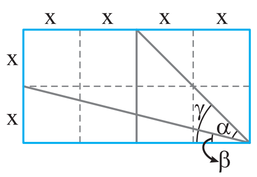
$$\frac{۲}{۱-\tan\alpha}\geq ۴\Rightarrow -۱+\frac{۲}{۱-\tan\alpha}\geq ۳\Rightarrow\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})\geq ۳$$

بنابراین حداقل مقدار $\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})$ برابر ۳ است.

۵۸۹- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر $\alpha=\gamma-\beta$ و در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{۱+\tan\gamma\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{۲x}{۲x}-\frac{x}{۴x}}{۱+\frac{۲x}{۲x}\times\frac{x}{۴x}}=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{۳}{۵}$$



۵۹۰- گزینهٔ ۴ با نمادگذاری شکل زیر

$$\alpha+x+۴۵^\circ+y+۴۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۹۰^\circ-(x+y)$$

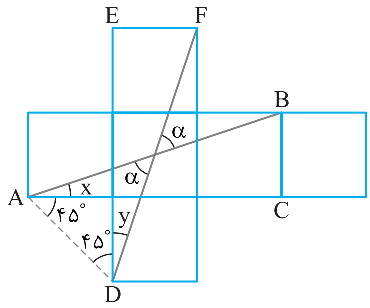
از طرف دیگر،

$$\triangle ABC:\tan x=\frac{۱}{۳}\ ,\quad \triangle DEF:\tan y=\frac{۱}{۳}$$

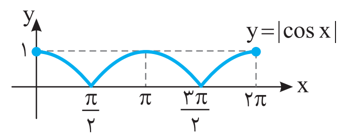
بنابراین

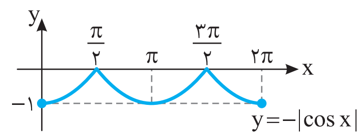
$$\tan\alpha=\tan(90^\circ-(x+y))=\cot(x+y)=\frac{1}{\tan(x+y)}$$

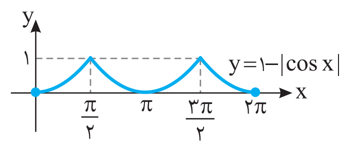
$$=\frac{1-\tan x\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{1-\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}$$



۵۹۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم و قرینهٔ قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به محور طول‌ها رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارند حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\cos x|$ به‌دست آید. نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-|\cos x|$ به‌دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.







۵۹۲- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع از نقاط $(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}-1)$ و $(\frac{\pi}{3},0)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}-1\Rightarrow a\cos\frac{\pi}{4}-b=\sqrt{2}-1\Rightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}-b=\sqrt{2}-1$$

$$f(\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow a\cos\frac{\pi}{3}-b=0\Rightarrow\frac{a}{2}=b$$

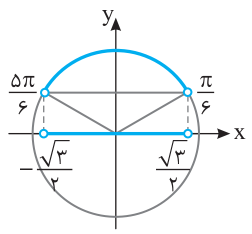
در نتیجه

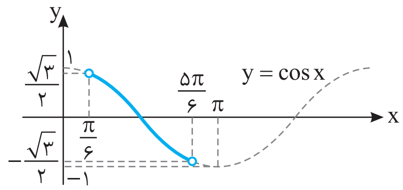
$$\frac{a\sqrt{2}}{2}-b=b\sqrt{2}-b=b(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1\Rightarrow b=1$$

بنابراین $a=2b=2$. پس مقدار ab برابر ۲ است.

۵۹۳- گزینهٔ ۴ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$، آن‌گاه $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$. پس

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}m<\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$$





۵۹۴- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|k|}$، بنابراین

$$\frac{2\pi}{|k|}=\frac{\pi}{2k+1}\Rightarrow|k|=4k+2$$

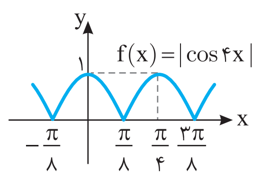
اگر $k>0$، آن‌گاه

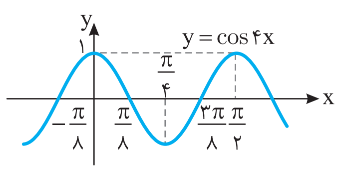
$$k=4k+2\Rightarrow k=-\frac{2}{3}\quad(\text{غ.ق.ق})$$

اگر $k<0$، آن‌گاه

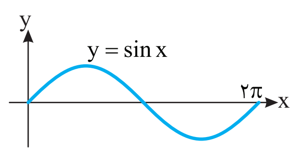
$$-k=4k+2\Rightarrow k=-\frac{2}{5}$$

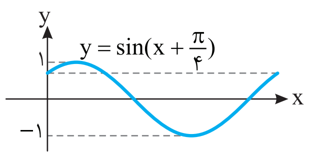
۵۹۵- گزینهٔ ۳ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم است که دورهٔ تناوب آن برابر است با $\frac{\pi}{8}-(-\frac{\pi}{8})=\frac{\pi}{4}$.





۵۹۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ است. بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم و آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ به چپ انتقال دهیم.





۵۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $a-2$ است که با توجه به نمودار تابع برابر -1 است. پس $a-2=-1\Rightarrow a=1$

از طرف دیگر با توجه به نمودار دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{45}{8}-\frac{5}{8}=5$ است. پس

$$T=\frac{2\pi}{|\frac{2\pi}{b}|}=5\Rightarrow |b|=5\Rightarrow b=\pm 5$$

اگر $b=-5$، آن‌گاه $f(x)=1+2\sin(-\frac{2\pi}{5}x+\frac{\pi}{4})$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=0$ نزولی باشد که این‌طور نیست. پس $b=5$ و در نتیجه $b-a=4$.

توجه کنید که اگر $b=-5$، آن‌گاه $f(x)=1+2\sin(-\frac{2\pi}{5}x+\frac{\pi}{4})$ و $f(\frac{5}{8})=1$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

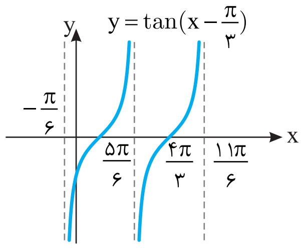
۵۹۸- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع از نامساوی $\{\frac{\pi x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$ به‌دست می‌آید. پس $D_f=\{x\in\mathbb{R}|x\neq 2k+1\,,k\in\mathbb{Z}\}$.

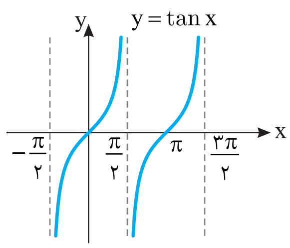
۵۹۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\tan x\ge\tan(-\frac{\pi}{3})$ و در نتیجه $\tan x\ge-\sqrt{3}$. بنابراین

$$\frac{2-m}{\sqrt{3}}\ge-\sqrt{3}\Rightarrow 2-m\ge-3\Rightarrow m\le 5$$

پس حداکثر مقدار m برابر ۵ است.

۶۰۰- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=\tan x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{3})$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$ اکیداً صعودی است و حداقل مقدار a برابر $\frac{5\pi}{6}$ است.

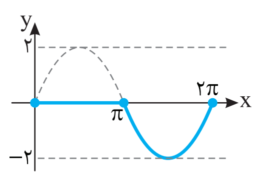




۶۰۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\sin x & 0\le x\le\pi\\ \sin x+\sin x & \pi<x\le 2\pi\end{cases}=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ 2\sin x & \pi<x\le 2\pi\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. توجه کنید که در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ نمودار تابع از دو برابر کردن عرض نقاط روی نمودار تابع $y=\sin x$ به‌دست آمده است.



۶۰۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل $f(0)=2$ و کمترین مقدار تابع برابر ۱ است. بنابراین $f(0)=2a-b=2$ و $f_{min}=2a-b-|a+b|$. با توجه به شکل ضریب $\sin x$ مثبت است، پس مینیمم تابع برابر است با $2a-b-a-b=a-2b$. از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases}2a-b=2\\ a-2b=1\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=1$ و $b=0$. بنابراین $f(x)=\sin x+2$ که بیشترین مقدار آن برابر ۳ است.

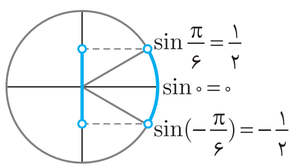
۶۰۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل‌های زیر، اگر $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$، آن‌گاه $-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}$. بنابراین

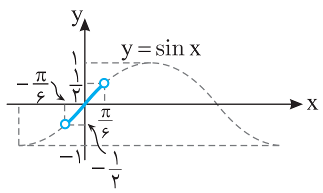
$$-\frac{1}{2}<\frac{m+1}{2m}<\frac{1}{2}\Rightarrow -1<\frac{m+1}{m}<1\Rightarrow \left|\frac{m+1}{m}\right|<1$$

$$|m+1|<|m|,\quad m\neq 0$$

در نتیجه

$$m^2+2m+1<m^2\Rightarrow m<-\frac{1}{2}$$





۶۰۴- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x+2\cos^2 x=1+2\cos^2 x$$

چون $-1\le\cos x\le 1$، پس

$$0\le\cos^2 x\le 1\Rightarrow 0\le 2\cos^2 x\le 2\Rightarrow 1\le 1+2\cos^2 x\le 3\Rightarrow 1\le f(x)\le 3$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[1,3]$ است.

۶۰۵- گزینهٔ ۱ کمترین مقدار تابع f برابر $3a-a^2$ است که وقتی $\cos ax=-1$ اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$3a-a^2=2\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a=1\,,a=2$$

دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس اگر $a=1$، آن‌گاه دورهٔ تناوب این تابع برابر 2π است و اگر $a=2$، آن‌گاه دورهٔ تناوب آن برابر π است.

۶۰۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که از اتحاد $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

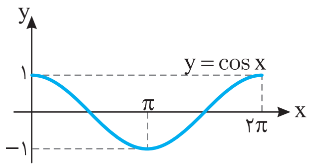
$$f(x)=\cos 4x+\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3\cos 4x+1}{2}$$

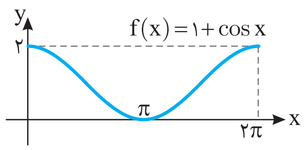
در نتیجه، دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

۶۰۷- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است. توجه کنید که از اتحاد $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$f(x)=2\sin^2(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2})=2\cos^2\frac{x}{2}=2(\frac{1+\cos x}{2})=1+\cos x$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ یک واحد به بالا انتقال دهیم.





۶۰۸- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است. این مقدار زمانی به‌دست می‌آید که $\cos(\frac{\pi}{2}-bx)=1$، پس

$$a+2=1\Rightarrow a=-1$$

در نتیجه

$$f(x)=-1+2\sin bx$$

با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر با $\frac{13\pi}{18}-\frac{\pi}{18}=\frac{2\pi}{3}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow b=\pm 3$$

برای $x>0$ نمودار تابع $f(x)=-1+2\sin bx$ به‌صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b=3$ قابل قبول است، یعنی $f(x)=-1+2\sin 3x$ و مقدار $b-a$ برابر است با ۴. توجه کنید که اگر $b=-3$، آن‌گاه $f(x)=-1+2\sin(-3x)$ و $f(\frac{\pi}{18})=-2$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

۶۰۹- گزینهٔ ۳ تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[0,\frac{\pi}{4}]$ اکیداً صعودی است، پس

$$0\le x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow \tan 0\le\tan x\le\tan\frac{\pi}{4}$$

$$0\le\tan x\le 1\Rightarrow -1\le-\tan x\le 0\Rightarrow 1\le\frac{3-\tan x}{2}\le\frac{3}{2}$$

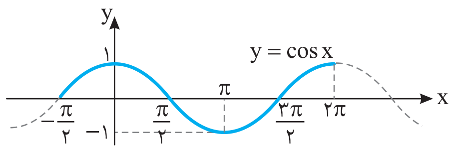
بنابراین $R_f=[1,\frac{3}{2}]$.

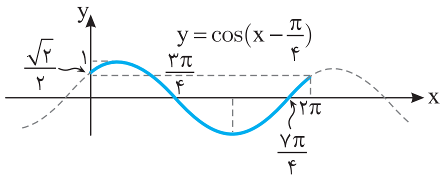
۶۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\tan x>1$ و اگر $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$، آن‌گاه $\tan x<-1$. بنابراین

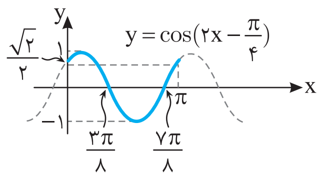
$$\frac{m-1}{2}>1\Rightarrow m-1>2\Rightarrow m>3$$

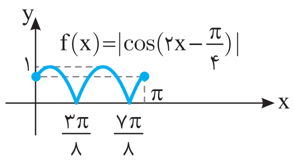
$$\frac{m-1}{2}<-1\Rightarrow m-1<-2\Rightarrow m<-1$$

۶۱۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ به‌دست آید. سپس طول نقاط روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ به‌دست آید. در آخر قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار به‌دست آمده را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=|\cos(2x-\frac{\pi}{4})|$ به‌دست آید.









۶۱۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع از نقطهٔ $(0,2)$ عبور می‌کند، یعنی $f(0)=2$. بنابراین

$$f(0)=a-2b\sin 0=a\Rightarrow a=2$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=2-2b\sin x$ است. بیشترین مقدار تابع برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x=1$ به‌دست می‌آید یا به ازای $\sin x=-1$ (بستگی به علامت b دارد). اگر $b>0$، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x=-1$ به‌دست می‌آید که برابر است با $2+2b$.

بنابراین

$$2+2b=6\Rightarrow b=2$$

و در نتیجه $f(x)=2-4\sin x$. اگر $b<0$، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x=1$ به‌دست می‌آید که برابر است با $2-2b$.

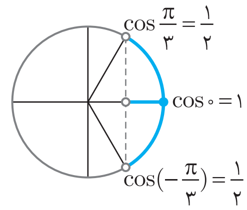
بنابراین

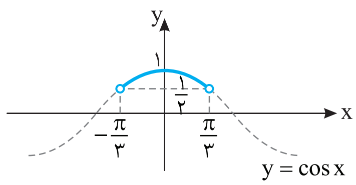
$$2-2b=6\Rightarrow b=-2$$

و در نتیجه $f(x)=2+4\sin x$. با توجه به اینکه برای xهایی که کمی بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطهٔ $f(x)=2+4\sin x$ قابل قبول نیست. بنابراین $b=2$ و در نتیجه $ab=4$.

۶۱۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل‌های زیر اگر $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$، آن‌گاه $\frac{1}{2}<\cos x\le 1$. بنابراین

$$\frac{1}{2}<\frac{m^2+1}{4}\le 1\Rightarrow 2<m^2+1\le 4\Rightarrow 1<m^2\le 3\Rightarrow 1<|m|\le\sqrt{3}$$





۶۱۴- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به شکل $f(x)=(\sin^2 x+1)^2-1$ می‌نویسیم. چون $-1\le\sin x\le 1$، پس

$$0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le\sin^2 x+1\le 2\Rightarrow 1\le(\sin^2 x+1)^2\le 4$$

$$0\le(\sin^2 x+1)^2-1\le 3\Rightarrow 0\le f(x)\le 3$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[0,3]$ است.

۶۱۵- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a\pi|}=4\Rightarrow |a|=\frac{1}{2}$$

کمترین مقدار تابع f برابر $|a|-|b|$ است. بنابراین

$$|a|-|b|=-3\Rightarrow\frac{1}{2}-|b|=-3\Rightarrow|b|=\frac{7}{2}$$

بیشترین مقدار تابع f برابر $|a|+|b|$ است که برابر است با $\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4$.

۶۱۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\cos^2 ax(1-\cos^2 ax)=\cos^2 ax\sin^2 ax=(\cos ax\sin ax)^2$$

$$=(\frac{1}{2}\sin 2ax)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2ax=\frac{1}{4}(\frac{1-\cos 4ax}{2})$$

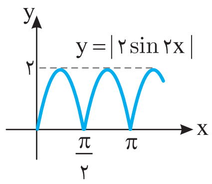
بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|4a|}$ است. پس

$$\frac{2\pi}{|4a|}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow|a|=2\Rightarrow a=\pm 2$$

۶۱۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=4|\sin x\cos x|=4|\frac{1}{2}\sin 2x|=|2\sin 2x|$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2\sin 2x$ به‌دست آید. سپس قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم.



اکنون کافی است نمودار تابع را فقط در یک دورهٔ تناوب مثلاً در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم.

۶۱۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $1-|a|$ است که با توجه به نمودار تابع، برابر -1 است:

$$1-|a|=-1\Rightarrow|a|=2\Rightarrow a=\pm 2$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار مقدار $f(0)$ مثبت است:

$$f(0)>0\Rightarrow 1+a\sin\frac{\pi}{4}>0\Rightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}+1>0\Rightarrow a>-\sqrt{2}$$

بنابراین فقط $a=2$ قابل قبول است. با توجه به نمودار تابع، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{b}|}=4\Rightarrow|b|=2\Rightarrow b=\pm 2$$

با توجه به اینکه تابع $f(x)=1+2\sin(\frac{\pi}{b}x+\frac{\pi}{4})$ در یک همسایگی صفر صعودی است، فقط مقدار $b=2$ قابل قبول است. پس $a+b=4$. توجه کنید که اگر $b=-2$، آن‌گاه $f(x)=1+2\sin(-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4})$ و $f(\frac{1}{2})=1$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

۶۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

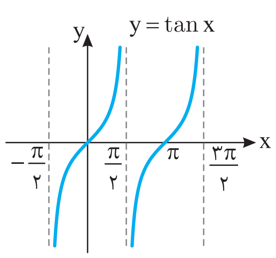
$$0\le x\le 2\Rightarrow 0\le\frac{\pi x}{4}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{6}$$

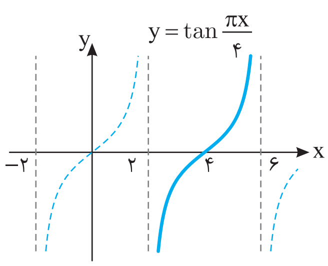
از طرف دیگر تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ اکیداً صعودی است، پس تابع f روی این بازه اکیداً نزولی است. بنابراین

$$-\tan\frac{\pi}{6}\le-\tan(\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{3})\le-\tan(-\frac{\pi}{3})\Rightarrow-\frac{\sqrt{3}}{3}\le f(x)\le\sqrt{3}$$

پس $R_f=[-\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$.

۶۲۰- گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{4}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. پس حداکثر مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازهٔ $(2,a)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۶ است.





۶۲۱- گزینهٔ ۱ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند

$$۳x=۲k\pi+۲x\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۳x=۲k\pi-۲x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۵}$ شامل جواب‌های به‌صورت $۲k\pi$ هم هستند (مثلاً اگر در $\frac{۲k\pi}{۵}$ قرار دهید $k=۵$، آن‌گاه جواب ۲π به‌دست می‌آید که از قرار دادن $k=۱$ در $۲k\pi$ حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۵}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

۶۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin\frac{x}{۴}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\sin\frac{\pi}{۴}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۸k\pi+\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۸k\pi+۳\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۲۳- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول x قطع کند، $f(x)=۰$. پس

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow ۲x-\frac{\pi}{۳}=k\pi$$

$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{(۳k+۱)\pi}{۶},\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{۲}<\frac{(۳k+۱)\pi}{۶}<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow -۳<۳k+۱<۹\Rightarrow -\frac{۴}{۳}<k<\frac{۸}{۳}$$

بنابراین به ازای $k=-۱$، $k=۰$، $k=۱$ و $k=۲$ چهار مقدار برای x به‌دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها هستند.

۶۲۴- گزینهٔ ۱ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۴x=k\pi+۲x-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x	$-\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	$\frac{۷\pi}{۳}$
	(غ.ق.ق)					(غ.ق.ق)

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۶}+\frac{۴\pi}{۳}+\frac{۱۱\pi}{۶}=\frac{۱۳\pi}{۳}$$

۶۲۵- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{۵})=-\sin x\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{۵})=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+\frac{\pi}{۵}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+x\Rightarrow ۲k\pi=-\frac{۳\pi}{۱۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$x+\frac{\pi}{۵}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-x\Rightarrow x=k\pi-\frac{۷\pi}{۲۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۲۶- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin ۲x(\cos ۲x-۱)=۰\Rightarrow\sin ۲x=۰\ \text{یا}\ \cos ۲x=۱$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲},\ k\in\mathbb{Z},\quad ۲x=۲k\pi\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های معادلهٔ دوم جزء جواب‌های معادلهٔ اول هستند، بنابراین جواب‌های معادلهٔ اصلی $x=\frac{k\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ است.

۶۲۷- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\sin ۲x$، آن‌گاه معادله به‌صورت $۲t^۲-۷t+۵=۰$ درمی‌آید و از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود $t=۱$ و $t=\frac{۵}{۲}$. بنابراین

$$\begin{cases}\sin ۲x=۱\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}\\ \sin ۲x=\frac{۵}{۲}\quad\text{(غ.ق.ق)}\end{cases}$$

۶۲۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲\sin ۲x\cos ۲x=\sqrt{۲}\sin ۲x\Rightarrow ۲\sin ۲x(\cos ۲x-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos ۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۸}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $۰,\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{\pi}{۸},\frac{۷\pi}{۸}$. پس معادله پنج جواب در این بازه دارد.

۶۲۹- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۲\cos^۲x-۱=\cos x-۱\Rightarrow\cos x(۲\cos x-۱)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\quad\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}$$

۶۳۰- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos ۲x+۲\sin^۲x=\sin ۲x\Rightarrow ۱-۲\sin^۲x+۲\sin^۲x=\sin ۲x$$

$$\sin ۲x=۱$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۳۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۵x=۲k\pi+۴x\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۵x=۲k\pi-۴x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۹},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۹}$ شامل جواب‌های به‌صورت $۲k\pi$ هم هستند (مثلاً اگر در $\frac{۲k\pi}{۹}$ قرار دهید $k=۹$، آن‌گاه جواب ۲π به‌دست می‌آید که از قرار دادن $k=۱$ در $۲k\pi$ حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۹},\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

راه‌حل دوم $x=۰$ جواب معادله است، پس گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند (بـه ازای هیچ مقدار صحیح k، $x=۰$ به‌دسـت نمی‌آیـد). اگر $k=۹$، آن‌گاه $\frac{k\pi}{۹}=\pi$، اما $x=\pi$ جواب معادله نیست، پس گزینهٔ (۳) هم رد می‌شود.

۶۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲\sin x=-\sqrt{۳}\Rightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow \sin x=\sin(-\frac{\pi}{۳})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\ ,\ x=۲k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\ ,\ x=۲k\pi+\frac{۴\pi}{۳}$$

۶۳۳- گزینهٔ ۳ در نقاطی که $\sin ۳x=۱$، نمـودار تابع f حداکثر مقدار خود را دارد. پس

$$۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{(۴k+۱)\pi}{۶},k\in\mathbb{Z}$$

k	-۱	۰	۱	۲
x	$-\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۳\pi}{۲}$

بنابراین نمودار تابع در بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$، چهار بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

بـرای پیدا کردن نقاطی که نمـودار تابع در آن‌ها حداکثر می‌شـود، می‌توانیم به شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi\le\frac{(۴k+۱)\pi}{۶}\le۲\pi\Rightarrow-۶\le۴k+۱\le۱۲\Rightarrow-۷\le۴k\le۱۱$$

$$-\frac{۷}{۴}\le k\le\frac{۱۱}{۴}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-۱,۰,۱,۲\}$$

۶۳۴- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin\frac{x}{۲}=\cos\frac{۲x}{۳}\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲})=\cos\frac{۲x}{۳}$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲}=۲k\pi+\frac{۲x}{۳}\Rightarrow x=\frac{(-۱۲k+۳)\pi}{۷}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲}=۲k\pi-\frac{۲x}{۳}\Rightarrow x=۱۲k\pi-۳\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنـون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ را مشـخص می‌کنیم. واضح اسـت که هیچ‌یک از جواب‌های به‌صورت $x=۱۲k\pi-۳\pi$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ قرار ندارند.

پس جواب‌های به‌صورت $x=\frac{(-۱۲k+۳)\pi}{۷}$ را بررسی می‌کنیم

k	۰	۱	-۱
x	$\frac{۳\pi}{۷}$	$\frac{-۹\pi}{۷}$ (غ.ق.ق)	$\frac{۱۵\pi}{۷}$ (غ.ق.ق)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۶۳۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\frac{\pi}{۴}+x+\frac{\pi}{۴}-x=\frac{\pi}{۲}$. بنابراین

$$\cot(\frac{\pi}{۴}-x)=\cot(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۴}+x))=\tan(\frac{\pi}{۴}+x)$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\tan(\frac{\pi}{۴}+x)+\tan(\frac{\pi}{۴}+x)=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{۴}+x)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan\frac{\pi}{۶}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$\frac{\pi}{۴}+x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲}$$

۶۳۶- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲}\sin^{۲}x-\sin x=۰\Rightarrow\sin x(\sqrt{۲}\sin x-۱)=۰$$

$$\sin x=۰ \ \text{یا}\ \sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابرایـن جواب‌هـای معادله در بـازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از π، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ که مجموع آن‌ها برابر ۲π است.

۶۳۷- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\sin^{۲}x)-۳\sin x-۳=۰\Rightarrow۲\sin^{۲}x+۳\sin x+۱=۰$$

اگر فـرض کنیم $t=\sin x$، معادله به‌صـورت $۲t^{۲}+۳t+۱=۰$ درمی‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t=-۱$ و $t=-\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$\sin x=-۱\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۲}$$

$$\sin x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۶},-\frac{۵\pi}{۶}$$

توجـه کنید که فقط جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,۰)$ را مشـخص کرده‌ایم که تعداد آن‌ها سه‌تاست.

۶۳۸- گزینهٔ ۱ چون $\sin ۴x\neq۰$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{\cos ۲x}=\frac{۱}{\sin ۴x}\Rightarrow\sin ۴x=\cos ۲x\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x=\cos ۲x$$

$$۲\sin ۲x\cos ۲x-\cos ۲x=۰\Rightarrow\cos ۲x(۲\sin ۲x-۱)=۰$$

$$\begin{cases}\cos ۲x=۰ \quad (\text{غ.ق.ق}) \\ \sin ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\ x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\ x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$، که مجموع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

۶۳۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=\frac{۳\sin x}{\cos x}\Rightarrow\sin ۲x\cos x=۳\sin x\cos ۲x$$

اکنـون از اتحادهـای $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱$ استفاده می‌کنیم

$$۲\sin x\cos^{۲}x-۳\sin x(۲\cos^{۲}x-۱)=۰$$

$$\sin x(۲\cos^{۲}x-۶\cos^{۲}x+۳)=۰$$

$$\sin x(۳-۴\cos^{۲}x)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=\pi \\ \cos^{۲}x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶},\frac{۷\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر است با ۵π.

۶۴۰- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{16}{3}$$

$$16\sin^2 x\cos^2 x=3\Rightarrow 4(2\sin x\cos x)^2=3$$

$$4\sin^2 2x=3\Rightarrow \sin^2 2x=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ به‌صورت زیر هستند:

$$2x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\ ,\qquad 2x=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

$$2x=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}\ ,\qquad 2x=\frac{5\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ برابر است با 2π.

۶۴۱- گزینهٔ ۳ جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$5x=2k\pi+3x\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$5x=2k\pi+\pi-3x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۴۲- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=4k\pi\pm\frac{4\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\pi,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	−۱
$x=4k\pi-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق)	$4\pi-\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق)	$-4\pi-\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق)

k	۰	۱	−۱
$x=4k\pi+\frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$4\pi+\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق)	$-4\pi+\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق)

بنابراین معادلهٔ فوق یک جواب در بازهٔ $(-\pi,2\pi)$ دارد.

۶۴۳- گزینهٔ ۳ در نقاطی کـه $\cos 4x=1$، تابع f به حداقل مقدار خود می‌رسد. پس

$$4x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

k	−۱	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ نمودار تابع ۵ بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۶۴۴- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت $\cos(2x-\frac{\pi}{9})=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$ می‌نویسیم. پس جواب کلی معادله به‌صورت زیر است

$$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x\Rightarrow 2k\pi=-\frac{11\pi}{18},\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

$$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{7\pi}{72}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۴۵- گزینهٔ ۲ جواب‌های معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$2\cos^3 x-\cos x=0\Rightarrow\cos x(2\cos^2 x-1)=0$$

$$\cos x=0\ ,\qquad \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چـون جواب‌هـای معادلـه را در بـازهٔ $(0,2\pi)$ می‌خواهیـم، پس ایـن جواب‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

بنابراین معادله شش جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۶۴۶- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin(\pi+x)=-\sin x$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 x-\sin x-2=0\Rightarrow(\sin x+1)(\sin x-2)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x-2=0\Rightarrow\sin x=2\quad\text{(غ.ق.ق)}$$

$$\sin x+1=0\Rightarrow\sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۴۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x=1-\sin^2 x\Rightarrow\cos 2x=\cos^2 x$$

اکنون از اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ استفاده می‌کنیم:

$$2\cos^2 x-1=\cos^2 x\Rightarrow\cos^2 x=1\Rightarrow\cos x=\pm 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$x=2k\pi$ یا $x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، π و 2π.

راه‌حل دوم از اتحاد $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$1-\cos 2x=\sin^2 x\Rightarrow 2\sin^2 x=\sin^2 x\Rightarrow\sin^2 x=0\Rightarrow\sin x=0$$

$$x=k\pi\,,k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=0\,,x=\pi\,,x=2\pi$$

۶۴۸- گزینهٔ ۱ اگـر فرض کنیـم $t=\tan x$، آن‌گاه $\cot x=\frac{1}{t}$ و در نتیجه معادله به شکل $3t-\frac{3}{t}=2\sqrt{3}$ درمی‌آید. بنابراین

$$3t^2-2\sqrt{3}t-3=0\Rightarrow t=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+36}}{6}\Rightarrow t=\sqrt{3},\ t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازهٔ $(\pi,2\pi)$ قرار دارند به‌صورت زیر هستند:

$$\tan x=\sqrt{3}\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$$

$$\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{11\pi}{6}$$

مجموع این جواب‌ها برابر است با $\frac{19\pi}{6}$.

۶۴۹- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم، سپس از اتحاد $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ استفاده می‌کنیم.

$$1+\cos\frac{x}{2} = -\cos x \xrightarrow{\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}-1}$$

$$1+\cos\frac{x}{2} = -2\cos^2\frac{x}{2}+1 \Rightarrow \cos\frac{x}{2}(2\cos\frac{x}{2}+1)=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است

$$\cos\frac{x}{2}=0 \Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=4k\pi\pm\frac{4\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

از جواب‌های $x=4k\pi-\frac{4\pi}{3}$ هیچ یک در بازهٔ $(0,2\pi)$ قرار ندارند، ولی از جواب‌های $x=2k\pi+\pi$ و $x=4k\pi+\frac{4\pi}{3}$ جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ به‌ازای $k=0$ به‌دست می‌آیند که π و $\frac{4\pi}{3}$ هستند و مجموع آن‌ها $\frac{7\pi}{3}$ است.

۶۵۰- گزینهٔ ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1$$

$$\xrightarrow{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x} 1-\sin x=1\Rightarrow \sin x=0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارتند از $x=0$، $x=\pi$ و $x=2\pi$. ولی توجه کنید که جواب $x=0$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند و قابل قبول نیست. این جواب به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده است. بنابراین معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب دارد.

۶۵۱- گزینهٔ ۳ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$3x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+x-\frac{\pi}{9}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{9}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$3x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-x+\frac{\pi}{9}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{13\pi}{36}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$0<k\pi+\frac{\pi}{9}<2\pi\Rightarrow -\frac{1}{9}<k<\frac{17}{9}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0,1\}$$

$$0<\frac{k\pi}{2}+\frac{13\pi}{36}<2\pi\Rightarrow\frac{-13}{18}<k<\frac{59}{18}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0,1,2,3\}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ شش جواب دارد.

۶۵۲- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 3x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 3x=\cos\frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$3x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}=\frac{(6k\pm1)\pi}{9}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\pi)$ را معین می‌کنیم

k	0	1	2
$x=(6k+1)\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{9}$ (غ.ق.ق.)

k	0	1	2
$x=(6k-1)\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{9}$ (غ.ق.ق.)	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{9}+\frac{7\pi}{9}+\frac{5\pi}{9}=\frac{13\pi}{9}$$

۶۵۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد $2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$، معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(3x-\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow\sin 3x=0\Rightarrow 3x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

۶۵۴- گزینهٔ ۲ چون $\cos(x-\frac{\pi}{6})\neq 0$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{6})=-\sin 3x\Rightarrow\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{2}+3x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+3x\Rightarrow x=-k\pi-\frac{\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,\pi)}0<-k\pi-\frac{\pi}{3}<\pi\Rightarrow\frac{1}{3}<-k<\frac{4}{3}\Rightarrow-\frac{4}{3}<k<-\frac{1}{3}$$

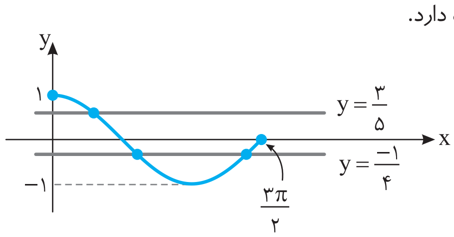
$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-1\}\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-3x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,\pi)}0<\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}<\pi\Rightarrow\frac{2}{12}<k<\frac{26}{12}$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{1,2\}$$

پس جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{5\pi}{12}$ و $\frac{11\pi}{12}$ که $\frac{2\pi}{3}$ قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج در معادلهٔ اصلی می‌شود (توجه کنید که این جواب در اثر ضرب کردن طرفین معادله در $\cos(x-\frac{\pi}{6})$ به وجود آمده است). بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(0,\pi)$ دارد.

۶۵۵- گزینهٔ ۳ جواب‌های معادله به‌صورت $\cos x=-\frac{1}{4}$ یا $\cos x=\frac{3}{5}$ هستند. پس با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خطوط $y=-\frac{1}{4}$ و $y=\frac{3}{5}$، معادلهٔ $\cos x=\frac{3}{5}$ در بازهٔ $[0,\frac{3\pi}{2}]$ یک جواب و معادلهٔ $\cos x=-\frac{1}{4}$ در این بازه دو جواب دارد. پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ فوق سه جواب دارد.



۶۵۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=2\Rightarrow \tan^2 x-2\tan x+1=0$$

$$(\tan x-1)^2=0\Rightarrow \tan x=1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

راه‌حل دوم معادله را بـه کمک اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2}{\sin 2x}=2\Rightarrow \sin 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۵۷- گزینهٔ ۲ اگر فـرض کنیـم $t=\tan x$، آن‌گاه معادله به‌صورت $3t^2+4\sqrt{3}t+3=0$ درمی‌آیـد. از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شـود $t=-\sqrt{3}$ یا $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. بنابراین

$$\begin{cases}\tan x=-\sqrt{3}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{3}=k\pi-\frac{2\pi}{6}\\ \tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت $x=k\pi-\frac{n\pi}{6}$ هسـتند که در آن k هر عدد صحیح دلخواه و n برابر ۱ یا ۲ است.

۶۵۸- گزینهٔ ۳ بـا توجـه بـه اتحـاد $\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\sin^2\alpha$ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=1\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 8x=1$$

$$\cos 8x=-\cos 2x\Rightarrow \cos 8x=\cos(\pi-2x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$8x=2k\pi+\pi-2x\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{10}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$8x=2k\pi-\pi+2x\Rightarrow x=(2k-1)\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
$x=(2k+1)\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{2}$
			(غ.ق.ق)

k	۰	۱	۲
$x=(2k-1)\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
	(غ.ق.ق)		(غ.ق.ق)

پس جواب‌های معادله که در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ قرار دارند عبارت‌اند از

$$\frac{\pi}{10},\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{6}$$

۶۵۹- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^4 x-\sin^4 x=1\Rightarrow(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=1$$

$$\cos 2x=1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌هـای واقـع در بـازهٔ $(0,3\pi)$ بـه ازای $k=1,2$ به‌دسـت می‌آینـد کـه عبارت‌اند از π و 2π و مجموع آن‌ها برابر 3π است.

۶۶۰- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\cos x$، آن‌گاه $\sin^2 x=1-t^2$ و معادله به‌صورت $(2-\sqrt{2})(1-t^2)+t-1=0$ در می‌آید. بنابراین

$$(2-\sqrt{2})(1-t)(1+t)-(1-t)=0$$

$$(1-t)((2-\sqrt{2})(1+t)-1)=0$$

$$(1-t)(2-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})t-1)=0$$

$$t=1\ ,\quad t=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=1\Rightarrow x=0\ ,\qquad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، سه است.

۶۶۱- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

بنابراین جواب‌های آن به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2k\pi=-\frac{7\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \ (\text{غ.ق.ق})$$

$$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{13\pi}{24}\ ,k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۱-	۲-
x	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{37\pi}{24}$	$\frac{61\pi}{24}$	$-\frac{11\pi}{24}$	$-\frac{35\pi}{24}$
			(غ.ق.ق)		(غ.ق.ق)

پس معادله سه جواب در بازهٔ فوق دارد.

۶۶۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(x+\frac{5\pi}{36})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x+\frac{5\pi}{36}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{2\pi}{18}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x+\frac{5\pi}{36}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{11\pi}{18}$$

پس i می‌تواند برابر ۲ یا ۱۱ باشد.

۶۶۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin^۲(۵x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin(۵x-\frac{\pi}{۳})=\pm\frac{۱}{۲}$$

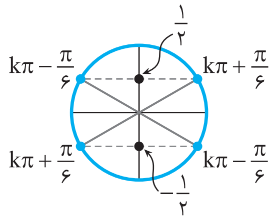
با توجه به شکل زیر جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۵x-\frac{\pi}{۳}=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۵x=k\pi+\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}=\frac{k\pi}{۵}+\frac{۳\pi}{۳۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۵x=k\pi-\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۳۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین i می‌تواند مقادیر ۳ و ۱ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر ۴ است.



۶۶۴- گزینهٔ ۱ چون $\cos ۲x\neq ۰$، طرفین معادله را در $\cos ۲x$ ضرب می‌کنیم

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\cos ۲x\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-۲x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{(۸k+۱)\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}+۲x\Rightarrow x=-\frac{(۸k+۱)\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

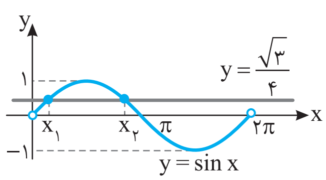
k	۰	۱	۲
$x=\frac{(۸k+۱)\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ (غ.ق.ق)

k	۰	۱	-۱
$x=-\frac{(۸k+۱)\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۴}$ (غ.ق.ق)	$-\frac{۹\pi}{۴}$ (غ.ق.ق)	$\frac{۷\pi}{۴}$ (غ.ق.ق)

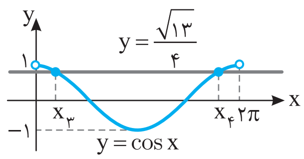
جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ ولی $\frac{۳\pi}{۴}$ قابل قبول نیست، زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادلهٔ اصلی می‌شود (توجه کنید که $x=\frac{۳\pi}{۴}$ در اثر ضرب کردن معادله در $\cos ۲x$ به وجود آمده است).

پس تعداد جواب‌ها در بازهٔ $(۰,\pi)$ برابر یک است.

۶۶۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ یا $\cos x=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$. با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$، معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



همچنین با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$، معادلهٔ $\cos x=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



ولی توجه کنید که یکی از این جواب‌ها $(x_۳)$ همان جواب معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ است $(x_۱)$، زیرا $(\frac{\sqrt{۳}}{۴})^۲+(\frac{\sqrt{۱۳}}{۴})^۲=۱$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر مسئله سه جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۶۶۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که $\cos^۲ x-\sin^۲ x=\cos ۲x$.

$$-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=-\cos x\Rightarrow\cos ۲x=\cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

واضح است که جواب‌های $\frac{۲k\pi}{۳}$ شامل جواب‌های $۲k\pi$ نیز می‌شوند، پس جواب‌های کلی به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

راه‌حل دوم $x=۰$ جواب معادله است، پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند.

به ازای $k=۳$، گزینهٔ (۱) برابر π می‌شود، اما $x=\pi$ جواب معادله نیست:

$$\sin^۲\pi-\cos^۲\pi=-۱\ ,\qquad\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\pi)=\sin\frac{\pi}{۲}=۱$$

بنابراین گزینهٔ (۱) هم رد می‌شود.

۶۶۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}\times\frac{\sin ۴x}{\cos ۴x}=۱\Rightarrow\sin ۲x\sin ۴x=\cos ۲x\cos ۴x$$

$$\cos ۲x\cos ۴x-\sin ۲x\sin ۴x=۰\Rightarrow\cos(۴x+۲x)=۰$$

$$۶x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۶}+\frac{\pi}{۱۲}=\frac{(۲k+۱)\pi}{۱۲},k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{۷\pi}{۱۲}$ (غ.ق.ق)

توجه کنید که $x=\frac{\pi}{۴}$ قابل قبول نیست، زیرا به‌ازای آن $\tan ۲x$ تعریف نشده است. پس معادله دو جواب در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\tan 2x\tan 4x=1\Rightarrow \tan 2x\times\frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x}=1$$

$$2\tan^2 2x=1-\tan^2 2x\Rightarrow 3\tan^2 2x=1\Rightarrow \tan 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases}\tan 2x=\tan\frac{\pi}{6}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\\ \tan 2x=\tan(-\frac{\pi}{6})\Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\end{cases}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ را می‌یابیم.

k	1	2
$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$
		(غ.ق.ق)

k	0	1
$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$
		(غ.ق.ق)

بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ دارد.

راه‌حل سوم معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tan 2x=\cot 4x=\tan(\frac{\pi}{2}-4x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}-4x\Rightarrow 6x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ به‌صورت $x=\frac{\pi}{12}$ و $x=\frac{5\pi}{12}$ هستند.

۶۶۸- گزینهٔ ۴ از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ کمک می‌گیریم و معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

طرفین معادله را در $\cos x+\sin x$ ضرب می‌کنیم

$$\cos x-\sin x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2$$

$$\begin{cases}\cos x-\sin x=0 & (1)\\ (\cos x+\sin x)^2=1 & (2)\end{cases}$$

از معادلهٔ (۱) جواب‌های زیر در بازهٔ $[0,\pi]$ به‌دست می‌آید:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

از معادلهٔ (۲) جواب‌های زیر در بازهٔ $[0,\pi]$ به‌دست می‌آید:

$$\cos^2 x+\sin^2 x+\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=1\Rightarrow \sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi$$

$$x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[0,\pi]}x=0\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=\pi$$

پس مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ برابر $\frac{7\pi}{4}$ است.

۶۶۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=\sin x$$

$$(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\sin x$$

$$\sin x-\sin^2 x\cos x+\cos x-\sin x\cos^2 x=\sin x$$

$$\cos x(-\sin^2 x+1-\sin x\cos x)=0$$

$$\cos x(\cos^2 x-\sin x\cos x)=0\Rightarrow \cos^2 x(\cos x-\sin x)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

پس معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x\Rightarrow \sin x-\sin^3 x-\cos^3 x=0$$

$$\sin x(1-\sin^2 x)-\cos^3 x=0\Rightarrow \sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$$

$$\cos^2 x(\sin x-\cos x)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\\ \sin x=\cos x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ چهار جواب دارد.

۶۷۰- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^2 x=2-2\sin^2 x\Rightarrow \tan^2 x=2(1-\sin^2 x)$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=2\cos^2 x\xrightarrow{\cos x\neq 0}\sin^2 x=2\cos^4 x$$

$$1-\cos^2 x=2\cos^4 x\Rightarrow 2\cos^4 x+\cos^2 x-1=0$$

$$(\cos^2 x+1)(2\cos^2 x-1)=0$$

چون $\cos^2 x+1\neq 0$، بنابراین

$$2\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},\ \ k\in\mathbb{Z}$$

۶۷۱- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x(1-\sin^2 x)-\cos x(1-\cos^2 x)=0$$

$$\sin x\cos^2 x-\cos x\sin^2 x=0$$

$$\sin x\cos x(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x(\cos x-\sin x)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{3\pi}{2}$، 2π، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{13\pi}{2}$.

۶۷۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+\frac{\pi}{9}-(x-\frac{7\pi}{18})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x-\frac{7\pi}{18}=(x+\frac{\pi}{9})-\frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\sin^2(x+\frac{\pi}{9})+2\sin^2(-\frac{\pi}{2}+(x+\frac{\pi}{9}))=2$$

$$\sin^2(x+\frac{\pi}{9})+2\cos^2(x+\frac{\pi}{9})=2$$

$$1-\cos^2(x+\frac{\pi}{9})+2\cos^2(x+\frac{\pi}{9})=2$$

$$\cos^2(x+\frac{\pi}{9})=1\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{9})=\pm1\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{9})=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر است:

$$x+\frac{\pi}{9}=k\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{9}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۷۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که از اتحادهای چاق و لاغر و $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$(\cos x-\sin x)(\cos^2x+\sin x\cos x+\sin^2x)=\cos^2x-\sin^2x$$

$$(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0$$

$$(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x-\sin x-\cos x)=0$$

$$(\cos x-\sin x)(1-\sin x)(1-\cos x)=0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

$$\sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\ ,\qquad \cos x=1\Rightarrow x=0,2\pi$$

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۶۷۴- گزینهٔ ۲ دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از اتحاد $2\sin x\cos x=\sin2x$ استفاده می‌کنیم.

$$2(\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x)=3\Rightarrow2(1+\sin2x)=3$$

$$\sin2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ به ازای $k=0$، $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

۶۷۵- گزینهٔ ۲ از $\cos(2\pi\sin x)=-1$ نتیجه می‌شود

$$2\pi\sin x=2k\pi+\pi\Rightarrow\sin x=k+\frac{1}{2},k\in\mathbb{Z}$$

با توجه به $-1\le\sin x\le1$ نتیجه می‌شود که k می‌تواند مقادیر صفر و ۱- را داشته باشد. بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$k=0\Rightarrow\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6},x=\frac{5\pi}{6}$$

$$k=-1\Rightarrow\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{7\pi}{6},x=\frac{11\pi}{6}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با 4π.

۶۷۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

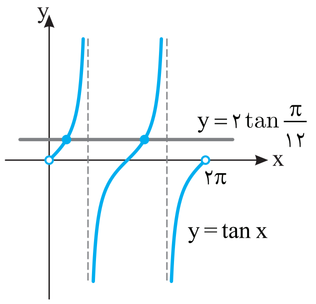
$$\sin x\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos x=3\sin x\cos\frac{\pi}{12}-3\sin\frac{\pi}{12}\cos x$$

$$4\sin\frac{\pi}{12}\cos x=2\sin x\cos\frac{\pi}{12}$$

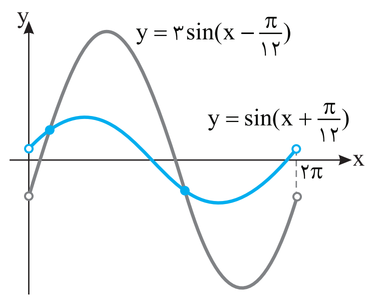
$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}$$

$$\tan x=2\tan\frac{\pi}{12}$$

با توجه به نمودار تابع‌های $y=\tan x$ و خط $y=2\tan\frac{\pi}{12}$ معادلهٔ فوق دو جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.



راه‌حل دوم نمودار تابع‌های $y=\sin(x+\frac{\pi}{12})$ و $y=3\sin(x-\frac{\pi}{12})$ را در بازهٔ $(0,2\pi)$ رسم می‌کنیم و تعداد نقاط برخورد آن‌ها را می‌یابیم. با توجه به شکل زیر معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.



۶۷۷- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{4}$$

$$(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{1}{4}$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(\cos^2x-\sin^2x)=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}\cos2x=-\frac{1}{4}$$

$$\cos2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۶۷۸- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan 2x\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=\tan 2x$$

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\tan(2x)$$

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{4}-x\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{4}$
			(غ.ق.ق)			(غ.ق.ق)

توجه کنید که $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ جواب معادله نیستند زیرا به ازای این مقادیر $\tan 2x$ تعریف نمی‌شود. پس معادله چهار جواب در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد.

۶۷۹- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan 3x-\tan x}{1+\tan x\tan 3x}=\frac{\tan 5x+\tan x}{1-\tan x\tan 5x}$$

$$\tan(3x-x)=\tan(5x+x)\Rightarrow\tan 2x=\tan 6x$$

بنابراین جواب کلی معادله به‌صورت زیر است

$$6x=k\pi+2x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

فقط $x=\frac{\pi}{4}$ در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ قرار دارد که قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر $\frac{1+\tan x\tan 3x}{1-\tan x\tan 5x}$ می‌شود. بنابراین معادله در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ جواب ندارد.

۶۸۰- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\tan x$، آن‌گاه $\cot x=\frac{1}{t}$ و در نتیجه معادله به‌صورت $3t+\frac{k}{t}=2$ درمی‌آید. اگر دو طرف معادله را در t ضرب کنیم، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید: $3t^2+k=2t\Rightarrow 3t^2-2t+k=0$

معادلهٔ فوق با شرط مقابل جواب دارد: $\Delta=4-12k\geq 0\Rightarrow k\leq\frac{1}{3}$

اکنون فرض کنید t_1 جواب معادلهٔ درجهٔ دوم فوق باشد. در این صورت معادلهٔ $\tan x=t_1$ جواب دارد و در نتیجه معادلهٔ اصلی نیز جواب خواهد داشت. پس کافی است $k\leq\frac{1}{3}$.

۶۸۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cot\theta$$

بنابراین $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tan\theta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 0/2}=3$.

ریاضی - ۹۱

۶۸۲- گزینهٔ ۴ از اتحادهای $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ و $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ استفاده می‌کنیم و عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta}=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\times\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta-\cos^4\theta}=\frac{\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}$$

اکنون از اتحاد $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sin^4\theta\cos^4\theta}=\frac{1}{\frac{1}{16}\sin^4 2\theta}=\frac{16}{\sin^4 2\theta}=16\sin^{-4}2\theta$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۶۸۳- گزینهٔ ۱ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دورهٔ تناوب، برابر ۳ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin(b\pi x)$ برابر ۱ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=1\Rightarrow\frac{2}{|b|}=1\Rightarrow b=\pm 2$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس $|a|=3\Rightarrow a=\pm 3$.

با توجه به نمودار که در شروع به‌صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}\Rightarrow y=3\sin(-2\pi x)$$

$$\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}\Rightarrow y=-3\sin(2\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر -6 است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۸۴- گزینهٔ ۲ از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$ استفاده می‌کنیم. اگر $\alpha=\frac{x}{2}$، آن‌گاه

$$\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=-2\cot x=-\frac{2}{\tan x}=\frac{-2}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{2}$$

تجربی - ۹۶

۶۸۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})$$

$$=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}+\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$$

بنابراین $\cos x=\frac{2}{3}$ و $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\times\frac{4}{9}-1=\frac{8}{9}-1=-\frac{1}{9}$.

تجربی - ۹۳

۶۸۶- گزینهٔ ۲ ابتدا مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\tan((\alpha-\beta)+\beta)=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(3)}{1+9}=\frac{6}{10}=0/6$$

تجربی - ۹۴

۶۸۷- گزینهٔ ۴ کافی است صورت و مخرج برابر باشند به شرطی که مخرج صفر نباشد:

$$\sin ۳x=\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)\Rightarrow \sin ۳x=\sin x$$

$$\begin{cases} ۳x=۲k\pi+x\Rightarrow x=k\pi & \text{(غ.ق.ق)} \\ ۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

به‌ازای $x=k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس این جواب غیرقابل قبول است و جواب $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۶۸۸- گزینهٔ ۱ معادله‌رابه‌صورت $\cos ۳x=-\cos x=\cos(\pi-x)$ نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳x=۲k\pi+\pi-x \\ ۳x=۲k\pi-\pi+x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۴x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \\ ۲x=۲k\pi-\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

با توجه به $\cos x\neq ۰$، جواب $x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$ غیرقابل قبول است. پس جواب کلی $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۸۹- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{۸}+\frac{۳\pi}{۸}=\frac{\pi}{۲}$. در ادامه معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۸}))=۱$$

$$۲\sin(x+\frac{\pi}{۸})=۱\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۸})=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases} x+\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x+\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ است:

$$x_۱=\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۸},\quad x_۲=\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۸}\Rightarrow x_۱+x_۲=\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۴}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۶۹۰- گزینهٔ ۴ زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}-x$، متمم زاویهٔ x است، پس

$$\sin ۲x+\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=۰\Rightarrow\sin ۲x+\sin x=۰$$

$$\sin ۲x=-\sin x\Rightarrow\sin ۲x=\sin(-x)$$

$$۲x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳},\quad ۲x=۲k\pi+\pi+x\Rightarrow x=(۲k+۱)\pi$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از ۰، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$، ۲π و π. مجموع این جواب‌ها برابر ۵π است.

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۶۹۱- گزینهٔ ۱ از اتحاد $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم. ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$۱-\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

چون $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha$، بنابراین $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\frac{۳}{۴}$.

تجربی - ۹۵

۶۹۲- گزینهٔ ۳ عبارت را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۰° می‌نویسیم:

$$A=\frac{\sin(۲۷۰^\circ-۲۰^\circ)+\sin(۷۲۰^\circ-۲۰^\circ)}{\cos(۵۴۰^\circ+۲۰^\circ)-\cos(۹۰^\circ+۲۰^\circ)}=\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos ۲۰^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}{\frac{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}=\frac{-۱-\tan ۲۰^\circ}{-۱+\tan ۲۰^\circ}=\frac{-۱-\frac{۲}{۵}}{-۱+\frac{۲}{۵}}=\frac{-\frac{۷}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}=\frac{۷}{۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۹۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است، این مقدار زمانی به‌دست می‌آید که $\cos(bx+\frac{\pi}{۲})=-۱$، پس

$$a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

در نتیجه $y=-۱-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})=-۱+۲\sin(bx)$. با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر با $\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۲\pi}{۳}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow b=\pm ۳$$

برای $x>\frac{\pi}{۱۸}$ نمودار تابع $y=-۱+۲\sin(bx)$ به‌صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b=۳$ قابل قبول است، یعنی $y=-۱+۲\sin(۳x)$ و مقدار $a+b$ برابر است با $-۱+۳=۲$.

ریاضی - ۹۵

۶۹۴- گزینهٔ ۳ چون $\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$، پس

$$\frac{۱}{\sin ۱۵^\circ}-\frac{۱}{\cos ۱۵^\circ}=\frac{\cos ۱۵^\circ-\sin ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ}=\frac{-\sqrt{۲}\sin(۱۵^\circ-۴۵^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۲}\sin ۳۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ}=۲\sqrt{۲}$$

ریاضی - ۹۶

۶۹۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا $\tan ۲\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲\times ۲}{۱-۴}=-\frac{۴}{۳}$$

$$\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{\tan ۲\alpha-\tan\beta}{۱+\tan ۲\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{-۴}{۳}\times\frac{۱}{۳}}=\frac{-\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=-۳$$

راه‌حل دوم ابتدا $\tan(\alpha-\beta)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{۲-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=۱$$

$$\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{۲+۱}{۱-۲\times ۱}=\frac{۳}{-۱}=-۳$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۶۹۶- گزینهٔ ۴ با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2(\pi+\frac{\pi}{4})$$

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin^2\frac{\pi}{4}\Rightarrow -\cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

تجربی - ۹۲

۶۹۷- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\cos 2x=\frac{\cos x}{\sin x}(4\sin x+\frac{\sin x}{\cos x})=4\cos x+1$$

$$2(2\cos^2 x-1)=4\cos x+1\Rightarrow 4\cos^2 x-4\cos x-3=0$$

$$(2\cos x+1)(2\cos x-3)=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=\frac{3}{2}\ (\text{غ.ق.ق}),\quad \cos x=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۹۸- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$-(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\cos x\Rightarrow \cos 2x=\cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}2x=2k\pi+x\Rightarrow x=2k\pi\\ 2x=2k\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب $2k\pi$ نیز می‌شود، پس جواب‌های کلی به‌صورت $\frac{2k\pi}{3}$ هستند.

تجربی - ۹۱

۶۹۹- گزینهٔ ۱ از اتحادهای $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ و $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم. ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2\cos^2 x-1)+2\sin x\cos x=0\Rightarrow \cos 2x+\sin 2x=0$$

$$\cos 2x=-\sin 2x\Rightarrow \cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x\Rightarrow k=-\frac{1}{4}\ (\text{غ.ق.ق})\\ 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\end{cases}$$

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 2x=-\sin 2x$ به کمک دایرهٔ مثلثاتی متوجه می‌شویم: $2x=k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

تجربی - ۹۴

۷۰۰- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=1-\cos^2 x$$

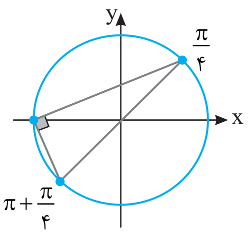
$$\sin x\cos x=\sin^2 x\Rightarrow \sin x(\cos x-\sin x)=0$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi,\quad \cos x-\sin x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

دقت کنید که به‌ازای $x=2k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود. پس جواب‌های معادله $x=(2k+1)\pi$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ هستند که روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱



۷۰۱- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر π است، پس

$$\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow |b|=2$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۱/۵ است، پس $|a|=\frac{1}{2}$. با توجه به آنکه تابع در شروع از مبدأ یک روند نزولی دارد باید a و b مختلف‌العلامت باشند. اگر فرض کنیم $a=\frac{1}{2}$ و $b=-2$، آن‌گاه

$$y=1+\frac{1}{2}\sin(-2x-\frac{\pi}{6})\Rightarrow y(0)=\frac{3}{4}$$

اما با توجه به نمودار تابع $1<y(0)<1/5$، پس این حالت غیرقابل قبول است.

بنابراین $a=-\frac{1}{2}$ و $b=2$، یعنی $a+b=\frac{3}{2}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۷۰۲- گزینهٔ ۴ تانژانت‌ها را برحسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم:

$$\cos 50^\circ(\frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}+\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ})$$

$$=\cos 50^\circ(\frac{\sin 70^\circ\cos 10^\circ+\sin 10^\circ\cos 70^\circ}{\cos 10^\circ\cos 70^\circ})$$

$$=\frac{\cos 50^\circ\times\sin(70^\circ+10^\circ)}{\cos 10^\circ\cos 70^\circ}=\frac{\cos 50^\circ\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ\cos 70^\circ}=\frac{\cos 50^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ\cos 70^\circ}$$

$$=\frac{\cos 50^\circ}{\cos 70^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=2\cos 20^\circ$$

ریاضی - ۸۵

۷۰۳- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan 2x=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},\quad k\in\mathbb{Z}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۷۰۴- گزینهٔ ۱ معادلهٔ داده شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+3\cos x=0\Rightarrow 2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0$$

$$-2\cos^2 x+3\cos x+2=0\Rightarrow \cos x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-4}$$

$$\begin{cases}\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\\ \cos x=2\ \text{(غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

تجربی - ۹۵

۷۰۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با توجه به اتحاد $2\cos^2 x=\cos 2x+1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x+2\cos^2 x=0\Rightarrow \cos 2x+\cos 2x+1=0$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

راه‌حل دوم با توجه به اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x+2\cos^2 x=0\Rightarrow 2\cos^2 x-1+2\cos^2 x=0\Rightarrow 4\cos^2 x=1$$

$$\cos x=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\\ \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

این جواب‌ها همان $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ هستند.

تجربی - ۹۶

۷۰۶- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tan 3x=\frac{1}{\tan x}\Rightarrow \tan 3x=\cot x\Rightarrow \tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$3x=k\pi+\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

توجه کنید که جواب‌های به‌دست آمده در دامنهٔ تعریف عبارت‌های معادله قرار دارند و $\tan(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8})$ و $\tan(\frac{3k\pi}{4}+\frac{3\pi}{8})$ مقادیری تعریف شده هستند.

تجربی - ۹۷

۷۰۷- گزینهٔ ۳ می‌دانیم

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

پس می‌توان نوشت:

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow 2\sin x\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\sin 2x=\sin(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}+x\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\ 2x=2k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ جواب $2k\pi+\frac{\pi}{4}$ را نیز در خود دارد، زیرا کافی است مقادیر k را مضرب ۳ انتخاب کنیم. پس جواب کلی معادله به‌صورت $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ است.

ریاضی - ۹۲

۷۰۸- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan 3x\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=\tan 3x$$

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\tan(3x)\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{4}-x$$

$$4x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{16}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۷۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$$

$$(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{4}$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{4}$$

$$\cos 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۷۱۰- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin x+\sin 2x+\sin(2x+x)=0$$

$$\underline{\sin x}+\underline{\sin 2x}+\underline{\sin 2x}\cos x+\underline{\sin x}\cos 2x=0$$

$$\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x(1+\cos x)=0$$

$$\sin x(1+\cos 2x)+2\sin x\cos x(1+\cos x)=0$$

$$\sin x(1+2\cos^2 x-1+2\cos x+2\cos^2 x)=0$$

$$2\sin x\cos x(2\cos x+1)=0\Rightarrow \sin 2x(2\cos x+1)=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ \text{(غ.ق.ق.)}\\ \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۷۱۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون نمودار تابع از نقطهٔ $(0,0)$ گذشته است، پس

$$0=a+b\cos(0)=a+b\qquad(1)$$

از طرف دیگر، چون تابع کسینوس در همسایگی راست نقطهٔ $x=0$ نزولی است، اما تابع مورد نظر در همسایگی راست نقطهٔ $x=0$ صعودی است، پس b عددی منفی است. در نتیجه، چون بیشترین مقدار تابع مورد نظر برابر ۴ است، پس

$$4=a-b\qquad(2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $b=-2$.

ریاضی - ۹۷

۷۱۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha$$

از طرف دیگر،

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}\Rightarrow\sin^2\alpha+\frac{7}{9}=1\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{2}{9}$$

چون α در ربع چهارم است، پس $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ و در نتیجه

$$\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{3})=-\frac{2}{3}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۷۱۳- گزینهٔ ۳ از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}$$

$$1+\tan\alpha=5-5\tan\alpha\Rightarrow 6\tan\alpha=4\Rightarrow\tan\alpha=\frac{2}{3}$$

بنابراین

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{12}{5}=2/4$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۷۱۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که برای تعریف شدن عبارت سمت چپ معادله لازم است که

$$1+\cos x\neq 0\Rightarrow\cos x\neq -1\Rightarrow x\neq 2k\pi+\pi$$

با شرط فوق معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin 3x+\sin 2x=0\Rightarrow\sin 3x=-\sin 2x\Rightarrow\sin 3x=\sin(-2x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases}3x=2k\pi-2x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}\\ 3x=2k\pi+\pi+2x\Rightarrow x=2k\pi+\pi\quad(\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۷۱۵- گزینهٔ ۳ از اتحادهای

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

و اتحاد مزدوج برای ساده کردن معادله استفاده می‌کنیم:

$$2\sin 2x\cos 2x=(\sin^2 x-\cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}$$

$$2\sin 2x\cos 2x=-\cos 2x\Rightarrow\cos 2x(2\sin 2x+1)=0$$

$$\begin{cases}\cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\ \sin 2x=\frac{-1}{2}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\\ 2x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{12}\\ x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\end{cases}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$، $\frac{3\pi}{4}$، $\frac{11\pi}{12}$ و $\frac{7\pi}{12}$ که مجموعشان برابر $\frac{30\pi}{12}=\frac{5\pi}{2}$ است.

ریاضی - ۹۵

۷۱۶- گزینهٔ ۲ از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ کمک می‌گیریم و معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin 2x(\sin x+\cos x)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)^2$$

$$=(\cos x+\sin x)\times(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x)$$

پس

$$\sin 2x(\sin x+\cos x)=(\cos x+\sin x)(1-\sin 2x)$$

$$(\cos x+\sin x)(2\sin 2x-1)=0$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x+\sin x=0\Rightarrow\tan x=-1\Rightarrow x=k\pi+\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$

$$\sin 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}\\ 2x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{12}\end{cases}$$

که مجموع این سه جواب برابر است با $\frac{5\pi}{4}$.

تجربی - ۹۳

۷۱۷- گزینهٔ ۲ با شرط $\sin x\neq 0$ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(2x+x)=2\sin x\cos^2 x$$

$$\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=2\sin x\cos^2 x$$

$$2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos 2x=2\sin x\cos^2 x$$

$$\sin x\cos 2x=0\Rightarrow\cos 2x=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\quad k\in\mathbb{Z}$$

ریاضی - ۹۳

۷۱۸- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x+\sin 2x}{\cos x+\cos 2x}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x+\sin 2x\sin x=\cos^2 x+\cos 2x\cos x$$

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$$

$$-\cos 2x=\cos(2x+x)\Rightarrow\cos(\pi-2x)=\cos 3x$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases}3x=2k\pi+\pi-2x\\ 3x=2k\pi-\pi+2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5}\\ x=2k\pi-\pi\quad(\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

واضح است که مضارب فرد k باعث صفر شدن مخرج کسر در معادلهٔ اصلی می‌شوند. بنابراین گزینهٔ (۴) باید به‌صورت $\{\frac{1}{5}(2k+1)\pi\}-\{(2k+1)\pi\}$ نوشته می‌شد.

ریاضی - ۹۴

۷۱۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin x \sin ۳x = \cos(۳x - x)$$

$$\sin x \sin ۳x = \cos ۳x \cos x + \sin ۳x \sin x$$

$$\cos ۳x \cos x = ۰$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \\ \cos ۳x = ۰ \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} = (۲k+۱)\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

واضح است که جواب $(۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$ شامل جواب $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ نیز هست (کافی است $۲k+۱$ مضرب ۳ باشد). پس جواب کلی معادله همان $(۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$ است.

ریاضی - ۹۶

۷۲۰- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(۲\sin x \cos x)(۲\sin ۲x \cos ۲x) = ۱ - \sin^۲ x$$

$$(۲\sin x \cos x)(۴\sin x \cos x \cos ۲x) = \cos^۲ x$$

$$۸\sin^۲ x \cos^۲ x \cos ۲x - \cos^۲ x = ۰$$

$$\cos^۲ x(۸\sin^۲ x \cos ۲x - ۱) = ۰$$

$$\cos^۲ x(۸\sin^۲ x(۱ - ۲\sin^۲ x) - ۱) = ۰$$

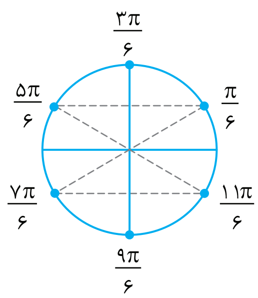
$$\cos^۲ x(-۱۶\sin^۴ x + ۸\sin^۲ x - ۱) = ۰$$

$$-\cos^۲ x(۴\sin^۲ x - ۱)^۲ = ۰$$

بنابراین

$$\begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} = k\pi + \frac{۳\pi}{۶} \\ \sin x = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}, x = ۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

اگر انتهای کمان نظیر جواب‌های معادله را روی دایره مثلثاتی نشان دهیم، به‌صورت زیر خواهند بود که می‌توان آن‌ها را به‌صورت $\frac{(۲k+۱)\pi}{۶}$ نشان داد.



ریاضی - ۹۷

۷۲۱- گزینهٔ ۴ کافی است $x=2$ عضو بازهٔ $(a-2,2a)$ باشد. یعنی

$$a-2<2\Rightarrow a<4,\quad 2a>2\Rightarrow a>1$$

بنابراین $1<a<4$.

۷۲۲- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع از شرط $[x]\neq 2$ به‌دست می‌آید که به‌صورت مقابل است: $D_f=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$

بنابراین تابع در همسایگی چپ نقطهٔ $x=3$ تعریف نشده است.

۷۲۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=4$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=3$،

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۷۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$. در نتیجه

$$\lim_{x\to0} f(x+1)=\lim_{y\to1} f(y)=0$$

از طرف دیگر، اگر $x\to9^+$، آن‌گاه $\frac{x}{3}\to3^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to9^+} f(\frac{x}{3})=\lim_{t\to3^+} f(t)=1$$

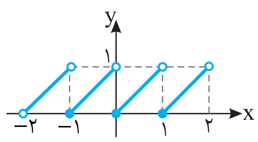
بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۱ است.

۷۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۱، $[x]=0$. بنابراین $\lim\limits_{x\to1^-} f(x[x])=\lim\limits_{x\to1^-} f(0)=\lim\limits_{x\to1^-} 2=2$.

۷۲۶- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار، $x\to(-1)^-\Rightarrow f(x)\to2^+$

بنابراین $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to2^+} f(t)=-2$.

۷۲۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل روبه‌رو است. واضح است که تابع در نقطه‌های $x=-1$، $x=0$ و $x=1$ از بازهٔ $(-2,2)$ حد ندارد.



۷۲۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to5^-} f(x)=2a(5)-3=10a-3$$

$$\lim_{x\to5^+} f(x)=5^2-a(5)+b=25-5a+b$$

اکنون توجه کنید که چون $\lim\limits_{x\to5} f(x)=17$، پس هر یک از حدهای بالا برابر ۱۷ است:

$$\begin{cases}10a-3=17\\ 25-5a+b=17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}\Rightarrow ab=4$$

۷۲۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ وجود دارد.

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to3}\frac{x+4}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to3}(x+4)}{\lim\limits_{x\to3} f(x)}=\frac{7}{\lim\limits_{x\to3} f(x)}=\frac{7}{6}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to3} f(x)=6$. همچنین $\lim\limits_{x\to1} f(2x+1)=\lim\limits_{t\to3} f(t)=6$. بنابراین

$$\lim_{x\to1}\frac{f(2x+1)}{x+2}=\frac{6}{1+2}=2$$

۷۳۰- گزینهٔ ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(6x^2-x^3)=24-8=16$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(3x^2-x^3)=12-8=4$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ برابر ۲۰ است.

۷۳۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادله را حل می‌کنیم

$$|x-1|<2\Rightarrow-2<x-1<2\Rightarrow-1<x<3$$

پس بازهٔ $(-1,3)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است که همسایگی نقطهٔ $x=-2$ نیست.

۷۳۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=2a,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=a-2,\quad f(a)=a$$

بنابراین

$$2a-(a-2)=3a+1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۷۳۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to1^+$، آن‌گاه $(1-x^2)\to0^-$ و اگر $x\to1^-$، آن‌گاه $(1-x^2)\to0^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to1^+} f(1-x^2)-\lim_{x\to1^-} f(1-x^2)=\lim_{t\to0^-} f(t)-\lim_{t\to0^+} f(t)=3-1=2$$

۷۳۴- گزینهٔ ۳ در سمت راست نقطهٔ ۱-، $[x]=-1$ و $|x|=-x$.

بنابراین $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(\frac{|x|}{[x]})=\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(\frac{-x}{-1})=\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-1$.

۷۳۵- گزینهٔ ۴ چون

$$x\to1^+\Rightarrow f(x)\to(-1)^+,\quad x\to(-1)^-\Rightarrow f(x)\to1^-$$

می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1^+}(fof)(x)=\lim_{t\to(-1)^+} f(t)=-1$$

$$\lim_{x\to(-1)^-}(fof)(x)=\lim_{t\to1^-} f(t)=1$$

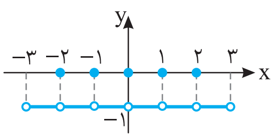
بنابراین $\lim\limits_{x\to1^+}(fof)(x)-\lim\limits_{x\to(-1)^-}(fof)(x)=-1-1=-2$.

۷۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]\Rightarrow f(x)=0$$

$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]-1\Rightarrow f(x)=-1$$

بنابراین نمودار تابع f در بازهٔ $(-3,3)$ به شکل مقابل است. با توجه به نمودار، تابع f در تمام نقاط این بازه حد دارد و حد آن برابر ۱- است.



۷۳۷- گزینهٔ (۱) این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد، پس در $x=2$ و $x=-2$ نیز حد دارد. بنابراین باید حد چپ و حد راست تابع در هر یک از این نقاط برابر باشند:

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(ax^3+x^2)=8a+4$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(x+b)=2+b$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(ax^3+x^2)=-8a+4$$
$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(x+b)=-2+b$$

بنابراین

$$\begin{cases}8a+4=2+b\\-8a+4=-2+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=8a+2\\b=-8a+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=4\end{cases}\Rightarrow ab=1$$

۷۳۸- گزینهٔ (۴) اگر فرض کنیم $\lim_{x\to2} f(x)=L$، طبق قضایای حد

$$\lim_{x\to2}\frac{2f(x)}{f(x)+1}=3\Rightarrow\frac{2L}{L+1}=3\Rightarrow 2L=3L+3\Rightarrow L=-3$$

در نتیجه $\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-1}{f(x)}=\frac{2\times(-3)-1}{-3}=\frac{7}{3}$.

۷۳۹- گزینهٔ (۳) ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=-2$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(ax[3x]+x)=\lim_{x\to(-2)^-}(-7ax+x)=14a-2$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(ax[3x]+x)=\lim_{x\to(-2)^+}(-6ax+x)=12a-2$$

بنابراین $14a-2+12a-2=11\Rightarrow 26a=15\Rightarrow a=\frac{15}{26}$

۷۴۰- گزینهٔ (۲) ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطهٔ $x=1$ حساب می‌کنیم. اگر $x\to1^+$، آن‌گاه $-x\to(-1)^-$ و $2x\to2^+$ و اگر $x\to1^-$، آن‌گاه $-x\to(-1)^+$ و $2x\to2^-$. در نتیجه

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}[2x]+(m+1)\lim_{x\to1^-}[-x]=1+(m+1)(-1)=-m$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}[2x]+(m+1)\lim_{x\to1^+}[-x]=2+(m+1)(-2)=-2m$$

در نتیجه $-2m=-m\Rightarrow m=0$

۷۴۱- گزینهٔ (۳) دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$4-x^2\ge0\Rightarrow x^2\le4\Rightarrow-2\le x\le2\Rightarrow x-[x]\ne0\Rightarrow x\ne[x]\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$ است، پس نقاط $x=\pm1$ و $x=0$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند ولی همسایگی محذوف آن‌ها در دامنهٔ تابع قرار دارد.

۷۴۲- گزینهٔ (۱) توجه کنید اگر $x\to3^-$، آن‌گاه $t=(x-1)\to2^-$. بنابراین $\lim_{x\to3^-} f(x-1)=\lim_{t\to2^-} f(t)=-1$. همچنین اگر $x\to0^+$، آن‌گاه $t=(x+1)\to1^+$. بنابراین $\lim_{x\to0^+} f(x+1)=\lim_{t\to1^+} f(t)=-2$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر -3 است.

۷۴۳- گزینهٔ (۴) در یک همسایگی راست $x=0$ مقدارهای تابع f نزدیک ۲ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to2^-$ و $[f(x)]=1$. بنابراین $\lim_{x\to0^+}[f(x)]=1$.

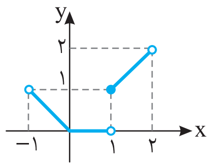
همچنین در یک همسایگی چپ $x=0$ مقدارهای تابع f نزدیک -1 و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to(-1)^-$ و $[f(x)]=-2$. بنابراین $\lim_{x\to0^-}[f(x)]=-2$.

درنتیجه $2\lim_{x\to0^+}[f(x)]-\lim_{x\to0^-}[f(x)]=2-(-2)=4$

۷۴۴- گزینهٔ (۱) ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$-1<x<0\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow f(x)=-x$$
$$0\le x<1\Rightarrow[x]=0\Rightarrow f(x)=0,\quad 1\le x<2\Rightarrow[x]=1\Rightarrow f(x)=x$$

پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است و تابع فقط در نقطهٔ $x=1$ از بازهٔ $(-1,2)$ حد ندارد.



۷۴۵- گزینهٔ (۴) اگر x در یک همسایگی راست ۱ باشد، $x>1$، پس $2-x<1$. در نتیجه $\lim_{x\to1^+} f(2-x)=\lim_{y\to1^-} f(y)=2a$. همچنین $\lim_{x\to1^+} f(x)=a$. در نتیجه $\lim_{x\to1^+}\frac{f(2-x)}{f(x)}=\frac{2a}{a}=2$.

۷۴۶- گزینهٔ (۱) چون تابع‌های f و g در $x=a$ حد دارند، پس

$$\lim_{x\to a}(f(x)-2g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} 2g(x)=\lim_{x\to a} f(x)-2\lim_{x\to a} g(x)=2$$

همچنین

$$\lim_{x\to a}(2f(x)-3g(x))=\lim_{x\to a} 2f(x)-\lim_{x\to a} 3g(x)=2\lim_{x\to a} f(x)-3\lim_{x\to a} g(x)=6$$

بنابراین اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$، آن‌گاه

$$\begin{cases}L_1-2L_2=2\\2L_1-3L_2=6\end{cases}\Rightarrow L_1=6\ ,\ L_2=2$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=L_1\times L_2=12$.

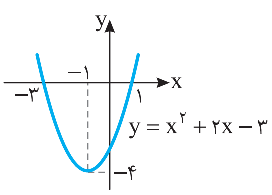
۷۴۷- گزینهٔ (۱) ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطهٔ $x=2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(x[x]+2a)=\lim_{x\to2^+}(2x+2a)=4+2a$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(b[-x]+3x)=\lim_{x\to2^-}(-2b+3x)=-2b+6$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ حد دارد، در نتیجه حد چپ و حد راست تابع در این نقطه برابرند:

$$4+2a=-2b+6\Rightarrow 2a+2b=2\Rightarrow a+b=1$$

۷۴۸- گزینهٔ (۱) در شکل زیر نمودار تابع $y=x^2+2x-3$ رسم شده است. توجه کنید $\lim_{x\to-3}(x^2+2x-3)=0$. اما در سمت چپ $x=-3$، مقدارهای تابع مثبت هستند. در نتیجه در سمت چپ $x=-3$، $[x^2+2x-3]=0$. در نتیجه حاصل حد نیز صفر می‌شود.



۷۴۹- گزینهٔ ۳ مطابق قضیه‌های محاسبهٔ حد، اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{۱+f^{۲}(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{۱+(\lim\limits_{x\to a}f(x))^{۲}}=\frac{L}{۱+L^{۲}}$$

در بقیهٔ گزینه‌ها ممکن است حد مخرج کسر تابع برابر صفر و حد صورت کسر برابر صفر نباشد و در نتیجه تابع حد نداشته باشد.

۷۵۰- گزینهٔ ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $۲x$ عددی صحیح نشود، تابع $y=[۲x]$ حد دارد. در نقطه‌هایی که مقدار $۲x$ عددی صحیح شود، تابع $y=[۲x]$ حد ندارد. این نقطه‌ها را به‌دست می‌آوریم

$$۲x=k\,,\quad k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{k}{۲}$$

$$۰<\frac{k}{۲}<۳\Rightarrow ۰<k<۶\Rightarrow k\in\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

پس تابع در پنج نقطه از بازهٔ $(۰,۳)$ حد ندارد.

۷۵۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to ۱^+$، آن‌گاه $(۱-x^{۳})\to ۰^-$ و اگر $x\to ۱^-$، آن‌گاه $(۱-x^{۳})\to ۰^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱^+} f(۱-x^{۳})+\lim_{x\to ۱^-} f(۱-x^{۳})=\lim_{t\to ۰^-} f(t)+\lim_{t\to ۰^+} f(t)=۴+۲=۶$$

۷۵۲- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۳$. بنابراین $[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)]=[۳]=۳$. از طرف دیگر در یک همسایگی محذوف $x=۱$ مقادیر تابع f نزدیک ۳ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to ۳^-$. بنابراین در این بازه $[f(x)]=۲$، پس $\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]=\lim\limits_{x\to ۱} ۲=۲$. بنابراین

$$\frac{\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]}{[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)]}=\frac{۲}{۳}$$

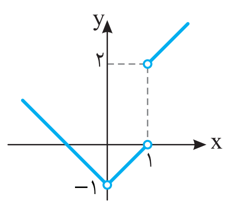
۷۵۳- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$x<۰\Rightarrow f(x)=\frac{x^{۲}}{-x}+\frac{-(x-۱)}{x-۱}=-x-۱$$

$$۰<x<۱\Rightarrow f(x)=\frac{x^{۲}}{x}+\frac{-(x-۱)}{x-۱}=x-۱$$

$$x>۱\Rightarrow f(x)=\frac{x^{۲}}{x}+\frac{x-۱}{x-۱}=x+۱$$

بنابراین نمودار تابع به شکل مقابل است.
پس تابع فقط در نقطهٔ $x=۱$ حد ندارد.



۷۵۴- گزینهٔ ۱ تابع f فقط در $x=۲$ و $x=-۲$ ممکن است حد نداشته باشد. حد چپ و حد راست تابع را در این نقاط حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} x^{۲}=۴\,,\qquad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^{۳}-۲x)=۴$$

$$\lim_{x\to (-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^+}(x^{۳}-۲x)=-۴$$

$$\lim_{x\to (-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۲)^-} x^{۲}=۴$$

پس تابع در $x=۲$ حد دارد ولی در $x=-۲$ حد ندارد.

۷۵۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x^{۳}-x=x(x^{۲}-۱)$. در نتیجه اگر x از سمت چپ به صفر نزدیک شود، آن‌گاه $x^{۳}-x>۰$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x^{۳}-x)=\lim_{t\to ۰^+} f(t)=\lim_{t\to ۰^+}(\sqrt{t+۹})=۳$$

۷۵۶- گزینهٔ ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax^{۲}+۳)=۴a+۳$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^{۲}+۳a)=۴+۳a$$

باید حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ برابر باشند، یعنی

$$۴+۳a=۴a+۳\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳}(x^{۲}+۳a)=\lim\limits_{x\to ۳}(x^{۲}+۳)=۱۲$.

۷۵۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{۳f(x)}{۴f(x)+۲}=۱\Rightarrow\frac{۳\lim\limits_{x\to a} f(x)}{۴\lim\limits_{x\to a} f(x)+۲}=۱\Rightarrow\frac{۳L}{۴L+۲}=۱$$

$$۴L+۲=۳L\Rightarrow L=-۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x)-۳}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)-۳}=\frac{L}{L-۳}=\frac{-۲}{-۲-۳}=\frac{۲}{۵}$$

۷۵۸- گزینهٔ ۲ تابع $y=x$ در تمام نقاط حد دارد. تابع $y=x-[x]$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. پس ضرب این دو تابع یعنی $f(x)=x(x-[x])$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. در نقاط صحیح غیر صفر حد چپ و حد راست تابع $y=x-[x]$ یکسان نیستند پس تابع f نیز در این نقاط حد ندارد. ولی در $x=۰$ چون حد تابع $y=x$ برابر صفر است، پس حد تابع f هم برابر صفر است. بنابراین تابع f در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ از بازهٔ $(-۲,۲)$ حد ندارد.

۷۵۹- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\left(\frac{۴a}{x^{۲}}+x^{۲}\right)=\frac{۴a}{۴}+۴=a+۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{۳a}{x^{۲}}+x^{۲}\right)=\frac{۳a}{۴}+۴$$

بنابراین

$$a+۴+\frac{۳a}{۴}+۴=۱۰\Rightarrow\frac{۷a}{۴}=۲\Rightarrow a=\frac{۸}{۷}$$

۷۶۰- گزینهٔ ۴ اگر تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد، آن‌گاه تفاضل این تابع و تابع $y=|x|$ باید در $x=a$ حد داشته باشد. تفاضل این دو تابع همان تابع $y=f(x)$ است که باید در $x=a$ حد داشته باشد و این خلاف فرض مسئله است. پس تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۳)، تابع $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

این تابع در $x=۰$ حد ندارد، ولی $\lim\limits_{x\to ۰}|f(x)|=\lim\limits_{x\to ۰} ۱=۱,\ \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{|x|}{f(x)}=۰$

برای رد گزینهٔ (۲)، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳} & x<۰\\ \frac{۱}{۲} & x\geq ۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید که در $x=۰$ حد ندارد ولی $\lim\limits_{x\to ۰}[f(x)]=\lim\limits_{x\to ۰} ۰=۰$.

۷۶۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+4}{x+1}=\frac{5}{2}$$

۷۶۲- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که $x^4+4x^3+4x^2=x^2(x^2+4x+4)=x^2(x+2)^2$. بنابراین

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^4+4x^3+4x^2}{(x+2)^2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2(x+2)^2}{(x+2)^2}=\lim_{x\to-2}x^2=4$$

۷۶۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)\ ,\quad x^2-4=(x-2)(x+2)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{4+4+4}{2+2}=3$$

۷۶۴- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که $\lim_{x\to-2}f(x)=4$. در نتیجه

$$\lim_{x\to-2}\frac{f^3(x)-64}{f(x)-4}=\lim_{x\to-2}\frac{f^3(x)-4^3}{f(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(f(x)-4)(f^2(x)+4f(x)+16)}{f(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to-2}(f^2(x)+4f(x)+16)=4^2+4\times4+16=48$$

۷۶۵- گزینهٔ ۳ یک عامل $x-1$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3+3x-4}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1-3x+3}{x^3-1+3x-3}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+x+4)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2+x+4}=\frac{0}{6}=0$$

۷۶۶- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2^-}\frac{|x-2|}{x^2-3x+2}$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to2^-}\frac{-1}{x-1}=-1$$

۷۶۷- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر صفر است، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. که این طور نیست $(b\neq0)$. پس

$$\lim_{x\to3}(x^2+ax+3)=9+3a+3=12+3a=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین

$$b=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2+ax+3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x-1}=\frac{3+3}{3-1}=3$$

بنابراین $a+b=-4+3=-1$.

۷۶۸- گزینهٔ ۲ از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-2x^3}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{1-2x^3})(1+\sqrt{1-2x^3})}{x^3(1+\sqrt{1-2x^3})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2x^3)}{x^3(1+\sqrt{1-2x^3})}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3}{x^3(1+\sqrt{1-2x^3})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{1+\sqrt{1-2x^3}}=\frac{2}{1+1}=1$$

۷۶۹- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-4}}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-4})(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}{(x^2-6x+5)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{x-1-4(x-4)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{-3(x-5)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{-3}{(x-1)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}=\frac{-3}{4(2+2)}=\frac{-3}{16}$$

۷۷۰- گزینهٔ ۱ به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3}=\lim_{x\to8}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+1}+3}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to8}\left(\frac{x-8}{x+1-9}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)=\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{3+3}{4+4+4}=\frac{1}{2}$$

۷۷۱- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است، توجه کنید که

$$(2x+1)^3+(2x-1)^3=8x^3+12x^2+6x+1+8x^3-12x^2+6x-1$$

$$=16x^3+12x=4x(4x^2+3)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to0}\frac{(2x+1)^3+(2x-1)^3}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{4x(4x^2+3)}{4x}=\lim_{x\to0}(4x^2+3)=3$$

۷۷۲- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\sqrt3}\frac{3x^4-9x^2}{x-\sqrt3}=\lim_{x\to\sqrt3}\frac{3x^2(x^2-3)}{x-\sqrt3}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt3}\frac{3x^2(x-\sqrt3)(x+\sqrt3)}{x-\sqrt3}=\lim_{x\to\sqrt3}(3x^2(x+\sqrt3))$$

$$=3(\sqrt3)^2(\sqrt3+\sqrt3)=18\sqrt3$$

۷۷۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^4-27x=x(x^3-27)=x(x-3)(x^2+3x+9)$$

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to3}\frac{x^4-27x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x^2+3x+9)}{x+2}=\frac{3(9+9+9)}{3+2}=\frac{81}{5}$$

۷۷۴- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۶-۱}{x^۴-x^۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۱)(x^۴+x^۲+۱)}{x^۲(x^۲-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+x^۲+۱}{x^۲}=۳$$

۷۷۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $[x]$ در سمت چپ ۳ مساوی ۲ است. پس

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-x[x]-۳}{x[x]-۶}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۲x-۳}{۲x-۶}$$
$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(x-۳)(x+۱)}{۲(x-۳)}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x+۱}{۲}=۲$$

۷۷۶- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد چاق‌ولاغر، $x^۳-۸=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)$ در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}$$
$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}\right)\times\left(\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{x^۲+۲x+۴}\right)$$
$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x+۲-۴}{(x-۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}\right)\times\frac{۱}{۱۲}=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۱}{۲+\sqrt{x+۲}}\right)\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۴۸}$$

۷۷۷- گزینهٔ ۲ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x-\sqrt{x+۲}}{۳x-\sqrt{۱۵x+۶}}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}\times\frac{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}{x+\sqrt{x+۲}}\right)$$
$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x^۲-x-۲}{۹x^۲-۱۵x-۶}\times\frac{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}{x+\sqrt{x+۲}}\right)$$
$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۲)(۹x+۳)}\times\frac{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}{x+\sqrt{x+۲}}\right)$$
$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{x+۱}{۹x+۳}\times\frac{۳x+\sqrt{۱۵x+۶}}{x+\sqrt{x+۲}}\right)=\frac{۳}{۲۱}\times\frac{۶+۶}{۲+۲}=\frac{۳}{۷}$$

۷۷۸- گزینهٔ ۴ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. فرض می‌کنیم $\sqrt[۶]{x}=t$.

در این صورت، اگر $x\to ۶۴$، آن‌گاه $t\to ۲$، بنابراین $t>۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۶۴}\frac{\sqrt{x}-۸}{\sqrt[۳]{x}-۴}=\lim_{t\to ۲}\frac{t^۳-۸}{t^۲-۴}=\lim_{t\to ۲}\frac{(t-۲)(t^۲+۲t+۴)}{(t-۲)(t+۲)}$$
$$=\lim_{t\to ۲}\frac{t^۲+۲t+۴}{t+۲}=\frac{۲^۲+۲\times۲+۴}{۲+۲}=۳$$

۷۷۹- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt[۱۲]{x}$، آن‌گاه $x=t^{۱۲}$ و $t\to ۱$.

بنابراین $t>۰$ و می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۴]{x}}=\lim_{t\to ۱}\frac{\sqrt{t^{۱۲}}-t^{۱۲}}{\sqrt[۳]{t^{۱۲}}-\sqrt[۴]{t^{۱۲}}}=\lim_{t\to ۱}\frac{t^۶-t^{۱۲}}{t^۴-t^۳}$$
$$=\lim_{t\to ۱}\frac{-t^۶(t^۶-۱)}{t^۳(t-۱)}=\lim_{t\to ۱}\frac{-t^۳(t-۱)(t^۵+t^۴+\cdots+t+۱)}{t-۱}$$
$$=\lim_{t\to ۱}(-t^۳(t^۵+t^۴+\cdots+t+۱))=-۶$$

۷۸۰- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر برابر صفر است و حد مورد نظر صفر نیست، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to ۰}(\sqrt{ax+b}-۳)=۰\Rightarrow\sqrt{b}=۳\Rightarrow b=۹$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، مقدار حد را به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sqrt{ax+۹}-۳}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x}{\sqrt{ax+۹}-۳}\times\frac{\sqrt{ax+۹}+۳}{\sqrt{ax+۹}+۳}\right)$$
$$=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x}{ax+۹-۹}\times\frac{\sqrt{ax+۹}+۳}{۱}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۹}+۳}{a}=\frac{۶}{a}$$

بنابراین $\frac{۶}{a}=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $a=۱۲$. پس $a+b=۲۱$.

۷۸۱- گزینهٔ ۱ در یک همسایگی راست π، $\sin x<۰$ بنابراین

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x}{|\sin x|}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x}{-\sin x}=-۱$$

۷۸۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{\cos\pi x}{\sin ۲\pi x}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{\cos\pi x}{۲\sin\pi x\cos\pi x}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲\sin\pi x}=\frac{۱}{۲\times۱}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{\cos\pi x}{\sin ۲\pi x}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{-\pi\sin\pi x}{۲\pi\cos ۲\pi x}=\frac{-\pi\times۱}{۲\pi\times(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

۷۸۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$ و اتحاد مزدوج مقدار حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\sqrt{۲}\sin x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\sqrt{۲}\sin x}{۱-۲\sin^۲ x}$$
$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\sqrt{۲}\sin x}{(۱-\sqrt{۲}\sin x)(۱+\sqrt{۲}\sin x)}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}\sin x}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\sqrt{۲}\sin x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{۲}\cos x}{-۲\sin ۲x}=\frac{\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-۲(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

۷۸۴- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\left(\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}\times\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x\cos\frac{\pi}{۴}-\sin\frac{\pi}{۴}\cos x}\times\frac{۱}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x-\cos x)}\times\frac{۱}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}}{\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}}+\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}}$$

۷۸۵- گزینهٔ ۳ از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{۳x}+\lim_{x\to ۰}f(x)=۳\Rightarrow\frac{۲}{۳}+\lim_{x\to ۰}f(x)=۳$$
$$\lim_{x\to ۰}f(x)=۳-\frac{۲}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

۷۸۶- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^4-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\times\frac{1}{x^2+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+1}=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

۷۸۷- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{1-\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{(4x)^2}{2}}{\frac{(2x)^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{8x^2}{2x^2}=4$$

۷۸۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر و $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 4x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos4x)(1+\cos4x+\cos^2 4x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x(1+\cos4x+\cos^2 4x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}\times\lim_{x\to0}(1+\cos4x+\cos^2 4x)$$
$$=\lim_{x\to0}8\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\times3=8\times3=24$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 4x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{12\sin4x\cos^2 4x}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{x}\times\lim_{x\to0}6\cos^2 4x=4\times6=24$$

۷۸۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $x-2=t$، در نتیجه $x=t+2$ و $t\to0$ بنابراین

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin\pi x}{x^2-2x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi(t+2))}{t(t+2)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t+2\pi)}{t(t+2)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi t}{t(t+2)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\times\lim_{t\to0}\frac{\pi}{t+2}=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin\pi x}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{\pi\cos\pi x}{2x-2}=\frac{\pi\cos2\pi}{4-2}=\frac{\pi}{2}$$

۷۹۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

اکنون با فرض $t=x+\frac{\pi}{4}$ معلوم می‌شود $t\to0$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{4x+\pi}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{4(x+\frac{\pi}{4})}$$
$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{4t}=\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{4x+\pi}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۷۹۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to\pi^-$ آن‌گاه $\sin^2 x\to0^+$ و $\cos x\to(-1)^+$. بنابراین $[\sin^2 x]=0$ و $[\cos x]=-1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin^2 x-[\sin^2 x]}{\cos x-[\cos x]}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin^2 x}{\cos x+1}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\pi^-}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}(1-\cos x)=1-(-1)=2$$

۷۹۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد $\sin2x=2\sin x\cos x$ مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin4x}{\sin x}=\lim_{x\to2\pi}\frac{2\sin2x\cos2x}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to2\pi}\frac{4\sin x\cos x\cos2x}{\sin x}=\lim_{x\to2\pi}(4\cos x\cos2x)=4\times1\times1=4$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin4x}{\sin x}=\lim_{x\to2\pi}\frac{4\cos4x}{\cos x}=\frac{4\times1}{1}=4$$

۷۹۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد $\cos2x=2\cos^2 x-1$، می‌توان نوشت:

$$\sqrt{2+2\cos2x}=\sqrt{2+2(2\cos^2 x-1)}=\sqrt{4\cos^2 x}=2|\cos x|$$

در یک همسایگی چپ $x=\frac{3\pi}{2}$ مقدار $\cos x$ منفی است. بنابراین $|\cos x|=-\cos x$، در نتیجه

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{-2\cos x}{\sin2x}=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{-2\cos x}{2\sin x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{-1}{\sin x}=1$$

۷۹۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** به کمک اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج مقدار حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sin^2 x)^2}{(1-\cos^3 x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos^2 x)^2}{(1-\cos x)^2(\cos^2 x+\cos x+1)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2(1+\cos x)^2}{(1-\cos x)^2(\cos^2 x+\cos x+1)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x)^2}{(\cos^2 x+\cos x+1)^2}=\frac{(1+1)^2}{(1+1+1)^2}=\frac{4}{9}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 x}{(1-\cos^3 x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^3 x\cos x}{6\sin x\cos^2 x(1-\cos^3 x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{3\cos x-3\cos^4 x}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin x\cos x}{-3\sin x+12\sin x\cos^3 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x}{-3+12\cos^3 x}=\frac{4}{12-3}=\frac{4}{9}$$

۷۹۵- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** به جای $\sin ax$ هم‌ارز آن یعنی ax را قرار می‌دهیم و مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin3x-\sin x}{\sin4x-3\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{2(3x)-x}{4x-3(2x)}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{-2x}=-\frac{5}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x-\sin x}{\sin 4x-3\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 3x-\cos x}{4\cos 4x-6\cos 2x}=\frac{6-1}{4-6}=-\frac{5}{2}$$

۷۹۶- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $t=\cos x$ و در نتیجه $t\to 0$ و $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2t^2-1$. بنابراین

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(\cos x)}{1+\cos 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{1+2t^2-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$$

۷۹۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{(2x)^2}{2}-1+\frac{(4x)^2}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2+8x^2}{x^2}=6$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 4x}{x^2}-\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}8\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2-\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=8\times 1^2-2\times 1^2=6$$

۷۹۸- گزینهٔ ۱ اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت ضرب کنیم، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x-(\cos x-\sin x)}{(\sqrt{\cos x+\sin x}+\sqrt{\cos x-\sin x})x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x+\sin x}+\sqrt{\cos x-\sin x}}=2\times\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$$

۷۹۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $x-\frac{\pi}{2}=t$، در نتیجه $x=\frac{\pi}{2}+t$ و $t\to 0$. بنابراین

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\cos 5x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2\pi+4t)}{\cos(\frac{5\pi}{2}+5t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 4t}{-\sin 5t}=-\frac{4}{5}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\cos 5x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{4\cos 4x}{-5\sin 5x}=\frac{4\cos 2\pi}{-5\sin\frac{5\pi}{2}}=-\frac{4}{5}$$

۸۰۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos 2x}=\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos 2x}\times\frac{\sqrt{\tan x}+1}{\sqrt{\tan x}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos 2x}\times\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\tan x}+1}=\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{\cos 2x}\times\frac{1}{1+1}$$

$$=\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x\cos 2x}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{-1}{2(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})}=-\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos 2x}=\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}}{-2\sin 2x}=\frac{\frac{1+1}{2\times 1}}{-2\times 1}=-\frac{1}{2}$$

۸۰۱- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای $\sin^2 x=1-\cos^2 x$، مزدوج و چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x+\cos^2 x}{1-\cos x}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

۸۰۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

و اتحاد مزدوج مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{-(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x+\sin x}=\frac{-1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{-2\sin 2x}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2\times 1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸۰۳- گزینهٔ ۲ با توجه به اتحاد $1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$، می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{2\sin^2 x-1}{2\sin 4x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{-\cos 2x}{2(2\sin 2x\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{-1}{4\sin 2x}=\frac{-1}{4\sin\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}$$

۸۰۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\cos^2 x-\frac{1}{2}=\frac{2\cos^2 x-1}{2}=\frac{\cos 2x}{2}$$

$$\cos^4 x-\frac{1}{4}=(\cos^2 x-\frac{1}{2})(\cos^2 x+\frac{1}{2})=\frac{\cos 2x}{2}(\cos^2 x+\frac{1}{2})$$

در نتیجه حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x(\cos^2 x+\frac{1}{2})}{2\sin 4x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x(\cos^2 x+\frac{1}{2})}{4\sin 2x\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x+\frac{1}{2}}{4\sin 2x}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^4 x-\frac{1}{4}}{\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-4\sin x\cos^3 x}{4\cos 4x}=\frac{-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^3}{4(-1)}=\frac{1}{4}$$

۸۰۵- گزینهٔ ۳ در یک همسایگی چپ نقطهٔ صفر $|x|=-x$. بنابراین حد مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$L=\lim_{x\to0^-}\frac{2x^2+x\sin 6x}{5x^2-x\sin 4x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x+\sin 6x}{5x-\sin 4x}$$

راه‌حل اول از هم‌ارزی مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to0^-}\frac{2x+6x}{5x-4x}=\lim_{x\to0^-}\frac{8x}{x}=8$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2x+\sin 6x}{5x-\sin 4x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2+6\cos 6x}{5-4\cos 4x}=\frac{2+6}{5-4}=8$$

۸۰۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{3})}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\tan(\frac{\pi}{3}(1-x))}{\frac{\pi}{3}(1-x)}\times\frac{\frac{\pi}{3}}{1+x+x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\tan(\frac{\pi}{3}(1-x))}{\frac{\pi}{3}(1-x)}\times\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{3}}{1+x+x^2}=1\times\frac{\frac{\pi}{3}}{1+1+1}=\frac{\pi}{9}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{3})}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{\pi}{3}(1+\tan^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{3}))}{-3x^2}=\frac{-\frac{\pi}{3}(1+0)}{-3}=\frac{\pi}{9}$$

۸۰۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{\tan^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{\tan^2 x}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\tan^2 x}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\tan^2 x}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$L=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\tan^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-(1-\frac{1}{2}(5x)^2)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{12x^2}{x^2}=6$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{5\sin 5x}{2\sqrt{\cos 5x}}}{2\tan x(1+\tan^2 x)}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{5(5x)}{2\sqrt{\cos 5x}}}{2x(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{25}{2\sqrt{\cos 5x}}}{2(1+x^2)}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{25}{2}}{2}=6$$

۸۰۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1$. بنابراین

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin(1+\cos x)}{1+\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x}\right)$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}\times\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x}=1\times\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)(1-\cos x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2(1-\cos x)}=\frac{1}{4}$$

۸۰۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $x-\frac{\pi}{6}=t$. در نتیجه $x=\frac{\pi}{6}+t$ و $t\to0$. بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin(\frac{\pi}{6}+t)-1}{6(\frac{\pi}{6}+t)-\pi}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\cos t+2\cos\frac{\pi}{6}\sin t-1}{6t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{3}\sin t}{6t}-\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{6t}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های مثلثاتی (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{3}t}{6t}-\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{6t}=\frac{\sqrt{3}}{6}-0=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x}{6}=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

۸۱۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با توجه به اتحاد $\cos 2x=1-2\sin^2 x$،
اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{\sin x}=t$، آن‌گاه $\sin x=t^3$ و $t\to1$. در نتیجه

$$1-\cos 4x=2\sin^2 2x=2-2\cos^2 2x=2-2(1-2\sin^2 x)^2$$

$$=2-2(1-2t^6)^2=2-2+8t^6-8t^{12}=8t^6(1-t^6)$$

پس

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\cos 4x}=\lim_{t\to1}\frac{1-t}{8t^6(1-t^6)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{1-t}{8t^6(1-t)(1+t+\cdots+t^5)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{1}{8t^6(1+t+\cdots+t^5)}=\frac{1}{8\times6}=\frac{1}{48}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sqrt[۳]{\sin x}}{۱-\cos ۴x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\frac{-\cos x}{۳\sqrt[۳]{\sin^۲ x}}}{۴\sin ۴x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{-\cos x}{۱۲\sin ۴x\sqrt[۳]{\sin^۲ x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{-\cos x}{۲۴ \sin ۲x\cos ۲x \sqrt[۳]{\sin^۲ x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{-\cos x}{۴۸\sin x\cos x\cos ۲x\sqrt[۳]{\sin^۲x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{-۱}{۴۸ \sin x\cos ۲x\sqrt[۳]{\sin^۲ x}} = \frac{۱}{۴۸}$$

۸۱۱- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f به‌صورت $[-۲,۰)\cup(۰,۲]$ است، بنابراین این تابع در نقطهٔ $x=۲$ فقط پیوستگی چپ دارد، در نقطهٔ $x=-۲$ فقط پیوستگی راست دارد و در نقطهٔ $x=۰$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است: $\lim_{x\to۱} f(x)=\sqrt{۳}=f(۱)$.

۸۱۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(۲)=۴,\quad \lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x^۲+x)=۴+۲=۶$$

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(x^۲-x)=۴-۲=۲$$

بنابراین مقدار تابع f در نقطهٔ $x=۲$ نه با حد چپ آن در این نقطه برابر است نـه با حد راست آن. پس این تابع در نقطهٔ $x=۲$ نه پیوستگی چپ دارد، نه پیوستگی راست.

۸۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to۳^-} f(x)=\lim_{x\to۳^-}(۷-m^۲x^۲)=۷-۹m^۲$$

همچنین $f(۳)=\lim_{x\to۳^+}f(x)=\lim_{x\to۳^+}(x^۲-۶)=۳$، در نتیجه

$$۷-۹m^۲=۳\Rightarrow ۹m^۲=۴\Rightarrow m=\pm\frac{۲}{۳}$$

بنابراین حاصل ضرب مقدارهای ممکن m برابر $-\frac{۴}{۹}$ است.

۸۱۴- گزینهٔ ۱ چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در $x=-۱$ هم پیوسته است. بنابراین حدهای چپ و راست تابع و مقدار تابع در این نقطه برابرند:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{a}{x-۲}=\frac{a}{-۳}$$

$$f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x+۲a}{x+۲}=\frac{-۱+۲a}{-۱+۲}=۲a-۱$$

بنابراین $۲a-۱=-\frac{a}{۳}\Rightarrow a=\frac{۳}{۷}$

۸۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(۲)=a,\quad \lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(۳x-[x])=\lim_{x\to۲^-}(۳x-۱)=۵$$

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x+۲b)=۲+۲b$$

بنابراین $a=۵$ و $۲+۲b=۵$، پس $b=\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $ab=\frac{۱۵}{۲}$.

۸۱۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=\lim_{x\to۱^-}(ax^۲-a+۴)=a-a+۴=۴$$

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to۱^+}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱^+}\frac{(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{\sqrt x}=۴$$

بنابراین به‌ازای هر مقدار a تابع f در $x=۱$ پیوسته است. زیرا:

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=f(۱)=۴$$

۸۱۷- گزینهٔ ۳

$$\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۳x+۲}\ge۰\Rightarrow\frac{x^۲-۴x}{(x-۱)(x-۲)}\ge۰$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		۰		۱		۲		۴		$+\infty$
$\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۳x+۲}$		+	۰	−	ت ن	+	ت ن	−	۰	+	

بنابراین تابع f روی بازه‌های $[۴,+\infty)$، $(۱,۲)$ و $(-\infty,۰]$ پیوسته است و حداکثر مقدار a برابر صفر است.

۸۱۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x\ge۰$، آن‌گاه $[x]\ge۰$ و $f(x)=۰$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $[x]<۰$ و $f(x)=۲[x]$. بنابراین تابع f در نقاط صحیح مثبت پیوسته است ولی در نقاط صحیح نامثبت، یعنی در نقاط $x=۰$، $x=-۱$، $x=-۲$ و $x=-۳$ از بازهٔ $(-۴,۴)$ ناپیوسته است.

۸۱۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در نقطه‌هایی که مقدار $\frac{x+۱}{۴}$ عددی صحیح شود، تابع $y=[\frac{x+۱}{۴}]$ ناپیوسته است: $\frac{x+۱}{۴}=k\Rightarrow x=۴k-۱,\quad k\in\mathbb{Z}$

یعنی در نقطه‌هایی به‌صورت $۴k-۱$ تابع ناپیوسته است. پس تابع روی بازهٔ $(-۱,۳)$ پیوسته است و در $x=۳$ ناپیوسته است. سپس روی بازهٔ $(۳,۷)$ پیوسته است، یعنی حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

راه حل دوم توجه کنید که

$$-۱<x<k \xrightarrow{+۱} ۰<x+۱<k+۱ \xrightarrow{\div۴} ۰<\frac{x+۱}{۴}<\frac{k+۱}{۴}$$

برای اینکه $[\frac{x+۱}{۴}]$ در این بازه پیوسته باشد، باید $\frac{k+۱}{۴}=۱$، پس $k=۳$.

۸۲۰- گزینهٔ ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $\sqrt{x}$ عددی صحیح شود تابع $y=[\sqrt{x}]$ ناپیوسته است. $\sqrt{x}=k\in\mathbb{R}\Rightarrow x=k^۲$

پس تابع در نقطه‌های $x=۰$، $x=۱$، $x=۴$، $x=۹$ و ... ناپیوسته است، یعنی تابع روی بازهٔ $(۱,۴)$ پیوسته است، در $x=۴$ ناپیوسته است سپس روی بازهٔ $(۴,۹)$ پیوسته است. پس حداکثر مقدار k برابر ۹ است.

۸۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۴)=[\frac{۴}{۲}]+[-\frac{۴}{۲}]=۲-۲=۰$ و

$$\lim_{x\to۴^+}f(x)=۲-۳=-۱,\quad \lim_{x\to۴^-}f(x)=۱-۲=-۱$$

بنابراین تابع در $x=۴$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع در این نقطه حد دارد ولی پیوسته نیست.

۸۲۲- گزینهٔ ۲ در $x=۴$، $x=۱۶$ و $x=۶۴$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{۲}$ عدد صحیح می‌شود. پس تابع $f(x)=[\frac{\sqrt{x}}{۲}]$ در این نقطه‌ها پیوسته نیست.

در نقطهٔ $x=۹$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{۲}$ عدد صحیح نیست، پس تابع $y=[\frac{\sqrt{x}}{۲}]$ در این نقطه پیوسته است.

۸۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(۲-۳x)=۵$$

همچنین $f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=|-۳-a|=|۳+a|$. در نتیجه

$$|۳+a|=۵\Rightarrow ۳+a=۵ \text{ یا } ۳+a=-۵\Rightarrow a=۲ \text{ یا } a=-۸$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر -۶ است.

۸۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(\frac{\pi}{۴})=۱+ab$ و

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}(\sin ۲x-a)=\sin\frac{\pi}{۲}-a=۱-a$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}(-۲-\sin ۲x)=-۲-\sin\frac{\pi}{۲}=-۳$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، باید $۱+ab=۱-a=-۳$. در نتیجه $a=۴$ و $۱+ab=۱+۴b=-۳$، بنابراین $b=-۱$. پس $a+b=۳$.

۸۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}(۳x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(ax-b)\Rightarrow -۳=-a-b \qquad (۱)$$

همچنین

$$\lim_{x\to۲^-} f(x)=\lim_{x\to۲^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to۲^-}(ax-b)=\lim_{x\to۲^+}(x^۲-۱)$$

$$۲a-b=۳ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $a=۲$ و $b=۱$. پس $\frac{a}{b}=۲$.

۸۲۶- گزینهٔ ۳ مخرج نباید هیچ جا صفر شود، در نتیجه باید دلتای معادلهٔ $x^۲-۶x+m+۱=۰$ منفی باشد:

$$\Delta=۳۶-۴(m+۱)<۰\Rightarrow m>۸$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۸۲۷- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ نقطه‌های ناپیوستگی تابع f مقدارهایی از x است که مخرج، یعنی $x^۲-ax+b$، به ازای آن‌ها صفر است. بنابراین -۳ و ۴ ریشه‌های مخرج هستند. به این ترتیب

$$a=\text{مجموع ریشه‌ها}=۴-۳=۱$$

$$b=\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=۴(-۳)=-۱۲$$

بنابراین $a+b=-۱۱$.

۸۲۸- گزینهٔ ۲ این تابع در تمام نقاطی که $۲x+\frac{۱}{۲}$ مقداری صحیح داشته باشد، ناپیوسته است:

$$۲x+\frac{۱}{۲}=k\,,\,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۲x=k-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k-۱}{۴}$$

پس در تمام نقاطی که به‌صورت $\frac{۲k-۱}{۴}$ باشند و k عددی صحیح باشد، این تابع ناپیوسته است. برای اینکه معلوم شود در بازهٔ $(-۱,۲)$ چند نقطه به این صورت است، کافی است نامعادلهٔ $-۱<x<۲$ را حل کنیم:

$$-۱<\frac{۲k-۱}{۴}<۲\Rightarrow -۴<۲k-۱<۸\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<k<\frac{۹}{۲}$$

$$k\in\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$$

بنابراین تابع f در شش نقطه از بازهٔ $(-۱,۲)$ ناپیوسته است که این نقاط به‌صورت زیر هستند:

k	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	$-\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۷}{۴}$

۸۲۹- گزینهٔ ۳ باید $x^۲+kx+۴\ge۰$. در نتیجه $\Delta\le۰$، یعنی

$$k^۲-۱۶\le۰\Rightarrow -۴\le k\le۴$$

بنابراین اگر k یکی از عددهای صحیح زیر باشد، تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴$$

۸۳۰- گزینهٔ ۲ باید

$$۷-|x-۲|\ge۰\Rightarrow|x-۲|\le۷\Rightarrow-۷\le x-۲\le۷\Rightarrow-۵\le x\le۹$$

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۵,۹]$ پیوسته است.

۸۳۱- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=[\cos(\pi x)]$ در $x=۱$ پیوسته است، زیرا

$$f(۱)=[\cos\pi]=[-۱]=-۱$$

در یک همسایگی راست $x=۱$، $\pi x\to\pi^+$ و در نتیجه $\cos(\pi x)\to(-۱)^+$

و در یک همسایگی چپ $x=۱$، $\pi x\to\pi^-$ و در نتیجه $\cos(\pi x)\to(-۱)^+$.

پس

$$\lim_{x\to۱^-} f(x)=\lim_{t\to(-۱)^+}[t]=-۱\,,\quad \lim_{x\to۱^+} f(x)=\lim_{t\to(-۱)^+}[t]=-۱$$

بقیهٔ تابع‌ها در $x=۱$ ناپیوسته‌اند.

۸۳۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ زیرا ریشهٔ مخرج کسر $\frac{۱}{x^۳-۹}$ در بازهٔ $(-\infty,۲)$ قرار ندارد و ریشه‌های مخرج کسر $\frac{۱}{x^۲+x-۲}$ در بازهٔ $[۲,+\infty)$ قرار ندارند. بنابراین تابع f فقط در $x=۲$ می‌تواند ناپیوسته باشد. پیوستگی تابع f را در $x=۲$ بررسی می‌کنیم.

$$f(۲)=\lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{۱}{x^۲+x-۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to۲^-} f(x)=\lim_{x\to۲^-}\frac{۱}{x^۳-۹}=-۱$$

بنابراین تابع f فقط در $x=۲$ ناپیوسته است.

۸۳۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x^۴=x^۲\Rightarrow x=\pm۱,\ x=۰$$

ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & x=۰ \text{ یا } x=\pm۱ \\ x^۲+۲x & x\neq۰, x\neq\pm۱ \end{cases}$$

پس

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x\neq۰, x\neq\pm۱ \\ -۱ & x=۱ \\ ۰ & x=۰ \\ ۳ & x=-۱ \end{cases}$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to(-۱)} f(x)=\lim_{x\to(-۱)}(x^۲+۲x)=-۱\neq f(-۱)=۳$$

$$\lim_{x\to۰} f(x)=\lim_{x\to۰}(x^۲+۲x)=۰=f(۰)$$

$$\lim_{x\to۱} f(x)=\lim_{x\to۱}(x^۲+۲x)=۳\neq f(۱)=-۱$$

بنابراین تابع در $x=-۱$ و $x=۱$ ناپیوسته است.

۸۳۴- گزینهٔ ۱ تابع f در نقطه‌هایی ناپیوسته است که تعریف نشده باشد، در نتیجه باید ریشه‌های مخرج کسر را پیدا کنیم:

اگر $x\geq۴$، آن‌گاه

$$x^۲-۴x-۳=۰\Rightarrow x=۲+\sqrt{۷},\ x=۲-\sqrt{۷}\quad (\text{غ.ق.ق})$$

اگر $x<۴$، آن‌گاه

$$x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow x=۱,\ x=۳$$

بنابراین تابع f در نقاط $x=۱$، $x=۳$ و $x=۲+\sqrt{۷}$ ناپیوسته است که مجموع این نقاط برابر $۶+\sqrt{۷}$ است.

۸۳۵- گزینهٔ ۳ باید مخرج فقط در یک نقطه برابر صفر باشد، یعنی دلتای معادلهٔ $x^۲+(۲m-۱)x+۱=۰$ برابر صفر است:

$$\Delta=(۲m-۱)^۲-۴(۱)=۰\Rightarrow ۴m^۲-۴m+۱-۴=۰\Rightarrow ۴m^۲-۴m-۳=۰$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای m برابر $-\frac{۳}{۴}$ است.

۸۳۶- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x\to۱} f(x)=\lim_{x\to۱}\left(\frac{\sqrt[۳]{x-\sqrt{x}}}{x-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[۳]{x+\sqrt{x}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt[۳]{x^۲-x}}{x-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt[۳]{x}\sqrt[۳]{x-۱}}{x-۱}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{۲}\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}=+\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطهٔ ۱ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

۸۳۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید k عددی صحیح باشد، در این صورت

$$f(k)=k([k]-۱)+[-k]=k^۲-k-k=k^۲-۲k$$

$$\lim_{x\to k^-} f(x)=\lim_{x\to k^-}(x(k-۲)-k)=k^۲-۲k-k=k^۲-۳k$$

برای اینکه تابع f در $x=k$ پیوستگی چپ داشته باشد، باید

$$k^۲-۲k=k^۲-۳k\Rightarrow k=۰$$

پس در بین نقاط صحیح، فقط در $x=۰$ این تابع پیوستگی چپ دارد.

۸۳۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که به‌ازای $x=-\frac{۷}{۲}$، $۲x-۵$ عددی صحیح است. بنابراین درصورتی تابع $f(x)$ در $x=-\frac{۷}{۲}$ پیوسته است که $x=-\frac{۷}{۲}$ ریشهٔ عبارت $۴x^۲-۲ax-۷$ باشد. در نتیجه

$$۴(-\frac{۷}{۲})^۲-۲a(-\frac{۷}{۲})-۷=۰\Rightarrow ۴۹+۷a-۷=۰\Rightarrow a=-۶$$

۸۳۹- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$۴x-x^۲>۰\Rightarrow ۰<x<۴$$

پس دامنهٔ تابع بازهٔ $(۰,۴)$ است. در نقطه‌های صحیح این بازه تابع ناپیوسته است، یعنی در نقطه‌های $x=۱$، $x=۲$ و $x=۳$.

۸۴۰- گزینهٔ ۱ ابتدا $\lim_{x\to۰} f(x)$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x\to۰} f(x)=\lim_{x\to۰}\frac{\sin ۸x}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x}}$$

$$=\lim_{x\to۰}\left(\frac{\sin ۸x}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x}}\times\frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{(\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x})\sin ۸x}{(b+x)-(b-x)}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{(\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x})\sin ۸x}{۲x}$$

$$=\lim_{x\to۰}(\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x})\times\lim_{x\to۰}\frac{\sin ۸x}{۲x}$$

$$=۲\sqrt{b}\times۴=۸\sqrt{b}$$

بنابراین باید

$$۸\sqrt{b}=۱۶\Rightarrow b=۴$$

۸۴۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=۰$ و در یک همسایگی چپ نقطهٔ -۲ مقادیر تابع f منفی هستند. بنابراین $\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۴}{f(x)}=-\infty$.

۸۴۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to۳}|x-۳|=۰$ و چون مقادیر $|x-۳|$ در یک همسایگی محذوف ۳ مثبت‌اند، پس $\lim_{x\to۳}\frac{۳}{|x-۳|}=+\infty$.

۸۴۳- گزینهٔ ۳ اگر $x\to۱^-$، آن‌گاه $-x\to(-۱)^+$ و در نتیجه $[-x]=-۱$. بنابراین $\lim_{x\to۱^-}\frac{[-x]}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{-۱}{x-۱}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$.

۸۴۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که مخرج کسر تابع f سه ریشه دارد:

$$x^۳-۴x=۰\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow x=۰,\ x=\pm۲$$

این اعداد ریشه‌های صورت کسر تابع نیستند. از طرف دیگر، $\lim_{x\to۰^-} f(x)=+\infty$. پس تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد چپ نامتناهی دارد. همین‌طور در نقطه‌های $x=-۲$ و $x=۲$ حد چپ تابع f نامتناهی است.

۸۴۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x(x-1)}$$

از طرف دیگر، $\lim_{x\to 0^-}x(x-1)=0$ و اگر $x\to 0^-$، مقادیر $x(x-1)$ مثبت هستند، پس $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x(x-1)}=+\infty$.

۸۴۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to\pi^+}\sin x=\lim_{x\to\pi^-}\sin x=0$ و اگر $x\to\pi^+$، مقادیر $\sin x$ منفی‌اند و اگر $x\to\pi^-$، مقادیر $\sin x$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim_{x\to\pi^+}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to\pi^-}f(x)=+\infty$.

۸۴۷- گزینهٔ ۲ اگر $x\to\pi^+$، آن‌گاه $\cos x\to(-1)^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[\cos x]}{\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-1}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

۸۴۸- گزینهٔ ۱ اگر $x\to 0^-$، آن‌گاه $[x]=-1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x[x]}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{\sin x}\times\frac{-1}{\sin x}\right)=1\times\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

۸۴۹- گزینهٔ ۳ اگر $x\to 1^+$، آن‌گاه $[x]=1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\tan(\pi(x-1))}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\tan(\pi x-\pi)}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\tan(\pi x)}=+\infty$$

اگر $x\to 1^-$، آن‌گاه $[x]=0$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\tan(\pi x)}=-\infty$$

۸۵۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{4-3}{x-1}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{0-3}{x-1}=+\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت مقابل است:

۸۵۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim_{x\to 4^-}f(x)=0$ و مقادیر f در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۴، منفی هستند. بنابراین $\lim_{x\to 4^-}\frac{-2}{f(x)}=+\infty$. بقیهٔ گزینه‌ها نادرست هستند.

۸۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-1)^+}(2x+1)=-1\ ,\quad \lim_{x\to(-1)^+}(x^2+x)=0$$

از طرف دیگر، وقتی $x\to(-1)^+$، مقادیر x^2+x منفی هستند $(x^2+x=\underbrace{x}_{\text{منفی}}\underbrace{(x+1)}_{\text{مثبت}})$، پس $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x+1}{x^2+x}=+\infty$.

۸۵۳- گزینهٔ ۱ اگر $x\to 2^+$، آن‌گاه $[x]=2$ و $f(x)=\frac{2}{x-2}$ و در نتیجه $\lim_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$. اگر $x\to 2^-$، آن‌گاه $[x]=1$ و $f(x)=\frac{-1}{x-2}$ و در نتیجه $\lim_{x\to 2^-}f(x)=+\infty$.

۸۵۴- گزینهٔ ۱ در ریشه‌های مخرج ممکن است تابع حد چپ نامتناهی داشته باشد. ریشه‌های مخرج $x=1$ و $x=2$ هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2}{x-2}\ ,\quad x\neq 1$$

پس $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$. بنابراین تابع فقط در $x=2$ حد چپ نامتناهی دارد.

۸۵۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq 1$، آن‌گاه

$$\frac{x^2-3x+2}{-2x^2+4x-2}=\frac{(x-1)(x-2)}{-2(x-1)^2}=\frac{x-2}{-2(x-1)}$$

بنابراین $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{-2x^2+4x-2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-2}{-2(x-1)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$.

۸۵۶- گزینهٔ ۲ اگر $x\to(\frac{1}{3})^+$، آن‌گاه

$$\pi x\to(\frac{\pi}{3})^+\Rightarrow\cos(\pi x)\to(\frac{1}{2})^-$$

بنابراین $\lim_{x\to(\frac{1}{3})^+}\frac{3x+1}{2\cos(\pi x)-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$.

۸۵۷- گزینهٔ ۳ چون $\lim_{x\to 2}(x-3)=-1$، پس باید ax^2+6x+b در $x=2$ برابر صفر شود و مقدار این عبارت در دو طرف $x=2$ عددی منفی باشد. بنابراین باید $x=2$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2+6x+b=0$ باشد، یعنی این عبارت باید به‌صورت $a(x-2)^2$ باشد. چون $a<0$، پس

$$ax^2-4ax+4a=ax^2+6x+b$$

$$\begin{cases}-4a=6\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\\ b=4a=-6\end{cases}$$

پس $ab=9$.

۸۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

بنابراین $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$.

۸۵۹- گزینهٔ ۳ می‌توان ضابطهٔ تابع را به شکل زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{\cos x}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$
$$=\frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

اکنون توجه کنید که عبارت $1+\sin x$ همواره نامنفی است. بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

۸۶۰- گزینهٔ ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x+2}{x-1}\ ,\ x\neq 2$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت مقابل است:

۸۶۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to0}(f(x)-2)=0$ و مقادیر $f(x)-2$ در یک همسایگی محذوف نقطهٔ صفر منفی هستند. زیرا در این همسایگی مقادیر $f(x)$ کمتر از ۲ هستند. بنابراین $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{f(x)-2}=-\infty$.

۸۶۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to0}(x-1)=-1\ ,\quad \lim_{x\to0}(x^3-2x^2)=0$$

از طرف دیگر، چون $x^3-2x^2=x^2(x-2)$، وقتی $x\to0$، مقادیر x^3-2x^2 منفی هستند. پس $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-1}{x^3-2x^2}=+\infty$.

۸۶۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to5^-}([x]^2-25)=16-25=-9$ و $\lim\limits_{x\to5^-}(x-5)=0$ و مقادیر $x-5$ در یک همسایگی چپ ۵ منفی‌اند.

بنابراین $\lim\limits_{x\to5^-}\frac{[x]^2-25}{x-5}=+\infty$.

۸۶۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اعداد صحیح، ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f هستند:

$$x-[x]=0\Rightarrow x=[x]\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

اکنون دقت کنید که از اعداد صحیح فقط $x=0$ و $x=1$ ریشهٔ صورت $f(x)$ هستند. حد چپ و حد راست تابع در این نقاط را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to1^+} x=1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to1^-}(x-1)=0$$

بنابراین تابع در نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ حد چپ متناهی و حد راست متناهی دارد. در بقیهٔ اعداد صحیح حد صورت کسر صفر نیست، درحالی که حد راست مخرج کسر صفر است، پس تابع f در این نقاط حد راست نامتناهی دارد.

۸۶۵- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $\sqrt[6]{x}=t$. در این صورت اگر $x\to0^+$ آن‌گاه $t\to0^+$ و

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^3-t^2}{t^6-t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{t-1}{t(t^3-1)}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t(t^2+t+1)}=+\infty$$

۸۶۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{1}{2\sin x\cos x-2\sin x}=\frac{1}{2\sin x(\cos x-1)}$$

عبارت $\cos x-1$ همواره نامثبت است. یعنی $\cos x-1\leq0$. از طرف دیگر اگر $x\to0^-$، آن‌گاه $\sin x\to0^-$ و اگر $x\to0^+$، آن‌گاه $\sin x\to0^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{2\sin x(\cos x-1)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2\sin x(\cos x-1)}=-\infty$$

۸۶۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}(x)=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}(\sin x-\cos x)=0$$

از طرف دیگر، وقتی $x\to(\frac{\pi}{4})^-$ مقادیر $\sin x$ از مقادیر $\cos x$ کوچک‌ترند، پس مقادیر $\sin x-\cos x$ منفی‌اند. در نتیجه

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{x}{\sin x-\cos x}=-\infty$$

۸۶۸- گزینهٔ ۱ اگر $x\to1^-$، آن‌گاه $[x]=0$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x+\tan 0}=\frac{1}{1+0}=1$$

اگر $x\to1^+$، آن‌گاه $[x]=1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x+\tan(\frac{\pi x}{2})}=\frac{1}{1+(-\infty)}=0$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع f در $x=1$ برابر ۱ است.

۸۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sin x-\cos x}{1-\sin 2x}=\frac{\sin x-\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{1}{\sin x-\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{\sin x-\cos x}{1-\sin 2x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

۸۷۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=-2$ به‌صورت مقابل است.

۸۷۱- گزینهٔ ۲ حد مخرج $f(x)$ در $x=2$ و $x=-3$ باید برابر صفر باشد، یعنی $x=2$ و $x=-3$ جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+2=0$ هستند. با توجه به مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها معلوم می‌شود:

$$2+(-3)=-\frac{b}{a} \quad , \quad 2\times(-3)=\frac{2}{a}$$

بنابراین $a=-\frac{1}{3}$ و $b=-\frac{1}{3}$. پس

$$f(x)=\frac{x^2+1}{-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+2}\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1+1}{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+2}=\frac{3}{2}$$

۸۷۲- گزینهٔ ۳ باید علامت عبارت $2x-\sqrt{x+3}$ را در اطراف نقطهٔ $x=1$ مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که $x=1$ تنها جواب معادلهٔ $2x-\sqrt{x+3}=0$ است.

$$2x=\sqrt{x+3}\Rightarrow 4x^2-x-3=0\Rightarrow x=1,\ x=-\frac{3}{4}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین علامت عبارت $2x-\sqrt{x+3}$ را می‌توانیم با عددگذاری مشخص کنیم. مثلاً اگر $x=2$، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $4-\sqrt{5}$ است که عددی مثبت است و اگر $x=0$، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $-\sqrt{3}$ است که عددی منفی است.

x		-3		1		$+\infty$
$2x-\sqrt{x+3}$		تن	$-$	0	$+$	

در یک همسایگی چپ $x=1$ مقدار عبارت منفی است، پس $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

در یک همسایگی راست $x=1$ مقدار عبارت مثبت است، پس $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

۸۷۳- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج وقتی $x\to 2$ صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید.

بنابراین $x-2$ یکی از عامل‌های صورت است و صورت را می‌توان این‌طور نوشت $2x^2+mx+n=(x-2)(2x+k)$. به این ترتیب، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+k)}{(x-2)(x+2)}=\frac{5}{2}\Rightarrow \frac{2\times 2+k}{2+2}=\frac{5}{2}\Rightarrow k=6$$

اکنون می‌توان نوشت $2x^2+mx+n=(x-2)(2x+6)=2x^2+2x-12$.
پس $m=2$ و $n=-12$، و در نتیجه $m-n=14$.

۸۷۴- گزینهٔ ۳ چون حد مخرج وقتی $x\to 1$ برابر صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، باید حد صورت هم صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+b})=0\Rightarrow \sqrt{2+a}=\sqrt{1+b}\Rightarrow b=a+1$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج مقدار حد را حساب می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+a+1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+a+1}}{x-1}\times\frac{\sqrt{2x+a}+\sqrt{x+a+1}}{\sqrt{2x+a}+\sqrt{x+a+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+a-x-a-1}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt{2x+a}+\sqrt{x+a+1}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{a+2}}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2\sqrt{a+2}}=\frac{1}{6}\Rightarrow \sqrt{a+2}=3\Rightarrow a=7$$

پس $b=8$ و در نتیجه $ab=56$.

۸۷۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x^2-3x+2)$$
$$=(x-1)(x-1)(x-2)=(x-1)^2(x-2)$$

بنابراین در هر دو حالت $x\to 1^+$ و $x\to 1^-$:

$$(x-1)^2\to 0^+\Rightarrow (x-1)^2(x-2)\to 0^-$$

پس $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

۸۷۶- گزینهٔ ۱ در یک همسایگی راست $x=2$ تساوی $[x]=2$ برقرار است. پس $\lim_{x\to 2^+}\frac{3[x]+k}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{6+k}{x-2}=+\infty$.

چون $(x-2)\to 0^+$، پس $6+k>0$ و در نتیجه $k>-6$.

در یک همسایگی چپ $x=2$ تساوی $[x]=1$ برقرار است. پس

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3[x]+k}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{3+k}{x-2}=+\infty$$

چون $(x-2)\to 0^-$، پس $3+k<0$ و در نتیجه $k<-3$، بنابراین $-6<k<-3$.

۸۷۷- گزینهٔ ۱ از فرض‌های مسئله نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to a}\frac{2}{1+f(x)}=1\Rightarrow \frac{2}{1+\lim_{x\to a} f(x)}=1\Rightarrow 1+\lim_{x\to a} f(x)=2\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=1$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)-1)=0$. از طرف دیگر $\lim_{x\to a}\frac{g(x)+1}{f(x)-1}=2$. اگر $\lim_{x\to a}(g(x)+1)\neq 0$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{g(x)+1}{f(x)-1}$ وجود ندارد، چون حد مخرج آن صفر است. پس $\lim_{x\to a}(g(x)+1)=0$ و در نتیجه $\lim_{x\to a} g(x)=-1$. بنابراین

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+1}{g(x)-3}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)+1}{\lim_{x\to a} g(x)-3}=\frac{1+1}{-1-3}=-\frac{1}{2}$$

۸۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x^3-ax^2+ax-1=(x^3-1)-ax(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)-ax(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+(1-a)x+1)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-ax^2+ax-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+(1-a)x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+(1-a)x+1}$$

برای اینکه مقدار حد فوق برابر $+\infty$ شود باید $x=1$ ریشهٔ مخرج (ریشهٔ مضاعف) باشد. پس $1+(1-a)+1=0\Rightarrow a=3$

۸۷۹- گزینهٔ ۴ اگر $x\to 2^-$، آن‌گاه $[x]=1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{t\to \frac{\pi}{2}^+}\tan t=-\infty$$

اگر $x\to 2^+$، آن‌گاه $[x]=2$ و در نتیجه

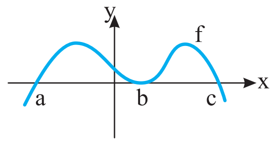
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\tan\left(\frac{2\pi}{x}\right)=\tan\pi=0$$

۸۸۰- گزینهٔ ۱ برای اینکه حد مورد نظر $+\infty$ شود باید $x=\frac{\pi}{4}$ ریشهٔ مخرج کسر باشد:

$$a\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=0\Rightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow a=-1$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{bx+1}{\cos x-\sin x}=+\infty$. اکنون توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\pi}{4})^+$ مقدار مخرج کسر منفی است و باید مقدار صورت کسر هم منفی باشد تا حد مورد نظر برابر $+\infty$ شود. پس $\frac{b\pi}{4}+1<0\Rightarrow b<-\frac{4}{\pi}$

۸۸۱- گزینهٔ ۳ مطابق شکل زیر در نقاط $x=a$، $x=b$ و $x=c$ حد تابع f برابر صفر است، بنابراین حد تابع $\frac{1}{f}$ در این نقاط نامتناهی است و نمودار تابع $\frac{1}{f}$ در این نقاط مجانب قائم دارد.



۸۸۲- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x-6}=\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-6)}=\frac{x-4}{x-6},\quad x\neq-1$$

بنابراین $x=6$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۸۸۳- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x-2}{(x^2+1)(x^2-4)}=\frac{x-2}{(x^2+1)(x-2)(x+2)}=\frac{1}{(x^2+1)(x+2)},\ x\neq2$$

بنابراین $x=-2$ تنها ریشهٔ مخرج است و خط $x=-2$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۸۸۴- گزینهٔ ۳ ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$|x-1|-2=0\Rightarrow|x-1|=2\Rightarrow\begin{cases}x-1=2\\x-1=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-1\end{cases}$$

بنابراین خط‌های $x=-1$ و $x=3$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر ۴ است.

۸۸۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x}{x-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1},\quad D_f=(0,+\infty)-\{1\}$$

پس نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=1$ دارد.

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty,\quad\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$

۸۸۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z}),\quad\frac{-3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=-\pi,0,\pi$$

بنابراین نمودار تابع f سه مجانب قائم به معادلات $x=\pi$، $x=0$ و $x=-\pi$ در بازهٔ $(\frac{-3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ دارد.

۸۸۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$0\le x-[x]<1\Rightarrow-2\le x-[x]-2<-1$$

پس حد مخرج کسر ضابطهٔ تابع f هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که تابع f در آن حد نامتناهی داشته باشد. پس نمودار تابع f مجانب قائم ندارد.

۸۸۸- گزینهٔ ۲ اگر مخرج کسر ضابطهٔ تابع f ریشه نداشته باشد، نمودار این تابع مجانب قائم نخواهد داشت (توجه کنید که صورت کسر ۱ است). بنابراین

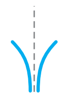
$$x^2+mx+1=0,\quad\Delta=m^2-4<0\Rightarrow-2<m<2$$

پس m سه مقدار صحیح ±1 و ۰ را می‌تواند داشته باشد.

۸۸۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x=1$ ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f است و

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{0-3}{1-x}=-\infty,\quad\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{4-3}{1-x}=-\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت زیر است:

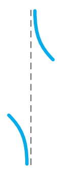


۸۹۰- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2},\quad x\neq1$$

پس $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است و

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty$$



بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=2$ به‌صورت مقابل است.

۸۹۱- گزینهٔ ۴ مخرج کسر در ضابطهٔ تابع f ریشه ندارد. بنابراین نمودار تابع f مجانب قائم ندارد.

$$x^2-x+1=0,\quad\Delta=1-4<0$$

۸۹۲- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^3-4x^2+3x}=\frac{(x-2)(x-3)}{x(x^2-4x+3)}$$
$$=\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x(x-1)},\quad x\neq3$$

بنابراین خطوط $x=0$ و $x=1$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند.

۸۹۳- گزینهٔ ۳ ابتدا ریشه‌های مخرج کسر ضابطهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$x-|x^2-2x|=0\Rightarrow|x^2-2x|=x,\quad x\ge0$$

$$\begin{cases}x^2-2x=x\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x=0,\ x=3\\x^2-2x=-x\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x=0,\ x=1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f سه مجانب قائم به معادلات $x=0$، $x=1$ و $x=3$ دارد.

۸۹۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x^2-4x>0\Rightarrow x\in\mathbb{R}-[0,4],\quad1-x^2>0\Rightarrow-1<x<1$$

بنابراین $D_f=(-1,0)$. پس نمودار تابع، دو خط مجانب قائم به معادلات $x=0$ و $x=-1$ دارد:

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty,\quad\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$$

۸۹۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$۲\cos x-۱=۰\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$۰<x<۲\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}$$

بنابراین نمودار تابع f در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دو مجانب قائم به معادلات $x=\frac{\pi}{۳}$ و $x=\frac{۵\pi}{۳}$ دارد. توجه کنید که هیچ‌یک از این دو مقدار صورت کسر ضابطهٔ تابع را صفر نمی‌کنند.

۸۹۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ریشه‌های مخرج کسر ضابطهٔ تابع f در بازهٔ $(\frac{-۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z}),\quad \frac{-۳\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow x=-\pi,۰,\pi$$

از بین این ریشه‌ها $x=۰$ ریشهٔ صورت کسر هم است. همچنین

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}=۱$$

بنابراین $x=۰$ مجانب قائم نمودار تابع f نیست ولی $x=\pi$ و $x=-\pi$ مجانب قائم هستند. زیرا تابع در این نقاط حد نامتناهی دارد.

۸۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱-\sin ۲x}{\cos ۲x}=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)^۲}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\quad (\cos x\neq \sin x)$$

اکنون ریشه‌های مخرج را که در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ واقع هستند مشخص می‌کنیم:

$$\sin x+\cos x=۰\Rightarrow \sin x=-\cos x\Rightarrow \tan x=-۱\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴},x=\frac{۷\pi}{۴}$$

بنابراین نمودار تابع f در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دو مجانب قائم به معادلات $x=\frac{۳\pi}{۴}$ و $x=\frac{۷\pi}{۴}$ دارد. توجه کنید که هیچ‌یک از این دو مقدار صورت کسر ضابطهٔ تابع را صفر نمی‌کنند.

۸۹۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $۰\le x-[x]<۱\Rightarrow ۱\le x-[x]+۱<۲$

پس حد مخرج کسر ضابطهٔ تابع f هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که تابع f در آن حد نامتناهی داشته باشد. پس نمودار تابع f مجانب قائم ندارد.

۸۹۹- گزینهٔ ۲ در دو حالت زیر نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد:

حالت اول مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$x^۲-mx+۹=۰,\quad \Delta=m^۲-۳۶=۰\Rightarrow m=\pm ۶$$

حالت دوم مخرج دو ریشه داشته باشد که یکی ریشهٔ صورت کسر یعنی $x=۴$ است:

$$۱۶-۴m+۹=۰\Rightarrow m=\frac{۲۵}{۴}$$

پس به‌ازای سه مقدار m نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

۹۰۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-۱}{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)}=\frac{۱}{\sqrt{x}}\ ,\quad D_f=(۰,+\infty)-\{۱\}$$

بنابراین $x=۰$ ریشهٔ مخرج است و خط $x=۰$ مجانب قائم نمودار تابع f است:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=۰$ به‌صورت روبه‌رو است.

۹۰۱- گزینهٔ ۱ مخرج کسر در ضابطهٔ تابع ریشهٔ مضاعف دارد:

$$x^۲-۶x+۹=۰\Rightarrow (x-۳)^۲=۰\Rightarrow x=۳$$

چون $x=۳$ ریشهٔ صورت کسر در ضابطهٔ تابع f نیست، پس تابع f در $x=۳$ حد نامتناهی دارد و $x=۳$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-x+۲}{x^۲-۶x+۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-x+۲}{(x-۳)^۲}=\frac{۸}{۰^+}=+\infty$$

۹۰۲- گزینهٔ ۱ ریشه‌های مخرج کسر ضابطهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۳+x-۲=۰\Rightarrow x^۳-۱+x-۱=۰\Rightarrow (x-۱)(x^۲+x+۱)+x-۱=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+x+۲)=۰$$

معادلهٔ $x^۲+x+۲=۰$ جواب ندارد $(\Delta<۰)$، بنابراین $x=۱$ تنها ریشهٔ مخرج است و چون این عدد ریشهٔ صورت نیست، پس خط $x=۱$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۰۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{x(x+۲)(x-۲)}\ ,\quad D_f=[۱,+\infty)-\{۲\}$$

بنابراین $x=۲$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۰۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x^۲-۳x>۰\Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۳,+\infty)$$

$$x^۲-۵x+۴>۰\Rightarrow x\in(-\infty,۱)\cup(۴,+\infty)$$

بنابراین $D_f=(-\infty,۰)\cup(۴,+\infty)$، پس تابع f دو مجانب قائم به معادلات $x=۴$ و $x=۰$ دارد:

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=+\infty$$

۹۰۵- گزینهٔ ۴ در تابع $y=\tan x$ خطوط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ مجانب‌های قائم نمودار تابع‌اند. بنابراین معادلهٔ مجانب‌های تابع f به‌صورت زیر است:

$$\frac{x}{۳}+\frac{\pi}{۶}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۳k\pi+\pi=(۳k+۱)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

مجانب‌های قائم نمودار تابع f در بازهٔ $(-۶\pi,۶\pi)$ عبارت‌اند از $x=\pi$، $x=۴\pi$، $x=-۲\pi$ و $x=-۵\pi$.

۹۰۶- گزینهٔ ۱ $x=۲$ باید جواب معادلهٔ $۳ax-۴=۰$ باشد. پس

$$۶a-۴=۰\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

۹۰۷- گزینهٔ ۳ باید $x=-3$ ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f باشد:

$$x^3+mx-3=0 \xrightarrow{x=-3} -27-3m-3=0 \Rightarrow m=-10$$

بنابراین $f(x)=\frac{x}{x^3-10x-3}=\frac{x}{(x+3)(x^2-3x-1)}$. توجه کنید که

$$x^3-10x-3=x^3-9x-x-3=x(x^2-9)-(x+3)$$

$$=x(x-3)(x+3)-(x+3)=(x+3)(x^2-3x-1)$$

پس مجانب‌های قائم دیگر نمودار تابع f جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x-1=0$ هستند که عبارت‌اند از $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ و $x=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

۹۰۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(m-1)x^2+x+1-m=0,\quad \Delta=1-4(m-1)(1-m)=1+4(m-1)^2>0$$

بنابراین اگر $m\neq1$، آن‌گاه مخرج کسر ضابطهٔ تابع f همواره دو ریشه دارد. برای اینکه نمودار تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد، باید یکی از ریشه‌های مخرج، ریشهٔ صورت کسر هم باشد. پس $x=2$ ریشهٔ مخرج است.

$$(m-1)x^2+x+1-m=0 \xrightarrow{x=2} 4(m-1)+2+1-m=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3}$$

اما اگر $m=1$، آن‌گاه مخرج کسر از درجهٔ اول است و ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{x-2}{x}$ است که $x=0$ مجانب قائم نمودار آن است. بنابراین حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای m برابر $\frac{4}{3}$ است.

۹۰۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$2x-1\ge0\Rightarrow x\ge\frac{1}{2},\quad x-x^2>0\Rightarrow 0<x<1$$

بنابراین $D_f=[\frac{1}{2},1)$ و تنها مجانب قائم نمودار تابع f خط $x=1$ است. از طرف دیگر $\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$. بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت مقابل است.

۹۱۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $x=\frac{3\pi}{2}$ تنها ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f در بازهٔ $(\pi,2\pi)$ است. همچنین در همسایگی $x=\frac{3\pi}{2}$ مقدار عبارت $\sin x$ نزدیک -1 و بیشتر از آن است. یعنی

$$\sin x\to(-1)^+\Rightarrow[\sin x]=-1$$

بنابراین $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{-1}{\cos^2 x}=-\infty$، پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=\frac{\pi}{2}$ به‌صورت روبه‌رو است.

۹۱۱- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۲ است.

۹۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to1^-}(fof)(x)=\lim_{x\to1^-}f(f(x))=\lim_{t\to-\infty}f(t)=-2$$

۹۱۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\frac{1}{x}+\frac{x^2}{x-1}}{2x-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2(x-1)+x-1+x^3}{x(x-1)}}{\frac{2x^2-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x^2+x-1}{(2x^2-1)(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x^2+x-1}{2x^3-2x^2-x+1}=\frac{4}{2}=2$$

۹۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر $1-3x$ مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-|1-3x|}{5x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-(1-3x)}{5x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1}{5x-3}=1$$

۹۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-2)^4(4x^2+1)^2}{(6x^4-2x^3+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3^4x^4-\cdots)(4^2x^4+\cdots)}{6^2x^8+\cdots}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^4\times4^2x^8-\cdots}{6^2x^8+\cdots}=\frac{3^4\times4^2}{6^2}=36$$

۹۱۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $3n+4$ و $2n+6$ از ۱ بیشترند، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3n+4}+x+1}{x^{2n+6}-x+1}=\lim_{x\to+\infty}x^{3n+4-(2n+6)}=\lim_{x\to+\infty}x^{n-2}$$

اگر این حد صفر باشد، باید $n-2<0$، یعنی $n<2$، بنابراین فقط $n=1$ ویژگی مورد نظر را دارد.

۹۱۷- گزینهٔ ۲ اگر m عددی مثبت باشد، وقتی $x\to+\infty$، مقادیر $1-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(mx-1)+2x-1}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+2)x-2}{3x+1}=\frac{m+2}{3}$$

بنابراین $\frac{m+2}{3}=3$، پس $m=7$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی $x\to+\infty$، مقادیر $1-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-mx)+2x-1}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-m)x}{3x+1}=\frac{2-m}{3}$$

بنابراین $\frac{2-m}{3}=3$، پس $m=-7$. اگر $m=0$، حد مورد نظر برابر $\frac{2}{3}$ می‌شود که درست نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۷ و ۷- هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها ۴۹- است.

۹۱۸- گزینهٔ ۴ چون حد مورد نظر برابر $-\infty$ شده است، پس باید درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشد و ضریب بزرگ‌ترین جمله در صورت باید منفی باشد. برای اینکه درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشد، باید $5-a=0$، یعنی $a=5$. توجه کنید که اگر $a=5$، بزرگ‌ترین جملهٔ صورت $-x^2$ می‌شود، بنابراین حد مورد نظر برابر $-\infty$ است.

۹۱۹- گزینهٔ ۳ چون درجهٔ مخرج کسر داده شده برابر ۲ است، اگر در صورت این کسر جملهٔ شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، یعنی $a=3$. در نتیجه حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x\to+\infty}\frac{(b+2)x^2-3x+4}{3x^2-1}=\frac{b+2}{3}$.

بنابراین $\frac{b+2}{3}=5$، پس $b=13$. به این ترتیب $a+b=16$.

۹۲۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$.

از طرف دیگر $f(x)=\frac{x-1}{x+3}=1-\frac{4}{x+3}$. اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{4}{x+3}\to 0^+$، پس $f(x)<1$. اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $\frac{4}{x+3}\to 0^-$، پس $f(x)>1$. پس در $+\infty$ نمودار تابع f پایین‌تر از خط $y=1$ قرار دارد و در $-\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط $y=1$ قرار دارد.

۹۲۱- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $t=1-x$. در این صورت اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $t\to-\infty$. اکنون از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x\to+\infty} f(1-x)=\lim_{t\to-\infty} f(t)=-2$$

۹۲۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>2$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{t\to2^+} f(t)=+\infty$$

۹۲۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$. همچنین اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>1$ و $[f(x)]=1$ و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-2$ و $[f(x)]=-3$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=1,\quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)]=-3$$

پس $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]-\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=-3-1=-4$.

۹۲۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to0^+$ و در نتیجه $[\frac{1}{x}]=0$، بنابراین $\lim_{x\to+\infty}(x[\frac{1}{x}])=\lim_{x\to+\infty}x(0)=\lim_{x\to+\infty}0=0$.

در واقع در $+\infty$ تابع $f(x)=x[\frac{1}{x}]$ و تابع $g(x)=0$ مساوی‌اند و حد آن‌ها برابر صفر است.

۹۲۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، مقادیر $2x$ ،x و $3x-1$ همگی منفی‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|2x|+|x|}{|3x-1|-|2x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-x}{1-3x-(-2x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{-x+1}=3$$

۹۲۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $n=1$، آن‌گاه مقدار حد برابر صفر است که وجود دارد. اگر $n>1$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{n-1}-2x}{x^4-x+1}=\lim_{x\to+\infty}(3x^{n-1-4})=3\lim_{x\to+\infty}x^{n-5}$$

برای اینکه این حد وجود نداشته باشد، باید $n-5\geq1$، یعنی $n\geq6$. بنابراین کوچک‌ترین عددی که ویژگی مورد نظر را دارد، ۶ است.

۹۲۷- گزینهٔ ۲ اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل x^2 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^2 باید صفر باشد، یعنی $a+1=0$، پس $a=-1$. در این صورت، حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x+4}{(b-2)x-1}=\frac{-5}{b-2}$. بنابراین $\frac{-5}{b-2}=\frac{1}{2}$، در نتیجه $b=-8$. به این ترتیب، $ab=8$.

۹۲۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، درنتیجه $2a-1=0$، پس $a=\frac{1}{2}$. به این ترتیب حد مسئله می‌شود $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1}{2x^2+x+1}=\frac{4}{2}=2$.

در نتیجه $b=2$ و $a+b=\frac{5}{2}$.

۹۲۹- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $t=\frac{1}{x}$، آن‌گاه $t\to0^+$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\tan\frac{2}{x}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{\tan 2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{\frac{2\sin t\cos t}{\cos 2t}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\cos 2t}{2\cos t}=\frac{1}{2}$$

۹۳۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{2x+1}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}>2$. بنابراین اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $[\frac{2x+1}{x-1}]=2$ و در نتیجه $\lim_{x\to+\infty}[\frac{2x+1}{x-1}]=\lim_{x\to+\infty}2=2$.

۹۳۱- گزینهٔ ۴ گزینهٔ (۱) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}(1-f(x))=0$

و اگر $x\to-\infty$، مقادیر $1-f(x)$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{1-f(x)}=+\infty$.

گزینهٔ (۲) $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

گزینهٔ (۳) $\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to1^-}((x+2)f(x))=-\infty$

گزینهٔ (۴) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(1-f(x))=0$

و اگر $x\to+\infty$، مقادیر $1-f(x)$ منفی‌اند. بنابراین $\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{1-f(x)}=+\infty$.

پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

۹۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-2,\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$

اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-2$، بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{t\to(-2)^-}f(t)=-\infty$$

از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>2$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{t\to2^+}f(t)=+\infty$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)-\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=(-\infty)-(+\infty)=-\infty$$

۹۳۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $-\frac{1}{x}\to 0^-$ و در نتیجه $[-\frac{1}{x}]=-1$، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x[-\frac{1}{x}]-1}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

۹۳۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که جملهٔ دارای بزرگ‌ترین توان در صورت کسر برابر $(2x^3)^2-(3x^2)^3=-23x^6$ است و جملهٔ دارای بزرگ‌ترین توان در مخرج کسر برابر $x^2(3x^2)^2=9x^6$ است. پس حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x\to-\infty}\frac{-23x^6}{9x^6}=-\frac{23}{9}$.

۹۳۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، مقادیر $3x^2-1$، $2x^2-3$ و $5x^2-x$ مثبت‌اند، پس

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|3x^2-1|-|2x^2-3|}{|5x^2-x|-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-1-2x^2+3}{5x^2-x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}$$

۹۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که باید $m\neq 0$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^5(mx+2)^7}{(2mx-1)^4(6x-1)^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3^5x^5+\cdots)(m^7x^7+\cdots)}{(2^4m^4x^4-\cdots)(6^8x^8-\cdots)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^5m^7x^{12}+\cdots}{2^4\times 6^8m^4x^{12}+\cdots}=\frac{3^5m^7}{2^4\times 6^8m^4}=\frac{m^3}{2^{12}\times 3^3}$$

بنابراین $\frac{m^3}{2^{12}\times 3^3}=-1$، پس $m=-48$.

۹۳۷- گزینهٔ ۳ اگر $n>3$، آن‌گاه $L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^n}=1$، اگر $n=3$، آن‌گاه $L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^3-1}{x^3-2x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{-x^3}=-5$. اگر $n<3$، آن‌گاه $L=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{-2x^3}=-2$، پس سه مقدار مختلف برای L وجود دارد.

۹۳۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $f(x)=ax+b$، آن‌گاه $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}}{ax+b}=\frac{\frac{1}{a}}{a}=\frac{1}{a^2}$$

بنابراین $\frac{1}{a^2}=16$. چون a منفی است، پس $a=-\frac{1}{4}$. به این ترتیب $f(x)=-\frac{1}{4}x+b$ و $f(3)=3$، پس $-\frac{3}{4}+b=3$. در نتیجه $b=\frac{15}{4}$.

بنابراین $f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}$، پس $f(-1)=4$.

۹۳۹- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\tan x$، آن‌گاه $t\to-\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan x}{1-\tan x}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{1-t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{-t}=-1$$

۹۴۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x-1}=\frac{1}{2}$$

از طرف دیگر وقتی $x\to+\infty$،

$$\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{2x-1}=\frac{4x^2}{4x^2-1}=1+\frac{1}{4x^2-1}>1$$

بنابراین $[\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{2x-1}]=1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{2x-1}]=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

۹۴۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{4x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=0$$

بنابراین خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

۹۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x}=4$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-x}{-x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

بنابراین خطوط $y=4$ و $y=-2$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها برابر ۶ است.

۹۴۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که خطوط $x=4$ و $y=3$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع f هستند. پس نقطهٔ $A(4,3)$ محل تلاقی مجانب‌هاست و فاصلهٔ آن تا مبدأ برابر است با $\sqrt{4^2+3^2}=5$.

۹۴۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $y=\frac{a}{a-1}$ مجانب افقی نمودار تابع f است. پس

$$\frac{a}{a-1}=2\Rightarrow 2a-2=a\Rightarrow a=2$$

همچنین خط $x=\frac{-2a}{a-1}$ مجانب قائم نمودار تابع است. پس معادلهٔ مجانب قائم $x=-4$ است.

۹۴۵- گزینهٔ ۳ خطوط $x=\frac{a}{a-1}$ و $y=\frac{2}{a-1}$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین نقطهٔ $(\frac{a}{a-1},\frac{2}{a-1})$ روی خط $y=x+1$ قرار دارد. پس

$$\frac{2}{a-1}=\frac{a}{a-1}+1\Rightarrow 2=a+a-1\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

۹۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$. بنابراین باید نقاط تلاقی خط $y=0$ و نمودار تابع f را مشخص کنیم:

$$f(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$$

پس نمودار تابع f در دو نقطهٔ $(1,0)$ و $(-1,0)$ مجانب افقی خود را قطع می‌کند.

۹۴۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$. بنابراین باید خط $y=0$ و نمودار تابع f تلاقی داشته باشند، یعنی باید معادلهٔ $f(x)=0$ جواب داشته باشد:

$$\frac{x^2-2x+m}{x^3+1}=0\Rightarrow x^2-2x+m=0\Rightarrow \Delta=4-4m\geq 0\Rightarrow m\leq 1$$

۹۴۸- گزینهٔ ۲ خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ است، پس $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-2f(3-x))=1-2\lim_{x\to-\infty}f(3-x)$$

از طرف دیگر اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $(3-x)\to+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=1-2\lim_{t\to+\infty}f(t)=1-2\times2=-3$$

پس خط $y=-3$ مجانب افقی نمودار تابع g در $-\infty$ است.

۹۴۹- گزینهٔ ۴ خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f است. از طرف دیگر

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+3}=2-\frac{7}{x+3}$$

اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{7}{x+3}\to0^+$، پس $f(x)<2$.

اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $\frac{7}{x+3}\to0^-$، پس $f(x)>2$.

پس در $+\infty$ نمودار تابع f پایین‌تر از خط مجانب افقی آن قرار دارد و در $-\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط مجانب افقی آن قرار دارد.

۹۵۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که خطوط $y=2$ و $y=-2$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند. از طرف دیگر، اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}>2$$

و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{2x}{-x-1}=-2+\frac{2}{x+1}<-2$$

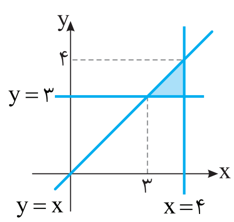
بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ بالای خط مجانب آن و در $-\infty$ پایین خط مجانب آن است.

۹۵۱- گزینهٔ ۳ تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-2}$ در بی‌نهایت حد ندارد:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

توجه کنید که در ضابطهٔ تابع f درجهٔ صورت کسر بیشتر از درجهٔ مخرج آن است ولی در بقیه گزینه‌ها چنین نیست.

۹۵۲- گزینهٔ ۱ خط‌های $x=4$ و $y=3$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین مساحت مثلث رنگی در شکل زیر مورد سؤال است که برابر $\frac{1}{2}$ است.



۹۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $x=4$ باید ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f باشد:

$$2x-a+2=0\xrightarrow{x=4}8-a+2=0\Rightarrow a=10$$

از طرف دیگر

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a+4)x}{2x}=\frac{a+4}{2}=7$$

بنابراین $y=7$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

۹۵۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x(x-1)}{x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

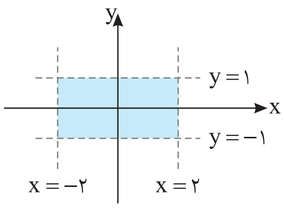
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x(x-1)}{x^2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

بنابراین خط‌های $y=3$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها ۴ واحد است.

۹۵۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که خطوط $x=2$ و $x=-2$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند و خطوط $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی آن هستند.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-4}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{x^2-4}=-1$$

بنابراین باید مساحت مستطیل شکل زیر را به‌دست آوریم که برابر ۸ است.



۹۵۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $y=1$ مجانب افقی نمودار تابع f است زیرا

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

بنابراین باید طول نقطهٔ برخورد خط $y=1$ با نمودار تابع f را به‌دست آوریم:

$$f(x)=1\Rightarrow\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}=1\Rightarrow x^2-4=x^2+3x+2\Rightarrow x=-2$$

۹۵۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که خط $y=1$ مجانب افقی نمودار تابع f است. بنابراین باید معادلهٔ $f(x)=1$ جواب نداشته باشد تا نمودار تابع f خط $y=1$ را قطع نکند:

$$\frac{x^3+x^2+mx+4}{x^3+2}=1\Rightarrow x^3+x^2+mx+4=x^3+2\Rightarrow x^2+mx+2=0$$

$$\Delta=m^2-8<0\Rightarrow-\sqrt{8}<m<\sqrt{8}$$

۹۵۸- گزینهٔ ۴ خط $y=3$ مجانب افقی نمودار تابع f است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

بنابراین نمودار تابع f باید دو مجانب قائم داشته باشد، یعنی مخرج کسر تابع f باید دو ریشه داشته باشد:

$$x^2+mx+m+1=0$$

$$\Delta=m^2-4(m+1)>0\Rightarrow m^2-4m-4>0\Rightarrow(m-2)^2>8$$

پس $m-2>\sqrt{8}$ یا $m-2<-\sqrt{8}$. بنابراین $m>2+\sqrt{8}$ یا $m<2-\sqrt{8}$.

۹۵۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که خط‌های $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x}{x-۱}=۱+\frac{۱}{x-۱}>۱$$

و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-x}{x-۱}=-۱+\frac{-۱}{x-۱}>-۱$. پس نمودار تابع f در $+\infty$ و $-\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد.

۹۶۰- گزینهٔ ۳ خط $y=۰$ مجانب افقی نمودار تابع f است. همچنین مقادیر تابع همواره مثبت هستند. بنابراین نمودار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ بالای خط مجانب آن قرار دارد.

۹۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=\pi$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x\to\pi^-$، آن‌گاه $\frac{x}{۲}\to(\frac{\pi}{۲})^-$، بنابراین $\cos\frac{x}{۲}\to ۰^+$، پس $\lim_{x\to\pi^-}[\cos\frac{x}{۲}]=۰$ و $۲x\to(۲\pi)^-$، بنابراین $\sin ۲x\to ۰^-$، پس $\lim_{x\to\pi^-}[\sin ۲x]=-۱$. در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}(\sin\frac{x}{۲}\times ۰-\cos x\times(-۱))=\cos\pi=-۱$$

از طرف دیگر، اگر $x\to\pi^+$، آن‌گاه $\frac{x}{۲}\to(\frac{\pi}{۲})^+$. بنابراین $\cos\frac{x}{۲}\to ۰^-$، پس $\lim_{x\to\pi^+}[\cos\frac{x}{۲}]=-۱$ و $۲x\to(۲\pi)^+$. بنابراین $\sin ۲x\to ۰^+$، پس

$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin ۲x]=۰$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^+}(\sin\frac{x}{۲}\times(-۱)-\cos x\times ۰)=-\sin\frac{\pi}{۲}=-۱$$

پس $\lim_{x\to\pi} f(x)=-۱$. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۹۶۲- گزینهٔ ۱ چون حد مخرج کسر صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to۱}(\sqrt{ax+b}-۲)=۰\Rightarrow\sqrt{a+b}=۲\Rightarrow a+b=۴\Rightarrow b=۴-a$$

اکنون با استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to۱}(\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}\times\frac{\sqrt{ax+b}+۲}{\sqrt{ax+b}+۲})$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{ax+b-۴}{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{ax+b}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{ax-a}{(x-۱)(x+۱)}\times\frac{۱}{۲+۲}=\lim_{x\to۱}\frac{a}{x+۱}\times\frac{۱}{۴}=\frac{a}{۸}$$

بنابراین $\frac{a}{۸}=\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $a=۱۲$، پس $b=-۸$. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۹۶۳- گزینهٔ ۳ چون $\lim_{x\to۳}\frac{x-۴}{۲x^۲+ax+b}=-\infty$. بنابراین باید مخرج کسر به صفر میل کند. همچنین چون حد چپ و راست برابر $-\infty$ است، پس $x=۳$ باید ریشهٔ مضاعف مخرج کسر باشد. بنابراین

$$۲x^۲+ax+b=۲(x-۳)^۲\Rightarrow ۲x^۲+ax+b=۲x^۲-۱۲x+۱۸$$

$$a=-۱۲,\ b=۱۸\Rightarrow a+b=۶$$

ریاضی - ۹۳

۹۶۴- گزینهٔ ۱ باید تعداد نقاطی را پیدا کنیم که به‌ازای آن‌ها $(\frac{۱}{۳}x-۱)\in\mathbb{Z}$:

$$۰<x<۹\Rightarrow ۰<\frac{۱}{۳}x<۳\Rightarrow -۱<\frac{۱}{۳}x-۱<۲$$

$$\xrightarrow{(\frac{۱}{۳}x-۱)\in\mathbb{Z}}(\frac{۱}{۳}x-۱)\in\{۰,۱\}$$

ولی در نقطهٔ $x=۳$ که به‌ازای آن $\frac{۱}{۳}x-۱=۰$، عامل صفر کنندهٔ $x-۳$ موجب پیوستگی می‌شود. پس تابع f فقط در یک نقطه از بازهٔ $(۰,۹)$ ناپیوسته است. ریاضی - ۸۵

۹۶۵- گزینهٔ ۲ برای آنکه تابع روی دامنه‌اش پیوسته باشد، باید در $x=a$ پیوسته باشد. پس

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)\Rightarrow\frac{۱}{a}=۱-\frac{a}{۴}\Rightarrow ۴=۴a-a^۲$$

$$a^۲-۴a+۴=۰\Rightarrow(a-۲)^۲=۰\Rightarrow a=۲$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۹۶۶- گزینهٔ ۳ حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۲$ باید برابر مقدار تابع در این نقطه باشند، بنابراین

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=۵\Rightarrow\lim_{x\to۲^-}(x^۲+bx-۱)=۵\Rightarrow ۴+۲b-۱=۵\Rightarrow b=۱$$

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=۵\Rightarrow\lim_{x\to۲^+}(ax+b)=۵\Rightarrow ۲a+b=۵$$

چون $b=۱$، در نتیجه $۲a+۱=۵$، یعنی $a=۲$. خارج از کشور تجربی - ۹۱

۹۶۷- گزینهٔ ۲ برای برقراری شرط پیوستگی تابع روی $\mathbb{R}$، پیوستگی آن در نقاط $x=\pm۱$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}f(۱)=\lim_{x\to۱^+}f(x)=a+b\\ \lim_{x\to۱^-}f(x)=۱\times[۱^-]=۰\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=۰$$

$$\left.\begin{array}{l}f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=-a+b\\ \lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=(-۱)\times[(-۱)^+]=۱\end{array}\right\}\Rightarrow -a+b=۱$$

بنابراین $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه به‌ازای $|x|\ge۱$، $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}$. پس $f(۳)=-۱$. ریاضی - ۹۰

۹۶۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x]+[-x]=-۱$. بنابراین تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases}-۱ & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ است و به‌ازای $a=-۱$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی پیوسته است. ریاضی - ۹۶

۹۶۹- گزینهٔ ۴ باید حدهای چپ و راست تابع با مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ برابر باشند:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\cos 3x}{\cos x}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\cos 3(t+\frac{\pi}{2})}{\cos(t+\frac{\pi}{2})}$$
$$=\lim_{t\to 0^-}\frac{\sin 3t}{-\sin t}=-3$$
$$f(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}(\sin 5x-a)=1-a$$

بنابراین $-3=1-a$، در نتیجه $a=4$.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۹۷۰- گزینهٔ ۱ چون تابع در بازهٔ $[0,2\pi]$ پیوسته است، پس در $x=\frac{\pi}{2}$ هم پیوسته است. پس ابتدا حد تابع را در $x=\frac{\pi}{2}$ پیدا می‌کنیم

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\pi-2x)}{-(\pi-2x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{-t}=-1$$

بنابراین برای اینکه تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید

$$f(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\Rightarrow a=-1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۹۷۱- گزینهٔ ۲ چون حد مورد نظر برابر عددی غیر صفر و حد صورت برابر صفر است، باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to 2}(ax+b)=0\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow b=-2a$$

اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax-2a}\times\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{a(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{a(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}=\frac{1}{a(2+2)}=\frac{1}{4a}$$

بنابراین $\frac{1}{4a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

چون $b=-2a$، پس $b=-1$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۹۷۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2||x+1|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{|x-2||x+1|}{2x-\sqrt{x^2+12}}\times\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2||x+1|(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x^2-4)}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+1)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+1)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x+2)}=\frac{-(3)\times 8}{3\times 4}=-2$$

ریاضی - ۹۰

۹۷۳- گزینهٔ ۴ از فرض سؤال نتیجه می‌شود $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x^2|}{ax^2}=\frac{1}{a}=-1$، پس $a=-1$. برای محاسبهٔ حد راست عبارت در $x=-2$ دقت کنید که به ازای $-2<x<2$، عبارت x^2-4 منفی است، بنابراین باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{4-x^2}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(-x+1)}$$
$$=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{2-x}{-x+1}=\frac{4}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۹۷۴- گزینهٔ ۱ وقتی $x\to(\frac{1}{6})^+$، $\cos\pi x$ با مقدارهای کوچک‌تر از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نزدیک می‌شود، پس

$$\cos\pi x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-\Rightarrow 4\cos^2\pi x\to 3^-\Rightarrow[4\cos^2\pi x]=2$$

بنابراین
$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{[4\cos^2\pi x]-12x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\frac{1}{2}$$

چون حد صورت برابر صفر است، حد مخرج کسر نیز باید صفر شود تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید، زیرا در غیر این‌صورت حاصل حد برابر صفر می‌شود.

در نتیجه
$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}(ax+b)=0\Rightarrow\frac{a}{6}+b=0\Rightarrow a=-6b$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{-6bx+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2(1-6x)}{b(1-6x)}=\frac{2}{b}$$

بنابراین $\frac{2}{b}=\frac{1}{2}$، یعنی $b=4$. چون $a=-6b$، پس $a=-24$.

در نتیجه $a+b=-20$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۹۷۵- گزینهٔ ۱ ابتدا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\tan(\pi x)}{2x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\left(\frac{1-\tan(\pi x)}{2x-\sqrt{x}}\times\frac{2x+\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\tan(\pi x)}{4x^2-x}\times\lim_{x\to\frac{1}{4}}(2x+\sqrt{x})=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}}{x(4x-1)}\times 1$$
$$=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\cos(\pi x)-\sin(\pi x)}{4x-1}\times\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1}{x\cos(\pi x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})}{4(x-\frac{1}{4})}\times\frac{1}{\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})}{x-\frac{1}{4}}$$
$$=2\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\pi x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{1}{4}}=2\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\pi\sin(\frac{\pi}{4}-\pi x)}{-(\frac{\pi}{4}-\pi x)}=2(-\pi)=-2\pi$$

ریاضی - ۹۱

۹۷۶- گزینهٔ ۲ از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{x^2}\times\frac{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^4 x-\cos x}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\times\lim_{x\to 0}(-\cos x(1+\cos x+\cos^2 x))\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times(-3)\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$$

ریاضی - ۹۳

۹۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{x^2}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-(1-\frac{1}{2}(5x)^2)}{x^2}\times\frac{1}{2}=12\times\frac{1}{2}=6$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۹۷۸- گزینهٔ ۴ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=3$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(ax-3a-\frac{3}{8}\right)=3a-3a-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}\times\frac{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-x+\sqrt{x+1}}{x-3}\times\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1-x+\sqrt{x+1}}{x-3}\times\frac{1-x-\sqrt{x+1}}{1-x-\sqrt{x+1}}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{(1-x)^2-(x+1)}{x-3}\times\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{1-x-\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x(x-3)}{x-3}\times\frac{1}{-4}\times\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{-4}\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$$

از طرف دیگر $f(3)=-\frac{3}{8}$. بنابراین تابع به‌ازای هر مقدار a در نقطهٔ $x=3$ پیوسته است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۹۷۹- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{-\sqrt[3]{2}(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(1-x)^2}}=-\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۹۸۰- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=2-a=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x}\times\frac{1-\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{1-\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{a(1+1-x)}{x(x-2)\times(1-\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}=\frac{-a}{6}$$

برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ برابر باشند، بنابراین

$$\frac{-a}{6}=2-a\Rightarrow 12-6a=-a\Rightarrow 12=5a\Rightarrow a=2.4$$

ریاضی - ۹۴

۹۸۱- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4\cos x}\right)$$

$$=2\times 1\times 1\times\frac{1}{4\times 1}=\frac{1}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۹۸۲- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحادهای مزدوج و

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

بنابراین

$$2^a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=2^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

ریاضی - ۹۲

۹۸۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to0^-}([2x]+[-2x])=-1+0=-1$$

$$\lim_{x\to0^+}([2x]+[-2x])=0-1=-1$$

بنابراین $\lim_{x\to0}([2x]+[-2x])=-1$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{1-1-x^2}\times\lim_{x\to0}(1+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{-x^2}\times2$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\times2\lim_{x\to0}(1+\cos x+\cos^2 x)$$

$$=-\frac{2}{4}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times2(1+1+1)=-\frac{1}{2}\times1\times6=-3$$

بنابراین

$$\lim_{x\to0}\left(([2x]+[-2x])\left(\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\right)\right)=3$$

ریاضی - ۹۴

۹۸۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax-a+2)=a-a+2=2$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=2$$

بنابراین به ازای هر مقدار a، $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)=2$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۹۸۵- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

تابع g همان تابع ثابت $g(x)=-1$ است که نقطهٔ ناپیوستگی ندارد. ریاضی - ۹۲

۹۸۶- گزینهٔ ۲ در نقطهٔ $x=-1$، باید حد چپ و حد راست تابع با هم برابر باشند:

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\frac{1}{2\sqrt{3-x}}}{1}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=-a+1$$

بنابراین $\frac{1}{4}=-a+1\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۹۸۷- گزینهٔ ۴ در نقطهٔ $x=0$، باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد. توجه کنید که

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-1+x}=\lim_{x\to0}(1+\sqrt{1-x})=2$$

بنابراین اگر $f(0)=a=2$، تابع در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است. تجربی - ۹۶

۹۸۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$-1\le x<0\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow f(x)=-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$0\le x<1\Rightarrow[x]=0\Rightarrow f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$1\le x<2\Rightarrow[x]=1\Rightarrow f(x)=-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

پیوستگی تابع در نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ را بررسی می‌کنیم تا گزینهٔ درست مشخص شود:

$$f(0)=0,\quad \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)=0$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$$

$$f(1)=-1,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)=-1$$

پس تابع در $x=0$ پیوسته و در $x=1$ ناپیوسته است. به همین ترتیب این تابع در تمام نقطه‌های زوج پیوسته و در تمام نقطه‌های فرد ناپیوسته است.

ریاضی - ۹۳

۹۸۹- گزینهٔ ۳ نشان می‌دهیم تابع gof در $x=0$ پیوسته است. حد چپ و حد راست تابع gof در نقطهٔ $x=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to0^-: f(x)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to0^-}g(f(x))=\lim_{t\to(\frac{-1}{2})}g(t)=-2\times\frac{-1}{2}=1$$

$$x\to0^+: f(x)=2x\to0^+\Rightarrow\lim_{x\to0^+}g(f(x))=\lim_{t\to0^+}g(t)=1$$

با توجه به اینکه $g(f(0))=1$، تابع gof در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است. ناپیوستگی توابع دیگر نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. (بررسی سایر گزینه‌ها بر عهدهٔ خواننده)

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

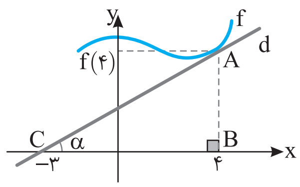
۹۹۰- گزینهٔ ۲ با توجه به آنکه $f(x)=[x^2-3]=[x^2]-3$، باید $y=[x^2]$ روی این بازه پیوسته باشد. تابع مورد نظر در نقاط $x=\pm\sqrt{n}$ (که $n\in\mathbb{N}$) ناپیوسته است. پس در نقاط $x=2$ و $x=\sqrt{5}$ ناپیوسته است و در نتیجه بازهٔ مورد نظر $[2,\sqrt{5})$ است. بنابراین $k=\sqrt{5}-2$.

ریاضی - ۸۸

۹۹۱- گزینهٔ ۱ در نقاط $x=b$ و $x=c$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f صفر است. در نقطهٔ $x=d$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f مثبت و در نقطهٔ $x=a$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f منفی است. بنابراین مشتق تابع f در $x=a$ از بقیه کوچک‌تر است.

۹۹۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با $f'(۴)$. از طرف دیگر، شیب خط d برابر با $\tan\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{f(۴)}{۷}$ است. به این ترتیب $f'(۴)=\frac{f(۴)}{۷}$، پس

$$f(۴)+f'(۴)=۲\Rightarrow f(۴)+\frac{f(۴)}{۷}=۲\Rightarrow f(۴)=\frac{۷}{۴}$$



۹۹۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲f(x)-۲f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۲(f(x)-f(۲))}{x-۲}=۲\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۲f'(۲)=۶$$

۹۹۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر به جای ۲ در صورت کسر داده شده $\sqrt{f(۲)}$ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x(x-۲)}$$
$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x(x-۲)}\times\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}\right)$$
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)})x}$$
$$=f'(۲)\times\frac{۱}{۲(\sqrt{f(۲)}+\sqrt{f(۲)})}=f'(۲)\times\frac{۱}{۴\sqrt{f(۲)}}=\frac{۲\times ۲}{۲-۱}\times\frac{۱}{۴\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}}{۲x-۲}=\frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}(۴-۲)}=\frac{\frac{۲\times ۲}{۲-۱}}{۲\times ۲\times ۲}=\frac{۱}{۲}$$

۹۹۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{۲h^۲+۳h}=\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}\times\frac{۱}{۳+۲h}\right)$$
$$=f'(۳)\times\frac{۱}{۳+۰}=\frac{۶}{۳}=۲$$

۹۹۶- گزینهٔ ۲ اگر $-h^۲=k$ و $h\to ۰$، آن‌گاه $k\to ۰^-$ و در نتیجه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱-h^۲)-f(۱)}{h^۲}=\lim_{k\to ۰^-}\frac{f(۱+k)-f(۱)}{-k}$$
$$=-\lim_{k\to ۰^-}\frac{f(۱+k)-f(۱)}{k}=-f'_-(۱)=-۲$$

۹۹۷- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)^۲(x^۲+۱)^۲}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to ۱}((x+۱)^۲(x^۲+۱)^۲)=(۱+۱)^۲(۱+۱)^۲=۱۶$$

۹۹۸- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{|x|+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{|x|+۱}=۱$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

۹۹۹- گزینهٔ ۴ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع در $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt[۳]{(۲-x)^۲}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}}=+\infty$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{\sqrt[۳]{(۲-x)^۲}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}}=-\infty$$

۱۰۰۰- گزینهٔ ۱ مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt[۳]{x}=۰$$
$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to ۰^-}(-\sqrt[۳]{x})=۰$$

بنابراین $f'(۰)=۰$ و نمودار تابع در این نقطه، خط مماس موازی محور طول‌ها دارد.

۱۰۰۱- گزینهٔ ۲ شیب خطی که از نقطه‌های $A(-۱,۳)$ و $B(۴,۴)$ می‌گذرد، برابر است با $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱}{۵}$. از طرف دیگر، مشتق تابع f در نقطهٔ -۱ با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ A برابر است. بنابراین $f'(-۱)=\frac{۱}{۵}$.

۱۰۰۲- گزینهٔ ۲ اگر $x\to ۳$، آن‌گاه شیب خطی که نقطه‌های A و B را به هم وصل می‌کند، به شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=۳$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین

$$۲=\lim_{x\to ۳}\frac{k}{x}\Rightarrow ۲=\frac{k}{۳}\Rightarrow k=۶$$

۱۰۰۳- گزینهٔ ۳ اگر به جای ۴ مقدار $f(1)$ را قرار دهیم، آن‌گاه

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{f(x)-4}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{f(x)-f(1)}=\frac{2}{\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

۱۰۰۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to3}\frac{3f(x)-3f(3)}{x^2-9}=3\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$=3\left(\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right)\left(\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}\right)=3\times f'(3)\times\frac{1}{3+3}=3\times4\times\frac{1}{6}=2$$

۱۰۰۵- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $x=2-h$، آن‌گاه $h\to0$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-f(2)}=\lim_{h\to0}\frac{2-h-2}{f(2-h)-f(2)}=-\lim_{h\to0}\frac{h}{f(2-h)-f(2)}$$

$$=-\frac{1}{\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}}=-\frac{1}{4}$$

۱۰۰۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** به جای ۸ قرار می‌دهیم $f^3(1)$ و از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=1$ استفاده کنیم:

$$\lim_{h\to0}\frac{f^3(1+h)-8}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}$$

توجه کنید که به کمک اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to0}\frac{f^3(1+h)-8}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(f(1+h)-f(1))(f^2(1+h)+f(1)f(1+h)+f^2(1))}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\lim_{h\to0}(f^2(1+h)+2f(1+h)+4)$$

$$=f'(1)\times(f^2(1)+2f(1)+4)=(\sqrt[3]{1}+1)(4+4+4)=24$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to0}\frac{f^3(1+h)-8}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3f'(1+h)f^2(1+h)}{1}=3f'(1)f^2(1)$$

$$=3\times(\sqrt[3]{1}+1)\times2^2=24$$

۱۰۰۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(2)=0$. اکنون با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=2$ مقدار $f'(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{\frac{x+2}{x+7}}-0}{x-2}=\lim_{x\to2}\left((x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x+7}}\right)$$

$$=(2-1)\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

۱۰۰۸- گزینهٔ ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+|x|\sqrt[3]{x+8}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x+x\sqrt[3]{x+8}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}(1+\sqrt[3]{x+8})=1+2=3$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x+|x|\sqrt[3]{x+8}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x-x\sqrt[3]{x+8}}{x}$$

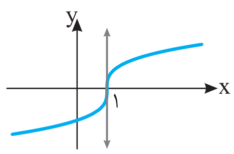
$$=\lim_{x\to0^-}(1-\sqrt[3]{x+8})=1-2=-1$$

بنابراین $f'_+(0)-f'_-(0)=4$.

۱۰۰۹- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق ندارد، زیرا

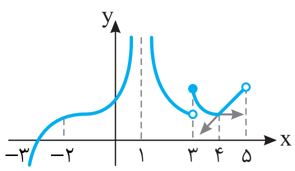
$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$$

ولی خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه وجود دارد و موازی محور عرض‌ها است.



۱۰۱۰- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطهٔ ۳ پیوسته نیست، پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. تابع در نقطهٔ ۴ نیز مشتق‌پذیر نیست، زیرا مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابر نیستند. در بقیهٔ نقاط، دامنهٔ تابع مشتق وجود دارد. بنابراین مجموع مورد نظر برابر ۷ است.

توجه کنید که نقطهٔ $x=1$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد.



۱۰۱۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f روی بازهٔ [۰,۲] پاره‌خطی است که نقطه‌های (۰,۰) و (۲,۱) را به هم وصل می‌کند، پس شیب آن برابر $\frac{1-0}{2-0}=\frac{1}{2}$ است، در نتیجه $f'(1)=\frac{1}{2}$. نمودار تابع f روی بازهٔ [۲,۴] پاره‌خطی است که شیب آن صفر است، پس $f'(3)=0$. نمودار تابع f روی بازهٔ $[4,+\infty)$ نیم‌خطی است که از نقطه‌های (۴,۱) و (۶,۵) می‌گذرد، پس شیب آن برابر $\frac{5-1}{6-4}=2$ است، در نتیجه $f'(5)=2$. بنابراین $\frac{f'(1)+f'(3)}{f'(5)}=\frac{\frac{1}{2}+0}{2}=\frac{1}{4}$.

۱۰۱۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=3$$

بنابراین

$$\lim_{x\to2}\frac{f^2(x)-9}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(f(x)-3)(f(x)+3)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{f(x)+3}{x+2}=f'(2)\times\frac{f(2)+3}{2+2}$$

$$=3\times\frac{3+3}{4}=\frac{9}{2}$$

۱۰۱۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-۳}{x-۱}=۶$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f^۳(x)-۲۷}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(f(x)-۳)(f^۲(x)+۳f(x)+۹)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-۳}{x-۱}\times\lim_{x\to ۱}((f^۲(x)+۳f(x)+۹)(\sqrt{x}+۱))$$

$$=f'(۱)\times(f^۲(۱)+۳f(۱)+۹)(۱+۱)=۳\sqrt{۱+۳}(۳^۲+۳\times ۳+۹)\times ۲=۳۲۴$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f^۳(x)-۲۷}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳f'(x)f^۲(x)}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{۳\times ۳\sqrt{۱+۳}\times ۳^۲}{\frac{۱}{۲\times ۱}}=۳۲۴$$

۱۰۱۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $x=۲-h$، آن‌گاه $h\to ۰$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{f(x)-f(۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲-h)^۳-۸}{f(۲-h)-f(۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(-۱۲+۶h-h^۲)}{f(۲-h)-f(۲)}$$

$$=\frac{۱}{\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}}\times\lim_{h\to ۰}(-۱۲+۶h-h^۲)=\frac{۱}{۴}\times(-۱۲)=-۳$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-f'(۲-h)}{۱}=-f'(۲)=۴\Rightarrow f'(۲)=-۴$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{f(x)-f(۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲}{f'(x)}=\frac{۱۲}{f'(۲)}=\frac{۱۲}{-۴}=-۳$$

۱۰۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+۲h)-f(۳-h)}{h}=(۲-(-۱))f'(۳)$$

بنابراین $۳f'(۳)=۱۲$، در نتیجه

$$f'(۳)=۴$$

۱۰۱۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حد خواسته شده برابر مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x=۱$ است، ولی چون تابع در این نقطه پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد و این حد وجود ندارد. به‌صورت مستقیم هم می‌توان این حد را به‌دست آورد:

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{-۲(۱+h)-۱}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{-۲h-۳}{h}=+\infty$$

۱۰۱۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $g(۰)=۰$ و $\lim_{x\to ۰}f(x)=-۲$. پس

$$g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{x-۲f(x)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x-۲f(x)}=\frac{۱}{۴}$$

۱۰۱۸- گزینهٔ ۳ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x-۲|[x]}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x-۲)}{x-۲}=۲$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲|[x]}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱$$

بنابراین $f'_+(۲)-f'_-(۲)=۳$.

۱۰۱۹- گزینهٔ ۲ برای تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$ تساوی‌های داده‌شده برقرار هستند:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=+\infty$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=-\infty$$

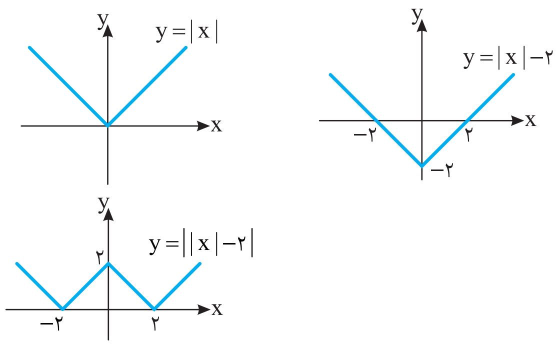
برای توابع دیگر توجه کنید که

گزینهٔ (۱): $f(x)=\sqrt[۳]{x}\Rightarrow f'_+(۰)=f'_-(۰)=+\infty$

گزینهٔ (۳): $f(x)=-\sqrt[۳]{|x|}\Rightarrow f'_+(۰)=-\infty, f'_-(۰)=+\infty$

گزینهٔ (۴): $f(x)=-\sqrt[۳]{x}\Rightarrow f'_+(۰)=f'_-(۰)=-\infty$

۱۰۲۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است.



بنابراین تابع در نقاط $x=۰$، $x=۲$ و $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۱۰۲۱- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h}=(۱-(-۱))f'(۲)=۲\times(-۲)=-۴$$

۱۰۲۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+۳h)-f(۱-۴h)}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+۳h)-f(۱)+f(۱)-f(۱-۴h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+۳h)-f(۱)}{h}-\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱-۴h)-f(۱)}{h}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+۳h)-f(۱)}{h}=\lim_{H\to ۰^-}\frac{f(۱+H)-f(۱)}{\frac{H}{۳}}=۳f'_-(۱)=-۱۲$$

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱-۴h)-f(۱)}{h}=\lim_{H\to ۰^+}\frac{f(۱+H)-f(۱)}{-\frac{H}{۴}}=-۴f'_+(۱)=-۱۶$$

بنابراین

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+۳h)-f(۱-۴h)}{h}=-۱۲+۱۶=۴$$

۱۰۲۳- گزینهٔ ۴ مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x=0$ را با استفاده از تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{6-\sqrt{4-|x|}}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{6-\sqrt{4+x}}-2}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\sqrt{6-\sqrt{4+x}}-2}{x}\times\frac{\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2}{\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{6-\sqrt{4+x}-4}{x(\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2-\sqrt{4+x}}{x(\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2)}\times\frac{2+\sqrt{4+x}}{2+\sqrt{4+x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{4-(4+x)}{x(2+\sqrt{4+x})(\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{(2+\sqrt{4+x})(\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2)}=\frac{-1}{(2+2)(2+2)}=\frac{-1}{16}$$

۱۰۲۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to1^+$، آن‌گاه $[x]=1$، پس

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{[x]-x^2}{\sqrt{x^2+3[x]}}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to1^+}\frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{-2}{2}=-1$$

۱۰۲۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ $x=2$ تساوی‌های $|x|=x$ و $[-x]=-2$ برقرار است. پس در این همسایگی $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{4x^3-5}$ و در نتیجه

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{(x-2)\sqrt[3]{4x^3-5}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2^-}\sqrt[3]{4x^3-5}=\sqrt[3]{32-5}=3$$

۱۰۲۶- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است، بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه را حساب می‌کنیم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|[\sin x]-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x[\sin x]}{x}=\lim_{x\to0^+}[\sin x]=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|[\sin x]-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x[\sin x]}{x}=\lim_{x\to0^-}(-[\sin x])=1$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست دارد ولی چون برابر نیستند، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱۰۲۷- گزینهٔ ۲ مشتق چپ و مشتق راست تابع در نقطهٔ $x=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x^2-1)\sin|x|-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(x^2-1)\sin x}{x}=-1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{(x^2-1)\sin|x|-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{(x^2-1)\sin(-x)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-(x^2-1)\sin x}{x}=1$$

بنابراین $f'_+(0)-f'_-(0)=-1-1=-2$.

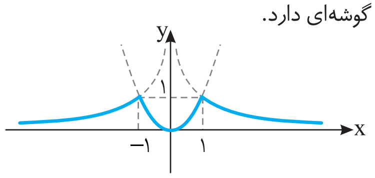
۱۰۲۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=2$ مقدار $f'(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{(x-2)\cos^3(\pi x)}{1+\tan(\frac{\pi x}{8})}}{x-2}$$

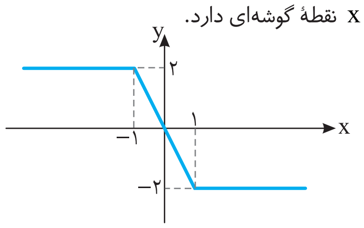
$$=\lim_{x\to2}\frac{\cos^3(\pi x)}{1+\tan(\frac{\pi x}{8})}=\frac{\cos^3 2\pi}{1+\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم چون مقدار $x-2$ در $x=2$ برابر صفر است و مشتق این عبارت برابر یک است، پس فقط کافی است مقدار عبارت $\frac{\cos^3(\pi x)}{1+\tan(\frac{\pi x}{8})}$ را در $x=2$ حساب کنیم که این مقدار برابر $\frac{1}{2}$ است. (درس دوم همین فصل را ببینید.)

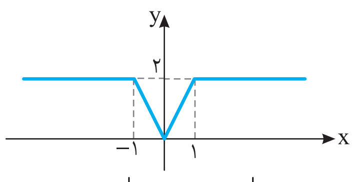
۱۰۲۹- گزینهٔ ۲ نمودار تابع به شکل زیر است و تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد.



۱۰۳۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است و تابع در نقاط $x=0$، $x=1$ و $x=-1$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد.



$y=|x-1|-|x+1|$



$y=||x-1|-|x+1||$

۱۰۳۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=3x^2-3$، پس

$$f'(\frac{1}{3})=3\times\frac{1}{9}-3=\frac{1}{3}-3=-\frac{8}{3}$$

۱۰۳۲- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=a(x-3)+ax+1=2ax-3a+1$$

در نتیجه

$$\begin{cases}f'(1)=-a+1\\ f'(1)=5\end{cases}\Rightarrow a=-4$$

۱۰۳۳- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(x-4+x-2)x^2-2x(x-2)(x-4)}{x^4}=\frac{(2x-6)x^2-2x(x-2)(x-4)}{x^4}$$

در نتیجه $f'(-2)=\frac{(-10)4+4(-4)(-6)}{16}=\frac{7}{2}$.

۱۰۳۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{3x^2(x^2+k)-(2x)(x^3)}{(x^2+k)^2}$.

در نتیجه

$$f'(-1)=\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{3(1+k)-2}{(1+k)^2}=\frac{5}{8}\Rightarrow k=3,\ k=-\frac{1}{5}\ (\text{غ.ق.ق})$$

۱۰۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+3\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

در نتیجه $f'(2^{-6})=\frac{1}{\sqrt{2^{-6}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^{-12}}}=2^3+2^4=24$.

۱۰۳۶- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ تقسیم، $(\frac{f}{g})'(1)=\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}$.

از طرف دیگر، $f(1)=1$ ، $g(1)=-\frac{1}{2}$ و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}\ ,\quad g'(x)=\frac{1}{2}(2x)=x\Rightarrow g'(1)=1$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(1)=\frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})-1\times1}{\frac{1}{4}}=-5$.

۱۰۳۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{6\sqrt{x}-24}{\sqrt[3]{x}}=\frac{6\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{24}{\sqrt[3]{x}}=6x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-24x^{-\frac{1}{3}}=6x^{\frac{1}{6}}-24x^{-\frac{1}{3}}$$

بنابراین $f'(x)=\frac{6}{6}x^{-\frac{5}{6}}+\frac{24}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ ، پس $f'(1)=1+8=9$.

۱۰۳۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ ۳ علامت عبارت $x-4$ منفی است، بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ ۳، $f(x)=-(x-4)+2x=x+4$. در نتیجه $f'(x)=1$ و $f'(3)=1$.

۱۰۳۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{1}{2}$ ، $1<\frac{x}{2}+1<2$. پس در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{1}{2}$ ، مقدار $[\frac{x}{2}+1]$ برابر ۱ است، و در نتیجه

$$f(x)=3x^2-1\Rightarrow f'(x)=6x\Rightarrow f'(\tfrac{1}{2})=3$$

۱۰۴۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{h\to0}\frac{f^2(\pi+h)-f^2(\pi)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}\times\lim_{h\to0}(f(\pi+h)+f(\pi))=f'(\pi)\times2f(\pi)$$

از طرف دیگر، $f(\pi)=3$ و $f'(x)=2\cos x+3\sin x$ ، پس $f'(\pi)=-2$.

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر -12 است.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to0}\frac{f^2(\pi+h)-f^2(\pi)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2f'(\pi+h)f(\pi+h)}{1}=2f'(\pi)f(\pi)=2\times(-2)\times3=-12$$

توجه کنید که $f(\pi)=3$ و $f'(x)=2\cos x+3\sin x$ ، پس $f'(\pi)=-2$.

۱۰۴۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{3x^2}{3}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2x)+2=x^2+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+2$$

بنابراین $f'(\sqrt{2})=\sqrt{2}^2+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}+2=2+2\sqrt{6}-4+2=2\sqrt{6}$.

۱۰۴۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ ، در نتیجه

$$f'(x)=\frac{(1)(x^2+1)-(2x)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

در نتیجه، $f'(-1)=\frac{2-4}{4}=-\frac{1}{2}$.

۱۰۴۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g'(x)=\frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)}$$

بنابراین $g'(2)=\frac{4f(2)-4f'(2)}{f^2(2)}=\frac{12-(-8)}{9}=\frac{20}{9}$.

۱۰۴۴- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(1)(x+a)-(1)(x)}{(x+a)^2}=\frac{a}{(x+a)^2}$$

در نتیجه

$$f'(0)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a}{a^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow a=3$$

۱۰۴۵- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1)+(\sqrt{x}-1)(2x)$$

بنابراین $f'(4)=\frac{1}{2\times2}(17)+(2-1)(8)=\frac{49}{4}$.

۱۰۴۶- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})-(-\frac{1}{2\sqrt{x}})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2}$$

در نتیجه $f'(\frac{1}{4})=\frac{\frac{2}{2}(1-\frac{1}{2})+\frac{2}{2}(1+\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2})^2}=8$

۱۰۴۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}+2)=x^{\frac{11}{6}}+2x^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{11}{6}+3=\frac{29}{6}$$

۱۰۴۸- گزینهٔ ۲ چون $x^3-2x=x(x^2-2)$ ، در یک همسایگی نقطهٔ ۲ علامت عبارت x^3-2x مثبت است، بنابراین

$$f(x)=x^2+(x^3-2x)=x^3+x^2-2x$$

در نتیجه $f'(x)=3x^2+2x-2$ و $f'(2)=14$.

۱۰۴۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{3}{2}$ مقدار $[x]$ برابر ۱ است و در نتیجه

$$f(x)=\frac{x^3}{x+5}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x+5)-x^3}{(x+5)^2}=\frac{2x^3+15x^2}{(x+5)^2}\Rightarrow f'(\frac{3}{2})=\frac{162}{169}$$

۱۰۵۰- گزینهٔ ۲ مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(1+2\sin x)'(1+3\cos x)-(1+3\cos x)'(1+2\sin x)}{(1+3\cos x)^2}$$
$$=\frac{2\cos x(1+3\cos x)+3\sin x(1+2\sin x)}{(1+3\cos x)^2}$$

در نتیجه $f'(\pi)=\frac{2(-1)(1-3)+0}{(1-3)^2}=1$.

۱۰۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=3ax^2-2ax+4$. بنابراین

$$f'(-2)=12\Rightarrow 12a+4a+4=12\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

در نتیجه $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x+4$. پس $f'(1)=\frac{9}{2}$.

۱۰۵۲- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم و مشتق آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2-2)=x^5-3x^3+2x\Rightarrow f'(x)=5x^4-9x^2+2$$

بنابراین

$$f'(x)=0\Rightarrow 5x^4-9x^2+2=0\Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{9+\sqrt{41}}{10}\\ x^2=\frac{9-\sqrt{41}}{10}\end{cases}$$

پس در نقاط $x=\pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{41}}{10}}$ و $x=\pm\sqrt{\frac{9-\sqrt{41}}{10}}$ مشتق تابع f برابر صفر است. حاصل‌ضرب این اعداد برابر است با $\frac{2}{5}$.

۱۰۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^{-10}+x^{-9}+\dots+x^{-1}+1+x+x^2+\dots+x^{10}$$

بنابراین $f'(x)=-10x^{-11}-9x^{-10}-\dots-x^{-2}+1+2x+\dots+10x^9$.

در نتیجه $f'(1)=-10-9-\dots-1+1+2+\dots+10=0$.

۱۰۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^5+x^2)-(x^3+1)}{x^3+1}=\frac{x^2(x^3+1)-(x^3+1)}{x^3+1}=x^2-1\quad (x\neq -1)$$

در نتیجه برای هر $x\neq -1$ مشتق تابع f برابر $2x$ است و $f'(\frac{\sqrt{2}-1}{2})=\sqrt{2}-1$.

۱۰۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x-m)(x^2+5x+3)-(2x+5)(x^2-mx+4)}{(x^2+5x+3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(-1)=0\Rightarrow(-2-m)(1-5+3)-(-2+5)(1+m+4)=0\Rightarrow m=-\frac{13}{2}$$

۱۰۵۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$ به‌ازای $x=1$ برابر صفر است، پس عامل صفر کننده است. از طرف دیگر،

$$y=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow y'(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

در نتیجه

$$f'(1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{12}$$

۱۰۵۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{1}{3}}(xx^{\frac{1}{2}}+1)=x^{\frac{17}{6}}+x^{\frac{4}{3}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{17}{6}x^{\frac{11}{6}}+\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(1)=\frac{17}{6}+\frac{4}{3}=\frac{25}{6}$$

۱۰۵۸- گزینهٔ ۲ اگر در تساوی $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-1}{2x}$ قرار دهیم $x=-1$، چون $f(-1)=1$، به‌دست می‌آید $g(-1)=0$. اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=\frac{(2x)(2x)-2(x^2-1)}{4x^2}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$، به‌دست می‌آید $\frac{g'(-1)-0}{1}=1$، بنابراین

$$g'(-1)=1$$

۱۰۵۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{\cos x\times x-(1)\sin x}{x^2}$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{4}{\pi^2}$$

۱۰۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{\cos x(1-\cos x)-(-(-\sin x))\sin x}{(1-\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}=\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x-1}$$

۱۰۶۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=1-2x+3x^2-4x^3+\dots+49x^{48}-50x^{49}$$

بنابراین $f'(-1)=1+2+3+4+\dots+49+50=1275$.

۱۰۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که چون مقدار $x+1$ به‌ازای $x=-1$ صفر است، پس مشتق عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(ax+4)$ به‌ازای $x=-1$ برابر است با $(-1+2)(-1+3)(-a+4)=8-2a$. بنابراین

$$8-2a=2\Rightarrow a=3$$

۱۰۶۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f'(x)=a\Rightarrow f'(x)f(x)=a^2x+ab=4x-8$$

بنابراین

$$a^2=4\Rightarrow a=\pm 2,\quad f'(3)=a\Rightarrow f'(3)=\pm 2$$

۱۰۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲-x+۱}{x^۲+mx+۱}$$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۱)(x^۲+mx+۱)-(۲x+m)(x^۲-x+۱)}{(x^۲+mx+۱)^۲}$$

بنابراین $f'(۰)=\frac{(-۱)(۱)-(m)(۱)}{۱^۲}=-۱-m$. در نتیجه

$$-۱-m=۲m\Rightarrow m=-\frac{۱}{۳}$$

۱۰۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{g(x)-۱}{x^۲+۱}\Rightarrow (x^۲+۱)f(x)=g(x)-۱$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=۱$ ، به‌دست می‌آید

$$(۲x)f(x)+(x^۲+۱)f'(x)=g'(x)\Rightarrow ۲f(۱)+۲f'(۱)=g'(۱)\Rightarrow g'(۱)=۱۲$$

۱۰۶۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{۳h}=\frac{۲}{۳}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{۲h}=\frac{۲}{۳}f'(۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=۲x^۲+۸x^{-۲}$ ، پس

$$f'(x)=۴x+۸(-۲)x^{-۳}=۴x-\frac{۱۶}{x^۳}$$

بنابراین $f'(۲)=۸-۲=۶$ و مقدار حد مورد نظر برابر است با $\frac{۲}{۳}\times ۶=۴$.

۱۰۶۷- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲+\sqrt{x}}{x^۳+\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{(x^۲+\sqrt{x})'(x^۳+\sqrt[۳]{x})-(x^۳+\sqrt[۳]{x})'(x^۲+\sqrt{x})}{(x^۳+\sqrt[۳]{x})^۲}$$

$$=\frac{(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(x^۳+\sqrt[۳]{x})-(۳x^۲+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}})(x^۲+\sqrt{x})}{(x^۳+\sqrt[۳]{x})^۲}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=۱$ ، نتیجه می‌شود

$$f'(۱)=\frac{(۲+\frac{۱}{۲})(۱+۱)-(۳+\frac{۱}{۳})(۱+۱)}{(۱+۱)^۲}=-\frac{۵}{۱۲}$$

۱۰۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$(f\times g)'(۱)=f'(۱)g(۱)+g'(۱)f(۱)$$

ابتدا ضابطهٔ تابع $f\times g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(x^۲+\sqrt{x^۴+x^۲})^۹(x^۲-\sqrt{x^۴+x^۲})^۹$$

$$=((x^۲+\sqrt{x^۴+x^۲})(x^۲-\sqrt{x^۴+x^۲}))^۹=(x^۴-x^۴-x^۲)^۹=-x^{۱۸}$$

بنابراین

$$(f\times g)'(x)=(-x^{۱۸})'=-۱۸x^{۱۷}\Rightarrow (f\times g)'(۱)=-۱۸\times ۱^{۱۷}=-۱۸$$

۱۰۶۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{\cos x(\cos x-۱)-(-\sin x)(a+\sin x)}{(\cos x-۱)^۲}$$

$$f'(\frac{\pi}{۲})=۱\Rightarrow \frac{a+۱}{۱}=۱\Rightarrow a=۰$$

۱۰۷۰- گزینهٔ ۲ مشتق تابع را حساب می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=m-۲\sin x=۰\Rightarrow \sin x=\frac{m}{۲}$$

چون $-۱\leq \sin x\leq ۱$ ، پس

$$-۱\leq \frac{m}{۲}\leq ۱\Rightarrow -۲\leq m\leq ۲$$

۱۰۷۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sqrt{x}-۸$ به‌ازای $x=۶۴$ برابر با صفر است. پس عامل صفر کننده است و مشتق آن به‌ازای $x=۶۴$ برابر $\frac{۱}{۱۶}$ است:

$$y=\sqrt{x}-۸\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow y'(۶۴)=\frac{۱}{۱۶}$$

بنابراین مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۶۴$ برابر است با

$$\frac{۱}{۱۶}\times(\sqrt[۳]{۶۴}+۴)(\sqrt[۴]{۶۴})=\frac{۱}{۱۶}\times ۸\times ۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

۱۰۷۲- گزینهٔ ۲ در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$ ، علامت عبارت $x^۲-۱$ منفی است و $۱<۲x<۲$ ، پس در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$ ، $[۲x]=۱$. بنابراین

$$f(x)=\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=-(x-۱)$$

در نتیجه $f'(x)=-۱$ و $f'(\frac{۴}{۵})=-۱$.

۱۰۷۳- گزینهٔ ۳ در یک همسایگی $x=۲$ مقدار عبارت $x^۲-۳x$ منفی است و مقدار عبارت $x^۲+۳x$ مثبت است. بنابراین ضابطهٔ تابع در این همسایگی به‌صورت $f(x)=-x^۲+۳x-x^۲-۳x=-۲x^۲$ است. بنابراین

$$f'(x)=-۴x\Rightarrow f'(۲)=-۸$$

۱۰۷۴- گزینهٔ ۴ دریک همسایگی نقطهٔ $x=۱$ علامت عبارت $۲x-x^۲\sqrt{x}$ مثبت است و در یک همسایگی نقطهٔ $x=۴$ علامت این عبارت منفی است. بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ ۱،

$$f(x)=۲x-x^۲\sqrt{x}=۲x-x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f'(x)=۲-\frac{۵}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}$$

$$f'(۱)=۲-\frac{۵}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

و در یک همسایگی نقطهٔ ۴،

$$f(x)=-۲x+x^۲\sqrt{x}=-۲x+x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f'(x)=-۲+\frac{۵}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}$$

پس

$$f'(۴)=-۲+\frac{۵}{۲}\times ۸=۱۸$$

بنابراین

$$f'(۱)f'(۴)=-۹$$

۱۰۷۵- گزینهٔ ۳ اگر ضابطهٔ تابع را به‌صورت

$$f(x)=(x^2-49)\underbrace{(x^2-50)(x^2-20)(x^2-21)\cdots(x^2-48)}_{g(x)}$$

بنویسیم، در این صورت

$$f(x)=(x^2-49)g(x)\Rightarrow f'(x)=2xg(x)+(x^2-49)g'(x)$$

واضح است که اگر $f'(7)$ را حساب کنیم، مقدار عبارت $(x^2-49)g'(x)$ صفر می‌شود و کافی است مقدار عبارت $2xg(x)$ را حساب کنیم:

$$f'(7)=2\times 7g(7)=2\times 7\times(49-50)(49-20)(49-21)\cdots(49-48)$$
$$=-14\times 29!$$

۱۰۷۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{21}{2}$ مقدار عبارت‌های x، $x-1$، $x-2$ و ... و $x-10$ مثبت و مقدار عبارت‌های $x-11$، $x-12$، ... و $x-20$ منفی است. بنابراین ضابطهٔ تابع در همسایگی این نقطه به شکل زیر است:

$$f(x)=x+(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-10)-(x-11)-(x-12)-\cdots-(x-20)$$

در نتیجه $f(x)=x+k$، که k مقداری ثابت است. بنابراین $f'(\frac{21}{2})=1$.

۱۰۷۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(\sin x+x\cos x)(1-x\sin x)-(-\sin x-x\cos x)(1+x\sin x)}{(1-x\sin x)^2}$$

در نتیجه $f'(\frac{\pi}{2})=\dfrac{(1+0)(1-\frac{\pi}{2})-(-1)(1+\frac{\pi}{2})}{(1-\frac{\pi}{2})^2}=\dfrac{2}{(1-\frac{\pi}{2})^2}$.

۱۰۷۸- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(1+\sin x)'(1+2\cos x)-(1+2\cos x)'(1+\sin x)}{(1+2\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x(1+2\cos x)+2\sin x(1+\sin x)}{(1+2\cos x)^2}$$

در نتیجه $f'(0)=\dfrac{1(1+2)+0}{(1+2)^2}=\dfrac{1}{3}$.

۱۰۷۹- گزینهٔ ۲ مشتق تابع به‌صورت $y'=a\cos x-2\sin x$ است. بنابراین

$$y^2=a^2\sin^2 x+4\cos^2 x+4a\sin x\cos x$$
$$y'^2=a^2\cos^2 x+4\sin^2 x-4a\sin x\cos x$$
$$y^2+y'^2=a^2(\sin^2 x+\cos^2 x)+4(\cos^2 x+\sin^2 x)=a^2+4$$

پس $a^2+4=8$ و در نتیجه $a^2=4$.

۱۰۸۰- گزینهٔ ۳ مشتق دو تابع را حساب می‌کنیم و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=m+2\cos x,\quad g'(x)=4$$
$$f'(x)=g'(x)\Rightarrow m+2\cos x=4\Rightarrow \cos x=\frac{4-m}{2}$$

چون $-1\le\cos x\le 1$، پس $-1\le\frac{4-m}{2}\le 1$، در نتیجه

$$-2\le 4-m\le 2\Rightarrow -6\le -m\le -2\Rightarrow 2\le m\le 6$$

۱۰۸۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(3x-2)'(3x-2)^{3-1}-4(2x-3)'(2x-3)^{4-1}$$
$$=3(3)(3x-2)^2-4(2)(2x-3)^3$$

در نتیجه $f'(-1)=9(-3-2)^2-8(-2-3)^3=9\times 5^2+8\times 5^3=49\times 5^2$.

۱۰۸۲- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ ضرب و اینکه $(g^n)'=ng'g^{n-1}$،

$$f'(x)=((x^2-1)^2)'(x+2)^4+(x^2-1)^2((x+2)^4)'$$
$$=(2(2x)(x^2-1)^{2-1})(x+2)^4+(x^2-1)^2(4(1)(x+2)^{4-1})$$
$$=4x(x^2-1)(x+2)^4+4(x^2-1)^2(x+2)^3$$

بنابراین $f'(0)=0+4(1)(2)^3=32$.

۱۰۸۳- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ زنجیری، $(gof)'(1)=f'(1)g'(f(1))$. از طرف دیگر، $f(x)=x^3-x+1$، در نتیجه $f'(x)=3x^2-1$. بنابراین $f(1)=1$ و $f'(1)=2$. همچنین

$$g(x)=2-x^2\Rightarrow g'(x)=-2x\Rightarrow g'(f(1))=g'(1)=-2$$

بنابراین $(gof)'(1)=2\times(-2)=-4$.

۱۰۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=(-3)(3-\frac{1}{x^2})(3x+\frac{1}{x})^{-4}$$

در نتیجه، $f'(1)=(-3)(2)(4)^{-4}=\frac{-3}{128}$. بنابراین $128f'(1)=-3$.

۱۰۸۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})'=\dfrac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}\Rightarrow f'(5)=\frac{10}{27}$$

۱۰۸۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=\frac{4}{\sqrt{9}}-\frac{1}{2\times 2}=\frac{13}{12}$$

۱۰۸۷- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(2x)=-x^2+3x+4$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$(2x)'f'(2x)=-2x+3\Rightarrow 2f'(2x)=-2x+3$$
$$\xrightarrow{x=2}2f'(4)=-4+3\Rightarrow f'(4)=-\frac{1}{2}$$

۱۰۸۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}\cos(\frac{2}{x})-2\cos(\frac{1}{x})-2x(-\frac{1}{x^2}(-\sin(\frac{1}{x})))$$
$$=-\frac{2}{x^2}\cos(\frac{2}{x})-2\cos(\frac{1}{x})-\frac{2}{x}\sin(\frac{1}{x})$$

در نتیجه

$$f'(\frac{2}{\pi})=-\frac{2}{\frac{4}{\pi^2}}\cos(\pi)-2\cos(\frac{\pi}{2})-\pi\sin(\frac{\pi}{2})$$
$$=\frac{\pi^2}{2}+0-\pi=\frac{\pi^2-2\pi}{2}$$

۱۰۸۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=a\cos x+\frac{1}{4}(2(\cos 2x)'\cos 2x)$$

$$=a\cos x+(-\sin 2x)\cos 2x=a\cos x-\frac{1}{2}\sin 4x$$

در نتیجه

$$f'(\frac{\pi}{6})=0\Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2}-(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۱۰۹۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=(\sin x\cos x)\cos 2x\cos 4x$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 4x)\cos 4x$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin 8x)=\frac{1}{8}\sin 8x$$

بنابراین $f'(x)=\frac{1}{8}\times 8\cos 8x=\cos 8x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{8})=\cos(\pi)=-1$

۱۰۹۱- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ زنجیری،

$$(fog)'(-1)=g'(-1)f'(g(-1))$$

از طرف دیگر، $g(x)=x^3-3x\Rightarrow g'(x)=3x^2-3\Rightarrow g'(-1)=0$

بنابراین $(fog)'(-1)=0$.

۱۰۹۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(1+(2+x^2)^2)'(1+(2+x^2)^2)^{3-1}$$

$$=3(2(2x)(2+x^2)^{2-1})(1+(2+x^2)^2)^2=12x(2+x^2)(1+(2+x^2)^2)^2$$

بنابراین $f'(1)=12\times1\times3\times10^2=3600$.

۱۰۹۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+1)(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+x)^2$$

در نتیجه $f'(1)=9$.

۱۰۹۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})'=\frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{-1}{3(1)}=-\frac{1}{3}$$

۱۰۹۵- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=(2x+3)\sqrt{x^2+3}+(x^2+3x)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

بنابراین $f'(1)=5\times2+4\times\frac{1}{2}=12$.

۱۰۹۶- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی $f(x)=g(x^2+2x)$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $f'(x)=(2x+2)g'(x^2+2x)$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$، به‌دست می‌آید $f'(3)=8g'(15)$، پس $g'(15)=9$.

۱۰۹۷- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2mx+4\tan 2x(1+\tan^2 2x)$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{8})=2m(\frac{\pi}{8})+4\tan\frac{\pi}{4}(1+\tan^2\frac{\pi}{4})=\frac{m\pi}{4}+8=8+2\pi\Rightarrow m=8$$

۱۰۹۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\cos 2x$$

$$f'(x)=-2\sin 2x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{12})=-2\sin(\frac{\pi}{6})=-1$$

۱۰۹۹- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(x+\sin x+2)=\sin(kx)$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$(1+\cos x)f'(x+\sin x+2)=k\cos(kx)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$، به‌دست می‌آید:

$$2f'(2)=k\xrightarrow{f'(2)=2}k=4$$

۱۱۰۰- گزینهٔ ۳ با استفاده از قواعد مشتق‌گیری، مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=4\times2\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8})\times(-\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8}))\times(-\frac{1}{8})$$

$$=\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8})\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8})\xrightarrow{\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sin(2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8}))=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4})$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12})=\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۱۰۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2(\frac{3x^2(x^2-1)-2x(x^3-1)}{(x^2-1)^2})(\frac{x^3-1}{x^2-1})\Rightarrow f'(-2)=0$$

۱۱۰۲- گزینهٔ ۱ چون نقطهٔ $(2,3)$ روی نمودار تابع f است، پس $f(2)=3$. چون خط d از نقطه‌های $(2,3)$ و $(5,0)$ گذشته است، شیب آن برابر است با $\frac{3-0}{2-5}=-1$. بنابراین $f'(2)=-1$. اکنون توجه کنید که

$$g'(x)=f(3x-4)+x(3f'(3x-4))$$

$$g'(2)=f(2)+6f'(2)=3-6=-3$$

۱۱۰۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=((x^3+2)(\sqrt{x}+2x))^2$ و $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=2((3x^2)(\sqrt{x}+2x)+(x^3+2)(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2))(x^3+2)(\sqrt{x}+2x)$$

در نتیجه $f'(1)=2(3(3)+3(\frac{1}{2}+2))(3)(3)=297$.

۱۱۰۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=\frac{3x^2+3a}{3\sqrt[3]{(x^3+3ax)^2}}$. بنابراین

$$f'(2)=0\Rightarrow 3\times2^2+3a=0\Rightarrow a=-4$$

۱۱۰۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{(\sqrt[3]{x^2-1})^3+1}=\sqrt{x^2-1+1}=\sqrt{x^2}=|x|$$

بنابراین $g'(x)f'(g(x))=(fog)'(x)=(|x|)'=\frac{x}{|x|}$

۱۱۰۶- گزینهٔ ۱ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(x^3)=\frac{x}{f(x^2)}\Rightarrow 3x^2g'(x^3)=\frac{f(x^2)-2x^2f'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

$$g'(x^3)=\frac{f(x^2)-2x^2f'(x^2)}{3x^2f^2(x^2)}$$

اکنون در تساوی فوق قرار می‌دهیم $x=2$ و نتیجه می‌شود

$$g'(8)=\frac{f(4)-8f'(4)}{12f^2(4)}=\frac{1-8\times\frac{13}{8}}{12\times 1}=-1$$

۱۱۰۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=(\pi\sin 2x)'(-\sin(\pi\sin 2x))=-2\pi(\cos 2x)\sin(\pi\sin 2x)$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{12})=-2\pi\cos\frac{\pi}{6}\sin(\pi\sin\frac{\pi}{6})=-2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin(\frac{\pi}{2})=-\pi\sqrt{3}$$

۱۱۰۸- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحادهای $1=\sin^2 x+\cos^2 x$، $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$، ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$f(x)=\frac{(1-\sin 2x)(\sin x+\cos x)}{\cos 2x}$$

$$=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)^2(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}$$

$$=\cos x-\sin x\ \ (x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z})$$

بنابراین

$$f'(x)=-\sin x-\cos x$$

$$f'(\frac{2\pi}{3})=-\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

۱۱۰۹- گزینهٔ ۲ مشتق تابع به‌صورت زیر است

$$y'=2a\cos 2x-4\sin 2x$$

بنابراین

$$y^2=a^2\sin^2 2x+4\cos^2 2x+4a\sin 2x\cos 2x$$

$$4y^2=4a^2\sin^2 2x+16\cos^2 2x+16a\sin 2x\cos 2x$$

$$y'^2=4a^2\cos^2 2x+16\sin^2 2x-16a\sin 2x\cos 2x$$

$$4y^2+y'^2=4a^2(\sin^2 2x+\cos^2 2x)+16(\cos^2 2x+\sin^2 2x)$$

$$=4a^2+16$$

پس $4a^2+16=18$ و در نتیجه $a^2=\frac{1}{2}$.

۱۱۱۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=12\tan^2 4x(1+\tan^2 4x)$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{12})=12\tan^2\frac{\pi}{3}(1+\tan^2\frac{\pi}{3})=12\times 3(1+3)=144$.

۱۱۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f^2(x)=\frac{2x+1}{x+2}$. اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$2f'(x)f(x)=\frac{(2)(x+2)-(1)(2x+1)}{(x+2)^2}\Rightarrow 2f'(1)f(1)=\frac{6-3}{9}=\frac{1}{3}$$

بنابراین $f(1)f'(1)=\frac{1}{6}$.

۱۱۱۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2ax)\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(ax^2+a)}{3x+1}$$

بنابراین

$$f'(1)=\frac{21}{8}\Rightarrow\frac{(2a)(2)-\frac{3}{2\times 2}(a+a)}{4}=\frac{21}{8}\Rightarrow\frac{\frac{5a}{2}}{4}=\frac{21}{8}\Rightarrow a=\frac{21}{5}$$

۱۱۱۳- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$(\frac{1}{3x-1})'f'(\frac{1}{3x-1})=6x\Rightarrow\frac{-3}{(3x-1)^2}f'(\frac{1}{3x-1})=6x$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید $\frac{-3}{4}f'(\frac{1}{2})=6$.

پس $f'(\frac{1}{2})=-8$.

۱۱۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$. از طرف دیگر، اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$-f'(1-x)=6x+1\xrightarrow{x=-1}-f'(2)=-5\Rightarrow f'(2)=5$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر ۵ است.

۱۱۱۵- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $4xf'(2x^2-4)=3f'(x-3)+5$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$4f'(-2)=3f'(-2)+5\Rightarrow f'(-2)=5$$

۱۱۱۶- گزینهٔ ۲ طبق قاعدهٔ مشتق تابع مرکب:

$$y=f(x+\sqrt{1+x^2})\Rightarrow y'=(x+\sqrt{1+x^2})'f'(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\times\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۱۱۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=(\tan 4x)'(1+\tan^2(\tan 4x))$$

$$=4(1+\tan^2 4x)(1+\tan^2(\tan 4x))$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{4})=4(1+\tan^2\pi)(1+\tan^2(\tan\pi))=4(1+0)(1+0)=4$.

۱۱۱۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(\cos x+2\sin x)(\sin x-2\cos x)^2$$

در نتیجه $f'(\frac{\pi}{4})=3(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{2})^2=\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

۱۱۱۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(\cos(4x^2))'\cos^2(4x^2)=3(8x(-\sin(4x^2)))\cos^2(4x^2)$$

$$=-24x\sin(4x^2)\cos^2(4x^2)$$

۱۱۲۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{2\sqrt{g}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{(\sin\sqrt{x})'}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

بنابراین $f'(\frac{\pi^2}{4})=0$.

۱۱۲۱- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f^2(x^3)$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$g'(x)=2(f(x^3))'f(x^3)=2(3x^2)f'(x^3)f(x^3)=6x^2f'(x^3)f(x^3)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=2$ ، به‌دست می‌آید

$$g'(2)=6\times4\times f'(8)f(8)=6\times4\times\frac{1}{6}=4$$

۱۱۲۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که چون $g(-1)=2$ ، پس $f(2)=f(g(-1))$.

بنابراین

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(g(x))-f(2)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(g(x))-f(g(-1))}{x-(-1)}$$

$$=(fog)'(-1)=g'(-1)f'(g(-1))=5\times f'(2)=5\times(-3)=-15$$

۱۱۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $g(4)=\frac{2+1}{3}=1$ و

$$(fog)'(4)=g'(4)f'(g(4))=g'(4)f'(1)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2},\quad f'(1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x^2-7}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}}(\sqrt{x}+1)}{x^2-7}$$

$$g'(4)=\frac{\frac{1}{4}\times3-\frac{8}{6}\times3}{9}=-\frac{13}{36}$$

بنابراین $(fog)'(4)=\frac{1}{2}\times\frac{-13}{36}=\frac{-13}{72}$.

۱۱۲۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+k}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2-k}{(x+2)^2}$$

بنابراین

$$g(x)=(fof)(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)f'(f(x))$$

$$g'(0)=f'(0)f'(f(0))=f'(0)f'(\frac{k}{2})$$

در نتیجه

$$\frac{2-k}{4}\times\frac{2-k}{(\frac{k}{2}+2)^2}=4\Rightarrow(2-k)^2=16(\frac{k}{2}+2)^2$$

$$\begin{cases}2-k=4(\frac{k}{2}+2)\\ 2-k=-4(\frac{k}{2}+2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-2\\ k=-10\end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k برابر ۲۰ است.

۱۱۲۵- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(\frac{2x-3}{x+2})=ax^2+x+4$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{7}{(x+2)^2}f'(\frac{2x-3}{x+2})=2ax+1$$

اگر در تساوی بالا قرار دهیم $x=-1$ ، مقدار $f'(-5)$ به‌دست می‌آید.

$$7f'(-5)=-2a+1\Rightarrow f'(-5)=\frac{1-2a}{7}$$

پس

$$\frac{1-2a}{7}=\frac{3}{7}\Rightarrow a=-1$$

۱۱۲۶- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f(x^2-f(x))$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$g'(x)=(2x-f'(x))f'(x^2-f(x))$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ ، به‌دست می‌آید:

$$g'(1)=(2-f'(1))f'(1-f(1))=(2-3)f'(1)=-f'(1)=-3$$

۱۱۲۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{2\sqrt{g}}$ ، بنابراین

$$f'(x)=\frac{3\cos3x}{2\sqrt{\sin3x}}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{3(-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{-3}{2\sqrt[4]{2}}=-3\times2^{-\frac{5}{4}}$$

پس $a=-\frac{5}{4}$.

۱۱۲۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=x(\frac{1}{2}\sin8x)=\frac{x}{2}\sin8x$$

بنابراین $f'(x)=\frac{1}{2}\sin8x+\frac{x}{2}(8\cos8x)$. بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{16})=\frac{1}{2}\times1+0=\frac{1}{2}$$

۱۱۲۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=2(4(-\sin4x))\cos(\cos4x)\sin(\cos4x)$$

$$=-8\sin4x\cos(\cos4x)\sin(\cos4x)$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{8})=0$.

۱۱۳۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که مقدار عبارت $\cos(\frac{\pi}{2}x)$ به‌ازای $x=1$ برابر صفر است. پس کافی است از این عبارت مشتق بگیریم و مقدار مشتق آن در $x=1$ را در مقدار عبارت $\sin(\frac{\pi\sqrt{x}}{x+3})$ در این نقطه ضرب کنیم:

$$y=\cos(\frac{\pi}{2}x)\Rightarrow y'=-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)\Rightarrow y'(1)=-\frac{\pi}{2}$$

$$y=\sin(\frac{\pi\sqrt{x}}{x+3})\Rightarrow y(1)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین $f'(1)=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

۱۱۳۱- گزینهٔ ۴ توابع گزینه‌های (۱) و (۳) در نقطهٔ $x=1$ پیوسته نیستند، پس مشتق‌پذیر نیستند.

در گزینهٔ (۲)، ابتدا توجه کنید که تابع در $x=1$ پیوسته است:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1\\ x^3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 3x^2 & x<1\end{cases}$$

همچنین $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}(2x)=2$ و $f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}(3x^2)=3$. چون $f'_+(1)\neq f'_-(1)$، پس این تابع هم در نقطهٔ $x=1$ مشتق ندارد.

در گزینهٔ (۴) تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است و

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & x\geq 1\\ 2x^3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}6x & x>1\\ 6x^2 & x<1\end{cases}$$

همچنین، $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}(6x)=6$ و $f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}(6x^2)=6$. چون $f'_+(1)=f'_-(1)$، پس تابع گزینهٔ (۴) در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است.

۱۱۳۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'_+(-1)$

چون تابع f در نقطهٔ $x=-1$ پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست هم ندارد. بنابراین حد فوق وجود ندارد. دقت کنید که می‌توانیم بدون استفاده از مفهوم مشتق هم نشان دهیم این حد وجود ندارد:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(-1+h)^3-3}{h}=-\infty$$

۱۱۳۳- گزینهٔ ۳ چون تابع در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(-1)=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$$

$$-a+2=-a+2=1-b\Rightarrow a-b=1$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}3ax^2 & x>-1\\ 2x+b & x<-1\end{cases}$، بنابراین

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}(3ax^2)=3a\,,\ f'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}(2x+b)=-2+b$$

$$f'_+(-1)=f'_-(-1)\Rightarrow 3a=b-2$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a-b=1\\ 3a-b=-2\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{3}{2}$ و $b=-\frac{5}{2}$

و در نتیجه $a+b=-4$.

۱۱۳۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x>1\\ 2x+1 & x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}(3x^2)=3\\ f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3\end{cases}$$

بنابراین $f'(1)=3$. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=f'(1)\times\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۱۱۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(1)=2$ و

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^3+x)=2,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 4x=4$$

پس تابع در $x=1$ پیوستگی چپ ندارد و $f'_-(1)$ وجود ندارد، از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & x>1\\ 4 & x<1\end{cases}$$

بنابراین $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(3x^2+1)=4$.

۱۱۳۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که تابع f در $x=2$ پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد. از طرف دیگر

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}2(x+2)=8$$

$$2<x<3\Rightarrow f(x)=2x^2\Rightarrow f'(x)=4x\Rightarrow\lim_{x\to 2^+} f'(x)=8$$

$$1<x<2\Rightarrow f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow\lim_{x\to 2^-} f'(x)=4$$

۱۱۳۷- گزینهٔ ۴ اگر $g(x)=(x+1)(x-2)^2$، آن‌گاه $g(2)=g'(2)=0$. بنابراین تابع $f(x)=|g(x)|$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است.

۱۱۳۸- گزینهٔ ۲ چندجمله‌ای داخل قدرمطلق یعنی x^2+4x+m^2 باید دو ریشهٔ متمایز داشته باشد. پس

$$\Delta=16-4m^2>0\Rightarrow m^2<4\Rightarrow -2<m<2$$

۱۱۳۹- گزینهٔ ۲ تابع را به‌صورت $f(x)=(x-2)|(x-2)(x-3)|$ می‌نویسیم. تابع $y=|(x-2)(x-3)|$ در نقاط $x=2$ و $x=3$ مشتق ندارد، ولی عامل صفرکنندهٔ $(x-2)$ در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر باشد. پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=3$ مشتق ندارد.

۱۱۴۰- گزینهٔ ۱ عبارت داخل قدرمطلق $(x^2-4=(x-2)(x+2))$ دو ریشهٔ سادهٔ ۲ و ۲- دارد. برای آنکه تابع مورد نظر مشتق‌پذیر باشد، باید x^2+ax+b به ازای $x=-2$ و $x=2$ برابر صفر شود:

$$\begin{cases}x=2\Rightarrow 2^2+a\times 2+b=0\Rightarrow 2a+b=-4\\ x=-2\Rightarrow(-2)^2+a(-2)+b=0\Rightarrow -2a+b=-4\end{cases}$$

پس $a=0$ و $b=-4$، بنابراین $3a+b=-4$.

۱۱۴۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}4x-3 & x<3\\ 9 & x>3\end{cases}$. چون تابع f روی بازهٔ $(-\infty,3]$ پیوسته و روی بازهٔ $(-\infty,3)$ مشتق‌پذیر است، همین‌طور روی بازهٔ $[3,+\infty)$ پیوسته و روی بازهٔ $(3,+\infty)$ مشتق‌پذیر است و

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x)=\lim_{x\to 3^-}(4x-3)=9\qquad(1)$$

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x)=\lim_{x\to 3^+}(9)=9\qquad(2)$$

پس مقدار حد (۱) برابر $f'_-(3)$ و مقدار حد (۲) برابر $f'_+(3)$ است، و چون این دو مقدار برابرند، پس $f'(3)=9$.

۱۱۴۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}۲x+۲ & x>۲\\ ۳x^{۲} & x<۲\end{cases}$. بنابراین

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x+۲)=۴+۲=۶$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳x^{۲})=۳\times ۴=۱۲$$

در نتیجه $f'_+(۲)-f'_-(۲)=۶-۱۲=-۶$.

۱۱۴۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۲)=۳$ و

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^{۲}+۱)=۵\ ,\qquad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^{۳}-۱)=۷$$

پس تابع f در نقطهٔ $x=۲$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه وجود ندارند.

۱۱۴۴- گزینهٔ ۴ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

$$b=\lim_{x\to ۲^+}(x^{۳}+ax)=\lim_{x\to ۲^-}(cx^{۲}+c)\Rightarrow b=۸+۲a=۵c \qquad (I)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^{۲}+a & x>۲\\ ۲cx & x<۲\end{cases}$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۳x^{۲}+a)=۱۲+a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۲cx)=۴c$$

پس

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲+a=۴c\Rightarrow a=۴c-۱۲$$

$$\xrightarrow{(I)} ۸+۲(۴c-۱۲)=۵c\Rightarrow c=\frac{۱۶}{۳}$$

بنابراین $f(۲)=۵c=\frac{۸۰}{۳}$.

۱۱۴۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x+۴a & x>۲\\ ۳ax^{۲}+۲ & x<۲\end{cases}$$

پس

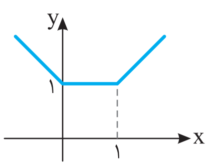
$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x+۴a)=۴+۴a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳ax^{۲}+۲)=۱۲a+۲$$

چون تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۴+۴a=۱۲a+۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین $f'(۴a)=f'(۱)=۳a+۲=\frac{۳}{۴}+۲=\frac{۱۱}{۴}$.



۱۱۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به شکل مقابل است و در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$. توجه کنید که $x=۰$ و $x=۱$ ریشه‌های سادهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند.

۱۱۴۷- گزینهٔ ۳ تابع در نقطهٔ $x=۱$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد:

$$x\ge ۱\Rightarrow f(x)=x(x^{۲}-x)=x^{۳}-x^{۲}$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۲x\Rightarrow f'_+(۱)=۳-۲=۱$$

$$۰\le x\le ۱\Rightarrow f(x)=x(x-x^{۲})=x^{۲}-x^{۳}$$

$$f'(x)=۲x-۳x^{۲}\Rightarrow f'_-(۱)=۲-۳=-۱$$

ولی در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x|x^{۲}-x|}{x}=\lim_{x\to ۰}|x^{۲}-x|=۰$$

توجه کنید که تابع $y=|g(x)|$ در ریشه‌های سادهٔ $g(x)=۰$ مشتق ندارد. پس $y=|x^{۲}-x|$ در $x=۰$ و $x=۱$ مشتق ندارد ولی تابع $y=x|x^{۲}-x|$ به دلیل وجود عامل صفرکنندهٔ x که در قدرمطلق ضرب شده است در $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

۱۱۴۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=|x^{۳}-x^{۲}|=|x^{۲}(x-۱)|=x^{۲}|x-۱|$$

بنابراین تابع فقط در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا عبارت داخل قدرمطلق فقط یک ریشهٔ سادهٔ $x=۱$ دارد.

۱۱۴۹- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید چندجمله‌ای $y=x^{۲}-۲x+m$ ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. زیرا اگر این تابع دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta\le ۰\Rightarrow ۴-۴m\le ۰\Rightarrow m\ge ۱$$

۱۱۵۰- گزینهٔ ۲ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو عامل $x-۱$ در آن وجود داشته باشد. یعنی باید

$$x^{۲}+ax+b=(x-۱)^{۲}=x^{۲}-۲x+۱\Rightarrow a=-۲$$

۱۱۵۱- گزینهٔ ۱ تابع f در $x=\frac{\pi}{۲}$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است.

$$f(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} a\sin x=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}(b\cos ۲x+b\cos x+۱)\Rightarrow a=-b+۱$$

از طرف دیگر باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=\frac{\pi}{۲}$ برابر باشند.

$$x>\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f'(x)=a\cos x\Rightarrow f'_+(\frac{\pi}{۲})=۰$$

$$x<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f'(x)=-۲b\sin ۲x-b\sin x\Rightarrow f'_-(\frac{\pi}{۲})=-b$$

پس $b=۰$ و چون $a=-b+۱$ ، در نتیجه $a=۱$.

۱۱۵۲- گزینهٔ ۳ اولاً تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته است، زیرا

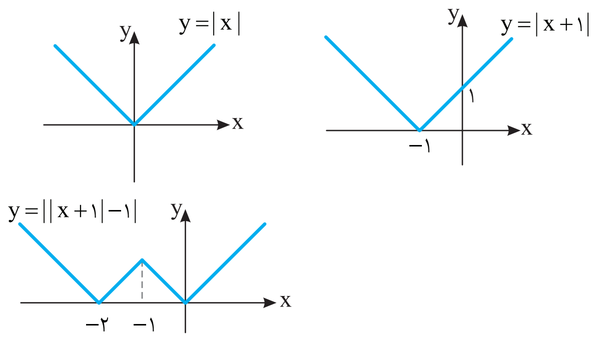
$$f(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=۰$$

ثانیاً در یک همسایگی راست نقطهٔ $\frac{\pi}{۲}$ مقدار $[\cos x]$ برابر -۱ است و تابع f با تابع $y=-\sin ۲x$ برابر است. پس

$$f'_+(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}(-\sin ۲x)'=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}-۲\cos ۲x=۲$$

همچنین در یک همسایگی چپ نقطهٔ $\frac{\pi}{۲}$ مقدار $[\cos x]$ برابر صفر است و تابع f با تابع ثابت صفر برابر است، پس $f'_-(\frac{\pi}{۲})=۰$. بنابراین تابع f در $x=\frac{\pi}{۲}$ مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

۱۱۵۳- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم می‌شود:



در نقاط $x=۰$، $x=-۱$ و $x=-۲$ نمودار تابع نقطهٔ گوشه‌ای دارد و تابع در این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,-۱,-۲\}$.

۱۱۵۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x=۰$ و $x=۱$ ریشه‌های سادهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند. بنابراین تابع f در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. در $x=-۱$ تابع f تعریف نمی‌شود، بنابراین تابع f' هم تعریف نمی‌شود. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۱\}$. بنابراین سه عدد صحیح در دامنهٔ تابع f' قرار ندارند.

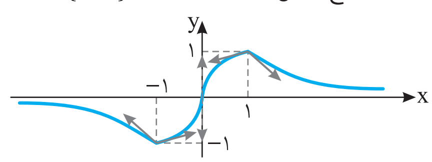
۱۱۵۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f در $x=-۱$ ناپیوسته است و در نتیجه مشتق‌پذیر نیست. در $x=۱$ تابع پیوسته است، مشتق‌پذیری تابع در این نقطه را بررسی می‌کنیم:

$$|x|<۱\Rightarrow f'(x)=۲x\ ,\quad |x|>۱\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{x^۲}$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to۱^-}۲x=۲\ ,\quad f'_+(۱)=\lim_{x\to۱^+}\frac{۲}{x^۲}=۲$$

بنابراین تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر است و در نتیجه $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-۱\}$.

۱۱۵۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به‌صورت زیر است. تابع در $x=۱$ و $x=-۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد و در $x=۰$ مماس موازی محور عرض‌ها دارد. پس در این سه نقطه تابع مشتق ندارد و در نتیجه $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۱\}$.



۱۱۵۷- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست، پس مقدار $x^۲+ax-۱۲$ به‌ازای $x=۳$ صفر است:

$$۹+۳a-۱۲=۰\Rightarrow a=۱$$

بنابراین $f(x)=|x^۲+x-۱۲|$. در نزدیکی نقطهٔ -۲ علامت عبارت $x^۲+x-۱۲$ منفی است، بنابراین

$$f(x)=-(x^۲+x-۱۲)\Rightarrow f'(x)=-۲x-۱\Rightarrow f'(-۲)=۳$$

۱۱۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که تابع $y=x^۳+ax^۲-ax$ حداقل یک ریشهٔ $x=۰$ دارد: $y=x(x^۲+ax-a)=xg(x)$

برای اینکه تابع f در سه نقطه مشتق نداشته باشد، باید تابع g دو ریشهٔ غیرصفر داشته باشد. پس $\Delta=a^۲+۴a>۰$ و $a\neq۰\Rightarrow a>۰$ یا $a<-۴$

۱۱۵۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که تابع $y=x^۳+ax^۲-ax$ حداقل یک ریشهٔ $x=۰$ دارد: $y=x(x^۲+ax-a)=xg(x)$. برای اینکه تابع f فقط در یک نقطه مشتق نداشته باشد، باید تابع g ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$\Delta=a^۲+۴a\le۰\Rightarrow -۴\le a<۰$$

۱۱۶۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که عبارت $۱-\sin x$ همواره نامنفی است. پس

$$f(x)=|\sin x||۱-\sin x|=(۱-\sin x)|\sin x|$$

فقط در $x=\pi$ عبارت داخل قدرمطلق یعنی $\sin x$ برابر صفر است، پس تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱۱۶۱- گزینهٔ ۱ شیب خط مماس برابر $f'(۲)$ است.

$$f'(x)=۱+\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow f'(۲)=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

خط مورد نظر از نقطهٔ $(۲,f(۲))$ می‌گذرد. پس معادلهٔ خطی را می‌خواهیم که از نقطهٔ $(۲,\frac{۳}{۲})$ عبور کرده و شیب آن برابر $\frac{۵}{۴}$ باشد، یعنی

$$y-\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۴}(x-۲)\Rightarrow ۵x-۴y-۴=۰$$

۱۱۶۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=۲\Rightarrow\sqrt{x-۱}=۲\Rightarrow x=۵$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۵,۲)$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\Rightarrow f'(۵)=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{۱}{۴}$ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-۲=\frac{۱}{۴}(x-۵)\Rightarrow ۴y-x=۳$$

۱۱۶۳- گزینهٔ ۲ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f'(x)=۳x^۲-\frac{۱}{x^۲}=۰\Rightarrow x^۴=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\pm\sqrt[۴]{\frac{۱}{۳}}$$

پس معادلهٔ فوق دو جواب دارد و در دو نقطه، خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.

۱۱۶۴- گزینهٔ ۴ شیب خط $y=۹x-۱$ برابر ۹ است، پس مشتق تابع f در نقطهٔ مورد نظر باید برابر ۹ باشد:

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۱۵\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۶x=۹$$

$$۳x^۲-۶x-۹=۰\Rightarrow x=-۱\ (\text{غ.ق.ق})\ ,\ x=۳$$

مقدار تابع در نقطه‌ای با طول مثبت مد نظر است، پس

$$f(۳)=۲۷-۲۷+۱۵=۱۵$$

۱۱۶۵- گزینهٔ ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق آن صفر است. بنابراین:

$$f'(x)=۳x^۲+m=۰\Rightarrow m=-۳x^۲$$

$$f(x)=۰\Rightarrow x^۳+(-۳x^۲)x-۵۴=۰\Rightarrow x^۳=-۲۷\Rightarrow x=-۳$$

بنابراین $m=-۲۷$.

۱۱۶۶- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=-x+b$ برابر -۱ است، بنابراین مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=۲$ برابر با -۱ است:

$$f'(x)=\frac{a(x+۱)-(ax+۳)}{(x+۱)^۲}=\frac{a-۳}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(۲)=\frac{a-۳}{(۲+۱)^۲}=-۱\Rightarrow a=-۶$$

۱۱۶۷- گزینهٔ ۱ شیب خط $y=\frac{۲}{۹}x+۱$ برابر $\frac{۲}{۹}$ است. بنابراین مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=۱$ برابر $\frac{۲}{۹}$ است.

$$f'(x)=\frac{(۲x-m)(x+۲)-(x^۲-mx+۱)}{(x+۲)^۲}$$

$$f'(۱)=\frac{(۲-m)(۳)-(۲-m)}{(۱+۲)^۲}=\frac{۲(۲-m)}{۹}$$

بنابراین $\frac{۲(۲-m)}{۹}=\frac{۲}{۹}\Rightarrow ۲-m=۱\Rightarrow m=۱$

۱۱۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا نقطه‌ای با طول منفی روی نمودار تابع $f(x)=x^۳-x^۲$ پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب خط $y=x+k$ یعنی ۱ باشد:

$$f'(x)=۳x^۲-۲x=۱\Rightarrow ۳x^۲-۲x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\ (\text{غ.ق.ق})\\ x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

بنابراین خط $y=x+k$ در نقطهٔ $A(-\frac{۱}{۳},-\frac{۴}{۲۷})$ بر نمودار تابع مماس می‌شود و نقطهٔ A روی این خط قرار دارد. یعنی $-\frac{۴}{۲۷}=-\frac{۱}{۳}+k\Rightarrow k=\frac{۵}{۲۷}$

۱۱۶۹- گزینهٔ ۳ باید شیب خط یعنی a بتواند با مشتق تابع برابر شود. بنابراین $f'(x)=۳x^۲-۱=a$. واضح است که $۳x^۲-۱\geq -۱$ بنابراین $a\geq -۱$.

۱۱۷۰- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=-x^۲$ را k واحد به بالا انتقال دهیم، به نمودار تابع $f(x)=-x^۲+k$ تبدیل می‌شود $(k>۰)$. می‌خواهیم خط $y=۲x+۳$ بر نمودار تابع f مماس شود. ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب این خط یعنی ۲ باشد:

$$f'(x)=-۲x=۲\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۱$$

پس نقطهٔ $A(-۱,۱)$ نقطهٔ مورد نظر است که باید روی نمودار تابع $f(x)=-x^۲+k$ باشد. پس $-۱+k=۱\Rightarrow k=۲$

۱۱۷۱- گزینهٔ ۲ وقتی خط مماس بر نمودار در یک نقطه موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر است. پس

$$f(x)=\frac{\sin x}{۱+\sin x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x(۱+\sin x)-\cos x\sin x}{(۱+\sin x)^۲}=\frac{\cos x}{(۱+\sin x)^۲}$$

بنابراین $f'(x)=۰\Rightarrow \cos x=۰$

پس در نقطهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۱}{۲})$ خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.

۱۱۷۲- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که $f(۲)=\frac{۳}{۲}$ و $f'(۲)$ برابر است با شیب خطی که از نقاط $(۰,۳)$ و $(۴,۰)$ می‌گذرد، پس $f'(۲)=\frac{۳-۰}{۰-۴}=-\frac{۳}{۴}$. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول ۲ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$g(x)=۴f^۲(x)+x\Rightarrow g'(x)=۸f'(x)f(x)+۱\Rightarrow g'(۲)=۸f'(۲)f(۲)+۱$$

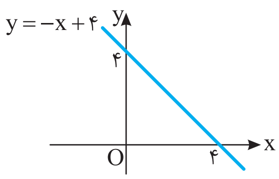
$$\text{شیب خط مماس}=g'(۲)=۸\times\frac{-۳}{۴}\times\frac{۳}{۲}+۱=-۸$$

همچنین $g(۲)=۴f^۲(۲)+۲=۴(\frac{۳}{۲})^۲+۲=۱۱$. بنابراین می‌خواهیم معادلهٔ خطی با شیب -۸ را بنویسیم که از نقطهٔ $(۲,۱۱)$ می‌گذرد:

$$y-۱۱=-۸(x-۲)\Rightarrow y=-۸x+۲۷$$

۱۱۷۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(۱)=۳$ و $f'(x)=۱-\frac{۲}{x^۲}$. بنابراین $f'(۱)=-۱$ و در نتیجه معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۱,۳)$ به‌صورت زیر است:

$$y-۳=-(x-۱)\Rightarrow y=-x+۴$$



این خط محورهای مختصات را در نقاط $A(۰,۴)$ و $B(۴,۰)$ قطع می‌کند. بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{۴\times ۴}{۲}=۸$.

۱۱۷۴- گزینهٔ ۱ چون A نقطه‌ای به طول صفر روی سهمی به معادلهٔ $y=-x^۲+bx+۲$ است، پس عرض آن برابر است با $y=۲$. چون خط d از نقطه‌های $(۰,۲)$ و $(۳,۰)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با $\frac{۲-۰}{۰-۳}=-\frac{۲}{۳}$. چون خط d در نقطه‌ای به طول صفر بر سهمی مماس است، مقدار y' به‌ازای $x=۰$ برابر با شیب خط d است:

$$y=-x^۲+bx+۲\Rightarrow y'=-۲x+b\xrightarrow{x=۰} b=-\frac{۲}{۳}$$

۱۱۷۵- گزینهٔ ۳ باید شیب خط بتواند با مشتق تابع برابر شود. بنابراین

$$y'=\frac{۲}{۳}(۱+\tan^۲(\frac{x}{۳}))=a\Rightarrow ۱+\tan^۲\frac{x}{۳}=\frac{۳a}{۲}\Rightarrow \tan^۲\frac{x}{۳}=\frac{۳a}{۲}-۱$$

$$\tan^۲\frac{x}{۳}\geq ۰\Rightarrow \frac{۳a}{۲}\geq ۱\Rightarrow ۳a\geq ۲\Rightarrow a\geq\frac{۲}{۳}$$

۱۱۷۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=3x+1 \end{cases} \Rightarrow y=-2$$

بنابراین

$$f(-1)=-2 \Rightarrow -a+b=-2 \quad (1)$$

از طرف دیگر، شیب خط $y=3x+1$ برابر ۳ است و چون نمودار تابع f در نقطهٔ $x=-1$ بر این خط مماس است، پس $f'(-1)=3$. در نتیجه

$$f'(x)=3ax^2+2bx+2 \Rightarrow f'(-1)=3a-2b+2=3 \Rightarrow 3a-2b=1 \quad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=-5$، بنابراین $a+b=-8$.

۱۱۷۷- گزینهٔ ۳ شیب خط $2x+y=3$ برابر -2 است. پس شیب خط مماس بر نمودار تابع f برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین باید نقاطی را پیدا کنیم که مقدار مشتق تابع در آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است. پس

$$f'(x)=\frac{5(x+2)-(5x+2)}{(x+2)^2}=\frac{8}{(x+2)^2}=\frac{1}{2}$$

$$(x+2)^2=16 \Rightarrow x=2, x=-6$$

$$x=2 \Rightarrow f(2)=\frac{5\times 2+2}{2+2}=3, \quad x=-6 \Rightarrow f(-6)=\frac{5\times(-6)+2}{-6+2}=7$$

پس نقاط مورد نظر $A(2,3)$ و $B(-6,7)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $AB=\sqrt{(-6-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{80}$.

۱۱۷۸- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خطی که نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ را به هم وصل می‌کند، به‌صورت $y=0$ است. یعنی می‌خواهیم بدانیم تابع در چه نقطه‌ای بر محور طول‌ها مماس است. بنابراین

$$f'(x)=4x^3-2x=0 \Rightarrow x=0,\ x^2=\frac{1}{2}$$

اگر $x=0$، آن‌گاه $f(x)=0$، پس نمودار تابع در $(0,0)$ بر محور طول‌ها مماس است. اگر $x^2=\frac{1}{2}$، آن‌گاه $f(x)=-\frac{1}{4}$، پس نمودار تابع در این نقاط بر محور طول‌ها مماس نیست. توجه کنید که شرط‌های $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ برای نقاطی که در آن‌ها نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس است، برقرار است.

۱۱۷۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطهٔ تماس را $(\alpha, 2\alpha-\alpha^2)$ در نظر بگیریم، معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-(2\alpha-\alpha^2)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ است. چون $f'(\alpha)=2-2\alpha$، پس $y-(2\alpha-\alpha^2)=(2-2\alpha)(x-\alpha)$. نقطهٔ $(4,1)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$1-(2\alpha-\alpha^2)=(2-2\alpha)(4-\alpha) \Rightarrow 1-2\alpha+\alpha^2=8-2\alpha-8\alpha+2\alpha^2$$

$$\alpha^2-8\alpha+7=0 \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha-7)=0 \Rightarrow \alpha=1, \quad \alpha=7$$

اگر $\alpha=1$، آن‌گاه $f'(\alpha)=0$ و اگر $\alpha=7$، آن‌گاه $f'(\alpha)=-12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

راه‌حل دوم فرض کنید خطی که از نقطهٔ $A(4,1)$ می‌گذرد در نقطهٔ $B(\alpha,f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر با $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}$ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس مقدار $f'(\alpha)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=2x-x^2 \Rightarrow f'(x)=2-2x \Rightarrow f'(\alpha)=2-2\alpha$$

بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}=2-2\alpha \Rightarrow \frac{2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha-4}=2-2\alpha$$

$$2\alpha-\alpha^2-1=2\alpha-8-2\alpha^2+8\alpha \Rightarrow \alpha^2-8\alpha+7=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha-7)=0 \Rightarrow \alpha=1, \alpha=7$$

اگر $\alpha=1$، آن‌گاه $f'(\alpha)=0$ و اگر $\alpha=7$، آن‌گاه $f'(\alpha)=-12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

۱۱۸۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطهٔ تماس را $(\alpha, \frac{5\alpha+1}{\alpha-1})$ در نظر بگیریم، معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

چون $f'(\alpha)=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$، پس $y-\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}(x-\alpha)$.

نقطهٔ $(0,2)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$2-\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}(0-\alpha) \Rightarrow \frac{2(\alpha-1)-(5\alpha+1)}{\alpha-1}=\frac{-6(-\alpha)}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{2\alpha-2-5\alpha-1}{\alpha-1}=\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow -3\alpha-3=\frac{6\alpha}{\alpha-1} \Rightarrow -3\alpha^2-6\alpha+3=0$$

مقادیر α که از معادلهٔ فوق حاصل می‌شوند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -2 است.

راه‌حل دوم فرض کنید این خط‌ها در نقطهٔ $B(\alpha,f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شوند. در این صورت شیب این خط‌ها برابر $f'(\alpha)$ خواهد بود. بنابراین

$$f(x)=\frac{5x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{-6}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(\alpha)=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

از طرف دیگر، شیب این خط‌ها که از دو نقطهٔ $A(0,2)$ و $B(\alpha,f(\alpha))$ می‌گذرند برابر است با $\frac{f(\alpha)-2}{\alpha-0}$. بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-2}{\alpha}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow \frac{\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}-2}{\alpha}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{3\alpha+3}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow 3(\alpha+1)(\alpha-1)=-6\alpha \Rightarrow \alpha^2+2\alpha-1=0$$

مقادیر α که از معادلهٔ فوق به‌دست می‌آیند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -2 است.

۱۱۸۱- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-1,2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{0-(-\frac{3}{2})}{3}=\frac{1}{2}$$

۱۱۸۲- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[1,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{\frac{1}{a}-1}{a-1}=\frac{1-a}{a(a-1)}=-\frac{1}{a}$ است. بنابراین

$$-\frac{1}{a}=-\frac{2}{3} \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

۱۱۸۳- گزینهٔ «۲» آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[4,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(4)}{a-4}=\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$ است. بنابراین

$$\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}=\frac{1}{6}\Rightarrow 6\sqrt{a}-12=a-4\Rightarrow 6\sqrt{a}=a+8\Rightarrow 36a=a^2+16a+64$$

$$a^2-20a+64=0\Rightarrow (a-16)(a-4)=0\Rightarrow a=16,\quad a=4\ (\text{غ.ق.ق})$$

۱۱۸۴- گزینهٔ «۳» آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{1}{x-4}$ در بازهٔ $[-a,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(-a)}{2a}$ است:

$$\frac{f(a)-f(-a)}{2a}=\frac{\frac{1}{a-4}-\frac{1}{-a-4}}{2a}=\frac{-a-4-a+4}{2a(16-a^2)}=\frac{1}{a^2-16}$$

بنابراین

$$\frac{1}{a^2-16}=\frac{-1}{7}\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=3,\quad a=-3\ (\text{غ.ق.ق})$$

۱۱۸۵- گزینهٔ «۱» آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a-1,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(a-1)}{a-a+1}$ است:

$$\frac{f(a)-f(a-1)}{1}=\frac{a-\frac{1}{a}-(a-1-\frac{1}{a-1})}{1}=\frac{-1}{a}+\frac{1}{a-1}+1=1+\frac{1}{a^2-a}$$

$$1+\frac{1}{a^2-a}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{a^2-a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a^2-a=2\Rightarrow a^2-a-2=0$$

$$(a-2)(a+1)=0\Rightarrow a=-1,2$$

۱۱۸۶- گزینهٔ «۴» آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-3,0]$ برابر است با

$$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=\frac{0-(-30)}{3}=10$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است با $f'(a)$.

$$f'(x)=3x^2+1\Rightarrow f'(a)=3a^2+1$$

بنابراین

$$3a^2+1=10\Rightarrow a^2=3\Rightarrow a=\sqrt{3}\ (\text{غ.ق.ق}),\quad a=-\sqrt{3}$$

۱۱۸۷- گزینهٔ «۳» آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,1]$ برابر است با $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-k$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=1$ برابر است با

$$f'(x)=3x^2-2kx\xrightarrow{x=1}f'(1)=3-2k$$

بنابراین

$$3-2k=1-k\Rightarrow k=2$$

۱۱۸۸- گزینهٔ «۱» اگر S مساحت و P محیط دایره‌ای به شعاع r باشد، آن‌گاه

$$S=\pi r^2\Rightarrow r=\sqrt{\frac{S}{\pi}},\quad P=2\pi r=2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}=2\sqrt{\pi}\sqrt{S}$$

بنابراین

$$P(S)=2\sqrt{\pi}\sqrt{S}\Rightarrow P'(S)=2\sqrt{\pi}\times\frac{1}{2\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

مقدار $P'(4\pi)$ خواسته شده که برابر $\frac{1}{2}$ است.

۱۱۸۹- گزینهٔ «۲» ابتدا توجه کنید که

$$S=x(6-x)\Rightarrow S(x)=6x-x^2\Rightarrow S'(x)=6-2x$$

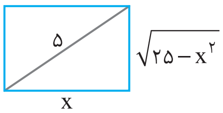
مقدار $S'(2)$ خواسته شده که برابر ۲ است.

۱۱۹۰- گزینهٔ «۴» ابتدا توجه کنید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس عرض مستطیل برابر است با $\sqrt{25-x^2}$. پس

$$P(x)=2(x+\sqrt{25-x^2})$$

$$P'(x)=2\left(1-\frac{2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right)=2-\frac{2x}{\sqrt{25-x^2}}$$

مقدار $P'(4)$ خواسته شده که برابر است با $P'(4)=2-\frac{8}{\sqrt{25-16}}=-\frac{2}{3}$.



۱۱۹۱- گزینهٔ «۲» ابتدا مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=3x^2-2x+1\Rightarrow f''(x)=6x-2$$

بنابراین باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $3x^2-2x+1=6x^2-2x$ رامشخص کنیم:

$$3x^2=1\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس در دو نقطه تساوی $f'(x)=xf''(x)$ برقرار است.

۱۱۹۲- گزینهٔ «۳» توجه کنید که

$$\begin{cases} f'(x)=4x^3+2ax+b\xrightarrow{x=1}14=4+2a+b \\ f''(x)=12x^2+2a\xrightarrow{x=1}16=12+2a \end{cases}$$

از این دستگاه معادلات نتیجه می‌شود $a=2$ و $b=6$، پس $a+b=8$.

۱۱۹۳- گزینهٔ «۲» توجه کنید که

$$f(x)=(x+k)^2(x-1)$$

$$f'(x)=2(x+k)(x-1)+(x+k)^2$$

$$f''(x)=2(x-1)+2(x+k)+2(x+k)$$

$$f''(2)=2+4(2+k)\xrightarrow{f''(2)=2}2+4(2+k)=2\Rightarrow k=-2$$

۱۱۹۴- گزینهٔ «۳» مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+4)^2-4x(x^2+4)(-x^2+4)}{(x^2+4)^4}$$

$$=\frac{-2x(x^2+4)-4x(-x^2+4)}{(x^2+4)^3}=\frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}$$

بنابراین

$$f''(x)=0\Rightarrow 2x^3-24x=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=\pm\sqrt{12}$$

پس در سه نقطه مشتق دوم تابع f برابر صفر است.

۱۱۹۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^6}{x^2}+\frac{x^4}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x^4+x^2+1+\frac{1}{x^2}$$

بنابراین

$$f'(x)=4x^3+2x-\frac{2}{x^3}\Rightarrow f''(x)=12x^2+2+\frac{6}{x^4}$$

$$f''(1)=12+2+6=20$$

۱۱۹۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=(x^{\frac{1}{3}}-1)(x^{\frac{1}{2}}+1)=x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}-1$$

$$f'(x)=\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=-\frac{5}{36}x^{-\frac{7}{6}}-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

بنابراین $f''(1)=-\frac{5}{36}-\frac{2}{9}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{9}$.

۱۱۹۷- گزینهٔ ۴ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

بنابراین $f''(\sqrt{3})=\frac{1}{(3+1)\sqrt{3+1}}=\frac{1}{8}$.

۱۱۹۸- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $2f'(2x-3)=3x^2+2ax+b$. اگر باز هم از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $4f''(2x-3)=6x+2a$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$4f''(-1)=6+2a\Rightarrow 4\times 4=6+2a\Rightarrow a=5$$

۱۱۹۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases},\quad f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

چون تابع در نقطهٔ $x=0$ مشتق اول ندارد، پس مشتق دوم هم ندارد.

۱۲۰۰- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=4x^3+6ax^2+12x$$

$$f''(x)=12x^2+12ax+12=12(x^2+ax+1)$$

پس معادلهٔ $x^2+ax+1=0$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta=a^2-4<0\Rightarrow |a|<2$$

۱۲۰۱- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی

$$f(3x-2)=x^3+ax^2+bx+c$$

دو بار پشت سرهم مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$3f'(3x-2)=3x^2+2ax+b\Rightarrow 9f''(3x-2)=6x+2a$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$ به‌دست می‌آید:

$$9f''(-5)=-6+2a\Rightarrow 18=-6+2a\Rightarrow a=12$$

۱۲۰۲- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $(gof)(x)=x^4+2x^2$ مشتق بگیریم به‌دست می‌آید: $f'(x)g'(f(x))=4x^3+4x$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$f''(x)g'(f(x))+f'(x)f'(x)g''(f(x))=12x^2+4$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$ به‌دست می‌آید:

$$0+(f'(0))^2g''(f(0))=4\Rightarrow g''(1)=4$$

۱۲۰۳- گزینهٔ ۴ اولاً تابع باید در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد و مشتق اول داشته باشد. پس

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow a+b+1=c \qquad (I)$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x<1\\ \frac{-c}{x^2} & x>1\end{cases},\quad f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow 2a+b=-c \qquad (II)$$

ثانیاً باید مشتق دوم چپ و مشتق دوم راست تابع با هم برابر باشند:

$$f''(x)=\begin{cases}2a & x<1\\ \frac{2c}{x^3} & x>1\end{cases},\quad f''_-(1)=f''_+(1)\Rightarrow 2a=2c\Rightarrow a=c$$

اگر در تساوی‌های (I) و (II) به جای c، a را قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}a+b+1=a\\ 2a+b=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+1=0\Rightarrow b=-1\\ 3a+b=0\Rightarrow a=\frac{1}{3}\end{cases}$$

و در نتیجه $a+b=-\frac{2}{3}$.

۱۲۰۴- گزینهٔ ۱ ابتدا مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم

$$f'(x)=\cos x-x\sin x+k\cos x$$

$$f''(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x-k\sin x$$

$$=-(k+2)\sin x-x\cos x$$

بنابراین $f''(\frac{\pi}{2})=-(k+2)=-4\Rightarrow k=2$

۱۲۰۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sin^2 x\Rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x\Rightarrow f''(x)=2\cos 2x$$

بنابراین $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=(f'(x))'=f''(x)=2\cos 2x$

۱۲۰۶- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=\sin ax\Rightarrow f'(x)=a\cos ax\Rightarrow f''(x)=-a^2\sin ax$$

بنابراین از $f''(x)=-64f(x)$ نتیجه می‌شود

$$-a^2\sin ax=-64\sin ax\Rightarrow a^2=64\Rightarrow a=\pm 8$$

۱۲۰۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

بنابراین

$$f'(x)=\cos 2x\Rightarrow f''(x)=-2\sin 2x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$$

۱۲۰۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y=\sin kx-\cos kx$$

$$y'=k\cos kx+k\sin kx$$

$$y''=-k^2\sin kx+k^2\cos kx$$

بنابراین

$$\frac{y''}{y}=\frac{-k^2\sin kx+k^2\cos kx}{\sin kx-\cos kx}=\frac{-k^2(\sin kx-\cos kx)}{\sin kx-\cos kx}=-k^2$$

پس $-k^2=-16\Rightarrow |k|=4$

۱۲۰۹- گزینهٔ ۳ مشتق اول و دوم تابع در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{4}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2a\cos 2x-2b\sin 2x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=-2b$$

$$f''(x)=-4a\sin 2x-4b\cos 2x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-4a$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{4})=-2b=24\Rightarrow b=-12\ ,\quad f''(\frac{\pi}{4})=-4a=12\Rightarrow a=-3$$

در نتیجه $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$.

۱۲۱۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول**

$$f'(x)=4\sin^3x\cos x-4\sin x\cos^3x$$

$$-4\sin x\cos x(\cos^2x-\sin^2x)=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$$

بنابراین $f''(x)=-4\cos 4x$. پس $f''(\frac{\pi}{12})=-4\cos\frac{\pi}{3}=-2$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x)=\sin^4x+\cos^4x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

بنابراین $f'(x)=-\sin 4x\Rightarrow f''(x)=-4\cos 4x$

$$f''(\frac{\pi}{12})=-4\cos\frac{\pi}{3}=-2$$

۱۲۱۱- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^7+1}=\lim_{x\to -1}\frac{5x^4}{7x^6}=\frac{5}{7}$$

۱۲۱۲- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^4+x^3+x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x^2+1}$$

توجه کنید که این حد هم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابراین باز هم از قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x^2+1}=\lim_{x\to -1}\frac{6x+2}{12x^2+6x}=\frac{-6+2}{12-6}=-\frac{2}{3}$$

۱۲۱۳- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^4-(2x-3)^4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-1)^3-8(2x-3)^3}{2x}=\frac{4-8}{4}=-1$$

۱۲۱۴- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{2x}=\frac{n}{2}=10\Rightarrow n=20$$

۱۲۱۵- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-8}-2}{\sqrt{5x+10}-5}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{4}{2\sqrt{4x-8}}}{\frac{5}{2\sqrt{5x+10}}}=\frac{\frac{4}{2\times 2}}{\frac{5}{2\times 5}}=2$$

۱۲۱۶- گزینهٔ ۱ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{3x^2}=\frac{\frac{1}{3\times 4}}{3\times 4}=\frac{1}{144}$$

۱۲۱۷- گزینهٔ ۱ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos 2-\cos 2x}{x^2-x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{2\sin 2x}{2x-1}=\frac{2\sin 2}{2-1}=2\sin 2$$

۱۲۱۸- گزینهٔ ۳ وقتی $x\to(\frac{\pi}{2})^-$، داریم: $3x\to(\frac{3\pi}{2})^-$ و طبق دایرهٔ مثلثاتی: $\cos 3x<0$. بنابراین:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{|\cos 3x|}{\cot x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{-\cos 3x}{\cot x}\xrightarrow{HOP}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{3\sin 3x}{-1-\cot^2x}=\frac{3\times(-1)}{-1}=3$$

۱۲۱۹- گزینهٔ ۴ وقتی $x\to(-1)^+$، داریم: $x>-1$، بنابراین $x^2-1<0$

و درنتیجه:

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\tan\pi x}{|x^2-1|}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\tan\pi x}{1-x^2}\xrightarrow{HOP}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\pi(1+\tan^2(\pi x))}{-2x}=\frac{\pi\times 1}{2}=\frac{\pi}{2}$$

۱۲۲۰- گزینهٔ ۲ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد مورد نظر برابر است با:

$$\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)}{-\frac{\pi}{a}\sin(\frac{\pi x}{a})}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to a}\frac{2}{-\frac{\pi^2}{a^2}\cos(\frac{\pi x}{a})}=\frac{2a^2}{\pi^2}$$

با مقایسهٔ نتیجهٔ به‌دست آمده و فرض سؤال داریم: $\frac{2a^2}{\pi^2}=\frac{2}{\pi^2}$ بنابراین $a=\pm 1$.

۱۲۲۱- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+14}-2x}{\sqrt[3]{x+25}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+14}}-2}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+25)^2}}}=\frac{\frac{1}{8}-2}{\frac{1}{3\times 9}}=-\frac{405}{8}$$

۱۲۲۲- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2\times 2}=\frac{5}{12}$$

۱۲۲۳- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{2}}-x}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=6$$

۱۲۲۴- گزینهٔ ۴ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۹}-۳}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{a}{۲\sqrt{ax+۹}}}{۱}=\frac{a}{۲\sqrt{۹}}=\frac{a}{۶}$$

پس $\frac{a}{۶}=۴$ و در نتیجه $a=۲۴$.

۱۲۲۵- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۱}{n\sqrt[n]{(\cos x)^{n-۱}}}\times(-\sin x)}{۲x}=\frac{۱}{۸}$$

$$\frac{۱}{۲n}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{۲n}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow n=۴$$

۱۲۲۶- گزینهٔ ۴ با توجه به آنکه $۱+\cos ۲x=۲\cos^{۲} x$، ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=\frac{\sqrt{۲}|\cos x|}{\sqrt{\pi}-\sqrt{۲x}}$ می‌توان نوشت. بنابراین باید حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt{۲}\cos x}{\sqrt{\pi}-\sqrt{۲x}}$ و قرینهٔ آن را به‌دست آوریم تا مقادیر حدهای راست و چپ پیدا شوند.

داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt{۲}\cos x}{\sqrt{\pi}-\sqrt{۲x}}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-\sqrt{۲}\sin x}{-\frac{۱}{\sqrt{۲x}}}=\sqrt{۲\pi}$$

بنابراین اختلاف حدهای راست و چپ برابر است با:

$$|\sqrt{۲\pi}-(-\sqrt{۲\pi})|=۲\sqrt{۲\pi}$$

۱۲۲۷- گزینهٔ ۴ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\frac{\sqrt{۱-\sin ۲x}}{\tan x-۱}=\frac{\sqrt{\sin^{۲} x+\cos^{۲} x-۲\sin x\cos x}}{\tan x-۱}=\frac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^{۲}}}{\tan x-۱}=\frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-۱}$$

وقتی $x\to(\frac{\pi}{۴})^-$ طبق دایرهٔ مثلثاتی داریم: $\sin x<\cos x$، پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\tan x-۱}$$

$$\overset{HOP}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-\sin x-\cos x}{۱+\tan^{۲} x}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۲۲۸- گزینهٔ ۴ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-۳\sin ۳x+۳\cos^{۲} x\sin x}{۲x}$$

$$=\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin ۳x+(۱-\sin^{۲} x)\sin x}{x}$$

$$=\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin ۳x+\sin x-\sin^{۳} x}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{-۳x+x-x^{۳}}{x}=\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{-۲x-x^{۲}}{x}$$

$$=\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}(-۲-x)=\frac{۳}{۲}\times(-۲)=-۳$$

۱۲۲۹- گزینهٔ ۳ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x+۳\sin ۳x}{\frac{-۲x}{-۲\sqrt{۴-x^{۲}}}}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to ۰}\frac{(-x+۹x)\sqrt{۴-x^{۲}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}۸\sqrt{۴-x^{۲}}=۱۶$$

۱۲۳۰- گزینهٔ ۳ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\pi(۱+\tan^{۲}(\pi x))}{۲x-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{\pi}{۲-\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\pi}{۳}$$

۱۲۳۱- گزینهٔ ۱ مقدار حد خواسته شده، همان $f'(۲)$ است. پس ابتدا $f'(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=(\frac{x+۲}{۲x-۳})^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}(\frac{x+۲}{۲x-۳})^{\frac{۱}{۲}}\times\frac{-۳-۴}{(۲x-۳)^{۲}}$$

بنابراین $f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\sqrt{۴}\times(-۷)=-۲۱$.

تجربی - ۹۵

۱۲۳۲- گزینهٔ ۲ تابع f باید در نقطهٔ $x=-۲$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=f(-۲)$$

$$۴a-۲b+۴=-۸+۲\Rightarrow ۲a-b=-۵$$

از طرف دیگر چون تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ مشتق‌پذیر است، پس مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابرند:

$$f'(x)=\begin{cases}۲ax+b & x\ge -۲\\ ۳x^{۲}-۱ & x\le -۲\end{cases}\Rightarrow f'_+(-۲)=f'_-(-۲)\Rightarrow -۴a+b=۱۱$$

بنابراین از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}۲a-b=-۵\\ -۴a+b=۱۱\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-۳$ و $b=-۱$ و در نتیجه $f(۱)=a+b+۴=۰$.

تجربی - ۹۷

۱۲۳۳- گزینهٔ ۱ تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته است، پس

$$\begin{cases}\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}f(x)=\frac{۱}{۲}-۰=\frac{۱}{۲}\\ \lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}f(x)=a+b\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{۱}{۲}$$

اکنون مشتق چپ و مشتق راست تابع f در این نقطه را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\begin{cases}\sin ۲x+۲\sin ۲x & ۰<x\le\frac{\pi}{۴}\\ a(۱+\tan^{۲} x)+۲b\cos ۲x & \frac{\pi}{۴}\le x<\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_-(\frac{\pi}{۴})=۳\\ f'_+(\frac{\pi}{۴})=۲a\end{cases}\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $b=-۱$.

تجربی - ۹۳

۱۲۳۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=\frac{(-\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}-\frac{(-\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}=\frac{-(\sin x+\cos x)^2-(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)^2}=\frac{-2}{(\cos x+\sin x)^2}$$

بنابراین $y'(\frac{\pi}{4})=\frac{-2}{(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2})^2}=\frac{-2}{2}=-1$.

راه‌حل دوم عبارت $\cos x-\sin x$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{4}$ برابر صفر است. پس کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق بگیریم:

$$y=\underbrace{(\cos x-\sin x)}_{f(x)}\times\underbrace{\frac{1}{\cos x+\sin x}}_{g(x)},\quad f'(x)=-\sin x-\cos x$$

$$y'(\frac{\pi}{4})=f'(\frac{\pi}{4})g(\frac{\pi}{4})=(-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2})(\frac{1}{\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}})=-1$$

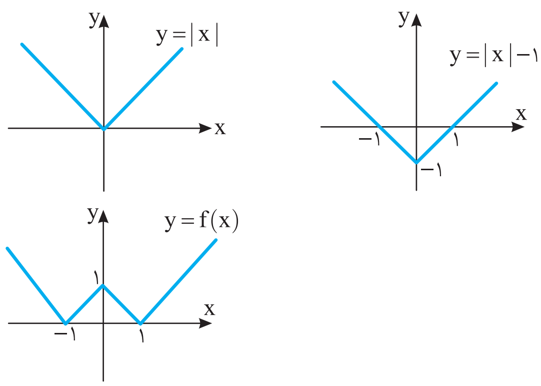
خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱۲۳۵- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=x|x|$ نشان دهیم که به‌وضوح در $x=0$ پیوسته است. همچنین تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است، زیرا

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}|x|=0,\quad f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x|x|-0}{x-0}=0$$

ریاضی - ۸۷

۱۲۳۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



از نمودار تابع مشخص است که سه نقطهٔ گوشه‌ای (و بنابراین مشتق‌ناپذیر) وجود دارد.

ریاضی - ۸۶

۱۲۳۷- گزینهٔ ۱ از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2\Rightarrow f'(x)=2(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})(-\frac{16}{x^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})$$

$$f'(-8)=2(-2-4)(-\frac14+\frac26)=-1$$

ریاضی - ۸۸

۱۲۳۸- گزینهٔ ۲ به‌جای اینکه حاصل $f'(x)\times g'(f(x))$ را بیابیم، مشتق تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}=x$$

بنابراین $(gof)'(x)=1$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۲۳۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[4,6/25]$ برابر است با

$$\frac{f(6/25)-f(4)}{6/25-4}=\frac{\sqrt{6/25}-\sqrt4}{6/25-4}=\frac{2/5-2}{2/25}=\frac{\frac12}{\frac94}=\frac29$$

اما آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=4$ برابر $f'(4)$ است:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt x}\Rightarrow f'(4)=\frac14,\qquad \text{مقدار مورد نظر}=\frac14-\frac29=\frac{9-8}{36}=\frac1{36}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۲۴۰- گزینهٔ ۲ باید معادلهٔ برخورد خط و نمودار ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$(m+3)x^2+mx=2x-4\Rightarrow(m+3)x^2+(m-2)x+4=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0}(m-2)^2-16(m+3)=0$$

$$m^2-20m-44=0\Rightarrow(m-22)(m+2)=0\Rightarrow m_1=22,\ m_2=-2$$

ریاضی - ۹۰

۱۲۴۱- گزینهٔ ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$$

پس

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)+7}{x-4}=-\frac32\Rightarrow f(4)=-7,\ f'(4)=-\frac32$$

بنابراین

$$y=\frac1x f(2x)\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}f(2x)+2f'(2x)\times\frac1x$$

$$y'(2)=-\frac14 f(4)+2f'(4)\times\frac12=\frac74-\frac64=\frac14$$

ریاضی - ۹۶

۱۲۴۲- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطهٔ $x=1$ باید پیوسته باشد و مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)=0\\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=a+b+1\end{cases}\Rightarrow a+b+1=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{-1}{x^2} & x>1\\ 2x+a & x<1\end{cases},\quad \lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^-}f'(x)\Rightarrow 2=2+a$$

از دو شرط $2=2+a$ و $a+b+1=0$ نتیجه می‌شود $a=0$ و $b=-1$، پس

$$f(1-\sqrt2)=(1-\sqrt2)^2+a(1-\sqrt2)+b=3-2\sqrt2-1=2-2\sqrt2$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۲۴۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=(2\sin^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}))'=2\times2\times\frac{-1}{4}\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})$$
$$=\frac{-1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})$$

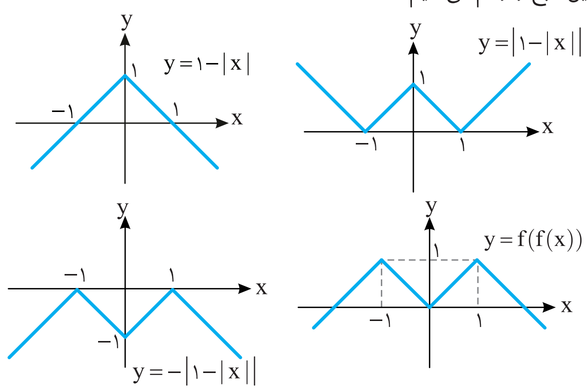
پس به‌ازای $x=\frac{\pi}{3}$ مقدار مشتق تابع برابر است با $\frac{-1}{4}$.
تجربی - ۹۳

۱۲۴۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\tan^3 2x\Rightarrow f'(x)=6\tan^2 2x(1+\tan^2 2x)$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{6})=6\tan^2\frac{\pi}{3}(1+\tan^2\frac{\pi}{3})=6\times3(1+3)=72$.
خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۲۴۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(f(x))=1-|1-|x||$. اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، $y=1-|1-|x||$ در سه نقطهٔ $x=0$ و $x=\pm1$ مشتق‌ناپذیر است.
خارج از کشور ریاضی -۸۸

۱۲۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا تابع‌های f و g را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{5}x & x\ge0\\ x & x\le0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}5x & x\ge0\\ 3x & x\le0\end{cases}$$

بنابراین $(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(5x) & x\ge0\\ f(3x) & x\le0\end{cases}=\begin{cases}3x & x\ge0\\ 3x & x\le0\end{cases}$ و در نتیجه $(fog)'(x)=3$.
تجربی - ۹۴

۱۲۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=x+1+(g(x))^5\Rightarrow f'(x)=1+5g'(x)g^4(x) \qquad (1)$$
$$\xrightarrow{x=0} f'(0)=1+5g'(0)g^4(0)\Rightarrow1=1+5g'(0)\Rightarrow g'(0)=0$$

اکنون از دو طرف تساوی (۱) مشتق می‌گیریم:

$$f''(x)=0+5g''(x)g^4(x)+20g'^2(x)g^3(x)$$
$$\xrightarrow{x=0} f''(0)=5g''(0)\times1^4+20\times0\times1=5g''(0)$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۲۴۸- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[1,1/44]$ برابر است با $\frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1}=\frac{\frac{0/44}{1/2}-0}{0/44}=\frac{5}{6}$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=1$ نیز این‌گونه به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

اختلاف این دو مقدار $\frac{1}{6}$ است.
خارج از کشور تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۱۲۴۹- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خط مماس گذرنده از $(\alpha,\frac{2\alpha-1}{\alpha+1})$ را می‌نویسیم و مختصات $A(-1,0)$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$y'=\frac{2+1}{(x+1)^2}\Rightarrow m=\frac{3}{(\alpha+1)^2}$$
$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ مماس}} y-\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}(x-\alpha)$$
$$\xrightarrow{A(-1,0)} -\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1-\alpha)\Rightarrow2\alpha-1=3\Rightarrow\alpha=2$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۲۵۰- گزینهٔ ۱ شیب خط $(m+2)y=mx$ برابر $\frac{m}{m+2}$ است. پس باید مشتق تابع $y=\sqrt{1+x^2}$ در نقطهٔ x_0 واقع بر منحنی برابر $\frac{m}{m+2}$ باشد. یعنی

$$y'(x_0)=\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}=\frac{m}{m+2}\Rightarrow\frac{x_0^2}{1+x_0^2}=\frac{m^2}{(m+2)^2}$$
$$m^2x_0^2+m^2=(m+2)^2x_0^2\Rightarrow x_0^2=\frac{m^2}{4(m+1)}\ge0$$

بنابراین $m+1>0$ پس $m>-1$.
ریاضی - ۹۵

۱۲۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ همان تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول یک است. پس ابتدا $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}}\times\frac{4\times3-5\times1}{(x+3)^2}$$

بنابراین $f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}}\times\frac{7}{16}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{48}$.
خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۲۵۲- گزینهٔ ۲ برای آنکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، ابتدا لازم است در این نقطه پیوسته باشد و همچنین، مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه برابر باشند:

شرط پیوستگی: $3-5=1+a+b\Rightarrow a+b=-3$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{3}{x^2} & x>1\\ 2x+a & x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(1)=-3\\ f'_-(1)=2+a\end{cases}$$
$$2+a=-3\Rightarrow a=-5\ ,\ b=2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۲۵۳- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی راست $\sqrt{2}$، $f(x)=x^3-4x$ ، پس در این همسایگی،

$$f'(x)=3x^2-4\Rightarrow f'_+(\sqrt{2})=3\times2-4=2$$

خارج از کشور تجربی با کمی تغییر - ۹۴

۱۲۵۴- گزینهٔ ۳ با فرض $g(x)=f(x+\sqrt{1+x^2})$ طبق قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌شود

$$g'(x)=f'(x+\sqrt{1+x^2})\times(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

خارج از کشور ریاضی -۸۵

۱۲۵۵- گزینهٔ ۲ حاصل مورد نظر همان مشتق تابع $y=f(g(x))$ است. پس،

$$y=f(g(x))=\frac{x-1-2}{1+x-1}=\frac{x-3}{x}\Rightarrow y'=\frac{3}{x^2}$$

ریاضی - ۹۲

۱۲۵۶- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}4x & x\geq 0\\ 2x & x\leq 0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}(a+\frac{3}{4})x & x\geq 0\\ (\frac{3}{4}-a)x & x\leq 0\end{cases}$$

اکنون تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=\begin{cases}(a+\frac{3}{4})\times 4x & x\geq 0\\ (\frac{3}{4}-a)\times 2x & x\leq 0\end{cases}$$

در نهایت از تابع به‌دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$(gof)'(x)=\begin{cases}4a+3 & x\geq 0\\ \frac{3}{2}-2a & x\leq 0\end{cases}$$

از برابری مشتق چپ و مشتق راست تابع gof در نقطهٔ $x=0$ نتیجه می‌شود:

$$4a+3=\frac{3}{2}-2a\Rightarrow 6a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۲۵۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)'(2)=f'(g(2))\times g'(2)=f'(\frac{1}{4})g'(2)$$

با توجه به اینکه $f'(x)=\pi\sin 2\pi x$ و $g'(x)=\frac{5}{8\sqrt{5x-9}}$، پس $f'(\frac{1}{4})=\pi$ و $g'(2)=\frac{5}{8}$. بنابراین $(fog)'(2)=\frac{5\pi}{8}$.

ریاضی - ۹۱

۱۲۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$y=\sin^3 u\Rightarrow y'=3\sin^2 u\times\cos u\times u'$$

پس

$$y=\sin^3\sqrt{2x},\quad y'=3\sin^2\sqrt{2x}\times\cos\sqrt{2x}\times\frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

بنابراین $y'(\frac{\pi^2}{18})=3\sin^2\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{\frac{\pi}{3}}=3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{\pi}=\frac{27}{8\pi}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۲۵۹- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=5x+a$ برابر ۵ است. پس ابتدا نقطه‌ای از تابع $f(x)=2x^2-3x+6$ را مشخص می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه (یعنی مشتق تابع) برابر ۵ باشد:

$$f'(x)=4x-3=5\Rightarrow x=2$$

پس خط در نقطهٔ $(2,f(2))$ بر نمودار تابع مماس است. این نقطه متعلق به خط هم هست، پس در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$f(2)=5\times 2+a\Rightarrow 2\times 2^2-3\times 2+6=10+a\Rightarrow 8=10+a\Rightarrow a=-2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۲۶۰- گزینهٔ ۱ دو نقطه عبارت‌اند از $A(1,3+a)$ و $B(-1,-3+a)$. معادلهٔ خط گذرنده از A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{3+a-(-3+a)}{1-(-1)}=3$$

$$\text{معادلهٔ } AB: y-(3+a)=3(x-1)\Rightarrow y=3x+a$$

فرض کنید $f(x)=3x+a$ و $g(x)=x^3+ax^2+2x$. برای آنکه خط بر منحنی مماس باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$g'(x)=f'(x)\Rightarrow 3x^2+2ax+2=3$$

$$g(x)=f(x)\Rightarrow x^3+ax^2+2x=3x+a$$

$$x^2(x+a)-(x+a)=0\Rightarrow (x+a)(x^2-1)=0$$

از شرط دوم نتیجه می‌گیریم $x=-a$ یا $x=\pm 1$ که با جای‌گذاری این نتایج در معادلهٔ اول مقدار a به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x=\pm 1\Rightarrow 3\pm 2a=1\Rightarrow a=\pm 1\\ x=-a\Rightarrow 3a^2-2a^2=1\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1\end{cases}\Rightarrow a=\pm 1$$

ریاضی - ۹۰

۱۲۶۱- گزینهٔ ۱ با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع f در $x=-1$ مورد نظر است. برای به‌دست آوردن مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-1$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}((x-2)\sqrt[3]{x^2-7x})=-6$$

ریاضی - ۹۲

۱۲۶۲- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس می‌توان نوشت:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)\Rightarrow a+b=2$$

$$f'(x)=\begin{cases}3ax^2+b & x\leq 1\\ \frac{4}{\sqrt{4x-3}} & x\geq 1\end{cases},\quad f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 4=3a+b$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=1$ و $b=1$.

ریاضی - ۹۲

۱۲۶۳- گزینهٔ ۳ با توجه به ضابطه، نقطهٔ مشتق‌ناپذیری تابع $x=0$ است. توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x} & x>0\\ \sqrt{1-x} & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1+x}} & x>0\\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & x<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(0)=\frac{1}{2}\\ f'_-(0)=-\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow[\text{مشتق‌پذیر}]{x=0 \text{ در } f} f'_+(0)-f'_-(0)=1$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۲۶۴- گزینهٔ ۴ اگر $x<-۱$ ، آن‌گاه $-۱<\frac{۱}{x}<۰$ ، بنابراین $[\frac{۱}{x}]=-۱$.

پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-۱)$ تابعی ثابت و مشتق‌پذیر است. گزینه‌های (۱) و (۲) به راحتی رد می‌شوند، زیرا $\frac{۱}{x}$ در نامتناهی نقطه از آن‌ها مقدار صحیح می‌شود.

همچنین در گزینهٔ (۳)، $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{-۱}{x-۱}=-\infty$. پس تابع f روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ مشتق‌پذیر نیست.

ریاضی - ۹۱

۱۲۶۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}\ ,\quad D_g=\mathbb{R}-\{۴\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۴\}\,|\,\frac{x+۲}{x-۴}\in\mathbb{R}-\{-۳\}\}$$

$$\frac{x+۲}{x-۴}=-۳\Rightarrow x+۲=-۳x+۱۲\Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین $D_{fog}=\mathbb{R}-\{۴,\frac{۵}{۲}\}$. پس تابع fog در نقاط $x=۴$ و $x=\frac{۵}{۲}$ مشتق‌پذیر نیست.

ریاضی - ۸۴

۱۲۶۶- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج کسر صفر است، حد صورت نیز باید صفر باشد تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. یعنی باید

$$\lim_{h\to ۰}(f(-۲+h)+۳)=۰\Rightarrow \lim_{h\to ۰}f(-۲+h)=-۳\Rightarrow f(-۲)=-۳$$

پس حد داده شده همان تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ است:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=f'(-۲)=\frac{۱}{۲}$$

پس

$$g(x)=x^۲f(x)\Rightarrow g'(x)=(x^۲f(x))'=۲xf(x)+x^۲f'(x)$$

$$g'(-۲)=-۴f(-۲)+۴f'(-۲)=۱۲+۲=۱۴$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۲۶۷- گزینهٔ ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه پیوستگی آن است:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}(۱+a\cos\pi x)=\lim_{x\to ۱^-}(bx^۲+x)$$

$$۱-a=b+۱\Rightarrow b=-a$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۱$ با هم برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}-a\pi\sin\pi x & x\geq ۱\\ ۲bx+۱ & x\leq ۱\end{cases}$$

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}f'(x)=۰,\quad f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}f'(x)=۲b+۱$$

$$۲b+۱=۰\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

همچنین چون $b=-a$ ، بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۲۶۸- گزینهٔ ۴ از هر دو ضابطه مشتق می‌گیریم و با جای‌گذاری $x=۰$ در آنها، مشتق چپ و مشتق راست تابع را حساب می‌کنیم:

$$x>۰: f(x)=\frac{\sin x}{۱+\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x(۱+\cos x)+\sin x(\sin x)}{(۱+\cos x)^۲}$$

$$f'_+(۰)=\frac{۱\times ۲+۰}{(۱+۱)^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$x\leq ۰: f(x)=\sin ۲x\Rightarrow f'(x)=۲\cos ۲x\Rightarrow f'_-(۰)=۲$$

پس $f'_-(۰)-f'_+(۰)=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۲۶۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[۱,۱/۲۱]$ محاسبه می‌کنیم: $\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۱/۲۱-۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۰/۱}{۰/۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$. اکنون آهنگ تغییر لحظه‌ای f را در نقطهٔ $x=۱$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۱۲۷۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** شیب نیمساز ناحیهٔ اول برابر ۱ است. پس ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع $f(x)=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶$ را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه (مشتق) برابر یک باشد:

$$f'(x)=۱\Rightarrow ۴x+m+۱=۱\Rightarrow x=-\frac{m}{۴}$$

بنابراین خط $y=x$ در نقطهٔ $(-\frac{m}{۴},-\frac{m}{۴})$ بر نمودار تابع f مماس شده است. این نقطه روی نمودار تابع f است، پس مختصات آن در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

$$-\frac{m}{۴}=۲(-\frac{m}{۴})^۲+(m+۱)(-\frac{m}{۴})+m+۶$$

$$m^۲-۸m-۴۸=۰\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴)=۰\Rightarrow m=۱۲\ ,\ m=-۴$$

$m=۱۲$ قابل قبول نیست، چون در این صورت نقطهٔ تماس $(-۳,-۳)$ می‌شود که در ناحیهٔ اول قرار ندارد.

راه‌حل دوم شرط آنکه یک تابع بر یک خط مماس باشد آن است که معادلهٔ حاصل از تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$\begin{cases}y=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶\\ y=x\end{cases}\Rightarrow ۲x^۲+(m+۱)x+m+۶=x$$

$$۲x^۲+mx+m+۶=۰\xrightarrow{\Delta=۰}m^۲-۸(m+۶)=۰$$

$$m^۲-۸m-۴۸=۰\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴)=۰\Rightarrow m=۱۲, m=-۴$$

$$\begin{cases}m=۱۲\Rightarrow ۲x^۲+۱۲x+۱۸=۰\Rightarrow x^۲+۶x+۹=۰\Rightarrow x=-۳\ \text{(غ.ق.ق)}\\ m=-۴\Rightarrow ۲x^۲-۴x+۲=۰\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

چون نمودار تابع بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است، پس باید طول نقطهٔ تماس مثبت باشد. پس $x=۱$ و در نتیجه $m=-۴$ قابل قبول است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۲۷۱- گزینهٔ ۴ تابع باید در $x=۱$ پیوسته باشد، بنابراین $a+b=۲$. از طرف دیگر مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه باید برابر باشند:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x^{\frac{-۱}{۲}} & x\geq ۱ \\ ax^۲+bx & x<۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -x^{\frac{-۳}{۲}} & x>۱ \\ ۲ax+b & x<۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(۱)=-۱ \\ f'_-(۱)=۲a+b \end{cases} \Rightarrow ۲a+b=-۱$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a+b=۲ \\ ۲a+b=-۱ \end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-۳$ و $b=۵$.

ریاضی - ۹۳

۱۲۷۲- گزینهٔ ۲ ابتدا مقدار جزءصحیح و علامت تابع قدرمطلق را در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=-۳$ مشخص می‌کنیم:

$$x\to(-۳)^+ \Rightarrow [x]=-۳,\quad |x|=-x \Rightarrow f(x)=(x-۳)\sqrt[۳]{۹x}$$

بنابراین $f'(x)=\sqrt[۳]{۹x}+\dfrac{۹}{۳\sqrt[۳]{(۹x)^۲}}(x-۳)$. پس

$$f'_+(-۳)=-۳+\frac{۹}{۳\times۹}(-۶)=-۵$$

ریاضی - ۹۳

۱۲۷۳- گزینهٔ ۳ چون $f(۰)=۰$، پس

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to۰^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{-\sqrt{x^۲}}$$

دقت کنید که چون $x<۰$، به جای x می‌توانیم $-\sqrt{x^۲}$ قرار دهیم. بنابراین

$$f'_-(۰)=-\lim_{x\to۰^-}\sqrt{\frac{(۱-\sqrt{۱-x^۲})(۱+\sqrt{۱-x^۲})}{x^۲(۱+\sqrt{۱-x^۲})}}$$

$$=-\lim_{x\to۰^-}\sqrt{\frac{۱-۱+x^۲}{x^۲(۱+\sqrt{۱-x^۲})}}=-\lim_{x\to۰^-}\sqrt{\frac{۱}{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ریاضی - ۸۹

۱۲۷۴- گزینهٔ ۴ به دلیل حضور جزءصحیح‌ها در هر نقطه‌ای که تابع ناپیوسته باشد، مشتق‌ناپذیر است. یعنی باید نقاطی را بیابیم که $x\in\mathbb{Z}$ یا $x+\frac{۱}{۳}\in\mathbb{Z}$. در هر یک از این نقاط یکی از دو تابع $[x]$ و $[x+\frac{۱}{۳}]$ پیوسته و دیگری ناپیوسته است، بنابراین مجموع آن دو نیز ناپیوسته است. در بازهٔ $(۰,۳)$ این نقاط عبارت‌اند از: $\{\frac{۲}{۳},۱,\frac{۵}{۳},۲,\frac{۸}{۳}\}$

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۲۷۵- گزینهٔ ۲ با توجه به فرض سؤال $f'(۲)=-\frac{۱}{۳}$. همچنین اگر فرض کنیم $g(x)=f(\sqrt{|x|+۳})$، در یک همسایگی $x=-۱$،

$$g(x)=f(\sqrt{۳-x}) \Rightarrow g'(x)=f'(\sqrt{۳-x})\times\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}$$

$$\xrightarrow{x=-۱} g'(-۱)=-\frac{۱}{۴}f'(۲)=\frac{۱}{۱۲}$$

ریاضی - ۸۷

۱۲۷۶- گزینهٔ ۲ اگر $g(x)=f(xf(x))$، آن‌گاه طبق قاعدهٔ زنجیری،

$$g'(x)=f'(xf(x))\times(f(x)+xf'(x))$$

$$\xrightarrow{x=۲} g'(۲)=f'(۲f(۲))\times(f(۲)+۲f'(۲))$$

چون $f(۲)=-\frac{۱}{۲}$ و $f'(x)=-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$، پس $f'(۲)=-\frac{۱}{۴}$. پس

$$f'(۲f(۲))=f'(-۱)=-\frac{۱}{۲\sqrt{-۱+۲}}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow g'(۲)=-\frac{۱}{۲}\times(-\frac{۱}{۲}+۲\times\frac{-۱}{۴})=\frac{۱}{۲}$$

ریاضی - ۸۹

۱۲۷۷- گزینهٔ ۲ ابتدا آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۴,۱۲]$ و سپس آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ $x=۴$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \dfrac{f(۱۲)-f(۴)}{۱۲-۴}=\dfrac{\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}}{۸}=\dfrac{\frac{-۲}{۱۵}}{۸}=\dfrac{-۱}{۶۰} \\ f'(x)=-(۲x+۱)^{-\frac{۳}{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\dfrac{-۱}{۲۷} \end{cases} \Rightarrow \frac{-۱}{۶۰}-(\frac{-۱}{۲۷})=\frac{۱۱}{۵۴۰}$$

تجربی - ۹۳

۱۲۷۸- گزینهٔ ۲ ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ را می‌نویسیم:

$$y-۲=\frac{۳-۲}{-۱-۱}(x-۱)\Rightarrow y-۲=\frac{-۱}{۲}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

این خط در نقطهٔ $x=۳$ بر نمودار تابع f مماس است، پس در این نقطه با تابع مشترک است و شیب این خط، همان مشتق تابع در این نقطه است:

$$f(۳)=\frac{-۱}{۲}\times۳+\frac{۵}{۲}=\frac{-۳}{۲}+\frac{۵}{۲}=۱,\quad f'(۳)=\frac{-۱}{۲}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to۳}\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}=\lim_{x\to۳}(\frac{f(x)-۱}{x-۳}\times\frac{f(x)+۵}{-۱})$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}\times\lim_{x\to۳}(-f(x)-۵)$$

$$=f'(۳)\times(-f(۳)-۵)=-\frac{۱}{۲}(-۱-۵)=۳$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۲۷۹- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۱+\cos\pi x}{x^۳-x^۲-x+۱}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{-\sin\pi x\times\pi}{۳x^۲-۲x-۱}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{-\pi^۲\cos\pi x}{۶x-۲}=\frac{\pi^۲}{۴}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۲۸۰- گزینهٔ ۴ مخرج کسر را می‌توانیم به‌صورت $(\sqrt{x}-۲)^۲$ بنویسیم. حال از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۴}\frac{۱-\cos\pi x}{(\sqrt{x}-۲)^۲}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۴}\frac{\pi\sin\pi x}{۲(\sqrt{x}-۲)\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}$$

$$=\pi\lim_{x\to۴}\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x}-۲}\times\lim_{x\to۴}\sqrt{x}=۲\pi\lim_{x\to۴}\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x}-۲}$$

$$\xrightarrow{HOP}۲\pi\lim_{x\to۴}\frac{\pi\cos\pi x}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=۸\pi^۲$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۲۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2)=3(x-2)(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(3,4)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۲۸۲- گزینهٔ ۱ تابع مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=-9x^2+9x-2 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3},\ x=\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ صعودی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{3}$ است.

۱۲۸۳- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد باید $f'(x)\geq 0$. مشتق توابع گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $y=x^3-x+1 \Rightarrow y'=3x^2-1 \Rightarrow \Delta=12>0$

گزینهٔ (۲) $y=x^3+x^2+1 \Rightarrow y'=3x^2+2x \Rightarrow \Delta=4>0$

گزینهٔ (۳) $y=x^3+x^2-x+1 \Rightarrow y'=3x^2+2x-1 \Rightarrow \Delta=16>0$

گزینهٔ (۴) $y=x^3+x^2+x-1 \Rightarrow y'=3x^2+2x+1 \Rightarrow \Delta=-8<0$

واضح است که مشتق تابع گزینهٔ (۴) یعنی عبارت $3x^2+2x+1$ همواره مثبت است و تابع صعودی است.

۱۲۸۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=x^2-4x+3 \Rightarrow f''(x)=2x-4$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f' روی بازهٔ $(3,5)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۲۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که همواره $3x^2-x+1>0$، پس $D_f=\mathbb{R}$.

از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,\frac{1}{6})$ اکیداً نزولی است.

۱۲۸۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2\sqrt{2x}}{2x^2\sqrt{2x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2=2\sqrt{2x} \Rightarrow x^4=8x \Rightarrow x=0,\ x=2$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(0,2]$ نزولی و روی بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۱۲۸۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-1,2]$ و

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{x+1} \Rightarrow 2-x=x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	-1		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(0)>0$)

پس تابع f روی بازهٔ $[-1,\frac{1}{2}]$ صعودی و روی بازهٔ $[\frac{1}{2},2]$ نزولی است. در نتیجه حداکثر مقدار $b-a$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۲۸۸- گزینهٔ ۱ مشتق تابع به‌صورت زیر است:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

پس $f'(x)>0$ و در نتیجه تابع همواره صعودی است.

۱۲۸۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$$

روی بازهٔ $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$،

$$x>0,\quad \sin x<0 \Rightarrow -x\sin x>0$$

پس تابع f' در این بازه مثبت است و تابع f روی این بازه صعودی است.

۱۲۹۰- گزینهٔ ۲ مشتق تابع به‌صورت $f'(x)=3x^2-2ax+3$ است.

برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن همواره نامنفی باشد. پس

$$\Delta=4a^2-36\leq 0 \Rightarrow a^2\leq 9 \Rightarrow -3\leq a\leq 3$$

۱۲۹۱- گزینهٔ ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید:

$$f'(x)=\frac{x^۲+۱-۲x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

۱۲۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x^۳-۴x^۲+۵x-۲=x^۲(x-۱)-۳x^۲+۵x-۲=x^۲(x-۱)-(۳x-۲)(x-۱)$$

$$=(x-۱)(x^۲-۳x+۲)=(x-۱)(x-۱)(x-۲)=(x-۱)^۲(x-۲)$$

بنابراین $D_f=[۲,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{۳x^۲-۸x+۵}{۲\sqrt{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}}=\frac{(۳x-۵)(x-۱)}{۲\sqrt{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}}$$

بنابراین f' ریشه‌ای در بازهٔ $(۲,+\infty)$ ندارد و روی این بازه همواره مثبت است. بنابراین f روی بازهٔ $(۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۱۲۹۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-\frac{۱}{x^۲}=\frac{\sqrt[۳]{x^۴}-۳}{۳x^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۴}=۳\Rightarrow x^۴=۲۷\Rightarrow x=\pm\sqrt[۴]{۲۷}$$

پس جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt[۴]{۲۷}$		۰		$\sqrt[۴]{۲۷}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	ت ن	$-$	۰	$+$	

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-\sqrt[۴]{۲۷}]$ و $[\sqrt[۴]{۲۷},+\infty)$ صعودی است و روی بازه‌های $[-\sqrt[۴]{۲۷},۰)$ و $(۰,\sqrt[۴]{۲۷}]$ نزولی است. بنابراین کمترین مقدار a برابر $\sqrt[۴]{۲۷}$ است.

۱۲۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-۳,+\infty)$ و

$$f'(x)=۲x-\frac{۸}{۲\sqrt{x+۳}}=\frac{۲x\sqrt{x+۳}-۴}{\sqrt{x+۳}}$$

مخرج کسر فوق مثبت است، پس باید صورت آن را تعیین علامت کنیم تا علامت $f'(x)$ معلوم شود. بدین منظور ابتدا ریشه‌های صورت کسر فوق را به‌دست می‌آوریم:

$$۲x\sqrt{x+۳}-۴=۰\Rightarrow x\sqrt{x+۳}=۲\xrightarrow{x>۰}x^۲(x+۳)=۴$$

$$x^۳+۳x^۲-۴=۰\Rightarrow x^۳-۱+۳x^۲-۳=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+x+۱)+۳(x-۱)(x+۱)=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+۴x+۴)=۰\Rightarrow(x-۱)(x+۲)^۲=۰\Rightarrow x=۱,\ x=-۲\text{(غ.ق.ق)}$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	-۳		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی است و کمترین مقدار a برابر ۱ است.

۱۲۹۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)$ و برای هر $x>۰$

$$f(x)=x^{\frac{۱}{۲}}-x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow\frac{۱}{۲^۶}x^{-۳}=\frac{۱}{۳^۶}x^{-۴}$$

$$۳^{-۶}x^۳=۲^{-۶}x^۴\Rightarrow x=(\frac{۲}{۳})^۶$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است.

x	۰		$(\frac{۲}{۳})^۶$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	

(برای تعیین علامت می‌توانید عددگذاری کنید، مثلاً $f'(۱)>۰$) بنابراین تابع روی بازهٔ $[۰,(\frac{۲}{۳})^۶]$ اکیداً نزولی است و حداکثر مقدار a برابر $(\frac{۲}{۳})^۶$ است.

۱۲۹۶- گزینهٔ ۲ مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۳\sqrt[۳]{x}-x\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=\frac{۱-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱=\sqrt[۳]{x^۲}\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

پس جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	ت ن	$+$	۰	$-$	

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید، مثلاً $f'(\sqrt{۸})=-\frac{۱}{۲}$)

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-۱]$ و $[۱,+\infty)$ نزولی و روی بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۱۲۹۷- گزینهٔ ۳ تابع مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+۱)-\sqrt{x}}{(x+۱)^۲}=\frac{x+۱-۲x}{۲\sqrt{x}(x+۱)^۲}=\frac{۱-x}{۲\sqrt{x}(x+۱)^۲}$$

با توجه به مثبت بودن مخرج کسر فوق، جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	

بنابراین ابتدا تابع در بازهٔ $[۰,۱]$ صعودی، سپس در بازهٔ $[۱,+\infty)$ نزولی است.

۱۲۹۸- گزینهٔ ۴ از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(۱,۳)$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است. بنابراین $f'(x)>۰$. همچنین، مقادیر تابع f منفی‌اند، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. در مورد گزینهٔ (۴) توجه کنید که $(f^۲)'(x)=۲f'(x)f(x)<۰$. پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

۱۲۹۹- گزینهٔ ۲ مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم و آن را در بازهٔ $[0\,,2\pi]$ تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\cos 2x-\cos x=2\cos^2 x-1-\cos x=(\cos x-1)(2\cos x+1)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=1\Rightarrow x=0,\ x=2\pi\\ \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3},\ x=\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$ صعودی است.

۱۳۰۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^2+a^2-2x(x+a)}{(x^2+a^2)^2}=\frac{-x^2-2ax+a^2}{(x^2+a^2)^2}$$

اگـر مشـتق تابع f نامنفی باشـد، آن‌گاه تابـع f اکیداً صعودی اسـت. پس باید عبارت $-x^2-2ax+a^2$ نامنفی باشد:

$$-x^2-2ax+a^2\ge 0\Rightarrow x^2+2ax-a^2\le 0\Rightarrow (x+a)^2\le 2a^2$$

$$-\sqrt{2}a\le x+a\le\sqrt{2}a\Rightarrow -(\sqrt{2}+1)a\le x\le(\sqrt{2}-1)a$$

پـس بایـد $-(\sqrt{2}+1)a\le 0$ و $(\sqrt{2}-1)a\ge 1$ تـا تابـع f روی بـازهٔ $[0,1]$ اکیـداً صعودی باشـد که چـون a عددی مثبت اسـت، پس $-(\sqrt{2}+1)a\le 0$ برقرار است و در نتیجه

$$(\sqrt{2}-1)a\ge 1\Rightarrow a\ge\frac{1}{\sqrt{2}-1}\Rightarrow a\ge\sqrt{2}+1$$

۱۳۰۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=4x^3-12x^2\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 4x^2(x-3)=0\Rightarrow x=0,\ x=3$$

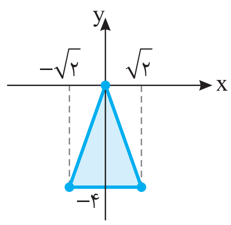
بنابراین تابع f در $x=0$ و $x=3$ نقطهٔ بحرانی دارد و مجموع مقادیر تابع f در این نقاط را باید حساب کنیم:

$$f(0)=1,\quad f(3)=-26,\quad f(0)+f(3)=-25$$

۱۳۰۲- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین $(0,0)$، $(\sqrt{2},-4)$ و $(-\sqrt{2},-4)$ نقاط بحرانی تابع هستند و مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با $\frac{2\sqrt{2}\times 4}{2}=4\sqrt{2}$.



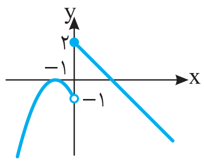
۱۳۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشـتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{(2+\sin x)^2},\quad f'(x)=0\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3\pi}{2}$$

پس این تابع دو نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۱۳۰۴- گزینهٔ ۱ نمـودار تابع f به‌صورت زیر اسـت. تابع f در $x=0$ پیوسـته نیسـت، پـس مشـتق‌پذیر نیسـت و $f'(-1)=0$. بنابرایـن $(0,2)$ و $(-1,0)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$$



۱۳۰۵- گزینهٔ ۳ تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست (نقطهٔ گوشه‌ای دارد). عرض نقطهٔ بحرانی برابر است با $f(0)=3$.

۱۳۰۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x-2 & x\ge 1\\ -x & 0<x<1\\ x^2+2x & x\le 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & 0<x<1\\ 2x+2 & x<0\end{cases}$$

تابع f در نقاط $x=0$ و $x=1$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا

$$\begin{cases}f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-1)=-1\\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+2)=2\end{cases}\Rightarrow f'_+(0)\ne f'_-(0)$$

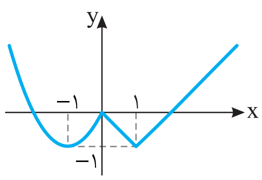
$$\begin{cases}f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1\\ f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-1)=-1\end{cases}\Rightarrow f'_+(1)\ne f'_-(1)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=0\Rightarrow 2x+2=0\Rightarrow x=-1$$

بنابرایـن نقطه‌هـای $(1,-1)$، $(0,0)$ و $(-1,-1)$ نقطه‌هـای بحرانـی تابع f هستند که مجموع عرض‌هایشان برابر -2 است.

راه‌حل دوم نمودار تابع f به‌صورت زیر اسـت و این تابع در نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ مشـتق‌پذیر نیسـت و $f'(-1)=0$. پس $(0,0)$، $(1,-1)$ و $(-1,-1)$ نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر -2 است.



۱۳۰۷- گزینهٔ ۴ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x+1}-2=0\Rightarrow x+1=4\Rightarrow x=3$$

پس $x=3$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع است که عرض آن برابر است با -5.

۱۳۰۸- گزینهٔ ۳ توجـه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$. تابع f در $x=1$ و $x=-1$ مشـتق‌پذیر نیسـت و $f'(0)=0$. پس تابع سـه نقطهٔ بحرانی دارد.

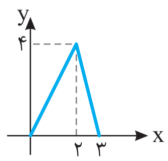
۱۳۰۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=|x^۲(x-۳)|=|x^۲||x-۳|=x^۲|x-۳|$$

$$f(x)=\begin{cases} x^۳-۳x^۲ & x\geq ۳ \\ -x^۳+۳x^۲ & x\leq ۳ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۶x & x>۳ \\ -۳x^۲+۶x & x<۳ \end{cases},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰,\ x=۲$$

همچنین تابع f در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست. پس $(۰,۰)$، $(۲,۴)$ و $(۳,۰)$ نقاط بحرانی تابع‌اند و مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با



$$\frac{۳\times ۴}{۲}=۶$$

۱۳۱۰- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطه‌های $x=۰$، $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases} -x+x^۲-۱ & x\leq -۱ \\ -x-x^۲+۱ & -۱<x\leq ۰ \\ x-x^۲+۱ & ۰<x\leq ۱ \\ x+x^۲-۱ & x>۱ \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases} -۱+۲x & x<-۱ \\ -۱-۲x & -۱<x<۰ \\ ۱-۲x & ۰<x<۱ \\ ۱+۲x & x>۱ \end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲},\ x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع f پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۳۱۱- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

پس نقاط بحرانی تابع نقاط $(۱,-۱)$ و $(-۱,۳)$ هستند که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر ۲ است.

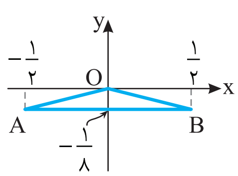
۱۳۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، طول نقاط بحرانی آن ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. از طرف دیگر

$$f'(x)=۸x^۳-۲x=۲x(۴x^۲-۱)\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۰,\ x=-\frac{۱}{۲},\ x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نقطه‌های بحرانی تابع f نقطه‌های $O(۰,۰)$، $A(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۸})$ و $B(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۸})$ هستند. از روی شکل زیر معلوم است که

$$AB=۱,\quad OA=OB=\sqrt{\frac{۱}{۸^۲}+\frac{۱}{۲^۲}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۸}$$

بنابراین محیط مثلث OAB برابر است با $۱+۲\times\frac{\sqrt{۱۷}}{۸}=۱+\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$.



۱۳۱۳- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\sqrt{۱-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{۱-۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین تابع دو نقطهٔ بحرانی به طول‌های $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ دارد.

۱۳۱۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید $D_f=(۲,+\infty)$ و اگر $x\in D_f$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{(x-۱)(x-۲)}}=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۳x+۲}}$$

بنابراین

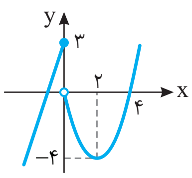
$$f'(x)=\frac{\frac{-(۲x-۳)}{۲\sqrt{x^۲-۳x+۲}}}{(x^۲-۳x+۲)}=-\frac{۲x-۳}{۲(x^۲-۳x+۲)^{\frac{۳}{۲}}},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

و چون $\frac{۳}{۲}$ در دامنهٔ تابع f نیست و تابع f در همهٔ نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد.

۱۳۱۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{۴-۲x}{۳\sqrt[۳]{(۴x-x^۲)^۲}}$. تابع f در $x=۰$ و $x=۴$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۲)=۰$. پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

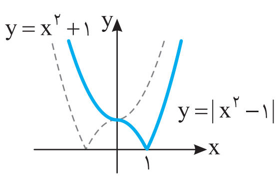
۱۳۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=۲x+\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$. تابع f در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۰)=۰$. پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۳۱۷- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و این تابع در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۲)=۰$. پس $(۰,۳)$ و $(۲,-۴)$ نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر -۱ است.



۱۳۱۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{\cos x}{۳\sqrt[۳]{\sin^۲ x}}$. تابع f در $x=۰$ مشتق ندارد (مشتق نامتناهی دارد). و در $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=-\frac{\pi}{۲}$ مشتق برابر صفر دارد. پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ دارد.

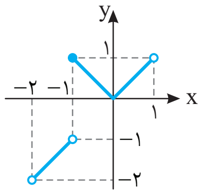
۱۳۱۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=|x^۲-۱|$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $f(x)=|-x^۲-۱|=x^۲+۱$. بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. پس تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع دو نقطهٔ بحرانی دارد.



۱۳۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x & -2<x<-1 \\ -x & -1\le x<0 \\ x & 0\le x<1 \end{cases}$$

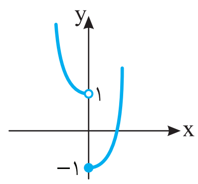
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و تابع f در $x=0$ و $x=-1$ نقطهٔ بحرانی دارد، زیرا در نقطهٔ $x=-1$ پیوسته نیست و مشتق‌پذیر هم نیست و در نقطهٔ $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد، پس مشتق‌پذیر نیست.



۱۳۲۱- گزینهٔ ۱ تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=2$ به‌ترتیب ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد. بنابراین f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۱۳۲۲- گزینهٔ ۳ تابع f' در نقطه‌های -4، -1، 2 و 5 برابر صفر است و در نقطه‌های -4، -1 و 2 تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه، این نقطه‌ها، نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع f هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۸ است.

۱۳۲۳- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که تابع فقط در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد و در هیچ نقطه‌ای ماکزیمم نسبی ندارد.



۱۳۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

چون $f'(3)=0$ و تغییر علامت تابع f' در نقطهٔ $x=3$ از منفی به مثبت است، پس تابع f در نقطهٔ $x=3$ مینیمم نسبی دارد.

۱۳۲۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2=5x^2(x^2-3)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$$

عبارت $f'(x)$ در $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد ولی در $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ تغییر علامت می‌دهد. پس تابع f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی به طول‌های $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ دارد و حاصل‌ضرب طول آن‌ها برابر -3 است.

۱۳۲۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}\ ,\quad f'(x)=0 \Rightarrow x=0$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

پس تابع f در $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و این ماکزیمم برابر $f(0)=-1$ است.

۱۳۲۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[-\sqrt{3},0]\cup[\sqrt{3},+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}}\ ,\quad f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & (\text{غ.ق.ق}) \\ x=-1 \end{cases}$$

پس $x=-1$ طول اکسترمم نسبی تابع f است که با توجه به‌صورت مسئله طول ماکزیمم نسبی است. بنابراین $f(-1)=\sqrt{2}$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع است.

۱۳۲۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}\ ,\quad f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$$

پس $x=4$ طول اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(4)=-4$.

۱۳۲۹- گزینهٔ ۱ تابع f مشتق‌پذیر است، پس در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی آن باید مشتق تابع برابر صفر باشد:

$$f'(x)=-2\sin x\cos x-2\cos x=-2\cos x(1+\sin x)$$

$$f'(\frac{\pi}{6})\neq 0\ ,\quad f'(\frac{\pi}{2})=0\ ,\quad f'(-\frac{\pi}{2})=0\ ,\quad f'(\frac{3\pi}{2})=0$$

پس $x=\frac{\pi}{6}$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f نیست.

۱۳۳۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=2\sin x\cos x+\sin x=\sin x(2\cos x+1)$$

بنابراین

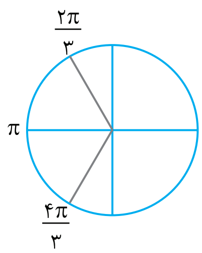
$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\pi \\ \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\frac{2\pi}{3},\ x=\frac{4\pi}{3}$$

از طرف دیگر،

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین تابع f در نقاط به طول $\frac{2\pi}{3}$، π و $\frac{4\pi}{3}$ اکسترمم نسبی دارد، که مجموع آن‌ها برابر 3π است.



۱۳۳۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

x	$-\infty$		-2		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

تابع f' در نقطه‌های -2، -1 و صفر برابر صفر است و در این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع f در نقطه‌های -2، -1 و صفر اکسترمم نسبی دارد. مجموع طول این نقطه‌ها -3 است.

۱۳۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x^۲+۸x=۴x(x^۲-۳x+۲)=۴x(x-۱)(x-۲)$$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

پس تابع f در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۲$ مینیمم نسبی و در نقطهٔ $x=۱$ ماکزیمم نسبی دارد. مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر است با $f(۱)=-۱$.

۱۳۳۳- گزینهٔ ۴ ابتدا طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{x^۲+۳-۲x(x+۱)}{(x^۲+۳)^۲}=\frac{-x^۲-۲x+۳}{(x^۲+۳)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=-۳,\quad x=۱$$

پس تابع f در نقاط $x=-۳$ و $x=۱$ اکسترمم نسبی دارد.

$$f(-۳)f(۱)=-\frac{۲}{۱۲}\times\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۱۲}$$

۱۳۳۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[۰,+\infty)$ و

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-۳}{۲\sqrt{x}}=\frac{۲x+x-۳}{۲\sqrt{x}}=\frac{۳x-۳}{۲\sqrt{x}},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

پس $x=۱$ طول نقطهٔ اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع f است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(۱)=-۲$.

۱۳۳۵- گزینهٔ ۴ تابع f مشتق‌پذیر است، پس در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی آن، مشتق تابع برابر صفر است:

$$f'(x)=۲\sin x\cos x-\cos x=\cos x(۲\sin x-۱)$$

$$f'(\frac{\pi}{۶})=۰,\quad f'(\frac{\pi}{۲})=۰,\quad f'(\frac{۵\pi}{۶})=۰,\quad f'(\pi)\neq۰$$

۱۳۳۶- گزینهٔ ۲ مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=-۲\sin x\cos x+\sin x=\sin x(۱-۲\cos x)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\ (\text{غ.ق.ق})\\ \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

x	۰		$\frac{\pi}{۳}$		π
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(\frac{\pi}{۲})=۱>۰$)

پس تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۳}$ مینیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی برابر $f(\frac{\pi}{۳})=-\frac{۱}{۴}$ است.

۱۳۳۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=x^۲+۲ax+۱$. ضریب $x^۲$ در $f'(x)$ مثبت است، پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد، بنابراین برای اینکه تابع f اکسترمم نسبی نداشته باشد، باید $f'(x)\geq۰$، یعنی

$$\Delta\leq۰\Rightarrow۴a^۲-۴\leq۰\Rightarrow a^۲\leq۱\Rightarrow-۱\leq a\leq۱$$

۱۳۳۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=۷$ مشتق‌پذیر است و برای اینکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(۷)=۰$. پس

$$f'(x)=a-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۴}}\Rightarrow f'(۷)=۰\Rightarrow a-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۸^۴}}=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۴۸}$$

۱۳۳۹- گزینهٔ ۲ چون $(-۱,-۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است و تابع f در نقطهٔ -۱ مشتق‌پذیر است، پس $f(-۱)=-۱$ و $f'(-۱)=۰$. از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{a(x^۲+۱)-۲x(ax+b)}{(x^۲+۱)^۲}$.

بنابراین

$$\begin{cases}f(-۱)=-۱\\ f'(-۱)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-a+b}{۲}=-۱\\ \frac{۲a+۲(-a+b)}{۴}=۰\end{cases}\Rightarrow a=۲,\ b=۰$$

پس $a+b=۲$.

۱۳۴۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=(۰,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{k\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(kx+۱)}{x}=\frac{۲kx-(kx+۱)}{۲x\sqrt{x}}=\frac{kx-۱}{۲x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow kx=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{k}$$

پس طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f برابر $\frac{۱}{k}$ است.

اکنون توجه کنید که

$$f(\frac{۱}{k})=۴\Rightarrow\frac{k\times\frac{۱}{k}+۱}{\sqrt{\frac{۱}{k}}}=\frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{k}}}=۴\Rightarrow۲\sqrt{k}=۴\Rightarrow k=۴$$

۱۳۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۶(x^۲-x-۲),\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=-۱,x=۲$$

چون f' در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۲$ تغییر علامت می‌دهد، پس نقاط $(-۱,-۱)$ و $(۲,-۲۸)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۲۸+۱)^۲}=\sqrt{۷۳۸}$.

۱۳۴۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۲x(x^۲-x+۱)-(۲x-۱)(x^۲+۱)}{(x^۲-x+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲-x+۱)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

پس تابع در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ اکسترمم نسبی دارد. حاصل‌جمع مقادیر $f(۱)$ و $f(-۱)$ را می‌خواهیم:

$$f(۱)=۲,f(-۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f(۱)+f(-۱)=\frac{۸}{۳}$$

۱۳۴۳- گزینهٔ ۲ مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$۱=\frac{۱+a}{۱+b}\Rightarrow a=b,\quad f(x)=\frac{x+a}{x^۲+a}$$

از طرف دیگر چون تابع f در دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی برابر صفر است:

$$f'(x)=\frac{x^۲+a-۲x(x+a)}{(x^۲+a)^۲}=\frac{-x^۲-۲ax+a}{(x^۲+a)^۲}$$

$$f'(۱)=\frac{-۱-a}{(a+۱)^۲}=۰\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین $a=b=-۱$ و در نتیجه $a+b=-۲$.

۱۳۴۴- گزینهٔ ۳ ابتدا طول نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{۵x}{x^۲+k^۲}$$

$$f'(x)=\frac{۵(x^۲+k^۲-۲x^۲)}{(x^۲+k^۲)^۲}=\frac{۵(k^۲-x^۲)}{(x^۲+k^۲)^۲}\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm k$$

پس نقاط $A(k,\frac{۵}{۲k})$ و $B(-k,\frac{-۵}{۲k})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

اختلاف مقدار ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع برابر است با $|\frac{۵}{۲k}-\frac{-۵}{۲k}|$. بنابراین

$$|\frac{۵}{k}|=۱۰\Rightarrow|k|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow k=\pm\frac{۱}{۲}$$

۱۳۴۵- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f'(x)=۳ax^۲-b\Rightarrow f'(-۱)=۳a-b=۰$$

از طرف دیگر مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$f(-۱)=۴\Rightarrow -a+b+۲=۴\Rightarrow -a+b=۲$$

بنابراین $a=۱$ و $b=۳$، در نتیجه $ab=۳$.

۱۳۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۳a^۲x^۲+۴ax+۱$ و چون تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد و در این نقطه مشتق‌پذیر است، پس $f'(-۱)=۰$. در نتیجه

$$۳a^۲-۴a+۱=۰\Rightarrow a=۱,\quad a=\frac{۱}{۳}$$

اگر $a=۱$، آن‌گاه $f'(x)=۳x^۲+۴x+۱$ و

x	$-\infty$		-۱		$-\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد. اگر $a=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه

$f'(x)=\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۴}{۳}x+۱$ و

x	$-\infty$		-۳		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ مینیمم نسبی دارد. بنابراین $a=۱$ تنها مقدار ممکن برای a است.

۱۳۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=[۳,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x-۳}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲\sqrt{x-۳}=\sqrt{x}\Rightarrow ۴(x-۳)=x\Rightarrow x=۴$$

پس $x=۴$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(۴)=۳$.

۱۳۴۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۱-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}-۱}{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow (x+۲)^۲=۱\Rightarrow x=-۱\ ,\ x=-۳$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل داده شده است.

x	$-\infty$		-۳		-۲		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	ت ن	−	۰	+	

بنابراین $x=-۳$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر $f(-۳)=۰$ است.

۱۳۴۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که تابع f در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ \cos x=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

پس جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

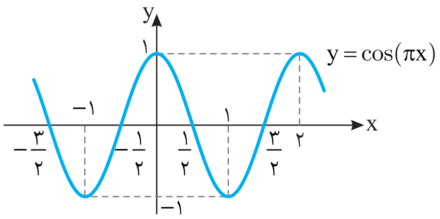
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{۲}$		۰		$\frac{\pi}{۲}$		π
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	۰	−	

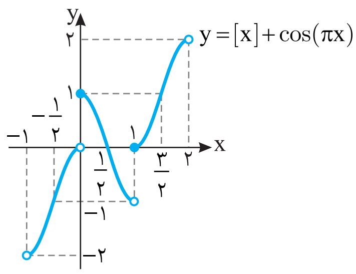
توجه کنید که مقدار $\cos x$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ مثبت و در بازه‌های $(-\pi,-\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ منفی است. پس تابع f در نقاط $x=-\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی دارد.

۱۳۵۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-۱+\cos(\pi x) & -۱<x<۰\\ \cos(\pi x) & ۰\le x<۱\\ ۱+\cos(\pi x) & ۱\le x<۲\end{cases}$$

اکنون نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=\cos(\pi x)$ رسم می‌کنیم:





بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد.

۱۳۵۱- گزینهٔ ۲ چون تابع f همه جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی تابع f جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۹=۳(x-۱)(x-۳)$$

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

بنابراین تابع f در نقطهٔ ۱ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ ۳ مینیمم نسبی دارد. یعنی $a=۳$ و $b=۱$، پس $a-b=۲$.

۱۳۵۲- گزینهٔ ۱ چون تابع f روی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس نقطه‌های اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. بنابراین $f'(1)=0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x-a)(x+1)-(1)(x^2-ax)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-a}{(x+1)^2}$$

$$f'(1)=0\Rightarrow\frac{1+2-a}{4}=0\Rightarrow a=3$$

۱۳۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است.

۱۳۵۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=[\frac{1}{2},+\infty)$ و

$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{2x-1}=1\Rightarrow 2x-1=1\Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(1)=0$.

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$	

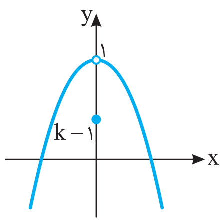
۱۳۵۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+36x=x(4x^2+3ax+36)$$

برای اینکه تابع f سه نقطهٔ اکسترمم نسبی داشته باشد باید علامت $f'(x)$ در سه نقطه تغییر کند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=0$ سه جواب داشته باشد. چون $x=0$ یک جواب این معادله است، پس باید معادلهٔ $4x^2+3ax+36=0$ دو جواب غیرصفر داشته باشد. پس

$$\Delta=9a^2-16\times36>0\Rightarrow a^2>\frac{36\times16}{9}\Rightarrow|a|>8$$

۱۳۵۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر است که نقطهٔ $(0,k-1)$ هرجایی روی محور y می‌تواند باشد. چون تابع مینیمم نسبی دارد، پس این نقطه باید پایین‌تر از نقطهٔ $(0,1)$ باشد چون در غیر این صورت تابع در نقطهٔ $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد. بنابراین



$$k-1<1\Rightarrow k<2$$

۱۳۵۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a\sin\frac{2\pi}{3}-b\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=a\sqrt{3}-\sqrt{3}\qquad(1)$$

از طرف دیگر، مقدار مشتق تابع در نقطهٔ اکسترمم نسبی در صورت وجود برابر صفر است:

$$f'(x)=2a\cos2x+b\sin x$$

$$f'(\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow2a\cos\frac{2\pi}{3}+b\sin\frac{\pi}{3}=0$$

$$-a+\frac{b\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow b=\frac{2}{\sqrt{3}}a\qquad(2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $b=2\sqrt{3}$ و $a=3$.

۱۳۵۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=1-4\sin x\cos x=1-2\sin2x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sin2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\2x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{12}\\x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
			max		min		max		min		

بنابراین تابع f در بازهٔ $(0,2\pi)$ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۱۳۵۹- گزینهٔ ۳ ابتدا طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\cos^2x-\cos x+1$$

$$f'(x)=-2\sin x\cos x+\sin x=\sin x(1-2\cos x)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=\pi\\\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			min نسبی		max نسبی		

پس تابع f در نقطهٔ $x=\pi$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی آن برابر $f(\pi)$، یعنی ۳ است.

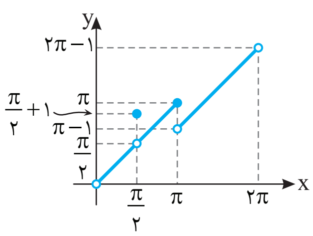
۱۳۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$x\in(0,\pi]-\{\frac{\pi}{2}\}\Rightarrow0\le\sin x<1\Rightarrow[\sin x]=0\Rightarrow f(x)=x$$

$$x\in(\pi,2\pi)\Rightarrow-1\le\sin x<0\Rightarrow[\sin x]=-1\Rightarrow f(x)=x-1$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}+1$$

پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. واضح است که این تابع در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ ماکزیمم نسبی دارد ولی مینیمم نسبی ندارد.



۱۳۶۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)=0\Rightarrow x=0,\ x=4\ (\text{غ.ق.ق})$$

پس برای مشخص کردن مقدار مینیمم مطلق باید مقادیر $f(0)$، $f(3)$ و $f(-1)$ را مقایسه کنیم: $f(0)=0$، $f(-1)=-7$ و $f(3)=-27$. پس مقدار مینیمم مطلق تابع برابر -27 است.

۱۳۶۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f همه جا مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm1$$

بنابراین باید مقادیر $f(1)$، $f(-1)$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(1)=k-2$، $f(-1)=k+2$ و $f(2)=k+2$. پس $k+2$ ماکزیمم مطلق و $k-2$ مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[-1,2]$ هستند. بنابراین

$$k+2+k-2=4\Rightarrow k=2$$

۱۳۶۳- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1-2x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\ ,\qquad f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$$

پس باید مقادیر $f(2)$، $f(1)$ و $f(-1)$ رامقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(1)=1$، $f(-1)=-1$ و $f(2)=\frac{4}{5}$. پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۱ و مینیمم مطلق آن برابر -1 است و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -1 است.

۱۳۶۴- گزینهٔ ۴ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=5x^4-4x^3-9x^2=x^2(5x^2-4x-9)$$

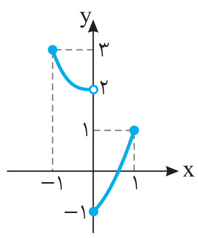
$$f'(x)=0\Rightarrow x=0\ ,\quad x=-1\ ,\quad x=\frac{9}{5}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین باید مقادیر $f(-2)$، $f(-1)$ و $f(1)$ را مقایسه کنیم تا مقدار ماکزیمم مطلق تابع معلوم شود (توجه کنید که چون f' در نقطهٔ $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد، مقدار $f(0)$ را حساب نمی‌کنیم):

$$f(-2)=-15\ ,\quad f(-1)=10\ ,\quad f(1)=6$$

بنابراین $(-1,10)$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-2,1]$ است. بنابراین $a=-1$، $b=10$ و $a+b=9$.

۱۳۶۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. از روی این شکل معلوم است که ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق تابع f برابر -1 است، پس مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



راه‌حل دوم تابع $y=2-x^3$ روی بازه $[-1,0)$ اکیداً نزولی است $(y'=-3x^2<0)$ و مقادیرش در بازهٔ $(f(0),f(-1)]$ یعنی $(2,3]$ هستند. تابع $y=x^2+x-1$ روی بازهٔ $[0,1]$ اکیداً صعودی است $(y'=2x+1>0)$ و مقادیرش در بازهٔ $[f(0),f(1)]$ یعنی $[-1,1]$ هستند. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق آن برابر -1 است، که مجموعشان می‌شود ۲.

۱۳۶۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x & 0\le x\le 1\\ x^3+3x & -1\le x\le 0\end{cases}\ ,\quad f'(x)=\begin{cases}3x^2-3 & 0<x<1\\ 3x^2+3 & -1<x<0\end{cases}$$

پس تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین باید مقادیر $f(1)$، $f(-1)$ و $f(0)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند:

$$f(0)=0,\quad f(1)=-2,\quad f(-1)=-4$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر صفر و مینیمم مطلق آن برابر -4 است و مجموع این دو مقدار برابر -4 است.

۱۳۶۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}-(x^2+4x) & -1\le x<0\\ -(x^2-4x) & 0\le x\le 3\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-(2x+4) & -1<x<0\\ -(2x-4) & 0<x<3\end{cases}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=2$$

اکنون توجه کنید که $f(-1)=3$، $f(0)=0$، $f(2)=4$ و $f(3)=3$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۴ است.

۱۳۶۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[0,8]$ و تابع f روی بازهٔ $(0,8)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}=\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{8-x}=\sqrt{x}\Rightarrow 8-x=x\Rightarrow x=4$$

پس باید مقادیر $f(0)$، $f(8)$ و $f(4)$ را مقایسه کنیم تا کمترین و بیشترین مقدار تابع معین شوند:

$$f(0)=\sqrt{8}\ ,\quad f(8)=\sqrt{8}\ ,\quad f(4)=4$$

بنابراین ۴ و $\sqrt{8}$ به‌ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $8\sqrt{2}$ است.

۱۳۶۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-2,2]$ و تابع f روی بازهٔ $(-2,2)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=-x$$

$$\xrightarrow{x\le 0}4-x^2=x^2\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\ (\text{غ.ق.ق})\\ x=-\sqrt{2}\end{cases}$$

بنابراین باید $f(-2)$، $f(2)$ و $f(-\sqrt{2})$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع در بازهٔ $[-2,2]$ مشخص شوند: $f(-2)=-2$، $f(2)=2$ و $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$. بنابراین $-2\sqrt{2}$ کمترین مقدار و ۲ بیشترین مقدار تابع است و نسبت آن‌ها برابر $-\sqrt{2}$ است.

۱۳۷۰- گزینهٔ ۱ تابع f تابعی مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=2\cos 2x+2\cos x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \cos 2x+\cos x=0\Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

$$(\cos x+1)(2\cos x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=-1 \text{ (غ.ق.ق)}\\ \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

پس باید مقادیر $f(0)$، $f(-\frac{\pi}{2})$ و $f(-\frac{\pi}{3})$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},0]$ مشخص شود:

$$f(0)=0,\quad f(-\frac{\pi}{2})=-2,\quad f(-\frac{\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

پس بیشترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},0]$ برابر صفر است.

۱۳۷۱- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=4x^3+32x,\quad f'(x)=0\Rightarrow 4x(x^2+8)=0\Rightarrow x=0$$

پس باید مقادیر $f(1)$، $f(-1)$ و $f(0)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع را معین کنیم: $f(0)=1$، $f(1)=18$ و $f(-1)=18$. پس ماکزیمم مطلق تابع ۱۸ و مینیمم مطلق آن ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۷ است.

۱۳۷۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=2+\frac{x^2}{x+1}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=-2 \text{ (غ.ق.ق)}$$

بنابراین باید مقادیر $f(-\frac{1}{2})$، $f(0)$ و $f(2)$ را حساب کنیم:

$$f(-\frac{1}{2})=\frac{5}{2},\quad f(0)=2,\quad f(2)=\frac{10}{3}$$

در نتیجه، کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[-\frac{1}{2},2]$ برابر ۲ است.

۱۳۷۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=3x^2-6x$. پس

$$3x^2-6x=0\Rightarrow x=0,\ x=2$$

پس برای پیدا کردن مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-1,2]$ باید مقادیر $f(0)$، $f(2)$ و $f(-1)$ را مقایسه کنیم. چون $f(0)=a$، $f(-1)=a-4$ و $f(2)=a-4$، بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-1,2]$ برابر $a-4$ است. پس $a-4=4\Rightarrow a=8$

۱۳۷۴- گزینهٔ ۲ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=10x^9-10=10(x^9-1)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=1$$

بنابراین باید مقادیر $f(1)$، $f(-1)$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا مقدار مینیمم مطلق تابع معلوم شود: $f(1)=-8$، $f(-1)=12$ و $f(2)=1005$. پس $(1,-8)$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-1,2]$ است. بنابراین $a=1$، $b=-8$ و $a+b=-7$.

۱۳۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=3mx^2+6mx$. چون

$$f''(x)=6mx+6m,\quad f''(x)=0\Rightarrow x=-1$$

پس تنها نقطهٔ بحرانی تابع f' نقطهٔ $x=-1$ است و بیشترین مقدار تابع f' به‌ازای $x=-1$ به‌دست‌می‌آید: $f'(-1)=12\Rightarrow 3m-6m=12\Rightarrow m=-4$

۱۳۷۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2 & 2\le x\le 3\\ -x^2+3x-2 & 0\le x<2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-3 & 2<x<3\\ -2x+3 & 0<x<2\end{cases}$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(\frac{3}{2})=0$. پس باید مقادیر $f(0)$، $f(3)$، $f(2)$ و $f(\frac{3}{2})$ را مقایسه کنیم تا مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع به‌دست آیند: $f(0)=-2$، $f(3)=2$، $f(2)=0$ و $f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$. بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر -2 است و اختلاف این دو مقدار برابر ۴ است.

۱۳۷۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[0,5]$ و تابع f روی بازهٔ $(0,5)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}=\frac{2\sqrt{5-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2\sqrt{5-x}=\sqrt{x}\Rightarrow 4(5-x)=x\Rightarrow x=4$$

پس باید مقادیر $f(0)$، $f(4)$ و $f(5)$ را با هم مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به‌دست آیند:

$$f(0)=\sqrt{5},\quad f(4)=5,\quad f(5)=2\sqrt{5}$$

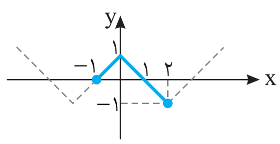
پس بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به‌ترتیب برابر است با ۵ و $\sqrt{5}$. بنابراین حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f برابر $5\sqrt{5}$ است.

۱۳۷۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}$، پس

$$f'(x)=0\Rightarrow x=2$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$، پس کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $(0,+\infty)$ به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با $f(2)=12$.

۱۳۷۹- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و حداکثر مقدار تابع در بازهٔ $[-1,2]$ برابر ۱ است.



۱۳۸۰- گزینهٔ ۴ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=2\sin x\cos x+\cos x=\cos x(1+2\sin x)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \cos x(2\sin x+1)=0\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}$$

پس باید مقادیر $f(-\frac{\pi}{2})$، $f(0)$ و $f(-\frac{\pi}{6})$ را مقایسه کنیم تا کمترین مقدار تابع معین شود:

$$f(0)=0,\quad f(-\frac{\pi}{2})=0,\quad f(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{4}$$

پس $-\frac{1}{4}$ کمترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},0]$ است.

۱۳۸۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=4-x$ و در نتیجه

$$xy=x(4-x)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع $f(x)=4x-x^2$ روی بازهٔ $[0,1]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=4-2x\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=2\ \ (\text{غ.ق.ق})$$

$$f(0)=0,\quad f(1)=3=f_{max}$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن xy برابر ۳ است.

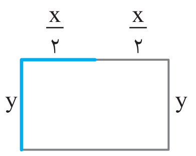
۱۳۸۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول ضلع‌های باغچه x و y باشند (شکل را ببینید). در این صورت، طبق فرض $x+y+\frac{x}{2}=120$، یعنی $\frac{3}{2}x+y=120$.

بنابراین $\text{مساحت باغچه}=xy=x(120-\frac{3}{2}x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x(120-\frac{3}{2}x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=120-3x,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=40$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت باغچه به‌ازای $x=40$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\text{مساحت باغچه}=40\times 60=2400$$



۱۳۸۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید شعاع‌های دایره‌ها r_1 و r_2 باشد. در این صورت

$$\text{مجموع محیط‌ها}=2\pi r_1+2\pi r_2=10\pi\Rightarrow r_1+r_2=5$$

از طرف دیگر،

$$\text{مجموع مساحت‌ها}=\pi r_1^2+\pi r_2^2=\pi(r_1^2+(5-r_1)^2)=\pi(2r_1^2-10r_1+25)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(r_1)=2r_1^2-10r_1+25$ را پیدا کنیم. چون

$$f'(r_1)=4r_1-10,\quad f'(r_1)=0\Rightarrow r_1=\frac{5}{2}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f وقتی به‌دست می‌آید که $r_1=\frac{5}{2}$ و برابر است با $\frac{25}{2}$. در نتیجه مجموع مساحت‌های دایره‌ها حداقل $\frac{25\pi}{2}$ است.

۱۳۸۴- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x-x)^2+(x+6-3)^2}=\sqrt{5x^2+6x+9}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{5x^2+6x+9}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که همواره $5x^2+6x+9>0$ و

$$f'(x)=\frac{10x+6}{2\sqrt{5x^2+6x+9}},\quad f'(x)=0\Rightarrow x=-\frac{3}{5}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{3}{5}$ به‌دست می‌آید.

۱۳۸۵- گزینهٔ ۲ مختصات نقطهٔ B به‌صورت (x,x^2) است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-0)^2}=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$$

اگر $y=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$، آن‌گاه $y'=\frac{2x^3+x-3}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}$ و در نتیجه

$$y'=0\Rightarrow 2x^3+x-3=0\Rightarrow 2(x^3-1)+(x-1)=0$$

$$(x-1)(2x^2+2x+3)=0\Rightarrow x=1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع y به‌ازای $x=1$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب، B نقطهٔ $(1,1)$ است.

۱۳۸۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که خط d از نقطه‌های $(4,0)$ و $(0,4)$ گذشته است، پس معادله‌اش به‌صورت $y=4-x$ است. در نتیجه

$$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2=2(x^2-4x+8)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=2(x^2-4x+8)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=4x-8\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=2$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۸.

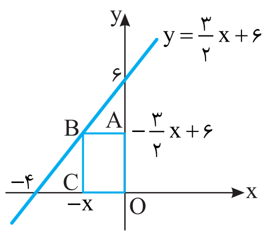
۱۳۸۷- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطهٔ B هم برابر $-x$ است. نقطهٔ B روی خطی است که از نقطه‌های $(-4,0)$ و $(0,6)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط $y=\frac{3}{2}x+6$ است.

بنابراین عرض نقطهٔ B برابر $-\frac{3}{2}x+6$ است. به این ترتیب،

$$\text{مساحت مستطیل OABC}=x(-\frac{3}{2}x+6)$$

پس باید بیشترین مقدار تابع $y=x(-\frac{3}{2}x+6)$ را پیدا کنیم. چون $y'=-3x+6$، اگر $y'=0$، آن‌گاه $x=2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل $OABC$ به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$2\times 3=6$$



۱۳۸۸- گزینهٔ ۴ تابع هزینه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$C=100(xl)+60(2xh+2lh)=100xl+120h(x+l)$$

$$=100x(2x)+120h(x+2x)=200x^2+360xh\quad(1)$$

اکنون توجه کنید که

$$\text{حجم مخزن}=10\Rightarrow x\times l\times h=10\Rightarrow x(2x)h=10\Rightarrow h=\frac{5}{x^2}\quad(2)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید

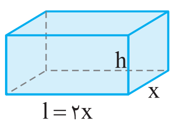
$$C(x)=200x^2+360x(\frac{5}{x^2})=200x^2+\frac{1800}{x},\quad x\in(0,+\infty)$$

نقطهٔ بحرانی تابع C را به‌دست می‌آوریم:

$$C'(x)=0\Rightarrow 400x-\frac{1800}{x^2}=0\Rightarrow \frac{400x^3-1800}{x^2}=0$$

$$400x^3-1800=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

پس کمترین مقدار تابع C به ازای $x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ به‌دست می‌آید.



۱۳۸۹- گزینهٔ ۴ اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، آن‌گاه

$C=2000t+(4v^2)t$:هزینهٔ t ساعت حرکت

$C=2000(\frac{x}{v})+4v^2(\frac{x}{v})$:هزینهٔ x کیلومتر حرکت

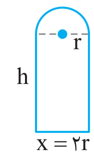
$C(v)=\frac{2000}{v}+4v$:هزینهٔ ۱ کیلومتر حرکت

بنابراین

$$C'(v)=-\frac{2000}{v^2}+4\ ,\quad C'(v)=0\Rightarrow v^2=500\Rightarrow v=10\sqrt{5}$$

۱۳۹۰- گزینهٔ ۴ باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{محیط}=9\Rightarrow 2h+x+\frac{1}{2}(2\pi r)=9\Rightarrow 2h+2r+\pi r=9$$



$$h=\frac{9}{2}-r-\frac{\pi r}{2}$$

مساحت پنجره: S= مساحت مستطیل + مساحت نیم‌دایره

$$S(r)=2r(\frac{9}{2}-r-\frac{\pi r}{2})+\frac{1}{2}\pi r^2=-(\frac{\pi+4}{2})r^2+9r$$

$$S'(r)=-(\pi+4)r+9\ ,\quad S'(r)=0\Rightarrow r=\frac{9}{\pi+4}$$

۱۳۹۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $y=\frac{4}{x}$ و در نتیجه $x+y=x+\frac{4}{x}$.

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}$ با دامنهٔ $[\frac{1}{2},3]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2,\ x=-2\ \text{(غ.ق.ق)}$$

پس برای پیدا کردن مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[\frac{1}{2},3]$ باید مقادیر $f(\frac{1}{2})$، $f(3)$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم: $f(\frac{1}{2})=\frac{17}{2}$، $f(3)=\frac{13}{3}$ و $f(2)=4=f_{min}$.

پس کمترین مقدار $x+y$ برابر ۴ است.

۱۳۹۲- گزینهٔ ۲ چون $x-y=2$، پس $y=x-2$، در نتیجه

$$x^3-y^3=x^3-(x-2)^3\Rightarrow f(x)=6x^2-12x+8\Rightarrow f'(x)=12x-12$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 12x-12=0\Rightarrow x=1$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $x=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(1)=2$$

۱۳۹۳- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم طول ضلع زمین در امتداد شمال- جنوب برابر x و در امتداد شرق- غرب برابر y باشد. در این صورت، $xy=10000$ و هزینهٔ نرده‌کشی برابر است با

$$S=15000(2x)+60000(2y)=30000x+120000y=3\times10^4x+\frac{12\times10^8}{x}$$

بنابراین $S'=3\times10^4-\frac{12\times10^8}{x^2}$ و اگر $S'=0$، $x=200$. بنابراین کمترین مقدار تابع S به‌ازای $x=200$ به‌دست می‌آید. در این حالت، طول یک ضلع زمین برابر ۲۰۰ است و طول ضلع دیگر زمین برابر است با $\frac{10000}{200}=50$.

بنابراین محیط زمین برابر است با $2(200+50)=500$.

۱۳۹۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x_1+x_2=-1$ و

$$x_1x_2=-(m^2+m+1)$$

بنابراین

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)$$
$$=-(1+3(m^2+m+1))=-3m^2-3m-4$$

بنابراین باید بیشترین مقدار ممکن تابع $f(m)=-3m^2-3m-4$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(m)=-6m-3\ ,\quad f'(m)=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{m\to-\infty}f(m)=\lim_{m\to+\infty}f(m)=-\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به ازای $m=-\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(-\frac{1}{2})=-\frac{13}{4}$$

۱۳۹۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید $OB=BC=x$. توجه کنید که با نمادگذاری شکل زیر $s=\alpha+t$، در نتیجه

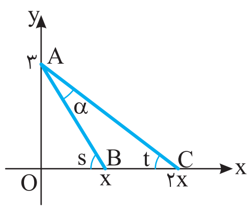
$$\tan s=\tan(\alpha+t)=\frac{\tan\alpha+\tan t}{1-\tan\alpha\tan t}\Rightarrow\frac{3}{x}=\frac{\tan\alpha+\frac{3}{2x}}{1-\tan\alpha\times\frac{3}{2x}}$$

بنابراین اگر فرض کنیم $y=\frac{3}{2x}$، به‌دست می‌آید

$$2y=\frac{\tan\alpha+y}{1-\tan\alpha\times y}\Rightarrow 2y-2y^2\tan\alpha=\tan\alpha+y\Rightarrow\tan\alpha=\frac{y}{1+2y^2}$$

اگر فرض کنیم $f(y)=\frac{y}{1+2y^2}$، آن‌گاه $f'(y)=\frac{1-2y^2}{(1+2y^2)^2}$، بنابراین

$$f'(y)=0\Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

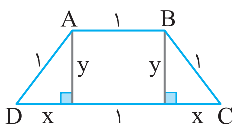


پس بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار $\tan\alpha$ به‌ازای $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ به‌دست می‌آید.

۱۳۹۶- گزینهٔ ۱ با نمادگذاری شکل زیر معلوم می‌شود که بنابر قضیهٔ فیثاغورس $y^2+x^2=1$، پس $y=\sqrt{1-x^2}$. در نتیجه مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{1}{2}y(1+1+2x)=y(1+x)=\sqrt{1-x^2}(1+x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}(1+x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{-x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}=\frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\quad x=-1\ \text{(غ.ق.ق)}$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع f به ازای $x=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید و در این صورت

$$CD=2$$

۱۳۹۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\text{حجم استوانه}=2\,lit=2000\,cm^3 \Rightarrow \pi r^2 h=2000 \Rightarrow h=\frac{2000}{\pi r^2}$$

سطح جانبی+مساحت قاعده=S=مساحت کل استوانه

$$S(r)=\pi r^2+2\pi r h=\pi r^2+2\pi r\left(\frac{2000}{\pi r^2}\right)=\pi r^2+\frac{4000}{r}$$

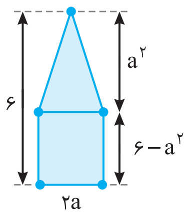
پس

$$S'(r)=2\pi r-\frac{4000}{r^2}\ ,\quad S'(r)=0\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}}$$

۱۳۹۸- گزینهٔ ۳ این پنج‌ضلعی از یک مستطیل به ابعاد $2a$، $6-a^2$ و یک مثلث به ارتفاع a^2 و قاعدهٔ $2a$ تشکیل شده است. بنابراین مساحت آن برابر است با $S(a)=2a(6-a^2)+\frac{1}{2}a^2(2a)=12a-a^3$. بنابراین

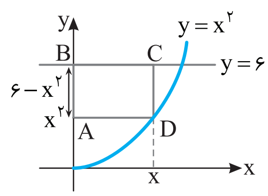
$$S'(a)=12-3a^2\ ,\quad S'(a)=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2\ ,\quad a=-2\ (\text{غ.ق.ق})$$

پس نقطهٔ $(2,16)$، نقطهٔ ماکزیمم تابع S است و در نتیجه بیشترین مقدار مساحت پنج‌ضلعی برابر ۱۶ است.



۱۳۹۹- گزینهٔ ۱ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت، چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^2$ است، پس عرض آن برابر x^2 است. به این ترتیب عرض نقطهٔ A هم برابر x^2 است و در نتیجه $AB=6-x^2$. بنابراین $2(x+6-x^2)=$ محیط مستطیل ABCD. اگر $y=2(x+6-x^2)$، آن‌گاه $y'=2-4x$ و در نتیجه $y'=0$، پس $x=\frac{1}{2}$.

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار محیط مستطیل ABCD به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $2(\frac{1}{2}+6-\frac{1}{4})=\frac{25}{2}$.



۱۴۰۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت طول نقطهٔ C هم برابر x است و چون نقطهٔ C روی خط $y=-x+3$ است، پس عرض آن برابر $-x+3$ است. بنابراین عرض نقطهٔ B هم برابر $-x+3$ است و چون این نقطه روی خط $y=x+5$ است، پس طول نقطهٔ B برابر است با $(-x+3)-5$، یعنی $-x-2$. به این ترتیب، $BC=x-(-x-2)=2x+2$.

در نتیجه

$$\text{مساحت مستطیل ABCD}=BC\times CD=(2x+2)(-x+3)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $y=(2x+2)(-x+3)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$y'=2(-x+3)+(-1)(2x+2)=-4x+4\ ,\quad y'=0\Rightarrow x=1$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن تابع y، یعنی بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD به ازای $x=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با $4\times 2=8$.

۱۴۰۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $y=4-x$ و چون $y<0$، پس $x>4$ و باید بیشترین مقدار تابع

$$f(x)=x^2+(4-x)^3\ ,\quad x\in(4,+\infty)$$

را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(x)=2x-3(4-x)^2=-3x^2+26x-48$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=6\ ,\ x=\frac{8}{3}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و چون

$$\lim_{x\to 4^+}f(x)=16\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\ ,\quad f(6)=28$$

پس بیشترین مقدار ممکن تابع f برابر ۲۸ است.

۱۴۰۲- گزینهٔ ۳ چون $2x+y=8$، پس $y=8-2x$ و

$$xy^3=x(8-2x)^3=8x(4-x)^3$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=8x(4-x)^3$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=8(4-x)^3-24x(4-x)^2=32(4-x)^2(1-x)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=4\ ,\ x=1$$

چون تابع f' در $x=4$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=1$ اکسترمم نسبی دارد. همچنین،

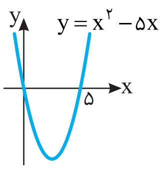
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به‌ازای $x=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(1)=216$$

۱۴۰۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید P نقطهٔ (x,y) باشد. چون نقطهٔ P روی سهمی به معادلهٔ $y=x^2-5x$ است، پس P نقطهٔ (x,x^2-5x) است و مجموع مختصات P برابر است با $x+x^2-5x=x^2-4x$.

البته چون P نقطه‌ای زیر محور x است، پس $0<x<5$.



به این ترتیب، باید کمترین مقدار تابع $f(x)=x^2-4x$ را روی بازهٔ $(0,5)$ پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=2x-4\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=2$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با $4-8=-4$.

۱۴۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{1}{2}(5-x)(12+x^2+8x+4)=\frac{1}{2}(5-x)(x^2+8x+16)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{2}(5-x)(x^2+8x+16)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(x^2+8x+16)+(5-x)(x+4)=-\frac{3}{2}x^2-3x+12$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=2\ ,\ x=-4\ (\text{غ.ق.ق})$$

توجه کنید که به‌ازای $x=-4$، طول قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{2}(3)(36)=54$$

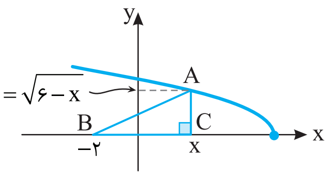
۱۴۰۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ A هم برابر x است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=\sqrt{۶-x}$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر با $\sqrt{۶-x}$ است. بنابراین $AC=\sqrt{۶-x}$. از طرف دیگر، $BC=x+۲$. به این ترتیب

مساحت مثلث ABC $=\frac{۱}{۲}(x+۲)\sqrt{۶-x}$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۲)\sqrt{۶-x}$ به‌ازای آن بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶-x}+\frac{۱}{۲}(x+۲)\frac{-۱}{۲\sqrt{۶-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\sqrt{۶-x}=\frac{x+۲}{۴\sqrt{۶-x}}\Rightarrow۶-x=\frac{x+۲}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$



۱۴۰۶- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^۲$ است، پس عرض نقطهٔ D برابر $x^۲$ است. در نتیجه، عرض نقطهٔ A نیز برابر $x^۲$ است. از طرف دیگر عرض نقطهٔ B برابر عرض نقطهٔ C است، پس عرض نقطهٔ B برابر ۹ است. به این ترتیب، $BA=۹-x^۲$. بنابراین

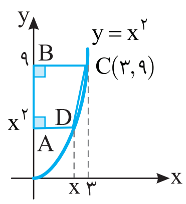
مساحت ذوزنقهٔ ABCD $=\frac{۱}{۲}AB(BC+AD)=\frac{۱}{۲}(۹-x^۲)(۳+x)$

اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}(۹-x^۲)(۳+x)$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{۳}{۲}(۳+x)(۱-x)$، پس

$f'(x)=۰\Rightarrow x=۱$ (توجه کنید که $x>۰$)

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ ABCD به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(۹-۱)(۳+۱)=۱۶$$



۱۴۰۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید طول ضلع‌های نظیر رأس قائمه در این مثلث x و y باشند. در این صورت $x^۲+y^۲=۴$. از طرف دیگر،

مساحت مثلث $=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}x\sqrt{۴-x^۲}$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x\sqrt{۴-x^۲}$ را پیدا کنیم $(۰<x<۲)$. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴-x^۲}-\frac{x^۲}{۲\sqrt{۴-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۴-x^۲}=\frac{x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}\Rightarrow۴-x^۲=x^۲\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

چون $\lim_{x\to۰^+}f(x)=\lim_{x\to۲^-}f(x)=۰$، پس بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث مورد نظر به‌ازای $x=\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۱$.

۱۴۰۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید (x,y) نقطه‌ای روی خط $y=۴x+۲$ باشد. فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(۴x+۲)^۲}=\sqrt{۱۷x^۲+۱۶x+۴}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۱۷x^۲+۱۶x+۴}$ را پیدا کنیم.

$$f'(x)=\frac{۳۴x+۱۶}{۲\sqrt{۱۷x^۲+۱۶x+۴}},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۸}{۱۷}$$

پس $y=۴x+۲=\frac{۲}{۱۷}$، یعنی نقطهٔ مورد نظر $(-\frac{۸}{۱۷},\frac{۲}{۱۷})$ است.

۱۴۰۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ B برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطهٔ A هم برابر $-x$ است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=x^۳+۸$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر است با $۸-x^۳$. بنابراین

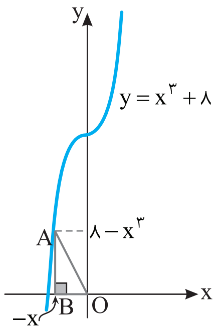
مساحت مثلث OAB $=\frac{۱}{۲}x(۸-x^۳)$

اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}x(۸-x^۳)$، آن‌گاه $f(x)=۴x-\frac{x^۴}{۲}$، پس $f'(x)=۴-۲x^۳$.

در نتیجه $f'(x)=۰\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲}$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث OAB وقتی به‌دست می‌آید که $x=\sqrt[۳]{۲}$ و برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۲}(۶)=۳\sqrt[۳]{۲}$$



۱۴۱۰- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم است که زاویه‌های EAB و CBF هر دو متمم زاویهٔ ABE هستند، پس با هم برابرند: $E\hat{A}B=\alpha$. اکنون توجه کنید که

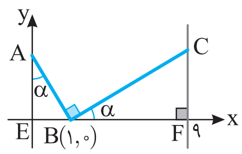
$$\triangle AEB:\sin\alpha=\frac{EB}{AB}\Rightarrow AB=\frac{۱}{\sin\alpha}$$

$$\triangle BFC:\cos\alpha=\frac{BF}{BC}\Rightarrow BC=\frac{۸}{\cos\alpha}$$

بنابراین $AB+BC=\frac{۱}{\sin\alpha}+\frac{۸}{\cos\alpha}$. بنابراین باید مشخص کنیم که وقتی تابع $f(x)=\frac{۱}{\sin\alpha}+\frac{۸}{\cos\alpha}$ کمترین مقدار ممکن است، مقدار $\tan\alpha$ چقدر است. توجه کنید که

$$f'(x)=-\frac{\cos\alpha}{\sin^۲\alpha}+\frac{۸\sin\alpha}{\cos^۲\alpha}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\sin^۲\alpha}=\frac{۸\sin\alpha}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\frac{\sin^۳\alpha}{\cos^۳\alpha}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۲}$$



۱۴۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
f'		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین تابع f' روی بازهٔ $(-۲,۱)$ اکیداً نزولی است، در نتیجه جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-۲,۱)$ رو به پایین است. روی بقیهٔ بازه‌ها چنین نیست.

۱۴۱۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x-۲-x+۱}{(x-۲)^۲}=\frac{-۱}{(x-۲)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{۲(x-۲)}{(x-۲)^۴}=\frac{۲}{(x-۲)^۳}$$

پس جدول تعیین علامت $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	
f		$\cap$	ت ن	$\cup$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۲)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(۲,+\infty)$ رو به بالاست.

۱۴۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f''(x)=۶(x^۲+۲x-۳)=۶(x-۱)(x+۳)$،

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

از روی این جدول معلوم می‌شود که بیشترین مقدار a برابر -۳ است.

۱۴۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f''(x)=۱۲x^۲-۱۲x+۲m$. برای اینکه همواره $f''(x)\geq ۰$ باید $\Delta\leq ۰\Rightarrow ۱۲^۲-۴(۲m)(۱۲)\leq ۰\Rightarrow m\geq\frac{۳}{۲}$

۱۴۱۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f''(x)=\frac{-۱۸(x^۲-۱)}{(x^۲+۳)^۳}$. بنابراین

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-۱,۱)$ رو به بالاست.

۱۴۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۴x-۱)(x-۱)-(۲x^۲-x+m)}{(x-۱)^۲}=\frac{۲x^۲-۴x+۱-m}{(x-۱)^۲}$$

$$f''(x)=\frac{(۴x-۴)(x-۱)^۲-۲(x-۱)(۲x^۲-۴x+۱-m)}{(x-۱)^۴}=\frac{۲m+۲}{(x-۱)^۳}$$

عبارت $(x-۱)^۳$ به‌ازای هر $x>۱$ مقداری مثبت دارد. پس کافی است صورت کسر $f''(x)$ مثبت باشد تا $f''(x)$ برای هر $x>۱$ مقداری مثبت داشته باشد و جهت تقعر نمودار تابع f به سمت بالا باشد: $۲m+۲>۰\Rightarrow m>-۱$

۱۴۱۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۲x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(x)=۲x-x^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$f''(x)=۲+\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}}=۲+\frac{۱}{۲x\sqrt{x}}$$

پس به‌ازای هر x در بازهٔ $(۰,+\infty)$ مقدار $f''(x)$ عددی مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ رو به بالاست.

۱۴۱۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f''(x)=-\cos x$. برای آنکه جهت تقعر نمودار تابع f روبه‌بالا باشد، باید $f''(x)>۰$، بنابراین

$$-\cos x>۰\Rightarrow\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}$$

در نتیجه جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ رو به بالاست.

۱۴۱۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=۴x+۳\cos x\Rightarrow f''(x)=۴-۳\sin x$$

با توجه به اینکه $-۱\leq\sin x\leq ۱$، می‌توان نوشت:

$$-۱\leq\sin x\leq ۱\Rightarrow -۳\leq -۳\sin x\leq ۳\Rightarrow ۱\leq ۴-۳\sin x\leq ۷$$

بنابراین علامت $f''(x)$ همواره مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f همواره رو به بالاست و تغییر نمی‌کند.

۱۴۲۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=-\sin x-\cos x$، پس $f''(x)=-\cos x+\sin x$. اکنون توجه کنید که در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۴})$ مقدار $\sin x$ از $\cos x$ کمتر است، پس $-\cos x+\sin x<۰\Rightarrow f''(x)<۰$

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۴})$ رو به پایین است.

(خودتان نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.)

۱۴۲۱- گزینهٔ ۲ اگر روی بازه‌ای $f''(x)>۰$، جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به بالاست. بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(۳,+\infty)$ رو به بالاست.

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$-$	۰	$+$	
f		$\cap$		$\cap$		$\cup$	

۱۴۲۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f''(x)=۶x^۲-۷x+۲=(۲x-۱)(۳x-۲)$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(\frac{۲}{۳},۳)$ رو به بالاست.

۱۴۲۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f''(x)=x^۲-۴x-۱۲=(x-۶)(x+۲)$$

x	$-\infty$		-۲		۶		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

از روی این جدول معلوم می‌شود که کمترین مقدار a برابر -۲ و بیشترین مقدار b برابر ۶ است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۸ است.

۱۴۲۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۲x & x\geq ۰\\ ۳x^۲+۲x & x\leq ۰\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۶x-۲ & x>۰\\ ۶x+۲ & x<۰\end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		۰		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f سه بار عوض می‌شود.

۱۴۲۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{ax+a^2-ax+1}{(x+a)^2}=\frac{a^2+1}{(x+a)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(a^2+1)(x+a)}{(x+a)^4}=\frac{-2(a^2+1)}{(x+a)^3}$$

علامت $f''(x)$ در $x=-a$ (ریشهٔ مخرج) تغییر می‌کند، پس جهت تقعر نمودار تابع f نیز در این نقطه تغییر می‌کند. بنابراین

$$-\frac{1}{a}=-a\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1$$

توجه کنید که در هر دو حالت $a=1$ و $a=-1$ جهت تقعر نمودار تابع f همان چیزی است که در صورت سؤال آمده است.

$a=1\Rightarrow$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	ت‌ن	$-$	

$a=-1\Rightarrow$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	ت‌ن	$-$	

۱۴۲۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=x+x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$$

بنابراین مقدار مشتق دوم تابع f روی دامنه‌اش، یعنی $(0,+\infty)$ مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به بالاست.

۱۴۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-1,1]$ و

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{-\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}$$

واضح است که مشتق دوم تابع f روی بازهٔ $(-1,1)$ منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f در این بازه رو به پایین است.

۱۴۲۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[0,2]$ و

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{2-x}}\Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{(2-x)(\sqrt{2-x})}\right)$$

بنابراین مقدار $f''(x)$ به‌ازای هر x در بازهٔ $(0,2)$ عددی منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

۱۴۲۹- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2\sin x\cos x+2\cos x=\sin 2x+2\cos x$$

$$f''(x)=2\cos 2x-2\sin x=2(1-2\sin^2 x)-2\sin x$$

$$=-4\sin^2 x-2\sin x+2=(\sin x+1)(-4\sin x+2)$$

$$=2(1+\sin x)(1-2\sin x)$$

چون عبارت $2(1+\sin x)$ نامنفی است، پس کافی است عبارت $1-2\sin x$ را روی بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ تعیین علامت کنیم تا علامت $f''(x)$ معین شود:

$$1-2\sin x=0\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

بنابراین روی بازهٔ $(0,\frac{\pi}{6})$ جهت تقعر نمودار f رو به بالاست و روی بازهٔ $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ جهت تقعر نمودار f رو به پایین است.

۱۴۳۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)$$

$$f''(x)=2(1+\tan^2 x)^2+4\tan^2 x(1+\tan^2 x)$$

$$=2(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x+2\tan^2 x)=2(1+\tan^2 x)(1+3\tan^2 x)$$

واضح است که مشتق دوم تابع f (هرجا که تعریف شده باشد) مقداری مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f رو به بالاست.

۱۴۳۱- گزینهٔ ۳ چون $f'(x)>0$، پس تابع اکیداً صعودی است و چون $f''(x)>0$، پس جهت تقعر نمودار تابع f رو به بالاست. بنابراین نمودار تابع f ممکن است به شکل گزینهٔ (۳) باشد.

۱۴۳۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f''(x)=20x^2(x-3)$. بنابراین

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,3)$ رو به پایین است.

۱۴۳۳- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=8x^3-3mx^2+6x+1\Rightarrow f''(x)=24x^2-6mx+6$$

برای اینکه جهت تقعر نمودار تابع همواره به سمت بالا باشد باید مشتق دوم تابع همواره نامنفی باشد:

$$6(4x^2-mx+1)\geq 0\xrightarrow{\Delta\leq 0}\Delta=m^2-16\leq 0\Rightarrow m^2\leq 16\Rightarrow -4\leq m\leq 4$$

۱۴۳۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & x>0\\ 3x^2-1 & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x & x>0\\ 6x & x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	ت‌ن	$+$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,0)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(0,+\infty)$ رو به بالاست. پس جهت تقعر نمودار تابع f فقط یک بار عوض می‌شود.

۱۴۳۵- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{2}{x^3}\Rightarrow f''(x)=-\frac{6}{x^4}$$

بنابراین به ازای هر $x\neq 0$، مقدار مشتق دوم تابع f عددی منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ رو به پایین است.

۱۴۳۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=3x^2-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=6x+\frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=6-\frac{3}{16}x^{-\frac{5}{2}}=3\left(\frac{32\sqrt{x^5}-1}{16\sqrt{x^5}}\right)$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^5}=\frac{1}{32} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$	

پس جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(\frac{1}{4},+\infty)$ رو به بالاست و کمترین مقدار a برابر $\frac{1}{4}$ است.

۱۴۳۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=x^2+(3x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=2x+(3x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)=2-2(3x)^{-\frac{5}{3}}=2\left(\frac{\sqrt[3]{(3x)^5}-1}{\sqrt[3]{(3x)^5}}\right)$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow (3x)^{\frac{5}{3}}=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

بنابراین علامت $f''(x)$ روی $\mathbb{R}-\{0\}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	ت‌ن	$-$	0	$+$	

پس جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(0,\frac{1}{3})$ رو به پایین است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{3}$ است.

۱۴۳۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=3x^{\frac{1}{3}}-x^2 \Rightarrow f'(x)=x^{-\frac{2}{3}}-2x$$

$$f''(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}-2=-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}-2=-2\left(1+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

بنابراین به‌ازای هر x در بازهٔ $(0,+\infty)$ مقدار $f''(x)$ عددی منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

۱۴۳۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=2x-2\cos x \Rightarrow f''(x)=2+2\sin x$$

با توجه به اینکه $-1\le \sin x\le 1$، می‌توان نوشت:

$$-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow -2\le 2\sin x\le 2 \Rightarrow 0\le 2+2\sin x\le 4$$

بنابراین مشتق دوم تابع f همواره نامنفی است و جهت تقعر نمودار تابع f همواره رو به بالاست و تغییر نمی‌کند.

۱۴۴۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x=x\cos x-\sin x$$

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$$

به ازای هر $x\in(0,\pi)$ مقدار $\sin x$ عددی مثبت و مقدار $-x$ عددی منفی است. پس $f''(x)$ روی این بازه منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

۱۴۴۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

بنابراین

$$f''(-2)f'(0)>0,\ f''(2)f'(\frac{1}{2})<0$$

$$f''(-2)f'(2)<0,\ f''(-4)f'(4)<0$$

پس فقط گزینهٔ (۳) درست نیست.

۱۴۴۲- گزینهٔ ۱ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس نقطه‌های عطف نمودار تابع f نقطه‌هایی هستند که جهت تقعر نمودار تابع f در آن‌ها عوض می‌شود. به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

بنابراین طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f برابر -2 و 2 است، که مجموع آن‌ها صفر است.

۱۴۴۳- گزینهٔ ۲ جدول تعیین علامت $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$		$\cup$	نقطهٔ عطف	$\cap$	نقطهٔ عطف	$\cup$	

پس جهت تقعر نمودار تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=2$ تغییر می‌کند و چون $f''(0)$ و $f''(2)$ وجود دارند، پس $f'(0)$ و $f'(2)$ نیز وجود دارند، در نتیجه خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول $x=0$ و $x=2$ وجود دارد. بنابراین $x=0$ و $x=2$ طول نقاط عطف نمودار تابع f هستند و این نمودار دو نقطهٔ عطف دارد.

۱۴۴۴- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند (به شرطی که f'' در این جواب‌ها تغییر علامت بدهد).

توجه کنید که

$$f'(x)=2x^2-4x+6 \Rightarrow f''(x)=4x-4,\quad f''(x)=0 \Rightarrow x=1$$

چون f'' در نقطهٔ $x=1$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۱ است و چون نقطهٔ عطف روی نمودار تابع است، پس عرض آن برابر است با $f(1)=\frac{11}{3}$.

۱۴۴۵- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطهٔ عطف نمودار آن جواب معادلهٔ $f''(x)=0$ است. توجه کنید که

$$f'(x)=3ax^2-8x+4 \Rightarrow f''(x)=6ax-8$$

$$f''(-2)=0 \Rightarrow 6a(-2)-8=0 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

۱۴۴۶- گزینهٔ ۲ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌هایی از معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2+x \Rightarrow f''(x)=x+1,\quad f''(x)=0\Rightarrow x=-1$$

چون f'' در نقطهٔ ۱- تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۱- است. چون نقطهٔ عطف نمودار تابع روی خط $2x-3y+6=0$ است، پس عرض آن برابر با $\frac{4}{3}$ است. بنابراین نقطهٔ عطف نمودار تابع f نقطهٔ $(-1,\frac{4}{3})$ است. چون این نقطه روی نمودار تابع f است، پس $f(-1)=\frac{4}{3}$، در نتیجه

$$-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+a=\frac{4}{3}\Rightarrow a=1$$

۱۴۴۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}2x+2 & x\le -1\\ -2x-2 & x>-1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x<-1\\ -2 & x>-1\end{cases}$$

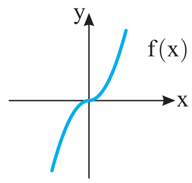
چون تابع f'' فقط در نقطهٔ $x=-1$ تغییر علامت می‌دهد و نمودار تابع f در این نقطه خط مماس دارد $(f'(-1)=0)$، پس طول تنها نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۱- است.

۱۴۴۸- گزینهٔ ۱ تابع f به‌صورت زیر است و $x=0$ طول تنها نقطهٔ عطف آن است.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر است و جهت تقعر نمودار تابع f در این نقطه عوض می‌شود.

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ -2x & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ -2 & x<0\end{cases}$$



۱۴۴۹- گزینهٔ ۴ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های عطف نمودار f، آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

به این ترتیب، f'' سه جواب دارد که در هر سه تای آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین نمودار تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

۱۴۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f(x)=x^2+2x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=2x+x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f''(x)=2-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 2=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow 4=\frac{1}{\sqrt{x^3}}\Rightarrow x^3=\frac{1}{16}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$$

پس $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f است.

۱۴۵۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

x	۶-		۳-		۰		۳		۶
$f'(x)$		+	۰	−		−	۰	+	
$f''(x)$		−		−	۰	+		+	

بنابراین جواب‌های صحیح نامعادلهٔ $f'(x)f''(x)<0$ در بازهٔ $(-6,6)$، عددهای صحیح در بازه‌های $(-6,-3)$ و $(0,3)$ هستند. این عددها ۵- ، ۴- ، ۱ و ۲ هستند و تعدادشان چهارتاست.

۱۴۵۲- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

x	$-\infty$		۵-		۰		۱		$+\infty$
$f''(x)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	
f		$\cap$	نقطهٔ عطف	$\cup$	نقطهٔ عطف	$\cap$	نقطهٔ عطف	$\cup$	

بنابراین f'' فقط در نقطه‌های $x=-5$، $x=0$ و $x=1$ تغییر علامت می‌دهد، پس نمودار تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

۱۴۵۳- گزینهٔ ۴ از روی نمودار f'' معلوم است که $f''(0)=4$. از طرف دیگر،

$$f''(x)=12x-2a,\quad f''(0)=4\Rightarrow -2a=4\Rightarrow a=-2$$

بنابراین $f''(x)=12x+4$ و $f''(x)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

چون f'' در نقطهٔ $x=-\frac{1}{3}$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر $-\frac{1}{3}$ است.

۱۴۵۴- گزینهٔ ۱ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند (به شرطی که f'' در این جواب‌ها تغییر علامت بدهد). توجه کنید که

$$f'(x)=7(x-3)^6\Rightarrow f''(x)=42(x-3)^5,\quad f''(x)=0\Rightarrow x=3$$

چون f'' در نقطهٔ $x=3$ تغییر علامت می‌دهد، طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۳ است. چون نقطهٔ عطف روی نمودار تابع است، پس عرض آن برابر است با $f(3)=-6$. یعنی نقطهٔ عطف نمودار تابع f نقطهٔ $(3,-6)$ است و مجموع مختصاتش برابر ۳- است.

۱۴۵۵- گزینهٔ ۲ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع جواب معادلهٔ $f''(x)=0$ است. توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-12x+4\Rightarrow f''(x)=6x-12$$

$$f''(a)=0\Rightarrow 6a-12=0\Rightarrow a=2$$

پس نقطهٔ عطف نمودار تابع f نقطهٔ $(2,-4)$ است و چون این نقطه روی نمودار تابع f است، پس $f(2)=-4$، در نتیجه $8-24+8+d=-4\Rightarrow d=4$

بنابراین $a+d=6$.

۱۴۵۶- گزینهٔ ۱ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع جوابی از معادلهٔ $f''(x)=0$ است که f'' در آن جواب تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

$$f'(x)=6x^2+12x+1\Rightarrow f''(x)=12x+12,\quad f''(x)=0\Rightarrow x=-1$$

چون f'' در نقطهٔ $x=-1$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع برابر ۱- است. اکنون توجه کنید که شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱- روی نمودار برابر است با $f'(-1)=-5$. چون شیب خط $y-ax+7=0$ برابر a است، پس $a=-5$.

۱۴۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-12x & x>0\\ 2x+6 & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x-12 & x>0\\ 2 & x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	ت ن	$-$		$+$	

جهت تقعر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول $x=2$ تغییر می‌کند و نمودار تابع f در این نقطه خط مماس دارد. پس نمودار این تابع یک نقطهٔ عطف دارد.

۱۴۵۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}2x+a & x>1\\ -2x & x<1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x>1\\ -2 & x<1\end{cases}$$

پس فقط در $x=1$ جهت تقعر نمودار تابع f تغییر می‌کند. برای اینکه تابع f نقطهٔ عطف داشته باشد، باید در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد تا $x=1$ طول نقطهٔ عطف باشد. برای مشتق‌پذیری لازم است که تابع پیوسته باشد. پس

$$f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)\Rightarrow 1+a=-1+b\Rightarrow b=a+2 \quad (1)$$

همچنین در نقطهٔ $x=1$ باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

$$f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 2+a=-2\Rightarrow a=-4\xrightarrow{(1)}b=-2$$

پس $a+b=-6$.

۱۴۵۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^3+2x^2-x & x\geq0\\ x^3+2x^2+x & x\leq0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+4x-1 & x>0\\ 3x^2+4x+1 & x<0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}6x+4 & x>0\\ 6x+4 & x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	ت ن	$+$	

پس $x=-\frac{2}{3}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f است و عرض آن برابر است با

$$f(-\frac{2}{3})=-\frac{2}{27}$$

۱۴۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند. پس $4=a+b$. از طرف دیگر تابع f در $x=1$ مشتق دوم دارد، پس مشتق دوم آن در $x=1$ باید صفر باشد.

$$f(x)=ax^2+bx^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=2ax+\frac{b}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow f''(x)=2a-\frac{2b}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$f''(1)=2a-\frac{2b}{9}=0\Rightarrow a=\frac{b}{9}\xrightarrow{4=a+b}\frac{10b}{9}=4\Rightarrow b=\frac{36}{10}$$

پس $a=\frac{b}{9}=\frac{4}{10}$ و در نتیجه $a-b=-\frac{32}{10}=-\frac{16}{5}$.

۱۴۶۱- گزینهٔ ۴ طول نقطه‌های عطف آن جواب‌هایی از معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. جواب‌های f'' نقطه‌های -3، صفر و 2 هستند، ولی f'' در نقطهٔ $x=2$ تغییر علامت نمی‌دهد. بنابراین طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f برابر صفر و -3 و مجموعشان -3 است.

۱۴۶۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f''(x)=3x^2(x-1)^2+2x^3(x-1)$$
$$=x^2(x-1)(3(x-1)+2x)=x^2(x-1)(5x-3)$$

پس جدول تعیین علامت $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$		$-$		$+$	
f		$\cup$		$\cup$	نقطهٔ عطف	$\cap$	نقطهٔ عطف	$\cup$	

جهت تقعر نمودار تابع f در $x=1$ و $x=\frac{3}{5}$ تغییر می‌کند و تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر است، پس نمودار تابع f دو نقطهٔ عطف دارد.

۱۴۶۳- گزینهٔ ۱ چون تابع f همه جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطهٔ عطف نمودار آن جواب معادلهٔ $f''(x)=0$ است. توجه کنید که

$$f'(x)=2(x-2)(x+a)+(x-2)^2$$
$$f''(x)=2(x+a)+2(x-2)+2(x-2)$$
$$f''(1)=0\Rightarrow 2(1+a)+2(-1)+2(-1)=0\Rightarrow a=1$$

۱۴۶۴- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطهٔ عطف نمودار آن جواب معادلهٔ $f''(x)=0$ است (به شرطی که f'' در این جواب تغییر علامت دهد.) توجه کنید که

$$f'(x)=4x^3-3ax^2+a\Rightarrow f''(x)=12x^2-6ax$$
$$f''(2)=0\Rightarrow 48-12a=0\Rightarrow a=4$$

بنابراین $f(x)=x^4-4x^3+4x+7-b$. از طرف دیگر، چون نقطهٔ عطف روی نمودار تابع است، پس $f(2)=1$، در نتیجه

$$16-32+8+7-b=1\Rightarrow b=-2$$

بنابراین $ab=-8$.

۱۴۶۵- گزینهٔ ۴ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f جوابی از معادلهٔ $f''(x)=0$ است که f'' در آن نقطه تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-12x+a+2\Rightarrow f''(x)=6x-12$$
$$f''(x)=0\Rightarrow 6x-12=0\Rightarrow x=2$$

چون f'' در نقطه‌ای به طول $x=2$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۲ است. از طرف دیگر، شیب خط $4x-y+12=0$ برابر ۴ است، در نتیجه شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ عطف آن برابر با ۴ است، یعنی $f'(2)=4$، در نتیجه

$$12-24+a+2=4\Rightarrow a=14$$

۱۴۶۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=x^3-3x^2+2ax\Rightarrow f''(x)=3x^2-6x+2a$$

برای اینکه نمودار تابع f نقطهٔ عطف داشته باشد باید مشتق دوم آن تغییر علامت دهد. پس $f''(x)$ باید دو جواب داشته باشد، یعنی معادلهٔ زیر دو جواب دارد:

$$3x^2-6x+2a=0$$

پس

$$\Delta=36-24a>0\Rightarrow a<\frac{3}{2}$$

۱۴۶۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-6 & x>0\\ 3x^2+6 & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x & x>0\\ 6x & x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	ت ن	$+$	

جهت تقعر نمودار تابع f در $x=0$ تغییر می‌کند ولی چون $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ پس خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه وجود ندارد و $x=0$ طول نقطهٔ عطف نیست. بنابراین نمودار تابع f نقطهٔ عطف ندارد.

۱۴۶۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x^4+x^2 & x\le -1\\ x^4-x^2 & -1<x\le 0\\ -x^4+x^2 & 0<x\le 1\\ x^4-x^2 & x>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-4x^3+2x & x<-1\\ 4x^3-2x & -1<x<0\\ -4x^3+2x & 0<x<1\\ 4x^3-2x & x>1\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}-12x^2+2 & x<-1\\ 12x^2-2 & -1<x<0\\ -12x^2+2 & 0<x<1\\ 12x^2-2 & x>1\end{cases},\quad f''(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	ت ن	$+$	0	$-$	ت ن	$+$	0	$-$	ت ن	$+$	

بنابراین f'' در نقطه‌های به طول -1، $-\frac{1}{\sqrt{6}}$، صفر، $\frac{1}{\sqrt{6}}$ و ۱ تغییر علامت می‌دهد، ولی فقط در نقطه‌های به طول $-\frac{1}{\sqrt{6}}$، صفر و $\frac{1}{\sqrt{6}}$ مماس بر نمودار تابع f وجود دارد. بنابراین نمودار تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

۱۴۶۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2x+4\sin x\Rightarrow f''(x)=2+4\cos x$$

$$f''(x)=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

مشتق دوم تابع در $x=\frac{2\pi}{3}$ صفر است و $f''(x)$ در این نقطه تغییر علامت می‌دهد. همچنین $f'(\frac{2\pi}{3})$ موجود است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه وجود دارد. بنابراین $x=\frac{2\pi}{3}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f در بازهٔ $(0,\pi)$ است.

۱۴۷۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f روی بازهٔ $(0,2\pi)$ دوبار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f آن جواب‌هایی از معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=-2\sin x\cos x+2\cos x=-\sin 2x+2\cos x$$

$$f''(x)=-2\cos 2x-2\sin x=-2(\cos 2x+\sin x)$$

$$=-2(1-2\sin^2 x+\sin x)=2(2\sin^2 x-\sin x-1)$$

$$=2\underbrace{(\sin x-1)}_{\le 0}(2\sin x+1)$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

چون f'' فقط در دو جوابش تغییر علامت می‌دهد، پس نمودار تابع f دو نقطهٔ عطف دارد.

۱۴۷۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=3x^2-4$ و $f''(x)=6x$. بنابراین علامت $f'(x)$ و $f''(x)$ در اطراف نقطهٔ $x=3$ به‌صورت زیر است:

x			3		
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	

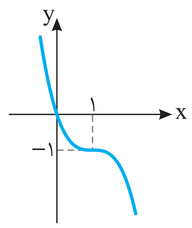
پس تابع در اطراف $x=3$ صعودی با تقعر رو به بالاست.

۱۴۷۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مشتق تابع f همواره نامثبت است و این تابع نزولی است:

$$f(x)=-x^3+3x^2-3x$$

$$f'(x)=-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x+1)=-3(x-1)^2$$

اکنون با توجه به $f(0)=0$ می‌توانیم نمودار تقریبی تابع را رسم کنیم. توجه کنید که $f'(1)=0$، پس نمودار تابع از ناحیه‌های دوم و چهارم عبور می‌کند و از ناحیه‌های اول و سوم عبور نمی‌کند. توجه کنید که



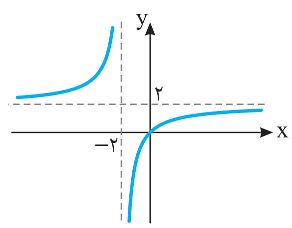
$$f(x)=-x^3+3x^2-3x=-(x^3-3x^2+3x-1)-1=-(x-1)^3-1$$

بنابراین می‌توان نمودار تابع f را با انتقال نمودار تابع $y=x^3$ نیز رسم کرد.

۱۴۷۳- گزینهٔ ۴ مجانب‌های نمودار تابع خطوط $x=-2$ و $y=2$ هستند و تابع روی بازه‌های $(-\infty,-2)$ و $(-2,+\infty)$ اکیداً صعودی است، زیرا

$$f'(x)=\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$$

واضح است که مشتق تابع روی بازه‌های بالا مثبت است. پس نمودار تابع به‌صورت مقابل است و از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.



۱۴۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(x-a)(x^2-1)=0\Rightarrow x=a\ ,\ x=\pm 1$$

چون $x=3$ یک جواب معادلهٔ $f(x)=0$ است، پس $a=3$ و در نتیجه $f(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x-b}$. با توجه به اینکه یک حفره در نمودار تابع f وجود دارد، پس b باید یکی از اعداد ۱، -1 یا ۳ باشد. چون طول یکی از نقطه‌های برخورد نمودار با محور طول‌ها منفی و طول یکی از نقطه‌های برخورد ۳ است، پس باید $b=1$. در واقع ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x-1}=(x+1)(x-3)\ ,\quad x\neq 1$$

پس $a+b=4$.

۱۴۷۵- گزینهٔ (۱) نقطهٔ $(-۲,۵)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. پس $f(-۲)=۵$ و $f'(-۲)=۰$. همچنین $f'(x)=۳ax^۲+۲bx$. بنابراین

$$f(-۲)=-۸a+۴b+۱=۵\Rightarrow ۲a-b+۱=۰$$
$$f'(-۲)=۱۲a-۴b=۰\Rightarrow b=۳a$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=۱$، $b=۳$ و $b-a=۲$.

۱۴۷۶- گزینهٔ (۲) ضریب $x^۴$ مثبت است. پس نمودار تابع از ناحیهٔ دوم شروع و در ناحیهٔ اول پایان می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(۴x^۴+۳x^۳-۲)=+\infty$$

برای تشخیص درستی گزینه‌های (۱)، (۲) یا (۳) به روش زیر می‌توانیم عمل کنیم: نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۱۶x^۳+۹x^۲=x^۲(۱۶x+۹)$$

با توجه به اینکه $x=۰$ ریشهٔ مضاعف f' است، پس تنها نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع در $x=-\frac{۹}{۱۶}$ اتفاق می‌افتد که در گزینهٔ (۲) دیده می‌شود.

۱۴۷۷- گزینهٔ (۴) با توجه به نمودار معلوم است که $(۲,-۳)$ نقطهٔ برخورد مجانب‌های آن است. پس $x=۲$ و $y=-۳$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع هستند. از طرف دیگر مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{۲x-b}$ خط $x=\frac{b}{۲}$ و مجانب افقی آن خط $y=\frac{a}{۲}$ است. پس

$$\frac{b}{۲}=۲\Rightarrow b=۴\ ,\quad \frac{a}{۲}=-۳\Rightarrow a=-۶$$

در نتیجه $ab=-۲۴$.

۱۴۷۸- گزینهٔ (۴) توجه کنید که

$$f'(x)=-\sqrt{۳-x}+\frac{x}{۲\sqrt{۳-x}}=\frac{۳x-۶}{۲\sqrt{۳-x}}$$
$$f''(x)=\frac{۶\sqrt{۳-x}+\frac{۳x-۶}{\sqrt{۳-x}}}{(۲\sqrt{۳-x})^۲}=\frac{۱۲-۳x}{۴(۳-x)\sqrt{۳-x}}$$

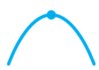
در همسایگی نقطهٔ $x=۰$ علامت $f'(x)$ منفی و علامت $f''(x)$ مثبت است. پس نمودار تابع اکیداً نزولی و جهت تقعر آن رو به بالا است.

۱۴۷۹- گزینهٔ (۲) توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۲x(۱-x)+x^۲}{(۱-x)^۲}=\frac{۲x-x^۲}{(۱-x)^۲}=\frac{x(۲-x)}{(۱-x)^۲}$$

بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی $x=۲$ به‌صورت زیر است و $x=۲$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

x		۲	
$f'(x)$	+	۰	−

پس نمودار تابع f در همسایگی $x=۲$ به‌صورت  است.

۱۴۸۰- گزینهٔ (۲) توجه کنید که

$$f'(x)=۲\sin x\cos x+۲\sin x=\sin ۲x+۲\sin x$$
$$f''(x)=۲\cos ۲x+۲\cos x=۴\cos^۲ x-۲+۲\cos x$$
$$=۲(۲\cos^۲ x+\cos x-۱)=۲(۲\cos x-۱)(\cos x+۱)$$

بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۶}$ مشتق اول و مشتق دوم تابع مثبت هستند. پس در یک همسایگی نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۶}$ تابع f صعودی و جهت تقعر نمودار آن به سمت بالاست. توجه کنید که در محاسبهٔ مشتق اول و مشتق دوم تابع از اتحادهای $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ استفاده شده است.

۱۴۸۱- گزینهٔ (۳) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=x^۲-۲x\ ,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\ ,x=۲$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
f	$-\infty$	↗	۰	↘	$-\frac{۴}{۳}$	↗	$+\infty$

بنابراین $(۰,۰)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f و $(۲,-\frac{۴}{۳})$ نقطهٔ مینیمم نسبی آن است و نمودار تابع به‌صورت گزینهٔ (۳) است.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(x)=x^۲(\frac{۱}{۳}x-۱)$. بنابراین صفرهای تابع f، $x=۰$ و $x=۳$ هستند. پس گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. از طرف دیگر مقادیر تابع f در یک همسایگی $x=۰$ منفی هستند. پس گزینهٔ (۴) هم رد می‌شود.

۱۴۸۲- گزینهٔ (۲) با توجه به نمودار معلوم است که $x=۰$ طول نقطهٔ عطف تابع است، پس گزینه‌های (۳) و (۴) جواب نیستند زیرا طول نقطهٔ عطف تابع گزینهٔ (۳)، $-\frac{b}{۳a}=\frac{۱}{۳}$ و طول نقطهٔ عطف تابع گزینهٔ (۴)، $-\frac{b}{۳a}=-\frac{۱}{۳}$ است. همچنین تابع همواره نزولی است و نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد. پس گزینهٔ (۱) هم جواب نیست زیرا تابع مشتق آن $y'=-۳x^۲+۱$ است. پس تابع گزینهٔ (۱)، دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. در تابع گزینهٔ (۲) هر دو شرط بالا وجود دارد.

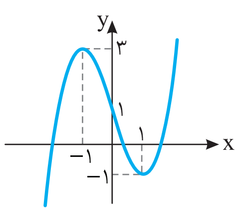
$$y=-x^۳-x+۲\Rightarrow y'=-۳x^۲-۱$$

۱۴۸۳- گزینهٔ (۲) تابع $g(x)=x^۳-۳x+۱$ را در نظر می‌گیریم و نمودار تقریبی آن را رسم می‌کنیم (شکل (۱) را ببینید):

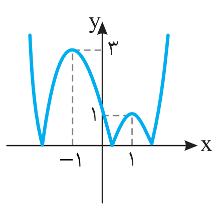
$$g'(x)=۳x^۲-۳,\quad g'(x)=۰\Rightarrow x=\pm ۱$$

x	$-\infty$		−۱		۱		$+\infty$
$g'(x)$		+	۰	−	۰	+	
g	$-\infty$	↗	۳	↘	−۱	↗	$+\infty$
			max نسبی		min نسبی		

پس نمودار تابع f به‌صورت شکل (۲) است.

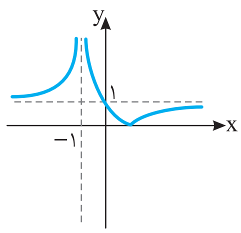


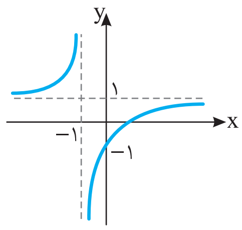
شکل (۱)



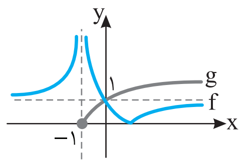
شکل (۲)

۱۴۸۴- گزینهٔ (۱) نمودار تابع $f(x)=|\frac{x-۱}{x+۱}|$ با استفاده از نمودار تابع $y=\frac{x-۱}{x+۱}$ قابل رسم است. توجه کنید که تابع $y=\frac{x-۱}{x+۱}$ در دو طرف مجانب قائم آن اکیداً صعودی است و خطوط $x=-۱$ و $y=۱$ مجانب‌های نمودار آن هستند.





پس مطابق شکل زیر نمودار تابع‌های f و g در یک نقطه متقاطع‌اند.



۱۴۸۵- گزینهٔ (۲) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $x=a$ و $y=a$ مجانب‌های نمودار تابع هستند و با توجه به نمودار تابع معلوم است که $a>۰$. همچنین از روی نمودار تابع معلوم است که تابع در دو طرف مجانب قائم آن اکیداً صعودی است. پس روی بازه‌های $(-\infty, a)$ و $(a, +\infty)$ مشتق تابع f مثبت است. پس

$$f'(x)=\frac{-a^۲+۱}{(x-a)^۲}>۰\Rightarrow a^۲<۱\Rightarrow -۱<a<۱$$

چون $a>۰$، پس $۰<a<۱$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۰)=\frac{۱}{a}$. با توجه به نمودار $f(۰)>۰$، پس $a>۰$.

از طرف دیگر خط $y=a$ مجانب افقی نمودار تابع است و نقطهٔ $(۰,\frac{۱}{a})$ بالای مجانب افقی قرار دارد. بنابراین

$$\frac{۱}{a}>a\Rightarrow\frac{۱}{a}-a>۰\Rightarrow\frac{۱-a^۲}{a}>۰\xrightarrow{a>۰}۱-a^۲<۰$$
$$-۱<a<۱\xrightarrow{a>۰}۰<a<۱$$

۱۴۸۶- گزینهٔ (۳) توجه کنید که محل برخورد مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{ax-۲}{bx-۴}$ نقطهٔ $(\frac{۴}{b},\frac{a}{b})$ است و نقطهٔ عطف نمودار تابع $g(x)=x^۳-۳x^۲+۲x+b$ نقطهٔ $(۱,g(۱))$، یعنی $(۱,b)$ است. پس

$$\frac{۴}{b}=۱\Rightarrow b=۴\ ,\qquad \frac{a}{b}=b\Rightarrow a=b^۲\Rightarrow a=۱۶$$

بنابراین $a+b=۲۰$.

۱۴۸۷- گزینهٔ (۲) چون نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد:

$$x^۲+ax+b=۰,\quad \Delta=a^۲-۴b=۰\Rightarrow b=\frac{a^۲}{۴}$$

بنابراین $f(x)=\frac{x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴}}{x^۲-x+۳}$. از طرف دیگر $x=-۱$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است. پس $f'(-۱)=۰$. بنابراین

$$f'(x)=\frac{(۲x+a)(x^۲-x+۳)-(۲x-۱)(x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴})}{(x^۲-x+۳)^۲}$$

$$f'(-۱)=۰\Rightarrow(-۲+a)(۵)-(-۳)(۱-a+\frac{a^۲}{۴})=۰\Rightarrow ۳a^۲+۸a-۲۸=۰$$

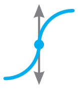
$$(۳a+۱۴)(a-۲)=۰\Rightarrow a=-\frac{۱۴}{۳}, a=۲$$

اگر $a=۲$، آن‌گاه $b=۱$ و $f(۰)=\frac{۱}{۳}$ که قابل قبول نیست. زیرا مطابق شکل $f(۰)$ باید بزرگ‌تر از ۱ باشد. چون محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها بالاتر از مجانب افقی تابع است. پس $a=-\frac{۱۴}{۳}$. توجه کنید که در این حالت $f(۰)=\frac{۴۹}{۲۷}>۱$.

۱۴۸۸- گزینهٔ (۱) توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و

$$f'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}, x\neq\pm۱,\qquad f'(۱)=+\infty$$

x			۱		
f'(x)		+	ت ن	+	

بنابراین تابع f در هر دو همسایگی چپ و راست $x=۱$ صعودی است. بنابراین نمودار آن در همسایگی $x=۱$ به‌صورت  است.

۱۴۸۹- گزینهٔ (۱) توجه کنید که

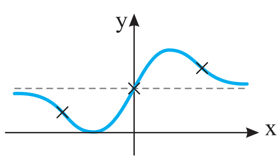
$$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$$

بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی نقطهٔ $x=۰$ به‌صورت زیر است و تابع f در $x=۰$ مینیمم نسبی دارد.

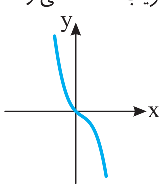
x		۰	
f'(x)	−	۰	+

این ویژگی در نمودار گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۱۴۹۰- گزینهٔ (۴) با توجه به نمودار تابع f، این تابع سه نقطهٔ عطف دارد (که مکان تقریبی آن‌ها را در شکل زیر با علامت × مشخص کرده‌ایم)، پس تابع f' سه نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. همچنین با افزایش x از $-\infty$ به $+\infty$، تابع f ابتدا اکیداً نزولی، سپس اکیداً صعودی و سرانجام اکیداً نزولی است، پس f' باید ابتدا منفی، سپس مثبت و سرانجام منفی باشد که این شرایط در گزینهٔ (۴) برقرار است.



۱۴۹۱- گزینهٔ (۲) توجه کنید که $f'(x)=-۳x^۲+۲x-۱$. مشتق تابع همواره منفی است. زیرا در عبارت $-۳x^۲+۲x-۱$ ضریب $x^۲$ منفی و Δ منفی است. از طرف دیگر $f(۰)=۰$. بنابراین نمودار تابع تقریباً به‌صورت مقابل است. پس نمودار تابع فقط از دو ناحیهٔ دوم و چهارم عبور می‌کند.



۱۴۹۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $x>0$، آن‌گاه $f(x)=x^3-3x^2$. بنابراین

$$f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f''(x)=6x-6\,,\quad f''(x)=0 \Rightarrow x=1$$

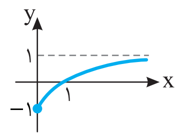
x	۰		۱		$+\infty$
$f''(x)$		−	۰	+	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(0,1)$ به سمت پایین و روی بازهٔ $(1,+\infty)$ به سمت بالاست. این شرایط فقط در نمودار گزینهٔ (۴) وجود دارد.

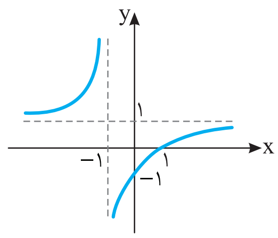
۱۴۹۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که نمودار تابع f دارای یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی است. پس مشتق تابع باید در دو نقطه تغییر علامت دهد. پس معادلهٔ $f'(x)=0$ باید دو جواب داشته باشد:

$$f'(x)=3x^2+2x+a\,,\quad \Delta=4-12a>0 \Rightarrow a<\frac{1}{3}$$

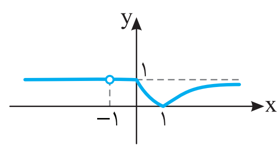
۱۴۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\geq 0$، آن‌گاه $f(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ و اگر $x<0$ و $x\neq -1$، آن‌گاه $f(x)=\left|\frac{-x-1}{x+1}\right|=1$. بنابراین به کمک نمودار تابع $y=\frac{x-1}{x+1}$ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.



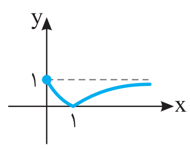
$y=\frac{x-1}{x+1}\,,\quad x\geq 0$



$y=\frac{x-1}{x+1}$



$f(x)=\left|\frac{|x|-1}{x+1}\right|$



$y=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\,,\quad x\geq 0$

۱۴۹۵- گزینهٔ ۳ از روی نمودار تابع f مشخص است که تابع f در دو طرف مجانب قائم آن، یعنی روی بازه‌های $(-\infty,3)$ و $(3,+\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین

$$f'(x)=\frac{m(x-3)-(mx+1)}{(x-3)^2}=\frac{-3m-1}{(x-3)^2} \Rightarrow -3m-1>0 \Rightarrow m<-\frac{1}{3}$$

۱۴۹۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}=\frac{(x-3)(x-4)}{(x-4)(x-2)}=\frac{x-3}{x-2}\,,\quad x\neq 4$$

بنابراین نمودار تابع یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=2$ و یک مجانب افقی به معادلهٔ $y=1$ دارد، پس گزینه‌های (۲) و (۴) جواب نیستند. از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(-\infty,2)$ صعودی است. پس گزینهٔ (۱) نیز جواب نیست و گزینهٔ (۳) جواب است.

۱۴۹۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f'(x)=(2x-1)\sqrt[3]{x}+\frac{x^2-x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-4x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x(7x-4)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left((x-1)\sqrt[3]{x}\right)=0$$

بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی $x=0$ به‌صورت زیر است:

x		۰	
$f'(x)$	+	۰	−

یعنی $x=0$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و نمودار تابع در همسایگی این نقطه به‌صورت  است.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0)=0$ و $f(x)=x(x-1)\sqrt[3]{x}$. پس همهٔ مقادیر تابع f در همسایگی $x=0$ منفی هستند و $x=0$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است.

۱۴۹۸- گزینهٔ ۱ با بررسی گزینه‌ها مشخص است که نمودارها در تعداد و نوع نقاط اکسترمم نسبی متفاوت هستند. پس نقاط اکسترمم نسبی تابع را بررسی می‌کنیم: $f'(x)=\frac{2\sin x}{(2\cos x-1)^2}$. واضح است که همهٔ مقادیر تابع f' به‌ازای $x\in(0,\frac{\pi}{2})-\{\frac{\pi}{3}\}$ مثبت هستند و تابع f نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد. فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی را دارد.

۱۴۹۹- گزینهٔ ۱ مقدار تابع f' در نقطه‌های به طول صفر، ۱ و ۲ برابر صفر است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول صفر، ۱ و ۲ موازی محور x است. روی بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(1,2)$ علامت f' مثبت است، پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً صعودی است. روی بازه‌های $(0,1)$ و $(2,+\infty)$ علامت f' منفی است، پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً نزولی است. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

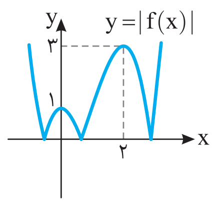
۱۵۰۰- گزینهٔ ۳ جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌ای شامل نقطهٔ صفر رو به بالا است و در بقیهٔ جاها رو به پایین است. بنابراین مقادیر تابع f'' روی بازه‌ای شامل نقطهٔ صفر مثبت‌اند و در بقیهٔ جاها منفی‌اند. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۳) این ویژگی‌ها را دارد.

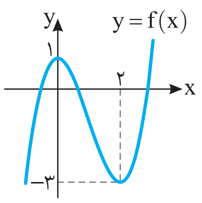
۱۵۰۱- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ را رسم می‌کنیم.

$$f'(x)=3x^2-6x\,,\quad f'(x)=0 \Rightarrow x=0\,,\ x=2$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
f	$-\infty$	↗	۱	↘	-3	↗	$+\infty$

بنابراین نمودار تابع f و نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌صورت زیر است.



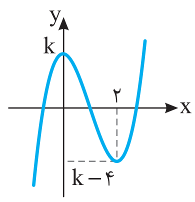


۱۵۰۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x\ ,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$

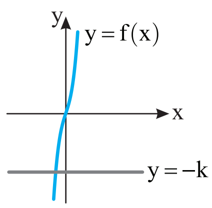
x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
f	$-\infty$	↗	k max نسبی	↘	$k-۴$ min نسبی	↗	$+\infty$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. برای اینکه نمودار تابع از ناحیهٔ چهارم عبور نکند، باید عرض نقطهٔ مینیمم نسبی آن منفی نباشد. یعنی $k-۴\geq۰$ و در نتیجه $k\geq۴$. پس حداقل مقدار k برابر ۴ است.



۱۵۰۳- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $۲x^{۳}+۳x=-k$ می‌نویسیم. اکنون نمودار تابع $f(x)=۲x^{۳}+۳x$ را رسم می‌کنیم و شرطی را پیدا می‌کنیم که با وجود آن شرط، خط $y=-k$ نمودار تابع f را فقط در یک نقطه با طول منفی قطع کند. تابع f اکیداً صعودی است. زیرا $f'(x)=۶x^{۲}+۳\Rightarrow f'(x)>۰$

با توجه به $f(۰)=۰$ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که اگر $-k<۰$ طول نقطهٔ برخورد خط $y=-k$ با نمودار تابع f عددی منفی است، پس $k>۰$.



۱۵۰۴- گزینهٔ ۱ عرض نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۸ است و خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ عطف، افقی است. پس مشتق اول و مشتق دوم تابع در این نقطه برابر صفر است.

$$f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b\Rightarrow f''(x)=۶x+۲a\ ,\quad f''(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{a}{۳}$$

بنابراین $f'(-\frac{a}{۳})=۰$ و $f(-\frac{a}{۳})=۸$. پس

$$f'(-\frac{a}{۳})=۳(-\frac{a}{۳})^{۲}+۲a(-\frac{a}{۳})+b=۰\Rightarrow b=\frac{a^{۲}}{۳}$$

$$f(-\frac{a}{۳})=(-\frac{a}{۳})^{۳}+a(-\frac{a}{۳})^{۲}+b(-\frac{a}{۳})=۸$$

$$-\frac{a^{۳}}{۲۷}+\frac{a^{۳}}{۹}-\frac{a^{۳}}{۹}=۸\Rightarrow a^{۳}=-۸\times۲۷\Rightarrow a=-۶$$

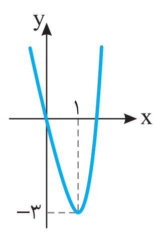
بنابراین $b=۱۲$ و در نتیجه $a+b=۶$.

۱۵۰۵- گزینهٔ ۳ نمودار تقریبی تابع را به کمک تعیین نقاط اکسترمم نسبی رسم می‌کنیم.

$$f'(x)=۴x^{۳}-۴=۰\Rightarrow x=۱$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	
f	$+\infty$	↘	-۳	↗	$+\infty$

با توجه به نمودار تابع f برد این تابع بازهٔ $[-۳,+\infty)$ است.



۱۵۰۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x=-۳$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است. بنابراین پس از ساده کردن ضابطهٔ تابع f باید مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه داشته باشد و آن هم $x=-۳$ باشد:

$$x^{۲}-b=۰\xrightarrow{x=-۳}۹-b=۰\Rightarrow b=۹$$

$$f(x)=\frac{x^{۲}+ax+۳}{x^{۲}-۹}=\frac{x^{۲}+ax+۳}{(x-۳)(x+۳)}$$

بنابراین باید $x=۳$ ریشهٔ صورت کسر بالا باشد. پس

$$۹+۳a+۳=۰\Rightarrow a=-۴$$

پس $ab=-۳۶$.

۱۵۰۷- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{۳ax^{۲}-ax-x^{۲}-a}{۳x-۱}=\frac{(۳a-۱)x^{۲}-ax-a}{۳x-۱}$$

ضابطهٔ تابع هموگرافیک از تقسیم دو تابع چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌دست می‌آید. بنابراین صورت کسر ضابطهٔ تابع نباید عبارت درجهٔ دوم داشته باشد. پس

$$۳a-۱=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}}{۳x-۱}=\frac{-x-۱}{۹x-۳}$ است. پس نقطهٔ برخورد مجانب‌های نمودار تابع $A(\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۹})$ است که فاصلهٔ آن تا مبدأ مختصات برابر است با $OA=\sqrt{(\frac{۱}{۳})^{۲}+(-\frac{۱}{۹})^{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۹}$.

۱۵۰۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که نمودار تابع f فقط در یک نقطه با طول مثبت محور طول‌ها را قطع کرده است. از طرف دیگر

$$f(x)=۰\Rightarrow x^{۲}-۱=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۱$$

پس $x=-۱$ باید جواب معادلهٔ $x^{۲}+ax+۳=۰$ هم باشد. بنابراین $۱-a+۳=۰\Rightarrow a=۴$. در نتیجه ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۴x+۳}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x+۱)(x+۳)}=\frac{x-۱}{x+۳}\ ,\ x\neq-۱$$

پس $x=-۳$ مجانب قائم نمودار تابع f است و در نتیجه $c=-۳$. از طرف دیگر b عرض نقطه‌ای است که تابع f در آن تعریف نشده ولی مجانب قائم نیز ندارد. یعنی

$$b=\lim_{x\to-۱}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{x-۱}{x+۳}=-۱$$

پس $a+b+c=۰$.

۱۵۰۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $۱-\sin x\geq۰$، بنابراین مقادیر تابع $f(x)=\frac{۱}{۱-\sin x}$ همگی مثبت هستند. فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی را دارد.

۱۵۱۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f' دو بار محور طول‌ها را قطع می‌کند، یعنی در این نقاط مشتق برابر صفر است و تغییر علامت می‌دهد. پس f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. همچنین نمودار تابع f' در سه نقطه از حالت صعودی به حالت نزولی (یا برعکس) درمی‌آید. بنابراین تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

۱۵۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x>۰$، آن‌گاه

$$f(x)=-x^{۳}+۳x^{۲}\Rightarrow f'(x)=-۳x^{۲}+۶x\Rightarrow f''(x)=-۶x+۶$$

x	۰		۱		$+\infty$
$f''(x)$		+	۰	−	

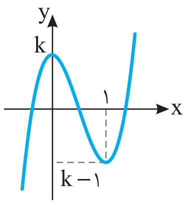
بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(۰,۱)$ به سمت بالا و روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ به سمت پایین است. این شرایط فقط در نمودار تابع گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۱۵۱۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=6x^2-6x\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	k max نسبی	↘	k−1 min نسبی	↗	$+\infty$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. برای اینکه نمودار از چهار ناحیه عبور کند باید عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع مثبت باشد و عرض نقطهٔ مینیمم نسبی تابع منفی باشد. یعنی $k>0$ و $k-1<0$. بنابراین $0<k<1$.

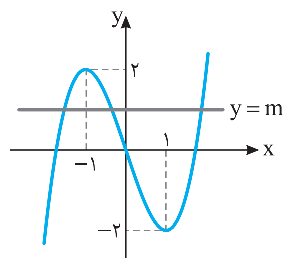


۱۵۱۳- گزینهٔ ۲ ابتدا نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم، سپس نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

x	$-\infty$		−1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	2 max نسبی	↘	−2 min نسبی	↗	$+\infty$

با توجه به نمودار تابع f، اگر $m\ge2$ یا $m\le-2$، آن‌گاه خط $y=m$ نمودار تابع f را در سه نقطه قطع نمی‌کند. پس m نمی‌تواند مقادیر صحیح صفر و ±1 باشد.



۱۵۱۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(1,-1)$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است. پس $f(1)=-1$ و $f'(1)=0$.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx\Rightarrow f(1)=1+a+b=-1$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow f'(1)=3+2a+b=0$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=-2\\2a+b=-3\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-1$ و $b=-1$.

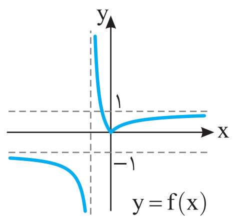
طول نقطهٔ عطف تابع برابر $\frac{-a}{3}$ است. پس $x=\frac{1}{3}$ طول نقطهٔ عطف است.

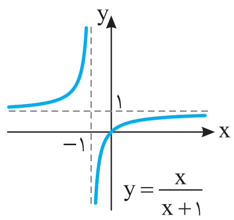
۱۵۱۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که جهت تقعر نمودار تابع f همواره به سمت بالاست. بنابراین مشتق دوم آن همواره نامنفی است:

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+1\Rightarrow f''(x)=12x^2+6ax=6x(2x+a)$$

اگر $a\neq0$، آن‌گاه $x=0$ و $x=-\frac{a}{2}$ جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند و جهت تقعر نمودار تابع f در دو نقطه عوض می‌شود. اگر $a=0$، آن‌گاه $f''(x)=12x^2$ و مشتق دوم تابع f همواره نامنفی است.

۱۵۱۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1} & x\ge0\\ \frac{-x}{x+1} & x<0\end{cases}$، پس نمودار تابع f را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم. ابتدا نمودار تابع $y=\frac{x}{x+1}$ را رسم می‌کنیم. سپس روی بازهٔ $(-\infty,0)$ نمودار این تابع را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\frac{-x}{x+1}$ رسم شود. بدین ترتیب نمودار تابع f رسم می‌شود. بنابراین $R_f=\mathbb{R}-[-1,0)$.





راه‌حل دوم فرض کنید $f(x)=-\frac{1}{2}$. در این صورت

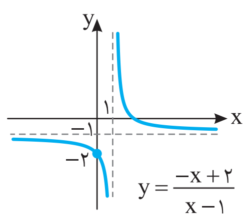
$$\frac{|x|}{x+1}=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2|x|=-x-1\Rightarrow 2|x|+x=-1$$

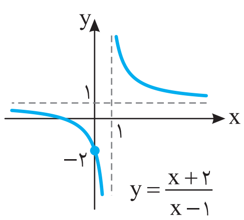
واضح است که اگر $x\ge0$، معادلهٔ بالا جواب ندارد. اگر $x<0$، آن‌گاه

$$-2x+x=-1\Rightarrow x=1\quad(\text{غ.ق.ق})$$

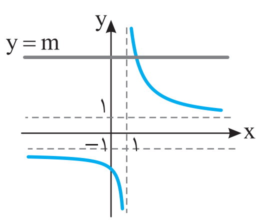
پس $-\frac{1}{2}$ در برد تابع قرار ندارد و فقط گزینهٔ (۴) به این صورت است.

۱۵۱۷- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x\ge0$ و $x\neq1$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ و اگر $x<0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-x+2}{x-1}$. بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\frac{x+2}{x-1}$ را رسم می‌کنیم و قسمتی از آن را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد انتخاب می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y=\frac{-x+2}{x-1}$ را رسم می‌کنیم و قسمتی از آن را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد انتخاب می‌کنیم.





پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. اگر $-1\le m\le1$، آن‌گاه خط $y=m$ نمودار تابع f را قطع نمی‌کند.



۱۵۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حد تابع f در $x=1$ برابر $-\infty$ است. پس $x=1$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $x^2+bx+c=0$ است. یعنی

$$x^2+bx+c=(x-1)^2=x^2-2x+1$$

پس $b=-2$، $c=1$ و $f(x)=\frac{x^2+ax}{(x-1)^2}$. از طرف دیگر $x=-2$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است، پس $f'(-2)=0$. بنابراین

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+ax)}{(x-1)^4}=\frac{(2x+a)(x-1)-2(x^2+ax)}{(x-1)^3}$$

$$f'(-2)=0\Rightarrow(-4+a)(-3)-2(4-2a)=0\Rightarrow a=-4$$

۱۵۱۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x=\frac{7\pi}{4}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و $f'(\frac{7\pi}{4})=0$. پس

$$f'(x)=-\sin x+a\cos x,\quad f'(\frac{7\pi}{4})=-(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{a\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow a=-1$$

۱۵۲۰- گزینهٔ ۳ جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌ای شامل نقطهٔ صفر رو به پایین است و در بقیهٔ جاها رو به بالاست. بنابراین مقادیر تابع f'' روی بازه‌ای شامل نقطهٔ صفر منفی‌اند و در بقیه جاها مثبت‌اند. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۳) این ویژگی‌ها را دارد.

۱۵۲۱- گزینهٔ ۱ از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=4x^3-12x+8=4(x-1)(x^2+x-2)=4(x-1)^2(x+2)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} x_1=1,\quad x_2=-2$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	

با توجه به جدول بالا تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد. خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۵۲۲- گزینهٔ ۲ نقطهٔ $(1,-2)$ روی نمودار تابع است، پس $f(1)=-2$، درنتیجه $a+b=-2$. همچنین

$$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+2bx\xrightarrow{f'(1)=0}-a+2b=0\xrightarrow{a+b=-2}$$

$$3b=-2\Rightarrow b=-\frac{2}{3},\ a=-\frac{4}{3}$$

بنابراین $f'(x)=\frac{4}{3}(\frac{1-x^3}{x^2})$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

پس نقطهٔ $(1,-2)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. ریاضی - ۸۹

۱۵۲۳- گزینهٔ ۱ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2+2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}+2(x-1)\sqrt[3]{x^2}=\frac{2(x-1)^2+6x(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

اکنون معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow x=1,\ x=\frac{1}{4}$$

تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sqrt[3]{x}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	ت.ن	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

با توجه به جدول، $x=\frac{1}{4}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۵۲۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-1,2]$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین، $f(x)=|x||x^2-1|$. بنابراین نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ نیز نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x & -1\le x\le 0\\ -x^3+x & 0\le x\le 1\\ x^3-x & 1\le x\le 2\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-1 & -1<x<0\\ -3x^2+1 & 0<x<1\\ 3x^2-1 & 1<x<2\end{cases}$$

در نتیجه $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

پس تابع f شش نقطهٔ بحرانی دارد. ریاضی - ۹۰

۱۵۲۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+5\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-9$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3(x^2-2x-3)=0\Rightarrow 3(x+1)(x-3)=0$$

$$x=-1,\ x=3\ \text{(غ.ق.ق)}$$

اکنون مقادیر $f(-2)$، $f(2)$ و $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم تا بیشترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-2,2]$ مشخص شود: $f(-2)=3$، $f(2)=-17$ و $f(-1)=10$. پس بیشترین مقدار تابع f در این بازه برابر ۱۰ است. تجربی - ۹۲

۱۵۲۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=-4x^3+12x^2\Rightarrow f''(x)=-12x^2+24x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=3$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=2$$

بنابراین جهت یکنوایی و تقعر نمودار f به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
f		$\nearrow\cap$		$\nearrow\cup$		$\nearrow\cap$		$\searrow\cap$	

روی بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(2,3)$ نمودار تابع f صعودی و تقعر آن رو به پایین است. تجربی - ۹۱

۱۵۲۷- گزینهٔ ۳ مشتق اول و دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\Rightarrow f'(x)=x^2-2x-3\Rightarrow f''(x)=2x-2$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-1, x=3,\quad f''(x)=0\Rightarrow x=1$$

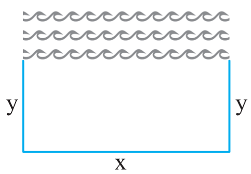
x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f''(x)$		−		−	0	+		+	
f		$\nearrow\cap$		$\searrow\cap$		$\searrow\cup$		$\nearrow\cup$	

پس روی بازهٔ $(1,3)$ نمودار تابع f نزولی و تقعر آن رو به بالاست.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۵۲۸- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر، $x+2y=88\Rightarrow x=88-2y$

می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی $S=xy$ ماکزیمم باشد:



$$S(y)=(88-2y)y=-2y^2+88y$$

$$S'(y)=-4y+88=0\Rightarrow y=22$$

$$S_{max}=968m^2$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۵۲۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$y=\begin{cases}x^3-4x^2 & x\geq 4 \text{ یا } x\leq 0\\ -x^3+4x^2 & 0\leq x\leq 4\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}3x^2-8x & x>4 \text{ یا } x\leq 0\\ -3x^2+8x & 0\leq x<4\end{cases}$$

$$y''=\begin{cases}6x-8 & x>4 \text{ یا } x<0\\ -6x+8 & 0<x<4\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		4		$+\infty$
y''		−	ت‌ن	+	0	−	ت‌ن	+	

جهت تقعر نمودار تابع در $x=0$، $x=\frac{4}{3}$ و $x=4$ تغییر می‌کند ولی فقط در $x=\frac{4}{3}$ و $x=0$ تابع مشتق‌پذیر است و خط مماس دارد. پس این دو طول نقاط عطف نمودار تابع هستند.

ریاضی - ۹۲

۱۵۳۰- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار تابع f مشخص است که تابع فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی به طول ۳ دارد. بنابراین $x=3$ جواب معادلهٔ $f'(x)=0$ است و $f'(x)$ در این نقطه تغییر علامت می‌دهد:

$$f(x)=ax^4+2x^3+bx^2$$

$$f'(x)=4ax^3+6x^2+2bx=2x(2ax^2+3x+b)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0,\quad 2ax^2+3x+b=0$$

پس $x=3$ باید جواب معادلهٔ $2ax^2+3x+b=0$ باشد و این معادله نباید جواب دیگری غیر از $x=0$ داشته باشد. بنابراین

$$x=0\Rightarrow 0+0+b=0\Rightarrow b=0,\quad x=3\Rightarrow 18a+9+0=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

تجربی - ۹۲

۱۵۳۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3-a}{x^2}\xrightarrow{f'(x)=0}x_0=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

$x=0$ جزء دامنهٔ تابع نیست و تنها باید $x=x_0$ را بررسی کنیم. در همسایگی این نقطه، علامت f' از منفی به مثبت تغییر می‌کند (به ازای همهٔ مقادیر a)، بنابراین همواره $x=x_0$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و تابع ماکزیمم نسبی ندارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۹

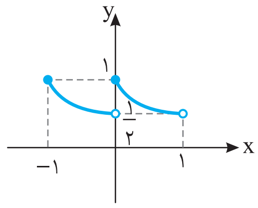
۱۵۳۲- گزینهٔ ۲ چون $0\leq x-[x]<1$، پس $-1<f(x)\leq 0$، بنابراین از اینکه تابع $g(x)=2^x$ اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود

$$g(-1)<g(f(x))\leq g(0)\Rightarrow \frac{1}{2}<(gof)(x)\leq 1$$

پس تابع gof مقدار ماکزیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی ندارد. به نمودار تابع در بازهٔ $[-1,1)$ توجه کنید.

$$-1\leq x<0\Rightarrow f(x)=-1-x\Rightarrow (gof)(x)=2^{-x-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$0\leq x<1\Rightarrow f(x)=-x\Rightarrow (gof)(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$



ریاضی - ۹۱

۱۵۳۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2x\sqrt[3]{x}+\frac{x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{6x^2+x^2-28}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-28}{\sqrt[3]{x^2}}$$

تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و در نقطه‌های $x=2$ و $x=-2$ مشتق آن صفر است. پس مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع f به‌صورت $\{-2,0,2\}$ است.

تجربی - ۸۳

۱۵۳۴- گزینهٔ ۴ تابع f در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-2,2]$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین تابع f در نقطه‌های $x=-1$ و $x=1$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها نیز نقطه‌های بحرانی هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x & -2\leq x\leq -1\\ -x^3+x & -1\leq x\leq 1\\ x^3-x & 1\leq x\leq 2\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-1 & -2<x<-1\\ -3x^2+1 & -1<x<1\\ 3x^2-1 & 1<x<2\end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پس تابع f شش نقطهٔ بحرانی دارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۵۳۵- گزینهٔ ۲ طول نقاط بحرانی تابع روی بازهٔ $(-4,3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x\Rightarrow f'(x)=x^2-2x-15$$

$$f'(x)=0\Rightarrow (x-5)(x+3)=0\Rightarrow x=-3,\ x=5$$

$x=5$ در بازهٔ مورد نظر نیست. برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم، مقدار تابع را در نقاط زیر با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-4)=-\frac{64}{3}-16+60=-\frac{64}{3}+44=\frac{68}{3}=22/\overline{6}$$

$$f(-3)=-\frac{27}{3}-9+45=-18+45=27$$

$$f(3)=\frac{27}{3}-9-45=-45$$

پس $f(-3)=27$ مقدار ماکزیمم مطلق و $f(3)=-45$ مینیمم مطلق تابع داده شده در بازهٔ مورد نظر است.

تجربی - ۹۵

۱۵۳۶- گزینهٔ ۲ باید مشتق دوم تابع را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2+9}{x^2+12}\Rightarrow f'(x)=\frac{12-9}{(x^2+12)^2}\times 2x=\frac{6x}{(x^2+12)^2}$$

$$f''(x)=\frac{6(x^2+12)^2-2(x^2+12)2x\times 6x}{(x^2+12)^4}=\frac{18(4-x^2)}{(x^2+12)^3}$$

برای آنکه $f''(x)>0$، باید $4-x^2>0$، یعنی $-2<x<2$. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $2-(-2)=4$.

ریاضی - ۸۸

۱۵۳۷- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع f را پیدا می‌کنیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=(x+3)\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\frac{3(x-1)}{4x\sqrt{x}}$$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cup$	

پس جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(0,1)$ رو به پایین است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۱ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۵۳۸- گزینهٔ ۳ چون طول نقطهٔ عطف برابر ۱ است، پس

$$\frac{-(-1)}{3a}=1\Rightarrow 3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

در ضمن، مختصات نقطهٔ عطف در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+b\xrightarrow{(1,-3)}-3=\frac{1}{3}-1-3+b\Rightarrow b=\frac{2}{3}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{2}{3}$ است. برای یافتن نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع، مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y'=x^2-2x-3\xrightarrow{y'=0}(x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=-1,3$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

بنابراین نقطه‌ای به طول ۱- نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است. مقدار تابع در این نقطه برابر است با

$$y(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+\frac{2}{3}=\frac{-1}{3}-1+3+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$$

تجربی - ۹۶

۱۵۳۹- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار می‌توان گفت تابع در نقطهٔ $x=-1$ مماس افقی دارد، پس $f'(-1)=0$. همچنین جهت تقعر نمودار در این نقطه تغییر کرده است، پس $f''(-1)=0$. بنابراین

$$f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=4x^3-3x^2+2ax+b\\ f''(x)=12x^2-6x+2a\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'(-1)=-4-3-2a+b=0\\ f''(-1)=12+6+2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a+b=7\\ 2a+18=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-9\\ b=-11\end{cases}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۱۵۴۰- گزینهٔ ۲ تابع روی بازهٔ $(-\infty,0)$ نزولی است، پس روی این بازه $f'(x)<0$ و روی بازهٔ $(0,+\infty)$ صعودی است، پس روی این بازه $f'(x)>0$. در ضمن تابع دو نقطهٔ عطف دارد، پس f' دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. در نهایت $y=0$ مجانب افقی f' است. تنها گزینه‌ای که تمام این شرایط را دارد گزینهٔ (۲) است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۵۴۱- گزینهٔ ۳ اگر تابع f در نقطهٔ c مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در این نقطه برابر صفر است، پس مشتق راست تابع نیز در این نقطه برابر صفر است. اگر تابع f در نقطهٔ c مشتق‌پذیر نباشد، مشتق راست آن در این نقطه مثبت است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۵۴۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطه‌های $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست، بنابراین این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x & x\le-\sqrt{3}\\ -x^3+3x & -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\ x^3-3x & x\ge\sqrt{3}\end{cases}$$

پس $f'(x)=\begin{cases}3x^2-3 & x<-\sqrt{3}\\ -3x^2+3 & -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\\ 3x^2-3 & x>\sqrt{3}\end{cases}$. در نتیجه

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	ت ن	$-$	0	$+$	0	$-$	ت ن	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

پس تابع f در چهار نقطه اکسترمم نسبی دارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

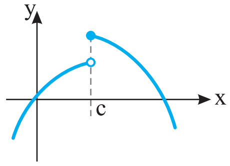
۱۵۴۳- گزینهٔ ۱ مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times x-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{x^2-(x^2+1)}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

پس تابع f' ریشه ندارد و در همهٔ نقاط دامنهٔ f، تابع مشتق‌پذیر است، بنابراین تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد.

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۵۴۴- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل مقابل هر سه گزینهٔ (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند. گزینهٔ (۴) درست است، زیرا با توجه به اینکه تابع f در همسایگی نقطهٔ $x=c$ تعریف شده است، در این نقطه مقدار تابع f در تعریف اکسترمم نسبی صدق می‌کند.



ریاضی - ۸۸

۱۵۴۵- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=-\frac{۲}{x^۲+۳}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x}{(x^۲+۳)^۲}$$

$$f''(x)=\frac{۴(x^۲+۳)^۲-۲(x^۲+۳)\times ۲x\times ۴x}{(x^۲+۳)^۴}=\frac{۱۲(۱-x^۲)}{(x^۲+۳)^۳}$$

به ازای $-۱<x<۱$، $f''(x)>۰$، پس تقعر نمودار تابع رو به بالا است.

ریاضی - ۹۰

۱۵۴۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم و محدوده‌ای را تعیین می‌کنیم که علامت آن منفی است:

$$f(x)=\begin{cases}x^۳-۳x^۲ & x\geq ۳\\ -x^۳+۳x^۲ & x\leq ۳\end{cases}$$

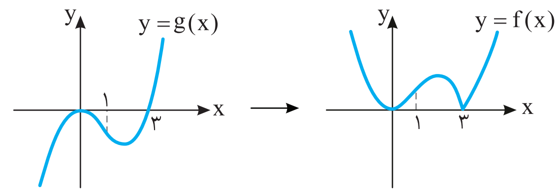
$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۶x & x>۳\\ -۳x^۲+۶x & x<۳\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}۶x-۶ & x>۳\\ -۶x+۶ & x<۳\end{cases}$$

$$f''(x)<۰\Rightarrow\begin{cases}۶x-۶<۰\Rightarrow x<۱\xrightarrow{x>۳}\text{غیرممکن}\\ -۶x+۶<۰\Rightarrow x>۱\xrightarrow{x<۳}۱<x<۳\end{cases}$$

پس $\max(b-a)=۳-۱=۲$.

راه‌حل دوم اگر $g(x)=x^۳-۳x^۲$، برای رسم نمودار تابع مورد نظر کافی است نمودار g را در محدودهٔ $x<۳$ نسبت به محور x قرینه کنیم.



چون طول نقطهٔ عطف تابع g برابر ۱ است، پس روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ تقعر نمودار تابع g رو به بالا است. به این ترتیب روی بازهٔ $(۱,۳)$ تقعر نمودار تابع f رو به پایین است.

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۵۴۷- گزینهٔ ۱ مشتق اول باید مثبت و مشتق دوم باید منفی باشد:

$$f'(x)=۲\sin x\cos x-۲\cos x=۲\cos x(\sin x-۱)>۰$$

$$\cos x<۰\Rightarrow\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۲}$$

$$f''(x)=۲\cos ۲x+۲\sin x=۲(-۲\sin^۲ x+\sin x+۱)$$

$$=۲(\sin x-۱)(-۲\sin x-۱)$$

$$f''(x)<۰\Rightarrow -۲\sin x-۱>۰\Rightarrow\sin x<-\frac{۱}{۲}$$

پس در بازهٔ $(\frac{۷\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۲})$ هر دو شرط برقرار است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۵۴۸- گزینهٔ ۳ ابتدا شرط صعودی بودن تابع را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۲(m+۲)x+۳\xrightarrow{\Delta\leq ۰}۴(m+۲)^۲-۳۶\leq ۰$$

$$-۳\leq m+۲\leq ۳\Rightarrow -۵\leq m\leq ۱$$

اکنون طول نقطهٔ عطف را پیدا می‌کنیم:

$$f''(x)=۶x-۲(m+۲)=۰\Rightarrow x=\frac{m+۲}{۳}$$

از شرط $-۵\leq m\leq ۱$ به‌دست می‌آید $-۱\leq\frac{m+۲}{۳}\leq ۱$.

تجربی - ۹۴

۱۵۴۹- گزینهٔ ۳ از تابع دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۳-۳x^۲ & x\geq -۱\\ -۱۳-\frac{۹}{x} & x\leq -۱\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۶x & x\geq -۱\\ \frac{۹}{x^۲} & x\leq -۱\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}۶x-۶ & x>-۱\\ -\frac{۱۸}{x^۳} & x<-۱\end{cases}$$

توابع f و f' روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند. تابع f'' در دو نقطه تغییر علامت می‌دهد: $x=۱$ و $x=-۱$ (در نقطهٔ $x=۱$ ضابطهٔ اول تابع f'' صفر می‌شود و در همسایگی راست نقطهٔ $x=-۱$ علامت f'' منفی و در همسایگی چپ، علامت آن مثبت است). چون در هر دو نقطه f' وجود دارد، پس دو نقطهٔ عطف داریم.

ریاضی - ۸۹

۱۵۵۰- گزینهٔ ۴ با توجه به گزینه‌ها و اینکه مجانب قائم نمودار در سمت راست محور y است، می‌توان نتیجه گرفت $b=-۴$. چون $f(۰)=\frac{a}{۴}$ و نمودار تابع، محور y را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است، پس $\frac{a}{۴}>۰\Rightarrow a>۰$

تجربی - ۹۳

۱۵۵۱- گزینهٔ ۳ عبارات گزینه‌های (۲) و (۴) درست هستند. همچنین می‌دانیم اگر f' در نقطهٔ اکسترمم نسبی c موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=۰$، پس گزینهٔ (۱) نیز عبارتی درست است. گزینهٔ (۳) نادرست است، زیرا هر نقطهٔ بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست، مانند $x=۰$ در $f(x)=x^۳$.

ریاضی - ۹۰

۱۵۵۲- گزینهٔ ۳ در تابع $f(x)=(x-۱)|(x-۱)(x+۲)|$، $x=-۲$ ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ مشتق‌پذیر نیست.

در $x=۱$ نیز مشتق تابع برابر صفر است و به همین دلیل این نقطه نیز جزء نقاط بحرانی تابع است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲(x+۲) & (x-۱)(x+۲)\geq ۰\\ -(x-۱)^۲(x+۲) & (x-۱)(x+۲)<۰\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow((x-۱)^۲(x+۲))'=۰$$

$$۲(x-۱)(x+۲)+(x-۱)^۲=(x-۱)(۳x+۳)=۰\Rightarrow x=۱,-۱$$

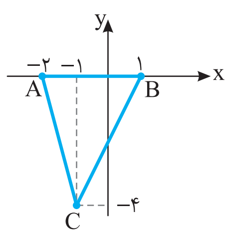
پس نقطهٔ بحرانی سوم، نقطه‌ای به طول $x=-۱$ است. بنابراین

نقاط بحرانی: $A(-۲,۰)$

$B(۱,۰)$, $C(-۱,-۴)$

در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$$



خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۵۵۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x^۲-x^۳}=\sqrt[3]{x^۳}-\sqrt[3]{x^۳-x^۲}$$

واضح است که برای هر x حقیقی $x^۳-x^۲\le x^۳$، پس $\sqrt[3]{x^۳-x^۲}\le\sqrt[3]{x^۳}$ و در نتیجه $f(x)\ge ۰$. از طرف دیگر $f(۰)=۰$. پس کمترین مقدار تابع برابر صفر است.

ریاضی - ۹۲

۱۵۵۴- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول x برابر با $f'(x)$ است. بنابراین $m=f'(x)=-x^۲+۴x-۱$.
بیشترین مقدار $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m'=-۲x+۴\xrightarrow{m'=۰}x=۲\Rightarrow m=۳$$

بنابراین خطی با شیب ۳ مورد نظر است که در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار تابع f مماس شده است. معادلهٔ این خط را می‌نویسیم:

$$y-f(۲)=۳(x-۲)\Rightarrow y-\frac{۱۰}{۳}=۳x-۶$$

این خط محور y را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند:

$$x=۰\Rightarrow y-\frac{۱۰}{۳}=۰-۶\Rightarrow y=-\frac{۸}{۳}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۷

۱۵۵۵- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x\sqrt{x^۲+۲}$$

$$f'(x)=\sqrt{x^۲+۲}+\frac{۲x^۲}{۲\sqrt{x^۲+۲}}=\frac{۲x^۲+۲}{\sqrt{x^۲+۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۴x\sqrt{x^۲+۲}-\frac{۲x(۲x^۲+۲)}{۲\sqrt{x^۲+۲}}}{x^۲+۲}=\frac{۲x(x^۲+۳)}{(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۲}}$$

پس جدول تعیین علامت $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	
f		$\cap$		$\cup$	

جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(۰,+\infty)$ رو به بالاست. پس کمترین مقدار a برابر صفر است.

تجربی - ۹۲

۱۵۵۶- گزینهٔ ۲ مشتق اول و مشتق دوم تابع باید منفی باشند:

$$f'(x)<۰\ ,\ f''(x)<۰\ ,\quad f(x)=(\cos x-۱)^۲-۱$$

$$f'(x)=-۲\sin x(\cos x-۱)=۲\sin x-\sin ۲x$$

$$f''(x)=۲\cos x-۲\cos ۲x=-۲(۲\cos^۲ x-\cos x-۱)$$

$$=-۲(۲\cos x+۱)(\cos x-۱)$$

$$f'(x)<۰\ ,\ f''(x)<۰\Rightarrow\begin{cases}\sin x<۰\\ \cos x<-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow \pi<x<\frac{۴\pi}{۳}$$

ریاضی - ۹۶

۱۵۵۷- گزینهٔ ۱ از تابع داده شده دوبار مشتق می‌گیریم:

$$y=۵x^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۵}{۳}}\Rightarrow y'=\frac{۱۰}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}-\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$y''=\frac{-۱۰}{۹}x^{\frac{-۴}{۳}}-\frac{۱۰}{۹}x^{\frac{-۱}{۳}}=\frac{-۱۰}{۹}x^{\frac{-۴}{۳}}(۱+x)$$

با حل معادلهٔ $y''=۰$ به‌دست می‌آید $x=-۱$. از طرف دیگر علامت y'' در این نقطه تغییر می‌کند، پس $x=-۱$ طول نقطهٔ عطف است.

ریاضی - ۹۵

۱۵۵۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم نقطهٔ مورد نظر $M(x,۰)$ باشد. می‌خواهیم $|AM-BM|$ بیشترین مقدار شود. پس

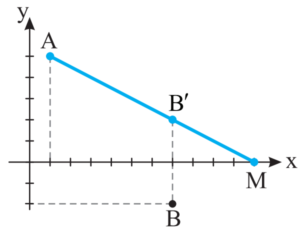
$$d=AM-BM=\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}-\sqrt{(x-۷)^۲+۴}$$

$$d'=\frac{۲(x-۱)}{۲\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}}-\frac{۲(x-۷)}{۲\sqrt{(x-۷)^۲+۴}}=۰$$

پس از حل معادلهٔ بالا به‌دست می‌آید $x=۱۱$. توجه کنید که در نقطهٔ $x=۱۱$ مقدار d چه ماکزیمم باشد چه مینیمم، مقدار $|AM-BM|$ ماکزیمم است.

راه‌حل دوم نقطهٔ مورد نظر را $M(x,۰)$ می‌گیریم. چون فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ $B(۷,-۲)$ دقیقاً به اندازهٔ فاصلهٔ آن از نقطهٔ $B'(۷,۲)$ است، با توجه به شکل، تفاضل فواصل مورد نظر سؤال زمانی بیشترین است که نقطهٔ M روی خط $B'A$ باشد. بنابراین

$$\frac{۵-۲}{۱-۷}=\frac{۲-۰}{۷-x}\Rightarrow ۲۱-۳x=-۱۲\Rightarrow ۳x=۳۳\Rightarrow x=۱۱$$



ریاضی - ۹۳

۱۵۵۹- گزینهٔ ۳ مجانب افقی تابع $y=a$ است. طبق شکل، نمودار از نقطهٔ برخورد مجانب و محور y عبور می‌کند، بنابراین $f(۰)=a$، در نتیجه $\frac{۲}{۱}=a$، پس $a=۲$. اکنون از اینکه نمودار در قسمت مثبت محور x بر آن مماس است، نتیجه می‌گیریم معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف مثبت دارد. پس

$$۲x^۲+bx+۲=۰\xrightarrow{\Delta=۰}b^۲=۱۶\xrightarrow[b<۰]{\text{ریشهٔ مضاعف مثبت}}b=-۴$$

ریاضی - ۹۱

۱۵۶۰- گزینهٔ ۳ به ازای ریشه‌های مخرج، تابع حفره دارد. بنابراین در این نقاط حد تابع موجود است. در نتیجه صورت و مخرج باید به صفر میل کنند. بنابراین

$$\sin x+\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴}$$

پس

$$a(-۱)+b=۰\Rightarrow a=b$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{a\sin ۲x+a}{\sin x+\cos x}=\frac{a(۱+\sin ۲x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{a(\sin x+\cos x)^۲}{\sin x+\cos x}=a(\sin x+\cos x)$$

$$f'(x)=a(\cos x-\sin x)=۰$$

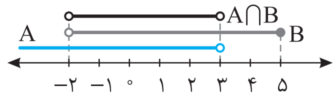
$$f'(x)=۰\Rightarrow\sin x=\cos x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

با توجه به نمودار مشخص است که مقدار تابع در اولین نقطهٔ اکسترمم نسبی سمت راست محور عرض‌ها برابر ۲ است. پس

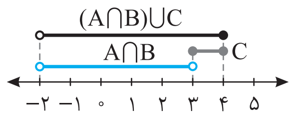
$$f(\frac{\pi}{۴})=۲\Rightarrow a(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

ریاضی - ۹۳

۱۵۶۱- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ $A\cap B$ به کمک شکل زیر پیدا می‌شود:

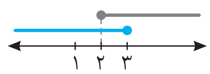


پس $A\cap B=(-۲,۳)$. اجتماع دو مجموعهٔ $A\cap B$ و C به شکل زیر است:



یعنی $(A\cap B)\cup C=(-۲,۴]$.

۱۵۶۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $(-\infty,۳)\cup[۲,+\infty)=\mathbb{R}$، بنابراین می‌خواهیم $\mathbb{R}-(۱,۴]$ را پیدا کنیم که حاصل آن $(-\infty,۱]\cup(۴,+\infty)$ است.



۱۵۶۳- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{۱}{۴}$ باید از $\frac{۱}{n+۳}$ بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۳}<\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۳>۴\Rightarrow n>۱$$

عدد $\frac{۱}{۴}$ نباید از $\frac{۱}{n+۱}$ بیشتر باشد، یعنی

$$\frac{۱}{n+۱}\geq\frac{۱}{۴}\Rightarrow n+۱\leq۴\Rightarrow n\leq۳$$

بنابراین عدد طبیعی n می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۱۵۶۴- گزینهٔ ۳ نقطهٔ وسط پاره‌خط، متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه است، یعنی

$$\frac{۲a^۲+۱+(-a^۲)}{۲}=\frac{a^۲+۱}{۲}=۵\Rightarrow a^۲=۹$$

بنابراین بازهٔ مورد نظر $[-۹,۱۹]$ است و طول این بازه برابر است با

$$۱۹-(-۹)=۲۸$$

۱۵۶۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم است که باید

$$\begin{cases}a+۳\leq-۱\\ b\geq۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\leq-۴\\ b\geq۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\geq۴\\ b\geq۱\end{cases}$$

بنابراین $b-a\geq۱+۴=۵$. در ضمن اگر $a=-۴$ و $b=۱$، شرط داده شده در مسئله برقرار است.

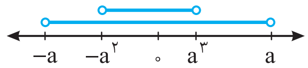
۱۵۶۶- گزینهٔ ۱ طول بازهٔ $(a,b+۲)$ برابر است با $b+۲-a=b-a+۲$ و طول بازهٔ $(۲a-۱,۲b+۳)$ برابر است با

$$۲b+۳-(۲a-۱)=۲(b-a+۲)$$

بنابراین طول بازهٔ $(a,b+۲)$ نصف طول بازهٔ $(۲a-۱,۲b+۳)$ است.

۱۵۶۷- گزینهٔ ۳ چون $۰<a<۱$، پس $a^۳<a$ و $-a<-a^۲$، بنابراین

$$(-a,a)\cap(-a^۲,a^۳)=(-a^۲,a^۳)$$



۱۵۶۸- گزینهٔ ۲ مجموعه‌های $A_۲$، $A_۳$، ... و $A_{۱۰}$ به‌شکل زیر هستند:

$$A_۲=[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}],\quad A_۳=[\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳}],\quad \dots,\quad A_{۱۰}=[\frac{۹}{۱۰},\frac{۱۱}{۱۰}]$$

واضح است که مجموعهٔ $A_۲$ شامل همهٔ مجموعه‌های دیگر است. یعنی همهٔ مجموعه‌های دیگر زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $A_۲$ هستند. پس اجتماع همهٔ این مجموعه‌ها همان $A_۲$ است.

۱۵۶۹- گزینهٔ ۴ از تساوی $(-۱,۱]\cap[a,b)=[۰,۱]$ معلوم می‌شود $a=۰$ و $b\geq۱$. از تساوی $(-۱,۱]\cup[a,b)=(-۱,۴)$ معلوم می‌شود $b=۴$. بنابراین

$$a+b=۴$$

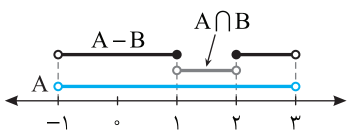
۱۵۷۰- گزینهٔ ۴ اشتراک این دو بازه فقط زمانی تک‌عضوی است که ابتدای بازهٔ $[-۲a+۱,+\infty)$ بر انتهای بازهٔ $(-\infty,a+۴]$ منطبق باشد. در نتیجه

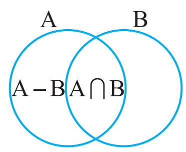
$$-۲a+۱=a+۴\Rightarrow a=-۱$$

۱۵۷۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم عضوهای A کوچک‌تر از یا مساوی با ۲ هستند و مجموعهٔ مورد نظر شامل اعضای A نیست، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) رد می‌شوند. اکنون دقت کنید که $B-A=(۰,۴)-[-۲,۲]=(۲,۴)$.

۱۵۷۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A-B=A-(A\cap B)=(-۱,۳)-(۱,۲)=(-۱,۱]\cup[۲,۳)$$





۱۵۷۳- گزینهٔ ۲ چون a عضو بازه است، پس $۲a-۱<a<۳-۳a$. از نابرابری $۲a-۱<a$ نتیجه می‌شود $a<۱$ و از نابرابری $a<۳-۳a$ نتیجه می‌شود $a<\frac{۳}{۴}$. بنابراین باید $a<\frac{۳}{۴}$. اکنون توجه کنید که شرط اینکه $(۲a-۱,۳-۳a)$ بازه باشد این است که $۲a-۱<۳-۳a$، یعنی $a<\frac{۴}{۵}$، که اگر $a<\frac{۳}{۴}$، این شرط هم برقرار است. بنابراین مجموعهٔ مقادیر ممکن a بازهٔ $(-\infty,\frac{۳}{۴})$ است.

۱۵۷۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که طول بازهٔ $(a-۵,۲a+۱)$ برابر است با $(۲a+۱)-(a-۵)$. بنابراین $۲a+۱-a+۵\leq۴$، پس $a\leq-۲$.

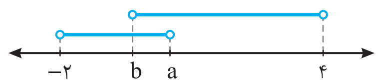
از طرف دیگر طول بازهٔ $(a-۶,۳a-۱)$ برابر است با

$$(۳a-۱)-(a-۶)=۲a+۵$$

چون $a\leq-۲$، پس $۲a\leq-۴$ و در نتیجه $۲a+۵\leq۱$. پس حداکثر طول بازهٔ مورد نظر برابر ۱ است.

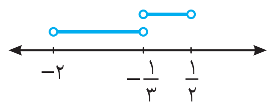
۱۵۷۵- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می‌شود

$$(b,۴)\cap[-۲,a)=(b,a)$$



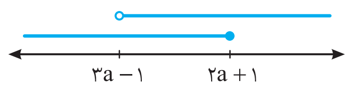
بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-\frac{۱}{۳}$. اکنون می‌توان نوشت

$$(b,a)\cup(-۲a-۱,b)=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})\cup(-۲,-\frac{۱}{۳})=(-۲,\frac{۱}{۲})-\{-\frac{۱}{۳}\}$$



۱۵۷۶- گزینهٔ ۱ چون اشتراک دو بازه از عدد -۲ شروع می‌شود و $a<a+۲$، پس $a+۲=-۲$، یعنی $a=-۴$. بنابراین تساوی داده شده به‌صورت $[-۴,۲]\cap[-۲,b]=[-۲,۱]$ است. چون اشتراک در سمت چپ به عدد ۱ ختم شده است و $۱<۲$، پس $b=۱$. در نتیجه $a-b=-۵$.

۱۵۷۷- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $(-\infty,۲a+۱]\cup(۳a-۱,+\infty)=\mathbb{R}$ وقتی برقرار است که $۳a-۱\le ۲a+۱$، یعنی $a\le ۲$.

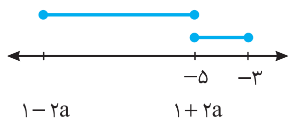


۱۵۷۸- گزینهٔ ۳ در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه مجموعه‌ای تک‌عضوی می‌شود.

حالت اول

$$۱-۲a=-۳\Rightarrow a=۲$$

حالت دوم



$$۱+۲a=-۵\Rightarrow a=-۳$$

اکنون توجه کنید شرط اینکه $[۱-۲a,۱+۲a]$ بازه باشد این است که $۱-۲a<۱+۲a$، یعنی $a>۰$. بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای a برابر ۲ است.

۱۵۷۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $I=(\frac{۱}{n},\frac{n+۲}{۲})$، بنابراین به ازای $n=۱$

$I=(۱,\frac{۳}{۲})\Rightarrow$ شامل هیچ عدد طبیعی‌ای نیست.

به‌ازای $n=۲$،

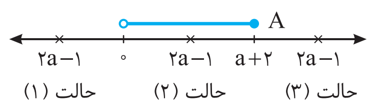
$$I=(\frac{۱}{۲},۲)\Rightarrow ۱\in I$$

به ازای $n=۳$،

$$I=(\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۲})\Rightarrow ۱,۲\in I$$

به این ترتیب به ازای $n\ge ۳$، بازهٔ I حداقل شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ است. پس فقط به ازای $n=۲$، بازهٔ داده شده فقط شامل یک عدد طبیعی است.

۱۵۸۰- گزینهٔ ۳ اگر به بازهٔ A دقت کنید معلوم می‌شود که $a+۲>۰$، پس $a>-۲$. از روی محور زیر، برحسب اینکه $۲a-۱$ در کدام ناحیه باشد، حاصل $A\cap B$ را به‌دست آورده‌ایم و در جدول زیر آن نوشته‌ایم.



	حالت (۱)	حالت (۲)	حالت (۳)
$A\cap B$	$(۰,a+۲]$	$(۲a-۱,a+۲]$	$\varnothing$

حالت (۱) قابل قبول نیست، زیرا در این حالت $A\cap B\not\subseteq(۱,۳]$. در حالت (۲) باید $۱\le ۲a-۱$ و $a+۲\le ۳$. از نابرابری اول به‌دست می‌آید $a\ge ۱$ و از نابرابری دوم به‌دست می‌آید $a\le ۱$ پس $a=۱$. در حالت (۳) باید $۲a-۱\ge a+۲$ و در نتیجه $a\ge ۳$. در این حالت اشتراک A و B برابر تهی است که زیرمجموعهٔ $(۱,۳]$ است. پس $a\in[۳,+\infty)\cup\{۱\}$.

۱۵۸۱- گزینهٔ ۴ چون A نامتناهی است و $A\subseteq B$، پس B هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعهٔ دیگری نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ نامتناهی است.

۱۵۸۲- گزینهٔ ۱ B نامتناهی است، پس B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون A متناهی است، پس $A\cap B'$ متناهی است. همچنین چون B نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ و $A\cup B$ نامتناهی هستند. توجه کنید که چون B نامتناهی است، پس مجموعهٔ مرجع هم نامتناهی است. در نتیجه A' نامتناهی است. پس متناهی یا نامتناهی بودن $A'\cap B$ مشخص نیست.

۱۵۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$B=\{۳,۴,۶,۸,۹,۱۰,\dots\}\ ,\quad C=\{۱,۳,۴,۶,۷,۸,۹,\dots\}$$

بنابراین $B\cap C=\{۳,۴,۶,۸,۹,\dots\}$ و در نتیجه $A-(B\cap C)=\{۱,۵\}$.

۱۵۸۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$|x-۵|>۳\Rightarrow\begin{cases}x-۵>۳\\x-۵<-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۸\\x<۲\end{cases}$$

بنابراین $A=\{\dots,۰,۱,۹,۱۰,\dots\}$. در نتیجه $A'=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ یعنی $n(A')=۷$.

راه‌حل دوم چون $A=\{x\,|\,|x-۵|>۳\}$، پس $A'=\{x\,|\,|x-۵|\le ۳\}$.

از نابرابری $|x-۵|\le ۳$ نتیجه می‌شود

$$-۳\le x-۵\le ۳\Rightarrow ۲\le x\le ۸$$

مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ است پس $A'=\{۲,۳,\dots,۸\}$، بنابراین $n(A')=۷$.

۱۵۸۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\begin{cases}n(A)+n(B')=۱۷\\n(B)+n(A')=۱۳\end{cases}\Rightarrow n(A)+n(A')+n(B)+n(B')=۳۰$$

$$n(U)+n(U)=۳۰\Rightarrow n(U)=۱۵$$

بنابراین $n(C)+n(C')=n(U)=۱۵$.

۱۵۸۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲n(B)+n(B)\Rightarrow ۲۴=۳n(B)\Rightarrow n(B)=۸$$

۱۵۸۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

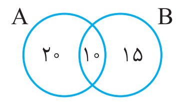
$$۱۶=۲۴-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۸$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$

$$۱۶=n(A-B)+۸+۳\Rightarrow n(A-B)=۱۶-۱۱=۵$$

۱۵۸۸- گزینهٔ ۲ تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با $30-20$، یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب B را دارند برابر $45-20=25$ است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب A را نیز دارند. پس ۱۵ محصول فقط عیب B را دارند و ۲۰ تا از آن‌ها فقط عیب A را دارند. پس ۳۵ تا از محصولات فقط یک عیب دارند.



۱۵۸۹- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ بینندگان شبکهٔ ۱ را با A و مجموعهٔ بینندگان شبکهٔ ۲ را با B نشان می‌دهیم:

$$n(A)=65,\quad n(B)=45,\quad n(A\cap B)=20$$

در نتیجه $n(A\cup B)=65+45-20=90$. یعنی ۹۰ نفر حداقل یکی از شبکه‌ها را تماشا می‌کنند، پس ۱۰ نفر هیچ‌یک از این دو شبکه را تماشا نمی‌کنند.

۱۵۹۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=3k-1+3-(k-2)=2k+4$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cap B)\le n(B)\Rightarrow k-2\le 3\Rightarrow k\le 5$$

بنابراین $n(A\cup B)=2k+4\le 2\times 5+4=14$.

۱۵۹۱- گزینهٔ ۳ گزینهٔ (۳) ممکن است نادرست باشد. برای مثال، $A=(0,1]$ و $B=[1,2)$ نامتناهی هستند، اما $A\cap B=\{1\}$ متناهی است.

۱۵۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $A\cap B=\{3,5\}$، پس

$$(A\cap B)'=\{1,2,4,6\},\quad C\cap(A\cap B)'=\{1,2\}$$

۱۵۹۳- گزینهٔ ۴ ابتدا مجموعه‌های A'، B' و C' را پیدا می‌کنیم:

$$A'=(-\infty,1]\cup(2,+\infty),\quad B'=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty),\quad C'=[0,+\infty)$$

بنابراین $A'-B'=(-1,1]$ و در نتیجه $(A'-B')-C'=(-1,0)$.

۱۵۹۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** مجموعهٔ مرجع $\{1,2,3,\dots,9\}$ است، پس $B'=\{1,2,4,6,8,9\}$ و $C=\{2,3,7,8,9\}$. در نتیجه

$$A\cap B'=\{1,6\}\Rightarrow (A\cap B')\cup C=\{1,2,3,6,7,8,9\}$$

$n((A\cap B')\cup C)=7$، بنابراین مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$، هفت عضو دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

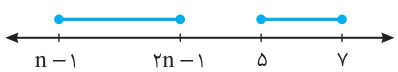
$$A\cap B'=A-B=\{1,6\},\quad C=\{2,3,7,8,9\}$$

بنابراین $(A\cap B')\cup C=\{1,6\}\cup\{2,3,7,8,9\}=\{1,2,3,6,7,8,9\}$.

پس مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$، هفت عضو دارد.

۱۵۹۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید برای اینکه $[n-1,2n-1]$ بازه باشد، باید $n>0$. اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول



$$2n-1<5\Rightarrow n<3$$

حالت دوم

$$n-1>7\Rightarrow n>8$$

بنابراین n اعداد طبیعی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.

۱۵۹۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

پس

$$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=24$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} n(A)+n(B)=24\\ n(A)-n(B)=4\end{cases}\Rightarrow n(B)=10$$

۱۵۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow n(A\cup B)=n(B)$$

طبق فرض $n(A\cup B)=9$، پس $n(B)=9$. از طرف دیگر،

$$n(A)+n(A')=n(B)+n(B')\Rightarrow n(A)+14=9+10\Rightarrow n(A)=5$$

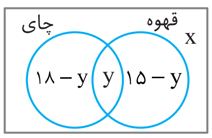
۱۵۹۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$100-x=85+70-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=55+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=0$، بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A\cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۵۹۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید x نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین $30-x$ نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و y نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.



$$x+18-y+y+15-y=30\Rightarrow x=y-3$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x\ge 0,\ y\ge 0,\quad 15-y\ge 0\Rightarrow y\le 15\Rightarrow 0\le y\le 15$$

پس

$$0\le y-3\le 12\Rightarrow 0\le x\le 12$$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

راه‌حل دوم فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

$$=12+15-n(A\cup B)=27-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\ge n(B)=15$، بنابراین

$$n(A\cap B)=27-n(A\cup B)\le 27-15=12$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر $A\subseteq B$، این وضعیت پیش می‌آید).

۱۶۰۰- گزینهٔ ۳ چون $A\subseteq B$، پس $A\cup B=B$. از طرف دیگر،

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\le n(B)$$

اکنون توجه کنید که $14=n(A)+2n(B)\le n(B)+2n(B)=3n(B)$

و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\ge 5$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(B)\ge 5$$

۱۶۰۱- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیشتر از قبلی دارد. پس شکل nاُم دارای $4+3(n-1)$ چوب کبریت است. یعنی $3n+1$ چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

۱۶۰۲- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت به شکل مرحلهٔ قبل اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم $5+4(n-1)$ چوب کبریت وجود دارد. یعنی $4n+1$ چوب کبریت در شکل n اُم وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۶۰۳- گزینهٔ ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله nاُم به تعداد $4\times(n-1)$ نقطه به ۵ نقطهٔ شکل (۱) اضافه شده است: $4(n-1)+5=4n+1$، یعنی شکل n اُم، $4n+1$ نقطه دارد. پس شکل دهم ۴۱ نقطه دارد.

۱۶۰۴- گزینهٔ ۱ در شکل nاُم تعداد مثلث‌های رنگ شده برابر است با

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

برای اینکه بدانیم در کدام شکل ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد، معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{n(n-1)}{2}=36\Rightarrow n^2-n-72=0\Rightarrow(n-9)(n+8)=0$$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=9$، یعنی در شکل نهم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد.

۱۶۰۵- گزینهٔ ۴ در شکل n اُم، $(n+1)^2$ دایره وجود دارد که $(n+1)$ تای آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی $(n+1)^2-(n+1)$ است که برابر است با n^2+n.

۱۶۰۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_n=3n^2-n+2a_1\xrightarrow{n=1}a_1=3-1+2a_1\Rightarrow a_1=-2$$

بنابراین $a_4=3\times16-4+2(-2)=40$.

۱۶۰۷- گزینهٔ ۳ با حل معادلهٔ $a_n=\frac{1}{80}$ مقدار n را که شمارهٔ جملهٔ مورد نظر است، می‌یابیم:

$$\frac{n^2+1}{81n^2-1}=\frac{1}{80}\Rightarrow 80n^2+80=81n^2-1\Rightarrow n^2=81\Rightarrow n=9$$

بنابراین a_9 برابر $\frac{1}{80}$ است.

۱۶۰۸- گزینهٔ ۲ باید ببینیم نامعادلهٔ $a_n<3/9$ برای کدام مقادیر n درست است:

$$\frac{4n-1}{n+6}<\frac{39}{10}\Rightarrow 40n-10<39n+39\times6\Rightarrow n<244$$

بنابراین $n\le243$، یعنی ۲۴۳ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۳/۹ هستند.

۱۶۰۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$72<a_n<160\Rightarrow 72<n^2+2n-8<160$$

بنابراین

$$n^2+2n-8<160\Rightarrow(n-12)(n+14)<0\Rightarrow 1\le n<12\Rightarrow 1\le n\le 11$$

$$n^2+2n-8>72\Rightarrow(n-8)(n+10)>0\Rightarrow n>8\Rightarrow n\ge9$$

در نتیجه n می‌تواند عددهای ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد.

۱۶۱۰- گزینهٔ ۱ عدد آخر دستهٔ اول ۵، عدد آخر دستهٔ دوم 3×5، عدد آخر دستهٔ سوم 5×5، ... و عدد آخر دستهٔ nاُم برابر $5\times(2n-1)$ است. پس عدد آخر دستهٔ چهل‌ونهم $5\times(2\times49-1)=485$ است. پس عدد اول دستهٔ پنجاهم، برابر ۴۸۷ خواهد بود.

۱۶۱۱- گزینهٔ ۳ شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم، $4+9(n-1)$ یعنی $9n-5$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۶۱۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	$1+3+1$	$2+4+2$	$3+5+3$	...	$n+(n+2)+n$

بنابراین در شکل nاُم، $3n+2$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه‌حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشهٔ شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل nاُم برابر $3(n+2)$ خواهد بود. پس در شکل nاُم، $3(n+2)-4$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۱۶۱۳- گزینهٔ ۳ تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل nاُم برابر است با
$1+2+3+\cdots+n$

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل nاُم برابر است با $0+1+2+\cdots+(n-1)$.
بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل nاُم، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ نشدهٔ آن است. پس در شکل سی‌اُم، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰تا است.

۱۶۱۴- گزینهٔ ۲ تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nاُم برابر است با

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\frac{n-1}{2n}$. به این ترتیب $\frac{n-1}{2n}=\frac{8}{17}$. پس $n=17$.

۱۶۱۵- گزینهٔ ۲ با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^2}{2}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها فرد است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها n^2-1 خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس $\frac{n^2-1}{2}+1$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، $\frac{n^2}{2}$ نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شمارهٔ زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با شمارهٔ فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل nاُم وجود دارد، پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^2-1}{2}+1=113\Rightarrow n^2-1=224\Rightarrow n^2=225\Rightarrow n=15$$

۱۶۱۶- گزینهٔ ۳ چون همهٔ جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_1=a_2 \Rightarrow \frac{2-k}{8}=\frac{4-k}{13} \Rightarrow 26-13k=32-8k \Rightarrow 5k=-6 \Rightarrow k=-\frac{6}{5}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{6}{5}$، آن‌گاه $a_n=\frac{2}{5}$.

۱۶۱۷- گزینهٔ ۲ چند جملهٔ اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینهٔ (۱) $2, 3, 4, 5, \dots$ گزینهٔ (۲) $2, 3, 10, 15, \dots$

گزینهٔ (۳) $2, 3, 10, 23, \dots$ گزینهٔ (۴) $2, 3, 8, 17, \dots$

بنابراین فقط $n^2-(-1)^n$ می‌تواند جملهٔ عمومی دنباله باشد.

۱۶۱۸- گزینهٔ ۲ به چند جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},\quad a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_n=\frac{1}{n}$، پس $a_{100}=\frac{1}{100}$.

۱۶۱۹- گزینهٔ ۴ بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=-3x^2+12x+c$ به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{-6}=2$ به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ مورد نظر برابر a_2 است. در نتیجه

$$a_2=8 \Rightarrow -3\times 4+12\times 2+c=8 \Rightarrow c=-4$$

۱۶۲۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a_1=\log_2\frac{1}{2},\quad a_2=\log_2\frac{2}{3},\quad a_3=\log_2\frac{3}{4},\quad \dots$$

بنابراین مجموع n جملهٔ اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$S_n=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\dots+\log_2\frac{n-1}{n}+\log_2\frac{n}{n+1}$$

$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\dots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}\right)=\log_2\frac{1}{n+1}=-\log_2(n+1)$$

بنابراین

$$-\log_2(n+1)=-3 \Rightarrow n+1=2^3=8 \Rightarrow n=7$$

۱۶۲۱- گزینهٔ ۳ چون $a_{n+1}-a_n=-2$، پس دنبالهٔ مورد نظر دنباله‌ای حسابی است که قدرنسبت آن -2 است. چون جملهٔ اول برابر ۳ است، پس

$$a_{10}=a_1+9d=3+9(-2)=-15,\quad a_5=a_1+4d=3+4(-2)=-5$$

بنابراین $\frac{a_{10}}{a_5}=\frac{-15}{-5}=3$.

۱۶۲۲- گزینهٔ ۲ از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$3(a_1+3d)+4(a_1+4d)-7(a_1+8d)=124$$

پس $-31d=124$ و در نتیجه $d=-4$.

۱۶۲۳- گزینهٔ ۴ قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$3x-4-(3x-1)=-3$$

بنابراین

$$4x-2=(3x-4)-3 \Rightarrow x=-5$$

بنابراین جملهٔ سوم دنباله برابر است با $4(-5)-2=-22$ و جملهٔ چهارم برابر است با $-22-3=-25$.

۱۶۲۴- گزینهٔ ۲ چون $a_1=-1$ و $d=2-(-1)=3$، پس

$$a_n=-1+3(n-1)$$

یعنی $a_n=3n-4$. بنابراین $a_k=3k-4=218$، پس $k=74$.

۱۶۲۵- گزینهٔ ۲ چون $a_1=2$ و $d=4$، پس جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=2+4(n-1)=4n-2$ است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید $a_n<500$ باشد. یعنی

$$4n-2<500 \Rightarrow n<\frac{502}{4} \Rightarrow n\le 125$$

پس ۱۲۵ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۱۶۲۶- گزینهٔ ۲ اندازهٔ زاویه‌های مثلث را به‌صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع اندازهٔ زاویه‌های مثلث برابر 180° است. پس

$$a-d+a+a+d=180^\circ \Rightarrow a=60^\circ$$

میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث همان a است که برابر 60° است.

۱۶۲۷- گزینهٔ ۴ زاویه‌های پنج‌ضلعی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازهٔ زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر 540° است، پس

$$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=540^\circ$$

بنابراین $5a=540^\circ$ و در نتیجه $a=108^\circ$. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه 86° است، پس $a-2d=86^\circ$ و در نتیجه $d=11^\circ$. پس اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه یعنی $a+2d$ برابر است با $108^\circ+2\times 11^\circ=130^\circ$.

۱۶۲۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $a_1=\sqrt{3}-5$ و $a_6=\sqrt{3}+5$، پس

$$a_6=a_1+5d \Rightarrow \sqrt{3}+5=\sqrt{3}-5+5d \Rightarrow d=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{3}-5+2$ یا همان $\sqrt{3}-3$ است.

راه‌حل دوم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر است با

$$d=\frac{(\sqrt{3}+5)-(\sqrt{3}-5)}{4+1}=\frac{10}{5}=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با

$$(\sqrt{3}-5)+2=\sqrt{3}-3$$

۱۶۲۹- گزینهٔ ۴ سه جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-d+a+a+d=15 \Rightarrow 3a=15 \Rightarrow a=5$$

از طرف دیگر،

$$(a-d)\times a\times(a+d)=45 \Rightarrow a(a^2-d^2)=45$$

چون $a=5$، پس

$$5(25-d^2)=45 \Rightarrow d^2=16 \Rightarrow d=\pm 4$$

۱۶۳۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر d باشد. در این صورت

$$a_1=d,\quad a_n=a_1+(n-1)d=d+(n-1)d=nd$$

به این ترتیب

$$a_1a_2a_3\dots a_9=10^8\times 10! \Rightarrow d(2d)(3d)\cdots(9d)=10^8\times 10!$$

$$d^9\times 9!=10^9\times 9! \Rightarrow d=10$$

بنابراین $a_{10}=10d=100$.

۱۶۳۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** با قرار دادن $n=۱$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۱=۱$. با قرار دادن $n=۲$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۲=\frac{۱}{۳}$.

بنابراین $d=a_۲-a_۱=-\frac{۲}{۳}$. پس $a_۱-d=۱+\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۳}$.

راه‌حل دوم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول $a_۱$ به‌صورت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ است، بنابراین $a_n=dn+(a_۱-d)=-\frac{۲}{۳}n+\frac{۵}{۳}$. پس

$$a_۱-d=\frac{۵}{۳}$$

۱۶۳۲- گزینهٔ ۲ از $a_۱+a_۳=۱۶$ نتیجه می‌شود

$$a_۱+a_۱+۲d=۱۶\Rightarrow a_۱+d=۸$$

چون $a_۲+a_۵+a_۸=۵۱$، پس

$$a_۱+d+a_۱+۴d+a_۱+۷d=۵۱\Rightarrow ۳a_۱+۱۲d=۵۱$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a_۱+d=۸\\ ۳a_۱+۱۲d=۵۱\end{cases}$ به‌دست می‌آید $d=۳$.

۱۶۳۳- گزینهٔ ۱ چون دنباله حسابی است، پس

$$۲a-۱=\frac{a+۱-۳a}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $d=(۲a-۱)-a=a-۱=-\frac{۱}{۲}$. پس جملهٔ عمومی دنباله به شکل زیر است:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(n-۱)=۱-\frac{n}{۲}$$

۱۶۳۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون $a+b,a+c,b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c-(a+b)=(b+c)-(a+c)\Rightarrow c-b=b-a$$

در نتیجه a,b,c دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون $a+b,a+c,b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c=\frac{a+b+b+c}{۲}\Rightarrow ۲(a+c)=a+۲b+c\Rightarrow a+c=۲b$$

در نتیجه a,b,c دنباله‌ای حسابی است.

۱۶۳۵- گزینهٔ ۳ جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت زیر است

$$a_n=۱۹۶-۴(n-۱)=۲۰۰-۴n$$

بنابراین $a_{۵۰}=۰$، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر -۴ است، پس

$$a_{۴۷}=۱۲,\quad a_{۴۸}=۸,\quad a_{۴۹}=۴,\quad a_{۵۰}=۰$$

۱۶۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d=\frac{a_{۱۰}-a_۲}{۱۰-۲}=-\frac{۳۲}{۸}=-۴$$

بنابراین $a_۴=a_۱+۳d=a_۱-۱۲=۱۵$ و در نتیجه $a_۱=۲۷$. بنابراین جملهٔ عمومی دنباله می‌شود $a_n=۲۷-۴(n-۱)=۳۱-۴n$. اکنون توجه کنید که

$$a_n>۰\Rightarrow ۳۱-۴n>۰\Rightarrow n\le ۷$$

بنابراین هفت جملهٔ نخست دنباله مثبت هستند.

۱۶۳۷- گزینهٔ ۲ چون $x^۲-۸x+۱۲=(x-۶)(x-۲)$، پس جواب‌های معادلهٔ مورد نظر a، ۲ و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$۲,۶,a\Rightarrow\frac{۲+a}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰\ ,\quad ۶,۲,a\Rightarrow\frac{۶+a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲$$

$$۲,a,۶\Rightarrow\frac{۲+۶}{۲}=a\Rightarrow a=۴\ ,\quad ۶,a,۲\Rightarrow\frac{۶+۲}{۲}=a\Rightarrow a=۴$$

$$a,۲,۶\Rightarrow\frac{a+۶}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲\ ,\quad a,۶,۲\Rightarrow\frac{a+۲}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰$$

بنابراین a ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۱۶۳۸- گزینهٔ ۳ اضلاع مثلث را $a-d,a,a+d$ در نظر می‌گیریم.
طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$(a-d)^۲+a^۲=(a+d)^۲\Rightarrow a^۲+d^۲-۲ad+a^۲=a^۲+d^۲+۲ad$$

$$a^۲=۴ad\Rightarrow a=۴d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a}{a-d}=\frac{۴d}{۴d-d}=\frac{۴d}{۳d}=\frac{۴}{۳}$$

۱۶۳۹- گزینهٔ ۳ چهار جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-۳d,a-d,a+d,a+۳d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-۳d+a-d+a+d+a+۳d=۰\Rightarrow ۴a=۰\Rightarrow a=۰$$

پس دنباله به‌صورت $-۳d,-d,d,۳d$ است و

$$۹d^۲+d^۲+d^۲+۹d^۲=۸۰\Rightarrow d^۲=۴$$

بنابراین، حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(۳d)(-۳d)=-۹d^۲=-۳۶$$

۱۶۴۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که m باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد. پس $m^۲+۴<m^۲+۳m+۴$.

اگر $m-۱$ عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ حاصل، برابر است با

$$d=\frac{m^۲+۳m+۴-m^۲-۴}{(m-۱)+۱}=\frac{۳m}{m}=۳$$

۱۶۴۱- گزینهٔ ۱ دنبالهٔ a_n، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه

$$a_۳=a_۱r^۲\Rightarrow a_۳=a_۱(\frac{۳}{۲})^۲=۳\Rightarrow a_۱=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $a_{۲۹}=a_۱(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۴}{۳}\times(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۲۶}}$.

۱۶۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[۴]{۲}$ واسطهٔ هندسی $\sqrt{a}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ است، پس

$$(\sqrt[۴]{۲})^۲=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}}$، در نتیجه

$$a_{۱۳}=a_۱r^{۱۲}=\sqrt{a}(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}})^{۱۲}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{۲^۴}{۲^۳})=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}\times۲=\frac{\sqrt[۶]{۲^۳}}{\sqrt[۶]{۲^۲}}(۲)=۲\sqrt[۶]{۲}$$

۱۶۴۳- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم جواب‌های معادله x_1 و x_2 باشند. در این صورت

$$\frac{x_1+x_2}{2}=4/5\Rightarrow x_1+x_2=9\ ,\quad \sqrt{x_1x_2}=1/5=\frac{3}{2}\Rightarrow x_1x_2=\frac{9}{4}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل $x^2-9x+\frac{9}{4}=0$ است که اگر طرفین آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $4x^2-36x+9=0$.

۱۶۴۴- گزینهٔ ۳ از تساوی $a_1a_6=27$ نتیجه می‌شود

$$a_1\times a_1r^5=27\Rightarrow a_1^2r^5=27$$

از تساوی $a_2a_4=9$ به‌دست می‌آید

$$a_1r\times a_1r^3=9\Rightarrow a_1^2r^4=9$$

از تقسیم طرفین دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{a_1^2r^5}{a_1^2r^4}=\frac{27}{9}\Rightarrow r=3$$

با جای‌گذاری $r=3$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_1=\pm\frac{1}{3}$. چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $a_1=\frac{1}{3}$ و در نتیجه $a_5=a_1r^4=\frac{1}{3}\times3^4=27$.

۱۶۴۵- گزینهٔ ۲ مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_5+a_8=a_1r^4+a_1r^7=a_1r^4(1+r^3)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با

$$a_7+a_8=a_1r^6+a_1r^7=a_1r^6(1+r)$$

بنابراین $\frac{a_5+a_8}{a_7+a_8}=\frac{a_1r^4(1+r^3)}{a_1r^6(1+r)}=\frac{1+r^3}{r^2(1+r)}=\frac{1-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})}=7$.

۱۶۴۶- گزینهٔ ۳ این جملات را به‌صورت $\frac{a}{r^2},\frac{a}{r},a,ar,ar^2$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^2}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^2=1024\Rightarrow a^5=2^{10}=4^5$$

در نتیجه جملهٔ وسط برابر ۴ است.

۱۶۴۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{2},\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,16\sqrt{2}$$

پس $a_1=\sqrt{2}$ و $a_9=16\sqrt{2}$. بنابراین

$$a_1r^8=16\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}r^8=16\sqrt{2}\Rightarrow r^8=16\Rightarrow(r^2)^4=2^4\Rightarrow r^2=2$$

در نتیجه $a_3=a_1r^2=2\sqrt{2}$.

راه‌حل دوم ابتدا قدرنسبت دنبالهٔ هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{7+1}=\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow r^8=16=2^4\Rightarrow r=\pm\sqrt{2}$$

$$a_3=a_1r^2=\sqrt{2}\times(\pm\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}$$

۱۶۴۸- گزینهٔ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر است با $-\frac{95}{8}-(-12)=\frac{1}{8}$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت $a_n=-12+\frac{1}{8}(n-1)$ است.

در نتیجه جملهٔ هشتادونهم این دنباله برابر است با $a_{89}=-12+\frac{1}{8}\times(89-1)=-1$. اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را با r نشان دهیم، آن‌گاه $(3r)^5=243r^5=$ جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی. بنابراین

$$(3r)^5=-1\Rightarrow3r=-1\Rightarrow r=-\frac{1}{3}$$

۱۶۴۹- گزینهٔ ۱ چون ۸ واسطهٔ حسابی عددهای a و b است، پس

$$a+b=16\Rightarrow b=16-a$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطهٔ هندسی عددهای a و $b+4$ می‌شود. بنابراین $64=a(b+4)=a(16-a+4)=20a-a^2$.

پس $a^2-20a+64=0$ و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است (توجه کنید در این معادله $\Delta>0$).

۱۶۵۰- گزینهٔ ۴ جملات دوم، ششم و چهاردهم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب به‌صورت $a+d$، $a+5d$ و $a+13d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+5d)^2=(a+d)(a+13d)\Rightarrow12d^2=4ad\Rightarrow a=3d$$

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با $r=\frac{a+5d}{a+d}=\frac{3d+5d}{3d+d}=\frac{8d}{4d}=2$.

۱۶۵۱- گزینهٔ ۲ چون $\frac{a_8}{a_6}=\sqrt{2}$، پس $\frac{a_1r^7}{a_1r^5}=\sqrt{2}$. در نتیجه $r^2=\sqrt{2}$. بنابراین $\frac{a_7}{a_3}=\frac{a_1r^6}{a_1r^2}=r^4=(r^2)^2=\sqrt{2}^2=2$.

۱۶۵۲- گزینهٔ ۳ چون 4^{3x} واسطهٔ هندسی 2^{x-4} و 8^{2-3x} است، پس

$$(4^{3x})^2=2^{x-4}\times8^{2-3x}\Rightarrow2^{12x}=2^{x-4}\times2^{6-9x}\Rightarrow2^{12x}=2^{2-8x}$$

بنابراین $12x=2-8x$، یعنی $x=\frac{1}{10}$.

۱۶۵۳- گزینهٔ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با

$$r=\frac{\log_{16}a}{\log_4 a}=\frac{\frac{\log a}{\log16}}{\frac{\log a}{\log4}}=\frac{\log4}{\log16}=\frac{\log4}{2\log4}=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$a_7=a_1r^6\Rightarrow\frac{1}{32}=\log_4 a\times\frac{1}{64}\Rightarrow\log_4 a=2\Rightarrow a=4^2=16$$

۱۶۵۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_5-a_1=130\Rightarrow a_1r^4-a_1=130\Rightarrow a_1(r^4-1)=130$$

$$a_4-a_2=25\Rightarrow a_1r^3-a_1r=25\Rightarrow a_1r(r^2-1)=25$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{r^4-1}{r(r^2-1)}=\frac{130}{25}\Rightarrow\frac{(r^2-1)(r^2+1)}{r(r^2-1)}=\frac{26}{5}\Rightarrow\frac{r^2+1}{r}=\frac{26}{5}$$

$$5(r^2+1)=26r\Rightarrow5r^2-26r+5=0\Rightarrow r=5\ ,\ r=\frac{1}{5}\ (\text{غ.ق.})$$

به این ترتیب، $a_1r(r^2-1)=25\Rightarrow a_1\times5\times24=25\Rightarrow a_1=\frac{5}{24}$

در نتیجه $a_2=a_1r=\frac{25}{24}$.

۱۶۵۵- گزینهٔ ۳ در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r^۶=\frac{b}{a}$.

در حالتی که چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r'^۵=(۲r)^۵=\frac{b}{a}$. بنابراین

$$r^۶=(۲r)^۵\Rightarrow r^۶=۳۲r^۵\Rightarrow r=۳۲$$

۱۶۵۶- گزینهٔ ۳ این سه عدد را به‌صورت $\frac{a}{r},a,ar$ در نظر می‌گیریم.

پس
$$\frac{a}{r}\times a\times ar=۶۴\Rightarrow a^۳=۶۴\Rightarrow a=۴$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r}+a+ar=۱۴\Rightarrow a(\frac{۱}{r}+۱+r)=۱۴$$
$$۴(\frac{۱}{r}+۱+r)=۱۴\Rightarrow ۲r^۲-۵r+۲=۰\Rightarrow r=\frac{۱}{۲},r=۲$$

بنابراین سه جملهٔ مورد نظر به ازای $r=\frac{۱}{۲}$، به‌صورت $۸,۴,۲$ و به ازای $r=۲$، به‌صورت $۲,۴,۸$ هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۱۶۵۷- گزینهٔ ۲ طول اضلاع مثلث را a، ar و $ar^۲$ در نظر می‌گیریم.
طبق قضیهٔ فیثاغورس، $a^۲+(ar)^۲=(ar^۲)^۲$. بنابراین

$$a^۲(۱+r^۲)=a^۲r^۴\Rightarrow r^۴-r^۲-۱=۰\Rightarrow r^۲=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}$$

۱۶۵۸- گزینهٔ ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases}۲y+x=۲x+y\Rightarrow y=x\\ ۲y+x=x+۴\Rightarrow ۲y=۴\Rightarrow y=۲\end{cases}$$

پس $x=y=۲$، بنابراین $x+۲y=۶$.

۱۶۵۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a_۳=a-۳,\quad a_۵=a-۵,\quad a_۶=a-۶$$

بنابر فرض، $(a-۵)^۲=(a-۳)(a-۶)$. بنابراین

$$a^۲-۱۰a+۲۵=a^۲-۹a+۱۸\Rightarrow a=۷$$

در نتیجه $a_{۱۰}=۷-۱۰=-۳$.

۱۶۶۰- گزینهٔ ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب $a+۲d$، $a+۴d$ و $a+۷d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+۴d)^۲=(a+۲d)(a+۷d)\Rightarrow ۲d^۲=ad\Rightarrow a=۲d$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی به‌صورت $۴d,۶d,۹d,\dots$ است که جملهٔ چهارم آن $\frac{۲۷}{۲}d$ است زیرا $r=\frac{۳}{۲}$ و $۹d\times\frac{۳}{۲}=\frac{۲۷}{۲}d$. همچنین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت زیر است:

$$a_n=a+(n-۱)d=۲d+(n-۱)d=(n+۱)d$$

به این ترتیب $a_{۱۲}=۱۳d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{۲۷}{۲}d}{۱۳d}=\frac{۲۷}{۲۶}$.

۱۶۶۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_۹+۴=۳a_۷\Rightarrow a_۱+۸d+۴=۳(a_۱+۶d)\Rightarrow ۴=۲a_۱+۱۰d$$

چون $d=-۳$، پس $a_۱=۱۷$. بنابراین

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۱۲}=\frac{۱۲}{۲}(۲\times۱۷+۱۱\times(-۳))=۶$$

۱۶۶۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مجموع شش جملهٔ نخست دنبالهٔ مورد نظر برابر است با $۳(۲۰۰+۵d)$. شش جملهٔ بعدی، یعنی جمله‌های $a_۷$، $a_۸$، ... و $a_{۱۲}$ دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول $a_۷$ و قدرنسبت d تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با

$$۳(۲a_۷+۵d)=۳(۲۰۰+۱۲d+۵d)=۳(۲۰۰+۱۷d)$$

به این ترتیب، با توجه به فرض،

$$۳(۲۰۰+۵d)=۵(۳(۲۰۰+۱۷d))\Rightarrow ۲۰۰+۵d=۱۰۰۰+۸۵d\Rightarrow d=-۱۰$$

راه‌حل دوم مجموع شش جملهٔ دوم برابر اختلاف مجموع دوازده جملهٔ اول و شش جملهٔ اول است. طبق فرض،

$$S_۶=۵(S_{۱۲}-S_۶)=۵S_{۱۲}-۵S_۶\Rightarrow ۶S_۶=۵S_{۱۲}$$

بنابراین

$$۶\times۳\times(۲a_۱+۵d)=۵\times۶\times(۲a_۱+۱۱d)\Rightarrow ۶a_۱+۱۵d=۱۰a_۱+۵۵d$$
$$-۴a_۱=۴۰d\Rightarrow d=-\frac{۱}{۱۰}a_۱=-\frac{۱}{۱۰}(۱۰۰)=-۱۰$$

۱۶۶۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$d=\frac{a_{۲۱}-a_{۱۵}}{a_{۲۷}-a_{۱۹}}=\frac{a_۱+۲۰d-(a_۱+۱۴d)}{a_۱+۲۶d-(a_۱+۱۸d)}=\frac{۶d}{۸d}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین قدرنسبت دنباله برابر $\frac{۳}{۴}$ است. از طرف دیگر،

$$a_۵=۱۳\Rightarrow a_۱+۴d=۱۳\Rightarrow a_۱=۱۳-۴\times\frac{۳}{۴}=۱۳-۳=۱۰$$

به این ترتیب $S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(۲\times۱۰+۱۶\times\frac{۳}{۴})=۲۷۲$.

۱۶۶۴- گزینهٔ ۴

$$S_۱=a_۱=۴-۳=۱$$
$$S_۲=a_۱+a_۲=۴\times۲^۲-۳\times۲=۱۰\xrightarrow{a_۱=۱}a_۲=۹$$

پس

$$d=a_۲-a_۱=۹-۱=۸$$

بنابراین جملهٔ عمومی این دنباله برابر است با

$$a_n=۱+(n-۱)\times۸=۸n-۷$$

۱۶۶۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید بین عددهای a و b تعداد $۲n$ واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. به این ترتیب، دنباله‌ای حسابی با $۲n+۲$ جمله داریم که جمله‌های اول و آخر آن a و b هستند و مجموع جمله‌های آن برابر است با $\frac{۲n+۲}{۲}(a+b)=\frac{۱۳}{۶}(n+۱)$. اکنون توجه کنید که مجموع $۲n$ واسطه‌ای که درج کرده‌ایم برابر است با $\frac{۱۳}{۶}(n+۱)-(a+b)$، که بنابر فرض برابر است با $۲n+۱$، یعنی

$$\frac{۱۳}{۶}(n+۱)-\frac{۱۳}{۶}=۲n+۱\Rightarrow ۱۳n+۱۳-۱۳=۱۲n+۶\Rightarrow n=۶$$

۱۶۶۶- گزینهٔ ۲ جملهٔ اول دنباله $a_1=\sqrt{2}$ و قدرنسبت دنباله $q=2$ است. پس $S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{\sqrt{2}(2^{10}-1)}{2-1}=1023\sqrt{2}$.

۱۶۶۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=a_1(1+q+q^2)$$

بنابراین

$$104=8(1+q+q^2)\Rightarrow q^2+q-12=0$$

$$(q+4)(q-3)=0\Rightarrow q=-4,\ q=3\ \text{(غ.ق.)}$$

۱۶۶۸- گزینهٔ ۳ مجموع سمت چپ معادله را حساب می‌کنیم:

$$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+\cdots+2^{x+5}=2^x(1+2^1+2^2+\cdots+2^5)$$

$$=2^x\left(\frac{2^6-1}{2-1}\right)=2^x\times 63$$

بنابراین معادله به‌صورت $2^x\times 63=504$ است و در نتیجه

$$2^x=\frac{504}{63}=8=2^3\Rightarrow x=3$$

۱۶۶۹- گزینهٔ ۱ جملهٔ اول دنباله ۶ و قدرنسبت آن $\frac{1}{2}$ است. بنابراین مجموع n جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{6\left((\frac{1}{2})^n-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=12\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)$$

در نتیجه

$$S_n>\frac{248}{21}\Rightarrow 12\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)>\frac{248}{21}\Rightarrow (\frac{1}{2})^n<\frac{1}{63}\Rightarrow n\geq 6$$

۱۶۷۰- گزینهٔ ۱ اگر مساحت مثلث اولیه برابر S باشد، در مرحلهٔ اول $\frac{3}{4}S$ و در مرحلهٔ دوم $\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}S$ رنگ می‌شود و همین‌طور ادامه می‌یابد.

بنابراین مساحت قسمت‌های رنگ شده دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ است. بنابراین

$$\frac{3}{4}S+\frac{1}{4}(\frac{3}{4}S)+(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4}S)+\cdots+(\frac{1}{4})^{n-1}(\frac{3}{4}S)>\frac{999}{1000}S$$

$$\frac{3}{4}S\left(\frac{(\frac{1}{4})^n-1}{\frac{1}{4}-1}\right)>\frac{999}{1000}S\Rightarrow 1-\frac{1}{4^n}>\frac{999}{1000}\Rightarrow\frac{1}{4^n}<\frac{1}{1000}\Rightarrow n\geq 5$$

۱۶۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow 120=\frac{n}{2}(-6+30)\Rightarrow n=10$$

۱۶۷۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{n-3}{2n}-\frac{n-2}{2n}=-\frac{1}{2n}$$

بنابراین مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ مورد نظر برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}\left(\frac{n-2}{n}-\frac{1}{2n}(n-1)\right)=\frac{n}{2}\left(\frac{n-3}{2n}\right)=\frac{n-3}{4}$$

راه‌حل دوم به‌ازای $n=1$، سه جملهٔ اول دنباله $-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2}$ هستند.

مجموع n جملهٔ نخست دنباله همان جملهٔ اول، یعنی $-\frac{1}{2}$ است. فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $n=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است.

۱۶۷۳- گزینهٔ ۳ مجموع n جملهٔ نخست دنباله برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

چون $a_1=50$ و $d=-4$، پس

$$S_n=\frac{n}{2}(100-4(n-1))=52n-2n^2$$

حداکثر مقدار عبارت درجهٔ دوم $-2n^2+52n$ به ازای $n=\frac{52}{4}=13$ به‌دست می‌آید، پس بیشترین مقدار بین S_nها برابر است با

$$S_{13}=338$$

۱۶۷۴- گزینهٔ ۱ اگر جملهٔ اول دنباله a_1 و قدرنسبت آن d باشد، آن‌گاه

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9d)=10a_1+45d$$

اگر ۲ واحد از قدرنسبت کم کنیم و k واحد به جملهٔ اول اضافه کنیم، مجموع ده جملهٔ اول می‌شود

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2(a_1+k)+9(d-2))=10a_1+10k+45d-90$$

چون قرار است مجموع ده جملهٔ اول ثابت بماند، پس باید

$$10k-90=0\Rightarrow k=9$$

۱۶۷۵- گزینهٔ ۳ مجموع سمت چپ معادله، مجموع جملات دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت ۳ است. فرض کنید تعداد عددهای سمت چپ معادله n باشد. در این صورت

$$\frac{n}{2}(2+3(n-1))=145\Rightarrow 3n^2-n-290=0$$

$$(n-10)(3n+29)=0\Rightarrow n=10,\ n=-\frac{29}{3}\ \text{(غ.ق.)}$$

بنابراین جملهٔ دهم دنباله برابر x است و $x=a_{10}=a_1+9d=1+27=28$.

۱۶۷۶- گزینهٔ ۱ مجموع n جملهٔ نخست برابر است با

$$S_n=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}=a_1(2^n-1)=a_12^n-a_1=2(a_12^{n-1})-a_1=2a_n-a_1$$

۱۶۷۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a_2=3\Rightarrow a_1q=3,\quad a_7=96\Rightarrow a_1q^6=96$$

در نتیجه

$$\frac{a_1q}{a_1q^6}=\frac{3}{96}\Rightarrow q^5=32\Rightarrow q=2$$

بنابراین $a_1=\frac{3}{q}=\frac{3}{2}$، پس

$$S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{3}{2}\times\frac{2^{10}-1}{2-1}=\frac{3}{2}(2^{10}-1)=\frac{3069}{2}$$

۱۶۷۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a,aq,aq^2,\dots$ برابر است با $S_n=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$. مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a,\frac{a}{q},\frac{a}{q^2},\dots$ برابر است با

$$S'_n=\frac{a((\frac{1}{q})^n-1)}{\frac{1}{q}-1}=\frac{\frac{a(1-q^n)}{q^n}}{\frac{1-q}{q}}=\frac{aq(1-q^n)}{(1-q)q^n}=\frac{a(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}$$

بنابراین

$$\frac{S_n}{S'_n}=\frac{\frac{a(q^n-1)}{q-1}}{\frac{a(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}}=q^{n-1}$$

راه‌حل دوم کافی است $n=1$ را در نظر بگیریم و نسبت جملهٔ اول دنبالهٔ اول به جملهٔ اول دنبالهٔ دوم را به‌دست آوریم که ۱ می‌شود. فقط مقدار گزینهٔ (۲) به‌ازای $n=1$ برابر ۱ است.

۱۶۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون دنبالهٔ مورد نظر غیرثابت است، پس $q\neq1$ و چون جمله‌های آن مثبت‌اند، پس q مثبت است. از طرف دیگر،

$$S_6=21S_2\Rightarrow\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=21\times\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}\Rightarrow1-q^6=21(1-q^2)$$

$$(1-q^2)(1+q^2+q^4)=21(1-q^2)\Rightarrow q^4+q^2-20=0$$

$$(q^4-4)(q^2+5)=0\Rightarrow q^2=4\Rightarrow q=2$$

۱۶۸۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases}S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}\\ S_5=\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}\end{cases}\Rightarrow\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}}=33$$

در نتیجه

$$33=\frac{q^{10}-1}{q^5-1}=q^5+1\Rightarrow q^5=32\Rightarrow q=2$$

بنابراین $\frac{a_5}{a_1}=\frac{a_1q^4}{a_1}=q^4=16$.

۱۶۸۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a_7+a_{14}=a_1+6d+a_1+13d=2a_1+19d=60$$

بنابراین $S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d)=\frac{20}{2}\times60=600$.

راه‌حل دوم چون $7+14=1+20$، پس $a_7+a_{14}=a_1+a_{20}$، بنابراین

$$S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})=10\times60=600$$

۱۶۸۲- گزینهٔ ۳ قدرنسبت دنباله برابر ۴ و جملهٔ اول آن ۳ است. پس مجموع n جملهٔ اول آن برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}(2\times3+4(n-1))=n(2n+1)=2n^2+n$$

بنابراین

$$2n^2+n>300\Rightarrow2n^2+n-300>0$$

می‌توان نامعادلهٔ فوق را حل کرد که جواب آن به‌صورت $n>\frac{-1+\sqrt{2401}}{4}=12$ می‌شود، یعنی $n\geq13$.

۱۶۸۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با $a_2-a_1=4$. از طرف دیگر،

$$S_n-a_n=56\Rightarrow\frac{n}{2}(-14+4(n-1))-(-7+4(n-1))=56$$

$$-7n+2n(n-1)+7-4(n-1)=56$$

$$2n^2-13n-45=0\Rightarrow(2n+5)(n-9)=0\Rightarrow n=9$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $d=a_2-a_1=4$. از طرف دیگر،

$$S_n-a_n=S_{n-1}=56$$

بنابراین

$$\frac{n-1}{2}(2a_1+(n-2)d)=56\Rightarrow\frac{n-1}{2}(2(-7)+4(n-2))=56$$

$$(n-1)(2n-11)=56\Rightarrow2n^2-13n-45=0$$

$$(2n+5)(n-9)=0\Rightarrow n=9$$

۱۶۸۴- گزینهٔ ۱ مجموع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر را حساب می‌کنیم:

$$a_1+a_2+a_3+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=10+80$$

$$(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})=90$$

با توجه به تساوی $a_{k+1}+a_{n-k}=a_1+a_n$ به‌دست می‌آید

$$(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)=90$$

$$3(a_1+a_n)=90\Rightarrow a_1+a_n=30$$

از طرف دیگر،

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=300\Rightarrow30\times\frac{n}{2}=300\Rightarrow n=20$$

۱۶۸۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که مجموع $k+1$ جملهٔ با ردیف فرد برابر است با $\frac{(k+1)(a_1+a_{2k+1})}{2}$. همچنین مجموع k جملهٔ با ردیف زوج برابر است با $\frac{k(a_2+a_{2k})}{2}$. (توجه کنید $\frac{a_2+a_{2k}}{2}=\frac{a_1+a_{2k+1}}{2}$)، بنابراین نسبت مورد نظر برابر با $\frac{k+1}{k}$ است.

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم دنباله سه‌جمله‌ای باشد $(k=1)$ و جملات آن به صورت a_1,a_2,a_3 باشند. در این صورت نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{2a_2}{a_2}=2$. فقط گزینهٔ (۴) به‌ازای $k=1$ برابر ۲ می‌شود.

۱۶۸۶- گزینهٔ ۲ اگر از مجموع پنج جملهٔ اول دنباله، مجموع چهار جملهٔ اول را کم کنیم، جملهٔ پنجم به‌دست می‌آید:

$$a_5=S_5-S_4=\frac{4}{3}(3^5-1)-\frac{4}{3}(3^4-1)=\frac{4}{3}(3^5-3^4)=216$$

۱۶۸۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $q=\sqrt[3]{3}$. مجموع شش جملهٔ دوم برابر اختلاف مجموع دوازده جملهٔ اول و شش جملهٔ اول است. پس

$$\frac{S_{12}-S_6}{S_6}=\frac{S_{12}}{S_6}-1=\frac{\frac{1\times(q^{12}-1)}{q-1}}{\frac{1\times(q^6-1)}{q-1}}-1=\frac{q^{12}-1}{q^6-1}-1=q^6=(\sqrt[3]{3})^6=9$$

۱۶۸۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$$

در نتیجه $a_n^2=2^{2n-2}=4^{n-1}$. بنابراین

$$a_1^2+\dots+a_n^2=4^0+4^1+\dots+4^{n-1}=\frac{4^n-1}{4-1}=\frac{4^n-1}{3}$$

۱۶۸۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به‌صورت $a_1,a_2,\dots,a_{2n}$ باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با $S_{2n}=\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}$. از طرف دیگر جمله‌های با ردیف زوج به‌صورت $a_2,a_4,\dots,a_{2n}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^2 و جملهٔ اول a_2 تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\frac{a_2(1-(q^2)^n)}{1-q^2}$ است. پس

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=3\times\frac{a_2(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)}\Rightarrow a_1=3\times\frac{a_1q}{1+q}\Rightarrow 3q=1+q\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم تعداد جمله‌های دنباله ۲ تا باشد، یعنی دنباله به صورت a_1,a_2 باشد. طبق فرض $a_1+a_2=3a_2$، بنابراین

$$a_1=2a_2\Rightarrow a_1=2a_1q\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

۱۶۹۰- گزینهٔ ۲ صورت کسر مجموع دوازده جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t و مخرج کسر مجموع چهار جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t^3 است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1\times\frac{1-t^{12}}{1-t}}{1\times\frac{1-t^{12}}{1-t^3}}=\frac{1-t^3}{1-t}=1+t+t^2$$

و حاصل آن به‌ازای $t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ می‌شود

$$1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{4+2-2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4}=3-\sqrt{5}$$

۱۶۹۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $a_1=8$ و $S_{13}=-52$. بنابراین

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\Rightarrow -52=\frac{13}{2}(2(8)+12\times d)\Rightarrow d=-2$$

۱۶۹۲- گزینهٔ ۳ قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با $15-18=-3$. بنابراین اگر مجموع n جملهٔ نخست این دنباله برابر با ۴۵ باشد،

$$\frac{n}{2}(2\times18-3(n-1))=45\Rightarrow 3n^2-39n+90=0$$

$$(n-3)(n-10)=0\Rightarrow n=3\ ,\ n=10$$

بنابراین مجموع سه جملهٔ نخست و همین‌طور مجموع ده جملهٔ نخست دنبالهٔ مورد نظر برابر ۴۵ است. در نتیجه حداکثر ده جمله از ابتدای دنباله را می‌توان جمع کرد تا مجموعشان برابر ۴۵ شود.

۱۶۹۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$S_{17}-S_{16}=a_{17}\Rightarrow a_{17}=26\ ,\quad S_{30}-S_{29}=a_{30}\Rightarrow a_{30}=0$$

از طرف دیگر،

$$a_{30}=a_{17}+13d\Rightarrow 0=26+13d\Rightarrow d=-2$$

۱۶۹۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$a_7=a_1+6d=16\qquad(1)$$

$$S_{12}=\frac{12}{2}(2a_1+11d)=12a_1+66d=174\qquad(2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، معلوم می‌شود که $a_1=-2$ و $d=3$. اکنون دقت کنید که a_2,a_4,a_6,a_8,a_{10} دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست a_2 و قدرنسبت $2d$ است. بنابراین مجموع جملات آن برابر می‌شود با

$$a_2+a_4+\dots+a_{10}=\frac{5}{2}(2(a_1+d)+4\times2d)$$

$$=\frac{5}{2}(2a_1+10d)=5a_1+25d=-10+75=65$$

۱۶۹۵- گزینهٔ ۱ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن بیست و چهار دستهٔ نخست از $1+2+3+\dots+24$ عدد طبیعی استفاده شده است. چون $1+2+\dots+24=\frac{24\times25}{2}=300$، پس برای نوشتن بیست و چهار دستهٔ نخست، از ۳۰۰ عدد طبیعی نخست استفاده شده است. در نتیجه، جملهٔ نخست دستهٔ بیست و پنجم برابر با ۳۰۱ است. بنابراین عددهای دستهٔ بیست و پنجم، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۳۰۱ و قدرنسبت ۱ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ۲۵ تا است. به این ترتیب مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{25}{2}(2\times301+(25-1)\times1)=7825$.

۱۶۹۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(\sqrt{a^2+1})^2=a(a+1)\Rightarrow a^2+1=a(a+1)\Rightarrow a=1$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی مورد نظر به‌صورت $1,\sqrt{2},2,\dots$ است. قدرنسبت این دنباله $\sqrt{2}$ و جملهٔ نخست آن ۱ است. بنابراین

$$S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{(\sqrt{2})^{10}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{31}{\sqrt{2}-1}=31(1+\sqrt{2})$$

۱۶۹۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$S_{99}-S_{90}=81\Rightarrow\frac{a_1(3^{99}-1)}{3-1}-\frac{a_1(3^{90}-1)}{3-1}=81$$

$$\frac{a_1\times3^{99}-a_1-a_1\times3^{90}+a_1}{3-1}=81$$

$$\frac{a_1\times3^{90}(3^9-1)}{3-1}=81\Rightarrow\frac{a_1(3^9-1)}{3-1}=\frac{81}{3^{90}}$$

بنابراین $S_9=\frac{81}{3^{90}}=\frac{3^4}{3^{90}}=3^{-86}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $S_{99}-S_{90}=a_{91}+a_{92}+\dots+a_{99}$. بنابراین

$$a_1q^{90}+a_1q^{91}+\dots+a_1q^{98}=81$$

$$q^{90}(a_1+a_1q+\dots+a_1q^8)=81$$

$$q^{90}(a_1+a_2+\dots+a_9)=81$$

در نتیجه

$$S_9=a_1+\dots+a_9=\frac{81}{q^{90}}=\frac{81}{3^{90}}=3^{-86}$$

۱۶۹۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\begin{cases} a_3-a_1=a_1q^2-a_1=a_1(q^2-1)=32 \\ a_4-a_2=a_1q^3-a_1q=a_1q(q^2-1)=96 \end{cases}\Rightarrow q=3$$

بنابراین $a_1(3^2-1)=32$. در نتیجه $a_1=4$. اکنون توجه کنید که

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{4(3^n-1)}{2}=2(3^n-1)=160$$

در نتیجه $3^n-1=80\Rightarrow 3^n=81\Rightarrow n=4$

۱۶۹۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=3\ ,\quad S_{3n}=\frac{a_1(q^{3n}-1)}{q-1}=39$$

در نتیجه

$$\frac{S_{3n}}{S_n}=1+q^n+q^{2n}=13\Rightarrow q^{2n}+q^n-12=0\Rightarrow (q^n-3)(q^n+4)=0$$

پس $q^n=-4$ یا $q^n=3$، که چون جمله‌های دنباله مثبت‌اند، پس $q^n=3$.

اکنون توجه کنید که

$$S_{4n}=\frac{a_1(q^{4n}-1)}{q-1}\ ,\quad \frac{S_{4n}}{S_n}=\frac{q^{4n}-1}{q^n-1}=q^{3n}+q^{2n}+q^n+1$$

بنابراین $S_{4n}=S_n(q^{3n}+q^{2n}+q^n+1)=3(27+9+3+1)=120$.

۱۷۰۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{S_n}{a_{n+1}-a_1}=\frac{\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}{a_1q^n-a_1}=\frac{1}{q-1}$$

از طرف دیگر، $-1\le q\le -\frac{1}{2}\Rightarrow -2\le q-1\le -\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{2}{3}\le \frac{1}{q-1}\le -\frac{1}{2}$

بنابراین مجموع بیشترین و کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{7}{6}$$

۱۷۰۱- گزینهٔ ۴ با استفاده از رابطهٔ $a_n=2a_{n-1}+1$ و جملهٔ اول $a_1=1$، جملهٔ هشتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_2=2\times1+1=3\ ,\quad a_3=2\times3+1=7\ ,\quad a_4=2\times7+1=15$$

$$a_5=2\times15+1=31\ ,\quad a_6=2\times31+1=63$$

$$a_7=2\times63+1=127\ ,\quad a_8=2\times127+1=255$$

تجربی - ۹۵

۱۷۰۲- گزینهٔ ۱ عدد $4\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی 2^a و 2^b است، پس

$$(4\sqrt{2})^2=2^a\times2^b\Rightarrow 2^5=2^{a+b}\Rightarrow a+b=5$$

واسطهٔ حسابی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{2}$، یعنی $\frac{5}{2}=2/5$ است. ریاضی - ۸۷

۱۷۰۳- گزینهٔ ۳ طبق فرض،

$$\begin{cases} a_{12}-a_{10}=5 \\ a_{12}+a_{10}=25 \end{cases}\Rightarrow a_{12}=15, a_{10}=10\Rightarrow d=\frac{a_{12}-a_{10}}{12-10}=\frac{5}{2}$$

از طرف دیگر،

$$d=\frac{a_{21}-a_{10}}{21-10}\Rightarrow a_{21}=a_{10}+11d=10+11\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{75}{2}=37/5$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۴

۱۷۰۴- گزینهٔ ۴ جملات را به‌صورت $a, a+3d, a+10d$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$(a+3d)^2=a(a+10d)\Rightarrow a^2+9d^2+6ad=a^2+10ad$$

$$9d^2=4ad\Rightarrow d=\frac{4}{9}a$$

بنابراین جملات دنبالهٔ هندسی $a, \frac{7}{3}a, \frac{49}{9}a$ هستند و قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\frac{7}{3}a}{a}=\frac{7}{3}$. تجربی - ۹۲

۱۷۰۵- گزینهٔ ۱ جملات a_4، a_6 و a_{12} از دنبالهٔ حسابی، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس جملهٔ ششم واسطهٔ هندسی جملات چهارم و دوازدهم است:

$$a_6^2=a_4\times a_{12}\Rightarrow (a_1+5d)^2=(a_1+3d)(a_1+11d)$$

$$a_1^2+10a_1d+25d^2=a_1^2+14a_1d+33d^2$$

$$4a_1d=-8d^2\Rightarrow a_1=-2d$$

بنابراین $r=\frac{a_6}{a_4}=\frac{a_1+5d}{a_1+3d}=\frac{-2d+5d}{-2d+3d}=3$. ریاضی - ۸۱

۱۷۰۶- گزینهٔ ۳ بنابر فرض‌های مسئله،

$$a_1+a_3=1\Rightarrow a_1+a_1q^2=1\Rightarrow a_1(1+q^2)=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{q^2+1}$$

$$S_4=\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{q^4-1}{(q^2+1)(q-1)}=\frac{(q^2+1)(q-1)(q+1)}{(q^2+1)(q-1)}=q+1=3$$

$$q=2, a_1=\frac{1}{5}$$

بنابراین

$$S_6=\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{\frac{1}{5}(2^6-1)}{2-1}=\frac{63}{5}=12/6$$

ریاضی - ۸۸

۱۷۰۷- گزینهٔ ۲ بنابر فرض مسئله،

$$S_{20}=3S_{12}\Rightarrow \frac{20}{2}(2a_1+19d)=3\times\frac{12}{2}(2a_1+11d)$$

$$20a_1+190d=36a_1+198d\Rightarrow 16a_1=-8d\Rightarrow d=-2a_1$$

از طرف دیگر،

$$a_3=6\Rightarrow a_1+2d=6\Rightarrow a_1-4a_1=6\Rightarrow a_1=-2\ ,\ d=4$$

بنابراین

$$a_{10}=a_1+9d=-2+9\times4=34$$

ریاضی - ۹۰

۱۷۰۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مجموع پنج جملهٔ دوم برابر اختلاف مجموع ده جملهٔ اول و مجموع پنج جملهٔ اول است. پس

$$S_5=\frac{1}{3}(S_{10}-S_5)\Rightarrow \frac{4}{3}S_5=\frac{1}{3}S_{10}\Rightarrow S_{10}=4S_5$$

$$\frac{10}{2}(2a_1+9d)=4\times\frac{5}{2}(2a_1+4d)\Rightarrow 2a_1+9d=4a_1+8d\Rightarrow d=2a_1$$

بنابراین $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$.

راه‌حل دوم با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$3(a_1+a_2+\cdots+a_5)=a_6+a_7+\cdots+a_{10}$$

$$2(a_1+a_2+\cdots+a_5)=(a_6-a_1)+(a_7-a_2)+\cdots+(a_{10}-a_5)$$

$$2\left(\frac{5}{2}(2a_1+4d)\right)=5d+5d+5d+5d+5d$$

$$10a_1+20d=25d\Rightarrow 5d=10a_1\Rightarrow d=2a_1$$

بنابراین $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۷۰۹- گزینهٔ ۱ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن نوزده دستهٔ نخست از $1+2+3+\cdots+19$ عدد استفاده شده است. چون $1+2+\cdots+19=\frac{19\times20}{2}=190$

پس برای نوشتن نوزده دستهٔ نخست، از ۱۹۰ عدد طبیعی نخست استفاده شده است. در نتیجه، جملهٔ نخست دستهٔ بیستم برابر با ۱۹۱ است. بنابراین عددهای دستهٔ بیستم، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۱۹۱ و قدرنسبت ۱ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ۲۰ تا است. به این ترتیب مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{20}{2}(2\times191+(20-1)(1))=10\times401=4010$.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۷۱۰- گزینهٔ ۳ صورت کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-t$ و مخرج کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-t^3$ است. بنابراین

$$1-t+t^2-t^3+\cdots+t^8=\frac{a_1(q^9-1)}{q-1}=\frac{1-(-t)^9}{1-(-t)}=\frac{1+t^9}{1+t}$$

$$1-t^3+t^6=\frac{1-(-t^3)^3}{1+t^3}=\frac{1+t^9}{1+t^3}$$

در نتیجه

$$\frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}=\frac{\frac{1+t^9}{1+t}}{\frac{1+t^9}{1+t^3}}=\frac{1+t^3}{1+t}=\frac{(1+t)(1-t+t^2)}{1+t}=1-t+t^2$$

پس حاصل عبارت مورد نظر به‌ازای $t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ برابر است با

$$1-\frac{1+\sqrt{17}}{2}+\frac{1+2\sqrt{17}+17}{4}=\frac{4-2-2\sqrt{17}+18+2\sqrt{17}}{4}=\frac{20}{4}=5$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۷۱۱- گزینهٔ ۴ در این دنباله، هر جمله از دو برابر جملهٔ قبل، دو واحد کمتر است، پس هشت جملهٔ اول برابر است با

$$a_1=3,\quad a_2=2\times3-2=4,\quad a_3=2\times4-2=6$$

$$a_4=2\times6-2=10,\quad a_5=2\times10-2=18,\quad a_6=2\times18-2=34$$

$$a_7=2\times34-2=66,\quad a_8=2\times66-2=130$$

بنابراین $a_8-a_7=130-66=64$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۷۱۲- گزینهٔ ۴ شرط اینکه سه عدد a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند این است که $2b=a+c$. بنابراین

$$2(3p+4)=(2p+3)+(5p-1)\Rightarrow p=6$$

$$d=3p+4-2p-3=p+1\xrightarrow{p=6}d=7$$

ریاضی - ۸۴

۱۷۱۳- گزینهٔ ۲ سه جمله را به‌صورت $\frac{a}{r},a,ar$ فرض می‌کنیم، در این صورت

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=216\Rightarrow a^3=216\Rightarrow a=6$$

$$\frac{a}{r}+a+ar=19\Rightarrow\frac{6}{r}+6+6r=19\Rightarrow 6r^2-13r+6=0$$

$$(3r-2)(2r-3)=0\Rightarrow\begin{cases} r=\frac{2}{3}\Rightarrow \text{سه جملهٔ متوالی: } 9,6,4\\ r=\frac{3}{2}\Rightarrow \text{سه جملهٔ متوالی: } 4,6,9\end{cases}$$

در هر دو صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر ۵ است.

تجربی - ۹۰

۱۷۱۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_5^2=a_1a_{11}\Rightarrow(a_1+4d)^2=a_1(a_1+10d)$$

$$a_1^2+8a_1d+16d^2=a_1^2+10a_1d\Rightarrow16d^2=2a_1d\Rightarrow a_1=8d$$

$$a_5=a_1+4d=12d,\ a_{11}=a_1+10d=18d\Rightarrow r=\frac{a_{11}}{a_5}=\frac{18d}{12d}=\frac{3}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۷۱۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید t_3، t_7 و t_9 جملات دنبالهٔ حسابی و a_1، a_2 و a_3 جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند. در این صورت

$$a_2^2=a_1a_3\Rightarrow t_7^2=t_3t_9\Rightarrow(t_1+6d)^2=(t_1+2d)(t_1+8d)$$

$$t_1^2+12t_1d+36d^2=t_1^2+8dt_1+2t_1d+16d^2$$

$$2t_1d+20d^2=0\Rightarrow2d(t_1+10d)=0\xrightarrow{d\neq0}t_1+10d=0$$

بنابراین جملهٔ یازدهم دنبالهٔ حسابی برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۱۷۱۶- گزینهٔ ۴ بنابر فرض مسئله،

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{153}{136}\Rightarrow 136S_6=153S_3$$

$$136a_1\left(\frac{q^6-1}{q-1}\right)=153a_1\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)\Rightarrow136(q^3-1)(q^3+1)=153(q^3-1)$$

$$136(q^3+1)=153\Rightarrow q^3=\frac{153}{136}-1=\frac{17}{136}=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$a_5=a_1q^4=\frac{1}{16}a_1\Rightarrow a_1=16a_5$$

ریاضی - ۸۹

۱۷۱۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** به بیست جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+3d,\ldots,a_1+18d,a_1+19d$$

جملات ردیف فرد یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند و جملات ردیف زوج یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1+d و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند. پس

$$\begin{cases}\text{فردها } S=\frac{10}{2}(a_1+a_1+18d)=135\\ \text{زوج‌ها } S=\frac{10}{2}(a_1+d+a_1+19d)=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_1+18d=27\\ a_1+10d=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\ d=\frac{3}{2}\end{cases}$$

راه‌حل دوم طبق فرض،

$$\begin{cases} a_2+a_4+\cdots+a_{20}=150 \\ a_1+a_3+\cdots+a_{19}=135 \end{cases}$$

اگر طرفین معادلات فوق را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{20}-a_{19})=15 \Rightarrow 10d=15 \Rightarrow d=\frac{3}{2}$$

اگر طرفین معادلات فوق را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}=285$$

$$\frac{20}{2}(2a_1+19d)=285 \Rightarrow 10(2a_1+\frac{57}{2})=285 \Rightarrow a_1=0$$

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۱۷۱۸- گزینهٔ ۳ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست از ۲۹+...+۳+۲+۱ عدد استفاده شده است. چون

$$1+2+3+\cdots+29=\frac{29\times30}{2}=435$$

پس برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جملهٔ اول دستهٔ سی‌اُم، ۴۳۶اُمین عدد فرد و جملهٔ آخر آن (۴۳۶+۲۹) اُمین عدد فرد است. از طرف دیگر، جملهٔ عمومی عددهای فرد به‌صورت $a_n=2n-1$ است، پس

$$a_{465}+a_{436}=2(465)-1+2(436)-1=2(465+436-1)=2(900)=1800$$

تجربی - ۹۴

۱۷۱۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به‌صورت $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ باشند، در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با

$$S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$$

از طرف دیگر جمله‌های با ردیف فرد به‌صورت $a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^2 و جملهٔ اول a_1 است. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2}$ است. بنابراین

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=3\times\frac{a_1(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow \frac{3}{1+q}=1 \Rightarrow q=2$$

ریاضی - ۹۴

۱۷۲۰- گزینهٔ ۱ صورت کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t و مخرج کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t^3 است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1\times\frac{1-t^{12}}{1-t}}{1\times\frac{1-t^{12}}{1-t^3}}=\frac{1-t^3}{1-t}=\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{1-t}=1+t+t^2$$

و حاصل آن به ازای $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ می‌شود

$$1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{4-2+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4}=2$$

ریاضی - ۹۳

۱۷۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $0<a<b$، آن‌گاه $\sqrt{a}<\sqrt{b}$. بنابراین

$$5<9\Rightarrow\sqrt{5}<\sqrt{9}\Rightarrow\sqrt{5}<3\Rightarrow\sqrt{5}-3<0$$

در نتیجه $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=|\sqrt{5}-3|=-(\sqrt{5}-3)=3-\sqrt{5}$. از طرف دیگر، $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}=\sqrt{3}-2$. همین‌طور

$$4<5\Rightarrow\sqrt{4}<\sqrt{5}\Rightarrow 2<\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{5}-2>0$$

بنابراین $\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4}=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$. به این ترتیب عبارت مورد نظر برابر است با $3-\sqrt{5}+\sqrt{3}-2+\sqrt{5}-2=\sqrt{3}-1$.

۱۷۲۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[7]{8\sqrt[4]{4}}=\sqrt[7]{2^3\sqrt[4]{2^2}}=\sqrt[7]{2^3\sqrt{2}}=2^{\frac{3}{7}}\times 2^{\frac{1}{14}}=2^{\frac{3}{7}+\frac{1}{14}}=2^{\frac{7}{14}}=\sqrt{2}$$

۱۷۲۳- گزینهٔ ۴ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{27}}-\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{27}\times\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{27}-\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{27}\times\sqrt[3]{3}}=\frac{3-3}{\sqrt[5]{27}\times\sqrt[3]{3}}=0$$

۱۷۲۴- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر را به شکل اعداد توان‌دار با نمای گویا می‌نویسیم:

$$3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2}}}=3^1\times 2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{5}{4}}\times 2^{\frac{5}{8}}$$

$$2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}}=2^1\times 3^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{5}{4}}\times 3^{\frac{5}{8}}$$

بنابراین $A=\dfrac{3^{\frac{5}{4}}\times 2^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{5}{4}}\times 3^{\frac{5}{8}}}=\dfrac{3^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{5}{8}}}=(\frac{3}{2})^{\frac{5}{8}}=\sqrt[8]{(\frac{3}{2})^5}$.

۱۷۲۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\times\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}\times\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{12}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{20}}$$

$$=x^{\frac{30+10+20+5+15+3}{60}}=x^{\frac{83}{60}}=x^{1+\frac{23}{60}}=x\sqrt[60]{x^{23}}$$

۱۷۲۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[n]{9}\times\sqrt[2n]{3}=9^{\frac{1}{n}}\times 3^{\frac{1}{2n}}=3^{\frac{2}{n}}\times 3^{\frac{1}{2n}}=3^{\frac{5}{2n}}=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$$

پس

$$\frac{5}{2n}=\frac{1}{2}\Rightarrow n=5$$

در نتیجه $\sqrt[n]{37-n}=\sqrt[5]{37-5}=\sqrt[5]{32}=2$.

۱۷۲۷- گزینهٔ ۴ چون x عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=3\Rightarrow\sqrt[3]{\sqrt{x^2\times x}}=3\Rightarrow\sqrt[6]{x^3}=3\Rightarrow\sqrt{x}=3$$

بنابراین $x=9$ و در نتیجه

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x}}=\sqrt{9\sqrt[3]{9}}=\sqrt{9}\sqrt{\sqrt[3]{9}}=3\sqrt[6]{3^2}=3\sqrt[3]{3}$$

۱۷۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^{\frac{5}{2}}=32\Rightarrow(x^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}}=(2^5)^{\frac{2}{5}}\Rightarrow x=2^2$$

بنابراین

$$x^{\frac{2}{3}}=(2^2)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}=2^{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{2}$$

۱۷۲۹- گزینهٔ ۳ ابتدا x، y و z را ساده‌تر می‌کنیم:

$$x=a^{\frac{3}{4}},\quad y=a^{\frac{4}{3}},\quad z=a^{\frac{10}{12}}=a^{\frac{5}{6}}$$

از طرف دیگر، $\frac{4}{3}>\frac{5}{6}>\frac{3}{4}$ و چون $0<a<1$، پس

$$a^{\frac{4}{3}}<a^{\frac{5}{6}}<a^{\frac{3}{4}}\Rightarrow y<z<x$$

۱۷۳۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اولاً واضح است که $\sqrt[4]{0}=0$ و ریشهٔ چهارم عدد صفر در بازهٔ مورد نظر قرار دارد. اکنون فرض می‌کنیم a عددی مثبت باشد که ریشهٔ چهارم مثبت آن در بازهٔ $(0,4)$ قرار دارد. یعنی

$$0<\sqrt[4]{a}<4\Rightarrow 0<(\sqrt[4]{a})^4<4^4\Rightarrow 0<a<256$$

همچنین فرض می‌کنیم b عددی مثبت باشد که ریشهٔ چهارم منفی آن در بازهٔ $(-3,0)$ قرار دارد. یعنی

$$-3<-\sqrt[4]{b}<0\Rightarrow 0<\sqrt[4]{b}<3\Rightarrow 0<(\sqrt{b})^4<3^4\Rightarrow 0<b<81$$

بنابراین a می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ و b می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می‌توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... و ۲۵۵ حداقل یک ریشهٔ چهارم در بازهٔ $(-3,4)$ دارند. تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶تاست.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$-3<\sqrt[4]{x}<4\Rightarrow-\sqrt[4]{81}<\sqrt[4]{x}<\sqrt[4]{256}\Rightarrow 0\le x<256$$

پس تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶تاست.

۱۷۳۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $x<0$.

$$\sqrt[4]{-x^5}=\sqrt[4]{(-x)x^4}=\sqrt[4]{-x}\times\sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{-x}\times|x|=-x\sqrt[4]{-x}$$

راه‌حل دوم چون $x<0$، حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-1$ می‌یابیم:

$$\sqrt[4]{-x^5}=\sqrt[4]{1}=1$$

فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $x=-1$ برابر ۱ است.

۱۷۳۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}=\sqrt[4\times 5]{81}=\sqrt[5]{\sqrt[4]{81}}=\sqrt[5]{3}$$

$$\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{2^5\times 3}=\sqrt[5]{2^5}\times\sqrt[5]{3}=2\sqrt[5]{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt[5]{81}}=\frac{3}{\sqrt[5]{3^4}}\times\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3}}=\frac{3\times\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{3\sqrt[5]{3}}{3}=\sqrt[5]{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[5]{3}-2\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{3}=-2\sqrt[5]{3}$.

۱۷۳۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $\sqrt[6]{2}=a$، در این صورت

$$\sqrt[6]{2}=a\Rightarrow 2^{\frac{1}{6}}=a\Rightarrow (2^{\frac{1}{6}})^3=a^3\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}}=a^3\Rightarrow\sqrt{2}=a^3$$

و

$$\sqrt[6]{2}=a\Rightarrow 2^{\frac{1}{6}}=a\Rightarrow(2^{\frac{1}{6}})^2=a^2\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}}=a^2\Rightarrow\sqrt[3]{2}=a^2$$

بنابراین $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[6]{2}}=\frac{a^3+a^2}{1+a}=\frac{a^2(a+1)}{1+a}=a^2=\sqrt[3]{2}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[6]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[6]{2}+1)}{1+\sqrt[6]{2}}=\sqrt[3]{2}$$

۱۷۳۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$x\left(\sqrt[7]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^7}}\right)=\sqrt[7]{x^7\left(\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^7}\right)}=\sqrt[7]{\frac{x^7}{x^8}-\frac{x^7}{x^7}}=\sqrt[7]{\frac{1}{x}-1}$$

در نتیجه $\sqrt[7]{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{2}$، پس

$$\frac{1}{x}-1=\frac{1}{128}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{129}{128}\Rightarrow x=\frac{128}{129}$$

راه‌حل دوم از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$x\sqrt[7]{\frac{1}{x^7}\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{1}{2}\Rightarrow x\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt[7]{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x}-1=\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{129}{128}\Rightarrow x=\frac{128}{129}$$

۱۷۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که x مثبت است. می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[3]{3\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt[4]{3}=\sqrt[3]{\sqrt{9x}}=\sqrt[6]{9x}\Rightarrow(\sqrt[4]{3})^{12}=(\sqrt[6]{9x})^{12}$$

$$3^3=(9x)^2\Rightarrow 3\sqrt{3}=9x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۷۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x>0$. می‌توان نوشت

$$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3^2}}}$$

$$x^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{1}{12}}\times x^{\frac{1}{24}}=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{6}}\times(3^2)^{\frac{1}{24}}\Rightarrow x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$$

$$x^{\frac{9}{24}}=3^{\frac{9}{12}}\Rightarrow x^{\frac{1}{24}}=3^{\frac{1}{12}}\Rightarrow(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{12}}=3^{\frac{1}{12}}\Rightarrow x^{\frac{1}{2}}=3\Rightarrow x=9$$

۱۷۳۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[6]{9^{3x-6}}=\sqrt[6]{(3^2)^{3(x-2)}}=3^{\frac{6(x-2)}{6}}=3^{x-2}$$

$$\sqrt[3]{27^{4x-2}}=\sqrt[3]{3^{3(4x-2)}}=3^{\frac{3(4x-2)}{3}}=3^{4x-2}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{3^{x-2}}{3^{4x-2}}=27\Rightarrow 3^{x-2-(4x-2)}=3^3\Rightarrow 3^{-3x}=3^3\Rightarrow -3x=3\Rightarrow x=-1$$

۱۷۳۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $a>0$. در تساوی داده شده اعداد را با نمای گویا می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{5}}\times a^{\frac{1}{20}}}=3\Rightarrow\frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}}}=3\Rightarrow\frac{a^1}{a^{\frac{1}{2}}}=3\Rightarrow a^{\frac{1}{2}}=3\Rightarrow(a^{\frac{1}{2}})^2=3^2$$

بنابراین $a=9$.

۱۷۳۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{6}}\ ,\quad \sqrt[3]{b\sqrt{a}}=b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}$$

بنابراین

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\times\sqrt[3]{b\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{6}}\times b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{6}}\times b^{\frac{3}{6}}=(a^4)^{\frac{1}{6}}\times(b^3)^{\frac{1}{6}}$$

$$=(a^4b^3)^{\frac{1}{6}}=(27)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{3}{6}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

راه‌حل دوم فرض کنید $a=1$ و $b=3$. در این صورت

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\times\sqrt[3]{b\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{3}}\ \sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{6}}=\sqrt{3}$$

۱۷۴۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** چون $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$، پس $0<a<1$ و در نتیجه واضح است که $\sqrt[4]{a}>\sqrt{a}$ و $\sqrt{a}>a$. همچنین از فرض $0<a<1$ نتیجه می‌شود $a^8>a^9$ و در نتیجه $\sqrt[12]{a^8}>\sqrt[12]{a^9}$، یعنی $\sqrt[3]{a^2}>\sqrt[4]{a^3}$.

ولی $\sqrt{a^3}>\sqrt[3]{a^2}$ درست نیست، زیرا

$$0<a<1\Rightarrow a^9<a^4\Rightarrow\sqrt[6]{a^9}<\sqrt[6]{a^4}\Rightarrow\sqrt{a^3}<\sqrt[3]{a^2}$$

راه‌حل دوم چون $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$، پس $a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{2}}$ و چون $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$، پس $0<a<1$.

بررسی گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) $\frac{1}{4}<1\Rightarrow a^{\frac{1}{4}}>a\Rightarrow\sqrt[4]{a}>a$

گزینهٔ (۲) $\frac{1}{2}<1\Rightarrow a^{\frac{1}{2}}>a\Rightarrow\sqrt{a}>a$

گزینهٔ (۳) $\frac{3}{2}>\frac{2}{3}\Rightarrow a^{\frac{3}{2}}<a^{\frac{2}{3}}\Rightarrow\sqrt{a^3}<\sqrt[3]{a^2}$

گزینهٔ (۴) $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}>a^{\frac{3}{4}}\Rightarrow\sqrt[3]{a^2}>\sqrt[4]{a^3}$

بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱۷۴۱- گزینهٔ ۴ طرفین رابطهٔ $x+y=4$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^2+y^2+2xy=16$$

چون $xy=2$، پس

$$x^2+y^2+4=16\Rightarrow x^2+y^2=12$$

حال، طرفین رابطهٔ اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^4+y^4+2x^2y^2=144\Rightarrow x^4+y^4+2(xy)^2=144$$

$$x^4+y^4+2\times 4=144\Rightarrow x^4+y^4=136$$

۱۷۴۲- گزینهٔ ۳ اعداد $14+6\sqrt{5}$ و $14-6\sqrt{5}$ مربع کامل هستند. زیرا $14+6\sqrt{5}=9+5+2\times 3\sqrt{5}=3^2+\sqrt{5}^2+2(3\sqrt{5})=(3+\sqrt{5})^2$.

به همین ترتیب $14-6\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^2$. بنابراین

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$$

۱۷۴۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج،

$$(\sqrt{x+11}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3})=(x+11)-(x+3)=8$$

بنابراین

$$\sqrt{2}(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3})=8\Rightarrow\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3}=4\sqrt{2}$$

۱۷۴۴- گزینهٔ ۱ ابتدا عبارت را به‌صورت $\dfrac{\sqrt{\sqrt{24}-4}}{\sqrt{\sqrt{24}+4}}-\dfrac{\sqrt{\sqrt{24}+4}}{\sqrt{\sqrt{24}-4}}$ می‌نویسیم. اکنون با مخرج مشترک‌گیری و استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود که عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(\sqrt{24}-4)-(\sqrt{24}+4)}{\sqrt{\sqrt{24}+4}\times\sqrt{\sqrt{24}-4}}=\frac{-8}{\sqrt{(\sqrt{24})^2-4^2}}=\frac{-8}{\sqrt{8}}=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$$

۱۷۴۵- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مربع مجموع سه جمله عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$$

بنابراین

$$A=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc-3a^2-3b^2-3c^2$$

$$+6ab-6ac+6bc+2a^2+2b^2+2c^2$$

$$=8ab-8ac+4bc=4(2ab-2ac+bc)$$

۱۷۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(x^2-2x)^3-2x^4=x^6-6x^5+12x^4-8x^3-2x^4$$

$$=x^6-6x^5+10x^4-8x^3$$

بنابراین ضریب x^4 برابر ۱۰ است.

۱۷۴۷- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف تساوی $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{4}$ را به توان سه برسانیم، از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله نتیجه می‌شود

$$a-b-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})=4\Rightarrow a-b-3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{4})=4$$

$$a-b-3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}=4\Rightarrow a-b-3(2)=4\Rightarrow a-b=10$$

۱۷۴۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)=4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{b^2}\right)\quad(1)$$

از طرف دیگر، $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\frac{2}{ab}=4^2+\frac{2}{3}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}=4\left(16+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=68$$

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر طرفین رابطهٔ $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=4$ را به توان سه برسانیم.

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^3=4^3\Rightarrow\frac{1}{a^3}-\frac{3}{a^2b}+\frac{3}{ab^2}-\frac{1}{b^3}=64$$

$$\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}-\frac{3}{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=64$$

$$\xrightarrow{ab=3,\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=4}\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}=64+\frac{3}{3}\times4=68$$

۱۷۴۹- گزینهٔ ۴ اگر از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{5}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}^2-\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2)}=\frac{5}{\sqrt[3]{3}^3+\sqrt[3]{2}^3}=\frac{5}{3+2}=\frac{5}{5}=1$$

۱۷۵۰- گزینهٔ ۳ به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=x(x-1)(x+1)(x-2)+1=(x^2-x)(x^2-x-2)+1$$

$$=(x^2-x)((x^2-x)-2)+1=(x^2-x)^2-2(x^2-x)+1$$

اکنون به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=(x^2-x-1)^2$$

۱۷۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^2+\frac{4}{9x^2}=\left(x+\frac{2}{3x}\right)^2-2(x)\left(\frac{2}{3x}\right)$$

$$=\left(x+\frac{2}{3x}\right)^2-\frac{4}{3}=3^2-\frac{4}{3}=\frac{23}{3}$$

بنابراین $3x^2+\frac{4}{3x^2}=3\left(x^2+\frac{4}{9x^2}\right)=3\times\frac{23}{3}=23$.

۱۷۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\frac{1}{a}=2+|a|>0$، در نتیجه $a>0$. بنابراین، فرض مسئله به شکل $\frac{1}{a}-a=2$ درمی‌آید. اکنون توجه کنید که $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=4$. از طرف دیگر، $\frac{1}{a}+|a|=\frac{1}{a}+a>0$. بنابراین

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=4+4=8\xrightarrow{a+\frac{1}{a}>0}a+\frac{1}{a}=2\sqrt{2}$$

۱۷۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$. بنابراین

$$(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}-1)^3$$

و در نتیجه

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$$

۱۷۵۴- گزینهٔ ۲ فرض کنید $A=(3^{\frac{1}{8}}+1)(3^{\frac{1}{4}}+1)(3^{\frac{1}{2}}+1)$.

دو طرف این تساوی را در $3^{\frac{1}{8}}-1$، که همان a است، ضرب می‌کنیم:

$$(3^{\frac{1}{8}}-1)A=(3^{\frac{1}{8}}-1)(3^{\frac{1}{8}}+1)(3^{\frac{1}{4}}+1)(3^{\frac{1}{2}}+1)$$

$$=((3^{\frac{1}{8}})^2-1)(3^{\frac{1}{4}}+1)(3^{\frac{1}{2}}+1)=(3^{\frac{1}{4}}-1)(3^{\frac{1}{4}}+1)(3^{\frac{1}{2}}+1)$$

$$=(3^{\frac{1}{2}}-1)(3^{\frac{1}{2}}+1)=3-1=2$$

بنابراین $A=\dfrac{2}{3^{\frac{1}{8}}-1}=\dfrac{2}{a}$.

۱۷۵۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac$$

بنابراین

$$10^2=66-2(ab+bc-ca)\Rightarrow34=-2(ab+bc-ca)$$

پس $ab+bc-ca=-17$.

۱۷۵۶- گزینهٔ ۴ بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله،

$$(a-b)^3-a^3+b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-a^3+b^3$$

$$=-3ab(a-b)=-3ab\left(\frac{3}{ab}\right)=-9$$

۱۷۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a^3+b^3=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)$$

از طرف دیگر،

$$a+b=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{3}}{3-2}=2\sqrt{3}$$

$$ab=\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{1}{3-2}=1$$

بنابراین $a^3+b^3=2\sqrt{3}(4\times3-3)=18\sqrt{3}$.

۱۷۵۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\Rightarrow 25=17-2ab\Rightarrow ab=-4$$

بنابراین، طبق اتحاد چاق و لاغر،

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)=5(17-4)=65$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $a=4$ و $b=-1$ در تساوی‌های داده شده صدق می‌کنند، در این صورت $a^3-b^3=65$.

۱۷۵۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=7\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=7\xrightarrow{ab=1}a^2+b^2=7$$

از طرف دیگر،

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=7+2=9$$

چون a و b عددهایی منفی‌اند، پس $a+b$ نیز منفی است، در نتیجه $a+b=-3$. به این ترتیب، بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=(-3)(7-1)=-18$$

۱۷۶۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)(a^{10}+a^5+1)=(a^5-1)(a^{10}+a^5+1)$$

$$=(a^5-1)\left((a^5)^2+a^5\times1+1\right)=(a^5)^3-1=a^{15}-1$$

$$=(\sqrt[5]{3})^{15}-1=3^3-1=26$$

۱۷۶۱- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+2\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=8^2+2=66$$

۱۷۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را با ۱ جمع می‌کنیم:

$$a+\frac{1}{a+1}=4\Rightarrow a+1+\frac{1}{a+1}=5$$

اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$\left(a+1+\frac{1}{a+1}\right)^2=5^2\Rightarrow(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}+2(a+1)\times\frac{1}{a+1}=25$$

$$(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}+2=25\Rightarrow(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}=25-2=23$$

۱۷۶۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا مقدار $(a-b)^2$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-b)^2=\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}-2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=6-2=4$$

بنابراین

$$(a-b)^6=\left((a-b)^2\right)^3=4^3=64$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$$

$$b=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

پس $(a-b)^6=(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)^6=(-2)^6=64$.

۱۷۶۴- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم $(\sqrt{x-a}+\sqrt{x})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x})=a+1$. بنابراین

$$x-a-x=a+1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۱۷۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2(bc-ab-ac)$$

پس $(a-b-c)^2=28+2(4)=36$. بنابراین $a-b-c=\pm6$.

۱۷۶۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

دو طرف تساوی داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}\right)^3$$

$$+3\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}\right)$$

$$=\sqrt{3}-2+\sqrt{3}+2+3\sqrt[3]{3-4}\,(x)=2\sqrt{3}-3x$$

بنابراین $x^3+3x=2\sqrt{3}$.

۱۷۶۷- گزینهٔ ۲ اگر تساوی دوم را یک بار با تساوی اول جمع و بار دیگر از آن کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$a^3+3ab^2+b^3+3a^2b=125\Rightarrow(a+b)^3=125\Rightarrow a+b=5$$

$$a^3+3ab^2-b^3-3a^2b=27\Rightarrow(a-b)^3=27\Rightarrow a-b=3$$

بنابراین $\frac{a+b}{a-b}=\frac{5}{3}$.

۱۷۶۸- گزینهٔ ۳ بنابر فرض،

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید

$$a+\frac{1}{a}-2=2\Rightarrow a+\frac{1}{a}=4$$

و اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به‌دست می‌آید

$$a^3+\frac{1}{a^3}+3a+\frac{3}{a}=64$$

به این ترتیب $a^3+\frac{1}{a^3}=64-3(4)=52$.

۱۷۶۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[3]{2\times9}+\sqrt[3]{2\times15}+\sqrt[3]{2\times25}=\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)$$

$$=\sqrt[3]{2}\left((\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2\right)$$

در نتیجه، از اتحاد چاق و لاغر نتیجه می‌شود:

$$ab=(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5})\left((\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2\right)(\sqrt[3]{2})$$

$$=\left((\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{5})^3\right)(\sqrt[3]{2})=(3-5)\sqrt[3]{2}=-2\sqrt[3]{2}$$

۱۷۷۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$A=(x-2y)(x^4+2x^3y+4x^2y^2+8xy^3+16y^4)$$
$$=(x-2y)(x^4+x^3(2y)+x^2(2y)^2+x(2y)^3+(2y)^4)$$
$$=x^5-(2y)^5=x^5-32y^5$$

بنابراین به‌ازای $x=2\sqrt[5]{2}$ و $y=\sqrt[5]{4}$ مقدار A برابر است با

$$A=(2\sqrt[5]{2})^5-32(\sqrt[5]{4})^5=32\times 2-32\times 4=-64$$

۱۷۷۱- گزینهٔ ۲ مقدار عبارت $\frac{a+b}{a-b}$ مثبت است، بنابراین این عبارت را می‌توان به‌صورت $\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^2}$ نوشت. به این ترتیب

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}}=\sqrt{\frac{8ab+2ab}{8ab-2ab}}=\sqrt{\frac{10ab}{6ab}}=\sqrt{\frac{5}{3}}$$

۱۷۷۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با توجه به اینکه $x\neq 0$، دو طرف تساوی داده شده را معکوس می‌کنیم و مقدار $x+\frac{1}{x}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x^2+1}{x}=4\Rightarrow \frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=4\Rightarrow x+\frac{1}{x}=4$$

برای محاسبهٔ مقدار $\frac{x^2}{x^4+1}$، ابتدا مقدار معکوس آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{x^4+1}{x^2}=\frac{x^4}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=4^2-2=14$$

بنابراین $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{14}$.

راه‌حل دوم از تساوی $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{4}$ نتیجه می‌شود

$$x^2+1=4x\Rightarrow x^2=4x-1$$

دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $x^4=16x^2-8x+1$. به جای x^2 قرار می‌دهیم $4x-1$:

$$x^4=16(4x-1)-8x+1=64x-8x-15=56x-15$$

بنابراین $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{4x-1}{56x-14}=\frac{4x-1}{14(4x-1)}=\frac{1}{14}$.

۱۷۷۳- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{5}+2}\times\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\times\sqrt[6]{\sqrt{5}-2}$$
$$=\sqrt[6]{(\sqrt{5}+2)^3}\times\sqrt[6]{(\sqrt{5}-2)^2}\times\sqrt[6]{\sqrt{5}-2}$$
$$=\sqrt[6]{(\sqrt{5}+2)^3(\sqrt{5}-2)^2(\sqrt{5}-2)}=\sqrt[6]{(\sqrt{5}+2)^3(\sqrt{5}-2)^3}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt{5-4}=1$$

۱۷۷۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض کنید

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}=a$$

طرفین این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^2=3+\sqrt{8}+3-\sqrt{8}+2\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}=6+2\sqrt{9-8}=8$$

بنابراین $a=\sqrt{8}$. از طرف دیگر، می‌دانیم

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$$

پس مقدار عبارت داده شده برابر $\sqrt{8}\times\sqrt{2}$ یا همان ۴ است.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$
$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$$
$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$$

پس $(\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}})\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)\sqrt{2}=4$.

۱۷۷۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$$

از طرف دیگر،

$$a+b+c=6abc\Rightarrow\frac{a+b+c}{abc}=6\Rightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=6$$

بنابراین $5^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(6)$. در نتیجه $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=13$.

۱۷۷۶- گزینهٔ ۴ ابتدا دو طرف تساوی را به توان سه می‌رسانیم و از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$1=(\sqrt[3]{a+5}-\sqrt[3]{a-5})^3=a+5-(a-5)-3\sqrt[3]{a^2-25}(\underbrace{\sqrt[3]{a+5}-\sqrt[3]{a-5}}_{1})$$

در نتیجه $1=10-3\sqrt[3]{a^2-25}$. بنابراین $\sqrt[3]{a^2-25}=3$ و در نتیجه

$$a^2-25=27$$

۱۷۷۷- گزینهٔ ۲ ابتدا به کمک اتحاد $(a-\frac{1}{a})^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2$ مقدار $a-\frac{1}{a}$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-\frac{1}{a})^2=18-2=16\Rightarrow a-\frac{1}{a}=\pm 4$$

از $0<a<1$ نتیجه می‌شود $a<\frac{1}{a}$. بنابراین $a-\frac{1}{a}=-4$ درست است. اکنون با استفاده از اتحاد $(a-\frac{1}{a})^3=a^3-\frac{1}{a^3}-3(a-\frac{1}{a})$ مقدار $a^3-\frac{1}{a^3}$ را حساب می‌کنیم:

$$(-4)^3=a^3-\frac{1}{a^3}-3(-4)\Rightarrow a^3-\frac{1}{a^3}=-76$$

۱۷۷۸- گزینهٔ ۳ طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})(\underbrace{(\sqrt[3]{5})^2-\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{3})^2}_{a})=(\sqrt[3]{5})^3+(\sqrt[3]{3})^3=5+3=8$$

بنابراین $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}=\frac{8}{a}$.

۱۷۷۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(a^2-2ab+b^2)(a^2+ab+b^2)^2=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2$$
$$=((a-b)(a^2+ab+b^2))^2=(a^3-b^3)^2$$

اگر تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$5a^3-5b^3=15\Rightarrow a^3-b^3=3$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۹ است.

۱۷۸۰- گزینهٔ ۲ با توجه به اینکه $x\neq\pm1$، دو طرف معادلهٔ داده شده را در x^2-1 ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود

$$(x^2-1)(1+x+\cdots+x^5)=x^6+x^7-x^2+1$$

$$(x+1)(x-1)(1+x+\cdots+x^5)=x^6+x^7-x^2+1$$

$$(x+1)(x^6-1)=x^6+x^7-x^2+1$$

$$x^7+x^6-x-1=x^6+x^7-x^2+1\Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=2\ ,\ \ x=-1\ (\text{غ.ق.ق})$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۷۸۱- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** عبارت مورد نظر را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$6x^2+7x-3=6x^2-2x+9x-3=2x(3x-1)+3(3x-1)$$

$$=(3x-1)(2x+3)$$

پس عامل $3x-1$ در تجزیهٔ عبارت وجود دارد.

راه‌حل دوم عبارت مورد نظر را A می‌نامیم و آن را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$A=6x^2+7x-3\Rightarrow 6A=36x^2+42x-18=(6x-2)(6x+9)$$

$$=2\times3(3x-1)(2x+3)$$

بنابراین $A=(3x-1)(2x+3)$ و عامل $3x-1$ در تجزیهٔ عبارت وجود دارد.

۱۷۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^2-2x+4y-y^2-3=x^2-2x+1-(y^2-4y+4)=(x-1)^2-(y-2)^2$$

$$=(x-1-(y-2))(x-1+y-2)=(x-y+1)(x+y-3)$$

بنابراین $x-y+1$ عاملی از عبارت است.

۱۷۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^4+16x^2+100=(x^4+20x^2+100)-4x^2=(x^2+10)^2-4x^2$$

$$=(x^2+10-2x)(x^2+10+2x)$$

بنابراین $x^2-2x+10$ عامل x^4+16x^2+100 است.

۱۷۸۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$x^3+2x^2+2x+1=(x^3+1)+2x^2+2x$$

$$=(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)$$

$$=(x+1)(x^2-x+1+2x)=(x+1)(x^2+x+1)$$

بنابراین x^2+x+1 عامل x^3+2x^2+2x+1 است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$x^3+2x^2+2x+1=(x^3+x^2)+(x^2+2x+1)$$

$$=x^2(x+1)+(x+1)^2=(x+1)(x^2+x+1)$$

بنابراین x^2+x+1 عامل x^3+2x^2+2x+1 است.

۱۷۸۵- گزینهٔ ۳ ابتدا به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله، عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=x^4+y^4+x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+x^2y^2=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل x^2+y^2-xy وجود دارد.

۱۷۸۶- گزینهٔ ۱ صورت و مخرج کسر دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$2x^2+3x-5=2x^2+5x-2x-5=x(2x+5)-(2x+5)=(2x+5)(x-1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{x^2+x+1}{x(2x+5)}\times\frac{(2x+5)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}$.

۱۷۸۷- گزینهٔ ۱ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^3+x}=\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{x^2+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}$$

۱۷۸۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{a^6-a^4+a^2-1}{-a^2+a^4}=\frac{a^5(a-\frac{1}{a})+a(a-\frac{1}{a})}{a^3(a-\frac{1}{a})}=\frac{a^5+a}{a^3}$$

$$=a^2+\frac{1}{a^2}=(a-\frac{1}{a})^2+2=3^2+2=11$$

۱۷۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$a^6-a^4-a^2+1=a^4(a^2-1)-(a^2-1)=(a^2-1)(a^4-1)$$

$$a^3-a^2-a+1=a^2(a-1)-(a-1)=(a-1)(a^2-1)$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{(a^4-1)(a^2-1)}{(a-1)(a^2-1)}=\frac{a^4-1}{a-1}$. چون $a^4=(\sqrt{2})^4=4$، پس عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{4-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{3}{\sqrt{2}-1}=\frac{3}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=3\sqrt{2}+3$$

۱۷۹۰- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $A=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$. در این صورت، بنابر اتحاد مکعب تفاضل دو جمله،

$$A^3=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3=a-b-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$$

$$=76-3\sqrt[3]{ab}(A)=76-3A$$

بنابراین

$$A^3+3A-76=0\Rightarrow A^3-64-12+3A=0\Rightarrow A^3-4^3+3(A-4)=0$$

$$(A-4)(A^2+4A+16)+3(A-4)=0\Rightarrow(A-4)(A^2+4A+19)=0$$

چون $A^2+4A+19=(A+2)^2+15\neq0$، پس $A-4=0$، در نتیجه $A=4$.

۱۷۹۱- گزینهٔ ۳ عبارت را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$2a^2-3ab-2b^2=(2a^2-4ab)+(ab-2b^2)=2a(a-2b)+b(a-2b)$$

$$=(a-2b)(2a+b)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $a-2b$ وجود دارد.

۱۷۹۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $x^2-x=A$. در این‌صورت

$$(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24=A^2-14A+24=(A-2)(A-12)$$

اکنون توجه کنید که

$$A-2=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

$$A-12=x^2-x-12=(x-4)(x+3)$$

بنابراین $x+۱$ ، $x-۲$ ، $x-۴$ و $x+۳$ عامل‌های عبارت مورد نظر هستند. اکنون توجه کنید که

$$x^۲+۴x+۳=(x+۱)(x+۳),\quad x^۲-۲x-۳=(x+۱)(x-۳)$$

$$x^۲+x-۶=(x-۲)(x+۳),\quad x^۲-۳x-۴=(x-۴)(x+۱)$$

بنابراین $x^۲-۲x-۳$ عامل عبارت مورد نظر نیست.

راه‌حل دوم با توجه به عامل‌های عبارت‌های ذکر شده در گزینه‌ها، که در راه‌حل اول نوشته‌ایم، کافی است بررسی کنیم که کدام‌یک از عبارت‌های $x+۱$ ، $x+۳$ ، $x-۳$ ، $x-۲$ و $x-۴$ عامل عبارت داده شده در صورت سؤال نیست.

فرض کنید $P(x)=(x^۲-x)^۲-۱۴(x^۲-x)+۲۴$. در این‌صورت

$$P(-۱)=۴-۲۸+۲۴=۰,\quad P(-۳)=۱۴۴-۱۶۸+۲۴=۰$$

$$P(۳)=۳۶-۸۴+۲۴=-۲۴\neq ۰$$

پس $x-۳$ عامل عبارت مورد نظر نیست. در نتیجه گزینهٔ (۲) عامل عبارت مورد نظر نیست.

۱۷۹۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۴x^۴+۳x^۲+۱=(۴x^۴+۴x^۲+۱)-x^۲=(۲x^۲+۱)^۲-x^۲$$

$$=(۲x^۲+۱-x)(۲x^۲+۱+x)$$

بنابراین عامل‌های $۴x^۴+۳x^۲+۱$ عبارت‌های $۲x^۲-x+۱$ و $۲x^۲+x+۱$ هستند، یعنی مقادیر ممکن a عددهای ۱− و ۱ هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱− است.

۱۷۹۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$۴x^۴-۱۶x^۲y^۲+۹y^۴=۴x^۴-۱۲x^۲y^۲+۹y^۴-۴x^۲y^۲$$

$$=(۲x^۲-۳y^۲)^۲-۴x^۲y^۲$$

طبق اتحاد مزدوج این عبارت به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(۲x^۲-۲xy-۳y^۲)(۲x^۲+۲xy-۳y^۲)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $۲x^۲-۲xy-۳y^۲$ وجود دارد.

۱۷۹۵- گزینهٔ ۱ عبارت را ابتدا به کمک فاکتورگیری و سپس به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$۳a^۳-۳ab^۲-۲a^۲b+۲b^۳=۳a(a^۲-b^۲)-۲b(a^۲-b^۲)$$

$$=(a^۲-b^۲)(۳a-۲b)=(a-b)(a+b)(۳a-۲b)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $۳a-۲b$ وجود دارد.

۱۷۹۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱),\quad x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$$

$$x^۲+۲x-۳=(x+۳)(x-۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{(x-۱)(x+۱)}\times\frac{(x+۳)(x-۱)}{x^۲-x+۱}=x+۳$$

۱۷۹۷- گزینهٔ ۳ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۲}{x^۲-۱}-\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}=\frac{۲}{(x-۱)(x+۱)}-\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}=\frac{۲-(x-۱)-(x+۱)}{(x-۱)(x+۱)}$$

$$=\frac{۲-۲x}{(x-۱)(x+۱)}=-\frac{۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=-\frac{۲}{x+۱}$$

۱۷۹۸- گزینهٔ ۱ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۲}{\sqrt{x}-۲}-\frac{۲}{\sqrt{x}+۲}-\frac{۲x}{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)}=\frac{۲(\sqrt{x}+۲)-۲(\sqrt{x}-۲)-۲x}{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)}$$

$$=\frac{۸-۲x}{x-۴}=-\frac{۲(x-۴)}{x-۴}=-۲$$

۱۷۹۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a}{b^۲}-\frac{b}{a^۲}=\frac{a^۳-b^۳}{a^۲b^۲},\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+۱=\frac{a^۲+b^۲+ab}{ab}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a^۳-b^۳}{a^۲b^۲}\div\frac{a^۲+b^۲+ab}{ab}=\frac{a^۳-b^۳}{(a^۲+b^۲+ab)ab}=\frac{(a-b)(a^۲+b^۲+ab)}{(a^۲+b^۲+ab)ab}$$

$$=\frac{a-b}{ab}=\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=-۲\sqrt{۲}$$

۱۸۰۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a^۴+a^۲+۱=a^۴+۲a^۲+۱-a^۲=(a^۲+۱)^۲-a^۲$$

$$=(a^۲+a+۱)(a^۲-a+۱)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a-۱)(a^۲+a+۱)(a^۲-a+۱)}{a^۲-a+۱}=a^۳-۱=۵-۱=۴$$

راه‌حل دوم اگر صورت و مخرج عبارت داده شده را در $(a+۱)$ ضرب کنیم، می‌توان نوشت

$$\frac{(a+۱)(a-۱)(a^۴+a^۲+۱)}{(a+۱)(a^۲-a+۱)}=\frac{(a^۲-۱)(a^۴+a^۲+۱)}{a^۳+۱}$$

$$=\frac{a^۶-۱}{a^۳+۱}=\frac{(a^۳-۱)(a^۳+۱)}{(a^۳+۱)}=a^۳-۱$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر به ازای $a=\sqrt[۳]{۵}$ برابر است با $(\sqrt[۳]{۵})^۳-۱=۴$.

۱۸۰۱- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}(۲+\sqrt{۲})}{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}=\frac{\sqrt{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})^۲}}{۲}$$

$$=\frac{\sqrt{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}}{۲}=\frac{\sqrt{۲(۲+\sqrt{۲})}}{۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۲(۲+\sqrt{۲})}{۴}}=\sqrt{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

۱۸۰۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا مخرج کسرها را گویا می‌کنیم، سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}+\frac{۷}{۳-\sqrt{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{(۱-\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲})}+\frac{۷(۳+\sqrt{۲})}{(۳-\sqrt{۲})(۳+\sqrt{۲})}$$

$$=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱-۲}+\frac{۷(۳+\sqrt{۲})}{۹-۲}=-۱-\sqrt{۲}+۳+\sqrt{۲}=۲$$

راه‌حل دوم ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}+\frac{۷}{۳-\sqrt{۲}}=\frac{۳-\sqrt{۲}+۷-۷\sqrt{۲}}{(۱-\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})}=\frac{۱۰-۸\sqrt{۲}}{۵-۴\sqrt{۲}}=\frac{۲(۵-۴\sqrt{۲})}{(۵-۴\sqrt{۲})}=۲$$

۱۸۰۳- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt{2}-1}=\sqrt[4]{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[4]{2}+1-\sqrt[4]{2}=1$.

راه‌حل دوم با مخرج مشترک گیری می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}-\sqrt[4]{2}=\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{2}-1)}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}=1$$

۱۸۰۴- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$ را در $\sqrt[4]{2}-1$ ضرب می‌کنیم: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}\times\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1}$. بنابراین

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$$

۱۸۰۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{8\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+1}=8\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=8\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{8(\sqrt{5}-1)^2}{4}=2(\sqrt{5}-1)^2$$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\times\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5-4}=(\sqrt{5}-2)^2$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$2(\sqrt{5}-1)^2-(\sqrt{5}-2)^2=2(6-2\sqrt{5})-(9-4\sqrt{5})=3$$

۱۸۰۶- گزینهٔ ۲ ابتدا مخرج کسر $\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ را گویا می‌کنیم. برای این کار صورت و مخرج را در $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

بنابراین $x=1+\sqrt{2}$ و در نتیجه $(x-1)^2=(\sqrt{2})^2=2$.

۱۸۰۷- گزینهٔ ۲ برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2-(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{4-3}}{2\sqrt{3}}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

۱۸۰۸- گزینهٔ ۳ چون در مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ ریشهٔ سوم وجود دارد، برای گویا کردن مخرج این کسر از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$$

به این ترتیب، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}-(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4})=2\sqrt[3]{4}$$

۱۸۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$$

بنابراین

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}-\frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}-\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$$

اکنون با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسرها را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}-\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1}-\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2})^3+1}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1}-\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{2+1}$$

$$=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1-\sqrt[3]{2}-1=\sqrt[3]{4}$$

۱۸۱۰- گزینهٔ ۳ چون $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1=\sqrt[3]{3}^2+1\times\sqrt[3]{3}+1^2$. برای اینکه مخرج کسر اول را گویا کنیم (با استفاده از اتحاد چاق و لاغر)، صورت و مخرج آن را در $\sqrt[3]{3}-1$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}+1^2}\times\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}$$

$$=\frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{\sqrt[3]{3}^3-1^3}=\frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{3-1}=\sqrt[3]{3}-1$$

به همین ترتیب،

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{2}+1}\times\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{2}^3+1^3}=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{2+1}=\sqrt[3]{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{2}+1=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$.

۱۸۱۱- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ برابر است با $P(-3)=3(-3)^4+9(-3)^3+(-3)^2-1=8$.

۱۸۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $P(x)=(x-1)^3+7$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-\sqrt[3]{3}-1$ برابر است با

$$P(\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3}+1-1)^3+7=3+7=10$$

۱۸۱۳- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۴$ برابر با $P(۴)$ است، و چون بنابر فرض این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(۴)=۱۶$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{۱۳}+bx^{۹۷}-۵\Rightarrow P(۴)=a(۴)^{۱۳}+b(۴)^{۹۷}-۵$$
$$۱۶=۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b-۵\Rightarrow ۴^{۱۳}a+۴^{۹۷}b=۲۱ \quad (۱)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر با $P(-۴)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(-۴)=-۴^{۱۳}a-۴^{۹۷}b-۵\xrightarrow{\text{بنابر تساوی (۱)}}P(-۴)=-۲۱-۵=-۲۶$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۲۶− است.

۱۸۱۴- گزینهٔ ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر است، پس $P(-۳)=۰$، در نتیجه $P(-۳)=(-۳)^۸+۳(-۳)^۷+a(-۳)^۲-۹=۰$. بنابراین $۹a-۹=۰$، پس $a=۱$ و $P(x)=x^۸+۳x^۷+x^۲-۹$. از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر است با $P(۲-۱)=P(۱)$. اکنون توجه کنید که $P(۱)=۱+۳+۱-۹=-۴$.

۱۸۱۵- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر با ۴ است، پس $P(۲)=۴$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(۶x)$ بر $۳x-۱$ برابر است با $P(۶\times\frac{۱}{۳})=P(۲)=۴$.

۱۸۱۶- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x-۳$ برابر است با $P(۳+۱)=P(۴)$. از طرف دیگر،

$$P(x-۲)=x^۲-۳x+۲\xrightarrow{x=۶}P(۴)=(۶)^۲-۳(۶)+۲=۲۰$$

۱۸۱۷- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۴$ برابر است با $P(-۴)$. اکنون اگر در تساوی $P^۲(x)-۸xP(x)=-۱۶x^۲$ قرار دهیم $x=-۴$، به‌دست می‌آید

$$P^۲(-۴)+۳۲P(-۴)+۱۶^۲=۰\Rightarrow(P(-۴)+۱۶)^۲=۰\Rightarrow P(-۴)=-۱۶$$

۱۸۱۸- گزینهٔ ۲ بنابر فرض مسئله،

$$x^۴-۳x^۳+۴x^۲+۱=(x-۱)Q(x)+۳ \quad (۱)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-۳$ برابر با $Q(۳)$ است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=۳$، به‌دست می‌آید $۳^۴-۳(۳)^۳+۴(۳)^۲+۱=(۳-۱)Q(۳)+۳$. در نتیجه

$$۸۱-۸۱+۳۶+۱=۲Q(۳)+۳\Rightarrow Q(۳)=۱۷$$

۱۸۱۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$P(x)=(x+۳)^۳Q(x)+۲x-۵ \quad (۱)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ برابر است با $P(-۳)$. اکنون اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=-۳$، به‌دست می‌آید

$$P(-۳)=۲(-۳)-۵=-۱۱$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۱۱− است.

۱۸۲۰- گزینهٔ ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P^۲(x)$ بر $x+۳$ برابر است با $P^۲(-۳)$. از طرف دیگر، چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+۳)^۳$ برابر $x^۲-x-۳$ است، از قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها نتیجه می‌شود $P(x)=(x+۳)^۳Q(x)+x^۲-x-۳$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-۳$، به‌دست می‌آید $P(-۳)=(-۳)^۲-(-۳)-۳=۹$. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P^۲(x)$ بر $x+۳$ برابر است با

$$P^۲(-۳)=۹^۲=۸۱$$

۱۸۲۱- گزینهٔ ۳ اگر چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد، $P(-۱)=۰$. بنابراین

$$P(x)=۲x^{۱۴}-ax^۵-۳\Rightarrow P(-۱)=۲(-۱)^{۱۴}-a(-۱)^۵-۳=۰\Rightarrow a=۱$$

۱۸۲۲- گزینهٔ ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+۲)^۲$ بخش‌پذیر است، پس بر $x+۲$ نیز بخش‌پذیر است، بنابراین

$$P(-۲)=۰\Rightarrow -۳۲+۴۸+۲a+۱۶=۰\Rightarrow a=-۱۶$$

۱۸۲۳- گزینهٔ ۱ چون ۱، ۲ و ۲− ریشه‌های $P(x)$ هستند، پس $x-۱$، $x-۲$ و $x+۲$ عامل‌های $P(x)$ هستند. از طرف دیگر، چون $P(x)$ درجهٔ سوم است، پس عامل دیگری ندارد. بنابراین می‌توان نوشت

$$P(x)=a(x-۱)(x-۲)(x+۲)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-۱$، چون $P(-۱)=۲۴$، به‌دست می‌آید

$$۲۴=a(-۲)(-۳)(۱)\Rightarrow a=۴$$

به این ترتیب، $P(x)=۴(x-۱)(x-۲)(x+۲)$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ برابر است با

$$P(-۳)=۴(-۳-۱)(-۳-۲)(-۳+۲)=-۸۰$$

۱۸۲۴- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۳)$ بر $x-۵$ برابر است با $P(۵-۳)=P(۲)$. بنابراین $P(۲)=-۳$. اگر در تساوی $P(x+۳)=x^۳-mx^۲+mx+۲$ قرار دهیم $x=-۱$، به دست می‌آید

$$P(۲)=(-۱)^۳-m(-۱)^۲+m(-۱)+۲=-۳\Rightarrow m=۲$$

۱۸۲۵- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر ۱۲ است، پس $P(۲-۱)=۱۲$، یعنی $P(۱)=۱۲$. در نتیجه

$$P(۱)=۱+a+۶+b+۱۰=۱۲\Rightarrow a+b=-۵$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۲)$ بر $x+۳$ برابر است با $P(-۳+۲)=P(-۱)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-۱)=۱-a+۶-b+۱۰=۱۷-(a+b)$$
$$\xrightarrow{a+b=-۵}P(-۱)=۱۷-(-۵)=۲۲$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۸۲۶- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x+۱)$ و $Q(x+۱)$ بر $x-۲$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۵ است، پس

$$P(۲+۱)=۳\Rightarrow P(۳)=۳\ ,\quad Q(۲+۱)=۵\Rightarrow Q(۳)=۵$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)Q(x-۱)$ بر $x-۴$ برابر است با $P(۳)Q(۳)=۳\times۵=۱۵$.

۱۸۲۷- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۳$ و $x+۳$ به‌ترتیب برابر با a و b است، پس $P(۳)=a$ و $P(-۳)=b$. از طرف دیگر، بنابر فرض مسئله، $P(x)=(x^۲-۹)Q(x)+۳x-۱$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۳$ و $x=-۳$، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}P(۳)=۳\times۳-۱\\P(-۳)=۳(-۳)-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\b=-۱۰\end{cases}$$

بنابراین $a-b=۱۸$.

۱۸۲۸ - گزینهٔ ۳ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-2)$ بر $x-3$ برابر ۵ است، پس $P(3-2)=5$، یعنی $P(1)=5$. چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر x برابر ۳ است، پس $P(0-1)=3$، یعنی $P(-1)=3$. از طرف دیگر، چون درجهٔ x^2-1 برابر ۲ است، بنابر قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها، درجهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-1 حداکثر برابر ۱ است. فرض کنید این باقی‌مانده $ax+b$ باشد. در این صورت $P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$ و $x=-1$، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} P(1)=a+b \\ P(-1)=-a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=a+b \\ 3=-a+b \end{cases} \Rightarrow a=1,\ b=4$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر $x+4$ است.

۱۸۲۹ - گزینهٔ ۲ بنابرفرض‌های مسئله،

$$P(x)=(x-2)Q(x)-3 \qquad (1)$$
$$Q(x)=(x+1)S(x)+5 \qquad (2)$$

اگر در تساوی (۱) به جای $Q(x)$ مقدار به‌دست آمده از تساوی (۲) را قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} P(x)&=(x-2)\big((x+1)S(x)+5\big)-3 \\ &=(x-2)(x+1)S(x)+5(x-2)-3 \\ &=(x^2-x-2)S(x)+5x-13 \end{aligned}$$

بنابراین، از قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها نتیجه می‌شود که باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر $5x-13$ است.

۱۸۳۰ - گزینهٔ ۲ چندجمله‌ای $P(x)$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} P(x)&=ax^3+4x^2+14x+10+a=a(x^3+1)+4x^2+14x+10 \\ &=a(x+1)(x^2-x+1)+(x+1)(4x+10) \\ &=(x+1)(ax^2+(4-a)x+a+10) \end{aligned}$$

برای اینکه چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+1)^2$ بخش‌پذیر باشد، باید چندجمله‌ای $Q(x)=ax^2+(4-a)x+a+10$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد. پس

$$Q(-1)=0 \Rightarrow a-(4-a)+a+10=0 \Rightarrow a=-2$$

۱۸۳۱- گزینهٔ ۳ چون معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس $\Delta=0$. در نتیجه

$$\Delta=b^2-4ac=0\Rightarrow 2^2-4\times2\times(k-2)=0\Rightarrow 4-8(k-2)=0\Rightarrow k=\frac{5}{2}$$

۱۸۳۲- گزینهٔ ۴ دلتای معادله باید مثبت باشد:

$$\Delta=4k^2-k=k(4k-1)>0\Rightarrow k>\frac{1}{4}\ \text{یا}\ k<0$$

بنابراین k متعلق به مجموعهٔ $\mathbb{R}-[0,\frac{1}{4}]$ است.

۱۸۳۳- گزینهٔ ۳ چون معادلهٔ $x^2-4x+k-1=0$ جواب حقیقی ندارد، پس

$$\Delta=16-4(k-1)<0\Rightarrow k-1>4\Rightarrow k>5$$

در معادلهٔ $x^2+2x-k+6=0$ مقدار Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=4-4(-k+6)=4k-20=4(k-5)$$

چون $k>5$، پس $4(k-5)>0$ و در نتیجه این معادله دو جواب حقیقی دارد.

۱۸۳۴- گزینهٔ ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{5})=0\xrightarrow{x_1<x_2}x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{5}$$

بنابراین $x_1^2+x_2^4=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^4=2+25=27$.

۱۸۳۵- گزینهٔ ۱ چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است و دیگری $\frac{-\sqrt{12}}{3}$. چون $x_1<x_2$، بنابراین

$$x_1=-\frac{\sqrt{12}}{3},\ x_2=1\Rightarrow 3x_1+x_2=1-\sqrt{12}$$

۱۸۳۶- گزینهٔ ۳ چون a جواب معادلهٔ $x^2-x-5=0$ است، پس در این معادله صدق می‌کند، یعنی

$$a^2-a-5=0\Rightarrow a^2-a=5$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود $b^2-b=5$. بنابراین

$$(a^2-a-2)(b^2-b+2)=(5-2)(5+2)=21$$

۱۸۳۷- گزینهٔ ۱ اگر اندازهٔ طول مستطیل را y و اندازهٔ عرض آن را x فرض کنیم، اندازهٔ قطر آن می‌شود $\sqrt{x^2+y^2}$. پس $y=4+x$ و $x^2+y^2=30$. در نتیجه

$$x^2+(4+x)^2=30\Rightarrow x^2+16+8x+x^2=30$$

$$x^2+4x-7=0\Rightarrow x=-2+\sqrt{11},\ x=-2-\sqrt{11}$$

اگر $x=-2-\sqrt{11}$، x عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. پس $x=-2+\sqrt{11}$ و در نتیجه $y=4+(-2+\sqrt{11})=2+\sqrt{11}$. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با

$$S=xy=(\sqrt{11}-2)(\sqrt{11}+2)=11-4=7$$

۱۸۳۸- گزینهٔ ۱ دو عدد را x و y می‌نامیم. پس $\frac{y}{x}=4$ و $xy=x+y+6$. بنابراین $y=4x$ و

$$x(4x)=x+4x+6\Rightarrow 4x^2-5x-6=0$$

$$\Delta=25+96=121\Rightarrow x=\frac{5\pm11}{8}\Rightarrow x_1=2,\ x=-\frac{3}{4}\ (\text{غ.ق.ق})$$

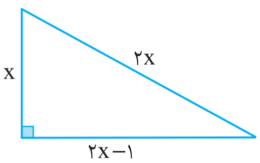
بنابراین $y=8$ و در نتیجه $y-x=6$.

۱۸۳۹- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر و بنابر قضیهٔ فیثاغورس، معادلهٔ $(2x)^2=x^2+(2x-1)^2$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$4x^2=x^2+4x^2-4x+1\Rightarrow x^2-4x+1=0\Rightarrow x=2-\sqrt{3},\ x=2+\sqrt{3}$$

چون $2x-1$ اندازهٔ یکی از ضلع‌های مثلث است، پس $2x-1>0$، یعنی $x>\frac{1}{2}$. بنابراین $x=2-\sqrt{3}$ قابل قبول نیست و در نتیجه $x=2+\sqrt{3}$. از طرف دیگر محیط مثلث برابر است با

$$P=x+2x+2x-1=5x-1=5(2+\sqrt{3})-1=9+5\sqrt{3}$$



۱۸۴۰- گزینهٔ ۲ این دو عدد را x و $x+2$ در نظر می‌گیریم. بنابراین تساوی $(x+2)^3-x^3=488$ برقرار است. پس

$$x^3+6x^2+12x+8-x^3=488\Rightarrow 6x^2+12x-480=0$$

$$x^2+2x-80=0\Rightarrow(x-8)(x+10)=0\Rightarrow x=8,\ x=-10$$

چون عددها طبیعی و زوج هستند، پس $x=-10$ قابل قبول نیست. بنابراین $x=8$ و دو عدد مورد نظر ۸ و ۱۰ هستند و تفاضل مربعات آن‌ها برابر $10^2-8^2=100-64$، یعنی ۳۶ است.

۱۸۴۱- گزینهٔ ۲ دلتای معادله باید برابر با صفر باشد:

$$\Delta=4(m+1)^2-4m(m+1)=4(m+1)(m+1-m)=4(m+1)=0$$

بنابراین $m=-1$.

۱۸۴۲- گزینهٔ ۲ اگر معادله حداکثر یک جواب حقیقی داشته باشد، باید $\Delta\le0$. پس

$$\Delta=36-4\times4(k-2)\le0\Rightarrow 68-16k\le0\Rightarrow k\ge\frac{17}{4}$$

پس حداقل مقدار k برابر $\frac{17}{4}$ است.

۱۸۴۳- گزینهٔ ۲ چون معادلهٔ $x^2+2x+b=0$ دو جواب حقیقی دارد، پس $\Delta=4-4b>0$. اکنون دلتای معادلهٔ $x^2-6x+b+8=0$ را حساب می‌کنیم $\Delta=36-4(b+8)=4-4b>0$. بنابراین، معادلهٔ اخیر نیز دو جواب دارد.

۱۸۴۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول**

$$x^2+(m-1)x+m-2m^2=0$$

$$\Delta=(m-1)^2-4(m-2m^2)=m^2-2m+1-4m+8m^2$$

$$=9m^2-6m+1=(3m-1)^2$$

$$x=\frac{(1-m)\pm\sqrt{(3m-1)^2}}{2}=\frac{(1-m)\pm(3m-1)}{2}\Rightarrow x_1=1-2m,\ x_2=m$$

حالت اول

$$x_1=1-2m<0\Rightarrow m>\frac{1}{2},\ x_2=m<2\Rightarrow\frac{1}{2}<m<2$$

حالت دوم

$$x_۱=۱-۲m<۲\Rightarrow m>-\frac{۱}{۲}\,,\ x_۲=m<۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<m<۰$$

پس می‌توان گفت $m\in(-\frac{۱}{۲},۰)\cup(\frac{۱}{۲},۲)$.

راه‌حل دوم اگر معادله را به‌صورت $x^۲+(m-۱)x-m(۲m-۱)=۰$ بنویسیم، به کمک تجزیه می‌توانیم آن را حل کنیم. در واقع به دنبال دو عدد هستیم که حاصل‌ضربشان $-m(۲m-۱)$ و حاصل‌جمعشان $m-۱$ باشد. پس یکی از این دو عدد $۲m-۱$ و دیگر $-m$ است. بنابراین $(x-m)(x+۲m-۱)=۰$. پس جواب‌های معادله $x_۱=۱-۲m$ و $x_۲=m$ هستند. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت اول $x_۱=۱-۲m<۰\Rightarrow m>\frac{۱}{۲}\ ,\quad x_۲=m<۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}<m<۲$

حالت دوم $x_۱=۱-۲m<۲\Rightarrow m>-\frac{۱}{۲}\ ,\quad x_۲=m<۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<m<۰$

بنابراین $m\in(-\frac{۱}{۲},۰)\cup(\frac{۱}{۲},۲)$.

۱۸۴۵- گزینهٔ ۱ مجموع ضرایب معادله برابر است با $۲-m+m-۲=۰$. پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است.

۱۸۴۶- گزینهٔ ۲ در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a-b+c=۰$، آن‌گاه جواب‌های معادله $x=-۱$ و $x=-\frac{c}{a}$ هستند.

در معادلهٔ $(\sin^۲\alpha)x^۲+x+\cos^۲\alpha=۰$،

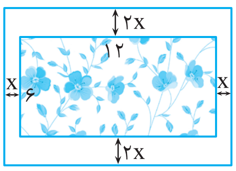
$$a=\sin^۲\alpha\,,\ b=۱\,,\ c=\cos^۲\alpha\Rightarrow a-b+c=\cos^۲\alpha-۱+\sin^۲\alpha=۰$$

بنابراین $x_۱=-\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}=-\cot^۲\alpha$ و $x_۲=-۱$. توجه کنید که چون $۰^\circ<\alpha<۴۵^\circ$، پس $\cot\alpha>۱$ و در نتیجه $-\cot^۲\alpha<-۱$. بنابراین

$$x_۲^۲-x_۱=(-۱)^۲-(-\cot^۲\alpha)=۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

۱۸۴۷- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل واضح است که ابعاد قاب $۱۲+۲x$ و $۶+۴x$ است. بنابراین مساحت قاب برابر است با $(۱۲+۲x)(۶+۴x)$. پس

$$(۶+۴x)(۱۲+۲x)=۱۰۴\Rightarrow ۲x^۲+۱۵x-۸=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲},\ x=-۸$$



$x=-۸$ قابل قبول نیست. پس $x=\frac{۱}{۲}$ و محیط قاب برابر است با

$$P=۲(۶+۴x+۱۲+۲x)$$
$$=۲(۶x+۱۸)=۴۲cm$$

۱۸۴۸- گزینهٔ ۱ سن کنونی مریم را x و سن کنونی برادرش را y در نظر می‌گیریم. در این صورت $x-۲=۷(y-۲)$ و $x=y^۲$. اگر در معادلهٔ اول به جای x قرار دهیم $y^۲$، به‌دست می‌آید:

$$y^۲-۲=۷(y-۲)\Rightarrow y^۲-۷y+۱۲=۰\Rightarrow(y-۳)(y-۴)=۰\Rightarrow y=۳,۴$$

اگر $y=۳$، آن‌گاه $x=۹$ یعنی مریم و برادرش در مجموع ۱۲ سال دارند که در گزینه‌ها نیست. اگر $y=۴$، آن‌گاه $x=۱۶$. یعنی مریم و برادرش در مجموع ۲۰ سال دارند که در گزینهٔ (۱) آمده است.

۱۸۴۹- گزینهٔ ۳ اگر طول ضلع مربع x باشد، اندازهٔ مساحت آن $x^۲$ و طول قطر آن $\sqrt{۲}x$ است. بنابراین طول ضلع مربع را از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲+\sqrt{۲}x=\frac{۷}{۲}\Rightarrow x^۲+\sqrt{۲}x-\frac{۷}{۲}=۰$$

$$x=۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ x=-۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})$$

محیط مربع $۴x$ است که می‌شود $۸-۲\sqrt{۲}$.

۱۸۵۰- گزینهٔ ۳ طول یک تکه را x بگیرید. در این صورت طول تکهٔ دیگر $۲۰-x$ است. بنابراین طول هر ضلع مربع نظیر تکهٔ اول $\frac{x}{۴}$ و طول هر ضلع مربع نظیر تکهٔ دوم $\frac{۲۰-x}{۴}$ است. در نتیجه، مساحت این مربع‌ها $(\frac{x}{۴})^۲$ و $(\frac{۲۰-x}{۴})^۲$ است. به این ترتیب،

$$(\frac{x}{۴})^۲+(\frac{۲۰-x}{۴})^۲=۱۳\Rightarrow x^۲-۲۰x+۹۶=۰\Rightarrow x=۱۲\ ,\ x=۸$$

چون $۲۰=۸+۱۲$، پس، طول یکی از تکه‌ها ۱۲ سانتی‌متر و طول تکهٔ دیگر ۸ سانتی‌متر و اختلاف اندازه‌های آن‌ها برابر ۴ سانتی‌متر است.

۱۸۵۱- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=m+۱=۵\Rightarrow m=۴$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با $\alpha\beta=-۲m-۱=-۹$.

۱۸۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_۱x_۲=-۵$ و $x_۱+x_۲=۳$. در نتیجه

$$x_۱(x_۲-۲)+x_۲(x_۱-۲)=۲x_۱x_۲-۲(x_۱+x_۲)=۲(-۵)-۲(۳)=-۱۶$$

۱۸۵۳- گزینهٔ ۴ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۵=۰$ را با α و β نشان می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل $(۲-\alpha)(۲-\beta)=(\alpha-۲)(\beta-۲)$ را بیابیم.

برای این کار می‌توانیم یکی از روش‌های زیر را به کار ببریم.

راه‌حل اول دقت کنید که $(\alpha-۲)(\beta-۲)=\alpha\beta-۲(\alpha+\beta)+۴$. از طرف دیگر، $\alpha+\beta=۲$ و $\alpha\beta=-۵$. بنابراین $(\alpha-۲)(\beta-۲)=-۵-۴+۴=-۵$.

پس حاصل‌ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

راه‌حل دوم می‌دانیم $x^۲-۲x-۵=(x-\alpha)(x-\beta)$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم ۲، به دست می‌آید $-۵=(۲-\alpha)(۲-\beta)$. چون $\alpha\beta=-۵$، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

۱۸۵۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x_۱+x_۲=-(k+۱)=-۱-k\ ,\quad x_۱x_۲=۸$$

بنابراین

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{-۱-k}{۸}=-\frac{۳}{۴}$$

بنابراین $k=۵$.

۱۸۵۵- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\frac{۲}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=۲$. بنابراین

$$\frac{m-۱}{۲}=۲\Rightarrow m-۱=۴\Rightarrow m=۵$$

۱۸۵۶- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\beta^2$. از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=-\frac{27}{8}\Rightarrow\beta^3=-\frac{27}{8}\Rightarrow\beta=-\frac{3}{2}$$

پس $\alpha=\frac{9}{4}$، همچنین $\alpha+\beta=-\frac{m}{8}$. بنابراین $\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{m}{8}\Rightarrow m=-6$

۱۸۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)\qquad(1)$$

از طرف دیگر، $x_1+x_2=2$ و $x_1x_2=k$. در نتیجه، از تساوی (۱) و اینکه $x_1^3+x_2^3=6$ به‌دست می‌آید $8=6+6k$. بنابراین $k=\frac{1}{3}$.

۱۸۵۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_1+x_2=3k$ و $x_1x_2=9$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=6\Rightarrow(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2=6^2$$

$$x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=36\Rightarrow 3k-2\sqrt{9}=36\Rightarrow k=14$$

۱۸۵۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\alpha+\beta=3\Rightarrow(\alpha+\beta)^2=9,\quad |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{13}\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=13$$

پس معادله‌ای مورد نظر است که جواب‌های آن ۹ و ۱۳ باشند. چون مجموع این جواب‌ها برابر ۲۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۱۷ است، پس معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-22x+117=0$$

۱۸۶۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا جواب‌های معادله $2x^2+3x-9=0$ را می‌یابیم:

$$2x^2+3x-9=0\Rightarrow(2x-3)(x+3)=0\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}\ ,\ x_2=-3$$

بنابراین جواب‌های معادله $9x^2-ax+b=0$ به صورت زیر هستند:

$$\alpha=\frac{1}{x_1^2}-3=\frac{4}{9}-3=-\frac{23}{9}\ ,\quad \beta=\frac{1}{x_2^2}-3=\frac{1}{9}-3=-\frac{26}{9}$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{a}{9}$. بنابراین $\frac{a}{9}=-\frac{49}{9}\Rightarrow a=-49$

راه‌حل دوم جواب‌های معادلهٔ $2x^2+3x-9=0$ را با α و β نشان می‌دهیم. اگر جواب‌های معادلهٔ $9x^2-ax+b=0$ را با z و t نشان دهیم، آن‌گاه $z=\frac{1}{\alpha^2}-3$ و $t=\frac{1}{\beta^2}-3$.

توجه کنید که $z+t=\frac{a}{9}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-6=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}-6$. چون $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$ و $\alpha\beta=-\frac{9}{2}$، پس $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{9}{4}+9=\frac{45}{4}$. بنابراین

$$\frac{a}{9}=\frac{\frac{45}{4}}{\frac{81}{4}}-6=\frac{5}{9}-6\Rightarrow a=-49$$

۱۸۶۱- گزینهٔ ۴ β جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2-\beta-7=0\Rightarrow 2\beta^2=\beta+7$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$. بنابراین $\alpha+2\beta^2=\alpha+\beta+7=\frac{1}{2}+7=\frac{15}{2}$.

۱۸۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{3}{2}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $-\frac{5}{2}$ است. بنابراین

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}=-\frac{15}{4}$$

۱۸۶۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ و $\alpha\beta=-\frac{5}{2}$. بنابراین

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{1}{4}-2(-\frac{5}{2})}{-\frac{5}{2}}=-\frac{21}{10}$$

۱۸۶۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. بنابراین

$$3=\frac{\sqrt{5^2-4(k+1)(-2)}}{|-2|}\Rightarrow 6=\sqrt{8k+33}$$

$$6^2=8k+33\Rightarrow 8k=3\Rightarrow k=\frac{3}{8}$$

۱۸۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_1+x_2=1$ و

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{1-4(2k-3)}=\sqrt{13-8k}$$

از طرف دیگر،

$$x_1^2-x_2^2=6\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2)=6\Rightarrow x_1-x_2=6$$

پس $x_1-x_2>0$، در نتیجه

$$\sqrt{13-8k}=6\Rightarrow 13-8k=36\Rightarrow k=-\frac{23}{8}$$

۱۸۶۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_1+x_2=15$ و $x_1x_2=9$. بنابراین $x_1,x_2>0$ و

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}^2+\sqrt{x_2}^2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{15}{\sqrt{9}}=5$$

۱۸۶۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_1+x_2=-(\frac{-6}{3})=2$ و $x_1x_2=-\frac{4}{3}$.

از طرف دیگر،

$$S=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_1x_2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2=4$$

$$P=(x_1^2+x_1x_2)(x_2^2+x_1x_2)=(x_1(x_1+x_2))(x_2(x_1+x_2))$$

$$=x_1x_2(x_1+x_2)^2=-\frac{4}{3}\times 4=-\frac{16}{3}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^2-4x-\frac{16}{3}=0$ یا $3x^2-12x-16=0$ است.

۱۸۶۸- گزینهٔ ۱ اگر جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ را α و β بنامیم، آن‌گاه $\alpha+\beta=3$ و $\alpha\beta=-5$. جواب‌های معادلهٔ مورد نظر α^3 و β^3 هستند. بنابراین

$$S=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=27-3\times(-5)\times 3=72$$

$$P=\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=(-5)^3=-125$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-72x-125=0$$

۱۸۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=-1$ و $\alpha\beta=-3$، بنابراین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$S=\alpha^2+\frac{1}{\beta}+\beta^2+\frac{1}{\alpha}=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1+6+\frac{-1}{-3}=\frac{22}{3}$$

$$P=(\alpha^2+\frac{1}{\beta})(\beta^2+\frac{1}{\alpha})=(\alpha\beta)^2+\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha\beta}=9-1-\frac{1}{3}=\frac{23}{3}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-\frac{22}{3}x+\frac{23}{3}=0\Rightarrow 3x^2-22x+23=0$$

۱۸۷۰- گزینهٔ ۳ اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}(x_1+x_2)+x_1x_2=-1\\(x_1+x_2)-x_1x_2=-11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S+P=-1\\S-P=-11\end{cases}$$

را حل کنیم، به‌دست می‌آید $S=-6$ و $P=5$. بنابراین x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2+6x+5=0$ هستند.

۱۸۷۱- گزینهٔ ۲ کافی است در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ نابرابری $\frac{c}{a}<0$ برقرار باشد تا معادله دو جواب داشته باشد که یکی مثبت و یکی منفی است. پس $\frac{m-4}{m+2}<0$ در نتیجه $-2<m<4$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد.

۱۸۷۲- گزینهٔ ۲ اگر $a=0$، آن‌گاه معادله فقط یک جواب دارد که قابل قبول نیست. اگر $a\neq0$، آن‌گاه حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با $\frac{1-a^2}{a^2}$ که باید منفی باشد. پس

$$\frac{1-a^2}{a^2}<0\Rightarrow1-a^2<0\Rightarrow a^2>1\Rightarrow|a|>1$$

۱۸۷۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\Delta=4m^2+4m+4\Rightarrow(2m+1)^2+3>0$$

پس معادله حتماً دو جواب دارد. برای اینکه جواب‌ها هم‌علامت باشند، کافی است حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد، پس $\frac{c}{a}>0\Rightarrow-m-1>0\Rightarrow m<-1$

۱۸۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $a=0$، آن‌گاه معادله به صورت $-8x+9=0$ درمی‌آید که فقط یک جواب دارد. با شرط $a\neq0$ باید دلتای معادله مثبت باشد:

$$\Delta=16(a+2)^2-16a\times9=16((a+2)^2-9a)=16(a^2-5a+4)$$
$$=16(a-1)(a-4)>0$$

بنابراین $a\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(4,+\infty)$. همچنین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها باید مثبت باشند: $\frac{a+2}{a}>0$ و $\frac{9}{4a}>0$. پس $a>0$، در نتیجه $a\in(0,1)\cup(4,+\infty)$، یعنی a مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را نمی‌تواند داشته باشند.

۱۸۷۵- گزینهٔ ۱ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، باید شرط‌های $\Delta>0$، $\alpha\beta>0$ و $\alpha+\beta<0$ برقرار باشند تا معادله دو جواب منفی داشته باشد. در نتیجه

$$\Delta=m^2-8(m-2)>0\Rightarrow m^2-8m+16>0\Rightarrow(m-4)^2>0\Rightarrow m\neq4$$

$$\alpha+\beta<0\Rightarrow\frac{-m}{2}<0\Rightarrow m>0,\quad \alpha\beta>0\Rightarrow\frac{m-2}{2}>0\Rightarrow m>2$$

بنابراین $m\in(2,+\infty)-\{4\}$.

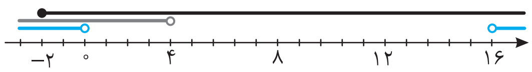
۱۸۷۶- گزینهٔ ۲ برای اینکه معادله دو جواب داشته باشد باید

$$\Delta>0\Rightarrow(m-4)^2-4(2m+4)>0\Rightarrow m^2-16m>0\Rightarrow m<0 \text{ یا } m>16$$

برای اینکه دو جواب معادله نامنفی باشند، باید مجموع آن‌ها مثبت و حاصل‌ضربشان نامنفی باشد:

$$\frac{c}{a}\geq0\Rightarrow2m+4\geq0\Rightarrow m\geq-2,\quad -\frac{b}{a}>0\Rightarrow4-m>0\Rightarrow m<4$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برای m به‌صورت $-2\leq m<0$ است و در نتیجه m می‌تواند مقادیر صحیح ۲- و ۱- را داشته باشد.



۱۸۷۷- گزینهٔ ۳ معادلهٔ مورد نظر همواره دو جواب دارد $(\Delta=m^2+8>0)$.
اگر معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع آن‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. بنابراین

$$m-2<0\Rightarrow m<2,\quad -(m+1)>0\Rightarrow m<-1$$

پس $m<-1$.

۱۸۷۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\Delta=(2m+1)^2$. چون معادله دو جواب دارد، باید $m\neq-\frac{1}{2}$. چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت کوچک‌تر است، پس مجموع جواب‌ها مثبت است و چون جواب‌ها مختلف‌العلامت هستند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها منفی است. بنابراین

$$x_1+x_2=-\frac{2m-1}{m}>0\Rightarrow0<m<\frac{1}{2},\quad x_1x_2=-\frac{2}{m}<0\Rightarrow m>0$$

بنابراین $0<m<\frac{1}{2}$.

۱۸۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $\Delta\geq0$، پس

$$4-4m+8\geq0\Rightarrow m\leq3$$

از طرف دیگر، اگر معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، آن‌گاه

$$\frac{c}{a}\leq0\Rightarrow m-2\leq0\Rightarrow m\leq2$$

همچنین، ممکن است معادله دو جواب نامثبت داشته باشد، که در این صورت باید مجموع آن‌ها نامثبت باشد، یعنی $-\frac{b}{a}\leq0$، که ممکن نیست، زیرا $-\frac{b}{a}=2$.
بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۲ است.

۱۸۸۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\Delta=4m^2+4m+8=(2m+1)^2+7>0$$

بنابراین معادله حتماً دو جواب دارد. از طرف دیگر، برای اینکه معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع جواب‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. یعنی باید

$$-\frac{b}{a}<0\Rightarrow2m<0\Rightarrow m<0,\quad \frac{c}{a}>0\Rightarrow-m-2>0\Rightarrow m<-2$$

پس اگر $m<-2$، معادله دو جواب منفی دارد. اکنون توجه کنید که اگر $m=-2$، معادله به‌صورت $x^2+4x=0$ درمی‌آید که یک جواب آن $x=0$ و جواب دیگر $x=-4$ است. پس در این حالت نیز معادله جواب مثبت ندارد.
بنابراین اگر $m>-2$، معادله یا دو جواب مثبت، یا دو جواب مختلف‌العلامت دارد، که در هر صورت یکی از جواب‌ها مثبت است.

۱۸۸۱- گزینهٔ ۳ چون $x=\frac{1}{3}$ و $x=-1$ جواب‌های معادله هستند، پس

$$\begin{cases}6(\frac{1}{27})-5(\frac{1}{9})+a(\frac{1}{3})+b=0\\ 6(-1)-5\times1-a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+3b=1\\ a-b=-11\end{cases}$$

بنابراین $a=-8$ و $b=3$. پس معادله به شکل $6x^3-5x^2-8x+3=0$ در می‌آید که چون $\frac{1}{3}$ و -1 جواب‌های آن هستند، پس $3x-1$ و $x+1$ عامل‌های عبارت سمت چپ معادله هستند و به کمک تقسیم می‌توان نوشت $(x+1)(3x-1)(2x-3)=0$. بنابراین جواب دیگر معادله $x=\frac{3}{2}$ است. در نتیجه $k=\frac{3}{2}$ و $\frac{ab}{k}=\frac{(-8)\times3}{\frac{3}{2}}=-16$.

۱۸۸۲- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^3+8+x^2-5x-14=0\Rightarrow(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(x-7)=0$$

$$(x+2)(x^2-2x+4+x-7)=0\Rightarrow(x+2)(x^2-x-3)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+2=0\Rightarrow x=-2\,,\quad x^2-x-3=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های منفی معادله برابر است با

$$(\frac{1-\sqrt{13}}{2})(-2)=\sqrt{13}-1$$

۱۸۸۳- گزینهٔ ۴ واضح است که $x=-1$ جواب معادله است. پس $x+1$ عامل عبارت سمت چپ معادله است

$$x^3+x^2+x^2-mx-m-1=0\Rightarrow x^2(x+1)+(x+1)(x-m-1)=0$$

$$(x+1)(x^2+x-(m+1))=0$$

برای اینکه معادله سه جواب داشته باشد، باید معادله $x^2+x-(m+1)=0$ دو جواب داشته باشد و هیچ یک از این جواب‌ها برابر -1 نباشند. بنابراین

$$\Delta=1+4(m+1)>0\Rightarrow5+4m>0\Rightarrow m>-\frac{5}{4}$$

$$(-1)^2-1-(m+1)\neq0\Rightarrow m\neq-1$$

پس $m\in(-\frac{5}{4},+\infty)-\{-1\}$.

۱۸۸۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $t=x^2\geq0$، معادله به‌صورت $t^2-5t-3=0$ در می‌آید که جواب‌های آن $t=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ هستند. جواب $\frac{5-\sqrt{37}}{2}$ قابل قبول نیست چون عددی منفی است. بنابراین

$$x^2=\frac{5+\sqrt{37}}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{37}}{2}}$$

یعنی معادله دو جواب دارد.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $t=x^2\geq0$، معادله به‌صورت $t^2-5t-3=0$ در می‌آید، که در آن $\frac{c}{a}<0$ است. پس معادله دو جواب مختلف العلامت دارد که با توجه به فرض $t\geq0$، جواب منفی غیرقابل قبول و جواب مثبت قابل قبول خواهد بود و $x=\pm\sqrt{t}$. پس معادلهٔ داده شده دو جواب دارد.

۱۸۸۵- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^2=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود $t^2-4t-12=0$، پس

$$t^2-4t-12=0\Rightarrow(t-6)(t+2)=0$$

$$t=-2\quad(\text{غ.ق.ق})\,,\quad t=6\Rightarrow x^2=6\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -6 است.

۱۸۸۶- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $x^2=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر می‌شود $t^2+(2m-1)t-2m=0$. چون معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد، پس این معادلهٔ درجهٔ دوم دو جواب مثبت دارد. بنابراین

$$\Delta>0\Rightarrow(2m-1)^2+8m>0\Rightarrow(2m+1)^2>0\Rightarrow m\neq-\frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{a}>0\Rightarrow-2m>0\Rightarrow m<0$$

$$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow-(2m-1)>0\Rightarrow2m-1<0\Rightarrow m<\frac{1}{2}$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر m به‌صورت $(-\infty,0)-\{-\frac{1}{2}\}$ است.

۱۸۸۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^2=t$، به‌معادلهٔ $t^2-kt+\frac{3-2k}{4}=0$ می‌رسیم. اگر این معادله فقط یک جواب مثبت مانند t_1 داشته باشد، معادلهٔ اصلی دو جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t_1}$ دارد:

$$\begin{cases}\Delta=0\\ t_1=-\frac{b}{2a}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^2-(3-2k)=0\\ \frac{k}{2}>0\Rightarrow k>0\end{cases}$$

$$k^2+2k-3=0\Rightarrow k=-3\ (\text{غ.ق.ق}),\ k=1$$

همچنین اگر معادلهٔ درجهٔ دوم یک جواب منفی و یک جواب مثبت داشته باشد، جواب منفی قابل‌قبول نیست، چون x^2 نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادلهٔ اصلی دو جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t}$ دارد، پس

$$\frac{c}{a}<0\Rightarrow\frac{3-2k}{4}<0\Rightarrow3-2k<0\Rightarrow k>\frac{3}{2}$$

بنابراین $k>\frac{3}{2}$ یا $k=1$ جواب مسئله است.

۱۸۸۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^2=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$، $t\geq0$ و معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^2-2mt+m^2-4=0\quad(*)$$

در این معادله $\Delta=4m^2-4(m^2-4)=16>0$. بنابراین معادلهٔ $(*)$ به ازای هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادلهٔ اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت. بنابراین اگر t_1 و t_2 جواب‌های معادلهٔ $(*)$ باشند، باید

$$t_1+t_2<0\Rightarrow2m<0\Rightarrow m<0$$

$$t_1t_2>0\Rightarrow m^2-4>0\Rightarrow m<-2\ \text{یا}\ m>2$$

بنابراین کافی است $m<-2$ تا معادلهٔ اولیه جواب حقیقی نداشته باشد.

۱۸۸۹- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $x^2+x=t$. در این صورت

$$t^2-18t+72=0\Rightarrow(t-6)(t-12)=0$$

$$t=6\Rightarrow x^2+x=6\Rightarrow x^2+x-6=0$$

$$(x-2)(x+3)=0\Rightarrow x_1=2,\quad x_2=-3$$

$$t=12\Rightarrow x^2+x=12\Rightarrow x^2+x-12=0$$

$$(x-3)(x+4)=0\Rightarrow x_3=3,\quad x_4=-4$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-2$$

۱۸۹۰- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $x^2-7x+11=t$. در نتیجه $t^2=3t+4$. بنابراین $t=-1,4$، پس به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$x^2-7x+11=-1\Rightarrow x^2-7x+12=0\Rightarrow x=3,4$$

$$x^2-7x+11=4\Rightarrow x^2-7x+7=0\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{21}}{2}$$

پس معادلهٔ مورد نظر چهار جواب دارد.

۱۸۹۱- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x^2+1=2(x+1)\Rightarrow x^2-2x-1=0$$

جواب‌های معادلهٔ بالا $x=1+\sqrt{2}$ و $x=1-\sqrt{2}$ هستند. پس جواب بزرگ‌تر معادله $1+\sqrt{2}$ است.

۱۸۹۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل $\frac{x}{x^4-x^2-2x+1}=\frac{1}{x^3-1}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^4-x=x^4-x^2-2x+1\Rightarrow x^2+x-1=0\Rightarrow\frac{c}{a}=-1$$

۱۸۹۳- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را در $(x-1)(x+1)$ ضرب و آن را ساده می‌کنیم:

$$x+1+2(x-1)=2(x-1)(x+1)\Rightarrow 3x-1=2x^2-2\Rightarrow 2x^2-3x-1=0$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که ۱ و ۱- از آن‌ها نیستند و مجموع آن‌ها برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۸۹۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید x_1 جواب دیگر معادله باشد. ابتدا معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{5x-2-4a}{x^2-(a+2)x+2a}=1\Rightarrow x^2-(a+7)x+6a+2=0\quad(1)$$

چون $x=5$ جواب معادله است، پس

$$25-5(a+7)+6a+2=0\Rightarrow a=8$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر $a+7$ است، پس

$$a+7=5+x_1\Rightarrow 15=5+x_1\Rightarrow x_1=10$$

یعنی جواب دیگر معادله ۱۰ است که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نمی‌کند و قابل قبول است.

۱۸۹۵- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{2x-2a+x+3}{(x+3)(x-a)}=4\Rightarrow\frac{3x-2a+3}{(x+3)(x-a)}=4$$

$$3x-2a+3=4x^2+(12-4a)x-12a\Rightarrow 4x^2+(9-4a)x-10a-3=0$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-10a-3}{4}$ است. پس

$$\frac{-10a-3}{4}=\frac{7}{4}\Rightarrow -10a=10\Rightarrow a=-1$$

۱۸۹۶- گزینهٔ ۲ دو طرف معادله را در x^2-1 ضرب می‌کنیم:

$$x-1-2=a(x^2-1)\Rightarrow ax^2-x+3-a=0\quad(1)$$

اگر در معادلهٔ (۱) شرط $\Delta<0$ برقرار باشد، معادله جواب ندارد. بنابراین

$$\Delta=1-4a(3-a)<0\Rightarrow 4a^2-12a+1<0\Rightarrow\frac{3-2\sqrt{2}}{2}<a<\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

پس به ازای اعداد طبیعی $a=1$ و $a=2$ معادله جواب ندارد.

توجه کنید که در حالت‌های زیر هم معادلهٔ اصلی جواب ندارد ولی این حالت‌ها در این مسئله اتفاق نمی‌افتند.

۱) $x=1$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱) باشد.

۲) $x=-1$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۲) باشد.

۳) $x=1$ و $x=-1$ هر دو جواب‌های معادلهٔ (۱) باشند.

۱۸۹۷- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $\frac{2x+1}{x}=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$t+\frac{-6}{t}=5\Rightarrow t^2-5t-6=0\Rightarrow t=-1,t=6$$

بنابراین

$$t=-1\Rightarrow\frac{2x+1}{x}=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

$$t=6\Rightarrow\frac{2x+1}{x}=6\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

از آنجایی که هیچ کدام از این دو مقدار باعث صفر شدن مخرج‌ها در معادلهٔ اصلی نمی‌شوند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $-\frac{1}{12}$.

۱۸۹۸- گزینهٔ ۱ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $x+\frac{1}{x}=4$. بنابراین

$$x^2+1=4x\Rightarrow x^2-4x+1=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{3}$$

بنابراین دو عدد $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ شرط مورد نظر را دارند که $2-\sqrt{3}$ کوچک‌ترین عددی است که این شرط را دارد.

۱۸۹۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید زمان رفت برابر t و سرعت رفت برابر v باشد. در این صورت زمان برگشت برابر $t+\frac{4}{9}$ و سرعت برگشت برابر $v-5$ است. چون فاصلهٔ دو شهر برابر ۲۰۰ کیلومتر است، پس تساوی‌های $200=vt$ و $200=(v-5)(t+\frac{4}{9})$ برقرارند. بنابراین

$$v=\frac{200}{t}\Rightarrow 200=(\frac{200}{t}-5)(t+\frac{4}{9})\Rightarrow 200=200+\frac{800}{9t}-5t-\frac{20}{9}$$

$$800-45t^2-20t=0\Rightarrow 9t^2+4t-160=0$$

$$(9t+40)(t-4)=0\Rightarrow t=4\ \text{ساعت}$$

بنابراین زمان رفت ۴ ساعت است.

۱۹۰۰- گزینهٔ ۱ نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است. اگر طول این مستطیل برابر x و عرض آن برابر y باشد، آن‌گاه

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow x=(\frac{\sqrt{5}+1}{2})y$$

از طرف دیگر نسبت محیط به مساحت مستطیل برابر $3-\sqrt{5}$ است. بنابراین

$$\frac{2(x+y)}{xy}=3-\sqrt{5}\Rightarrow 2((\frac{\sqrt{5}+1}{2})y+y)=(3-\sqrt{5})xy$$

$$2(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1)=(3-\sqrt{5})x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}+3}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+3}{3-\sqrt{5}}\times\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{5})^2}{9-5}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

۱۹۰۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(x-1)(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5})=0\Rightarrow(x-1)(\frac{x-5+x-3}{(x-3)(x-5)})=0$$

$$(x-1)(\frac{2x-8}{(x-3)(x-5)})=0\Rightarrow\frac{2(x-1)(x-4)}{(x-3)(x-5)}=0$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۱ و ۴ هستند و مجموع آن‌ها ۵ است.

۱۹۰۲- گزینهٔ ۱ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{x-12}{x^2+3x}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x+3}=\frac{2x+6+5x}{x^2+3x}=\frac{7x+6}{x^2+3x}$$

در نتیجه، با فرض $x\neq0,-3$،

$$x-12=7x+6\Rightarrow6x=-18\Rightarrow x=-3$$

که قابل قبول نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۱۹۰۳- گزینهٔ ۳ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم

$$\frac{3x-2-2a}{x^2-(a+2)x+2a}=1\Rightarrow x^2-(a+5)x+4a+2=0\qquad(1)$$

چون $x=6$ جواب معادله است، پس

$$36-6(a+5)+4a+2=0\Rightarrow-2a+8=0\Rightarrow a=4$$

چـون مجمـوع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر $a+5=9$ اسـت، پس جواب دیگر معادلهٔ مورد نظر برابر ۳ است.

۱۹۰۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** دو طرف معادلهٔ داده شده را در $(x^2-x+1)(x-1)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-1)(x^2+x+1)=\frac{a}{a+1}(x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^3-1=\frac{a}{a+1}(x^3+1)\Rightarrow(a+1)x^3-a-1=ax^3+a$$

$$x^3=2a+1\Rightarrow x=\sqrt[3]{2a+1}$$

اگر $\sqrt[3]{2a+1}$ ریشهٔ مخرج کسر در معادلهٔ اصلی باشد، قابل قبول نیست. در غیر این صورت قابل قبول است و معادله یک جواب دارد. ریشهٔ مخرج کسر $x=1$ است، پس $\sqrt[3]{2a+1}=1\Rightarrow2a+1=1\Rightarrow a=0$

توجه کنید که اگر $a=0$، آن‌گاه معادله به‌صورت $x^2+x+1=0$ درمی‌آید که جواب ندارد. همچنین اگر $a=-1$، آن‌گاه سمت راست معادله تعریف نمی‌شود. بنابراین برای $a\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$ معادله همواره یک جواب دارد.

راه‌حل دوم چون $a+1$ در مخرج کسر است، پس $a\neq-1$. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. برای یافتن گزینهٔ صحیح کافی است $a=0$ را امتحان کنیم.

به ازای $a=0$ معادله می‌شود $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=0$ که جواب ندارد. پس $a\neq0$.

۱۹۰۵- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{5}{(x-1)(x+4)}-\frac{3}{(x+1)(x+4)}=k$$

$$\frac{5(x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+4)}=k\Rightarrow\frac{2(x+4)}{(x-1)(x+1)(x+4)}=k$$

$$k(x^2-1)=2\Rightarrow kx^2-k-2=0$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-k-2}{k}$ است. پس

$$\frac{-k-2}{k}=-4\Rightarrow4k=k+2\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

۱۹۰۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $(x+\frac{2}{x})^2=t$، معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^2-9t-10=0\Rightarrow t=-1,t=10$$

چون $t>0$، پس $t=-1$ غیرقابل قبول است. اگر $t=10$، آن‌گاه

$$\begin{cases}x+\frac{2}{x}=\sqrt{10}\Rightarrow x^2-\sqrt{10}x+2=0, & \Delta=2\\ x+\frac{2}{x}=-\sqrt{10}\Rightarrow x^2+\sqrt{10}x+2=0, & \Delta=2\end{cases}$$

هـر کدام از معادله‌های بـالا دو جواب غیرصفر دارنـد و جواب‌های معادلهٔ اول قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ دوم هستند. پس معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد.

۱۹۰۷- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{21}{x^2+4x+10}-(x^2+4x+10)+10=6$$

اگر فرض کنیم $x^2+4x+10=t$، این معادله می‌شود

$$\frac{21}{t}-t+4=0\xrightarrow{\text{ضرب در } t}21-t^2+4t=0$$

$$t^2-4t-21=0\Rightarrow(t-7)(t+3)=0\Rightarrow t=-3,\ t=7$$

بنابراین

$t=-3\Rightarrow x^2+4x+10=-3\Rightarrow x^2+4x+13=0$ $(\Delta<0)$ جواب ندارد.

$$t=7\Rightarrow x^2+4x+10=7\Rightarrow x^2+4x+3=0$$

$$(x+1)(x+3)=0\Rightarrow x=-1,\ x=-3$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -4 است.

۱۹۰۸- گزینهٔ ۲ اگـر طول ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ مثلث را a و b و طول وتر آن را c فرض کنیم، آن‌گاه

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\Rightarrow b=\frac{4}{3}a$$

بنابراین طول وتر برابر است با

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\frac{16}{9}a^2}=\sqrt{\frac{25}{9}a^2}=\frac{5}{3}a$$

بنابراین

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{47}{30}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{4}{3}a}+\frac{1}{\frac{5}{3}a}=\frac{47}{30}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{3}{4a}+\frac{3}{5a}=\frac{47}{30}$$

دو طرف معادله را در $60a$ ضرب می‌کنیم

$$60+45+36=94a\Rightarrow a=\frac{141}{94}=\frac{3}{2}\xrightarrow{b=\frac{4}{3}a}b=2$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times2=\frac{3}{2}$.

۱۹۰۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم تعداد افراد کلاس، n نفر باشند، در نتیجه هزینهٔ سرانهٔ اولیه برابر $\frac{۷۰۰}{n}$ (برحسب هزارتومان) است. با افزودن پنج نفر از دانش‌آموزان کلاس دیگر هزینهٔ سرانه برابر با $\frac{۷۰۰}{n}-۷$ می‌شود. در نتیجه $(\frac{۷۰۰}{n}-۷)(n+۵)=۷۰۰$. بنابراین

$$(\frac{۷۰۰-۷n}{n})(n+۵)=۷۰۰\Rightarrow(۷۰۰-۷n)(n+۵)=۷۰۰n$$

$$n^۲+۵n-۵۰۰=۰\Rightarrow(n+۲۵)(n-۲۰)=۰\Rightarrow n=-۲۵,n=۲۰$$

فقط جواب $n=۲۰$ قابل قبول است.

۱۹۱۰- گزینهٔ ۱ ۲۰ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۸۰ کیلوگرم آن آب است. اگر نیمی از آب را تبخیر کنیم، ۴۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، جرم شکر $۲۰+x$ و جرم محلول $۶۰+x$ می‌شود. پس

$$\frac{۲۰+x}{۶۰+x}=\frac{۴۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۲۰+x}{۶۰+x}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow۱۰۰+۵x=۱۲۰+۲x\Rightarrow۳x=۲۰\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۳}$$

۱۹۱۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$y=x(x^۲-۳x+۲)=x(x-۱)(x-۲)$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت y به صورت زیر است.

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	۰	+	

۱۹۱۲- گزینهٔ ۱ چون عبارت یک ریشه دارد و در دو طرف ریشه علامت آن متفاوت است، پس باید عبارت از درجهٔ اول باشد. یعنی ضریب $x^۲$ باید صفر باشد:

$$m^۲-۴=۰\Rightarrow m=\pm۲$$

اگر $m=۲$، عبارت به‌صورت $y=۲nx+۲$ است. چون $x=۴$ ریشهٔ عبارت است، پس

$$۰=۲n\times۴+۲\Rightarrow n=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۲$$

در این صورت جدول تعیین علامت عبارت به‌صورت زیر است و این حالت قابل قبول نیست.

x	$-\infty$		۴		$+\infty$
y		+	۰	−	

اگر $m=-۲$، عبارت به‌صورت $y=-۲nx-۲$ است. چون $x=۴$ ریشهٔ عبارت است، پس $۰=-۲n\times۴-۲$. در نتیجه $n=-\frac{۱}{۴}$، بنابراین $mn=\frac{۱}{۲}$.

۱۹۱۳- گزینهٔ ۱ با توجه به جدول، $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌های عبارت هستند:

$$x=۱\Rightarrow m+۲-(m+۲)^۲+n=۰\quad(*)$$

$$x=۲\Rightarrow۴(m+۲)-۲(m+۲)^۲+n=۰$$

دو طرف تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$(m+۲)^۲-۳(m+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m+۲=۰\Rightarrow m=-۲\\m+۲=۳\Rightarrow m=۱\end{cases}$$

به ازای $m=-۲$ نتیجه می‌شود $y=n$ که در این صورت y ثابت است و به ازای $m=۱$ از معادلهٔ $(*)$ مقدار n به‌دست می‌آید

$$۳-۹+n=۰\Rightarrow n=۶$$

۱۹۱۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا نامعادله‌ها را به‌صورت‌های زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x-x^۳>۰\Rightarrow x(۱-x)(۱+x)>۰,\quad x-x^۲<۰\Rightarrow x(۱-x)<۰\Rightarrow\begin{cases}x>۱\\x<۰\end{cases}$$

در نتیجه مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، با فرض $x>۱$ یا $x<۰$ با مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۱+x<۰$ که بازهٔ $(-\infty,-۱)$ است، برابر است. اشتراک مجموعه‌های $(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$ و $(-\infty,-۱)$ برابر $(-\infty,-۱)$ است که مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ مورد نظر مسئله است.

راه‌حل دوم عدد $-\frac{۱}{۲}$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی عدد -۲ در آن صدق می‌کند پس گزینهٔ (۱) جواب است.

۱۹۱۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که می‌خواهیم نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x(x^۲-۴x-۵)^۲(x^۲-۱)<۰$$

$$x^۲-۴x-۵=(x-۵)(x+۱),\quad x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$$

در نتیجه طرف چپ نامعادلهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y=x(x+۱)^۳(x-۵)^۲(x-۱)$$

با تشکیل جدول تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۵		$+\infty$
y		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله برابر است با $(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$. پس $a=-۱$، $b=۰$ و در نتیجه $a+b=-۱$.

۱۹۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)$. دلتای عبارت $x^۲-x+۱$ منفی است $(\Delta=-۳)$. در نتیجه همواره $x^۲-x+۱>۰$.

بنابراین مسئله به یافتن مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $y=\frac{x+۱}{(x-۲)(x-۴)}\leq۰$ تبدیل می‌شود. جدول تعیین علامت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۲		۴		$+\infty$
y		−	۰	+	ت ن	−	ت ن	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-۱]\cup(۲,۴)$ است. پس $a=-۱$ و $b=۴$ و در نتیجه $a+b=۳$.

۱۹۱۷- گزینهٔ ۲ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۴-x^۲-۲<۰\Rightarrow(x^۲+۱)(x^۲-۲)<۰$$

چون مقدار عبارت $x^۲+۱$ همواره مثبت است، پس

$$x^۲-۲<۰\Rightarrow-\sqrt{۲}<x<\sqrt{۲}$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به صورت $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ است. در نتیجه

$$a=-\sqrt{۲}\ ,b=\sqrt{۲}\Rightarrow ab=-۲$$

۱۹۱۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که اگر فرض کنیم $P(x)=x^۲+(a-۱)x+۲a-۶$ جدول تعیین علامت باید به‌صورت زیر باشد

x	$-\infty$		$x_۱$	-۳	$x_۲$		$+\infty$
P(x)		+	۰	−	۰	+	

پس باید $P(x)$ به ازای $x=-۳$ منفی باشد. بنابراین

$$P(-۳)=(-۳)^۲-۳(a-۱)+۲a-۶<۰\Rightarrow a>۶$$

راه‌حل دوم ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۲+(a-۱)x+۲(a-۳)=(x+a-۳)(x+۲)=۰$$

$$\begin{cases}x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\\ x+a-۳=۰\Rightarrow x=۳-a\end{cases}$$

$$x_۱<-۳<x_۲\Rightarrow x_۱=۳-a,\ x_۲=-۲$$

$$x_۱=۳-a<-۳\Rightarrow a>۶$$

۱۹۱۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر $m=۰$، آن‌گاه عبارت برابر $-۲x$ خواهد بود که همواره مثبت نیست. اگر $m\neq۰$، آن‌گاه باید ضریب $x^۲$ مثبت و Δ منفی باشد. پس $m>۰,\ ۴-۴m^۲<۰\Rightarrow m^۲>۱\Rightarrow m>۱$

۱۹۲۰- گزینهٔ ۳ می‌خواهیم به ازای هر مقدار x نابرابری $mx^۲-۲mx+۲>-۶$ برقرار باشد، یعنی $mx^۲-۲mx+۸>۰$. بنابراین اگر $m\neq۰$، باید $m>۰$ و $\Delta<۰$. پس

$$\Delta=(-۲m)^۲-۳۲m<۰\Rightarrow m(m-۸)<۰$$

با توجه به جدول زیر، باید $۰<m<۸$.

m	$-\infty$		۰		۸		$+\infty$
$m(m-۸)$		+	۰	−	۰	+	

از طرف دیگر، اگر $m=۰$، آن‌گاه عبارت به‌صورت $y=۲$ است که از -۶ بزرگ‌تر است. بنابراین $۰\le m<۸$. پس m می‌تواند هشت مقدار صحیح داشته باشد.

۱۹۲۱- گزینهٔ ۱ عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$y=x^۴-۳x^۲-۴=(x^۲+۱)(x^۲-۴)$$

چون $x^۲+۱$ همواره مثبت است، پس کافی است $x^۲-۴$ را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	

۱۹۲۲- گزینهٔ ۱ ریشهٔ عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$m^۲x+|m|=۰\Rightarrow x=\frac{-|m|}{m^۲}=\frac{-|m|}{|m|^۲}=\frac{-۱}{|m|}$$

ضریب x عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{-۱}{\lvert m\rvert}$		$+\infty$
y		−	۰	+	

۱۹۲۳- گزینهٔ ۲ باید نامعادله‌های $x^۳-۳x^۲\le۰$ و $x^۳-۳x^۲\ge-۴$ را حل کنیم و بین مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$x^۳-۳x^۲\le۰\Rightarrow x^۲(x-۳)\le۰\Rightarrow x\le۳$$

$$x^۳-۳x^۲+۴\ge۰\Rightarrow(x+۱)(x^۲-۴x+۴)\ge۰$$

$$(x+۱)(x-۲)^۲\ge۰\Rightarrow x\ge-۱$$

بنابراین $-۱\le x\le۳$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر است. پس $a=-۱$ و $b=۳$ و در نتیجه $a+b=۲$. توجه کنید که

$$x^۳-۳x^۲+۴=x^۳+۱-۳x^۲+۳=(x^۳+۱)-۳(x^۲-۱)$$

$$=(x+۱)(x^۲-x+۱)-۳(x-۱)(x+۱)=(x+۱)(x^۲-۴x+۴)$$

۱۹۲۴- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(x^۲-۲x-۴)^۲-۴(x^۲-۲)^۲\ge۰$$

$$(x^۲-۲x-۴+۲x^۲-۴)(x^۲-۲x-۴-۲x^۲+۴)\ge۰$$

$$(۳x^۲-۲x-۸)(-x^۲-۲x)\ge۰\Rightarrow-x(۳x+۴)(x-۲)(x+۲)\ge۰$$

$$y=x(۳x+۴)(x-۲)(x+۲)\le۰$$

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۴}{۳}$		۰		۲		$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	

با توجه به جدول تعیین علامت بالا، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $[-۲,-\frac{۴}{۳}]\cup[۰,۲]$ است که اعداد صحیح ۲، ۱، ۰ و -۲ را شامل می‌شود.

۱۹۲۵- گزینهٔ ۳ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲-۴}=\frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{x-۳}{x+۲},\quad x\neq۲$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-۲		۲		۳		$+\infty$
y		+	ت ن	−	ت ن	−	۰	+	

بنابراین y به‌ازای هر x که در مجموعهٔ $(-۲,۳)-\{۲\}$ باشد، منفی است. پس $a=-۲$، $b=۳$ و $c=۲$. در نتیجه $\frac{a+b}{c}=\frac{۱}{۲}$.

۱۹۲۶- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $ax-b>۰$ به یکی از دو صورت $(\frac{b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{b}{a})$ است. با توجه به فرض مسئله،

$$a>۰,\ \frac{b}{a}=۲\Rightarrow۲a=b$$

بنابراین $\frac{ax+b}{x-۲}=a(\frac{x+۲}{x-۲})$. چون $a>۰$، کافی است مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x+۲}{x-۲}<۰$ را بیابیم که بازهٔ $(-۲,۲)$ است.

۱۹۲۷- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۹}{x+۳}+۵-x<۰\Rightarrow\frac{۹+(۵-x)(x+۳)}{x+۳}<۰$$

$$\frac{-x^۲+۲x+۲۴}{x+۳}<۰\Rightarrow\frac{(x-۶)(x+۴)}{x+۳}>۰$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-۴,-۳)\cup(۶,+\infty)$ است.

x	$-\infty$		-۴		-۳		۶		$+\infty$
y		−	۰	+	ت ن	−	۰	+	

پس $a=-۴$ و $b=۶$ و در نتیجه $a+b=۲$.

۱۹۲۸- گزینهٔ ۴ اولاً باید ضریب $x^۲$ منفی باشد. پس $m<۰$، ثانیاً باید $\Delta<۰$. پس

$$۱-۴m^۲<۰\Rightarrow m^۲>\frac{۱}{۴}\Rightarrow|m|>\frac{۱}{۲}\Rightarrow m>\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ m<-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نتیجه می‌شود $m<-\frac{۱}{۲}$.

۱۹۲۹- گزینهٔ ۲ می‌خواهیم به‌ازای هر مقدار x نابرابری $mx^۲-۲mx+۲>-۲$ برقرار باشد، یعنی $mx^۲-۲mx+۴>۰$. بنابراین اگر $m\neq۰$، باید $m>۰$ و $\Delta<۰$. پس

$$\Delta=(-۲m)^۲-۱۶m<۰\Rightarrow m(m-۴)<۰$$

با توجه به جدول زیر، باید $۰<m<۴$.

m	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$m(m-۴)$		+	۰	−	۰	+	

از طرف دیگر، اگر $m=۰$ آن‌گاه عبارت به‌صورت $y=۲$ است که از -۲ بزرگ‌تر است. بنابراین $۰\le m<۴$.

۱۹۳۰- گزینهٔ ۳ نابرابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^۲+mx+m}{x^۲-x+۱}-۳\le ۰ \Rightarrow \frac{-۲x^۲+(m+۳)x+m-۳}{x^۲-x+۱}\le ۰$$

چون به ازای هر x نابرابری $x^۲-x+۱>۰$ برقرار است، پس کافی است نامعادلهٔ $-۲x^۲+(m+۳)x+m-۳\le ۰$ برای هر x برقرار باشد. بنابراین

$$\Delta=(m+۳)^۲+۸(m-۳)\le ۰\Rightarrow m^۲+۱۴m-۱۵\le ۰$$

$$(m-۱)(m+۱۵)\le ۰\Rightarrow -۱۵\le m\le ۱$$

پس حداقل مقدار m برابر ۱۵- است.

۱۹۳۱- گزینهٔ ۱ دو طرف معادله را به توان چهار می‌رسانیم:

$$۲x+۱=(۲x-۱)^۲\Rightarrow ۲x+۱=۴x^۲+۱-۴x$$

$$۴x^۲-۶x=۰\Rightarrow x=۰,\ x=\frac{۳}{۲}$$

واضح است که $x=۰$ قابل قبول نیست، زیرا در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند ولی $x=\frac{۳}{۲}$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۳۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $\frac{۱}{۲}x+۱\ge ۰$ و در نتیجه $x\ge -۲$. همچنین باید $۴-x^۲\ge ۰$ و در نتیجه $-۲\le x\le ۲$. اکنون دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴-x^۲=(\frac{۱}{۲}x+۱)^۲\Rightarrow ۴-x^۲=\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱$$

$$۵x^۲+۴x-۱۲=۰\Rightarrow (x+۲)(۵x-۶)=۰\Rightarrow x=-۲,\ x=\frac{۶}{۵}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. پس مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{۴}{۵}$ است.

۱۹۳۳- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف معادلهٔ مورد نظر را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$۴-۳x-x^۲=x^۲+۸x+۱۶\Rightarrow ۲x^۲+۱۱x+۱۲=۰\Rightarrow x=-۴,\ x=-\frac{۳}{۲}$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۶ است.

۱۹۳۴- گزینهٔ ۲ دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^۴+۲x-۵=(۱+x)^۲\Rightarrow x^۴-x^۲-۶=۰\Rightarrow (x^۲-۳)(x^۲+۲)=۰$$

چون $x^۲+۲\ne ۰$، پس $x^۲-۳=۰$ بنابراین $x=\pm\sqrt{۳}$.
$x=\sqrt{۳}$ در معادله صدق می‌کند، اما $x=-\sqrt{۳}$ در معادله صدق نمی‌کند، زیرا به ازای $x=-\sqrt{۳}$ سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۳۵- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲x-۱}=۲-۲\sqrt{x}\quad (*)$$

سپس دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$۲x-۱=۴+۴x-۸\sqrt{x}\Rightarrow ۲x+۵=۸\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴x^۲+۲۰x+۲۵=۶۴x\Rightarrow ۴x^۲-۴۴x+۲۵=۰$$

$$x=\frac{۱۱-۴\sqrt{۶}}{۲},\ x=\frac{۱۱+۴\sqrt{۶}}{۲}$$

در معادلهٔ $(*)$ طرف راست باید نامنفی باشد، پس

$$۲-۲\sqrt{x}\ge ۰\Rightarrow \sqrt{x}\le ۱\Rightarrow ۰\le x\le ۱$$

بنابراین جواب $\frac{۱۱+۴\sqrt{۶}}{۲}$ قابل قبول نیست و $\frac{۱۱-۴\sqrt{۶}}{۲}$ جواب معادله است.

۱۹۳۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x=۸$ در معادله صدق می‌کند:

$$\sqrt{۸-۴a}+\sqrt{۸+a}=\sqrt{۲۴+a}\quad (۱)$$

دو طرف معادلهٔ بالا را به توان دو می‌رسانیم:

$$۸-۴a+۸+a+۲\sqrt{(۸-۴a)(۸+a)}=۲۴+a$$

$$۲\sqrt{۶۴-۲۴a-۴a^۲}=۴a+۸\Rightarrow \sqrt{۶۴-۲۴a-۴a^۲}=۲a+۴$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۶۴-۲۴a-۴a^۲=۴a^۲+۱۶+۱۶a$$

$$۸a^۲+۴۰a-۴۸=۰\Rightarrow a^۲+۵a-۶=۰\Rightarrow a=۱,\ a=-۶$$

جواب $a=-۶$ قابل قبول نیست چون در معادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند. پس a فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

۱۹۳۷- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت $(\sqrt[۳]{x})^۴-۵(\sqrt[۳]{x})^۲+۴=۰$ می‌نویسیم و فرض می‌کنیم $(\sqrt[۳]{x})^۲=a$. در این صورت

$$a^۲-۵a+۴=۰\Rightarrow (a-۴)(a-۱)=۰$$

$$\begin{cases} a=۱\Rightarrow (\sqrt[۳]{x})^۲=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm ۱\\ a=۴\Rightarrow (\sqrt[۳]{x})^۲=۴\Rightarrow x^۲=۶۴\Rightarrow x=\pm ۸\end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۶۴ است.

۱۹۳۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\frac{x}{\sqrt{x}+۱}$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$t+\frac{۱}{t}=۲\Rightarrow t^۲+۱=۲t\Rightarrow t^۲-۲t+۱=۰$$

تنها جواب معادلهٔ بالا $t=۱$ است. بنابراین

$$\frac{x}{\sqrt{x}+۱}=۱\Rightarrow x=\sqrt{x}+۱\Rightarrow x-۱=\sqrt{x}\quad (۱)$$

$$x^۲-۲x+۱=x\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲},\ x=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})$$

با توجه به معادلهٔ (۱) باید $x>۱$ و در نتیجه $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله نیست.

پس فقط $x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله است.

۱۹۳۹- گزینهٔ ۳ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $\sqrt{x}=\frac{۴}{x}$. بنابراین

$$x=\frac{۱۶}{x^۲}\Rightarrow x^۳=۱۶\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۱۶}$$

۱۹۴۰- گزینهٔ ۴ زمانی را که محسن روی خشکی مسیر AD را طی می‌کرده با $t_۱$ و زمان طی کردن مسیر DB روی آب را با $t_۲$ نشان می‌دهیم. در نتیجه اگر $CD=x$، آن‌گاه

$$t_۱=\frac{AD}{v_۱}=\frac{\sqrt{x^۲+۱۶}}{۵},\quad t_۲=\frac{DB}{v_۲}=\frac{۸-x}{۳}$$

در نتیجه $t_۱+t_۲=\frac{\sqrt{x^۲+۱۶}}{۵}+\frac{۸-x}{۳}=\frac{۸}{۳}$، بنابراین

$$\frac{\sqrt{x^۲+۱۶}}{۵}=\frac{x}{۳}\Rightarrow ۳\sqrt{x^۲+۱۶}=۵x\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}$$

$$۹(x^۲+۱۶)=۲۵x^۲\Rightarrow ۱۶x^۲=۹\times ۱۶\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=۳$$

پس $CD=۳km$.

۱۹۴۱- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^2+7=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+7=x^2+4x+4$$

$$4x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

با توجه به اینکه $x=\frac{3}{4}$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند، پس جواب معادله در بازهٔ $(\frac{1}{2},1)$ قرار دارد.

۱۹۴۲- گزینهٔ ۱ برای حل معادلهٔ $2x+1=\sqrt{11x-2}$، دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(2x+1)^2=(\sqrt{11x-2})^2 \Rightarrow 4x^2+4x+1=11x-2$$

$$4x^2-7x+3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}\ ,\ x=1$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند. پس قدرمطلق تفاضل دو جواب برابر $\frac{1}{4}$ است.

۱۹۴۳- گزینهٔ ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$1+3x-x^2=1-6x-x^2+x^3 \Rightarrow x^3=9x \Rightarrow x(x^2-9)=0$$

$$x=0\ ,\ x=3\ ,\ x=-3$$

جواب $x=-3$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند. بنابراین معادله دو جواب دارد.

۱۹۴۴- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$x^3+2=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow 3x^2+3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله $\frac{-3-\sqrt{21}}{6}$ است.

۱۹۴۵- گزینهٔ ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x-2}=\sqrt{x+1}-1$ می‌نویسیم و دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x-2=x+1+1-2\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1}=2 \Rightarrow x+1=4 \Rightarrow x=3$$

$x=3$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند. بنابراین معادله یک جواب دارد.

۱۹۴۶- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{3x-2}=2-2\sqrt{x} \quad (*)$$

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم

$$3x-2=4+4x-8\sqrt{x} \Rightarrow x+6=8\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x^2+36+12x=64x \Rightarrow x^2-52x+36=0$$

$$x=26-8\sqrt{10}\ ,\ x=26+8\sqrt{10}$$

در معادلهٔ $(*)$ طرف چپ معادله نامنفی است، پس طرف راست آن نیز نامنفی است، بنابراین

$$3x-2\geq 0\ ,\ 2-2\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\leq x\leq 1$$

بنابراین جواب $26+8\sqrt{10}$ قابل قبول نیست و $x=26-8\sqrt{10}$ جواب معادله است.

۱۹۴۷- گزینهٔ ۲ یک جواب معادله $x=2$ است، پس $x=2$ باید در معادله صدق کند

$$\sqrt{2-1}+\sqrt{a-2}=3 \Rightarrow \sqrt{a-2}=2 \Rightarrow a-2=4 \Rightarrow a=6$$

بنابراین معادله به‌صورت $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}=3$ است و در نتیجه

$$\sqrt{x-1}-3=-\sqrt{6-x} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} x-1+9-6\sqrt{x-1}=6-x$$

$$x+1=3\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2+2x+1=9x-9 \Rightarrow x^2-7x+10=0$$

$$(x-2)(x-5)=0 \Rightarrow x=2, x=5$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۱۹۴۸- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت $x^2+1+6=5\sqrt{x^2+1}$ می‌نویسیم. اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x^2+1}$، معادله به‌صورت $t^2+6=5t$ درمی‌آید که اگر آن را به صورت $t^2-5t+6=(t-2)(t-3)=0$ بنویسیم، جواب‌های آن $t=2$ و $t=3$ هستند. بنابراین

$$\sqrt{x^2+1}=2 \Rightarrow x^2+1=4 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2+1}=3 \Rightarrow x^2+1=9 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{8}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۴ است.

۱۹۴۹- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $t=x+\sqrt{x}$، معادله به‌صورت $t^2+t=2$ درمی‌آید که اگر آن را به صورت $t^2+t-2=(t-1)(t+2)=0$ بنویسیم، $t=1$ و $t=-2$ جواب‌های آن هستند. بنابراین

$$x+\sqrt{x}=-2 \ (\text{غ.ق.})$$

$$x+\sqrt{x}=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1-x \quad (1)$$

$$x=x^2+1-2x \Rightarrow x^2-3x+1=0$$

$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ (\text{غ.ق.})$$

توجه کنید که معادلهٔ $x+\sqrt{x}=-2$ جواب ندارد، زیرا عبارت $x+\sqrt{x}$ همواره نامنفی است. همچنین $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ جواب معادله نیست زیرا در معادلهٔ (۱) باید $0\leq x\leq 1$، ولی $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ بزرگ‌تر از ۱ است.

۱۹۵۰- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^3+k=x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow 3x^2-3x+k+1=0$$

برای اینکه معادلهٔ بالا دو جواب داشته باشد، باید

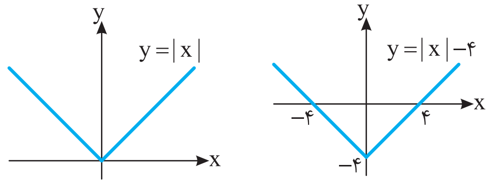
$$\Delta>0 \Rightarrow 9-12(k+1)>0 \Rightarrow k<-\frac{1}{4}$$

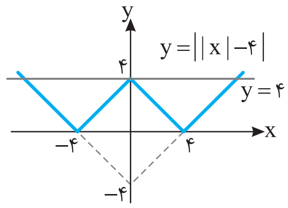
۱۹۵۱- گزینهٔ ۴ چون دو سهمی نقطهٔ مشترک ندارند، معادلهٔ $-x^2+kx=x^2-k$ جواب ندارد. یعنی معادلهٔ $2x^2-kx-k=0$ جواب ندارد. پس

$$\Delta=k^2+8k<0 \Rightarrow k(k+8)<0$$

با تعیین علامت عبارت $k(k+8)$ مشخص می‌شود که $-8<k<0$.

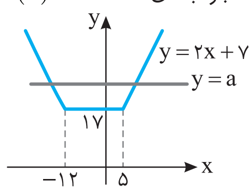
۱۹۵۲- گزینهٔ ۴ تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر، تعداد نقطه‌های برخورد نمودار تابع‌های $y=||x|-4|$ و $y=4$ است. برای رسم کردن نمودار $y=||x|-4|$، ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم. بعد آن را ۴ واحد پایین می‌آوریم تا نمودار $y=|x|-4$ به‌دست بیاید و در نهایت تصویر قسمتی از آن را که زیر محور x است رسم می‌کنیم و قسمت زیر محور x را حذف می‌کنیم تا نمودار $y=||x|-4|$ به‌دست بیاید.



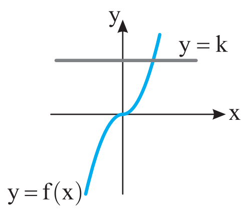


از روی شکل معلوم است که تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر سه تا است.

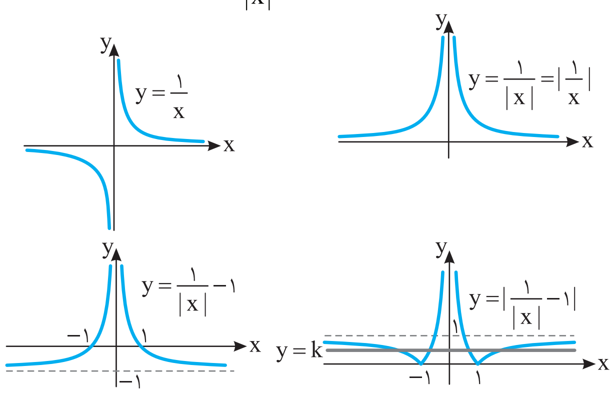
۱۹۵۳- گزینهٔ ۳ به نمودار تابع $f(x)=|x+12|+|x-5|$ توجه کنید. اگر $a=17$، خط $y=a$ بر قسمتی از نمودار تابع f که یک پاره‌خط افقی است، منطبق می‌شود و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=a$ نامتناهی می‌شود.



۱۹۵۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$. نمودار توابع $y=k$ و $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. واضح است که k هر چه باشد، دو نمودار یک نقطهٔ مشترک دارند و معادلهٔ $f(x)=k$ یک جواب دارد.

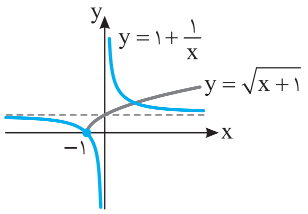


۱۹۵۵- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=\left|\frac{1}{|x|}-1\right|$ را رسم می‌کنیم.

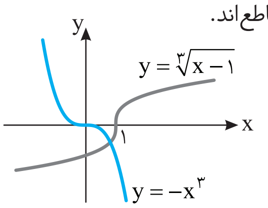


اگر $0<k<1$، آن‌گاه خط $y=k$ نمودار تابع $y=\left|\frac{1}{|x|}-1\right|$ را در چهار نقطه قطع می‌کند و معادلهٔ مورد نظر چهار جواب دارد.

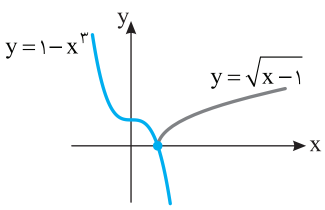
۱۹۵۶- گزینهٔ ۲ به نمودار تابع‌های $y=\sqrt{x+1}$ و $y=1+\frac{1}{x}$ توجه کنید. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند، بنابراین معادلهٔ موردنظر دو جواب دارد.



۱۹۵۷- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $\sqrt[3]{x-1}=-x^3$ می‌نویسیم. برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم و برای رسم نمودار تابع $y=-x^3$ کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم. با توجه به شکل زیر نمودار دو تابع در یک نقطه متقاطع‌اند.

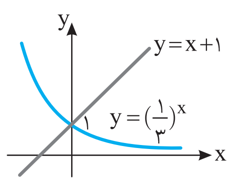


۱۹۵۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت $\sqrt{x-1}=1-x^3$ می‌نویسیم. برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt{x-1}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم و برای رسم نمودار تابع $y=1-x^3$ کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم و یک واحد به بالا انتقال دهیم. با توجه به شکل زیر نمودار دو تابع در یک نقطه متقاطع‌اند.

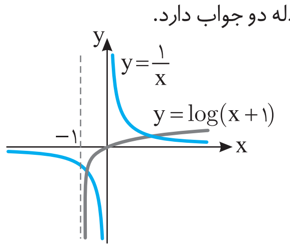


راه‌حل دوم معادله را به‌صورت $\sqrt{x-1}=1-x^3$ می‌نویسیم. برای اینکه عبارت $\sqrt{x-1}$ بامعنی باشد باید $x\ge 1$. از طرف دیگر باید $1-x^3\ge 0$ و در نتیجه $x^3\le 1$. پس $x\le 1$. بنابراین فقط $x=1$ می‌تواند جواب معادله باشد. واضح است که $x=1$ در معادله صدق می‌کند و جواب معادله است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۱۹۵۹- گزینهٔ ۱ معلوم است که $x=0$ جواب معادلهٔ مورد نظر است. اکنون اگر نمودار تابع‌های $y=(\frac{1}{3})^x$ و $y=x+1$ را رسم کنیم معلوم می‌شود که معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد: $x=0$.



۱۹۶۰- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $\log(x+۱)=\frac{۱}{x}$ می‌نویسیم. نمودار دو تابع $y=\frac{۱}{x}$ و $y=\log(x+۱)$ را رسم می‌کنیم. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند، پس معادله دو جواب دارد.



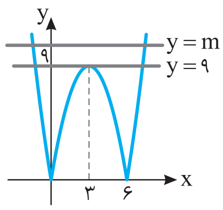
۱۹۶۱- گزینهٔ ۳ طول این نقطهٔ مشترک جواب معادلهٔ زیر است:

$$x^۲+۲ax+۶b=x^۲+۲bx+۶a$$

$$۲(a-b)x=۶(a-b)\Rightarrow x=\frac{۶(a-b)}{۲(a-b)}=۳$$

توجه کنید که $a\neq b$، زیرا اگر $a=b$، دو سهمی برهم منطبق می‌شوند و مجموعهٔ نقطه‌های مشترک آن‌ها نامتناهی است.

۱۹۶۲- گزینهٔ ۴ به نمودار تابع‌های $y=|x^۲-۶x|$ و $y=m$ توجه کنید. واضح است که اگر $m=۹$، خط $y=m$ و نمودار تابع $y=|x^۲-۶x|$ سه نقطهٔ مشترک دارند و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $|x^۲-۶x|=m$ سه‌عضوی است.

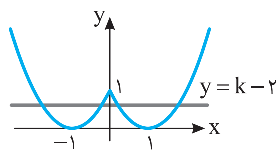


۱۹۶۳- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $x^۲-۲|x|+۱=k-۲$ می‌نویسیم. کافی است نمودار $y=x^۲-۲|x|+۱$ را رسم کنیم و با خط $y=k-۲$ قطع دهیم:

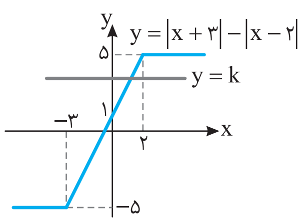
$$x^۲-۲|x|+۱=\begin{cases}x^۲-۲x+۱ & x\geq ۰\\ x^۲+۲x+۱ & x\leq ۰\end{cases}$$

در نتیجه نمودار $y=x^۲-۲|x|+۱$ به شکل زیر است. از روی شکل نتیجه می‌گیریم معادلهٔ مورد نظر فقط وقتی چهار جواب دارد که

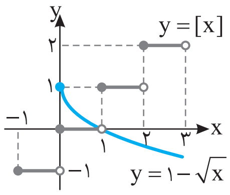
$$۰<k-۲<۱\Rightarrow ۲<k<۳$$



۱۹۶۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع‌های $y=|x+۳|-|x-۲|$ و $y=k$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر اگر $۱<k<۵$، آن‌گاه معادله دقیقاً یک جواب مثبت دارد. بنابراین k می‌تواند ۲، ۳ و ۴ باشد.

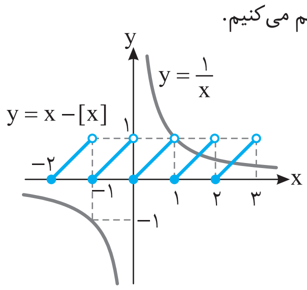


۱۹۶۵- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $[x]=۱-\sqrt{x}$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=۱-\sqrt{x}$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم.



نمودارها تقاطع ندارند، پس معادله جواب ندارد.

۱۹۶۶- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه $x=۰$ جواب معادله نیست، طرفین معادله را بر x تقسیم می‌کنیم: $x-[x]=\frac{۱}{x}$. نمودار تابع‌های $y=\frac{۱}{x}$ و $y=x-[x]$ را رسم می‌کنیم.

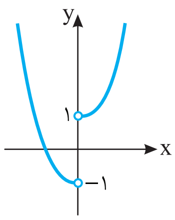


نمودار دو تابع در هیچ نقطه‌ای با طول منفی تقاطع ندارند ولی در هر یک از بازه‌های $[۱,۲)$، $[۲,۳)$، $[۳,۴)$، ... و $[k,k+۱)$ که $k\in\mathbb{N}$ یک‌بار تقاطع دارند. پس معادله جواب منفی ندارد ولی مجموعهٔ جواب‌های مثبت معادله، نامتناهی است.

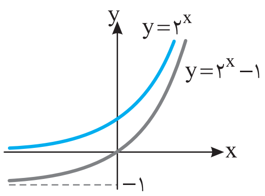
۱۹۶۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

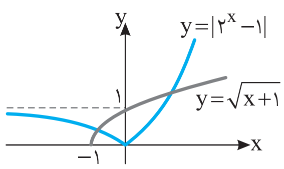
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}(x^۳+۱) & x>۰\\ \frac{x}{-x}(x^۳+۱) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۳+۱ & x>۰\\ -x^۳-۱ & x<۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این نمودار معلوم می‌شود که اگر نمودار تابع f خط $y=k$ را در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه $-۱<k\leq ۱$.

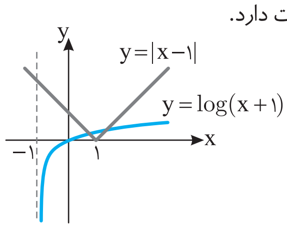


۱۹۶۸- گزینهٔ ۳ نمودار توابع $y=|۲^x-۱|$ و $y=\sqrt{x+۱}$ را رسم می‌کنیم. نمودار دو تابع در دو نقطه متقاطع‌اند که طول یکی از نقاط مثبت و طول دیگری منفی است. پس معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.





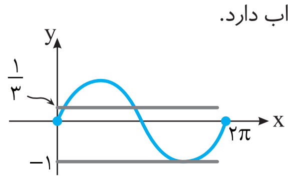
۱۹۶۹- گزینهٔ ۴ نمودار توابع $y=|x-۱|$ و $y=\log(x+۱)$ را رسم می‌کنیم. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند که طول آن‌ها مثبت است. پس معادله دو جواب مثبت دارد.



۱۹۷۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$۳\sin^۲ x+۲\sin x-۱=۰\Rightarrow(۳\sin x-۱)(\sin x+۱)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ مورد نظر جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{۳}$ و $\sin x=-۱$ هستند. براساس نمودار زیر معلوم است که معادلهٔ موردنظر روی بازهٔ $[۰,۲\pi)$ سه جواب دارد.



۱۹۷۱- گزینهٔ ۲ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}x_۱+x_۲=\frac{۱۷}{۳}\\ x_۱=۳x_۲+۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_۲=\frac{۲}{۳}\\ x_۱=۵\end{cases}\xrightarrow{x_۱x_۲=\frac{m}{۳}}\frac{۱۰}{۳}=\frac{m}{۳}\Rightarrow m=۱۰$$

ریاضی - ۸۷

۱۹۷۲- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۸,\quad \alpha=\frac{\beta}{۲}+۵$$

از حل دستگاه معادله‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\alpha=۶$ و $\beta=۲$. از طرف دیگر، $\alpha\beta=m\Rightarrow m=۱۲$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۹۷۳- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند. در این صورت $x_۱+x_۲=\frac{m+۱}{۲}$ و $x_۱x_۲=\frac{۱}{۱۶}$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}=۲\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}x_۱+x_۲+۲\sqrt{x_۱x_۲}=۴$$

$$\frac{m+۱}{۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}=۴\Rightarrow\frac{m+۱}{۲}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow m=۶$$

ریاضی - ۹۶

۱۹۷۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}$ و $\alpha\beta=-۲$. بنابراین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$S=\frac{۱}{\alpha}+۱+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱}{-۲}+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۱=-\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

ریاضی - ۹۲

۱۹۷۵- گزینهٔ ۴ برای اینکه معادله دو جواب مثبت داشته باشد، باید

$$\Delta>۰,\quad -\frac{b}{a}>۰,\quad \frac{c}{a}>۰$$

$$\Delta=۴(a-۲)^۲-۴(۱۴-a)=۴a^۲-۱۲a-۴۰=۴(a-۵)(a+۲)$$

از شرط $\Delta>۰$ نتیجه می‌شود $a<-۲$ یا $a>۵$. از طرف دیگر،

$$-\frac{b}{a}=۲(a-۲)>۰\Rightarrow a>۲,\quad \frac{c}{a}=۱۴-a>۰\Rightarrow a<۱۴$$

اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده جواب مسئله است که به‌صورت $۵<a<۱۴$ است.

ریاضی - ۹۶

۱۹۷۶- گزینهٔ ۳ حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر با $\alpha+\beta=-\frac{-۱۲}{۴}=۳$ و $\alpha\beta=\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=\frac{\sqrt{۳+۱}}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۹۷۷- گزینهٔ ۱ برای آنکه، معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، باید $\frac{c}{a}<۰$، پس

$$\frac{c}{a}=\frac{۱-m}{m+۲}<۰\Rightarrow m<-۲ \text{ یا } m>۱$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۹۷۸- گزینهٔ ۳ در مخلوط اول که ۱۱ کیلوگرم است، $\frac{۴۰}{۱۰۰}\times۱۱=۴/۴$ کیلوگرم رنگ و در مخلوط دوم که ۴ کیلوگرم است، $\frac{۷۰}{۱۰۰}\times۴=۲/۸$ کیلوگرم رنگ موجود است.

فرض می‌کنیم که با تبخیر، x کیلوگرم از مواد غیر از رنگ تبخیر شود. در این صورت

$$\frac{۴/۴+۲/۸}{۱۱+۴-x}=\frac{۵۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۷/۲}{۱۵-x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۷/۲\times۲=۱۵-x\Rightarrow x=۰/۶$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۹۷۹- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $x^۲+۴x+۵=A$، آن‌گاه

$$A-۲=\sqrt{A}\xrightarrow{A\geq۲}A^۲-۴A+۴=A\Rightarrow A^۲-۵A+۴=۰$$

$$\begin{cases}A=۱\quad(\text{غ.ق.ق})\\ A=۴\Rightarrow x^۲+۴x+۵=۴\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰\xrightarrow{\frac{c}{a}=۱}x_۱x_۲=۱\end{cases}$$

ریاضی - ۹۴

۱۹۸۰- گزینهٔ ۴ از $f(x)>\frac{۷}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶>\frac{۷}{۲}\Rightarrow x^۲-۴x-۵<۰\Rightarrow -۱<x<۵$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازهٔ (a,b)، همان بازهٔ $(-۱,۵)$ است. پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $۵-(-۱)=۶$.

تجربی - ۸۹

۱۹۸۱- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=x^2+x$، آن‌گاه به‌دست می‌آید:

$$t^2-18t+72=0\Rightarrow(t-6)(t-12)=0$$

$$t=6\Rightarrow x^2+x=6\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow x_1+x_2=-1$$

$$t=12\Rightarrow x^2+x=12\Rightarrow x^2+x-12=0\Rightarrow x_3+x_4=-1$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-2$$

تجربی - ۹۰

۱۹۸۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ اول را حساب می‌کنیم:

$$5x^2+3x-2=0\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{-3}{5}\ ,\ \alpha\beta=-\frac{2}{5}$$

اکنون مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{\frac{9}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{25}}=\frac{29}{4}$$

$$P=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{25}{4}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر است:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-\frac{29}{4}x+\frac{25}{4}=0\Rightarrow 4x^2-29x+25=0\Rightarrow k=29$$

راه‌حل دوم یکی از جواب‌های معادلهٔ اول برابر -1 است:

$$5x^2+3x-2=0\Rightarrow\alpha=-1$$

بنابراین یکی از جواب‌های معادلهٔ دوم ۱ است:

$$\alpha=-1\Rightarrow\frac{1}{\alpha^2}=1\Rightarrow 4\times1^2-k\times1+25=0\Rightarrow k=29$$

ریاضی - ۹۰

۱۹۸۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $2x^2-x-2=0$ و α و β جواب‌های معادلهٔ $8x^2-mx-8=0$ باشند.

در این صورت

$$x_1+x_2=\frac{1}{2}\ ,\qquad x_1x_2=-1$$

$$\alpha+\beta=\frac{m}{8},\qquad \alpha\beta=-1$$

$$\alpha=x_1^3\ ,\qquad \beta=x_2^3$$

دو طرف تساوی $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ را به توان سه می‌رسانیم:

$$x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{1}{8}$$

$$\alpha+\beta-3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{m}{8}=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\Rightarrow m=13$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۹۸۴- گزینهٔ ۲ $x=2$ در معادله صدق می‌کند، پس

$$2(4a-2-5)=2\Rightarrow a=2$$

بنابراین معادله به صورت $2x^3-x^2-5x-2=0$ است. با تقسیم عبارت سمت چپ معادله بر $x-2$ به‌دست می‌آید:

$$2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(2x^2+3x+1)=0$$

بنابراین دو جواب دیگر از معادلهٔ $2x^2+3x+1=0$ به‌دست می‌آیند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{3}{2}$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۹۸۵- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x}$، آن‌گاه $t^2-2t+m-1=0$.

برای آنکه دو جواب برای x به‌دست آید، باید این معادله دو جواب نامنفی داشته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta>0\Rightarrow 4-4(m-1)>0\Rightarrow m<2\\ \frac{c}{a}\ge0\Rightarrow\frac{m-1}{1}\ge0\Rightarrow m-1\ge0\Rightarrow m\ge1\\ -\frac{b}{a}>0\Rightarrow-\frac{-2}{1}>0\Rightarrow 2>0\Rightarrow m\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\xrightarrow{\ \cap\ }1\le m<2$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۱۹۸۶- گزینهٔ ۲ برای اینکه همهٔ مقادیر عبارت مورد نظر مثبت باشد، باید

$$1-a>0\Rightarrow a<1$$

$$\Delta=24+4a(1-a)<0\Rightarrow -a^2+a+6<0\Rightarrow a<-2\ \text{یا}\ a>3$$

از اشتراک این ناحیه‌ها به‌دست می‌آید $a<-2$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۹۸۷- گزینهٔ ۴ برای اینکه معادلهٔ $\sqrt{4x-3}=2-3x$ جواب داشته باشد، باید

$$4x-3\ge0\Rightarrow x\ge\frac{3}{4},\quad 2-3x\ge0\Rightarrow x\le\frac{2}{3}$$

با اشتراک دو محدودهٔ به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم که معادله جوابی نمی‌تواند داشته باشد.

خارج از کشور تجربی - ۸۷

۱۹۸۸- گزینهٔ ۴ ابتدا مقدار a را طوری می‌یابیم که $x=4$ جواب معادله باشد:

$$4+a=\sqrt{20-16}\Rightarrow 4+a=2\ \Rightarrow\ a=-2$$

به ازای $a=-2$، معادلهٔ مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$x-2=\sqrt{5x-x^2}\Rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2$$

$$2x^2-9x+4=0\Rightarrow x=4,\frac{1}{2}$$

چون $x=\frac{1}{2}$ در معادلهٔ $x-2=\sqrt{5x-x^2}$ صدق نمی‌کند، این معادله جواب دیگری ندارد.

تجربی - ۸۷

۱۹۸۹- گزینهٔ ۲ باید $f(x)<2$. بنابراین

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2\Rightarrow 3x^2-2x<2x^2+8\Rightarrow x^2-2x-8<0\Rightarrow -2<x<4$$

پس $a=-2$ و $b=4$ و در نتیجه $b-a=6$.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱۹۹۰- گزینهٔ ۲ به‌ازای مقادیری از x، نمودار تابع زیر محور x است که داشته باشیم $f(x)<0$، پس

$$f(x)=x^3-4x^2-x+4=x^2(x-4)-x+4=(x-4)(x^2-1)$$

$$=(x-4)(x-1)(x+1)\xrightarrow{f(x)<0}(x-1)(x+1)(x-4)<0$$

x		-1		1		4		$+\infty$
f(x)		0	+	0	−	0	+	

بزرگ‌ترین بازه به‌صورت (a,b) که در آن $f(x)$ منفی است، بازهٔ $(1,4)$ است، پس $b-a=4-1=3$.

ریاضی - ۸۸

فصل دهم

۱۹۹۱- گزینهٔ ۲ اگر $a<-2$، آن‌گاه $1+a<-1<0$، پس $|1+a|=-1-a$. در نتیجه $|1-|1+a||=|1+1+a|=|2+a|$. از طرف دیگر، چون $a<-2$، پس $a+2<0$، در نتیجه $|2+a|=-2-a$.

۱۹۹۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون $-1<x<2$، پس

$$\frac{|x-2|}{x-2}=\frac{2-x}{x-2}=-1,\quad \frac{x+1}{|x+1|}=\frac{x+1}{x+1}=1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-1-1=-2$.

راه‌حل دوم کافی است حاصل عبارت را به ازای $x=0$ حساب کنیم:

$$A=\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{x+1}{|x+1|}\xrightarrow{x=0}A=-1-1=-2$$

۱۹۹۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$-3<x<-2\Rightarrow -18<6x<-12\Rightarrow 0<14<6x+32<20$$

در نتیجه $|6x+32|=6x+32$. از طرف دیگر،

$$-3<x<-2\Rightarrow 3>-x>2\Rightarrow 11>8-x>10>0$$

در نتیجه $|8-x|=8-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{6x+32-4(8-x)}{3x}=\frac{6x+4x}{3x}=\frac{10}{3}$$

۱۹۹۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$1<x<2\Rightarrow 3<3x<6\Rightarrow 0<3x-3<3\Rightarrow |3x-3|=3x-3$$

$$\sqrt{4x^2-16x+16}=\sqrt{4(x-2)^2}=2|\underbrace{x-2}_{\text{منفی}}|=-2x+4$$

بنابراین $A=3x-3-(-2x+4)=5x-7$.

۱۹۹۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون x منفی است، عبارت $x+\frac{4}{x}$ منفی است، پس $|x+\frac{4}{x}|=-x-\frac{4}{x}$. از طرف دیگر،

$$|x-\frac{4}{x}|=|\frac{x^2-4}{x}|=|\frac{(x-2)(x+2)}{x}|$$

چون $-2<x<0$، پس $x-2<0$ و $x+2>0$ و چون x منفی است، پس $x-\frac{4}{x}$ مثبت است، پس $|x-\frac{4}{x}|=x-\frac{4}{x}$، بنابراین

$$f(x)=-x-\frac{4}{x}+x-\frac{4}{x}=\frac{-8}{x}$$

راه‌حل دوم حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-1$ حساب می‌کنیم:

$$f(x)=|x+\frac{4}{x}|+|x-\frac{4}{x}|\xrightarrow{x=-1}f(-1)=|-5|+|3|=8$$

فقط مقدار گزینهٔ (۴) به ازای $x=-1$ برابر ۸ می‌شود.

۱۹۹۶- گزینهٔ ۳ چون $a-6<0$، پس $|a-6|=-a+6$. بنابراین

$$A=|6-a-|3+|a-6|||=|6-a-|3-a+6||=|6-a-|9-a||$$

$$\xrightarrow{9-a>0}A=|6-a-(9-a)|=|-3|=3$$

۱۹۹۷- گزینهٔ ۲ چون $x<0<y$، پس $2x-y<0$ و $2y-x>0$، پس عبارت مورد نظر برابر است با $-(2x-y)-(2y-x)-x+2y=-2x+y$.

۱۹۹۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $a-1<0$، $b+2>0$ و $a+b<1-1=0$، بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $-1-1-1=-3$.

۱۹۹۹- گزینهٔ ۱ چون $a<0$، پس $|a|=-a$، در نتیجه

$$|a|b\le a\xrightarrow{a\ne 0}b\le\frac{a}{|a|}\xrightarrow{a<0}b\le -1$$

بنابراین هر یک از عددهای $2b-6$ و $b-2$ هم منفی هستند، پس

$$|2b-6|-2|b-2|=-(2b-6)-2(-(b-2))=2$$

۲۰۰۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & a>0\\ -1 & a<0\end{cases}$.

اکنون به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-1		+		+	۰	−	۰	+		+	
x^2-2		+	۰	−		−		−	۰	+	
y		۲	ت.ن	۰	ت.ن	-2	ت.ن	۰	ت.ن	۲	

بنابراین y سه مقدار مختلف (± 2 و ۰) دارد.

۲۰۰۱- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $x^2-5x=\pm 6$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^2-5x=6\Rightarrow x^2-5x-6=(x+1)(x-6)=0\Rightarrow x=-1\,,\,x=6$$

$$x^2-5x=-6\Rightarrow x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0\Rightarrow x=2\,,\,x=3$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -36 است.

۲۰۰۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $|3x-18|=|3(x-6)|=3|x-6|$ و $|24-4x|=|4x-24|=|4(x-6)|=4|x-6|$. بنابراین

$$7|x-6|=28\Rightarrow |x-6|=4\Rightarrow x=2\,,\,x=10$$

پس مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۱۲ است.

۲۰۰۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $|a|=|b|$، آن‌گاه $a=b$ یا $a=-b$. بنابراین از معادلهٔ داده شده نتیجه می‌شود $x^2-2x=x^2+2x-4$ یا $x^2-2x=-x^2-2x+4$. بنابراین

$$x^2-2x=x^2+2x-4\Rightarrow 4x=4\Rightarrow x=1$$

$$x^2-2x=-x^2-2x+4\Rightarrow 2x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -2 است.

۲۰۰۴- گزینهٔ ۳ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر $x\ge 0$، آن‌گاه $|x|=x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1\,,\ x=3$$

حالت دوم اگر $x<0$، آن‌گاه $|x|=-x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^2-4x-3=0\Rightarrow x=2-\sqrt{7}\,,\ x=2+\sqrt{7}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر سه جواب دارد.

۲۰۰۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^2-2x+1-|x-1|-2=0\Rightarrow (x-1)^2-|x-1|-2=0$$

$$|x-1|^2-|x-1|-2=0 \xrightarrow{|x-1|=t} t^2-t-2=0$$

$$(t+1)(t-2)=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow |x-1|=-1 \quad \text{(غ.ق.ق)}$$

$$t=2\Rightarrow |x-1|=2\Rightarrow \begin{cases} x-1=2\Rightarrow x=3 \\ x-1=-2\Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر ۲ است.

راه‌حل دوم دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول اگر $x\geq 1$، آن‌گاه $|x-1|=x-1$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^2-2x-x+1-1=0\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x=0 \ \text{(غ.ق.ق)},\quad x=3$$

حالت دوم اگر $x<1$، آن‌گاه $|x-1|=1-x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^2-2x+x-1-1=0\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=-1,\ x=2 \ \text{(غ.ق.ق)}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $3-1=2$.

۲۰۰۶- گزینهٔ ۴ نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$3x-2\geq 7 \ \text{یا}\ 3x-2\leq -7\Rightarrow x\geq 3 \ \text{یا}\ x\leq -\frac{5}{3}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,-\frac{5}{3}]\cup[3,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(-\frac{5}{3},3)$ است. پس $a=-\frac{5}{3}$ و $b=3$ و در نتیجه $ab=-5$.

۲۰۰۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نابرابری $|x|\leq|y|$ با نابرابری $(x-y)(x+y)\leq 0$ معادل است، زیرا

$$|x|\leq|y|\Rightarrow x^2\leq y^2\Rightarrow x^2-y^2\leq 0\Rightarrow (x-y)(x+y)\leq 0$$

در نتیجه نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(a+5-a+5)(a+5+a-5)\leq 0$$

نابرابری بالا به‌صورت $10(2a)\leq 0$ یا $20a\leq 0$ درمی‌آید که مجموعهٔ جواب‌های آن $(-\infty,0]$ است.

راه‌حل دوم دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$a^2+10a+25\leq a^2-10a+25\Rightarrow 20a\leq 0$$

پس مجموعهٔ جواب‌های آن $(-\infty,0]$ است.

۲۰۰۸- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت $\frac{|x-6|}{|x-2|}>3$ می‌نویسیم. چون $x\neq 2$، دو طرف این نامعادله را در عبارت مثبت $|x-2|$ ضرب می‌کنیم:

$$|x-6|>3|x-2|$$

چون دو طرف نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم:

$$x^2-12x+36>9(x^2-4x+4)\Rightarrow 8(x^2-3x)<0\Rightarrow 0<x<3$$

عددهای صحیح ۱ و ۲ در بازهٔ $(0,3)$ هستند. اما $x=2$ قابل قبول نیست، پس تنها جواب صحیح نامعادلهٔ مورد نظر ۱ است.

۲۰۰۹- گزینهٔ ۳ اگر $x<0$، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن صدق می‌کنند. همچنین $x=0$ جواب نامعادله نیست. اگر $x>0$، آن‌گاه

$$\begin{cases} x^2-x>2x\Rightarrow x^2-3x>0\Rightarrow x(x-3)>0\Rightarrow x-3>0\Rightarrow x>3 \\ \text{یا} \\ x^2-x<-2x\Rightarrow x^2+x<0\Rightarrow x(x+1)<0\xrightarrow{x>0} x+1<0 \\ \qquad x<-1 \ \text{(غ.ق.ق)} \end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ است که شامل عددهای صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ نیست.

۲۰۱۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** می‌دانیم $x^2=|x|^2$ بنابراین نامعادله به شکل $|x|^2-5|x|+4\leq 0$ نوشته می‌شود. اگر فرض کنیم $t=|x|$، نامعادله به‌صورت $t^2-5t+4\leq 0$ درمی‌آید.

با توجه به جدول زیر، محدودهٔ $1\leq t\leq 4$ جواب نامعادله است. یعنی

$$1\leq|x|\leq 4$$

t	$-\infty$		1		4		$+\infty$
t^2-5t+4		+	0	−	0	+	

راه‌حل دوم عدد صفر در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۱) جواب نیست. عدد ۵ هم در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۴) هم جواب نیستند. پس گزینهٔ (۳) جواب است.

۲۰۱۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $a\geq 0$، آن‌گاه جواب‌های معادلهٔ $|x|=a$ برابرند با $x=\pm a$. بنابراین

$$\big||x-4|-1\big|=3\Rightarrow \begin{cases} |x-4|-1=3\Rightarrow |x-4|=4 \\ |x-4|-1=-3\Rightarrow |x-4|=-2 \end{cases}$$

معادلهٔ $|x-4|=-2$ جواب ندارد. پس

$$|x-4|=4\Rightarrow \begin{cases} x-4=4 \\ x-4=-4 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=0 \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۲۰۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$|x-1||x-3|-5|x-1|=0\Rightarrow |x-1|(|x-3|-5)=0$$

$$\begin{cases} |x-1|=0\Rightarrow x=1 \\ |x-3|=5\Rightarrow x-3=\pm 5\Rightarrow x=-2,\ x=8 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با ۷.

۲۰۱۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که چون سمت چپ معادله نامنفی است، پس سمت راست آن هم نامنفی است، بنابراین $x\geq 0$. طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$|x^2-4|=3x\Rightarrow (x^2-4)^2=(3x)^2\Rightarrow x^4-8x^2+16=9x^2$$

$$x^4-17x^2+16=0\Rightarrow (x^2-1)(x^2-16)=0$$

بنابراین

$$x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$$

$$x^2-16=0\Rightarrow x=\pm 4$$

چون $x\geq 0$، پس فقط جواب‌های $x=1$ و $x=4$ قابل قبول هستند که مجموع آن‌ها برابر است با ۵.

راه‌حل دوم اگر $x<0$، آن‌گاه معادله جواب ندارد، زیرا سمت راست تساوی منفی و سمت چپ آن نامنفی است. اگر $x\geq 0$، آن‌گاه معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2-4=3x \\ x^2-4=-3x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0\Rightarrow x=-1,\ x=4 \\ x^2+3x-4=0\Rightarrow x=1,\ x=-4 \end{cases}$$

جواب‌های $x=-۱$ و $x=-۴$ قابل قبول نیستند، زیرا با شرط $x\geq ۰$ معادله را حل کرده‌ایم. پس جواب‌های معادله $x=۱$ و $x=۴$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۵ است.

۲۰۱۴- گزینهٔ ۴ اگر $x\leq -۳$، آن‌گاه $|x+۳|=-(x+۳)$ و معادله می‌شود

$$x^۲+۲(x+۳)-۱۸=۰\Rightarrow x^۲+۲x-۱۲=۰$$

$$x=-۱-\sqrt{۱۳},\ x=-۱+\sqrt{۱۳}\ (\text{غ.ق.ق})$$

اگر $x>-۳$، آن‌گاه $|x+۳|=x+۳$ و معادله می‌شود

$$x^۲-۲(x+۳)-۱۸=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۲۴=۰$$

$$(x-۶)(x+۴)=۰\Rightarrow x=-۴\ (\text{غ.ق.ق}),\ x=۶$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $۵-\sqrt{۱۳}$.

۲۰۱۵- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض سؤال، هر یک از معادله‌های $x^۲-۶x-a=۰$ و $x^۲-۶x+a=۰$ باید دو جواب داشته باشد. در نتیجه $۳۶+۴a>۰$ و $۳۶-۴a>۰$. می‌دانیم $a>۰$ (زیرا اگر $a<۰$، معادلهٔ $|x^۲-۶x|=a$ جواب ندارد)، در نتیجه $۳۶+۴a>۰$. بنابراین کافی است

$$۳۶-۴a>۰\Rightarrow a<۹$$

بنابراین $۰<a<۹$.

۲۰۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا باید مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $|x-۳|\geq ۲$ و $|۲x+۱|\leq ۵$ را بیابیم. توجه کنید که

$$|x-۳|\geq ۲\Rightarrow\begin{cases}x-۳\geq ۲\Rightarrow x\geq ۵\\ x-۳\leq -۲\Rightarrow x\leq ۱\end{cases}$$

$$|۲x+۱|\leq ۵\Rightarrow -۵\leq ۲x+۱\leq ۵\Rightarrow -۶\leq ۲x\leq ۴\Rightarrow -۳\leq x\leq ۲$$

پس مجموعهٔ جواب‌های اولی برابر با $A=(-\infty,۱]\cup[۵,+\infty)$ و مجموعهٔ جواب‌های دومی $B=[-۳,۲]$ است. بنابراین $A\cap B=[-۳,۱]$.

۲۰۱۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** برای حل این نامعادله دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$(x+۱)^۲\geq(۲x-۱)^۲\Rightarrow x^۲+۲x+۱\geq ۴x^۲-۴x+۱$$

در نتیجه به نامعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۳x^۲-۶x\leq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

بنابراین $a=۰$ و $b=۲$. در نتیجه $b-a=۲$.

راه‌حل دوم اگر دو طرف نابرابری $|A|\geq|B|$ را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود:

$$A^۲\geq B^۲\Rightarrow A^۲-B^۲\geq ۰\Rightarrow(A-B)(A+B)\geq ۰$$

و برعکس. در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر معادل است با

$$(x+۱-۲x+۱)(x+۱+۲x-۱)\geq ۰\Rightarrow(-x+۲)(۳x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۲$$

بنابراین $a=۰$ و $b=۲$. در نتیجه $b-a=۲$.

۲۰۱۸- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادله را به‌صورت $|\frac{x-۳}{۲-x}|\leq ۱$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\frac{|x-۳|}{|۲-x|}\leq ۱\Rightarrow|x-۳|\leq|۲-x|,\quad x\neq ۲$$

$$|x-۳|^۲\leq|۲-x|^۲\Rightarrow x^۲-۶x+۹\leq ۴-۴x+x^۲\Rightarrow x\geq\frac{۵}{۲}$$

بنابراین $[\frac{۵}{۲},+\infty)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است و در نتیجه $a=۵$، $b=۲$. پس $a+b=۷$.

۲۰۱۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $x=|x|$. بنابراین

$$x<|x|\Rightarrow x<۰$$

در نتیجه

$$|x|<x^۲\xrightarrow{x<۰}-x<x^۲\Rightarrow x(x+۱)>۰\xrightarrow{x<۰}x+۱<۰$$

به این ترتیب، $|x+۱|=-x-۱$، $|x|=-x$ و $|۱-x|=۱-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-۳x$.

راه‌حل دوم $x=-۲$ در نابرابری‌های $x<|x|<x^۲$ صدق می‌کند. بنابراین کافی است حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-۲$ به‌دست آوریم:

$$A=|x+۱|+|۱-x|+|x|\xrightarrow{x=-۲}A=۱+۳+۲=۶$$

فقط مقدار گزینهٔ (۱) به ازای $x=-۲$ برابر ۶ است.

۲۰۲۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $x+۱>۰$ و نامعادله به شکل $(x+۱)x<x(x+۱)$ درمی‌آید که جواب ندارد. اگر $-۱<x<۰$، آن‌گاه $x+۱>۰$ و نامعادله به شکل $-(x+۱)x<x(x+۱)$ درمی‌آید، یعنی $۲x(x+۱)>۰$ که درست نیست. اگر $x\leq -۱$، آن‌گاه $x+۱\leq ۰$ و نامعادله به شکل $-(x+۱)x<-x(x+۱)$ درمی‌آید که جواب ندارد. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله تهی است.

راه‌حل دوم معلوم است که $x=۰$ و $x=-۱$ جواب‌های نامعادله نیستند، پس می‌توانیم نامعادله را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{x+۱}{|x+۱|}<\frac{x}{|x|}\qquad(۱)$$

می‌دانیم برای هر $a\neq ۰$، $\frac{a}{|a|}=\begin{cases}۱ & a>۰\\ -۱ & a<۰\end{cases}$. بنابراین تنها حالتی که نامعادلهٔ (۱) می‌تواند جواب داشته باشد به‌صورت زیر است:

$$\frac{x+۱}{|x+۱|}=-۱\ ,\ \frac{x}{|x|}=۱$$

از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $x+۱<۰$، یعنی $x<-۱$ و از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $x>۰$. دو محدودهٔ به‌دست آمده اشتراک ندارند، پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر تهی است.

۲۰۲۱- گزینهٔ ۴ چون از $|A|=-A$، نتیجه می‌شود $A\leq ۰$، پس از $|x^۲-x-۶|=-(x^۲-x-۶)$ نتیجه می‌شود $x^۲-x-۶\leq ۰$. بنابراین $(x+۲)(x-۳)\leq ۰$ و با توجه به جدول تعیین علامت زیر بازهٔ $[-۲,۳]$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، که شامل شش عدد صحیح (۰، ±۱، ±۲ و ۳) است.

x	$-\infty$		-۲		۳		$+\infty$
$x^۲-x-۶$		+	۰	−	۰	+	

۲۰۲۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$||x^۲-۵|-۲|=۱\Rightarrow|x^۲-۵|-۲=\pm ۱$$

حالت اول

$$|x^۲-۵|-۲=-۱\Rightarrow|x^۲-۵|=۱\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۵=-۱\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲\\ x^۲-۵=۱\Rightarrow x^۲=۶\Rightarrow x=\pm\sqrt{۶}\end{cases}$$

حالت دوم

$$|x^۲-۵|-۲=۱\Rightarrow|x^۲-۵|=۳\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۵=-۳\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\\ x^۲-۵=۳\Rightarrow x^۲=۸\Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}\end{cases}$$

بنابراین معادله هشت جواب دارد.

۲۰۲۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x(x^2-3)|=|x|\Rightarrow |x||x^2-3|=|x|$$

واضح است که $x=0$ یک جواب معادله است. با شرط $x\neq 0$ دو طرف معادله را بر $|x|$ تقسیم می‌کنیم:

$$|x^2-3|=1\Rightarrow \begin{cases} x^2-3=-1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ x^2-3=1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\end{cases}$$

بنابراین معادله پنج جواب دارد.

۲۰۲۴- گزینهٔ ۴ با توجه به ریشهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق، سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم

$$x\leq -2\Rightarrow -2(x-1)-(x+2)=5\Rightarrow -3x=5\Rightarrow x=-\frac{5}{3}\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$-2<x\leq 1\Rightarrow -2(x-1)+x+2=5\Rightarrow -x+4=5\Rightarrow x=-1$$

$$x>1\Rightarrow 2(x-1)+x+2=5\Rightarrow 3x=5\Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر $\{-1,\frac{5}{3}\}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{2}{3}$ است.

۲۰۲۵- گزینهٔ ۴ چون صفر جواب معادلهٔ مورد نظر نیست، پس $a\neq 0$. همچنین، سمت چپ معادله نامنفی است، پس $a>0$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{x^2}{x+1}=a\Rightarrow x^2-ax-a=0 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{x+1}=-a\Rightarrow x^2+ax+a=0$$

توجه کنید که معادلهٔ $x^2-ax-a=0$ همیشه دو جواب غیرصفر دارد $(\Delta=a^2+4a>0)$. بنابراین برای اینکه معادلهٔ اصلی دو جواب غیرصفر داشته باشد، باید معادلهٔ $x^2+ax+a=0$ جواب نداشته باشد:

$$\Delta=a^2-4a<0\Rightarrow 0<a<4$$

بنابراین اگر $0<a<4$، معادلهٔ مورد نظر دو جواب غیرصفر دارد. توجه کنید که $x=-1$ (ریشهٔ مخرج کسر)، جواب معادلهٔ $x^2-ax-a=0$ نیست.

۲۰۲۶- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|-4>1 \quad \text{یا} \quad |x|-4<-1$$

پس $|x|<3$ یا $|x|>5$. از نامعادلهٔ $|x|<3$ نتیجه می‌شود $-3<x<3$.

از نامعادلهٔ $|x|>5$ نتیجه می‌شود $x>5$ یا $x<-5$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت زیر است:

$$(-\infty,-5)\cup(-3,3)\cup(5,+\infty)$$

که شامل اعداد صحیح ± 5، ± 4 و ± 3 نیست. تعداد این اعداد ۶ تاست.

۲۰۲۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|(x-5)(x-2)|<|(x-2)(x-3)|\Rightarrow |x-2||x-5|<|x-2||x-3|$$

معلوم است که $x\neq 2$. بنابراین $|x-5|<|x-3|$. چون دو طرف این نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توان آن‌ها را به توان دو رساند:

$$x^2-10x+25<x^2-6x+9\Rightarrow 4x>16\Rightarrow x>4$$

راه‌حل دوم

$$|x^2-7x+10|<|x^2-5x+6|$$

$$x^2-7x+10<x^2-5x+6\Rightarrow 2x>4\Rightarrow x>2$$

$$x^2-7x+10>-x^2+5x-6\Rightarrow 2x^2-12x+16>0\Rightarrow x^2-6x+8>0$$

$$(x-2)(x-4)>0\Rightarrow x>4 \quad \text{یا} \quad x<2$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر با اشتراک این جواب‌ها است، که برابر $x>4$ است.

۲۰۲۸- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت $x^2-2x+1<2+|x-1|$ می‌نویسیم. بنابراین

$$(x-1)^2<2+|x-1|\Rightarrow |x-1|^2<2+|x-1|$$

اگر فرض کنیم $t=|x-1|$، آن‌گاه

$$t^2-t-2<0\Rightarrow (t+1)(t-2)<0$$

چون $t\geq 0$، بنابراین $t+1\geq 1$ و در نتیجه باید نامعادلهٔ $t-2<0$ را حل کنیم که $t<2$ جواب است. پس $|x-1|<2$ و در نتیجه

$$-2<x-1<2\Rightarrow -1<x<3$$

پس اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در مجموعهٔ جواب‌های نامعادله مورد نظر قرار دارند.

۲۰۲۹- گزینهٔ ۲ ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$-a^2-2<|x|-3a<a^2+2\Rightarrow -a^2+3a-2<|x|<a^2+3a+2$$

واضح است که اگر $a^2+3a+2\leq 0$، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. پس

$$a^2+3a+2=(a+1)(a+2)\leq 0$$

a	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
a^2+3a+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

با توجه به جدول فوق باید $-2\leq a\leq -1$.

۲۰۳۰- گزینهٔ ۲ اگر $x<1$، آن‌گاه سمت چپ نامعادله منفی و سمت راست آن نامنفی است. پس $x<1$ جواب نامعادله است. اگر $x>1$، آن‌گاه $|x+1|=x+1$ و در نتیجه

$$\frac{3}{x-1}\leq x+1\Rightarrow 3\leq x^2-1\Rightarrow x^2\geq 4\xrightarrow{x>1} x\geq 2$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $\mathbb{R}-[1,2)$ است و در نتیجه

$$a=1, b=2\Rightarrow a+b=3$$

۲۰۳۱- گزینهٔ ۴ با جای‌گذاری $x=\sqrt{2}-1$ در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(\sqrt{2}-1)=5|3\sqrt{2}-3-1|+3|5\sqrt{2}-5-4|$$
$$=5(3\sqrt{2}-4)-3(5\sqrt{2}-9)=7$$

با جای‌گذاری $x=\sqrt{3}-1$ در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(\sqrt{3}-1)=5|3\sqrt{3}-3-1|+3|5\sqrt{3}-5-4|$$
$$=5(3\sqrt{3}-4)-3(5\sqrt{3}-9)=7$$

پس

$$f(\sqrt{2}-1)+f(\sqrt{3}-1)=14$$

۲۰۳۲- گزینهٔ ۳ برای $x>1$ ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x-1>0,\ x+1>0\Rightarrow f(x)=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1-x}{x-1}=2$$

به طریق مشابه برای $-1<x<1$ به‌دست می‌آید

$$x-1<0,\ x+1>0\Rightarrow f(x)=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1-x}{-(x-1)}=0$$

همچنین برای $x<-1$،

$$x-1<0,\ x+1<0\Rightarrow f(x)=\frac{-(x+1)}{x+1}-\frac{1-x}{-(x-1)}=-2$$

بنابراین $R_f=\{0,-2,2\}$ و برد تابع ۳ عضو دارد.

۲۰۳۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر $x\ge 0$، آن‌گاه

$$|x|=x\Rightarrow \big|x-|x|\big|=|x-x|=0$$

بنابراین $f(x)=|2x-0|=|2x|=2x$. اگر $x<0$، آن‌گاه

$$|x|=-x\Rightarrow \big|x-|x|\big|=|x+x|=|2x|=-2x$$

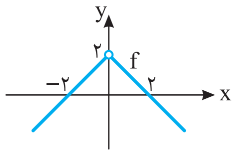
بنابراین $f(x)=|2x-(-2x)|=|4x|=-4x$. در نتیجه

$$f(x)=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ -4x & x<0\end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(1)=2$. فقط در تابع گزینهٔ (۳) این شرایط برقرار است.

۲۰۳۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

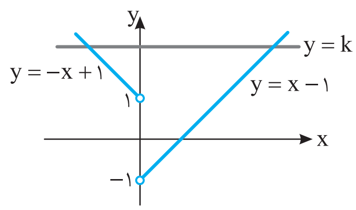
$$f(x)=\frac{2|x|-x^2}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{2x-x^2}{x} & x>0\\[2mm] \dfrac{-2x-x^2}{-x} & x<0\end{cases}=\begin{cases}2-x & x>0\\ 2+x & x<0\end{cases}$$



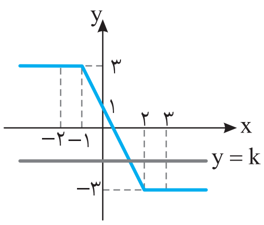
۲۰۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x(1-\frac{1}{x}) & x<0\\[2mm] x(1-\frac{1}{x}) & x>0\end{cases}=\begin{cases}-x+1 & x<0\\ x-1 & x>0\end{cases}$$

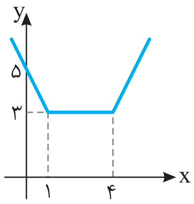
بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که اگر $k>1$، آن‌گاه خط $y=k$ و نمودار تابع f در دو نقطه متقاطع‌اند.



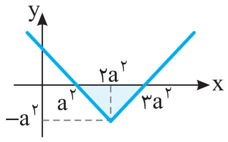
۲۰۳۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f را به کمک نقاط $(2,-3)$، $(-1,3)$، $(3,-3)$ و $(-2,3)$ رسم می‌کنیم. واضح است که اگر خط $y=k$ این نمودار را در یک نقطه با طول مثبت قطع کند، باید $-3<k<1$.



۲۰۳۷- گزینهٔ ۲ برای اینکه حداکثر مقدار عبارت $\frac{15}{|x-1|+|x-4|}$ را به‌دست بیاوریم، کافی است حداقل مقدار تابع $f(x)=|x-1|+|x-4|$ را به‌دست آوریم. نمودار تابع f در شکل رسم شده است. با توجه به شکل، کمترین مقدار تابع f برابر ۳ است، بنابراین بیشترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{15}{3}=5$.



۲۰۳۸- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را $2a^2$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-2a^2|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را a^2 واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=|x^2-2a^2|-a^2$ به‌دست می‌آید. با توجه به نمودار این تابع، مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با

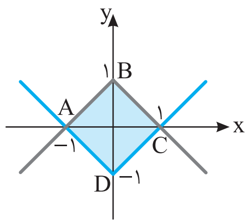


$$S=\frac{1}{2}a^2(2a^2)=a^4$$

بنابراین

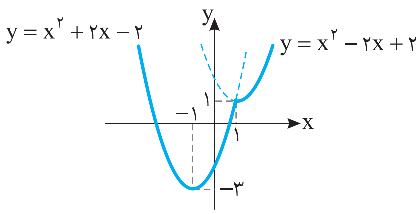
$$a^4=4\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$$

۲۰۳۹- گزینهٔ ۳ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی ABCD مطلوب است. در واقع مساحت مورد نظر از چهار مثلث قائم‌الزاویه به قاعدهٔ یک واحد و ارتفاع یک واحد تشکیل شده است. پس مساحت ABCD برابر است با $4\times(\frac{1\times 1}{2})=2$.



۲۰۴۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2 & x\ge 1\\ x^2+2x-2 & x<1\end{cases}$.

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و برد آن بازهٔ $[-3,+\infty)$ است.



۲۰۴۱- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $f(2-|a|)$ و $f(2+|a|)$ را حساب می‌کنیم:

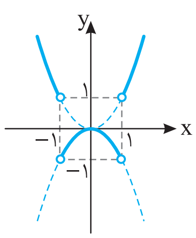
$$f(2-|a|)=\big|2-|a|-2\big|+1=\big|-|a|\big|+1=|a|+1$$

$$f(2+|a|)=\big|2+|a|-2\big|+1=\big||a|\big|+1=|a|+1$$

بنابراین $f(2-|a|)-2f(2+|a|)+1=|a|+1-2|a|-2+1=-|a|$.

۲۰۴۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|>1\\ -x^2 & |x|<1\end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است و برد تابع f برابر با $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ است. پس $a=1$ و $b=0$ و در نتیجه $a-b=1$.

۲۰۴۳- گزینهٔ ۲ اگر $۰\le x\le ۲$، آن‌گاه $x+۲>۰$ و $x-۲\le ۰$، پس

$$x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)\le ۰$$

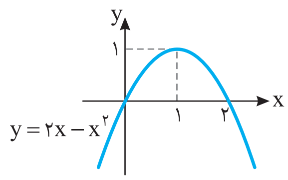
$$x^۲-۲x=x(x-۲)\le ۰$$

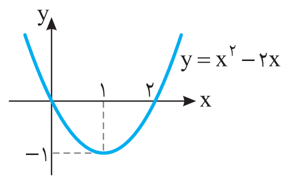
بنابراین $f(x)=-x^۲+۴+(x^۲-۲x)=-۲x+۴$. پس

$$۰\le x\le ۲\Rightarrow -۴\le -۲x\le ۰\Rightarrow ۰\le -۲x+۴\le ۴$$

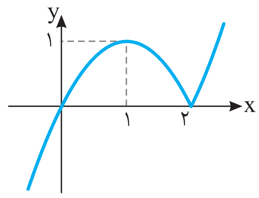
پس حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است.

۲۰۴۴- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل
$$f(x)=\begin{cases} ۲x-x^۲ & x\le ۲\\ x^۲-۲x & x>۲\end{cases}$$
است. نمودار توابع $y=۲x-x^۲$ و $y=x^۲-۲x$ به‌صورت زیر است.





بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۲۰۴۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

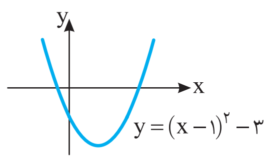
$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x-۲ & x\le ۰\\ x^۲-۲x-۲ & x>۰\end{cases}$$

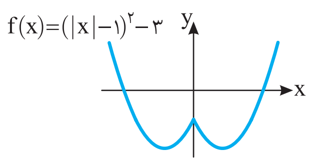
هر یک از قطعه‌ها بخشی از یک سهمی است (اولی به رأس $(-۱,-۳)$ و دومی به رأس $(۱,-۳)$). پس نمودار تابع به‌صورت گزینهٔ (۳) است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=|x|^۲-۲|x|-۲=(|x|-۱)^۲-۳$$

بنابراین کافی است ابتدا نمودار تابع $y=(x-۱)^۲-۳$ را رسم کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست این محور قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم.



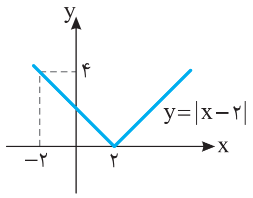


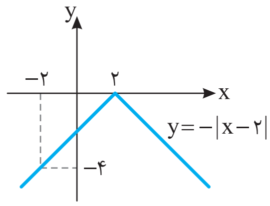
راه‌حل سوم چون $f(-x)=f(x)$، بنابراین نمودار تابع f نسبت به محور y متقارن است (توجه کنید که نمودار $y=f(-x)$ از قرینه کردن نمودار تابع f نسبت به محور y به‌دست می‌آید). بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر، $f(۰)=-۲$، پس گزینهٔ (۱) هم رد می‌شود.

۲۰۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

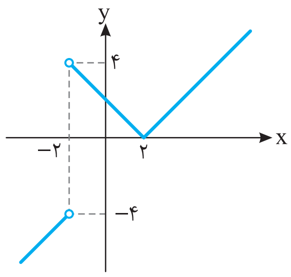
$$f(x)=\frac{|x-۲||x+۲|}{x+۲}=\begin{cases} |x-۲| & x>-۲\\ -|x-۲| & x<-۲\end{cases}$$

ابتدا نمودار توابع $y=|x-۲|$ و $y=-|x-۲|$ را رسم می‌کنیم.





پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۲۰۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که با توجه به ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق چهار حالت زیر برای ضابطهٔ تابع وجود دارد:

$$x\le -۱\Rightarrow f(x)=-x+x-۲+۲(x+۱)=۲x$$

$$-۱<x\le ۰\Rightarrow f(x)=-x+x-۲-۲(x+۱)=-۲x-۴$$

$$۰<x\le ۲\Rightarrow f(x)=x+x-۲-۲(x+۱)=-۴$$

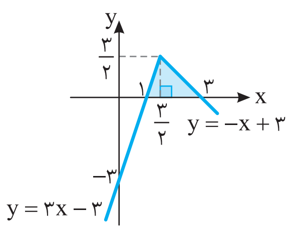
$$x>۲\Rightarrow f(x)=x-(x-۲)-۲(x+۱)=-۲x$$

بنابراین روی بازهٔ $[۰,۲]$ نمودار تابع یک پاره‌خط افقی است که طول آن برابر است با ۲.

۲۰۴۸- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\ge \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=x-(۲x-۳)=-x+۳\\ x\le \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=x+۲x-۳=۳x-۳\end{cases}$$

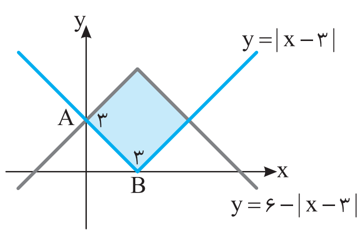
مطابق شکل روبه‌رو، مساحت مثلثی به ارتفاع $\frac{۳}{۲}$ و قاعدهٔ ۲ مد نظر است که برابر است با $\frac{۳}{۲}$.



۲۰۴۹- گزینهٔ ۳ در شکل زیر نمودارها را رسم کرده‌ایم. با توجه به اینکه شکل حاصل مربع است، کافی است طول ضلع مربع را به‌دست آوریم:

$$A(۰,۳)\ ,\ B(۳,۰)\Rightarrow AB=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۰-۳)^۲}=۳\sqrt{۲}$$

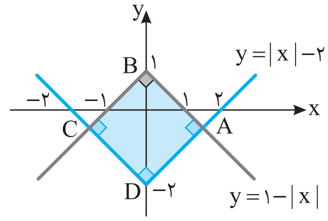
بنابراین مساحت مربع برابر است با $(۳\sqrt{۲})^۲=۱۸$.



۲۰۵۰- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت ABCD مطلوب مسئله است. ابتدا طول نقطه‌های A و C را مشخص می‌کنیم:

$$|x|-2=1-|x|\Rightarrow |x|=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{3}{2}$$

بنابراین $AC=3$ و $BD=3$. پس چهارضلعی ABCD یک مربع است که مساحت آن برابر است با $S=\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{9}{2}$.



۲۰۵۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^3=-20\Rightarrow x=-\sqrt[3]{20}$$

همچنین $5<2\sqrt[3]{20}<6$، بنابراین

$$-6<-2\sqrt[3]{20}<-5\Rightarrow -6<2x<-5\Rightarrow [2x]=-6$$

توجه کنید که $2\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{160}$ و چون $\sqrt[3]{125}<\sqrt[3]{160}<\sqrt[3]{216}$، پس

$$5<2\sqrt[3]{20}<6$$

۲۰۵۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$1\le x<4\Rightarrow 1\le\sqrt{x}<2\Rightarrow[\sqrt{x}]=1$$

$$4\le x<9\Rightarrow 2\le\sqrt{x}<3\Rightarrow[\sqrt{x}]=2$$

$$9\le x<16\Rightarrow 3\le\sqrt{x}<4\Rightarrow[\sqrt{x}]=3$$

$$16\le x<25\Rightarrow 4\le\sqrt{x}<5\Rightarrow[\sqrt{x}]=4$$

$$x=25\Rightarrow\sqrt{25}=5$$

بنابراین

$$A=1+1+1+\underbrace{2+2+\cdots+2}_{\text{۵تا}}+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{\text{۷تا}}+\underbrace{4+4+\cdots+4}_{\text{۹تا}}+5$$

$$=3+10+21+36+5=75$$

۲۰۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$[x]=2\Rightarrow 2\le x<3\Rightarrow 6\le 3x<9\Rightarrow 1\le 3x-5<4$$

بنابراین $[3x-5]$ می‌تواند مقادیر ۱، ۲ و ۳ را داشته باشد.

۲۰۵۴- گزینهٔ ۱ اگر $[\frac{5-x}{2}]=-3$، آن‌گاه $-3\le\frac{5-x}{2}<-2$. بنابراین

$$-6\le 5-x<-4\Rightarrow -11\le -x<-9$$

در نتیجه $9<x\le 11$.

۲۰۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$[3x-2]=1\Rightarrow 1\le 3x-2<2\Rightarrow 3\le 3x<4\Rightarrow 1\le x<\frac{4}{3}$$

بنابراین

$$2\le 2x<\frac{8}{3}\Rightarrow -1\le 2x-3<-\frac{1}{3}\Rightarrow[2x-3]=-1$$

۲۰۵۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$4n^2-4n+1<4n^2-2n+1<(2n)^2\Rightarrow(2n-1)^2<4n^2-2n+1<(2n)^2$$

$$2n-1<\sqrt{4n^2-2n+1}<2n$$

بنابراین $[\sqrt{4n^2-2n+1}]=2n-1$.

راه‌حل دوم فرض کنید $n=2$. در این صورت $[\sqrt{4n^2-2n+1}]=[\sqrt{13}]=3$. فقط مقدار گزینهٔ (۲) به‌ازای $n=2$ برابر ۳ می‌شود.

۲۰۵۷- گزینهٔ ۲ اگر $[\frac{5-x}{2}]=-4$، آن‌گاه $-4\le\frac{5-x}{2}<-3$، بنابراین

$$-8\le 5-x<-6\Rightarrow -13\le -x<-11$$

در نتیجه $11<x\le 13$. بنابراین $a=11$، $b=13$ و $b-a=2$.

۲۰۵۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $[x+2]=[x]+2$ و $[x-1]=[x]-1$. بنابراین

$$2[x+2]-[x-1]=7\Rightarrow 2[x]+4-[x]+1=7\Rightarrow[x]=2\Rightarrow 2\le x<3$$

۲۰۵۹- گزینهٔ ۱ اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$[x+[x-3]]=3\Rightarrow[x]+[x-3]=3\Rightarrow[x]+[x]-3=3\Rightarrow[x]=3$$

در نتیجه $3\le x<4$. بنابراین $a=3$، $b=4$ و $a+b=7$.

۲۰۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $3\le[x]\le 4$ معادل است با $[x]=3$ یا $[x]=4$. پس

$$[x]=3\Rightarrow 3\le x<4,\quad [x]=4\Rightarrow 4\le x<5$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[3,5)$ است.

در نتیجه $a=3$، $b=5$ و $a+b=8$.

۲۰۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$[\sqrt[3]{2}]=[\sqrt[3]{3}]=\cdots=[\sqrt[3]{7}]=1,\quad [\sqrt[3]{8}]=[\sqrt[3]{9}]=\cdots=[\sqrt[3]{26}]=2$$

$$[\sqrt[3]{27}]=[\sqrt[3]{28}]=\cdots=[\sqrt[3]{63}]=3$$

بنابراین

$$A=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{\text{۶تا}}+\overbrace{2+2+\cdots+2}^{\text{۱۹تا}}+\overbrace{3+3+\cdots+3}^{\text{۳۷تا}}=6+38+111=155$$

۲۰۶۲- گزینهٔ ۳

$$A=[-\sqrt{10}]+[-\sqrt{9}]+[-\sqrt{8}]+\cdots+[\sqrt{10}]$$

$$=([-\sqrt{10}]+[\sqrt{10}])+([-\sqrt{9}]+[\sqrt{9}])+\cdots+([-\sqrt{1}]+[\sqrt{1}])$$

اگر $x\in\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=0$ و اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=-1$. از $\sqrt{0}$ تا $\sqrt{10}$ اعداد $\sqrt{0}$، $\sqrt{1}$، $\sqrt{4}$ و $\sqrt{9}$ صحیح هستند و اعداد $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، $\sqrt{6}$، $\sqrt{7}$، $\sqrt{8}$ و $\sqrt{10}$ غیرصحیح هستند. بنابراین

$$A=\underbrace{0+0+0+0}_{\text{۴تا}}+\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{\text{۷تا}}=-7$$

۲۰۶۳- گزینهٔ ۴ از $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$ نتیجه می‌شود

$$1<3x<2\Rightarrow[3x]=1,\quad \frac{3}{2}<\frac{1}{x}<3\Rightarrow 3<\frac{2}{x}<6\Rightarrow 1<\frac{2}{3x}<2\Rightarrow[\frac{2}{3x}]=1$$

بنابراین $[3x]-[\frac{2}{3x}]=1-1=0$.

۲۰۶۴- گزینهٔ ۲ از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$2\le x<3\xrightarrow{\times 2}4\le 2x<6,\quad 2\le y<3\xrightarrow{\times 3}6\le 3y<9$$

در نتیجه با جمع کردن این دو نابرابری معلوم می‌شود که

$$10\le 2x+3y<15\xrightarrow{\div 5}2\le\frac{2x+3y}{5}<3$$

پس $[\frac{2x+3y}{5}]=2$.

۲۰۶۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x^۲-۴x=(x-۲)^۲-۴$، پس

$$[x]=۲\Rightarrow ۲\le x<۳\Rightarrow ۰\le x-۲<۱\Rightarrow ۰\le (x-۲)^۲<۱$$

$$-۴\le (x-۲)^۲-۴<-۳\Rightarrow [(x-۲)^۲-۴]=-۴$$

بنابراین $[x^۲-۴x]$ فقط می‌تواند مقدار -۴ را داشته باشد.

۲۰۶۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$[x^۲+x]=-۱\Rightarrow -۱\le x^۲+x<۰$$

$$-۱\le (x+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}<۰\Rightarrow -\frac{۳}{۴}\le (x+\frac{۱}{۲})^۲<\frac{۱}{۴}$$

$$(x+\frac{۱}{۲})^۲<\frac{۱}{۴}\Rightarrow |x+\frac{۱}{۲}|<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<x+\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۱<x<۰$$

بنابراین $۰<x^{۱۰}<۱$ و در نتیجه $[x^{۱۰}]=۰$.

۲۰۶۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$n^۳<n^۳+۳n^۲+۱<n^۳+۳n^۲+۳n+۱$$

$$n^۳<n^۳+۳n^۲+۱<(n+۱)^۳\Rightarrow n<\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲+۱}<n+۱$$

بنابراین $[\sqrt[۳]{n^۳+۳n^۲+۱}]=n$.

۲۰۶۸- گزینهٔ ۳ اگر $-۲<x<-۱$، آن‌گاه $[x]=-۲$ و $|x|=-x$، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$-۳x-۴=۱\Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}$$

اگر $-۱\le x<۰$، آن‌گاه $[x]=-۱$ و $|x|=-x$، پس معادله به شکل زیر است

$$-۳x-۲=۱\Rightarrow x=-۱$$

اگر $۰\le x<۱$، آن‌گاه $[x]=۰$ و $|x|=x$، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$۳x+۰=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $(-۲,۱)$ برابر است با

$$-\frac{۵}{۳}-۱+\frac{۱}{۳}=-\frac{۷}{۳}$$

۲۰۶۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $[x-۱]=[x]-۱$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[x]^۲+۵[x]+۶=۰\Rightarrow ([x]+۲)([x]+۳)=۰$$

اکنون توجه کنید که

$$[x]+۲=۰\Rightarrow [x]=-۲\Rightarrow -۲\le x<-۱$$

$$[x]+۳=۰\Rightarrow [x]=-۳\Rightarrow -۳\le x<-۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[-۳,-۲)\cup[-۲,-۱)=[-۳,-۱)$$

در نتیجه $a=-۳$، $b=-۱$ و $b-a=۲$.

۲۰۷۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$[\frac{۲[x]+۱}{۵}]=۳\Rightarrow ۳\le\frac{۲[x]+۱}{۵}<۴\Rightarrow ۷\le [x]<\frac{۱۹}{۲}$$

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x]=۷\Rightarrow ۷\le x<۸,\quad [x]=۸\Rightarrow ۸\le x<۹,\quad [x]=۹\Rightarrow ۹\le x<۱۰$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[۷,۸)\cup[۸,۹)\cup[۹,۱۰)=[۷,۱۰)$$

در نتیجه $a=۷$، $b=۱۰$ و $b-a=۳$.

۲۰۷۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$f(x+۳)=[\frac{x+۳}{۲}]-[\frac{x+۴}{۲}]=[\frac{x+۱}{۲}+۱]-[\frac{x}{۲}+۲]$$

$$=[\frac{x+۱}{۲}]+۱-[\frac{x}{۲}]-۲=-f(x)-۱$$

در نتیجه $f(x+۳)+f(x)=-۱$.

۲۰۷۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر $x\in[۱,۲)$، آن‌گاه $-۲\le x-۳<-۱$. بنابراین $|x-۳|=-x+۳$. همچنین

$$-۱\le x-۲<۰\Rightarrow [x-۲]=-۱$$

در نتیجه $f(x)=-۱+(-x+۳)=-x+۲$.

راه‌حل دوم $f(۱)=-۱+|-۲|=۱$ فقط در گزینهٔ (۲) برقرار است.

۲۰۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $۹-x^۲\ge ۰$ و در نتیجه $-۳\le x\le ۳$. از طرف دیگر،

$$[\frac{x}{۲}]-۱=۰\Rightarrow [\frac{x}{۲}]=۱\Rightarrow ۱\le\frac{x}{۲}<۲\Rightarrow ۲\le x<۴$$

بنابراین عددهای بازهٔ $[۲,۴)$ در دامنهٔ تابع نیستند و دامنهٔ تابع به‌صورت $[-۳,۲)$ است. پس $a=-۳$، $b=۲$ و $a+b=-۱$.

۲۰۷۴- گزینهٔ ۲ باید نامعادله‌های $[x]+۲\ge۰$ و $۳-[x]\ge ۰$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را به‌دست آوریم:

$$[x]+۲\ge۰\Rightarrow [x]\ge -۲\Rightarrow x\ge -۲,\quad ۳-[x]\ge۰\Rightarrow [x]\le ۳\Rightarrow x<۴$$

بنابراین $D_f=[-۲,۴)$. پس $a=-۲$، $b=۴$ و $a+b=۲$.

۲۰۷۵- گزینهٔ ۱ اگر $-۱\le x<۰$،

$$[x]=-۱,|x|=-x\Rightarrow f(x)=-۱+x$$

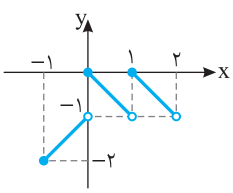
اگر $۰\le x<۱$،

$$[x]=۰,|x|=x\Rightarrow f(x)=-x$$

اگر $۱\le x<۲$،

$$[x]=۱,|x|=x\Rightarrow f(x)=۱-x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و برد تابع به‌صورت $[-۲,۰]-\{-۱\}$ است.

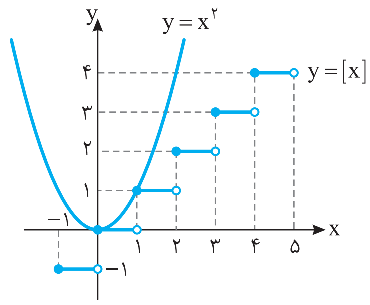


۲۰۷۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\{x|[|x+۱|-۲]>۰\}$. از طرف دیگر، چون $[|x+۱|-۲]$ عددی صحیح است، پس اگر مثبت باشد، بزرگ‌تر یا مساوی ۱ است: $[|x+۱|-۲]\ge ۱$. در نتیجه

$$|x+۱|-۲\ge۱\Rightarrow |x+۱|\ge ۳\Rightarrow \begin{cases} x+۱\ge ۳\Rightarrow x\ge ۲\\ x+۱\le -۳\Rightarrow x\le -۴\end{cases}$$

بنابراین $D_f=(-\infty,-۴]\cup[۲,+\infty)$.

۲۰۷۷- گزینهٔ ۲ نمودار این تابع‌ها را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

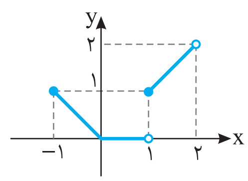


۲۰۷۸- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$-1\le x<0\Rightarrow [x]=-1\Rightarrow f(x)=-x\,,\quad 0\le x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow f(x)=0$$

$$1\le x<2\Rightarrow [x]=1\Rightarrow f(x)=x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



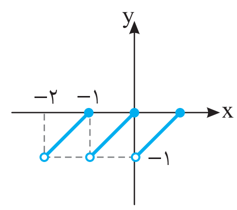
۲۰۷۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$-2<x\le -1\Rightarrow 1\le -x<2\Rightarrow [-x]=1\Rightarrow f(x)=x+1$$

$$-1<x\le 0\Rightarrow 0\le -x<1\Rightarrow [-x]=0\Rightarrow f(x)=x$$

$$0<x\le 1\Rightarrow -1\le -x<0\Rightarrow [-x]=-1\Rightarrow f(x)=x-1$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



راه‌حل دوم می‌دانیم برای هر عدد حقیقی a، $[a]\le a$. بنابراین

$$[-x]\le -x\Rightarrow x+[-x]\le 0$$

چون $f(x)=x+[-x]$، پس مقادیر تابع f همواره نامثبت هستند، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر $f(0)=0$، پس گزینهٔ (۱) نیز رد می‌شود.

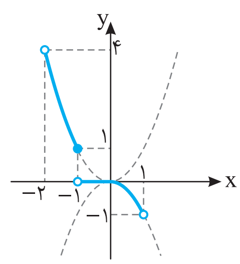
۲۰۸۰- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$-2<x\le -1\Rightarrow 1\le -x<2\Rightarrow [-x]=1\Rightarrow f(x)=x^2$$

$$-1<x\le 0\Rightarrow 0\le -x<1\Rightarrow [-x]=0\Rightarrow f(x)=0$$

$$0<x<1\Rightarrow -1<-x<0\Rightarrow [-x]=-1\Rightarrow f(x)=-x^2$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۰۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(f(x))=f(x)-[3f(x)]$$

اکنون حاصل $[3f(x)]$ را پیدا می‌کنیم. اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k]=[x]+k$$

در نتیجه

$$[3f(x)]=[3x-3[3x]]=[3x]-3[3x]=-2[3x]$$

(زیرا $3[3x]\in\mathbb{Z}$) بنابراین

$$f(f(x))=f(x)-(-2[3x])=x-[3x]+2[3x]=x+[3x]$$

در نتیجه $f(f(x))-x=[3x]$.

۲۰۸۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$[4-x]+[x-3]=0\Rightarrow 4+[-x]+[x]-3=0$$

$$[x]+[-x]=-1\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

پس عددهای غیرصحیح مخرج کسر را صفر می‌کنند و در دامنهٔ تابع نیستند. بنابراین دامنهٔ تابع $\mathbb{Z}$ است.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0)=f(1)=1$. بنابراین عددهای صفر و ۱ در دامنهٔ تابع هستند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) رد می‌شوند.

۲۰۸۳- گزینهٔ ۱ اگر x عددی صحیح باشد که در دامنهٔ f نیست، آن‌گاه

$$[|x+1|-2]-5=0 \qquad (1)$$

و چون x صحیح است، پس $|x+1|-2$ نیز صحیح است، در نتیجه

$$[|x+1|-2]=|x+1|-2$$

بنابراین معادلهٔ (۱) می‌شود

$$|x+1|-2-5=0\Rightarrow |x+1|=7\Rightarrow x+1=\pm 7\Rightarrow x=\pm 7-1$$

بنابراین مجموع عددهای صحیح مورد نظر برابر -2 است.

۲۰۸۴- گزینهٔ ۳ برای تعیین دامنهٔ تابع f باید نامعادلهٔ $\frac{4-[x]}{[x]-1}\ge 0$ را حل کنیم. اگر فرض کنیم $t=[x]$، نامعادله به‌صورت $\frac{4-t}{t-1}\ge 0$ درمی‌آید که جواب آن به‌صورت $1<t\le 4$ است. بنابراین

$$1<[x]\le 4\Rightarrow 2\le x<5$$

بنابراین $D_f=[2,5)$ و در نتیجه $a=2$، $b=5$ و $a+b=7$.

۲۰۸۵- گزینهٔ ۲ باید نامعادلهٔ $4[x]-[x]^2\ge 0$ را حل کنیم. فرض می‌کنیم $[x]=t$ و در نتیجه

$$4t-t^2\ge 0\Rightarrow t(4-t)\ge 0\Rightarrow 0\le t\le 4$$

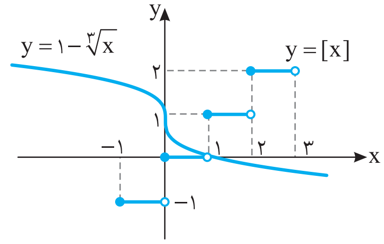
بنابراین $0\le [x]\le 4$. در نتیجه $0\le x<5$. پس $D_f=[0,5)$ و دامنهٔ تابع شامل ۵ عدد صحیح است.

۲۰۸۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که نابرابری $0\le x-[x]<1$ برای هر مقدار x برقرار است. پس

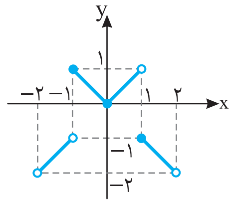
$$-1<[x]-x\le 0\Rightarrow -2<2[x]-2x\le 0\Rightarrow -2<f(x)\le 0$$

بنابراین $R_f=(-2,0]$.

۲۰۸۷- گزینهٔ «۴» نمودار دو تابع $y=۱-\sqrt[۳]{x}$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



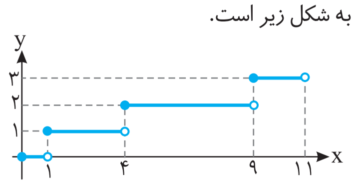
۲۰۸۸- گزینهٔ «۲» ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه $(-۱)^{[x]}=۱$ و در نتیجه $f(x)=x$. همچنین اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن‌گاه $(-۱)^{[x]}=-۱$ و در نتیجه $f(x)=-x$. بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو است.



۲۰۸۹- گزینهٔ «۴» ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$۰\le x<۱\Rightarrow ۰\le\sqrt{x}<۱\Rightarrow[\sqrt{x}]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$
$$۱\le x<۴\Rightarrow ۱\le\sqrt{x}<۲\Rightarrow[\sqrt{x}]=۱\Rightarrow f(x)=۱$$
$$۴\le x<۹\Rightarrow ۲\le\sqrt{x}<۳\Rightarrow[\sqrt{x}]=۲\Rightarrow f(x)=۲$$
$$۹\le x<۱۱\Rightarrow ۳\le\sqrt{x}<\sqrt{۱۱}\Rightarrow[\sqrt{x}]=۳\Rightarrow f(x)=۳$$

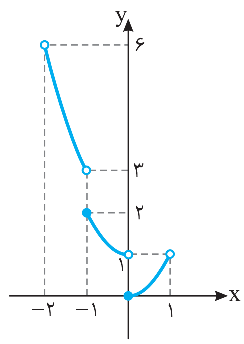
پس نمودار تابع به شکل زیر است.



۲۰۹۰- گزینهٔ «۱» توجه کنید که

$$-۲<x<-۱\Rightarrow[x]=-۲\Rightarrow f(x)=x^۲+۲$$
$$-۱\le x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow f(x)=x^۲+۱$$
$$۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow f(x)=x^۲$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



۲۰۹۱- گزینهٔ «۴» معادلهٔ $(x-۴)|x|<۲x-۵$ را برای $x\ge۰$ و $x<۰$ جداگانه حل می‌کنیم:

$$x\ge۰\Rightarrow(x-۴)x<۲x-۵\Rightarrow x^۲-۶x+۵<۰\Rightarrow ۱<x<۵$$
$$x<۰\Rightarrow(x-۴)(-x)<۲x-۵\Rightarrow x^۲-۲x-۵>۰$$
$$x<۱-\sqrt{۶},\ x>۱+\sqrt{۶}\xrightarrow{x<۰}x<۱-\sqrt{۶}$$

پس مجموعهٔ جواب‌های معادله به‌صورت $(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$ است.

ریاضی - ۹۲

۲۰۹۲- گزینهٔ «۴» **راه‌حل اول** واضح است که اگر $x<۰$، نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^۲-۲x|<۰$ که غیرممکن است. بنابراین باید با شرط $x\ge۰$ نامعادله را حل کنیم. اکنون توجه کنید که نامعادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$|x^۲-۲x|<x\Rightarrow|x(x-۲)|<x\Rightarrow|x||x-۲|<x$$
$$x|x-۲|<x\Rightarrow|x-۲|<۱$$
$$-۱<x-۲<۱\Rightarrow۱<x<۳$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(۱,۳)$ است.

راه‌حل دوم به کمک دو مقدار $x=۱$ و $x=۲$ گزینهٔ صحیح مشخص می‌شود. $x=۱$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی $x=۲$ در آن صدق می‌کند. تنها گزینه‌ای که عدد ۲ در آن قرار دارد ولی عدد ۱ در آن قرار ندارد، گزینهٔ (۴) است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۰۹۳- گزینهٔ «۳» **راه‌حل اول** اگر $|x+۱|-۱<۰$، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^۲-۲|<۰$ که غیرممکن است. بنابراین باید $|x+۱|-۱\ge۰$ و در نتیجه

$$|x+۱|\ge۱\Rightarrow\begin{cases}x+۱\ge۱\Rightarrow x\ge۰\\ x+۱\le-۱\Rightarrow x\le-۲\end{cases}$$

اگر $x\le-۲$. آن‌گاه $x+۱<۰$ و $x^۲-۲>۰$، پس نامعادله به صورت زیر خواهد بود:

$$x^۲-۲<-x-۱-۱\Rightarrow x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow-۱<x<۰ \quad \text{(غ.ق.ق)}$$

بنابراین نامعادله در بازهٔ $(-\infty,-۲]$ جواب ندارد. پس باید با فرض $x\ge۰$ آن را حل کنیم. در این حالت $x+۱>۰$ و نامعادله به صورت زیر درمی‌آید:

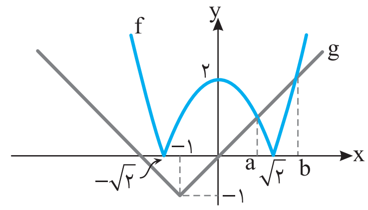
$$|x^۲-۲|<x+۱-۱\Rightarrow|x^۲-۲|<x\Rightarrow-x<x^۲-۲<x$$

پس باید دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases}x^۲-x-۲<۰ & (۱)\\ x^۲+x-۲>۰ & (۲)\end{cases}$ را حل کنیم. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۱) با شرط $x\ge۰$ به صورت $۰\le x<۲$ و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۲) با شرط $x\ge۰$ به صورت $x>۱$ است. اشتراک این مجموعهٔ جواب‌ها بازهٔ $(۱,۲)$ است که وسط بازه نقطه‌ای به طول ۱/۵ است.

راه‌حل دوم ابتدا نمودار توابع $f(x)=|x^۲-۲|$ و $g(x)=|x+۱|-۱$ را رسم می‌کنیم. توجه کنید جاهایی که $f(x)<g(x)$، بازهٔ (a,b) است. از روی نمودارها معلوم می‌شود که در این بازه $x>۰$. بنابراین در این بازه، ضابطهٔ g به‌صورت $g(x)=x+۱-۱=x$ ساده می‌شود. اکنون توجه کنید که نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$|x^۲-۲|<x\Rightarrow x^۴-۴x^۲+۴<x^۲\Rightarrow x^۴-۵x^۲+۴<۰$$
$$(x^۲-۴)(x^۲-۱)<۰\xrightarrow{x>۰}۱<x<۲$$

بنابراین $a=1$ و $b=2$، پس بازهٔ مورد نظر به‌صورت $(1,2)$ است و وسط بازه نقطه‌ای به طول $1/5$ است.



خارج از کشور ریاضی – ۹۵

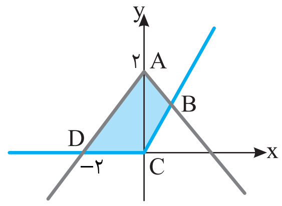
۲۰۹۴- گزینهٔ ۳ با تعیین ضابطه، دو تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:

$$y=2-|x|=\begin{cases}2-x & x\geq 0\\ 2+x & x<0\end{cases},\quad y=x+|x|=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

ابتدا مختصات نقطهٔ B را محاسبه می‌کنیم:

$$2-x_B=2x_B\Rightarrow 3x_B=2\Rightarrow x_B=\frac{2}{3}$$

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{\frac{2}{3}\times 2}{2}+\frac{2\times 2}{2}=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$



تجربی – ۹۵

۲۰۹۵- گزینهٔ ۴ عبارت x^2+1 همواره مثبت است، پس

$$|x^2+1|=x^2+1$$

بنابراین

$$2x+1-|x-2|>x^2+1\Rightarrow -x^2+2x>|x-2|\Rightarrow -x(x-2)>|x-2|$$

$$x\geq 2: -x(x-2)>(x-2)\Rightarrow (x-2)(-x-1)>0$$

$$-x>1\Rightarrow x<-1 \text{ (غ.ق.ق)}$$

$$x<2: -x(x-2)>-(x-2)\Rightarrow (x-2)(-x+1)>0$$

$$-x<-1\Rightarrow x>1$$

بنابراین $1<x<2$.

خارج از کشور تجربی – ۹۵

۲۰۹۶- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=f(2x-3)-2f(x)=2x-3-[2x-3]-2x+2[x]$$
$$=2x-3-[2x]+3-2x+2[x]\Rightarrow g(x)=2[x]-[2x]$$

با توجه به اینکه حاصل $g(x)=2[x]-[2x]$ همواره عددی صحیح است، گزینهٔ (۳) یعنی $\{-1,0\}$ یا گزینهٔ (۴) یعنی $\{0,1\}$ پاسخ صحیح هستند که با قرار دادن چند مقدار خواهیم داشت:

$$x=\frac{1}{10}\Rightarrow y=0,\quad x=\frac{9}{10}\Rightarrow y=-1$$

خارج از کشور ریاضی – ۹۲

۲۰۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از $[x^2+x]=-1$، مقادیر x را می‌یابیم:

$$-1\leq x^2+x<0\Rightarrow\begin{cases}x^2+x<0\Rightarrow -1<x<0\\ x^2+x+1\geq 0\Rightarrow \text{همواره درست است}\Rightarrow x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1<x<0$$

پس $0<x^{20}<1$ و حاصل $[x^{20}]$ برابر صفر است.

تجربی – ۸۸

۲۰۹۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از آنجا که به‌ازای هر عدد طبیعی $n>2$ حاصل، عددی منحصربه‌فرد است به‌ازای $n=3$ این عدد را به‌دست می‌آوریم:

$$n=3:[\sqrt{36-9+1}]-2[\sqrt{9-6}]=[\sqrt{28}]-2[\sqrt{3}]=5-2=3$$

راه‌حل دوم به‌ازای $n>2$،

$$\begin{cases}4n^2-4n+1<4n^2-3n+1<4n^2\Rightarrow (2n-1)^2<4n^2-3n+1<(2n)^2\\ 2n-1<\sqrt{4n^2-3n+1}<2n\Rightarrow [\sqrt{4n^2-3n+1}]=2n-1\\ n^2-4n+4<n^2-2n<n^2-2n+1\Rightarrow (n-2)^2<n^2-2n<(n-1)^2\\ n-2<\sqrt{n^2-2n}<n-1\Rightarrow [\sqrt{n^2-2n}]=n-2\end{cases}$$

پس $[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]=2n-1-2(n-2)=4-1=3$.

تجربی – ۹۱

۲۰۹۹- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ $f(x-f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=[x]\Rightarrow f(x-f(x))=f(x-[x])$$

از طرف دیگر $x-[x]$ همواره در فاصلهٔ $[0,1)$ است، بنابراین $f(x-[x])$ یعنی جزء صحیح آن برابر صفر است، یعنی $f(x-[x])=0$.

خارج از کشور تجربی – ۸۵

۲۱۰۰- گزینهٔ ۱ از نامعادلهٔ $x^2+x<0$ نتیجه می‌گیریم $-1<x<0$. پس به‌ازای $-1<x<0$:

$$-1<x<0\Rightarrow [x]=-1,\qquad 0<x^2<1\Rightarrow [x^2]=0$$

$$-1<x^3<0\Rightarrow [x^3]=-1,\qquad 0<x^4<1\Rightarrow [x^4]=0$$

بنابراین $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]=-1+0-1+0=-2$.

خارج از کشور تجربی – ۸۸

۲۱۰۱- گزینهٔ ۳ نقاط A و B را معین می‌کنیم

$$y=0\Rightarrow 2^{x-1}-2=0\Rightarrow 2^{x-1}=2^1\Rightarrow x-1=1\Rightarrow x=2\Rightarrow A=(2,0)$$

$$x=0\Rightarrow y=2^{-1}-2=-\frac{3}{2}\Rightarrow B=(0,-\frac{3}{2})$$

بنابراین $AB=\sqrt{(2-0)^2+(0-(-\frac{3}{2}))^2}=\frac{5}{2}$.

۲۱۰۲- گزینهٔ ۱ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(-\frac{3}{2})=0\Rightarrow 9^{-\frac{3}{2}+a}-2b=0\Rightarrow 2b=9^{-\frac{3}{2}+a}$$

$$f(0)=26\Rightarrow 9^a-2b=26\Rightarrow 2b=9^a-26$$

بنابراین

$$9^{-\frac{3}{2}+a}=9^a-26\Rightarrow 9^a-9^{-\frac{3}{2}+a}=26\Rightarrow 9^a(1-9^{-\frac{3}{2}})=26$$

$$9^a(1-\frac{1}{27})=26\Rightarrow 9^a=27\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

در نتیجه $2b=9^a-26=1$، یعنی $b=\frac{1}{2}$. به این ترتیب، $a+b=2$.

۲۱۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

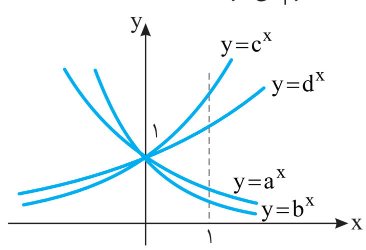
$$f(-1)=9\Rightarrow a^{-1}+1=9\Rightarrow a^{-1}=8\Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

بنابراین $f(x)=(\frac{1}{8})^x+1$. از طرف دیگر

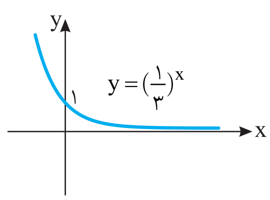
$$f(0)=b\Rightarrow(\frac{1}{8})^0+1=b\Rightarrow b=1+1=2$$

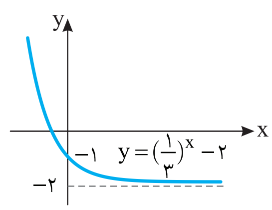
در نتیجه $ab=\frac{1}{4}$.

۲۱۰۴- گزینهٔ ۴ چون عرض نقطهٔ برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ به‌صورت a، b، c و d است، با توجه به نمودار چهار تابع و مقایسهٔ عرض نقطهٔ برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ معلوم می‌شود $c>d>a>b$.

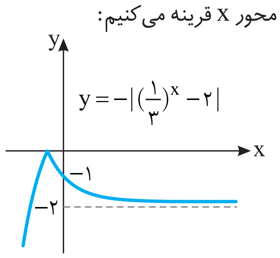


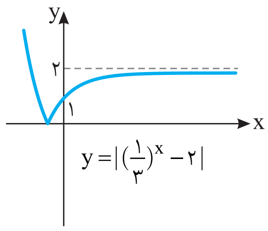
۲۱۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(x)=1-|(\frac{1}{3})^x-2|$. ابتدا نمودار $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم می‌کنیم و سپس آن را دو واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



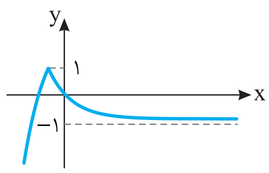


اکنون نمودار تابع $y=|(\frac{1}{3})^x-2|$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:





در نهایت، نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



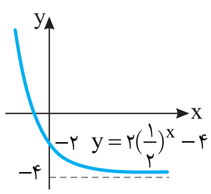
$$f(x)=1-|(\frac{1}{3})^x-2|$$

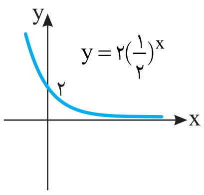
۲۱۰۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

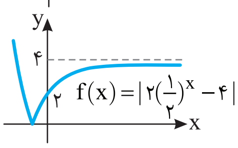
$$f(x)=\frac{|2^{x+1}-1|}{2^{x-1}}=\frac{|2^{x+1}-1|}{|2^{x-1}|}=|\frac{2^{x+1}-1}{2^{x-1}}|=|\frac{2^{x+1}}{2^{x-1}}-\frac{1}{2^{x-1}}|$$

$$=|4-\frac{2}{2^x}|=|4-2(\frac{1}{2})^x|=|2(\frac{1}{2})^x-4|$$

بنابراین نمودار تابع f به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:







۲۱۰۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

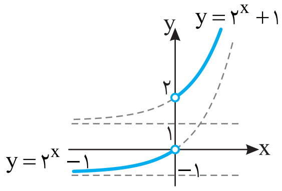
$$(fog)(x)=f(g(x))=3^{g(x)-2}=3^{x+2-2}=3^x$$

$$f(x)=3^{x-2}=\frac{1}{9}\times3^x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}\times(fog)(x)\Rightarrow(fog)(x)=9f(x)$$

۲۱۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}2^x+1 & x>0\\ 2^x-1 & x<0\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



پس برد تابع به‌صورت $(-1,0)\cup(2,+\infty)$ است.

۲۱۰۹- گزینهٔ ۴ در تابع $f(x)=۲^{x^۲}+۱$ برای $x=۱$ و $x=-۱$ مقدار تابع برابر ۳ است. پس تابع یک‌به‌یک نیست.

۲۱۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که باید $k>۰$ و

$$f(x)=۲\times۲^x\times(\frac{۱}{k})^x=۲\times(\frac{۲}{k})^x$$

بنابراین، چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$\frac{۲}{k}>۱\xrightarrow{k>۰}k<۲$$

بنابراین $۰<k<۲$.

۲۱۱۱- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض مسئله،

$$f(۰)=-\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^b-۶=-\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^b=\frac{۳}{۴}$$

$$a(\frac{۱}{۲})^{b-۲}=۳\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^{b-۳}=۶\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^{b-۳}-۶=۰\Rightarrow f(-۳)=۰$$

بنابراین نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۲۱۱۲- گزینهٔ ۲ چون نمودار تابع‌های f و g در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع‌اند، پس

$$f(-۱)=g(-۱)\Rightarrow ۲^{-a+b}=(\frac{۱}{۴})^{-۱-b}=۲^{-۲(-۱-b)}=۲^{۲(۱+b)}$$

بنابراین

$$-a+b=۲(۱+b)\Rightarrow a+b=-۲ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$f(۱)g(۱)=۴\Rightarrow ۲^{a+b}\times(\frac{۱}{۴})^{۱-b}=۴\Rightarrow ۲^{a+b}\times۲^{-۲(۱-b)}=۲^۲$$

$$۲^{a+۳b-۲}=۲^۲\Rightarrow a+۳b=۴ \qquad (۲)$$

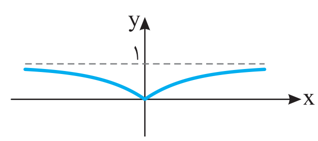
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-۵$ و $b=۳$، بنابراین $f(x)=۲^{-۵x+۳}$. اکنون فرض کنید $f^{-۱}(\frac{۱}{۱۲۸})=m$. در این صورت

$$f(m)=\frac{۱}{۱۲۸}\Rightarrow ۲^{-۵m+۳}=\frac{۱}{۱۲۸}=۲^{-۷}\Rightarrow -۵m+۳=-۷\Rightarrow m=۲$$

۲۱۱۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۱-۲^x & x\le۰\\ ۱-۲^{-x} & x>۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که

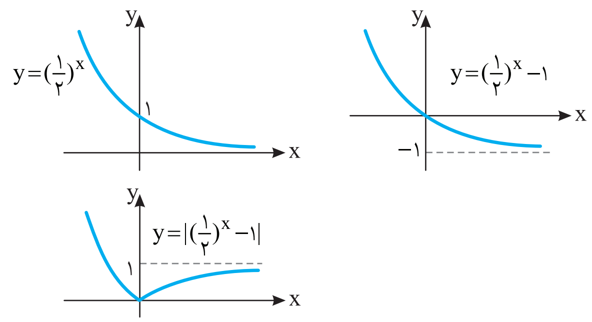
$$f(۱)=f(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

فقط گزینهٔ (۴) این شرط را دارد.

۲۱۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y=\frac{|۱-۲^x|}{۲^x}=\frac{|۱-۲^x|}{|۲^x|}=|\frac{۱-۲^x}{۲^x}|=|\frac{۱}{۲^x}-\frac{۲^x}{۲^x}|=|(\frac{۱}{۲})^x-۱|$$

بنابراین نمودار تابع به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:



۲۱۱۵- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $۲^{m-۲}+۱=s$. چون $f^{-۱}(s)=۲۶$، پس $f(۲۶)=s$. در نتیجه $f(۲۶)=۵(۲۶)-۱=۱۲۹$. اکنون می‌توان نوشت

$$s=۲^{m-۲}+۱=۱۲۹\Rightarrow ۲^{m-۲}=۱۲۸=۲^۷$$

بنابراین $m-۲=۷$، پس $m=۹$.

۲۱۱۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $g(x+۲)=۲^{x+۲-۱}=۲^{x+۱}$، بنابراین $f(۲^{x+۱})=۲^x+۱$.

$$f(۲^{x+۱})=۲^x+۱\Rightarrow f^{-۱}(۲^x+۱)=۲^{x+۱}$$

$$۲^x+۱=۹\Rightarrow ۲^x=۸=۲^۳\Rightarrow x=۳$$

بنابراین $f^{-۱}(۹)=۲^{۳+۱}=۱۶$.

۲۱۱۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$f(\frac{x}{۳})=۸^{\frac{x}{۳}}=۲^x,\quad g(x-۲)=۲^{۲(x-۲)+۵}=۲^{۲x+۱}$$

بنابراین

$$f(\frac{x}{۳})g(x-۲)=۲^x\times۲^{۲x+۱}=۲^{۳x+۱}=۲^{۳x}\times۲=۲\times۸^x=۲f(x)$$

۲۱۱۸- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=\frac{۲^x+۱}{۲^x+۲}=\frac{۲^x+۲}{۲^x+۲}+\frac{-۱}{۲^x+۲}=۱-\frac{۱}{۲^x+۲}$$

اکنون توجه کنید که برای هر x حقیقی، $۲^x>۰$. بنابراین

$$۲^x+۲>۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{۲^x+۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<-\frac{۱}{۲^x+۲}<۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}<۱-\frac{۱}{۲^x+۲}<۱$$

در نتیجه $\frac{۱}{۲}<f(x)<۱$.

۲۱۱۹- گزینهٔ ۴ می‌دانیم تابع‌های نمایی به شکل $f(x)=ka^x$ $(a>۰, a\ne۱)$، یک‌به‌یک هستند. در نتیجه تابع‌های $y=۳^{۱+۲x}$ و $y=۴^{۵-x}$ یک‌به‌یک هستند. تابع $f(x)=۲^{۳-|x|}$، یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر x حقیقی، $f(x)=f(-x)=۲^{۳-|x|}$. اکنون ثابت می‌کنیم تابع $y=۹^x+۲\times۳^{x+۱}$ یک‌به‌یک است. دقت کنید که $۹^x+۲\times۳^{x+۱}=(۳^x+۳)^۲-۹$. فرض می‌کنیم $f(x_۱)=f(x_۲)$. در نتیجه $(۳^{x_۱}+۳)^۲-۹=(۳^{x_۲}+۳)^۲-۹$. بنابراین $(۳^{x_۱}+۳)^۲=(۳^{x_۲}+۳)^۲$، چون $۳^{x_۱}+۳, ۳^{x_۲}+۳>۰$، پس

$$۳^{x_۱}+۳=۳^{x_۲}+۳\Rightarrow ۳^{x_۱}=۳^{x_۲}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

۲۱۲۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

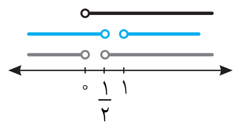
$$f(x)=k\times k^x\times(\frac{1}{2k-1})^x=k(\frac{k}{2k-1})^x$$

تابع f اکیداً نزولی است، پس باید

$$0<\frac{k}{2k-1}<1$$

$$\frac{k}{2k-1}>0\Rightarrow k>\frac{1}{2} \text{ یا } k<0$$

$$\frac{k}{2k-1}<1\Rightarrow\frac{k}{2k-1}-1<0\Rightarrow\frac{-k+1}{2k-1}<0\Rightarrow k>1 \text{ یا } k<\frac{1}{2}$$



پس $k>1$.

۲۱۲۱- گزینهٔ ۱ با فاکتورگیری از 3^x معادله را حل می‌کنیم

$$3^x(3+1)=108\Rightarrow 3^x\times4=108\Rightarrow 3^x=27=3^3\Rightarrow x=3$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۲۱۲۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$5^{x-3}=(\frac{1}{5})^{x^2}\Rightarrow 5^{x-3}=5^{-x^2}$$

$$x-3=-x^2\Rightarrow x^2+x-3=0$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر -1 است.

۲۱۲۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f^{-1}(5)=a\Rightarrow f(a)=5$$

$$2+3^{a-2}=5\Rightarrow 3^{a-2}=3\Rightarrow a-2=1\Rightarrow a=3$$

۲۱۲۴- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $2^x=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$t-\frac{2}{t}+15=0\Rightarrow t^2+15t-2=0$$

این معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. از طرف دیگر، معلوم است که معادلهٔ $2^x=a$ فقط وقتی جواب دارد که a مثبت باشد و البته اگر a مثبت باشد، این معادله فقط یک جواب دارد (که $\log_2 a$ است). بنابراین معادلهٔ اصلی فقط یک جواب دارد.

۲۱۲۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل $3\times3^{2x}-9\times3^x+5=0$ نوشت. اگر فرض کنیم $3^x=t$، این معادله می‌شود $3t^2-9t+5=0$. هر دو جواب این معادله مثبت‌اند و مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{9}{3}=3$. به این ترتیب $3^\alpha+3^\beta=t_1+t_2=3$.

۲۱۲۶- گزینهٔ ۲ از معادلهٔ $x+y=5$ به‌دست می‌آید $y=5-x$. با جای‌گذاری $5-x$ به جای y در معادلهٔ $2^x-2^y=4$، به‌دست می‌آید

$$2^x-2^{5-x}=4\Rightarrow 2^x-\frac{2^5}{2^x}=4\Rightarrow(2^x)^2-4(2^x)-32=0$$

$$(2^x-8)(2^x+4)=0\Rightarrow\begin{cases}2^x+4=0\Rightarrow 2^x=-4 & (\text{غ.ق.ق})\\ 2^x-8=0\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow x=3\end{cases}$$

$$y=5-x\xrightarrow{x=3}y=2$$

بنابراین $x-y=1$.

۲۱۲۷- گزینهٔ ۲ عددهایی که مخرج کسر را صفر کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس

$$|2^x-4|-3=0\Rightarrow 2^x-4=\pm3\Rightarrow 2^x=7, 2^x=1$$

هر یک از معادله‌های بالا فقط یک جواب دارند و این دو جواب متمایز هستند پس دامنهٔ تابع شامل دو عدد نیست.

۲۱۲۸- گزینهٔ ۴ چون $\frac{2}{3}=(\frac{3}{2})^{-1}$، پس نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$(\frac{3}{2})^{1-3x}<(\frac{3}{2})^{-(3+x)}$$

اکنون توجه کنید که چون $\frac{3}{2}>1$، پس $1-3x<-(3+x)$، بنابراین $x>2$.

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(2,+\infty)$ است.

۲۱۲۹- گزینهٔ ۳ باید نامعادله‌های $2^x-8\ge0$ و $81-3^x>0$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را به‌دست آوریم

$$2^x-8\ge0\Rightarrow 2^x\ge2^3\Rightarrow x\ge3,\quad 81-3^x>0\Rightarrow 3^x<3^4\Rightarrow x<4$$

بنابراین $D_f=[3,4)$. در نتیجه $a=3$، $b=4$ و $a+b=7$.

۲۱۳۰- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f برابر است با

$$D_f=\{x|-3^{2x+1}+4\times3^x-1>0\}$$

فرض می‌کنیم $3^x=t$، در نتیجه باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$-3t^2+4t-1>0\Rightarrow-(t-1)(3t-1)>0$$

جواب نامعادلهٔ بالا به‌صورت $\frac{1}{3}<t<1$ است. در نتیجه $\frac{1}{3}<3^x<1$. بنابراین

$$-1<x<0$$

۲۱۳۱- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$2^x(1+2+2^2)=5^x(2+5)\Rightarrow 2^x\times7=5^x\times7$$

$$2^x=5^x\Rightarrow(\frac{2}{5})^x=1\Rightarrow x=0$$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۳۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل $2^{|x|}=(2^{-1})^{x-x^2}=2^{x^2-x}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$|x|=x^2-x \qquad (1)$$

اگر $x\ge0$، این معادله می‌شود:

$$x=x^2-x\Rightarrow 2x=x^2\Rightarrow x=2, x=0$$

اگر $x<0$، معادلهٔ (۱) می‌شود:

$$-x=x^2-x\Rightarrow x^2=0$$

که چون $x<0$، جواب ندارد. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد: $x=0$ و $x=2$.

۲۱۳۳- گزینهٔ ۳ ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $3^x-1=8$، یعنی $3^x=9$. پس $x=2$. به این ترتیب، اگر در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم ۲ به‌دست می‌آید $f(8)=2^3+1=9$. از طرف دیگر،

$$f^{-1}(2)=a\Rightarrow f(a)=2$$

$$x^3+1=2\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$$

پس

$$f(3^1-1)=1^3+1\Rightarrow f(2)=2$$

در نتیجه $f^{-1}(2)=2$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $9+2=11$.

۲۱۳۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sqrt{5}-2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}$. بنابراین اگر فرض کنیم $(\sqrt{5}+2)^x=t$. معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$t+\frac{1}{t}=18\Rightarrow t^2-18t+1=0\Rightarrow t=9+4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^x\Rightarrow x=2$$

$$t=9-4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^x\Rightarrow x=-2$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -4 است.

۲۱۳۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2^{2x}+2^x\times3^x=2\times3^{2x}$$

اگر فرض کنیم $2^x=a$ و $3^x=b$، این معادله می‌شود:

$$a^2+ab=2b^2\Rightarrow a^2-b^2=b^2-ab\Rightarrow(a-b)(a+b)=b(b-a)$$

$$(a-b)(a+b+b)=0\Rightarrow(a-b)(a+2b)=0$$

بنابراین

$$a-b=0\Rightarrow2^x=3^x\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=1\Rightarrow x=0$$

$a+2b=0\Rightarrow2^x+2\times3^x=0$ جواب ندارد.

در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد: $x=0$.

۲۱۳۶- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $a=2^x$ و $b=3^y$، در نتیجه

$$\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-7\\ ab=\frac{1}{18}\Rightarrow b=\frac{1}{18a}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-7\Rightarrow\frac{1}{a}-18a=-7$$

$$18a^2-7a-1=0\Rightarrow(9a+1)(2a-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{9}=2^x \quad \text{جواب ندارد.}\\ a=\frac{1}{2}=2^x\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

۲۱۳۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

بنابراین نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1-2x}>(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-x-3}$$

چون $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$، پس

$$1-2x<-x-3\Rightarrow x>4$$

۲۱۳۸- گزینهٔ ۴ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$8(2^x)^2-6(2^x)+1\ge0$$

اگر فرض کنیم $2^x=t$، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$8t^2-6t+1\ge0\Rightarrow(2t-1)(4t-1)\ge0\Rightarrow t\ge\frac{1}{2}\ \text{یا}\ t\le\frac{1}{4}$$

$$t\ge\frac{1}{2}\Rightarrow2^x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow2^x\ge2^{-1}\Rightarrow x\ge-1$$

$$t\le\frac{1}{4}\Rightarrow2^x\le\frac{1}{4}\Rightarrow2^x\le2^{-2}\Rightarrow x\le-2$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty)$ است که همان $\mathbb{R}-(-2,-1)$ است. پس $a=-2$، $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-3$.

۲۱۳۹- گزینهٔ ۳ باید نامعادلهٔ $2^{x+1}-4^x\ge0$ را حل کنیم تا دامنهٔ تابع به‌دست آید

$$2^{x+1}-4^x\ge0\Rightarrow2\times2^x-(2^x)^2\ge0\Rightarrow2^x(2-2^x)\ge0$$

با توجه به اینکه $2^x>0$ نتیجه می‌شود

$$2-2^x\ge0\Rightarrow2^x\le2\Rightarrow x\le1$$

بنابراین $a=1$.

۲۱۴۰- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f مجموعهٔ xهایی است که

$$\frac{(\frac{1}{2})^x-4}{27-3^x}\ge0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x-4=0\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x=4=2^2\Rightarrow x=-2$$

$$27-3^x=0\Rightarrow3^x=27=3^3\Rightarrow x=3$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(\frac{1}{2})^x-4$		+	0	−		−	
$27-3^x$		+		+	0	−	
$\frac{(\frac{1}{2})^x-4}{27-3^x}$		+	0	−	ت ن	+	

بنابراین

$$D_f=(-\infty,-2]\cup(3,+\infty)=\mathbb{R}-(-2,3]$$

در نتیجه $a=-2$، $b=3$ و $a+b=1$.

۲۱۴۱- گزینهٔ ۱ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log90=\log(9\times10)=\log9+\log10=\log3^2+1=2\log3+1=2a+1$$

۲۱۴۲- گزینهٔ ۱ با استفاده از ویژگی $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log6-\log2\times\log_2 3=\log6-\log2\times\frac{\log3}{\log2}$$

$$=\log6-\log3=\log\frac{6}{3}=\log2$$

۲۱۴۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$. بنابراین $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. در نتیجه

$$\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)=-1$$

۲۱۴۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{3\sqrt{27\sqrt[3]{81}}}=3^{\frac{1}{4}}\times27^{\frac{1}{4\times2}}\times81^{\frac{1}{4\times2\times3}}$$

$$=3^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{3}{4\times2}}\times3^{\frac{4}{4\times2\times3}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}}=3^{\frac{6+9+4}{24}}=3^{\frac{19}{24}}$$

بنابراین

$$\log_3\sqrt[4]{3\sqrt{27\sqrt[3]{81}}}=\log_3 3^{\frac{19}{24}}=\frac{19}{24}\log_3 3=\frac{19}{24}$$

۲۱۴۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_4 5=\frac{\log 5}{\log 4}=\frac{\log 5}{2\log 2}=\frac12\times\frac{\log 5}{\log 2}=\frac12\log_2 5$$

در نتیجه باید حاصل عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$(\frac12)^{\frac12\log_2 5}=(2^{-1})^{\frac12\log_2 5}=2^{-\frac12\log_2 5}=(\underbrace{2^{\log_2 5}}_{5})^{-\frac12}=5^{-\frac12}=\frac{1}{\sqrt5}$$

۲۱۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $216=6^3=2^3\times3^3$، در نتیجه

$$\log 216=\log(2^3\times3^3)=\log2^3+\log3^3$$

$$=3\log2+3\log3=3x+3y$$

۲۱۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log5+\log20=\log(5\times20)=\log100=2$$

بنابراین $\log20=2-\log5=2-a$.

۲۱۴۸- گزینهٔ ۲ از دو طرف تساوی $2^x=3^y$ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log2^x=\log3^y\Rightarrow x\log2=y\log3$$

بنابراین

$$\frac{\log3}{\log2}=\frac{x}{y}\Rightarrow\log_2 3=\frac{x}{y}$$

در نتیجه $\log_8 9=\log_{2^3}3^2=\frac23\log_2 3=\frac{2x}{3y}$.

۲۱۴۹- گزینهٔ ۱ از تساوی $3^{\log_2 5}=b$ نتیجه می‌شود

$$\log_3 b=\log_2 5$$

از تساوی $2^{\log_5 3}=a$ نتیجه می‌شود

$$3^{\log_5 2}=a\Rightarrow\log_3 a=\log_5 2$$

بنابراین $\log_3 a\times\log_3 b=\log_5 2\times\log_2 5=1$.

۲۱۵۰- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $2\times2^x=5^x$ بازنویسی می‌کنیم. در نتیجه $(\frac52)^x=2$. بنابراین با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت

$$x=\log_{\frac52}2=\frac{1}{\log_2\frac52}=\frac{1}{\log_2 5-\log_2 2}=\frac{1}{\log_2 5-1}$$

۲۱۵۱- گزینهٔ ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$A=\log(20\times30\times50)=\log(3\times10^4)=\log3+\log10^4=a+4$$

۲۱۵۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{1}{\log_6 18}=\log_{18}6,\quad \frac{1}{\log_3 18}=\log_{18}3$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\log_{18}6+\log_{18}3=\log_{18}(3\times6)=1$$

۲۱۵۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $3+2\sqrt2=(1+\sqrt2)^2=(\frac{1}{\sqrt2-1})^2$.

بنابراین

$$\log_{(\sqrt2-1)}(3+2\sqrt2)=\log_{(\sqrt2-1)}(\frac{1}{\sqrt2-1})^2$$

$$=2\log_{(\sqrt2-1)}(\frac{1}{\sqrt2-1})=-2$$

۲۱۵۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}=\log_2(4^{\frac14}\times4^{\frac1{12}}\times2^{\frac1{24}})$$

$$=\log_2 2^{\frac24+\frac2{12}+\frac1{24}}=\log_2 2^{\frac{17}{24}}=\frac{17}{24}$$

$$\log_2\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{4}}}=\log_2(2^{\frac12}\times4^{\frac16}\times4^{\frac1{24}})$$

$$=\log_2 2^{\frac12+\frac26+\frac2{24}}=\log_2 2^{\frac{22}{24}}=\frac{22}{24}$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{17}{24}}{\frac{22}{24}}=\frac{17}{22}$.

۲۱۵۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\log_8 3=\log_{2^3}3=\frac13\log_2 3$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2^{3+\log_8 3}=2^{3+\frac13\log_2 3}=2^3\times2^{\frac13\log_2 3}=8\times(\underbrace{2^{\log_2 3}}_{3})^{\frac13}=8(3)^{\frac13}=8\sqrt[3]{3}$$

راه‌حل دوم

$$2^3\times2^{\log_8 3}=8\times3^{\log_8 2}=8\times3^{\log_{2^3}2}=8\times3^{\frac13}=8\sqrt[3]{3}$$

۲۱۵۶- گزینهٔ ۴ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log\sqrt[3]{6/4}=\log\sqrt[3]{\frac{64}{10}}=\log\sqrt[3]{\frac{32}{5}}=\frac13\log\frac{32}{5}=\frac13(\log32-\log5)$$

$$=\frac13(\log2^5-\log\frac{10}{2})=\frac13(5\log2-(\log10-\log2))$$

$$=\frac13(6\log2-\log10)=\frac13(6a-1)=2a-\frac13$$

۲۱۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_5 2=a\Rightarrow\frac{\log2}{\log5}=a\Rightarrow\log2=a\log5$$

$$\log_3 5=b\Rightarrow\frac{\log5}{\log3}=b\Rightarrow\log3=\frac{\log5}{b}$$

بنابراین

$$\log_{15}4=\frac{\log4}{\log15}=\frac{2\log2}{\log3+\log5}=\frac{2a\log5}{\frac{\log5}{b}+\log5}=\frac{2a}{\frac1b+1}=\frac{2ab}{b+1}$$

۲۱۵۸- گزینهٔ ۲ چون $385=5\times7\times11$، پس طرفین سه تساوی داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\log11+\log5+\log5+\log7+\log7+\log11=a+b+c$$

$$2(\log11+\log5+\log7)=a+b+c$$

$$2\log(11\times5\times7)=a+b+c\Rightarrow\log385=\frac{a+b+c}{2}$$

۲۱۵۹- گزینهٔ ۱ با توجه به خاصیت $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{1-\log_2 3}+\frac{1}{1-\log_3 2}=\frac{1}{1-\log_2 3}+\frac{1}{1-\frac{1}{\log_2 3}}$$

$$=\frac{1}{1-\log_2 3}+\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1}=\frac{1-\log_2 3}{1-\log_2 3}=1$$

۲۱۶۰- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $(۳^x)^۲-۳^x-۲=۰$ می‌نویسیم.

در نتیجه $(۳^x-۲)(۳^x+۱)=۰$، چون عبارت $۳^x+۱$ همواره مثبت است، نتیجه می‌شود

$$۳^x-۲=۰\Rightarrow ۳^x=۲\Rightarrow x=\log_۳ ۲$$

۲۱۶۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با توجه به اینکه

$$\log_c a+\log_c b=\log_c(ab)$$

داریم

$$A=\log_۵(\frac{۵}{۶}\times\frac{۶}{۷}\times\frac{۷}{۸}\times\cdots\times\frac{۱۲۴}{۱۲۵})=\log_۵\frac{۵}{۱۲۵}=\log_۵\frac{۱}{۲۵}=\log_۵ ۵^{-۲}=-۲$$

راه‌حل دوم با توجه به تساوی $\log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$ می‌توان نوشت

$$A=\log_۵ ۵-\log_۵ ۶+\log_۵ ۶-\log_۵ ۷+\log_۵ ۷-\log_۵ ۸+\cdots+\log_۵ ۱۲۴-\log_۵ ۱۲۵=\log_۵ ۵-\log_۵ ۱۲۵=۱-۳=-۲$$

۲۱۶۲- گزینهٔ ۱ چون $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$، پس

$$\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\log_۲ ۳}}=\frac{۱}{۱+\log_۳ ۲}=\frac{۱}{\log_۳ ۳+\log_۳ ۲}=\frac{۱}{\log_۳(۳\times۲)}=\frac{۱}{\log_۳ ۶}=\log_۶ ۳$$

۲۱۶۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲\log(۳+\sqrt{۵})=\log(۳+\sqrt{۵})^۲=\log(۹+۵+۶\sqrt{۵})=\log(۱۴+۶\sqrt{۵})$$

بنابراین

$$\log(۲۸+۱۲\sqrt{۵})-۲\log(۳+\sqrt{۵})=\log(۲۸+۱۲\sqrt{۵})-\log(۱۴+۶\sqrt{۵})$$
$$=\log\frac{۲۸+۱۲\sqrt{۵}}{۱۴+۶\sqrt{۵}}=\log ۲=k$$

۲۱۶۴- گزینهٔ ۲ به کمک تساوی $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log_۲ ۳\times\log_۳ ۵\times\log_۵ ۸=\frac{\log ۳}{\log ۲}\times\frac{\log ۵}{\log ۳}\times\frac{\log ۸}{\log ۵}=\frac{\log ۸}{\log ۲}=\frac{۳\log ۲}{\log ۲}=۳$$

۲۱۶۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a=۵^{\log ۲۰}=۵^{\log ۱۰+\log ۲}=۵^{۱+\log ۲}=۵\times۵^{\log ۲}=۵\times۲^{\log ۵}$$
$$b=۲^{\log ۵۰}=۲^{\log ۱۰+\log ۵}=۲^{۱+\log ۵}=۲\times۲^{\log ۵}$$

بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{۵\times۲^{\log ۵}}{۲\times۲^{\log ۵}}=\frac{۵}{۲}$.

۲۱۶۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\log ۱۵=\frac{\log_۳ ۱۵}{\log_۳ ۱۰}$. از طرف دیگر

$$\log_۳ ۱۵=\log_۳(۳\times۵)=\log_۳ ۳+\log_۳ ۵=۱+b$$
$$\log_۳ ۱۰=\log_۳(۲\times۵)=\log_۳ ۲+\log_۳ ۵$$
$$=\frac{۱}{\log_۲ ۳}+\log_۳ ۵=\frac{۱}{a}+b=\frac{۱+ab}{a}$$

بنابراین $\log ۱۵=\frac{۱+b}{\frac{۱+ab}{a}}=\frac{a(۱+b)}{۱+ab}$.

۲۱۶۷- گزینهٔ ۲ چون $\log_{a^x} b=\frac{۱}{x}\log_a b$، پس

$$\log_۸ ۱۰=a\Rightarrow\log_{۲^۳}(۲\times۵)=a\Rightarrow\frac{۱}{۳}\log_۲(۲\times۵)=a$$
$$\frac{۱}{۳}(\log_۲ ۲+\log_۲ ۵)=a\Rightarrow ۱+\log_۲ ۵=۳a\Rightarrow\log_۲ ۵=۳a-۱$$

بنابراین

$$\log_{۴۰} ۵۰=\frac{\log_۲ ۵۰}{\log_۲ ۴۰}=\frac{\log_۲(۲\times۵^۲)}{\log_۲(۲^۳\times۵)}=\frac{\log_۲ ۲+\log_۲ ۵^۲}{\log_۲ ۲^۳+\log_۲ ۵}$$
$$=\frac{۱+۲\log_۲ ۵}{۳+\log_۲ ۵}=\frac{۱+۲(۳a-۱)}{۳+۳a-۱}=\frac{۶a-۱}{۳a+۲}$$

۲۱۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a}\ ,\quad \log_{ab} x=\frac{\log x}{\log(ab)}$$

بنابراین

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}=۳\Rightarrow\frac{\frac{\log x}{\log a}}{\frac{\log x}{\log(ab)}}=۳\Rightarrow\frac{\log(ab)}{\log a}=۳$$
$$\frac{\log a+\log b}{\log a}=۳\Rightarrow ۱+\frac{\log b}{\log a}=۳\Rightarrow\log_a b=۲$$

بنابراین $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه $\log_a b+\log_b a=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$.

۲۱۶۹- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲^x)^۲-۸\times۲^x+۱۵=۰$$

بنابراین $(۲^x-۳)(۲^x-۵)=۰$، پس

$$\begin{cases}۲^x-۳=۰\Rightarrow ۲^x=۳\Rightarrow x=\log_۲ ۳\\ ۲^x-۵=۰\Rightarrow ۲^x=۵\Rightarrow x=\log_۲ ۵\end{cases}$$

چون $f(x)=\log_۲ x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس $\log_۲ ۵>\log_۲ ۳$، در نتیجه بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ مورد نظر $\log_۲ ۵$ است.

۲۱۷۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از دو طرف معادلهٔ $۲^x=۳^y$ در پایهٔ ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_۳ ۲^x=\log_۳ ۳^y\Rightarrow x\log_۳ ۲=y\log_۳ ۳\Rightarrow y=x\log_۳ ۲$$

در معادلهٔ $x+y=۱$ به جای y قرار می‌دهیم $x\log_۳ ۲$، در نتیجه

$$x+x\log_۳ ۲=۱\Rightarrow x(۱+\log_۳ ۲)=۱$$
$$x(\log_۳ ۳+\log_۳ ۲)=۱\Rightarrow x\log_۳ ۶=۱$$
$$x=\frac{۱}{\log_۳ ۶}\Rightarrow x=\log_۶ ۳$$

راه‌حل دوم

$$x+y=۱\Rightarrow y=۱-x$$
$$۲^x=۳^{۱-x}\Rightarrow ۲^x=\frac{۳}{۳^x}\Rightarrow ۶^x=۳\Rightarrow x=\log_۶ ۳$$

۲۱۷۱- گزینهٔ ۴ اگر $f^{-۱}(۸)=t$ ، آن‌گاه $f(t)=۸$ ، بنابراین

$$۳+۵\log(۲t-۳)=۸\Rightarrow\log(۲t-۳)=۱\Rightarrow ۲t-۳=۱۰\Rightarrow t=\frac{۱۳}{۲}$$

۲۱۷۲- گزینهٔ ۲ چون نمودار تابع f از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۳,۴)$ می‌گذرد، پس

$$f(۲)=۳\Rightarrow a+\log_{\frac{۱}{۲}}(۲b+۱)=۳ \qquad (۱)$$

$$f(۳)=۴\Rightarrow a+\log_{\frac{۱}{۲}}(۳b+۱)=۴ \qquad (۲)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(۲b+۱)-\log_{\frac{۱}{۲}}(۳b+۱)=-۱$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۲b+۱}{۳b+۱}=-۱\Rightarrow\frac{۲b+۱}{۳b+۱}=۲\Rightarrow b=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید:

$$a=۳-\log_{\frac{۱}{۲}}(-\frac{۱}{۲}+۱)=۳-\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}=۳-۱=۲$$

۲۱۷۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل دامنهٔ تابع به‌صورت $(-۳,+\infty)$ است. پس دامنهٔ تابع باید به شکل $(-\frac{b}{a},+\infty)$ باشد. بنابراین

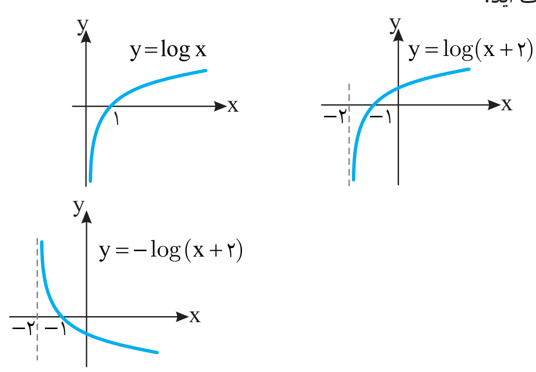
$$-\frac{b}{a}=-۳\Rightarrow b=۳a$$

همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,-۲)$ می‌گذرد. بنابراین

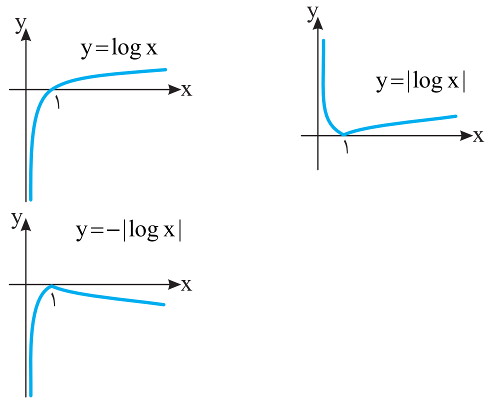
$$f(۰)=\log_{\frac{۱}{۳}}b=-۲\Rightarrow b=(\frac{۱}{۳})^{-۲}=۹$$

در نتیجه $a=۳$. بنابراین $ab=۲۷$.

۲۱۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log(x+۲)$ به‌دست آید. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\log(x+۲)$ به‌دست آید.



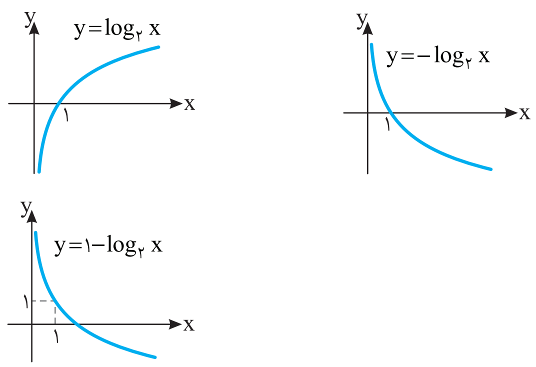
۲۱۷۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمت‌های پایین محور طول‌ها را حذف می‌کنیم. تا نمودار $y=|\log x|$ به‌دست آید. سپس نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-|\log x|$ رسم شود.



۲۱۷۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log_۲\frac{۲}{x}=\log_۲ ۲-\log_۲ x=۱-\log_۲ x$$

بنابراین نمودار تابع به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:



۲۱۷۷- گزینهٔ ۲ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$۱۰-x>۰\Rightarrow x<۱۰,\quad x-۲>۰\Rightarrow x>۲,\quad x-۲\neq۱\Rightarrow x\neq۳$$

پس دامنهٔ تابع $(۲,۱۰)-\{۳\}$ است که شامل شش عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است.

۲۱۷۸- گزینهٔ ۳ باید همواره $x^۲-۲mx+۴>۰$ ، چون ضریب $x^۲$ مثبت است، باید $\Delta<۰$.

$$\Delta=b^۲-۴ac<۰\Rightarrow(-۲m)^۲-۴\times(۱)\times۴<۰$$

$$۴m^۲-۱۶<۰\Rightarrow۴(m^۲-۴)<۰\Rightarrow|m|<۲\Rightarrow-۲<m<۲$$

۲۱۷۹- گزینهٔ ۳ با تغییرات دو مرحله اول به تابع $f(x)=۲^{x-۱}+۱$ می‌رسیم. با قرینه کردن نمودار تابع نسبت به خط $y=x$ ، به تابع وارون f می‌رسیم. ضابطهٔ تابع وارون f به‌صورت زیر پیدا می‌شود:

$$y=۱+۲^{x-۱}\Rightarrow۲^{x-۱}=y-۱\Rightarrow x-۱=\log_۲(y-۱)\Rightarrow x=\log_۲(y-۱)+۱$$

در نتیجه $f^{-۱}(x)=\log_۲(x-۱)+۱$.

۲۱۸۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $y=-\log_۲(x-۱)+۲$. در نتیجه

$$۲-y=\log_۲(x-۱)\Rightarrow۲^{۲-y}=x-۱$$

بنابراین $x=۲^{۲-y}+۱$ ، پس $f^{-۱}(x)=۲^{۲-x}+۱$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۳)=-\log_۲ ۲+۲=۱$ ، بنابراین $f^{-۱}(۱)=۳$. فقط گزینهٔ (۳) در این شرط صدق می‌کند.

۲۱۸۱- گزینهٔ ۴ چون $f^{-۱}(۳)=۲۹$، پس $f(۲۹)=۳$ در نتیجه

$$\log_{۳}(۲\times۲۹-k)=۳\Rightarrow ۵۸-k=۳^{۳}=۲۷\Rightarrow k=۳۱$$

۲۱۸۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f نیمساز ناحیهٔ اول را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(۲,۲)$ می‌گذرد. همچنین نمودار تابع f نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(-۱,۱)$ می‌گذرد. به این ترتیب

$$f(۲)=۲\Rightarrow \log_{۲}(۲a+b)=۲\Rightarrow ۲a+b=۴ \qquad (۱)$$

$$f(-۱)=۱\Rightarrow \log_{۲}(-a+b)=۱\Rightarrow -a+b=۲ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۲}{۳}$ و $b=\frac{۸}{۳}$.

۲۱۸۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=(-۲,+\infty)$، پس $x=-۲$ باید ریشهٔ عبارت $bx+c$ باشد. بنابراین

$$-۲b+c=۰ \quad (۱)$$

از طرف دیگر $f(۰)=-۱$ و $f(-۱)=۰$. پس

$$f(۰)=\log_a c=-۱\Rightarrow c=\frac{۱}{a} \quad (۲)$$

$$f(-۱)=\log_a(-b+c)=۰\Rightarrow -b+c=۱ \quad (۳)$$

از معادلات (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $b=۱$ و $c=۲$. همچنین از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $a+b+c=\frac{۷}{۲}$.

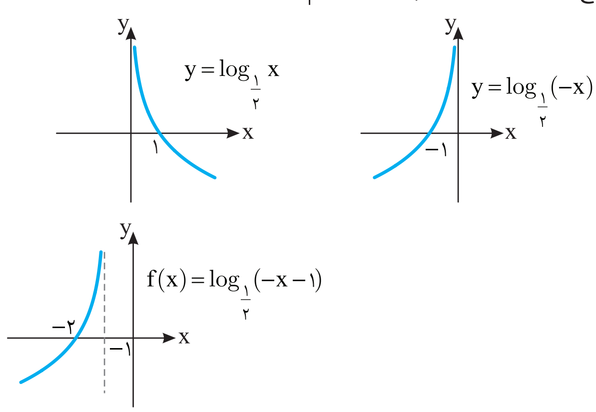
۲۱۸۴- گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها از معادلهٔ $f(x)=۰$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\log_{۲}(۳x-۵)=۰\Rightarrow ۳x-۵=۱\Rightarrow x=۲$$

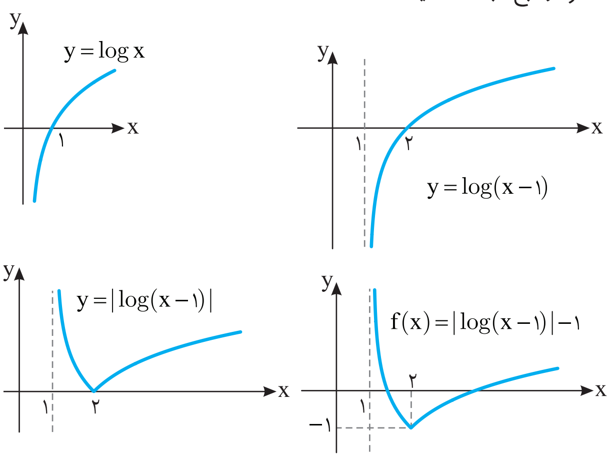
پس نقطهٔ برخورد نمودار f با محور طول‌ها $A(۲,۰)$ است. بنابراین نقطهٔ برخورد نمودار تابع وارون f با محور عرض‌ها $B(۰,۲)$ است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(۲-۰)^{۲}+(۰-۲)^{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

۲۱۸۵- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}}x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(-x)$ به‌دست بیاید. سپس آن را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(-(x+۱))=\log_{\frac{۱}{۲}}(-x-۱)$ به‌دست آید. مراحل رسم نمودار تابع f را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم:



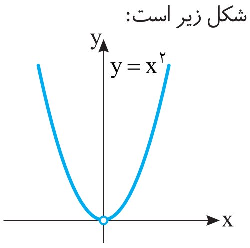
۲۱۸۶- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\log(x-۱)|$ به‌دست آید و آن قسمت‌ها را حذف می‌کنیم. در آخر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست آید.



۲۱۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی مخالف صفر است و با توجه به اینکه $a^{\log_a g(x)}=g(x)$

$$f(x)=۲^{\log_{۲}x^{۲}}=x^{۲},\quad x\neq ۰$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۱۸۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه عبارت $\log_{(x-۱)}(۱۶-x^{۲})$ معنادار باشد، باید

$$۱۶-x^{۲}>۰\Rightarrow x^{۲}<۱۶\Rightarrow -۴<x<۴,\ x-۱>۰\Rightarrow x>۱,\ x-۱\neq۱\Rightarrow x\neq۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=(۱,۴)-\{۲\}$ است، پس $a=۱$، $b=۴$ و $c=۲$ و در نتیجه $a+b+c=۷$.

۲۱۸۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$y=\frac{۴-۲^{x+۱}}{۲^{x}-۱}\Rightarrow y\times۲^{x}-y=۴-۲^{x+۱}$$

$$۲^{x}(y+۲)=۴+y\Rightarrow ۲^{x}=\frac{۴+y}{y+۲}\Rightarrow x=\log_{۲}(\frac{۴+y}{y+۲})$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\log_{۲}(\frac{۴+x}{x+۲})$.

۲۱۹۰- گزینهٔ ۲ برای محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون تابع داده شده، x را برحسب y حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{\log x}{۱+\log x}\Rightarrow y+y\log x=\log x\Rightarrow (y-۱)\log x=-y$$

$$\log x=\frac{y}{۱-y}\Rightarrow x=۱۰^{\frac{y}{۱-y}}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=۱۰^{\frac{x}{۱-x}}$.

۲۱۹۱- گزینهٔ ۳ کافی است معادلهٔ $x^۲-۳x=x$ را حل کنیم:

$$x^۲-۴x=۰\Rightarrow x=۰,\ x=۴$$

واضح است که $x=۰$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۹۲- گزینهٔ ۱ معادله را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_۲(۱۲b-۲۱)-\log_۲(b^۲-۳)=\log_۲(\frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳})=۲$$

در نتیجه

$$\frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳}=۲^۲=۴\Rightarrow ۴b^۲-۱۲=۱۲b-۲۱$$

بنابراین

$$۴b^۲-۱۲b+۹=(۲b-۳)^۲=۰$$

بنابراین $b=\frac{۳}{۲}$. اما به ازای $b=\frac{۳}{۲}$ هیچ‌یک از عبارت‌های $\log_۲(۱۲b-۲۱)$ و $\log_۲(b^۲-۳)$ معنادار نیست، بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۱۹۳- گزینهٔ ۱ طبق تعریف لگاریتم

$$\log_۲(\log_۳(x-۱))=۵\Rightarrow \log_۳(x-۱)=۲^۵=۳۲$$

$$x-۱=۳^{۳۲}\Rightarrow x=۳^{۳۲}+۱$$

۲۱۹۴- گزینهٔ ۴ چون $\log_{a^k} b=\frac{۱}{k}\log_a b$. پس معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\log_{۲^۲} x+\log_{۲^۴} x^۲+\log_{۲^۶} x^۳=۹$$

$$\frac{۱}{۲}\log_۲ x+\frac{۲}{۴}\log_۲ x+\frac{۳}{۶}\log_۲ x=۹$$

$$\frac{۳}{۲}\log_۲ x=۹\Rightarrow \log_۲ x=۶\Rightarrow x=۲^۶=۶۴$$

۲۱۹۵- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $\log_۳ x=t$، در نتیجه $\log_x ۳=\frac{۱}{t}$.

بنابراین به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$t-\frac{۶}{t}+۱=۰\Rightarrow t^۲+t-۶=۰\Rightarrow (t-۲)(t+۳)=۰\Rightarrow t=-۳,\ t=۲$$

پس

$$\log_۳ x=-۳\Rightarrow x=۳^{-۳}$$

$$\log_۳ x=۲\Rightarrow x=۳^۲$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۲۱۹۶- گزینهٔ ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+۲)$ و $\log(۳-x)$ بامعنا باشند و نیز $\log(۳-x)\neq۰$، پس

$$D_f=\{x|x+۲>۰,\ ۳-x>۰,\ \log(۳-x)\neq۰\}$$

اگر $\log(۳-x)=۰$، آن‌گاه $x=۲$. بنابراین دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-۲,۳)-\{۲\}$ است.

۲۱۹۷- گزینهٔ ۳ دامنهٔ توابع f و g به شکل زیر هستند:

$$x^۲>۰\Rightarrow x\neq۰\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\},\quad x-۱\neq۰\Rightarrow x\neq۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

بنابراین دامنهٔ تابع gof طبق تعریف به شکل زیر است:

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f,\ f(x)\in D_g\}=\{x|x\neq۰,\ \log x^۲\neq۱\}$$

$$=\{x|x\neq۰,\ x\neq\pm\sqrt{۱۰}\}=\mathbb{R}-\{۰,\pm\sqrt{۱۰}\}$$

بنابراین ۳ عدد در دامنهٔ تابع gof قرار ندارند.

۲۱۹۸- گزینهٔ ۲ از نامعادلهٔ $\log(x+۱)>\log ۳$ نتیجه می‌شود $x+۱>۳$ و در نتیجه $x>۲$. واضح است که عبارت $\log(x+۱)$ به ازای $x>-۱$ بامعنا است. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(۲,+\infty)$ است.

۲۱۹۹- گزینهٔ ۴ برای اینکه $\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)$ بامعنا باشد، باید $x-۱>۰$، یعنی $x>۱$. از طرف دیگر،

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)>۱=\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}\Rightarrow x-۱<\frac{۱}{۲}\Rightarrow x<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $۱<x<\frac{۳}{۲}$.

۲۲۰۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $۱۶-x^۲>۰$ تا عبارت $\log(۱۶-x^۲)$ معنادار باشد. بنابراین

$$x^۲<۱۶\Rightarrow -۴<x<۴$$

از طرف دیگر،

$$\log(۱۶-x^۲)<\log ۱۵\Rightarrow ۱۶-x^۲<۱۵\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-۴,-۱)\cup(۱,۴)$ است که چهار عدد صحیح ±۳ و ±۲ در آن قرار دارند.

۲۲۰۱- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_۹(۲x+۱)-\log_۹(x-۱)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \log_۹(\frac{۲x+۱}{x-۱})=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲x+۱}{x-۱}=۹^{\frac{۱}{۲}}=۳\Rightarrow ۲x+۱=۳x-۳\Rightarrow x=۴$$

۲۲۰۲- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log(\frac{x}{x+۱})=\log(\log ۲)$$

در نتیجه

$$\frac{x}{x+۱}=\log ۲\Rightarrow x=x\log ۲+\log ۲$$

$$x(۱-\log ۲)=\log ۲\Rightarrow x(\log ۱۰-\log ۲)=\log ۲\Rightarrow x\log ۵=\log ۲$$

$$x=\frac{\log ۲}{\log ۵}\Rightarrow x=\log_۵ ۲$$

۲۲۰۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\log_۲(۱۴+\log_۴(x-۱))=۴\Rightarrow ۱۴+\log_۴(x-۱)=۲^۴=۱۶$$

$$\log_۴(x-۱)=۲\Rightarrow x-۱=۴^۲=۱۶\Rightarrow x=۱۷$$

۲۲۰۴- گزینهٔ ۲ چون $\log_{a^k} b=\frac{1}{k}\log_a b$، پس معادلـهٔ مورد نظر می‌شود

$$\log_{2^2} x+\log_{2^4} x+\log_{2^6} x=\frac{11}{3}$$
$$\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{6}\log_2 x=\frac{11}{3}$$
$$\frac{11}{12}\log_2 x=\frac{11}{3}\Rightarrow\log_2 x=4\Rightarrow x=2^4=16$$

۲۲۰۵- گزینهٔ ۲ فـرض می‌کنیم $\log_3 x=t$. در ایـن صـورت $\log_x 3=\frac{1}{t}$. در نتیجه $\frac{1}{\log_x 3}=\log_3 x=t$. بنابراین، معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید

$$t-\frac{12}{t}=1\Rightarrow t^2-12=t\Rightarrow t^2-t-12=0$$
$$(t-4)(t+3)=0\Rightarrow t=4\ ,\ t=-3$$

در نتیجه

$$\log_3 x=4\Rightarrow x=3^4=81,\quad \log_3 x=-3\Rightarrow x=3^{-3}=\frac{1}{27}$$

۲۲۰۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $\log_2 x=t$، آن‌گاه

$$\log_8 x=\log_{2^3} x=\frac{1}{3}\log_2 x=\frac{1}{3}t$$
$$\log_{\frac{1}{8}} x=\log_{8^{-1}} x=-\log_8 x=-\frac{1}{3}t$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$t(\frac{1}{3}t)-t+\frac{1}{3}t-1=0\Rightarrow\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3}t-1=0$$
$$t^2-2t-3=0\Rightarrow(t-3)(t+1)=0\Rightarrow t=-1, t=3$$

بنابراین

$$t=-1\Rightarrow\log_2 x=-1\Rightarrow x=2^{-1}=\frac{1}{2}$$
$$t=3\Rightarrow\log_2 x=3\Rightarrow x=2^3=8$$

در نتیجه، حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۴ است.

۲۲۰۷- گزینهٔ ۱ دستگاه به شکل $\begin{cases}\log x+\log y=3\\ 2\log x-3\log y=1\end{cases}$ است. طرفین معادلهٔ اول را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین دو معادله را جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}3\log x+3\log y=9\\ 2\log x-3\log y=1\end{cases}\Rightarrow 5\log x=10\Rightarrow\log x=2\Rightarrow x=100$$

بنابراین

$$\log x+\log y=3\Rightarrow 2+\log y=3\Rightarrow\log y=1\Rightarrow y=10$$

در نتیجه $x-2y=100-20=80$.

۲۲۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=\log_{3^{-1}}(2x-1)=-\log_3(2x-1)$$

بنابراین نامعادله‌های مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$-3\le-\log_3(2x-1)\le-2\Rightarrow 2\le\log_3(2x-1)\le 3$$

اکنون توجه کنید که

$$\log_3 9=2\le\log_3(2x-1)\le 3=\log_3 27$$
$$9\le 2x-1\le 27\xrightarrow{+1}10\le 2x\le 28\xrightarrow{\div 2}5\le x\le 14$$

بنابرایـن $5\le x\le 14$ (توجـه کنیـد کـه در ایـن محـدوده $2x-1>0$). تعداد عددهای صحیح در این محدوده ده تا $(5,6,7,\dots,14)$ است.

۲۲۰۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\log_2(1+3x)<\log_2(x+7)\Rightarrow 1+3x<x+7\Rightarrow x<3$$

از طـرف دیگر، بایـد $1+3x>0$ و $x+7>0$. در نتیجـه $x>-\frac{1}{3}$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $(-\frac{1}{3},3)$ است.

۲۲۱۰- گزینهٔ ۲ برای اینکه $\log_3(x+2)$ بامعنا باشد، باید $x+2>0$، یعنی $x>-2$. از طرف دیگر، باید

$$1-\log_3(x+2)\ge 0\Rightarrow\log_3(x+2)\le 1=\log_3 3\Rightarrow x+2\le 3\Rightarrow x\le 1$$

پس دامنهٔ f بازهٔ $(-2,1]$ است.

۲۲۱۱- گزینهٔ ۴ توجـه کنید کـه $\log_5 25=2$. در نتیجـه معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\log_4(28x-6)-\log_4(x-1)=2\Rightarrow\log_4(\frac{28x-6}{x-1})=2$$

در نتیجه

$$\frac{28x-6}{x-1}=4^2=16\Rightarrow 28x-6=16x-16\Rightarrow 12x=-10\Rightarrow x=\frac{-10}{12}=\frac{-5}{6}$$

اما به ازای $x=\frac{-5}{6}$ هیچ یک از دو عبارت $\log_4(28x-6)$ و $\log_4(x-1)$ معنادار نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۲۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$2\log_x(2x-1)=1\Rightarrow\log_x(2x-1)^2=1$$

بنابراین

$$(2x-1)^2=x\Rightarrow 4x^2-4x+1=x$$
$$4x^2-5x+1=0\Rightarrow(4x-1)(x-1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}, x=1$$

اکنون توجه کنید که اگر $x=1$، پایهٔ لگاریتم داده شـده در صورت مسئله برابر ۱ می‌شـود که ممکن نیسـت و اگر $x=\frac{1}{4}$، آن‌گاه $2x-1=-\frac{1}{2}$، که باز هم ممکن نیست، زیرا لگاریتم عددهای منفی تعریف نمی‌شود. بنابراین هیچ‌یک از مقدارهای به‌دست آمده برای x قابل قبول نیستند و معادلهٔ مورد نظر جواب ندارد.

۲۲۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_4(x^2-6x+9)=\log_{2^2}(x-3)^2=\frac{2}{2}\log_2|x-3|=\log_2|x-3|$$

در نتیجه مسئله به حل معادلهٔ زیر منجر می‌شود

$$\log_2(x+3)+\log_2|x-3|=\log_2(x+3)|x-3|=4$$

بنابراین $(x+3)|x-3|=2^4=16$. اکنون می‌توان گفت

$$x>3\Rightarrow(x+3)(x-3)=16\Rightarrow x^2-9=16$$
$$x^2=25\Rightarrow x=5\ , x=-5\ (\text{غ.ق.ق})$$
$$x<3\Rightarrow(x+3)(3-x)=16\Rightarrow 9-x^2=16\Rightarrow x^2=-7\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر فقط یک جواب دارد.

۲۲۱۴- گزینهٔ ۲ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_5 x+\log_{\frac{1}{5^2}} x-2\log_{5^2} x=\log_2 5^2$$

$$\log_5 x+2\log_5 x-2\times\frac{1}{2}\log_5 x=2\log_2 5$$

$$\log_5 x=\log_2 5\Rightarrow x=5^{\log_2 5}$$

۲۲۱۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $\log_2 x=t$، آن‌گاه $\log_2 x^2=2t$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+2t}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1+2t-(1+t)}{(1+t)(1+2t)}=\frac{1}{6}$$

$$6t=1+3t+2t^2\Rightarrow 2t^2-3t+1=0\Rightarrow t=1,\ t=\frac{1}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$t=1\Rightarrow\log_2 x=1\Rightarrow x=2$$

$$t=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

بنابراین مجموع مربع‌های جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $2^2+\sqrt{2}^2=6$ است.

۲۲۱۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم:

$$\log x^{(8-\log x)}=\log(\frac{1}{x^2})\Rightarrow(8-\log x)\log x=-2\log x$$

$$\begin{cases}\log x=0\Rightarrow x=10^0=1\\ 8-\log x=-2\Rightarrow\log x=10\Rightarrow x=10^{10}\end{cases}$$

راه‌حل دوم معادله را به‌صورت $x^2\times x^{8-\log x}=1$ یا $x^{10-\log x}=1$ می‌نویسیم. با توجه به اینکه x عددی مثبت است، دو حالت وجود دارد: پایه در عبارت سمت چپ ۱ باشد، یعنی $x=1$ یا توان در عبارت سمت چپ صفر باشد، یعنی $\log x=10$، پس $x=10^{10}$.

۲۲۱۷- گزینهٔ ۲ از معادلهٔ $\log_2 x+\log_2 y=4$ به‌دست می‌آید

$$\log_2(xy)=4\Rightarrow xy=2^4=16$$

از معادلهٔ $x+y=10$ به‌دست می‌آید

$$y=10-x$$

با جای‌گذاری $10-x$ به جای y در معادلهٔ $xy=16$ نتیجه می‌شود

$$x(10-x)=16\Rightarrow x^2-10x+16=0\Rightarrow(x-2)(x-8)=0$$

$$x=2\Rightarrow y=8,\quad x=8\Rightarrow y=2$$

در هر صورت $x^2+y^2=68$.

۲۲۱۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\Rightarrow 2x-1<x+1\Rightarrow x<2$$

از طرف دیگر، عبارت $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ به‌ازای $x>\frac{1}{2}$ و عبارت $\log(x+1)$ به‌ازای $x>-1$ معنادار است. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(\frac{1}{2},2)$ است.

۲۲۱۹- گزینهٔ ۴ نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{1-\log x+1+\log x}{(1-\log x)(1+\log x)}>2\Rightarrow\frac{2}{1-(\log x)^2}>2\Rightarrow\frac{1}{1-(\log x)^2}>1$$

$$\frac{1}{1-(\log x)^2}-1>0\Rightarrow\frac{1-1+(\log x)^2}{1-(\log x)^2}>0\Rightarrow\frac{(\log x)^2}{1-(\log x)^2}>0$$

بنابراین باید $(\log x)^2\neq0$ و $1-(\log x)^2>0$:

$$(\log x)^2\neq0\Rightarrow x\neq1,\quad(\log x)^2<1\Rightarrow|\log x|<1$$

$$-1<\log x<1\Rightarrow\frac{1}{10}<x<10$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(\frac{1}{10},10)-\{1\}$ است.

۲۲۲۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$D_f=\{x|x\neq-3,\frac{3x-1}{x+3}>0,\log(\frac{3x-1}{x+3})\geq0\}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{3x-1}{x+3}>0\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$$

$$\log(\frac{3x-1}{x+3})\geq0\Rightarrow\frac{3x-1}{x+3}\geq1\Rightarrow\frac{2(x-2)}{x+3}\geq0\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$$

بنابراین $D_f=(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$. در نتیجه عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع f نیستند، ۳-، ۲-، ۱-، صفر و ۱ هستند.

۲۲۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}=(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2x}=(\frac{1}{3})^x=\frac{1}{3^x}$.

اکنون نقطهٔ تقاطع نمودارها را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$3^x+\frac{8}{3}=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}\Rightarrow 3^x+\frac{8}{3}=\frac{1}{3^x}\xrightarrow{t=3^x}t+\frac{8}{3}=\frac{1}{t}$$

$$\xrightarrow{\times 3t}3t^2+8t=3\Rightarrow 3t^2+8t-3=0$$

$$(3t-1)(t+3)=0\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=3\\ t=-3\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

$A(-1,3)$ نقطهٔ مورد نظر است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(-1,3)$ و $B(-1,1)$ را به‌دست آوریم که برابر است با $AB=\sqrt{(-1+1)^2+(3-1)^2}=2$.

ریاضی - ۹۶

۲۲۲۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $(\frac{1}{2})^{2x}=\frac{1}{2^{2x}}=\frac{1}{4^x}$. اکنون نقطهٔ A را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$4^x=(\frac{1}{2})^{2x}+\frac{3}{2}\Rightarrow 4^x=\frac{1}{4^x}+\frac{3}{2}\xrightarrow{t=4^x}t=\frac{1}{t}+\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2t}2t^2=2+3t\Rightarrow 2t^2-3t-2=0$$

$$(2t+1)(t-2)=0\Rightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{2}\ (\text{غ.ق.ق})\\ t=2\Rightarrow 4^x=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2\end{cases}$$

$A(\frac{1}{2},2)$ نقطهٔ مورد نظر است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(\frac{1}{2},2)$ و $B(-\frac{1}{2},1)$ را به‌دست آوریم که برابر است با $AB=\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۲۲۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از نقاط $(2,6)$ و $(12,10)$ می‌گذرد، پس $f(2)=6$ و $f(12)=10$. بنابراین

$$f(2)=a+\log_2(2b-4)=6\Rightarrow \log_2(2b-4)=6-a$$

$$f(12)=a+\log_2(12b-4)=10\Rightarrow \log_2(12b-4)=10-a$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_2(12b-4)-\log_2(2b-4)=4\Rightarrow \log_2(\frac{12b-4}{2b-4})=4$$

$$\frac{12b-4}{2b-4}=16\Rightarrow 12b-4=32b-64\Rightarrow 20b=60\Rightarrow b=3$$

بنابراین $\log_2(2b-4)=\log_2(6-4)=1=6-a\Rightarrow a=5$

ریاضی - ۹۶

۲۲۲۴- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع به‌صورت $\{x|ax+b>0\}$ است. جواب نامعادلهٔ اخیر به‌صورت $(-\frac{b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,-\frac{b}{a})$ است. چون تابع فقط در بازهٔ $(-\frac{1}{2},+\infty)$ تعریف شده است، پس $-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=2b \quad (1)$

از طرف دیگر، $f(4)=2\Rightarrow \log_3(4a+b)=2\Rightarrow 4a+b=9 \quad (2)$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=2$ و $b=1$. به این ترتیب

$$f(x)=\log_3(2x+1)$$

و در نتیجه $f(-\frac{4}{9})=\log_3(-\frac{8}{9}+1)=\log_3\frac{1}{9}=-2$.

ریاضی - ۹۴

۲۲۲۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{0/25}=\sqrt[3]{(\frac{5}{10})^2}=\sqrt[3]{(\frac{1}{2})^2}=2^{-\frac{2}{3}}$$

از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A=\log_8(2\sqrt[3]{0/25})=\log_{2^3}(2\times 2^{-\frac{2}{3}})=\log_{2^3}2^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\log_2 2=\frac{1}{9}$$

بنابراین $\log_4(\frac{1}{A}-1)=\log_4(9-1)=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$

ریاضی - ۹۰

۲۲۲۶- گزینهٔ ۲ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\log(6-2\sqrt{5})+2\log(1+\sqrt{5})=\log(6-2\sqrt{5})+\log(1+\sqrt{5})^2$$

$$=\log(6-2\sqrt{5})+\log(6+2\sqrt{5})=\log((6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5}))$$

$$=\log(36-20)=\log 16=4\log 2=4k$$

تجربی - ۹۰

۲۲۲۷- گزینهٔ ۴ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>2$. معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\log(x-2)=\log(x+10)\Rightarrow \log(x-2)^2=\log(x+10)$$

$$(x-2)^2=x+10\Rightarrow x^2-5x-6=0\Rightarrow x=-1 \text{ (غ.ق.ق)}\ ,\ x=6$$

بنابراین $\log_4(x+2)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$.

ریاضی - ۸۵

۲۲۲۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>\frac{5}{3}$. از معادلهٔ داده شده مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_5(2x-1)+\log_5(3x-5)=1\Rightarrow \log_5((2x-1)(3x-5))=1$$

$$(2x-1)(3x-5)=5\Rightarrow 6x^2-13x=0\Rightarrow x=0 \text{ (غ.ق.ق)}\ ,\ x=\frac{13}{6}$$

بنابراین $\log_2(6x+3)=\log_2(13+3)=\log_2 2^4=4$.

ریاضی - ۸۶

۲۲۲۹- گزینهٔ ۳ مقدار x را از معادلهٔ داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\log_3(x^2-1)=1+\log_3(x+3)\Rightarrow \log_3(x^2-1)-\log_3(x+3)=1$$

$$\log_3(\frac{x^2-1}{x+3})=1\Rightarrow \frac{x^2-1}{x+3}=3\Rightarrow x^2-3x-10=0\Rightarrow \begin{cases}x=5\\ x=-2\end{cases}$$

اگر $x=-2$، آن‌گاه $x-3<0$ و $\log_4(x-3)$ تعریف نمی‌شود و اگر $x=5$، آن‌گاه $\log_4(x-3)=\log_4 2=\frac{1}{2}$.

ریاضی - ۸۸

۲۲۳۰- گزینهٔ ۳ از معادلهٔ $\log y=2\log 3+\log x$ به‌دست می‌آید

$$\log y-\log x=\log 9\Rightarrow \log\frac{y}{x}=\log 9\Rightarrow \frac{y}{x}=9\Rightarrow y=9x$$

در معادلهٔ $2^{x-7}\times 4^{x+y}=1$ به جای y قرار می‌دهیم $9x$، در نتیجه

$$2^{x-7}\times 4^{x+9x}=1\Rightarrow 2^{x-7}\times 2^{20x}=1\Rightarrow 2^{21x-7}=1$$

$$21x-7=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3$$

تجربی - ۹۶

۲۲۳۱- گزینهٔ ۲ دو نمودار در نقطه‌ای به طول -1 متقاطع هستند، پس

$$f(-1)=g(-1)\Rightarrow 3^{b-a}=9=3^2\Rightarrow b-a=2 \quad (1)$$

از طرف دیگر $f(2)=\frac{1}{3}$، پس

$$3^{2a+b}=\frac{1}{3}=3^{-1}\Rightarrow 2a+b=-1 \quad (2)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-1$ و $b=1$. پس $f(x)=3^{-x+1}$. اکنون فرض می‌کنیم $f^{-1}(27)=m$.

در این صورت

$$f(m)=27\Rightarrow 3^{-m+1}=27\Rightarrow -m+1=3\Rightarrow m=-2$$

ریاضی - ۹۵

۲۲۳۲- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow ab^0=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$f(-2)=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{3}{2}b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{3}{2b^2}=\frac{3}{32}\Rightarrow b^2=16$$

چون مقدار مثبت b مورد نظر است، پس $b=4$ و $f(x)=\frac{3}{2}\times 4^x$.

بنابراین

$$f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\times 4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times(2^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times 8=12$$

تجربی - ۹۱

۲۲۳۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از دو نقطهٔ $(5,11)$ و $(21,15)$ می‌گذرد، پس $f(5)=11$ و $f(21)=15$. بنابراین

$$f(5)=a+\log_2(15+b)^2=11\Rightarrow a+2\log_2(15+b)=11$$

$$\log_2(15+b)=\frac{11-a}{2}$$

$$f(21)=a+\log_2(63+b)^2=15\Rightarrow a+2\log_2(63+b)=15$$

$$\log_2(63+b)=\frac{15-a}{2}$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_2(63+b)-\log_2(15+b)=2\Rightarrow \log_2\left(\frac{63+b}{15+b}\right)=2$$

$$\frac{63+b}{15+b}=4\Rightarrow 63+b=60+4b\Rightarrow 3b=3\Rightarrow b=1$$

بنابراین

$$a+\log_2(15+1)^2=11\Rightarrow a=3$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۲۳۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع محور x را در نقطه‌ای به طول -1 قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(-1,0)$ عبور می‌کند. همچنین نمودار تابع نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(1,-1)$ عبور می‌کند. در نتیجه

$$f(-1)=0\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(-a+b)=0\Rightarrow -a+b=1 \qquad (1)$$

$$f(1)=-1\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(a+b)=-1\Rightarrow a+b=2 \qquad (2)$$

بنابراین از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{1}{2}$ و $b=\frac{3}{2}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۲۲۳۵- گزینهٔ ۴ از معادلهٔ داده شده مقدار x را می‌یابیم:

$$\log(x-2)=2\log 2-\log(x-4)\Rightarrow \log(x-2)+\log(x-4)=\log 4$$

$$\log((x-2)(x-4))=\log 4\Rightarrow (x-2)(x-4)=4$$

$$x^2-6x+4=0\Rightarrow x=3-\sqrt{5}\ (\text{غ.ق.ق})\ ,\ x=3+\sqrt{5}$$

بنابراین $\log_5(x-3)=\log_5(3+\sqrt{5}-3)=\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$.

ریاضی - ۸۷

۲۲۳۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $A^2=(3^a)^2=3^{2a}$.

بنابراین

$$\log_3(9A^2)=\log_3(3^2\times 3^{2a})=\log_3 3^{(2+2a)}$$
$$=(2+2a)\log_3 3=2+2a$$

راه‌حل دوم از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\log_3 A=a$. پس

$$\log_3(9A^2)=\log_3(3^2A^2)=\log_3(3A)^2=2\log_3(3A)$$
$$=2(\log_3 3+\log_3 A)=2(1+a)=2+2a$$

ریاضی - ۹۱

۲۲۳۷- گزینهٔ ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_x(3x+8)=2-\log_x(x-6)\Rightarrow \log_x(3x+8)+\log_x(x-6)=2$$

$$\log_x((3x+8)(x-6))=2\Rightarrow (3x+8)(x-6)=x^2$$

$$3x^2-10x-48=x^2\Rightarrow x^2-5x-24=0$$

$$(x-8)(x+3)=0\Rightarrow x=-3, x=8$$

به‌ازای $x=-3$ عبارت‌های $\log_x(x-6)$ و $\log_x(3x+8)$ بی‌معنی هستند، بنابراین $x=8$ و مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴ برابر است با

$$\log_4 x=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۲۲۳۸- گزینهٔ ۴ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_3(2x^2+1)-\log_3(x+2)=1\Rightarrow \log_3\frac{2x^2+1}{x+2}=1\Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2}=3$$

$$2x^2+1=3x+6\Rightarrow 2x^2-3x-5=0\Rightarrow x=-1,\quad x=\frac{5}{2}$$

اکنون به محاسبهٔ مقدار $\log_8(2x-1)$ می‌پردازیم. با توجه به محدودهٔ تعریف این لگاریتم $(x>\frac{1}{2})$، تنها $x=\frac{5}{2}$ قابل قبول است، پس

$$\log_8(2x-1)=\log_8(2\times\frac{5}{2}-1)=\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}\log_2 2=\frac{2}{3}$$

تجربی - ۹۵

۲۲۳۹- گزینهٔ ۲ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log(x^2-x-6)-\log(x-3)=\log(2x-5)$$

$$\log\left(\frac{x^2-x-6}{x-3}\right)=\log(2x-5)\Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=2x-5$$

$$\xrightarrow{x\neq 3} x+2=2x-5\Rightarrow x=7$$

بنابراین $\log_4\sqrt[3]{x+1}=\log_4\sqrt[3]{8}=\log_{2^2}2=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۲۲۴۰- گزینهٔ ۱ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>0$ و $y>0$.

توجه کنید که

$$\log_3 x+\log_3 y=2\Rightarrow \log_3 xy=2\Rightarrow xy=9$$

$$x^2+y^2=46\Rightarrow (x+y)^2-2xy=46\Rightarrow (x+y)^2-18=46$$

$$(x+y)^2=64\xrightarrow{x>0,y>0} x+y=8$$

بنابراین

$$\log_4(x+y)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}=1.5$$

تجربی - ۸۹

۲۲۴۱- گزینهٔ ۲ طول پاره‌خط AB برابر است با $(۲a+۱)-(a-۱)$. بنابراین

$$AB=۲a+۱-a+۱=۵\Rightarrow a=۳$$

پس طول پاره‌خط BC برابر است با

$$BC=(۵a-۲)-(۲a+۱)=۳a-۳=۶$$

۲۲۴۲- گزینهٔ ۲ فاصلهٔ نقطهٔ $(a,a\sqrt{۳})$ از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{a^۲+(a\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{a^۲+۳a^۲}=\sqrt{۴a^۲}=۲|a|=۶$$

بنابراین $a=\pm۳$.

۲۲۴۳- گزینهٔ ۲ مختصات M را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+m}{۲},\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۳m+۱}{۲}$$

چون M روی خط $۲y+۳x-۱=۰$ است، پس

$$۲(\frac{-۳m+۱}{۲})+۳(\frac{۲+m}{۲})-۱=۰\Rightarrow -۳m+۱+۳+\frac{۳m}{۲}-۱=۰$$

$$-\frac{۳m}{۲}=-۳\Rightarrow m=۲$$

بنابراین M نقطهٔ $(\frac{۲+۲}{۲},\frac{-۳\times۲+۱}{۲})$، یعنی $(۲,-\frac{۵}{۲})$ است.

۲۲۴۴- گزینهٔ ۴ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر ۱- است. در نتیجه

$$\frac{۳}{k}\times\frac{-(k-۵)}{۲}=-۱\Rightarrow ۳(k-۵)=۲k\Rightarrow k=۱۵$$

۲۲۴۵- گزینهٔ ۳ اگر رأس B قائمه باشد، آن‌گاه AB بر BC عمود است، یعنی حاصل‌ضرب شیب‌های خط‌های AB و BC برابر ۱- است:

$$m_{AB}=\frac{۶-۴}{۷-۴}=\frac{۲}{۳},\quad m_{BC}=\frac{۴-a^۲}{۴-۲a}$$

توجه کنید که اگر $a=۲$، نقطه‌های B و C بر هم منطبق می‌شوند که درست نیست. بنابراین $a\neq۲$ و در نتیجه $m_{BC}=\frac{۲+a}{۲}$. به این ترتیب

$$m_{AB}\times m_{BC}=-۱\Rightarrow\frac{۲}{۳}(\frac{۲+a}{۲})=-۱\Rightarrow a=-۵$$

۲۲۴۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** وسط پاره‌خط واصل نقطه‌های $(-۳,۱۰)$ و $(-۹,-۲)$ نقطهٔ $(\frac{-۳-۹}{۲},\frac{۱۰-۲}{۲})$، یعنی $(-۶,۴)$ است. چون نقطهٔ $(۴m,۲m-۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط مورد نظر است، پس حاصل‌ضرب شیب خطی که از نقطه‌های $(۴m,۲m-۱)$ و $(-۶,۴)$ می‌گذرد و شیب خطی که از نقطه‌های $(-۳,۱۰)$ و $(-۹,-۲)$ می‌گذرد برابر ۱- است:

$$\frac{۲m-۱-۴}{۴m+۶}\times\frac{۱۰+۲}{-۳+۹}=-۱\Rightarrow\frac{۲m-۵}{۴m+۶}\times۲=-۱\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم چون نقطهٔ $P(۴m,۲m-۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل نقاط $A(-۳,۱۰)$ و $B(-۹,-۲)$ است، پس

$$PA=PB\Rightarrow\sqrt{(۴m+۳)^۲+(۲m-۱-۱۰)^۲}=\sqrt{(۴m+۹)^۲+(۲m-۱+۲)^۲}$$

$$(۴m+۳)^۲+(۲m-۱۱)^۲=(۴m+۹)^۲+(۲m+۱)^۲$$

$$۱۶m^۲+۲۴m+۹+۴m^۲-۴۴m+۱۲۱=۱۶m^۲+۷۲m+۸۱+۴m^۲+۴m+۱$$

$$۹۶m=۴۸\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۲۲۴۷- گزینهٔ ۲ شیب خط $۲y+x=۱$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. شیب خط عمود بر این خط ۲ است. پس معادلهٔ خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطهٔ $(-۱,۲)$ بگذرد می‌نویسیم:

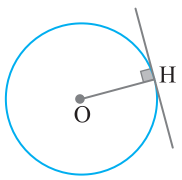
$$y-۲=۲(x+۱)\Rightarrow y=۲x+۴\Rightarrow ۲x-y+۴=۰$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات از این خط، مطلوب مسئله است که برابر است با

$$\frac{|۰-۰+۴|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

۲۲۴۸- گزینهٔ ۴ شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $۶x+۸y+۱=۰$ است: $R=\frac{|۶-۸+۱|}{\sqrt{۳۶+۶۴}}=\frac{۱}{۱۰}$. بنابراین مساحت دایره برابر است با

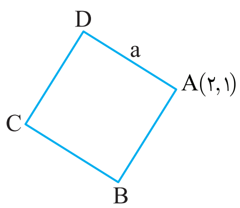
$$S=\pi R^۲=\frac{\pi}{۱۰۰}$$



۲۲۴۹- گزینهٔ ۲ چون مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط داده شده صدق نمی‌کنند، پس $y=۲x-۱$ معادلهٔ AD و AB نیست. پس یا معادلهٔ BC است یا DC. هر کدام که باشد، اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۱)$ تا خط $y=۲x-۱$ را حساب کنیم، طول ضلع مربع به دست می‌آید:

$$۲x-y-۱=۰,\quad a=\frac{|۴-۱-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

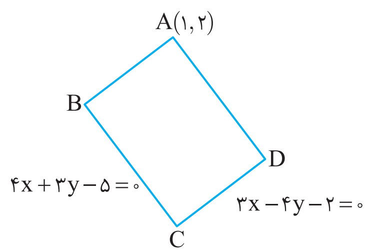
بنابراین مساحت مربع ABCD برابر است با $S=a^۲=\frac{۴}{۵}$.



۲۲۵۰- گزینهٔ ۳ رأس A روی هیچ کدام از خط‌های داده شده قرار ندارد، زیرا مختصات آن در معادله‌های داده شده صدق نمی‌کنند. پس برای محاسبهٔ طول و عرض مستطیل کافی است فاصلهٔ A از دو خط داده شده را به دست آوریم:

$$AB=\frac{|۴+۶-۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۵}{۵}=۱,\quad AD=\frac{|۳-۸-۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۷}{۵}$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با $S=۱\times\frac{۷}{۵}=\frac{۷}{۵}$.



۲۲۵۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$AB=|x_B-x_A|=|2m-(m-1)|=|m+1|$$
$$BC=|x_C-x_B|=|3m+1-2m|=|m+1|$$

بنابراین

$$2|m+1|-|m+1|=3\Rightarrow |m+1|=3\Rightarrow \begin{cases} m+1=3\Rightarrow m=2\\ m+1=-3\Rightarrow m=-4\end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با -2 .

۲۲۵۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(a-\frac{1}{2})^2+(2a+3)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}\Rightarrow (a-\frac{1}{2})^2+(2a+3)^2=\frac{13}{4}$$
$$a^2-a+\frac{1}{4}+4a^2+12a+9=\frac{13}{4}\Rightarrow 5a^2+11a+6=0$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر است با مجموع جواب‌های این معادله، یعنی $-\frac{11}{5}$. توجه کنید که این معادله دو جواب دارد.

۲۲۵۳- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطهٔ وسط پاره‌خط AC همان نقطهٔ وسط پاره‌خط BD است.

بنابراین $(\frac{-2+x}{2},\frac{-3+y}{2})=(\frac{7-x-1}{2},\frac{2-y+3}{2})$. در نتیجه

$$-2+x=6-x\Rightarrow x=4,\quad -3+y=5-y\Rightarrow y=4$$

یعنی C نقطهٔ $(4,4)$ است.

راه‌حل دوم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. پس

$$AB\|CD\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow \frac{-3-2+y}{-2-7+x}=\frac{y-3}{x+1}\Rightarrow \frac{-5+y}{-9+x}=\frac{y-3}{x+1}$$
$$-5x-5+yx+y=-9y+27+xy-3x\Rightarrow -x+5y=16$$

به همین ترتیب،

$$AD\|BC\Rightarrow m_{AD}=m_{BC}\Rightarrow \frac{-3-3}{-2+1}=\frac{2-y-y}{7-x-x}$$
$$6=\frac{2-2y}{7-2x}\Rightarrow 42-12x=2-2y\Rightarrow 6x-y=20$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}-x+5y=16\\ 6x-y=20\end{cases}$ به دست می‌آید $x=4$ و $y=4$.

بنابراین C نقطهٔ $(4,4)$ است.

۲۲۵۴- گزینهٔ ۱ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-1,6)$ و $(-2,-3)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{6+3}{-1+2}=9$. بنابراین شیب خط راستی که بر این خط عمود است برابر است با $-\frac{1}{9}$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن $-\frac{1}{9}$ است و از نقطهٔ $(0,-5)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y-(-5)=-\frac{1}{9}(x-0)\Rightarrow x+9y+45=0$$

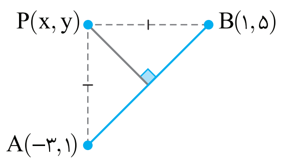
۲۲۵۵- گزینهٔ ۳ شیب خطی را که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حساب می‌کنیم $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-2}{-1-1}=1$. پس شیب ارتفاع CH برابر -1 است، زیرا $CH\perp AB$. اکنون معادلهٔ خطی را که از رأس C با شیب -1 می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y-y_C=m_{CH}\times(x-x_C)\Rightarrow y+1=-(x-3)\Rightarrow y=-x+2$$

۲۲۵۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** می‌دانیم عمودمنصف AB از وسط این پاره‌خط یعنی نقطهٔ $M(-1,3)$ می‌گذرد. شیب خط گذرنده از A و B برابر ۱ است، بنابراین شیب عمودمنصف برابر -1 است. در نتیجه معادلهٔ این خط به‌صورت $y-3=-1(x+1)$ یا به طور ساده‌تر $x+y=2$ است.

راه‌حل دوم می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است. فرض می‌کنیم نقطهٔ $P(x,y)$ روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. در این صورت

$$PA=PB\Rightarrow\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}$$
$$(x+3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-5)^2$$
$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2-10y+25$$
$$8x+8y=16\Rightarrow x+y=2$$



۲۲۵۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید شیب خطی که BC روی آن قرار دارد، برابر $\frac{1}{2}$ است، پس شیب خطی که AH روی آن قرار دارد برابر -2 است.

بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)$$
$$y-2=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+4$$

بنابراین برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ H کافی است محل تقاطع دو خط $y=-2x+4$ و $2x-4y+1=0$ را پیدا کنیم:

$$\begin{cases}y=-2x+4\\ 2x-4y+1=0\xrightarrow{y=-2x+4}2x-4(-2x+4)+1=0\end{cases}$$
$$10x=15\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=-2(\frac{3}{2})+4\Rightarrow y=1$$

پس H نقطهٔ $(\frac{3}{2},1)$ است.

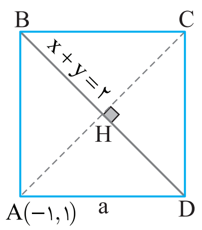
۲۲۵۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، اندازهٔ AH را حساب می‌کنیم:

$$AH=\frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

بنابراین طول قطر مربع برابر $2\sqrt{2}$ است. طول ضلع مربع را حساب می‌کنیم:

$$a^2+a^2=(2\sqrt{2})^2\Rightarrow 2a^2=8$$
$$a^2=4\Rightarrow a=2$$

بنابراین محیط مربع برابر ۸ است.



۲۲۵۹- گزینهٔ ۴ چون خط‌های داده شده موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها برابر است، در نتیجه $-\frac{a}{۲}=-۳$، پس $a=۶$. اگر دو طرف معادلهٔ خط دوم را در ۲ ضرب کنیم، به شکل $۶x+۲y+۲k=۰$ درمی‌آید. چون فاصلهٔ این دو خط $\sqrt{۱۰}$ است، پس

$$\frac{|۲k+۶|}{\sqrt{۶^۲+۲^۲}}=\sqrt{۱۰}\xrightarrow{k>۰}\frac{۲k+۶}{\sqrt{۴۰}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow k=۷$$

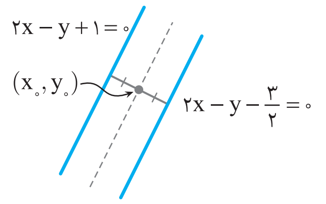
بنابراین $a+k=۱۳$.

۲۲۶۰- گزینهٔ ۱ ابتدا معادلهٔ خط دوم را به صورت $۲x-y-\frac{۳}{۲}=۰$ می‌نویسیم. اکنون فرض می‌کنیم نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی خط مورد نظر باشد. فاصلهٔ این نقطه از دو خط باید برابر باشد

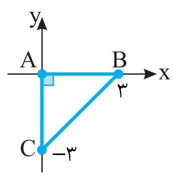
$$\frac{|۲x_۰-y_۰+۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow|۲x_۰-y_۰+۱|=|۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}|$$

$$\begin{cases}۲x_۰-y_۰+۱=۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۱=-\frac{۳}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})\\ ۲x_۰-y_۰+۱=-۲x_۰+y_۰+\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴x_۰-۲y_۰-\frac{۱}{۲}=۰\end{cases}$$

پس مختصات تمام نقطه‌هایی که از دو خط داده شده به یک فاصله باشند، در معادلهٔ $۴x-۲y-\frac{۱}{۲}=۰$ صدق می‌کنند، یعنی معادلهٔ خط مورد نظر $۴x-۲y-\frac{۱}{۲}=۰$ است.



۲۲۶۱- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل مقابل واضح است که $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $AB=AC=۳$. بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.



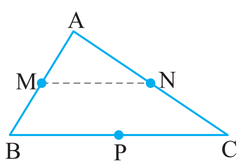
۲۲۶۲- گزینهٔ ۱ چون خط‌های MN و BC موازی هستند، پس شیب آن‌ها برابر است. شیب خط MN را به دست می‌آوریم:

$$m_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-۱-۴}{-۲-۵}=\frac{۵}{۷}$$

معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $P(-۳,-۴)$ با شیب $\frac{۵}{۷}$ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y+۴=\frac{۵}{۷}(x+۳)\Rightarrow ۷y=۵x-۱۳$$

پس معادلهٔ خطی که BC روی آن قرار دارد، $۷y=۵x-۱۳$ است.



۲۲۶۳- گزینهٔ ۳ مختصات نقطهٔ M وسط ضلع AC را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{۴+۲}{۲}=۳,\quad y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{۱-۱}{۲}=۰$$

بنابراین طول میانهٔ BM برابر است با

$$BM=\sqrt{(m-۳)^۲+(-۲-۰)^۲}=\sqrt{(m-۳)^۲+۴}$$

چون $BM=۲$، پس

$$\sqrt{(m-۳)^۲+۴}=۲\Rightarrow(m-۳)^۲+۴=۴\Rightarrow(m-۳)^۲=۰\Rightarrow m=۳$$

۲۲۶۴- گزینهٔ ۲ خط $۳x+y=۴$ بر خط $x-ay=۷$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها -۱ است:

$$-۳\times\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=۳$$

خط $x-۳y=۷$ بر خط $bx+۲y=-۵$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها نیز -۱ است:

$$\frac{۱}{۳}\times(-\frac{b}{۲})=-۱\Rightarrow b=۶$$

بنابراین $a+b=۹$.

۲۲۶۵- گزینهٔ ۱ اگر نقطهٔ H وسط پاره‌خط AA' باشد، آن‌گاه

$$x_H=\frac{۱-۳}{۲}=-۱,\quad y_H=\frac{۲+۴}{۲}=۳$$

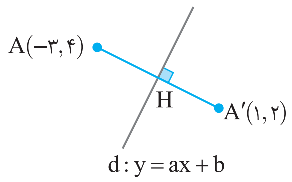
با توجه به شکل زیر مختصات نقطهٔ H در معادلهٔ خط $y=ax+b$ صدق می‌کنند. پس

$$۳=a(-۱)+b\Rightarrow b=a+۳$$

از طرف دیگر عکس و قرینهٔ شیب خطی که از A و A' می‌گذرد، برابر a، شیب خط $y=ax+b$ است، پس

$$m_{AA'}=\frac{y_{A'}-y_A}{x_{A'}-x_A}=\frac{۲-۴}{۱-(-۳)}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $b=۵$ و در نتیجه $ab=۱۰$.



۲۲۶۶- گزینهٔ ۲ ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(۵-۱)^۲+(-۵-۳)^۲}=\sqrt{۸۰},\quad AC=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۲-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

$$BC=\sqrt{(-۱-۵)^۲+(۲+۵)^۲}=\sqrt{۸۵}$$

واضح است که تساوی $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}\times\sqrt{۵}=۱۰$$

۲۲۶۷- گزینهٔ ۳ ابتدا خط‌ها را به‌صورت $۲x-y+k=۰$ و $x-۲y-۱=۰$ می‌نویسیم. اکنون اگر فاصلهٔ A از دو خط به‌ترتیب برابر AH و AH' باشد، آن‌گاه

$$AH=\frac{|۲k+۱+k|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|۳k+۱|}{\sqrt{۵}},\quad AH'=\frac{|k+۲-۱|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|k+۱|}{\sqrt{۵}}$$

$$AH=۲AH'\Rightarrow|۳k+۱|=۲|k+۱|\Rightarrow\begin{cases}۳k+۱=۲k+۲\Rightarrow k=۱\\ ۳k+۱=-۲k-۲\Rightarrow k=-\frac{۳}{۵}\end{cases}$$

۲۲۶۸- گزینهٔ ۲ خط راست گذرنده از B و C از نقاط $(۰,۱)$ و $(۲,۰)$ نیز می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ آن $y-۰=\frac{۰-۱}{۲-۰}(x-۲)$ یا $۲y+x-۲=۰$ است. طول ارتفاع وارد بر BC برابر با فاصلهٔ A از BC است: $\frac{|۲\times۴-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۵}}=\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$.

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{۱}{۲}\times۴\times\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$.

۲۲۶۹- گزینهٔ ۲ طول ضلع BC برابر است با

$$BC=\sqrt{(۵-۳)^۲+(۴-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقاط B و C به‌صورت $y-۳=\frac{۴-۳}{۵-۳}(x-۳)$ یا $۲y-x-۳=۰$ است. بنابراین طول ارتفاع وارد بر BC یا همان فاصلهٔ A از خط گذرنده از نقاط B و C برابر است با $\frac{|۲(۱)-(-۷)-۳|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۶}{\sqrt{۵}}$. بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با $\frac{۶}{\sqrt{۵}}\times\sqrt{۵}=۶$.

۲۲۷۰- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ خطهای موازی $۳x+۴y+۶=۰$ و $۳x+۴y-۶=۰$ برابر است با $\frac{|۶+۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۲}{۵}$. در نتیجه، چون مساحت مستطیل ۱۲ است، پس طول ضلع دیگرش برابر با ۵ است. بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل برابر ۵ است.

فصل سیزدهم

۲۲۷۱- گزینهٔ ۲ اگر اشتراک دو بازهٔ $(-1,3)$ و $[a,a+1]$ تهی باشد، یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

$a+1\le -1\Rightarrow a\le -2$ $\qquad$ $a\ge 3$

بنابراین اگر اشتراک دو بازه، تهی نباشد باید $-2<a<3$. پس به ازای مقادیر صحیح -1، 0، 1 و 2 برای a اشتراک دو بازه تهی نیست.

۲۲۷۲- گزینهٔ ۴ جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر $2^{10}=1024$ است و جملهٔ nام دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر $8+4(n-1)$ است. بنابراین

$$8+4n-4=1024\Rightarrow 4n=1020\Rightarrow n=255$$

پس جملهٔ دویست و پنجاه و پنجم دنبالهٔ حسابی $8,12,16,\dots$ با جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسی $2,4,8,\dots$ برابر است.

۲۲۷۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=2\Rightarrow a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}=2\Rightarrow a^{\frac{4}{6}}=2\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}=2$$

$$\Rightarrow a^2=2^3=8\Rightarrow a=\sqrt{8}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sqrt{8}}=\sqrt[4]{8}$$

۲۲۷۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a-\frac{1}{a}=2\Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}-2=4\Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=6$$

بنابراین

$$a^2+\frac{1}{a^2}+2=8\Rightarrow (a+\frac{1}{a})^2=8\Rightarrow |a+\frac{1}{a}|=\sqrt{8}$$

با توجه به اینکه a عددی منفی است، پس $a+\frac{1}{a}=-\sqrt{8}$. در نتیجه

$$(a-\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})=2(-\sqrt{8})\Rightarrow a^2-\frac{1}{a^2}=-4\sqrt{2}$$

۲۲۷۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4})}+\frac{5}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{16}+1-\sqrt[3]{4})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}+\frac{5}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1})$$

اکنون مخرج هر یک از کسرها را به کمک اتحاد چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}^3-1}+\frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt[3]{4}^3+1})=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1}+\frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{4+1})$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{4}+1)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})=1+\sqrt[3]{2}$$

۲۲۷۶- گزینهٔ ۳ اولاً نمودار از نقطهٔ $(0,m)$ می‌گذرد و با توجه به شکل m عددی مثبت است. با این شرایط حاصل‌ضرب صفرهای تابع منفی است که در نمودار همین وضعیت وجود دارد. ثانیاً طول رأس سهمی عددی منفی است. بنابراین

$$-\frac{2m-1}{2(-1)}<0\Rightarrow m<\frac{1}{2}$$

بنابراین اگر $0<m<\frac{1}{2}$ ، نمودار تابع f به‌صورت رسم شده است.

۲۲۷۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=6$ و $\alpha\beta=2$. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$S=x_1+x_2=(\alpha+\frac{1}{\beta})+(\beta+\frac{1}{\alpha})=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6+\frac{6}{2}=9$$

$$P=x_1x_2=(\alpha+\frac{1}{\beta})(\beta+\frac{1}{\alpha})=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=2+2+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

پس معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-9x+\frac{9}{2}=0\Rightarrow 2x^2-18x+9=0$$

۲۲۷۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x\ ,\qquad \cos(\frac{5\pi}{2}-x)=\sin x$$

بنابراین

$$-2\cos x=3\sin x\Rightarrow \tan x=-\frac{2}{3}$$

از طرف دیگر،

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+\frac{4}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow \cos^2 x=\frac{9}{13}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\cos x=-\frac{3}{\sqrt{13}}$.

بنابراین

$$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x=-\frac{3}{\sqrt{13}}$$

۲۲۷۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 67^\circ=\cos(90^\circ-23^\circ)=\sin 23^\circ$$

$$\sin 53^\circ=\sin(90^\circ-37^\circ)=\cos 37^\circ$$

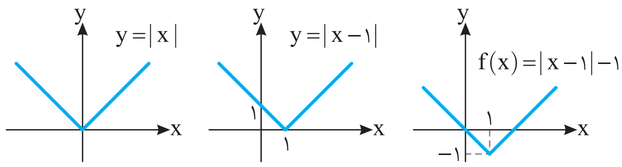
در نتیجه

$$\sin 37^\circ\cos 23^\circ+\cos 67^\circ\sin 53^\circ$$

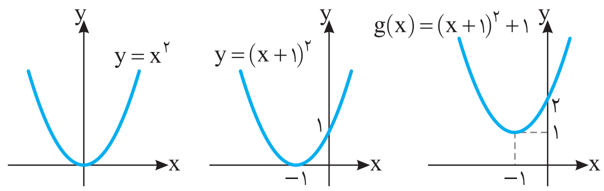
$$=\sin 37^\circ\cos 23^\circ+\sin 23^\circ\cos 37^\circ$$

$$=\sin(37^\circ+23^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

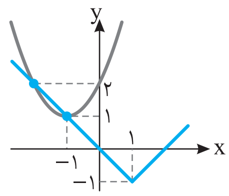
۲۲۸۰- گزینهٔ ۲ اگـر نمـودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-۱|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=|x-۱|-۱$ به‌دست می‌آید.



اگـر نمـودار تابـع $y=x^۲$ را یـک واحـد بـه چـپ منتقل کنیـم، نمـودار تابع $y=(x+۱)^۲$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به بالا منتقل کنیم نمودار تابع $y=(x+۱)^۲+۱$ به‌دست می‌آید.



اگر نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۲۸۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^۲=|x|^۲$. اکنون نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|^۲\le۴|x|\Rightarrow|x|^۲-۴|x|\le۰\Rightarrow|x|(|x|-۴)\le۰$$

چون $|x|\ge۰$. پس $|x|-۴\le۰\Rightarrow|x|\le۴\Rightarrow-۴\le x\le۴$

بنابراین نُه عدد صحیح ±۴، ±۳، ±۲، ±۱ و ۰ در نامعادله صدق می‌کنند.

۲۲۸۲- گزینهٔ ۲ بـرای اینکـه عبـارت $\sqrt{۴x+۱}$ بامعنـی باشـد بایـد $x\ge-\frac{۱}{۴}$. بنابراین $x+۱$ مثبت است و $|x+۱|=x+۱$. پس معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{۴x+۱}=۲x+x+۱\Rightarrow\sqrt{۴x+۱}=۳x+۱$$

اکنون طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را حل می‌کنیم:

$$۴x+۱=۹x^۲+۶x+۱\Rightarrow۹x^۲+۲x=۰$$

$$x(۹x+۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-\frac{۲}{۹}$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند و معادله دو جواب دارد.

۲۲۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(۰)=-۲$ و $f(\log_۸ ۳)=۰$. بنابراین

$$f(۰)=۱-b=-۲\Rightarrow b=۳\Rightarrow f(x)=a^{۳x}-۳$$

$$f(\log_۸ ۳)=a^{۳\log_۸ ۳}-۳=۰\Rightarrow a^{\log_۲ ۳}=۳$$

$$\log_۲ ۳=\log_a ۳\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $b=۳$ و $a=۲$، پس $ab=۶$.

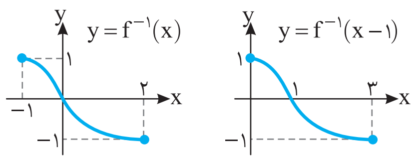
۲۲۸۴- گزینهٔ ۲ ابتدا طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم

$$۲^a۲^{b+۱}=۳^a۳^b\Rightarrow۲^{a+b+۱}=۳^{a+b}$$

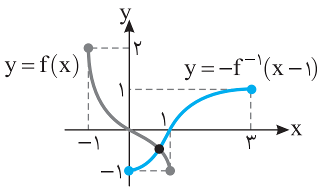
بنابراین

$$۲\times۲^{a+b}=۳^{a+b}\Rightarrow(\frac{۳}{۲})^{a+b}=۲\Rightarrow a+b=\log_{\frac{۳}{۲}} ۲$$

۲۲۸۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع f را نسـبت بـه خط $y=x$ قرینه کنیم، نمـودار تابـع $f^{-۱}$ به‌دسـت می‌آید. اگر نمودار به‌دسـت آمده را یـک واحد به سـمت راسـت منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x-۱)$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f^{-۱}(x-۱)$ به‌دست می‌آید.

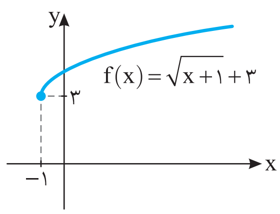


مطابق شکل زیر دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.



۲۲۸۶- گزینهٔ ۱ برای هـر $x\in R_f$ تسـاوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار اسـت. بـا توجه بـه نمـودار تابـع f، $R_f=[۳,+\infty)$. پس بـرای هر $x\ge۳$، $g(x)=x-۲$، بنابراین

$$x\ge۳\Rightarrow x-۲\ge۱\Rightarrow g(x)\ge۱\Rightarrow R_g=[۱,+\infty)$$



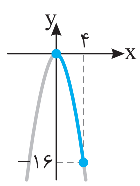
۲۲۸۷- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x\ge۰\\ ۴x-x^۲\ge۰\Rightarrow x(۴-x)\ge۰\Rightarrow۰\le x\le۴\end{cases}\Rightarrow D_f=D_g=[۰,۴]$$

بنابراین $D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[۰,۴]$. از طرف دیگر،

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(\sqrt{۴x-x^۲}-۲\sqrt{x})(\sqrt{۴x-x^۲}+۲\sqrt{x})$$
$$=۴x-x^۲-۴x=-x^۲$$

بنابراین نمودار تابع $f\times g$ به‌صورت زیر است و برد آن بازهٔ $[-۱۶,۰]$ است.



۲۲۸۸- گزینهٔ ۱ حد چپ و حد راست تابع f را در نقطهٔ $x=-2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(-2a-12x)=-2a+24$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(-3a-15x)=-3a+30$$

برای اینکه تابع f در $x=-2$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه با هم برابر باشند. پس $-2a+24=-3a+30\Rightarrow a=6$

بنابراین $f(x)=6[x]+3x[2x]\Rightarrow f(-2)=6(-2)+3(-2)(-4)=12$

۲۲۸۹- گزینهٔ ۲ اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=L_2$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to 2}(f\times g)(x)=\lim_{x\to 2} f(x)\times\lim_{x\to 2} g(x)=L_1L_2=2$$

$$\lim_{x\to 2}(f-g)(x)=\lim_{x\to 2} f(x)-\lim_{x\to 2} g(x)=L_1-L_2=\frac{7}{2}\Rightarrow L_1=L_2+\frac{7}{2}$$

بنابراین $(L_2+\frac{7}{2})L_2=2\Rightarrow L_2^2+\frac{7}{2}L_2-2=0\Rightarrow 2L_2^2+7L_2-4=0$

$$(L_2+4)(2L_2-1)=0\Rightarrow\begin{cases}L_2=-4\Rightarrow L_1=-\frac{1}{2}\\ L_2=\frac{1}{2}\Rightarrow L_1=4\end{cases}$$

پس ۸ یا $\frac{1}{8}=\frac{L_1}{L_2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}=\lim\limits_{x\to 2}(\frac{f}{g})(x)$.

۲۲۹۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(2)=bc$ و

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{32(x-2)}{(x-a)(x+a)}$$

چون a و b مثبت‌اند، پس حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=2$ برابر صفر نیست و در نتیجه حد راست آن هم برابر صفر نیست. پس حد مخرج عبارت $\frac{32(x-2)}{(x-a)(x+a)}$ در $x=2$ باید صفر باشد. در غیر این صورت حد راست تابع f در $x=2$ برابر صفر می‌شود. پس

$$\lim_{x\to 2^+}((x-a)(x+a))=0\Rightarrow(2-a)(2+a)=0\Rightarrow a=2, a=-2\ (\text{غ.ق.ق.})$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{32(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{32}{x+2}=8$$

چون f در $x=2$ پیوسته است، پس باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع f در این نقطه با هم برابر باشند:

$$2a+b=8\xrightarrow{a=2}4+b=8\Rightarrow b=4\ ,\quad bc=8\xrightarrow{b=4}c=2$$

۲۲۹۱- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به‌صورت $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با

$$S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$$

از طرف دیگر جمله‌های با ردیف زوج به‌صورت $a_2, a_4, \dots, a_{2n}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^2 و جملهٔ اول a_1q تشکیل می‌دهند.

بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\frac{a_1q(1-(q^2)^n)}{1-q^2}$ است. طبق فرض

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=3\times\frac{a_1q(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)}\Rightarrow\frac{3q}{1+q}=1\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

۲۲۹۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=((x-2)(x^2+2x+4))(x^3+8)+64=(x^3-8)(x^3+8)+64$$

$$=x^6-64+64=x^6$$

بنابراین مقدار A به ازای $x=\sqrt{2}$ برابر است با $A=(\sqrt{2})^6=2^3=8$.

۲۲۹۳- گزینهٔ ۳ چون معادله جواب دارد، پس

$$\Delta\geq 0\Rightarrow 4k^2-4(k^2+10k+20)\geq 0\Rightarrow 40k+80\leq 0\Rightarrow k\leq -2$$

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha+\beta=2k$، $\alpha\beta=k^2+10k+20$ و در نتیجه

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4k^2-2k^2-20k-40$$

$$=2k^2-20k-40=2(k-5)^2-90$$

بنابراین

$$k\leq -2\Rightarrow k-5\leq -7\Rightarrow (k-5)^2\geq 49$$

$$2(k-5)^2\geq 98\Rightarrow 2(k-5)^2-90\geq 8$$

بنابراین کمترین مقدار مجموع مربعات جواب‌ها برابر ۸ است.

۲۲۹۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f محور طول‌ها را در $x=4$ و $x=-1$ قطع کرده است. پس $f(x)=a(x+1)(x-4)$. نمودار تابع f محور عرض‌ها را در $y=2$ قطع کرده است. پس

$$f(0)=2\Rightarrow a(0+1)(0-4)=2\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

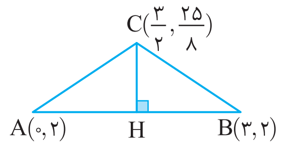
$$f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$$

بنابراین نقطهٔ $C(\frac{3}{2},\frac{25}{8})$ رأس سهمی است و

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{0+x_B}{2}\Rightarrow x_B=3$$

پس $CH=\frac{25}{8}-2=\frac{9}{8}$ و $AB=3$. در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{AB\times CH}{2}=\frac{3\times\frac{9}{8}}{2}=\frac{27}{16}$$



۲۲۹۵- گزینهٔ ۴ باید با شرط $x>0$ نامعادلهٔ $f(x)<0$ را حل کنیم:

$$x+\frac{1}{x+2}-5<0\Rightarrow x(x+2)+1-5(x+2)<0\Rightarrow x^2-3x-9<0$$

ریشه‌های چندجمله‌ای x^2-3x-9 به‌صورت $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ هستند. پس $\frac{3-3\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$

از طرف دیگر $x>0$، پس $0<x<\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ است.

۲۲۹۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که باید $۲x-x^{۲}\geq ۰$ تا عبارت $\sqrt{۲x-x^{۲}}$ در معادله بامعنی باشد. پس $۰\leq x\leq ۲$.

اگر $x=۲$، آن‌گاه سمت چپ معادله برابر صفر و سمت راست آن برابر ۲ است. پس $x=۲$ جواب معادله نیست.

اگر $۰\leq x<۱$، آن‌گاه $[x]=۰$ و معادله به‌صورت $۲\sqrt{۲x-x^{۲}}=۰$ در می‌آید که $x=۰$ جواب آن است ولی مدنظر مسئله نیست.

اگر $۱\leq x<۲$، آن‌گاه $[x]=۱$ و معادله به‌صورت $۲\sqrt{۲x-x^{۲}}=۱$ درمی‌آید که به‌صورت زیر آن را حل می‌کنیم:

$$۴(۲x-x^{۲})=۱\Rightarrow ۴x^{۲}-۸x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲},\ x=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})$$

توجه کنید که $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$ دربازهٔ $[۱,۲)$ قرار ندارد بنابراین قابل قبول نیست.

پس جواب مثبت معادله $x=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$ است.

۲۲۹۷- گزینهٔ ۳ اگر $x\neq ۵$، نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{|۳|}{|۵-x|}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow |x-۵|>۶$$

بنابراین $(x\neq ۵)$،

$$\begin{cases}x-۵>۶\\ x-۵<-۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۱۱\\ x<-۱\end{cases}$$

به این ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$(-\infty,-۱)\cup(۱۱,+\infty)$$

در نتیجه $a=-۱$ و $b=۱۱$، پس $b-a=۱۲$.

۲۲۹۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos(\frac{۳\pi}{۱۰})=\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۵})=\sin\frac{\pi}{۵}$$

$$\sin(\frac{۶\pi}{۵})=\sin(\pi+\frac{\pi}{۵})=-\sin\frac{\pi}{۵}$$

$$\sin(\frac{۹\pi}{۵})=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۵})=-\sin\frac{\pi}{۵}$$

بنابراین

$$\frac{۲\sin\frac{\pi}{۵}+\cos(\frac{۳\pi}{۱۰})}{۳\sin(\frac{۶\pi}{۵})-۲\sin(\frac{۹\pi}{۵})}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۵}+\sin\frac{\pi}{۵}}{-۳\sin\frac{\pi}{۵}+۲\sin\frac{\pi}{۵}}=\frac{۳\sin\frac{\pi}{۵}}{-\sin\frac{\pi}{۵}}=-۳$$

۲۲۹۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^{۴}x+\cos^{۴}x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)^{۲}-۲\sin^{۲}x\cos^{۲}x=\frac{۲}{۳}$$

$$۱-۲\sin^{۲}x\cos^{۲}x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sin^{۲}x\cos^{۲}x=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین

$$\sin^{۶}x+\cos^{۶}x$$

$$=(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)^{۳}-۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)$$

$$=۱-۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x=۱-۳(\frac{۱}{۶})=\frac{۱}{۲}$$

۲۳۰۰- گزینهٔ ۴ چون α و β حاده هستند، پس $۰<\alpha,\beta<\frac{\pi}{۲}$.

بنابراین $۰<\alpha+\beta<\pi$. در نتیجه $\sin(\alpha+\beta)>۰$، اکنون توجه کنید که

$$\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}=\frac{۳}{۵},\quad \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{۱-\cos^{۲}(\alpha+\beta)}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین

$$\cos\beta=\cos((\alpha+\beta)-\alpha)=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$$

$$=\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

۲۳۰۱- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=۲^{x}$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$t^{۲}+(k-۳)t+k-۴=۰$$

بنابراین $t^{۲}+(k-۳)t+k-۴=(t+k-۴)(t+۱)$. پس جواب‌های این معادله $t=-۱$ و $t=۴-k$ هستند. بنابراین

$$۲^{x}=-۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$۲^{x}=۴-k\Rightarrow x=\log_{۲}(۴-k),\ k<۴$$

چون جواب معادله نباید مثبت باشد، پس

$$\log_{۲}(۴-k)\leq ۰\Rightarrow\log_{۲}(۴-k)\leq\log_{۲}۱\Rightarrow ۴-k\leq ۱\Rightarrow k\geq ۳$$

در نتیجه $۳\leq k<۴$.

۲۳۰۲- گزینهٔ ۱ نمودار تابع از نقطهٔ $(۳,۰)$ می‌گذرد، پس

$$f(۳)=۰\Rightarrow\log_{a}(۳b+۷)=۰\Rightarrow ۳b+۷=۱\Rightarrow b=-۲$$

به این ترتیب $f(x)=\log_{a}(-۲x+۷)$. نمودار تابع از نقطهٔ $(b,۱)$ عبور می‌کند، پس

$$f(b)=۱\Rightarrow f(-۲)=۱\Rightarrow\log_{a}(۴+۷)=۱\Rightarrow a=۱۱$$

بنابراین $ab=-۲۲$.

۲۳۰۳- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_{۲}x(\frac{۱}{۲}\log_{۲}x)=\frac{۱}{۳}\log_{۲}x\Rightarrow\log_{۲}x(\frac{۱}{۲}\log_{۲}x-\frac{۱}{۳})=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{cases}\log_{۲}x=۰\Rightarrow x=۱\\ \log_{۲}x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=۲^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۴}\end{cases}$$

پس جواب بزرگ‌تر معادله برابر $\sqrt[۳]{۴}$ است.

۲۳۰۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$. بنابراین $x=۲$ باید تنها ریشهٔ مخرج $g(x)$ باشد. یعنی مخرج $g(x)$ باید به‌صورت $(x-۲)^{۲}$ باشد که در این صورت $b=-۴$. از طرف دیگر

$$g(x)=\frac{ax-b}{x^{۲}+bx+۴}=\frac{ax+۴}{(x-۲)^{۲}}$$

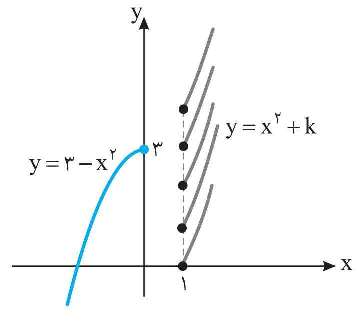
$$g(x)=f(x)\Rightarrow\frac{ax+۴}{(x-۲)^{۲}}=\frac{-۲}{x-۲}\Rightarrow ax+۴=-۲(x-۲)$$

$$ax+۴=-۲x+۴$$

پس $a=-۲$، $b=-۴$ و در نتیجه $ab=۸$.

۲۳۰۵- گزینهٔ ۱ نمودار تابع به ازای چند مقدار مختلف k در شکل زیر رسم شده است. واضح است که اگر $f(1)>3$، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک خواهد بود. پس

$$1+k>3\Rightarrow k>2$$



۲۳۰۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x\le 0 \text{ یا } x\ge 4\Rightarrow f(x)=x^2-4x+6x-x^2=2x$$

$$0\le x\le 4\Rightarrow f(x)=-x^2+4x+6x-x^2=-2x^2+10x$$

بنابراین دامنهٔ تابع f باید $[4,+\infty)$ و برد آن $[8,+\infty)$ باشد. پس

$$f(x)=y=2x\Rightarrow x=\frac{y}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{2}\ ,\ D_{f^{-1}}=[8,+\infty)$$

۲۳۰۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که حد صورت کسر $\frac{x^3-a^3}{2x-8}$ در نقطهٔ $x=a$، صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز صفر باشد. در غیر این صورت حاصل حد کسر برابر صفر خواهد بود که چنین نیست. بنابراین

$$\lim_{x\to a}(2x-8)=0\Rightarrow 2a-8=0\Rightarrow a=4$$

پس مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$b=\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{2x-8}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{2(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+4x+16}{2}=\frac{16+16+16}{2}=24$$

در نتیجه $a+b=28$.

۲۳۰۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $1<x<2$، آن‌گاه $[x]=1$ و در نتیجه $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{-b}{x}=-b$. از طرف دیگر حد صورت کسر $\frac{x^2-1}{ax+b}$ در $x=1$ برابر صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز در این نقطه صفر باشد. در غیر این صورت حد چپ تابع f در $x=1$ برابر صفر می‌شود که در نتیجه برای پیوستگی تابع در $x=1$ باید حد راست آن یعنی $-b$ هم برابر صفر شود که مخالف فرض سؤال است. پس

$$\lim_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b=0\Rightarrow a=-b$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{-bx+b}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{-b(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{-b}=-\frac{2}{b}$$

برای اینکه تابع f در $x=1$ حد داشته باشد باید

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow -\frac{2}{b}=-b\Rightarrow b^2=2\Rightarrow b=\pm\sqrt{2}$$

برای اینکه تابع f در $x=1$ پیوسته باشد، باید

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)\Rightarrow c=-b=\pm\sqrt{2}$$

۲۳۰۹- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت و چاق مخرج ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-x)(\sqrt{x+2}+x)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(\sqrt[3]{x-1}-1)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)(\sqrt{x+2}+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2-x^2)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(x-1-1)(\sqrt{x+2}+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(x+1)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+1)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}{\sqrt{x+2}+x}$$

$$=\frac{-3\times 3}{4}=-\frac{9}{4}$$

۲۳۱۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\sin\pi x=-\sin(\pi+\pi x)=-\sin(\pi(1+x))$$

بنابراین

$$\lim_{x\to -1}\frac{x\sin\pi x}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{-x\sin(\pi(1+x))}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\left(\frac{-x}{x-1}\times\frac{\sin\pi(1+x)}{\pi(1+x)}\times\pi\right)=\frac{1}{-2}\times 1\times\pi=-\frac{\pi}{2}$$

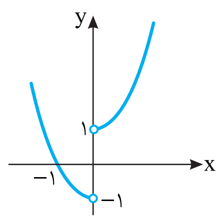
راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x\sin\pi x}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin\pi x+\pi x\cos\pi x}{2x}=\frac{0+\pi}{-2}=-\frac{\pi}{2}$$

۲۳۱۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}(x^3+1) & x>0\\ \frac{x}{-x}(x^3+1) & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^3+1 & x>0\\ -x^3-1 & x<0\end{cases}$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. بنابراین اگر نمودار تابع f، خط $y=k$ را در دو نقطه قطع کند، حدود k، به‌صورت $k>1$ است.



۲۳۱۲- گزینهٔ ۲ با توجه به زوج مرتب‌های $(-1,x^2-x),(0,x^3)$ می‌توان نوشت:

$$0>-1\Rightarrow x^3\ge x^2-x$$

$$x^3-x^2+x\ge 0\Rightarrow x(x^2-x+1)\ge 0$$

چون در چندجمله‌ای درجهٔ دوم x^2-x+1، $a>0$ و $\Delta<0$، پس همواره $x^2-x+1>0$. بنابراین $x\ge 0$. با توجه به زوج مرتب‌های $(x^2,8)$ و $(0,x^3)$ می‌توان نوشت:

$$x^2>0\Rightarrow 8\ge x^3\Rightarrow 2\ge x$$

با توجه به اینکه x باید عددی صحیح باشد، از اشتراک شرایط به‌دست آمده نتیجه می‌شود $x\in\{1,2\}$، پس دو مقدار صحیح برای x وجود دارد.

توجه کنید که $x=0$ قابل قبول نیست چرا که در این صورت $f=\{(-1,0),(0,0),(0,8)\}$، که تابع نیست.

۲۳۱۳- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، پس

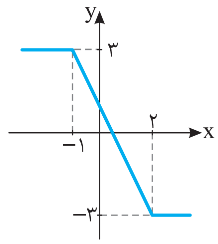
$$\begin{cases} x>۳\Rightarrow f(x)<f(۳)\Rightarrow f(x)<۰ \\ x<۳\Rightarrow f(x)>f(۳)\Rightarrow f(x)>۰ \end{cases}$$

اکنون باید دامنهٔ تابع g را مشخص کنیم. برای این کار نامعادلهٔ $(x^۲-۹)f(x)\ge ۰$ را حل می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۳		۳		$+\infty$
$x^۲-۹$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		+		+	۰	−	
$(x^۲-۹)f(x)$		+	۰	−	۰	−	

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق $(-\infty,-۳]\cup\{۳\}$ است. بنابراین تنها یک عدد طبیعی (عدد ۳) جزء دامنهٔ تابع g است.

۲۳۱۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی نمودار مشخص است که تابع روی بازهٔ $[-۱,۲]$ و هر بازه‌ای به‌صورت $[c,d]$ که در آن $c\ge -۱$ و $d\le ۲$ اکیداً نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به‌دست می‌آید که $a=-۱$ و $b=۲$، در این صورت $b-a=۲-(-۱)=۳$.



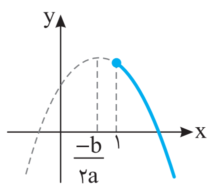
۲۳۱۵- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ با شرط $a<۰$ روی بازهٔ $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$ صعودی و روی بازهٔ $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ نزولی است. بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشد تا تابع f روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ نزولی باشد (به شکل زیر توجه کنید):

$$k-۱<۰\Rightarrow k<۱$$

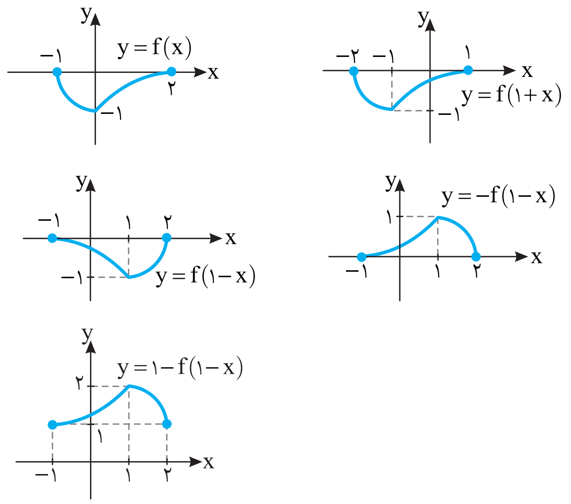
$$\frac{-۱}{۲(k-۱)}\le ۱\Rightarrow \frac{-۱}{۲(k-۱)}-۱\le ۰\Rightarrow \frac{-۱-۲k+۲}{۲(k-۱)}\le ۰$$

$$\frac{-۲k+۱}{۲(k-۱)}\le ۰\Rightarrow k\le\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ k>۱$$

از اشتراک شرط‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $k\le\frac{۱}{۲}$.



۲۳۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱+x)$ رسم شود. اکنون نمودار این تابع را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱-x)$ حاصل شود. سپس نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۱-x)$ به‌دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۱-f(۱-x)$ به‌دست آید.



۲۳۱۷- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=۳f(۲x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(x+۱))=۳f(۲x+۲)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را سه واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲x+۲)+۳$ به‌دست می‌آید. در نهایت اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(\frac{۱}{۲}x)+۲)+۳=۳f(x+۲)+۳$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را یک سوم کنیم، نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}\times(۳f(x+۲)+۳)=f(x+۲)+۱$ به‌دست می‌آید.

۲۳۱۸- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|a\pi|}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow |a|=۴$$

کمترین مقدار تابع f برابر $a^۲-|b|$ است. بنابراین

$$a^۲-|b|=-۴\Rightarrow ۱۶-|b|=-۴\Rightarrow |b|=۲۰$$

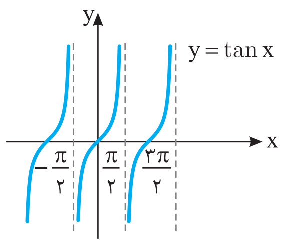
بیشترین مقدار تابع f برابر $a^۲+|b|$ است که برابر است با $۱۶+۲۰=۳۶$.

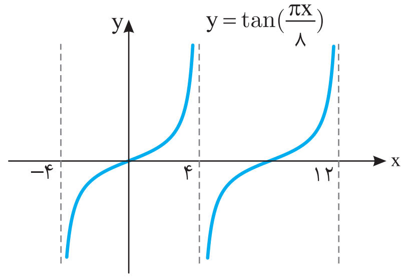
۲۳۱۹- گزینهٔ ۱ تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است، پس $\tan x\ge\tan(-\frac{\pi}{۴})$ و در نتیجه $\tan x\ge -۱$. بنابراین

$$۲m^۲-۵\ge -۱\Rightarrow ۲m^۲\ge ۴\Rightarrow m^۲\ge ۲\Rightarrow |m|\ge\sqrt{۲}$$

پس حداقل مقدار $|m|$ برابر $\sqrt{۲}$ است.

۲۳۲۰- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{۸}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. نمودار تابع به شکل زیر است. پس حداقل مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازهٔ $(a,۱۲)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۴ است.





۲۳۲۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $3a-2$ است که با توجه به نمودار تابع برابر -1 است. پس

$$3a-2=-1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع برابر $6=\frac{45}{7}-\frac{3}{7}$ است. پس

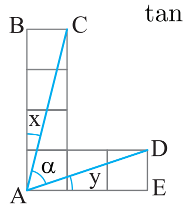
$$T=\frac{2\pi}{|\frac{2\pi}{b}|}=6\Rightarrow |b|=6\Rightarrow b=\pm 6$$

اگر $b=-6$، آن‌گاه $f(x)=1+2\sin(-\frac{2\pi}{6}x+\frac{\pi}{3})$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=0$ نزولی باشد که این طور نیست. پس $b=6$ و در نتیجه $ab=2$.

۲۳۲۲- گزینهٔ ۳ با نمادگذاری شکل زیر، $\alpha+x+y=90^\circ$، پس $\alpha=90^\circ-(x+y)$. از طرف دیگر $\triangle ABC:\tan x=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ و $\triangle ADE:\tan y=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. بنابراین

$$\tan\alpha=\tan(90^\circ-(x+y))=\cot(x+y)=\frac{1}{\tan(x+y)}$$

$$=\frac{1-\tan x\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=\frac{11}{7}$$



پس $\cot\alpha=\frac{7}{11}$.

۲۳۲۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت $\cos x=\cos(x+\frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌ها به‌صورت زیر هستند: $(k\in\mathbb{Z})$

$$\begin{cases} x=2k\pi+x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow k=-\frac{1}{8} \quad (\text{غ.ق.ق}) \\ x=2k\pi-x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2x=2k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

۲۳۲۴- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1-\sin^2 x)+5\sin x-5=0\Rightarrow 2\sin^2 x-5\sin x+3=0$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$، معادله به‌صورت $2t^2-5t+3=0$ در می‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t_1=\frac{3}{2}$ و $t_2=1$. چون $\sin x=\frac{3}{2}$ قابل قبول نیست، پس

$$\sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\xrightarrow{x\in(0,2\pi)}x=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین معادلهٔ داده شده تنها یک جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۲۳۲۵- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1\xrightarrow{2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha}$$
$$1-\sin x=1\Rightarrow \sin x=0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,4\pi]$ عبارت‌اند از $x=0$، $x=\pi$، $x=2\pi$، $x=3\pi$ و $x=4\pi$. ولی توجه کنید که جواب‌های $x=\pi$، $x=2\pi$ و $x=4\pi$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کنند و قابل قبول نیستند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم تولید شده‌اند. بنابراین معادله در بازهٔ $[0,4\pi]$ دو جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر 3π است.

۲۳۲۶- گزینهٔ ۱ اگر $x\to 3^+$، آن‌گاه $[x]=3$ و $f(x)=\frac{1}{x-3}$، در نتیجه $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=+\infty$. اگر $x\to 3^-$، آن‌گاه $[x]=2$ و $f(x)=\frac{-1}{x-3}$، در نتیجه $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=+\infty$.

۲۳۲۷- گزینهٔ ۲ چون حد صورت در نقطهٔ $x=2$ برابر ۳ است. باید حد مخرج کسر در این نقطه برابر صفر باشد، تا حد مورد نظر نامتناهی شود. همچنین، چون حد چپ و حد راست کسر هر دو $+\infty$ شده‌اند، پس باید مقادیر $3x^2+ax-b$ در یک همسایگی محذوف نقطهٔ $x=2$ مثبت باشند. در نتیجه $x=2$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $3x^2+ax-b=0$ است، یعنی $3x^2+ax-b$ باید به‌صورت $3(x-2)^2$ باشد. در نتیجه

$$3x^2+ax-b=3(x-2)^2=3x^2-12x+12$$

پس $a=-12$، $b=-12$. یعنی $a+b=-24$.

۲۳۲۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$. از طرف دیگر اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-3$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{t\to(-3)^-}f(t)=-\infty$$

۲۳۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله‌ای شامل x^4 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^4 در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $2a-4=0$. پس $a=2$. به این ترتیب

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-1}{12x^3+x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{12x^3}=\frac{1}{3}$$

در نتیجه $ab=\frac{2}{3}$.

۲۳۳۰- گزینهٔ ۴ خطوط $x=-\frac{3b}{a-1}$ و $y=\frac{2a}{a-1}$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین

$$\frac{2a}{a-1}=3\Rightarrow 2a=3a-3\Rightarrow a=3$$
$$\frac{-3b}{a-1}=2\Rightarrow\frac{-3b}{2}=2\Rightarrow b=-\frac{4}{3}$$

در نتیجه $ab=-4$.

۲۳۳۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-k}{x+۲}$$

از طرف دیگر

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f^۲(x)-kf(x)}{x^۲-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)(f(x)-k)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-k}{x+۲}\times\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)}{x-۲}=f'(-۲)\times\frac{f(-۲)}{-۴}=\frac{k^۲}{-۴}$$

بنابراین $\frac{k^۲}{-۴}=-۲$، در نتیجه $k^۲=۸$.

۲۳۳۲- گزینهٔ ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|\sqrt[۳]{x^۲+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x\sqrt[۳]{x^۲+۱}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt[۳]{x^۲+۱}=۱$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|\sqrt[۳]{x^۲+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x\sqrt[۳]{x^۲+۱}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}(-\sqrt[۳]{x^۲+۱})=-۱$$

بنابراین $۲f'_+(۰)-f'_-(۰)=۳$.

۲۳۳۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=(۸x^۳+۱۰x)(ax^۲+۱)+(۲ax)(۲x^۴+۵x^۲-۳)$$

بنابراین

$$f'(۱)=(۸+۱۰)(a+۱)+(۲a)(۲+۵-۳)=۱۸a+۱۸+۸a=۲۶a+۱۸$$

چون $f'(۱)=-۸$، پس $۲۶a+۱۸=-۸\Rightarrow ۲۶a=-۲۶\Rightarrow a=-۱$

۲۳۳۴- گزینهٔ ۳ چون تابع در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)$$

$$۸a+۴=۴+۲b\Rightarrow ۴a-b=۰$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}۳ax^۲+۲ & x>۲\\ ۲x+b & x<۲\end{cases}$، بنابراین

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}(۳ax^۲+۲)=۱۲a+۲$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}(۲x+b)=۴+b$$

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲a+۲=۴+b\Rightarrow ۱۲a-b=۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}۴a-b=۰\\ ۱۲a-b=۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۴}$ و $b=۱$.

پس $a+b=\frac{۵}{۴}$.

۲۳۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=f(\frac{۱}{\sqrt{x}})\Rightarrow g'(x)=(\frac{۱}{\sqrt{x}})'f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})$$

بنابراین $g'(\frac{۱}{۴})=\frac{-۱}{۲\times\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۱}{۴}}}f'(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}})=-۴f'(۲)$.

از طرف دیگر $f'(۲)=\frac{۴+۱}{۲-۳}=-۵$. در نتیجه $g'(\frac{۱}{۴})=(-۴)(-۵)=۲۰$.

۲۳۳۶- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲x^۳+۳ax^۲+۶x\,,\quad f''(x)=۶x^۲+۶ax+۶$$

پس معادلهٔ $۶x^۲+۶ax+۶=۰$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta=۳۶a^۲-۱۴۴<۰\Rightarrow a^۲<۴\Rightarrow |a|<۲$$

۲۳۳۷- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,۱]$ برابر است با

$$\frac{f(۱)-f(a)}{۱-a}=\frac{۰-(a-۲)\sqrt{۱-a}}{۱-a}=\frac{۲-a}{\sqrt{۱-a}}$$

بنابراین

$$\frac{۲-a}{\sqrt{۱-a}}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{(۲-a)^۲}{۱-a}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow\frac{۴+a^۲-۴a}{۱-a}=\frac{۲۵}{۴}$$

$$۴a^۲-۱۶a+۱۶=۲۵-۲۵a$$

$$۴a^۲+۹a-۹=۰\Rightarrow a=\frac{۳}{۴},a=-۳$$

با توجه به گزینه‌های داده شده جواب -۳ است.

۲۳۳۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ بر نمودار تابع f مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=x_۰$ برابر با شیب خط $y=۲x+۴$ یعنی ۲ است. بنابراین

$$f'(x)=۶x^۲-۴\Rightarrow f'(x_۰)=۲\Rightarrow ۶x_۰^۲-۴=۲$$

$$x_۰^۲=۱\Rightarrow x_۰=۱ \text{ یا } x_۰=-۱$$

چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f است، پس

$$y_۰=f(۱)=۲-۴+۶=۴ \quad\text{یا}\quad y_۰=f(-۱)=-۲+۴+۶=۸$$

بنابراین خط‌های مورد نظر از نقطهٔ $(۱,۴)$ یا نقطهٔ $(-۱,۸)$ می‌گذرند و شیب آن‌ها ۲ است. پس معادلهٔ این دو خط به‌صورت $y=۲x+۲$ یا $y=۲x+۱۰$ است.

۲۳۳۹- گزینهٔ ۴ خط $y=۴x+۲$ در نقطهٔ $A(۱,۶)$ بر نمودار تابع f مماس است. بنابراین $f(۱)=۶$ و $f'(۱)=۴$. در نتیجه چون $f'(x)=۳x^۲-۲ax$، پس

$$\begin{cases}f(۱)=۱-a+b=۶\\ f'(۱)=۳-۲a=۴\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲},b=\frac{۹}{۲}\Rightarrow a+b=۴$$

۲۳۴۰- گزینهٔ ۱ باید تابع مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x,\ f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\,,x=۱$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[۰,۱]$ نزولی است. می‌دانیم در صورتی‌که $c\geq ۰$ و $d\leq ۱$، تابع f روی بازهٔ $[c,d]$ نزولی است اما بیشترین مقدار $b-a$، زمانی است که $a=۰$ و $b=۱$. پس $b-a=۱-۰=۱$.

۲۳۴۱- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f برابر است با $f'(x)=-۶x^۲+۲ax-۶$.

برای آنکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد باید همواره $f'\leq ۰$. پس

$$a<۰,\Delta\leq ۰\Rightarrow -۶<۰\,,\Delta=۴a^۲-۱۴۴\leq ۰\Rightarrow -۶\leq a\leq ۶$$

۲۳۴۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=x^۲-۲x-۸$ و

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۴\,,\,x=-۲$$

با توجه به آنکه $f(-۲)=\frac{۲۵}{۳}$ و $f(۴)=-\frac{۸۳}{۳}$، پس نقاط $(-۲,\frac{۲۵}{۳})$ و $(۴,-\frac{۸۳}{۳})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند. بنابراین فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(۴-(-۲))^۲+(-\frac{۸۳}{۳}-\frac{۲۵}{۳})^۲}=\sqrt{۶^۲+۳۶^۲}=۶\sqrt{۳۷}$$

۲۳۴۳- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، برای آنکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(۲)=۰$. پس

$$f'(x)=\sqrt[۳]{x+a}+\frac{x+۱}{۳\sqrt[۳]{(x+a)^۲}}\,,\,f'(۲)=۰$$

$$f'(۲)=\sqrt[۳]{۲+a}+\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۲+a)^۲}}=\frac{۳(۲+a)+۳}{۳\sqrt[۳]{(۲+a)^۲}}=۰\Rightarrow ۹+۳a=۰\Rightarrow a=-۳$$

۲۳۴۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

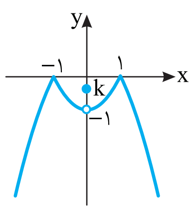
$$f(x)=\begin{cases}۲x-x^۳ & x\le-\sqrt{۲} \text{ یا } ۰\le x\le\sqrt{۲}\\ x^۳-۲x & -\sqrt{۲}\le x\le ۰ \text{ یا } x\ge\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}۲-۳x^۲ & x<-\sqrt{۲} \text{ یا } ۰<x<\sqrt{۲}\\ ۳x^۲-۲ & -\sqrt{۲}<x<۰ \text{ یا } x>\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲-۳x^۲=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

همچنین در نقاط $x=۰$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ مشتق چپ و مشتق راست تابع برابر نیستند، پس تابع در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع f، پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

۲۳۴۵- گزینهٔ ۴ به نمودار تابع f توجه کنید. واضح است که اگر تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، اما ماکزیمم مطلق نداشته باشد، باید $-۱<k<۰$. توجه کنید که اگر $k\ge۰$، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم مطلق تابع f دارد و اگر $k\le-۱$، در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی دارد.



۲۳۴۶- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقطه‌های دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+۱)-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x}+۱)^۲}=\frac{۱-a}{۲\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)^۲}$$

اگر $f'(x)=۰$، آن‌گاه $a=۱$ که در این صورت $f(x)=۱$. چون کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[۰,۴]$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است، پس $a=۱$ قابل قبول نیست. پس $f'(x)\neq۰$، بنابراین نقاط ابتدا و انتهای بازه را بررسی می‌کنیم: $f(۰)=a$ و $f(۴)=\frac{۲+a}{۳}$. اگر $f(۰)=a=\frac{۴}{۳}$، آن‌گاه $a=\frac{۴}{۳}$ و اگر $f(۴)=\frac{۲+a}{۳}=\frac{۴}{۳}$، آن‌گاه $a=۲$. بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{۴}{۳}\times۲=\frac{۸}{۳}$ است.

۲۳۴۷- گزینهٔ ۱ اگر $f'(x)>۰$ و $f''(x)<۰$، آن‌گاه تابع f صعودی و جهت تقعر آن رو به پایین است:

$$f'(x)=x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲-۶x$$

$$f''(x)=۳x^۲+۳x-۶<۰\Rightarrow x^۲+x-۲<۰\Rightarrow (x+۲)(x-۱)<۰$$

$$-۲<x<۱$$

$$f'(x)>۰\Rightarrow x(x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶)>۰$$

$$x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶=۰\,,\quad \Delta=\frac{۹}{۴}+۲۴=\frac{۱۰۵}{۴}$$

$$x=\frac{-\frac{۳}{۲}\pm\frac{\sqrt{۱۰۵}}{۲}}{۲}=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۰۵}}{۴}$$

x	$-\infty$		$\frac{-۳-\sqrt{۱۰۵}}{۴}$		۰		$\frac{-۳+\sqrt{۱۰۵}}{۴}$		$+\infty$
x		−		−	۰	+		+	
$x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶$		+	۰	−		−	۰	+	
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	

از اشتراک ناحیه‌هایی که در آن‌ها $f'(x)>۰$ با $-۲<x<۱$، بازهٔ $(-۲,۰)$ حاصل می‌شود.

۲۳۴۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید نقطهٔ B روی سهمی به معادلهٔ $y=۲x^۲$ باشد. بنابراین مختصات آن به‌صورت $B(x,۲x^۲)$ است. پس

$$AB=\sqrt{(x-۹)^۲+(۲x^۲-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۱۸x+۸۱+۴x^۴}$$

اگر $f(x)=\sqrt{۴x^۴+x^۲-۱۸x+۸۱}$، آن‌گاه

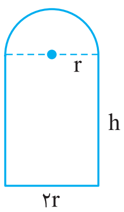
$$f'(x)=\frac{۸x^۳+x-۹}{\sqrt{۴x^۴+x^۲-۱۸x+۸۱}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۸x^۳+x-۹=۰\Rightarrow (۸x^۳-۸)+(x-۱)=۰$$

$$۸(x-۱)(x^۲+x+۱)+(x-۱)=(x-۱)(۸x^۲+۸x+۹)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید. پس نقطهٔ B $(۱,۲)$ و عرض آن برابر ۲ است.

۲۳۴۹- گزینهٔ ۴ در واقع باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد. پس



$$\text{محیط}=۵\Rightarrow ۲h+۲r+(\frac{۲\pi r}{۲})=۲h+۲r+r\pi=۵$$

$$h=\frac{۵-۲r-r\pi}{۲}=\frac{۵}{۲}-r-\frac{r\pi}{۲}$$

$$\text{مساحت پنجره}=S_{\text{مستطیل}}+S_{\text{نیم‌دایره}}$$

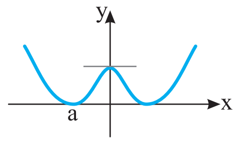
$$S(r)=(h\times۲r)+(\frac{r\times r\times\pi}{۲})=(\frac{۵}{۲}-r-\frac{r\pi}{۲})\times۲r+\frac{r^۲\pi}{۲}$$

$$=-۲r^۲-\frac{r^۲\pi}{۲}+۵r$$

$$S'(r)=-۴r-r\pi+۵\,,\,S'(r)=۰\Rightarrow -۴r-r\pi+۵=۰$$

$$r=\frac{۵}{۴+\pi}$$

۲۳۵۰- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f در سه نقطه صفر است. پس نمودار گزینه‌های (۳) و (۴) جواب نیستند. تابع f روی بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، پس در این بازه باید f' منفی باشد. پس نمودار گزینهٔ (۲) هم جواب نیست و نمودار گزینهٔ (۱) جواب است.

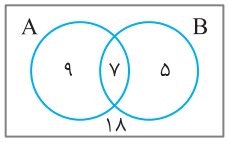


۲۳۵۱- گزینهٔ ۴ اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامهٔ دیواری را با B نمایش دهیم، آن‌گاه $n(A)=۱۶$، $n(B)=۱۲$ و $n(A-B)=۹$. بنابراین

$$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=۱۶-۹=۷$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۶+۱۲-۷=۲۱$$

بنابراین $۳۹-۲۱=۱۸$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۲۳۵۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۴}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۵}}\times ۲^{\frac{۴}{۱۵}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{۲}=۴$$

بنابراین

$$(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=۸^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

۲۳۵۳- گزینهٔ ؟ ابتدا توجه کنید که معادلهٔ

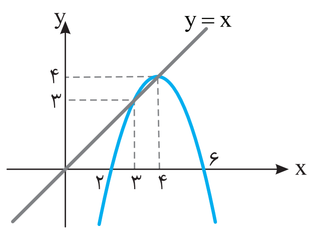
$$(۲m-۱)x^{۲}+۶x+m-۲=۰$$

به ازای $m=\frac{۱}{۲}$ درجهٔ دوم نیست و به صورت $۶x-\frac{۳}{۲}=۰$ درمی‌آید که تنها جواب آن $\frac{۱}{۴}$ است. چون $\frac{۱}{۲}$ در هر چهار گزینه وجود دارد، پس هیچ کدام از گزینه‌ها جواب نیستند ولی منظور طراح سؤال حالتی بوده که دلتای معادله مثبت است. در این صورت

$$\Delta=۳۶-۴(۲m-۱)(m-۲)>۰\Rightarrow(m+۱)(۲m-۷)<۰\Rightarrow-۱<m<۳/۵$$

یعنی منظور طراح، گزینهٔ (۳) بوده است.

۲۳۵۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع $y=-x^{۲}+۲x+۵$ را سه واحد به طرف xهای مثبت سپس دو واحد به طرف yهای منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=-(x-۳)^{۲}+۲(x-۳)+۵-۲$ به دست می‌آید. سادهٔ شدهٔ ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=-x^{۲}+۸x-۱۲$ است. بنابراین می‌خواهیم بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد. به نمودار این تابع و خط $y=x$ توجه کنید. در بازهٔ $(۳,۴)$ نمودار تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه‌حل دوم برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، کافی است نامعادلهٔ $f(x)>x$ را حل کنیم:

$$-x^{۲}+۸x-۱۲>x\Rightarrow x^{۲}-۷x+۱۲<۰$$

$$(x-۳)(x-۴)<۰\Rightarrow ۳<x<۴$$

راه‌حل سوم در تابع $f(x)=-x^{۲}+۸x-۱۲$ مقادیر $f(۳)$ و $f(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(۳)=-۹+۲۴-۱۲=۳,\quad f(۴)=-۱۶+۳۲-۱۲=۴$$

بنابراین در نقاط $x=۳$ و $x=۴$ نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینهٔ (۱) جواب است.

۲۳۵۵- گزینهٔ ۲ مجموع اعداد طبیعی دو رقمی مضرب هفت به صورت $S=۱۴+۲۱+\cdots+۹۸$ است. به راحتی می‌توانید این اعداد را جمع بزنید و به عدد ۷۲۸ برسید. البته می‌توانید از فرمول مجموع جملات دنبالهٔ حسابی استفاده کنید. در این مجموع جملهٔ اول برابر ۱۴، جملهٔ آخر برابر ۹۸ و تعداد جملات برابر ۱۳ است. پس $S=\frac{n}{۲}(a_{۱}+a_{n})=\frac{۱۳}{۲}(۱۴+۹۸)=۷۲۸$.

۲۳۵۶- گزینهٔ ۴ فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+۹$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در هر ساعت $\frac{۱}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{۱}{۲۰}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow ۲۰(t+۹)+۲۰t=t(t+۹)\Rightarrow t^{۲}-۳۱t-۱۸۰=۰$$

$$(t-۳۶)(t+۵)=۰\Rightarrow t=۳۶,\ t=-۵\ (\text{غ.ق.})$$

۲۳۵۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

بنابراین

$$(gof^{-۱})(۲)=g(۱)=\text{تعریف نشده},\quad (gof^{-۱})(۵)=g(۲)=۳$$

$$(gof^{-۱})(۴)=g(۳)=۱,\quad (gof^{-۱})(۶)=g(۴)=۲$$

بنابراین $D_{gof^{-۱}}=\{۵,۴,۶\}$، در نتیجه

$$D_{\frac{g}{gof^{-۱}}}=D_g\cap D_{gof^{-۱}}-\{x|(gof^{-۱})(x)=۰\}=\{۴,۵\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینهٔ (۱) دامنه‌اش $\{۴,۵\}$ است.

۲۳۵۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $g(x)=x^{۲}-x$، آن‌گاه $g(۱)=۰$ و $g(۲)=۲$. بنابراین

$$f(x)=-۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{Ax+B},\quad f(۱)=۰,\quad f(۲)=۲$$

بنابراین

$$f(۱)=-۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{A+B}=۰\Rightarrow ۲^{-A-B}=۲\Rightarrow -A-B=۱\Rightarrow A+B=-۱$$

$$f(۲)=-۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲A+B}=۲\Rightarrow ۲^{-۲A-B}=۴\Rightarrow -۲A-B=۲\Rightarrow ۲A+B=-۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}A+B=-۱\\ ۲A+B=-۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $A=-۱$ و $B=۰$. در نتیجه

$$f(x)=-۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-x}\Rightarrow f(۳)=-۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳}=۶$$

۲۳۵۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

۲۳۶۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول**

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a(\cos x-۱)}{x}+\lim_{x\to ۰}\frac{\cos a\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin a\sin^۲\frac{x}{۲}}{x}+\lim_{x\to ۰}\frac{\cos a\sin x}{x}$$

$$=-\sin a\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\times\lim_{x\to ۰}\sin\frac{x}{۲}+\cos a\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}$$

$$=-\sin a\times ۰+\cos a\times ۱=\cos a$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(x+a)-\sin a}{x}$$

اکنون اگر فرض کنیم $f(x)=\sin x$، مقدار حد فوق برابر مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ یعنی $\cos a$ است.

راه‌حل سوم اگر قرار دهیم $a=۰$، حد مورد نظر به صورت زیر در می‌آید

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۰\cos x+\cos ۰\sin x-\sin ۰}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

اکنون در گزینه‌ها $a=۰$ را قرار می‌دهیم و فقط گزینهٔ (۳) به صورت $\cos ۰=۱$ درمی‌آید.

راه‌حل چهارم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin a\sin x+\cos a\cos x-۰}{۱}=\cos a$$

۲۳۶۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۲)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-\sqrt{x+۲})(x+\sqrt{x+۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x+\sqrt{x+۲})}{x+۱}=\frac{۳(۲+۲)}{۲+۱}=۴$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد باید تساوی $۲a-۱=۴$ برقرار باشد که نتیجه می‌شود $a=\frac{۵}{۲}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز به دست آورید:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴$$

۲۳۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=۱+\frac{a}{۲}\sin ۲bx$. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|۲b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $۱+|\frac{a}{۲}|$ است. با توجه به نمودار تابع f دورهٔ تناوب برابر $\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\pi$ و حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{۳}{۲}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|۲b|}=\pi\Rightarrow|b|=۱\,,\quad ۱+|\frac{a}{۲}|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow|a|=۱$$

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطهٔ $x=۰$ صعودی است، مقادیر a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین $a=۱$ و $b=۱$ یا $a=-۱$ و $b=-۱$. پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا ۲− باشد که فقط حالت $a+b=۲$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۳۶۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\sin^۳x+\cos^۳x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲x+\cos^۲x-\sin x\cos x)$$

$$=(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

$$(\sin x+\cos x)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$(\sin x+\cos x-۱)(۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x+\cos x-۱=۰\\ ۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۰\Rightarrow\sin ۲x=۲\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

معادلهٔ $\sin x+\cos x-۱=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ جواب‌های $x=۰$، $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=۲\pi$ را دارد که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

۲۳۶۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to ۲}(۲x-۵)=-۱$. بنابراین اولاً باید $\lim_{x\to ۲}(x^۲+ax+b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت $x^۲+ax+b$ در یک همسایگی نقطهٔ $x=۲$ مثبت باشد. پس $x^۲+ax+b$ باید برابر $(x-۲)^۲$ باشد، در نتیجه

$$x^۲+ax+b=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۴,b=۴$$

پس $a+b=۰$.

۲۳۶۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}g(۱)=۲\\ g'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow g'(۱)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

$$(fog)'(۱)=g'(۱)f'(g(۱))=g'(۱)f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}=۲$$

۲۳۶۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=۲$ علامت عبارت $x^{۲}-۲x$ منفی است، بنابراین $|x^{۲}-۲x|=۲x-x^{۲}$. در واقع تابع f به صورت زیر است

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۲x & x\leq ۰ \\ ۲x-x^{۲} & ۰<x<۲ \\ \frac{۱}{۲}x^{۲}+ax+b & x\geq ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x<۰ \\ ۲-۲x & ۰<x<۲ \\ x+a & x>۲ \end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_{+}(۲)=f'_{-}(۲)$. بنابراین

$$۲+a=۲-۴\Rightarrow a=-۴$$

از طرف دیگر تابع f در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است. پس

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{-}} f(x)=f(۲)$$

بنابراین

$$۲+۲a+b=۴-۴\Rightarrow b=-۲a-۲=۶$$

در نتیجه $a+b=۲$.

۲۳۶۷- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۲]$ برابر است با

$$\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۱۲-۲}{۲}=۵$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{۳}{۴}$ برابر است با $f'(\frac{۳}{۴})$:

$$f'(x)=\sqrt{۴x+۱}+\frac{۴(x+۲)}{۲\sqrt{۴x+۱}}\Rightarrow f'(\frac{۳}{۴})=۲+\frac{۱۱}{۴}=\frac{۱۹}{۴}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۲]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۴}$ به اندازهٔ $\frac{۱}{۴}$ بیشتر است.

۲۳۶۸- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع f، در نقطهٔ $x=۱$ جهت تقعر نمودار تغییر می‌کند و خط مماس بر نمودار افقی است. بنابراین $f'(۱)=f''(۱)=۰$. پس

$$f(x)=۳x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}+cx\ ,\quad f'(x)=۱۲x^{۳}+۳ax^{۲}+۲bx+c$$

$$f''(x)=۳۶x^{۲}+۶ax+۲b\ ,\quad f'(۱)=۰\Rightarrow ۱۲+۳a+۲b+c=۰$$

$$f''(۱)=۰\Rightarrow ۳۶+۶a+۲b=۰$$

چون طبق نمودار، $f'(۰)=۰$ پس $c=۰$. بنابراین از حل دستگاه معادلات به‌دست آمده نتیجه می‌شود $a=-۸$ و $b=۶$.

۲۳۶۹- گزینهٔ ۳ خط $x=۱$ مجانب قائم نمودار تابع f است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۲x}{(x-۱)^{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x-۱)^{۲}-۲(x-۱)(x^{۲}+۲x)}{(x-۱)^{۴}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲(x-۱)(x^{۲}-۱-x^{۲}-۲x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲},\ x=۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین $x=-\frac{۱}{۲}$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است:

$$f(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۳}\ ,\quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} f(x)=۱$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=+\infty$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع f روی هر دو بازهٔ $(-\infty,۱)$ و $(۱,+\infty)$ برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. فاصلهٔ نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۳})$ از مجانب قائم نمودار تابع f برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۲۳۷۰- گزینهٔ ۱ بازهٔ $(x+۱,۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ است، بنابراین بایستی $x+۱<۳<۲x-۱$. مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $x+۱<۳$ و $۳<۲x-۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x+۱<۳\Rightarrow x<۲\quad (۱)$$

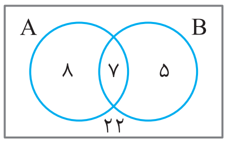
$$۳<۲x-۱\Rightarrow x>۲\quad (۲)$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

۲۳۷۱- گزینهٔ ۴ اگر گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B بنامیم. آن‌گاه $n(A)=۱۵$، $n(B)=۱۲$ و $n(A\cap B)=۷$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۲+۱۵-۷=۲۰$$

بنابراین $۴۲-۲۰=۲۲$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۲۳۷۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵}=۳^{\frac{۲}{۵}}\times ۳^{\frac{۱}{۱۰}}\times ۳^{-\frac{۳}{۲}}\times ۲^{-۳}=۳^{-۱}\times ۲^{-۳}=\frac{۱}{۲۴}$$

بنابراین $(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}=(۱+۲۴)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲۵}=۵$.

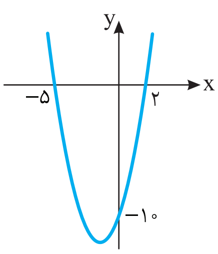
۲۳۷۳- گزینهٔ ۲ برای اینکه سهمی به معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ همواره پایین محور x قرار بگیرد، باید $a<۰$ و $b^{۲}-۴ac<۰$. بنابراین در سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^{۲}+۲(m-۳)x-۱$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$۱-m<۰\Rightarrow m>۱\ ,\quad ۴(m-۳)^{۲}+۴(۱-m)<۰\Rightarrow m^{۲}-۷m+۱۰<۰$$

$$(m-۲)(m-۵)<۰\Rightarrow ۲<m<۵$$

بنابراین اگر $۲<m<۵$، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور xها قرار دارد.

۲۳۷۴- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^{۲}-x-۳$ را دو واحد به طرف xهای منفی سپس نُه واحد به طرف yهای منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=(x+۲)^{۲}-(x+۲)-۳-۹$ به دست می‌آید. ساده شدهٔ ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=x^{۲}+۳x-۱۰=(x+۵)(x-۲)$ است. نمودار تابع f به صورت زیر است و واضح است که در بازهٔ $(-۵,۲)$ نمودار تابع f زیر محور xها قرار دارد. توجه کنید که اگر نمودار تابع f زیر محور xها قرار داشته باشد، آن‌گاه $f(x)<۰$. بنابراین $(x+۵)(x-۲)<۰\Rightarrow -۵<x<۲$



۲۳۷۵- گزینهٔ ۱ مجموع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۲\times ۵}+\frac{۱}{۵\times ۸}+\frac{۱}{۸\times ۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۱۷\times ۲۰}$$

$$=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۱۱}+\cdots+\frac{۱}{۱۷}-\frac{۱}{۲۰})=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲۰})=\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$$

۲۳۷۶- گزینهٔ ۲ اگر $x\geq \frac{۱}{۲}$، آن‌گاه معادله به صورت $۲x-۱+x+۲=۳$ در می‌آید که جواب آن $x=\frac{۲}{۳}$ است. اگر $-۲<x<\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه معادله به صورت $-۲x+۱+x+۲=۳$ در می‌آید که $x=۰$ جواب آن است. اگر $x\leq -۲$، آن‌گاه معادله به صورت $-۲x+۱-x-۲=۳$ در می‌آید که $x=-\frac{۴}{۳}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله $x=\frac{۲}{۳}$ و $x=۰$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۲۳۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$
$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

بنابراین $g^{-۱}of=\{(۱,۴),(۴,۵)\}\Rightarrow(g^{-۱}of)-f=\{(۱,۲),(۴,-۱)\}$

بنابراین برد تابع $(g^{-۱}of)-f$ مجموعهٔ $\{۲,-۱\}$ است.

۲۳۷۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=۳^{Ax+B}$ نمودار تابع $y=x^۲$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. پس نمودار تابع f از نقاط $(۱,۱)$ و $(۳,۹)$ عبور می‌کند.

بنابراین $f(۱)=۱\Rightarrow ۳^{A+B}=۱\Rightarrow A+B=۰$

$$f(۳)=۹\Rightarrow ۳^{۳A+B}=۹\Rightarrow ۳A+B=۲$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $A=۱$ و $B=-۱$ و در نتیجه $f(x)=۳^{x-۱}$. پس عرض نقطهٔ تلاقی نمودار تابع f با محور yها برابر $f(۰)=\frac{۱}{۳}$ است.

۲۳۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{۱۷\pi}{۶}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$
$$\sin\frac{۱۱\pi}{۳}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\cos\frac{۱۰\pi}{۳}=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$\tan\frac{۱۷\pi}{۶}\sin\frac{۱۱\pi}{۳}+\cos\frac{۱۰\pi}{۳}=(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}-\frac{۱}{۲}=۰$$

۲۳۸۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی راست $x=۱$ تابع $y=[x]$ با تابع $y=۱$ برابر است. پس

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-\cos^۲\pi x}{۱+\cos\pi x}$$
$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱-\cos\pi x)(۱+\cos\pi x)}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}(۱-\cos\pi x)=۱-\cos\pi=۲$$

۲۳۸۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱)=a+b\,,\quad \lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(ax+b)=a+b$$
$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}x[x]=\lim_{x\to ۱^-}۰=۰$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته است، پس $a+b=۰$. از طرف دیگر

$$f(-۱)=-a+b\,,\quad \lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(ax+b)=-a+b$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}x[x]=\lim_{x\to(-۱)^+}(-x)=۱$$

تابع f در $x=-۱$ پیوسته است، پس $-a+b=۱$. از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=۰\\-a+b=۱\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۱}{۲}$.

۲۳۸۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$$
$$=\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}-\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\frac{\sin^۲(\pi x)-\cos^۲(\pi x)}{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}$$
$$=\frac{-\cos(۲\pi x)}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\pi x)}=-۲\cot(۲\pi x)=-۲\tan(\frac{\pi}{۲}-۲\pi x)$$

پس دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{|-۲\pi|}=\frac{۱}{۲}$ است.

۲۳۸۳- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow(\sin^۲x+\cos^۲x)^۲-۲\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۱}{۲}$$
$$۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin^۲ ۲x=۱\Rightarrow\sin ۲x=\pm ۱$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$، $\pi+\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ که مجموع آن‌ها برابر ۴π است.

۲۳۸۴- گزینهٔ ۱ خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=۲$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}=۲-\frac{۵x+۲}{x^۲+۲x}=۲-\frac{۵x+۲}{(x+۱)^۲-۱}$$

اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه علامت عبارت $\frac{۵x+۲}{(x+۱)^۲-۱}$ مثبت است و در نتیجه $f(x)<۲$. اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه علامت عبارت $\frac{۵x+۲}{(x+۱)^۲-۱}$ منفی است و در نتیجه $f(x)>۲$. بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ پایین مجانب افقی آن و در $-\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد.

۲۳۸۵- گزینهٔ ۴ خط $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $(۲,۱)$ بر نمودار تابع y مماس است. پس $g(۲)=۱$ و $g'(۲)=۳$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۲}{۳}$$
$$\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۴}{۳}$$

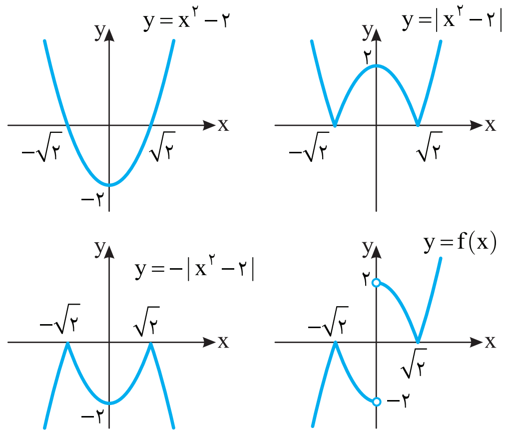
بنابراین $(fog)'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))=g'(۲)f'(۱)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$

۲۳۸۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع f در $x=0$ تعریف نشـده پس در این نقطه مشـتق‌پذیر نیسـت. عبارت x^3-2x در ضابطهٔ f داخل قدرمطلق قرار دارد و این عبارت در $x=0$ و $x=\pm\sqrt{2}$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. بنابراین در سه نقطه تابع f مشتق ندارد.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{|x^3-2x|}{x}=\frac{|x||x^2-2|}{x}=\begin{cases}|x^2-2| & x>0\\ -|x^2-2| & x<0\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که در $x=0$ ، $x=\sqrt{2}$ و $x=-\sqrt{2}$ تابع f مشتق‌پذیر نیست.



۲۳۸۷- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,4]$ برابر است با

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{(3+\frac{1}{5})-(1+1)}{4}=\frac{3}{10}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{3}{2}$ برابر $f'(\frac{3}{2})$ است:

$$f(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}-\frac{4}{25}=\frac{17}{50}$$

بنابراین اختلاف $\frac{3}{10}$ و $\frac{17}{50}$ مورد سؤال است که برابر $0/04$ است.

۲۳۸۸- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار تابع f معلوم اسـت که این تابع فقط در $x=3$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2$$

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=0$ نباید تغییر کند و فقط در $x=3$ باید تغییر کند.

بنابراین باید $b=0$ و

$$f'(x)=x(4x^2+3ax)=x^2(4x+3a)\,,\quad f'(3)=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین

$$f(x)=x^4-4x^3\Rightarrow f(-2)=48$$

۲۳۸۹- گزینهٔ ۳ خط $y=-1$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

اکنون نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2x-x^2}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2-2x)(x+1)^2-2(x+1)(2x-x^2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2(x+1)(1-x^2-2x+x^2)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\,,\ x=-1\ (\text{غ.ق})$$

بنابرایـن $x=\frac{1}{2}$ طـول تنهـا نقطهٔ بحرانـی تابع f اسـت. پس باید طـول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع هم باشد. فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ از خط $y=-1$ مورد سؤال است که برابر $\frac{4}{3}$ است.

۲۳۹۰- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$x-1\neq0\Rightarrow x\neq1\,,\ 9-x^2\geq0\Rightarrow x^2\leq9\Rightarrow-3\leq x\leq3\,,\ D_f=[-3,1)\cup(1,3]$$

بـرای این‌کـه بـازهٔ $(k-2,3k+2)$ زیرمجموعـهٔ دامنـهٔ تابع f باشـد یـا باید زیرمجموعهٔ $[-3,1)$ باشد یا باید زیرمجموعهٔ $(1,3]$ باشد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالـت اول $(k-2,3k+2)\subseteq[-3,1)$. در ایـن حالـت بایـد $k-2\geq-3$ و $3k+2\leq1$. پس $-1\leq k\leq-\frac{1}{3}$.

حالـت دوم $(k-2,3k+2)\subseteq(1,3]$. در ایـن حالـت بایـد $k-2\geq1$ و $3k+2\leq3$ که ممکن نیسـت. بنابراین $k\in[-1,-\frac{1}{3}]$ که در گزینهٔ (۴) بازهٔ $[-1,-\frac{1}{3})$ آمده است.

۲۳۹۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{-\cos x}\qquad(\pi<x<\frac{3\pi}{2})$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{1+\tan^2x}\,(2\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2x)=-\frac{1}{\cos x}(2\times\frac{1}{2}-\sin^2x)$$

$$=-\frac{1}{\cos x}(1-\sin^2x)=-\frac{1}{\cos x}\times\cos^2x=-\cos x$$

۲۳۹۲- گزینهٔ ۳ فـرض کنید سـرعت آب برابر v باشـد. در این صورت، سـرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب $100+v$ و در جهت مخالف حرکت آب برابر $100-v$ است. در نتیجه

$$\frac{1200}{100-v}-\frac{1200}{100+v}=5\Rightarrow\frac{240}{100-v}-\frac{240}{100+v}=1$$

$$240(\frac{1}{100-v}-\frac{1}{100+v})=1\Rightarrow240(\frac{2v}{100^2-v^2})=1$$

$$100^2-v^2=480v\Rightarrow v^2+480v-100^2=0$$

$$(v-20)(v+500)=0\Rightarrow v=20$$

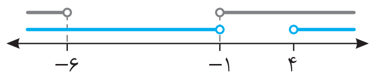
۲۳۹۳- گزینهٔ (۱) **راه‌حل اول** توجه کنید که

(۱) $\frac{2x-3}{x+1}>1\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-1>0\Rightarrow\frac{x-4}{x+1}>0\Rightarrow x>4$ یا $x<-1$

$\frac{2x-3}{x+1}<3\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-3<0\Rightarrow\frac{-x-6}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x+6}{x+1}>0$

(۲) $x<-6$ یا $x>-1$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R}-[-6,4]$ است.



راه‌حل دوم اعداد ۵ و ۷− در نامعادله صدق می‌کنند:

$$1<\frac{2\times5-3}{5+1}=\frac{7}{6}<3\ ,\quad 1<\frac{2\times(-7)-3}{-7+1}=\frac{17}{6}<3$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب نامعادله است.

۲۳۹۴- گزینهٔ (۴) توجه کنید که

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2\Rightarrow\sqrt{2a^2+4a}=2-3a\Rightarrow 2a^2+4a=4-12a+9a^2$$

$$7a^2-16a+4=0\Rightarrow(7a-2)(a-2)=0\Rightarrow a=\frac{2}{7}\,,\ a=2$$

توجه کنید که اگر $a=2$، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر از ۲ است). بنابراین $a=\frac{2}{7}$. در نتیجه $\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}=1+\frac{7}{2}=4/5$.

۲۳۹۵- گزینهٔ (۳) ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{17\pi}{3})=\sin(5\pi+\frac{2\pi}{3})=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{17\pi}{6})=\cos(\frac{17\pi}{6})=\cos(3\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{19\pi}{4})=\tan(5\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\sin(\frac{-11\pi}{6})=-\sin(\frac{11\pi}{6})=-\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-(-\sin\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1)(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

۲۳۹۶- گزینهٔ (۳) ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار تابع $y=\sin x$ با تبدیلات به‌دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر بالای محور x هستند، پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})$ برابر $a+b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر $\sqrt{3}$ است، پس $a+b=\sqrt{3}$. از طرف دیگر، چون نقطهٔ $(\pi,-\frac{3}{2})$ روی نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{2}\Rightarrow a-b(\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=\sqrt{3}\\ a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow b+b\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

$$b(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow b=\sqrt{3}$$

۲۳۹۷- گزینهٔ (۱) توجه کنید که

$$(0/4)^{2x-1}=(\frac{125}{8})^{x^2}\Rightarrow(\frac{2}{5})^{2x-1}=((\frac{5}{2})^3)^{x^2}\Rightarrow(\frac{2}{5})^{2x-1}=(\frac{2}{5})^{-3x^2}$$

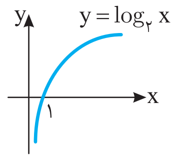
بنابراین

$$2x-1=-3x^2\Rightarrow 3x^2+2x-1=0\Rightarrow(3x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}\,,\ x=-1$$

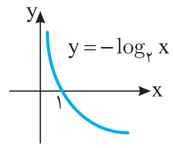
به ازای $x=-1$، مقدار $9x+1$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸ تعریف نمی‌شود. بنابراین $x=\frac{1}{3}$ و

$$\log_8(9x+1)=\log_8(3+1)=\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}\log_2 2=\frac{2}{3}$$

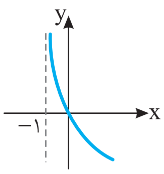
۲۳۹۸- گزینهٔ (۲) نمودار تابع $y=\log_2 x$ به‌صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع $y=-\log_2 x$ به‌صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع $y=-\log_2(x+1)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:



توجه کنید که $y=-\log_2(x+1)=\log_2(x+1)^{-1}$، بنابراین

$$U(x)=(x+1)^{-1}$$

۲۳۹۹- گزینهٔ (۱) برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=-2$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید $\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)$ و $\lim_{x\to(-2)^+}f(x)\neq f(-2)$. اکنون توجه کنید که

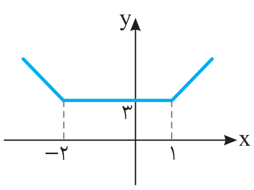
$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{8+x^3}{|x+2|}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}(-(4-2x+x^2))=-(4-2(-2)+(-2)^2)=-12$$

چون $f(-2)=a$، پس باید $a=-12$.

توجه کنید که $\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=12$ و در نتیجه $\lim_{x\to(-2)^+}f(x)\neq f(-2)$.

۲۴۰۰- گزینهٔ (۱) نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً نزولی است.



۲۴۰۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۴\sin x(-\cos x)=۱\Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۰\le k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\le ۲\pi$$

$$\frac{۱}{۱۲}\le k\le ۲+\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow k=۱,۲$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{۱۲},\ x=۲\pi-\frac{\pi}{۱۲} \qquad (۱)$$

$$۲x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۰\le k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\le ۲\pi$$

$$-\frac{۷}{۱۲}\le k<۲-\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow k=۰,۱$$

$$x=\frac{۷\pi}{۱۲},\ x=\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} \qquad (۲)$$

مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با $۴\pi+\frac{۱۴\pi-۲\pi}{۱۲}=۵\pi$.

۲۴۰۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x^۲+۱۰x+۱۶=(x+۲)(x+۸)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)(x+۸)}{۲+\sqrt[۳]{x}}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}\left(\frac{(x+۲)(x+۸)}{۲+\sqrt[۳]{x}}\times\frac{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}}{۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}}\right)$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)(x+۸)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۲^۳+\sqrt[۳]{x}^{\,۳}}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)(x+۸)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۸+x}$$

$$=\frac{۱}{۶}\lim_{x\to-۸}((x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}))$$

$$=\frac{۱}{۶}(-۸+۲)(۴-۲(-۲)+۲^۲)=-۱۲$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to-۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to-۸}\frac{۲x+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{-۱۶+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\times(-۲)^۲}}=\frac{-۶}{\frac{۱}{۲}}=-۱۲$$

۲۴۰۳- گزینهٔ ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطهٔ صفر تعریف نشده است، پس دربارهٔ حد چپ آن در نقطهٔ صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to۰^+}f(x)=\lim_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+x}=\lim_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}$$

چون $\lim_{x\to۰^+}(x^۲-۱)=-۱$ ، $\lim_{x\to۰^+}(۲x)=۰$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر مقادیر $۲x$ مثبت‌اند، پس $\lim_{x\to۰^+}f(x)=\lim_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}=-\infty$.

۲۴۰۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)-(-۲)(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^۲}\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(-۳)+۲(۳)}{(-۳)^۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

۲۴۰۵- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x=۲$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^+}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to۲^-}(-x^۲+ax+b)=\lim_{x\to۲^+}\frac{۱}{x-۱}$$

$$-۴+۲a+b=\frac{۱}{۲-۱}=۱\Rightarrow ۲a+b=۵$$

همچنین،

$$f'_-(۲)=f'_+(۲)\Rightarrow\lim_{x\to۲^-}f'(x)=\lim_{x\to۲^+}f'(x)$$

$$\lim_{x\to۲^-}(-۲x+a)=\lim_{x\to۲^+}\frac{-۱}{(x-۱)^۲}\Rightarrow -۴+a=-۱\Rightarrow a=۳$$

بنابراین

$$b=۵-۲a=-۱$$

۲۴۰۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(۲)=g'(۲)\times f'(g(۲)) \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$g'(x)=\frac{۲(x-۱)-(۱)(۲x+۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}\Rightarrow g'(۲)=-۳$$

همچنین، $g(۲)=۵$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $۶=(-۳)f'(۵)$ ، پس $f'(۵)=-۲$.

۲۴۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

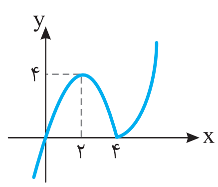
آهنگ تغییر متوسط $=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{۸-\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{۱۱}{۴}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای $=f'(۲)$

از طرف دیگر، $f'(x)=x+\frac{۱}{x^۲}$ ، پس $f'(۲)=\frac{۹}{۴}$. بنابراین اختلاف مورد نظر می‌شود $\frac{۱۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$.

۲۴۰۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۴x & x\le۴\\ x^۲-۴x & x>۴\end{cases}$.

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این شکل معلوم می‌شود که $(۴,۰)$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f و $(۲,۴)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. فاصلهٔ این نقطه‌ها برابر است با $\sqrt{(۴-۲)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$.



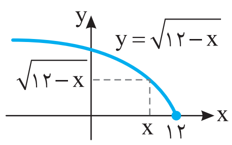
۲۴۰۹- گزینهٔ ۳ اگر مطابق شکل داده شده، طول یکی از ضلع‌های مستطیل برابر x باشد، طول ضلع دیگرش می‌شود $\sqrt{۱۲-x}$. بنابراین

مساحت مستطیل $=x\sqrt{۱۲-x}$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x\sqrt{۱۲-x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=(۱)\sqrt{۱۲-x}+x(\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}})$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۱۲-x}(۲\sqrt{۱۲-x})=x\Rightarrow ۲(۱۲-x)=x\Rightarrow x=۸$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر به ازای $x=۸$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۸\sqrt{۴}=۱۶$.

۲۴۱۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۱)^۲-۴\Rightarrow f(x)+۴=(x-۱)^۲$$

$$x=\sqrt{f(x)+۴}+۱$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$. در نتیجه طول نقطهٔ تقاطع نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ زیر است:

$$\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}+۲=x-۹\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱ \qquad (۱)$$

$$۴(x+۴)=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow(x-۵)(x-۲۱)=۰$$

$x=۵\ ,\ x=۲۱$

توجه کنید که $x=۵$ جواب نیست، زیرا به ازای $x=۵$ سمت چپ معادلهٔ (۱) مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x=۲۱$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x-۱)^۲-۴$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادله $f^{-۱}(x)=g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow f(f^{-۱}(x))=f(g(x))\Rightarrow x=f(g(x))$$

$$x=(g(x)-۱)^۲-۴\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۹}{۲}-۱)^۲\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۱۱}{۲})^۲$$

$$۴x+۱۶=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰$$

$$(x-۵)(x-۲۱)=۰\Rightarrow x=۵\ ,\ x=۲۱$$

اکنون توجه کنید که $R_{f^{-۱}}=D_f=[۱,+\infty)$ ، پس مقادیر $f^{-۱}$ مثبت‌اند. اما $g(۵)<۰$ ، پس $x=۵$ جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ نیست. بنابراین $x=۲۱$.

۲۴۱۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۱+\tan^۲ x}=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}=\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{۱}{-\cos x} \qquad (\frac{\pi}{۲}<x<\pi)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}(\frac{۱}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{-\frac{۱}{\cos x}}(\frac{۱-\sin^۲ x}{\sin x})$$

$$=-\tan x\cos x\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=-\sin x\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=-\cos^۲ x$$

۲۴۱۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}>\frac{x}{x-۲}\Rightarrow\frac{۷x-۸}{(x+۱)(x-۲)}-\frac{x}{x-۲}>۰\Rightarrow\frac{۷x-۸-x(x+۱)}{(x+۱)(x-۲)}>۰$$

$$\frac{-x^۲+۶x-۸}{(x+۱)(x-۲)}>۰\Rightarrow\frac{-(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}>۰\Rightarrow\frac{(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}<۰$$

x	$-\infty$		-۱		۲		۴		$+\infty$
$\frac{(x-۲)(x-۴)}{(x+۱)(x-۲)}$		+	ت ن	−	ت ن	−	۰	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ می‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{۰-۸}{۰-۰-۲}>\frac{۰}{۰-۲}\Rightarrow ۴>۰\ ,\qquad \frac{۲۱-۸}{۹-۳-۲}>\frac{۳}{۳-۱}\Rightarrow\frac{۱۳}{۴}>\frac{۳}{۲}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) جواب نامعادله است.

۲۴۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲a+\sqrt{۳a+۱۶}=۱\Rightarrow\sqrt{۳a+۱۶}=۱-۲a\Rightarrow\sqrt{۳a+۱۶}^{\,۲}=(۱-۲a)^۲$$

$$۳a+۱۶=۱-۴a+۴a^۲\Rightarrow ۴a^۲-۷a-۱۵=۰$$

$$(۴a+۵)(a-۳)=۰\Rightarrow a=-\frac{۵}{۴}\ ,\ a=۳$$

توجه کنید که $a=۳$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی $a=-\frac{۵}{۴}$ در تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a=-\frac{۵}{۴}$ و $۴a+۹=۴$.

۲۴۱۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha\ ,\qquad \cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

بنابراین (چون α ربع سوم است، $\cos\alpha<۰$)

$$\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱}{۱+\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{۴}{۳}\times(-\frac{۳}{۵})=-\frac{۴}{۵}\ ,\qquad \cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}=۰/۲۷$.

۲۴۱۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=a+b\sin x$. از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a+b$ است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس $a+b=۳$. همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(-\frac{۵\pi}{۶},۰)$ گذشته است، پس

$$۰=a+b\sin(-\frac{۵\pi}{۶})=a+b(-\frac{۱}{۲})=a-\frac{b}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=۳\\ a-\frac{b}{۲}=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر $y=۱+۲\sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ برابر است با $۱+۲\sin\frac{\pi}{۶}=۲$.

۲۴۱۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $3^{x^2-2}=81^x=(3^4)^x=3^{4x}$. بنابراین

$$x^2-2=4x \Rightarrow x^2-4x-2=0 \Rightarrow x=2-\sqrt{6}\,,\ x=2+\sqrt{6}$$

چون به ازای $x=2-\sqrt{6}$، مقدار $x-2$ منفی می‌شود و $\log_6(x-2)$ به ازای آن تعریف نشده است، پس $x=2-\sqrt{6}$ قابل قبول نیست. بنابراین $x=2+\sqrt{6}$ و در نتیجه

$$\log_6(x-2)=\log_6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\log_6 6=\frac{1}{2}$$

۲۴۱۷- گزینهٔ ۲ چون دامنهٔ تابع بازهٔ $(-\frac{a}{2},+\infty)$ است و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این بازه $(\frac{1}{2},+\infty)$ است، پس $a=-1$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(2,0)$ گذشته است، پس $y(2)=0$:

$$-1+\log_b(4-1)=0\Rightarrow \log_b 3=1\Rightarrow b=3$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=-1+\log_3(2x-1)$ می‌شود. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع مورد نظر با خط $y=1$ جواب معادلهٔ زیر است:

$$-1+\log_3(2x-1)=1\Rightarrow \log_3(2x-1)=2\Rightarrow 2x-1=9\Rightarrow x=5$$

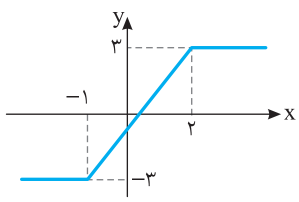
۲۴۱۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{2|x-2|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{2(-(x-2))}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{-2}=-2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{2|x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{2}=2$$

چون $f(2)=2$، پس تابع f در نقطهٔ $x=2$ فقط از راست پیوسته است.

۲۴۱۹- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-1,2)$ اکیداً صعودی است.



۲۴۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos 3x+\cos x=0\Rightarrow \cos 3x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$

$$3x=2k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$3x=2k\pi-(\pi-x)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{2}$$

چون باید $\cos x\neq 0$، پس جواب‌های به شکل $k\pi-\frac{\pi}{2}$ قبول نیستند. در نتیجه، جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ هستند $(k\in\mathbb{Z})$.

۲۴۲۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{(5x-8)(x-2)}\times\frac{4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}}{4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{8-(3x+2)}{(5x-8)(x-2)(4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{(5x-8)(x-2)(4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-3}{(5x-8)(4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2})}$$

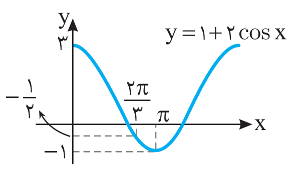
$$=\frac{-3}{(2)(4+2\times 2+2^2)}=-\frac{1}{8}$$

راه‌حل دوم بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}=\lim_{x\to 2}\frac{-\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x-18}=\frac{-\frac{1}{2^2}}{20-18}=-\frac{1}{8}$$

۲۴۲۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+}(1+2\cos x)=0$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ $\frac{2\pi}{3}$، مقادیر $1+2\cos x$ منفی هستند. بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+}\frac{\sin x}{1+2\cos x}=-\infty$$



۲۴۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}=f'(\frac{1}{4})$$

از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{(-1)(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{(\sqrt{x})^2}.$$

پس

$$f'(\frac{1}{4})=\frac{-\frac{1}{2}+(1)(\frac{1}{4}+1)}{\frac{1}{4}}=3$$

۲۴۲۴- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز است. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}\frac{۸}{ax+b}=۴\Rightarrow \frac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow ۲a+b=۲$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-۸a}{(ax+b)^۲} & x>۲\\ -۳x^۲+۶ & x<۲\end{cases}$. پس

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲}=\frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=\frac{-۸a}{۲^۲}=-۲a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-} f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۳x^۲+۶)=-۶$$

بنابراین

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow -۲a=-۶\Rightarrow a=۳$$

۲۴۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=x(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}$. پس

$$f'(x)=(۱)(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}+x\times\frac{۱}{۳}(\frac{(۳)(x+۲)-(۱)(۳x+۱)}{(x+۲)^۲})(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}-۱}$$

در نتیجه

$$f'(-۳)=(\frac{-۸}{-۱})^{\frac{۱}{۳}}+(-۳)(\frac{۱}{۳})(\frac{۳(-۱)-(-۸)}{(-۱)^۲})(\frac{-۸}{-۱})^{-\frac{۲}{۳}}=۲-۵\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۲۴۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نقطه‌های ابتدایی و انتهایی نمودار تابع $(۰,f(۰))$ و $(۸,f(۸))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر است با $\frac{f(۸)-f(۰)}{۸-۰}=\frac{۳-(-۵)}{۸}=۱$. اکنون طول نقطه‌ای را روی نمودار تابع f پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

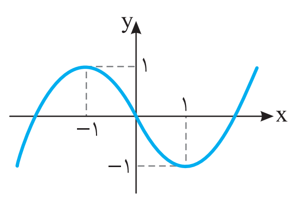
$$f'(x)=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=۱\Rightarrow \frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱$$

$$(x+۱)^۲=۹\Rightarrow x=۲\ ,\ \ x=-۴\ \ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با $f(۲)=۱$.
معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است به‌صورت $y-۱=(۱)(x-۲)$ یعنی $y=x-۱$ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور y را قطع می‌کند برابر است با $y=۰-۱=-۱$.

۲۴۲۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲x & x\leq ۰\\ x^۲-۲x & x>۰\end{cases}$.
پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع f به‌ترتیب نقطه‌های $(-۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

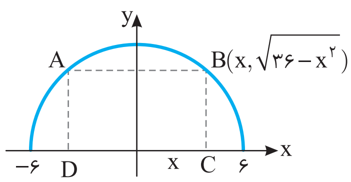


۲۴۲۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم مستطیل موردنظر ABCD باشد و طول نقطهٔ C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ B روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۳۶$ است، پس عرض نقطهٔ B برابر است با $\sqrt{۳۶-x^۲}$. به این ترتیب، $S_{ABCD}=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$. باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲\sqrt{۳۶-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳۶-x^۲=x^۲\Rightarrow x^۲=۱۸\Rightarrow x=۳\sqrt{۲}\ (x>۰)$$

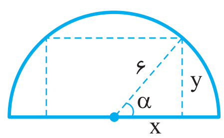
بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به ازای $x=۳\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲(۳\sqrt{۲})\sqrt{۳۶-۱۸}=۳۶$.



راه‌حل دوم با نمادگذاری شکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مستطیل $۲x$ و y باشند. در این صورت $x=۶\cos\alpha$ و $y=۶\sin\alpha$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل}=۲xy=۲(۶\cos\alpha)(۶\sin\alpha)=۳۶\sin ۲\alpha\leq ۳۶$$

توجه کنید که تساوی وقتی به‌دست می‌آید که $۲\alpha=۹۰^\circ$، یعنی $\alpha=۴۵^\circ$.



۲۴۲۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که شکل nام از مستطیلی با $۲\times(n+۱)$ دایره و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل nام برابر است با $۲(n+۱)+n=۳n+۲$. پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر است با $۳\times۱۲+۲=۳۸$.

۲۴۳۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$$

اکنون فرض کنید $f^{-۱}(۸)=a$. در این صورت

$$f(a)=۸\Rightarrow \frac{۲}{۵}a-۴=۸\Rightarrow a=۳۰$$

اکنون فرض کنید $g^{-۱}(۳۰)=b$. در این صورت

$$g(b)=۳۰\Rightarrow b^۳+b=۳۰\Rightarrow b=۳$$

بنابراین $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=g^{-۱}(۳۰)=۳$.

یادداشت

یادداشت