

پرفروش‌ترین
کتاب‌های
امتحان
شماره ۱۳۹۸



ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم
رشته ریاضی و فیزیک

مؤلف

آرش عمید

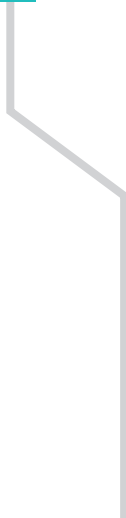
فرمول
لیست

سلام

- این کتاب کامل‌ترین کتاب کمک آموزشی برای آزمون‌های تشریحی در درس ریاضیات گسسته است.
- در این کتاب به شما یاد داده‌ام که چه مطالبی را برای شرکت در امتحانات تشریحی باید بدانیم تا مفاهیم و نکات خاصی که برای شرکت در کنکور سراسری بلدید را با خود سر جلسه نبرید و از آن‌ها در پاسخ‌گویی استفاده نکنید. این کار را با ارائه بسته‌های آموزشی مفید، مختصر و مهندسی شده انجام داده‌ام.
- در انتهای هر بسته آموزشی، تعداد زیادی سؤال که از نظر تعداد و درجه سختی متناسب با مطالب آن بسته و امتحانات تشریحی است آورده‌ام.
- با حل این سؤالات آمادگی لازم برای کسب نمره ۲۰ در هر آزمون تشریحی را کسب می‌کنید. زیرا تمام تمرینات، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌های کتاب درسی و تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم را پوشش داده‌ام.
- پاسخ تشریحی سؤالات هم به گونه‌ای است که قابل فهم، خودآموز و راهگشا باشد.
- در انتها تشکر ویژه می‌کنم از تمام همکارانم در انتشارات بین‌المللی گاج که بدون کمک آن‌ها آماده کردن این کتاب امکان‌پذیر نبود.
- با بنده می‌توانید از طریق آیدی تلگرام @ar_amid در ارتباط باشید.

 @ArashAmid

 ar.Amid



پاسخ	درسنامه و سؤالات
۱۷۶	۶ تا ۶۸
۲۴۰	۱۲۶ تا ۶۹
۲۷۳	۱۲۷ تا ۱۷۴

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

فصل دوم: گراف و مدل سازی

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

امتحان نهایی



آزمون ۱: خرداد ماه ۱۴۰۳ ۳۰۶

آزمون ۲: مرداد ماه ۱۴۰۳ ۳۰۷

آزمون ۳: دی ماه ۱۴۰۳ ۳۰۸

آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۴ ۳۰۹

آزمون ۵: شهریور ماه ۱۴۰۴ ۳۱۰

پاسخ نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۵ ۳۱۲

بارم بندی درس ریاضیات گسسته

نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل
۶	۱۵	اول
۲	۵	تا صفحه ۴۲
۵	-	صفحه ۴۲ به بعد
۷	-	سوم
۲۰	۲۰	جمع

۱

بخش



درستنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

درس اول: استدلال ریاضی

ریاضیات گسسته

در این درس با پنج نوع استدلال که در اثبات درستی یا نادرستی گزاره‌های ریاضی به کار می‌روند آشنا می‌شویم که عبارتند از:

- ۱ مثال نقض
- ۲ اثبات مستقیم
- ۳ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها
- ۴ برهان خلف
- ۵ اثبات بازگشتی

مثال نقض

بسته اول



■ **مثال نقض:** به مثالی که برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود مثال نقض می‌گویند. مثلاً گزاره «هر عدد اول، عددی فرد است». گزاره‌ای نادرست است. حال برای آن‌که اثبات کنیم این گزاره نادرست است، عدد ۲ را مثال می‌زنیم و می‌گوییم ۲ عددی اول است ولی فرد نیست، پس گزاره «هر عدد اول، عددی فرد است». نادرست می‌باشد.

■ **ابزارهای لازم برای ارائه مثال نقض:** گزاره‌های شرطی و گزاره‌ها با سور عمومی می‌توانند مثال نقض داشته باشند. برای ارائه مثال نقض باید بر تمام مفاهیم ریاضی که در دوره دبیرستان خوانده‌ایم تسلط نسبی داشته باشیم و به دو مورد زیر نیز توجه کنیم:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۱ برای ارائه مثال نقض برای گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، باید مثالی بزینم که فرض گزاره شرطی، یعنی p درست ولی حکم گزاره یعنی q نادرست باشد. این مطلب را سطر مشخص شده جدول مقابل توجیه می‌کند.

۲ برای ارائه مثال نقض برای گزاره سوری « $\forall x; p(x)$ » کافی است عضوی مانند x_0 از دامنه گزاره نمای $p(x)$ پیدا کنیم به طوری که $p(x_0)$ نادرست باشد. ■ **مثال نقض‌های کتاب درسی:** در کتاب درسی گزاره‌های زیر مطرح شده و شما باید ضمن تشخیص نادرست بودن آن‌ها برای آن‌ها مثال نقض ارایه کنید.

(مثال قسمت (ب) صفحه ۲ کتاب درسی)

۱ عدد $2^n + 1$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است. $n = 5$ ✓

کتاب درسی گفته $2^5 + 1$ برابر 4294967297 می‌شه و تئریه این عدد به صورت 641×6700417 هستش، پس اول نیست. نیازی به حفظ کردن اون عدد غول و تئریش نیست، فقط حفظ کنید که مثال نقضش $n = 5$ هست.

نکته هیچ رابطه‌ای وجود ندارد که به ازای همه ورودی‌هایش، عدد اول تولید کند، پس هرگاه گزاره‌ای نظیر «عبارت فلان، به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.» دیدید، مطمئن باشید مثال نقض دارد و برای اثبات نادرستی آن دنبال مثال نقض بگردید.

(کار در کلاس قسمت (ب) صفحه ۳ کتاب درسی)

۲ برای هر دو عدد حقیقی x و y، $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ است.

✓ $\sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}$ ؛ $y = 1$ و $x = 1$

توجه کن که در این‌ها می‌تونی مثال نقض‌های زیادی ارائه کنی.

نکته اگر در عبارت می‌گفت برای هر دو عدد حقیقی و متمایز x و y، آن‌گاه $x = 1$ و $y = 1$ دیگر درست نبود و باید دو عدد متمایز مثل ۵ و ۴ مثال بزینم.

(کار در کلاس قسمت (پ) صفحه ۳ کتاب درسی)

۳ برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

✓ به ازای $n = 4$ ، به ازای $n = 4$ عدد $2^n - 1$ برابر ۱۵ می شود که اول نیست.

گفته بودم که هیچ رابطه ای وجود ندارد که به ازای همه ورودی ها عدد اول تولید کند، پس $2^n - 1$ هم همین طور و هتماً مثال نقض دارد.

(کار در کلاس قسمت (ث) صفحه ۳ کتاب درسی)

۴ اگر برای سه مجموعه A, B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آن گاه $B = C$.

✓ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{1, 2\}$ و $C = \{3\}$ ، در این صورت $A \cup B = A \cup C$ است ولی $B \neq C$ می باشد.

نکته به طور کلی قانون حذف در مورد اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه ها برقرار نیست، یعنی از تساوی های $A \cap B = A \cap C$ ، $A \cup B = A \cup C$ و $A - B = A - C$ یا $B - A = C - A$ نمی توان نتیجه گرفت که $B = C$ است. پس هرگاه چنین گزاره هایی دیدید مطمئن باشید که نادرست هستند و دنبال مثال نقض بگردید.

مثال نقض

پرسش های تشریحی

بسته
۱

در صفحه ۳ کتاب درسی چنین جمله ای وجود دارد که «مفتوای آموزش این درس در پارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته اید.» پس ممکنه سوالی مثال نقض فقط همونایی نباشه که تو کتاب گسسته اومده، بنابراین در اینجا کلی سوال مثال نقض براتون آماده کردم.

● جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

۱. کوچک ترین عدد طبیعی که کلیت حکم «اگر n یک عدد طبیعی باشد، $2^{2n} + 1$ عددی اول است» را نقض می کند، عدد است.
۲. کوچک ترین عدد طبیعی که کلیت حکم «به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^2 + n + 5$ عددی اول است» را نقض می کند، عدد است.
۳. عدد $3 - \sqrt{5}$ مثال نقض عبارت «مربع هر عدد گنگ، عددی است، می باشد. (گویا - گنگ)
۴. مجموع ۶ عدد صحیح متوالی بر عدد ۶ بخش پذیر (است - نیست)

● درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

۵. حکم «مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.» مثال نقض ندارد. (شهریور ۹۸)
۶. حکم «برای هر دو عدد طبیعی x و y ، $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ » مثال نقض ندارد.
۷. حکم «مربع هر عدد طبیعی از خود عدد بزرگتر است.» مثال نقض دارد.
۸. حکم «اگر $a^2 > b^2$ آن گاه $a > b$ » مثال نقض ندارد.
۹. حکم «اگر $a > b$ آن گاه $a^2 > b^2$ » مثال نقض ندارد.
۱۰. حکم « $2^n > n^2$ » در مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، مثال نقض ندارد.
۱۱. حکم «مربع هر عدد گنگ، عددی گنگ است.» همواره درست می باشد.
۱۲. حکم «هر متوازی الاضلاعی که دو قطر برابر داشته باشد، مستطیل است.» مثال نقض دارد.
۱۳. اگر $a + 2b$ زوج باشد، آن گاه عدد $a^2 + b^2$ عددی زوج است.
۱۴. برای هر دو عدد حقیقی a و b ، اگر $a^2 + b^2 = 0$ باشد، آن گاه $a = 0$ و $b = 0$.
۱۵. اگر p عددی اول باشد، $p + 1$ عددی زوج است.
۱۶. گزاره «حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.» مثال نقض ندارد. (خرداد ۱۴۰۰)

● برای اثبات نادرستی گزاره های زیر، مثال نقض ارائه کنید.

۱۷. اگر a یک عدد حقیقی و $a^2 > 0$ باشد، آن گاه $a > 0$ است.
۱۸. اگر $x > \frac{1}{3}$ آن گاه $x > \frac{1}{3}$.
۱۹. اگر $x^2 \geq x$ آن گاه $x < 0$.
۲۰. اگر $x^2 > x$ آن گاه $x > 0$.
۲۱. عدد حقیقی و مثبت x وجود ندارد که $x^3 \leq x^2$ باشد.
۲۲. برای هر عدد حقیقی و نامنفی x ، $\sqrt{x} \leq x$ است.

(تمرین ۲ صفحه ۸ کتاب درسی)

(مثال صفحه ۲ کتاب درسی)

(کاردرکلاس قسمت (پ) صفحه ۳ کتاب درسی - شهریور ۹۸ - دی ۹۹)

(شهریور ۱۴۰۱)

(کاردرکلاس قسمت (ب) صفحه ۳ کتاب درسی - شهریور ۹۹)

(خرداد ۹۹ - شهریور ۹۹ - خرداد ۱۴۰۱)

(شهریور و دی ۱۴۰۲)

(کاردرکلاس قسمت (پ) صفحه ۳ کتاب درسی)

۲۳. اگر $3 - x^2 < 4$ ، آن گاه $x > 1$.
۲۴. اگر $a \leq b$ و $c \leq d$ آن گاه $ac \leq bd$.
۲۵. به ازای هر عدد حقیقی و ناصفر x, y و z تساوی $\frac{x}{y+z} = \frac{x}{y} + \frac{x}{z}$ برقرار است.
۲۶. اگر $ab = 0$ آن گاه $a = 0$ و $b = 0$.
۲۷. مجموع ۴ عدد صحیح متوالی بر ۴ بخش پذیر است.
۲۸. مجموع n عدد طبیعی متوالی بر n بخش پذیر است.
۲۹. مربع هر عدد طبیعی از مکعب آن کوچک تر است.
۳۰. اگر a و b دو عدد حقیقی و ab عددی فرد باشد، $a^2 + b^2$ عددی فرد است.
۳۱. هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.
۳۲. اگر p عددی اول باشد، آن گاه $p^2 + 1$ عددی اول است.
۳۳. عدد $2^{2^n} + 1$ به ازای همه عددهای طبیعی n ، عددی اول است.
۳۴. برای هر عدد طبیعی n بزرگ تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.
۳۵. برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 1$ اول است.
۳۶. به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 3$ عددی اول است.
۳۷. برای هر عدد طبیعی n ، عدد $5^n + 2$ عددی اول است.
۳۸. برای هر عدد طبیعی و یک رقمی n ، عدد $3^n + 4$ یک عدد اول است.
۳۹. برای هر عدد طبیعی n ، عدد $3^n + 2$ اول است.
۴۰. برای هر عدد طبیعی n ، عدد $5^n + 2^n$ عددی اول است.
۴۱. به ازای هر عدد طبیعی n عدد $n^2 + n + 41$ عددی اول است.
۴۲. مجموع هر دو عدد مرکب، عددی مرکب است.
۴۳. به ازای هیچ دو عدد اول a و b ، عدد $a + b$ اول نیست.
۴۴. حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی، عددی مرکب است.
۴۵. مجموع دو عدد مربع کامل، عددی مربع کامل نیست.
۴۶. اگر مجموع ارقام عددی بر ۴ بخش پذیر باشد، آن گاه آن عدد بر ۴ بخش پذیر است.
۴۷. اگر n^2 مضرب ۱۲ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۱۲ است.
۴۸. برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
۴۹. برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
۵۰. اگر x و y دو عدد حقیقی و $0 < x > y$ باشد، آن گاه $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$.
۵۱. حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۵۲. اگر x و y اعداد گنگ باشند، x^y عددی گنگ است.
۵۳. اگر n عددی گنگ باشد، عدد $9n^2 - 12n + 5$ عددی گنگ است.
۵۴. حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۵۵. حاصل ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.
۵۶. اگر a, b و c اعداد طبیعی متمایز باشند، آن گاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است.
۵۷. اگر a و b دو عدد گنگ و $a + b$ عددی گویا باشد، $a + 2b$ نیز گویا است.
۵۸. مکعب هر عدد گنگ، عددی گنگ است.
۵۹. حاصل تقسیم هر دو عدد گویا، عددی گویا است.
۶۰. اگر A, B و C سه مجموعه و $A - B = A - C$ باشد، آن گاه $B = C$ است.
۶۱. اگر A, B و C سه مجموعه و $A - C = B - C$ باشد، آن گاه $A = B$ است.
۶۲. اگر A, B و C سه مجموعه و $A \cup B = A \cup C$ باشد، آن گاه $B = C$ است.
۶۳. اگر A, B و C سه مجموعه و $A \cap B = A \cap C$ باشد، آن گاه $B = C$ است.

(کتاب راهنمای معلم)

۶۴. اگر $A \not\subseteq B$ و $C \not\subseteq A$ آن گاه $A \not\subseteq C$.
۶۵. اگر $x \in A$ و $A \in B$ آن گاه $x \notin B$.
۶۶. برای هر دو مجموعه دلخواه A و B ، $A \times B = B \times A$ است.
۶۷. اگر دو ارتفاع مثلث برابر باشند، آن گاه مثلث، متساوی الاضلاع است.
۶۸. هر چهارضلعی که دو قطر برابر داشته باشد، مستطیل است.
۶۹. هر چهارضلعی که دو قطر برابر و عمود بر هم داشته باشد، مربع است.
۷۰. در هر مثلث، محل هم‌رسی ارتفاع‌ها درون مثلث است.
۷۱. اگر اندازه کمان‌های محصور بین دو وتر برابر باشند، آن دو وتر موازی‌اند.
۷۲. اگر x و y اعداد حقیقی باشند، آن گاه $|x + y| = |x| + |y|$.
۷۳. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن گاه $[x + y] = [x] + [y]$.
۷۴. اگر x یک عدد حقیقی باشد، آن گاه $[|x|] = |[x]|$.
۷۵. اعداد صحیح a و b وجود ندارد که مجموع مربعات آن‌ها با مربع مجموع آن‌ها برابر باشد.
۷۶. اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و $AB = \bar{O}$ باشد، آن گاه $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$.
۷۷. مجموع یک تابع اکیداً صعودی و یک تابع اکیداً نزولی، تابعی ثابت است.
۷۸. تابعی مانند f وجود ندارد که $f = f^{-1}$ باشد.
۷۹. تابع غیرخطی مانند f وجود ندارد که $f = f^{-1}$ باشد.
۸۰. به ازای هر عدد حقیقی x ، $\sin 2x = 2 \sin x$ است.
۸۱. اگر $\sin \alpha = \sin \beta$ آن گاه $\alpha = \beta$.
۸۲. اگر x یک عدد حقیقی باشد، آن گاه $\tan x \times \cos x = \sin x$.
۸۳. برای هر دو عدد مثبت a و b رابطه $\log ab = \log a + \log b$ برقرار است.
۸۴. مجموع دو زاویه حاده، زاویه‌ای حاده است.

اثبات مستقیم

بسته دوم



در بسته ۱ دیرین که برای رد درستی یک حکم کلی، ارائه یک مثال نقض کافیۀ اما برای اثبات یک حکم کلی، هر تعداد مثال، برای تأیید اون حکم، ارائه کنی فقط در جهت درک بهتر اون حکم هستش و دلیلی بر درستی اون حکم کلی نیست. بنابراین نیازه که به کمک یکی از روش‌های استدلال، اون حکم رو اثبات کنی، یکی از روش‌ها، اثبات مستقیم هست که در ادامه می‌بینید.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

■ **اثبات مستقیم:** در این نوع اثبات، از درستی فرض، درستی حکم را نتیجه می‌گیریم. در واقع این نوع اثبات با سطر اول جدول مقابل توجیه می‌شود.

■ **ابزارهای لازم در اثبات مستقیم:** در این نوع اثبات باید فرض را که معمولاً به صورت توصیفی بیان می‌شود به زبان ریاضی تبدیل کنیم و با انجام اعمال ریاضی خواسته شده روی فرض، درستی حکم را نشان دهیم. برای تبدیل بیان توصیفی به زبان ریاضی به موارد زیر توجه کنید:

- ۱ اعداد طبیعی یا حسابی یا صحیح یا گنگ را با حروف کوچک انگلیسی نظیر a یا b یا c یا n یا p یا ... نمایش می‌دهیم.
- ۲ اعداد گویا را به صورت $\frac{a}{b}$ یا $\frac{m}{n}$ یا $\frac{p}{q}$ یا ... نمایش می‌دهیم و در ادامه حتماً باید تأکید کنیم که صورت و مخرج، اعداد صحیح و مخرج، مخالف صفر است.
- ۳ اعداد متوالی را به صورت a ، $a+1$ ، $a+2$ و ... نمایش می‌دهیم اما اگر تعداد اعداد متوالی، فرد باشد می‌توانیم مثلاً سه عدد متوالی را به صورت a ، $a+1$ ، $a+2$ و $a-1$ ، پنج عدد متوالی را به صورت a ، $a+1$ ، $a+2$ ، $a-1$ ، $a-2$ و ... نمایش می‌دهیم. هم‌چنین مربع عدد a را به صورت a^2 و مکعب عدد a را با a^3 نمایش می‌دهیم. توجه کنید به مربع یک عدد، مجذور آن عدد هم می‌گویند.
- ۴ عدد زوج را با $2k$ و عدد فرد را با $2k+1$ نمایش می‌دهیم. حال اگر صحبت از چند عدد زوج یا چند عدد فرد بود، آن‌ها را با k' ، k'' و ... متمایز می‌کنیم مثلاً اگر بگویید دو عدد فرد، دو عدد را با $2k+1$ و $2k'+1$ نشان می‌دهیم. در ضمن اعداد زوج و اعداد فرد، ۲ واحد ۲ واحد اختلاف دارند، پس اگر بگویید دو عدد زوج متوالی آن‌ها را به صورت $2k$ و $2k+2$ نشان می‌دهیم. توجه کنید اعداد فرد را می‌توانید به صورت $2k-1$ ، $2k'+1$ و ... نیز نشان دهیم.

نتیجه عدد مضرب m را با mk نشان می‌دهیم. مثلاً اگر بگویید a مضرب ۵ است، می‌نویسیم $a = 5k$.

۵ مجموع مربعات دو عدد می شود $a^2 + b^2$ ، مجموع مکعبات دو عدد می شود $a^3 + b^3$ و به طریق مشابه واضح است که تفاضل مربعات دو عدد به صورت $a^2 - b^2$ و تفاضل مکعبات دو عدد به صورت $a^3 - b^3$ نمایش داده می شود.

۱۰ اثبات های مستقیم کتاب درسی: موارد زیر در کتاب درسی برای اثبات مستقیم مطرح شده اند اما توجه داشته باشید که باید گزاره هایی که درستی آن ها را با اثبات مستقیم نشان می دهیم، از بین گزاره های نادرست تشخیص دهیم، سپس آن ها را اثبات کنیم. مثلاً می گویند کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام یک نادرست است. برای نادرست ها مثال نقض ارائه کنید و درست ها را اثبات کنید.

(مثال صفحه ۲ کتاب درسی)

۱ مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

اثبات

فرض می کنیم سه عدد طبیعی متوالی n ، $n+1$ و $n+2$ باشند، پس:

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1) = 3k$$

$$n-1 + n + n+1 = 3n$$

می توانیم سه عدد طبیعی متوالی $n-1$ ، n و $n+1$ در نظر بگیریم و داریم:

(کار در کلاس قسمت (الف) صفحه ۳ کتاب درسی)

۲ مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

اثبات

فرض می کنیم دو عدد فرد $2k+1$ و $2k'+1$ باشند، پس:

$$2k+1 + 2k'+1 = 2k + 2k' + 2 = 2(k+k'+1) = 2q$$

(کار در کلاس قسمت (ج) صفحه ۳ کتاب درسی)

۳ اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن گاه $4k+1$ مربع کامل است.

اثبات

حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی $n(n+1)$ است، پس $k = n(n+1)$ می باشد و داریم:

$$4k+1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

(کار در کلاس قسمت (ت) صفحه ۳ کتاب درسی)

۴ مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.

اثبات

فرض می کنیم که دو عدد گویا $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هستند. که در آن ها a, b, c, d اعداد صحیح و $d \neq 0$ و $b \neq 0$ است. پس:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

می دانیم حاصل ضرب و حاصل جمع دو عدد صحیح، عددی صحیح است، پس $ad+bc$ و bd اعداد صحیح هستند و چون b و d مخالف صفر هستند،

پس $bd \neq 0$ می باشد و این یعنی $\frac{ad+bc}{bd}$ که همان مجموع دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ است، عددی گویا می باشد.

(تمرین ۶ قسمت (الف) صفحه ۸ کتاب درسی)

۵ مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

اثبات

فرض می کنیم عدد فرد $2k+1$ باشد، پس:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q+1$$

(تمرین ۶ قسمت (الف) صفحه ۸ کتاب درسی)

۶ مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

اثبات

فرض می کنیم عدد فرد $2k+1$ باشد، پس:

$$(2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1 = 2q+1$$

(تمرین ۶ قسمت (ب) صفحه ۸ کتاب درسی)

۷ میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

اثبات

فرض می کنیم پنج عدد متوالی $n-2$ ، $n-1$ ، n ، $n+1$ ، $n+2$ باشند، که واضح است عدد وسطی n است، پس:

$$\bar{x} = \frac{n-2+n-1+n+n+1+n+2}{5} = \frac{5n}{5} = n$$

● جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

۸۵. مجموع هر دو عدد فرد، عددی است. (فرد - زوج)
۸۶. مجموع سه عدد فرد، عددی است. (فرد - زوج)
۸۷. با روش می توان ثابت کرد مربع هر عدد صحیح فرد، عددی فرد است.
۸۸. مجموع ۵ عدد صحیح متوالی بر عدد ۵ بخش پذیر (است - نیست)
۸۹. اگر a و b دو عدد صحیح و $a + b$ فرد باشد آن گاه $a^2 + b^2$ عددی است. (زوج - فرد)

● درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

۹۰. اگر $a + 1$ عددی فرد باشد، $a - 4$ عددی زوج است.
۹۱. مجموع دو عدد فرد، عددی فرد است.
۹۲. اگر a عدد صحیح فرد باشد، به ازای بعضی مقادیر طبیعی n عدد a^{2n} زوج است.
۹۳. مجموع مربعات سه عدد فرد، عددی فرد است.
۹۴. مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.
۹۵. میانگین چهار عدد متوالی با یکی از همان اعداد برابر است.
۹۶. اگر a عددی فرد باشد، عدد $a^2 + a^3$ عدد زوج است.
۹۷. اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن گاه $4k + 1$ مربع کامل است.

(دی ۹۷)

● درستی گزاره های زیر را به کمک اثبات مستقیم نشان دهید.

۹۸. اگر a عددی فرد باشد، $a + 3$ عددی زوج است.
۹۹. مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی فرد است.
۱۰۰. مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
۱۰۱. اگر ۷ برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم، حاصل همواره عددی فرد است.
۱۰۲. حاصل ضرب دو عدد فرد متوالی، عددی فرد است.
۱۰۳. حاصل ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است.
۱۰۴. حاصل ضرب یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی زوج است.

(تمرین ۶ قسمت (الف) صفحه ۸ کتاب درسی - خرداد و شهریور ۱۴۰۱)

(تمرین ۶ قسمت (الف) صفحه ۸ کتاب درسی)

(مثال صفحه ۲ کتاب درسی)

(تمرین ۶ قسمت (ب) صفحه ۸ کتاب درسی - خرداد ۱۴۰۳)

۱۰۵. مربع هر عدد صحیح فرد، عددی فرد است.
۱۰۶. مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.
۱۰۷. مجموع سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.
۱۰۸. مجموع ۵ عدد صحیح متوالی بر ۵ بخش پذیر است.
۱۰۹. میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.
۱۱۰. اگر n فرد باشد، مجموع n عدد صحیح متوالی بر n بخش پذیر است.
۱۱۱. مجموع مربعات دو عدد فرد، عددی زوج است.
۱۱۲. اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشند، آن گاه $a^3 + b^3$ زوج است.
۱۱۳. تفاضل مربعات دو عدد فرد، مضرب ۴ است.

(خرداد ۱۴۰۱ خارج)

(خرداد ۱۴۰۱)

۱۱۴. اگر n عددی فرد باشد، حاصل $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.
۱۱۵. برای هر عدد طبیعی زوج n حاصل $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.
۱۱۶. اگر به حاصل ضرب دو عدد فرد، یک واحد اضافه کنیم، عددی زوج به دست می آید.

(دی ۱۴۰۲)

۱۱۷. عدد حاصل از اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، مربع کامل است.
۱۱۸. مجموع سه عدد فرد، عددی فرد است.

(کاردرکلاس قسمت (ج) صفحه ۳ کتاب درسی - دی ۹۷)

(دی ۱۴۰۲)

۱۱۹. اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن گاه $4k + 1$ مربع کامل است.
۱۲۰. با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.
۱۲۱. اگر $4k + 1$ مربع کامل باشد، آن گاه k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی است.
۱۲۲. حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۱۲۳. برای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

۱۲۴. اگر a عددی زوج و $b = (a-1)$ آن گاه $b = 0$.

۱۲۵. اگر x و y دو عدد حقیقی ناصفر و $x + y = 1$ باشد آن گاه $(1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{y}) = 1$.

۱۲۶. اگر به حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی، یک واحد اضافه کنیم، حاصل عددی مربع کامل است.

۱۲۷. مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.

۱۲۸. حاصل ضرب دو عدد گویا، عددی گویا است.

۱۲۹. اگر a و b دو عدد گویا و $b \neq 0$ باشد، آن گاه $\frac{a}{b}$ عددی گویا است.

۱۳۰. تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است.

۱۳۱. عدد ۳ رقمی abc بر ۳ بخش پذیر است هرگاه $a + b + c$ بر ۳ بخش پذیر باشد.

۱۳۲. عدد ۵ رقمی $abcde$ بر ۴ بخش پذیر است هرگاه عدد دورقمی de بر ۴ بخش پذیر باشد.

۱۳۳. عدد شش رقمی $abcabc$ بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است.

۱۳۴. اگر $a + \frac{1}{a} \geq 2$ باشد، آن گاه $a > 0$.

۱۳۵. حاصل ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

۱۳۶. مربع هر عدد صحیح فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیش تراست.

۱۳۷. اگر از مربع عددی فرد، یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.

۱۳۸. اگر a عددی زوج باشد، عدد $a(a^2 - 4)$ بر ۴۸ بخش پذیر است.

۱۳۹. عدد اولی چون p وجود دارد که $1 + p$ مکعب کامل باشد.

(کاردرکلاس قسمت (ت) صفحه ۳ کتاب درسی)

(کتاب راهنمای معلم)

(خرداد ۹۹)

(کتاب راهنمای معلم)

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

بسته سوم



اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها: گاهی فرض مسئله آن قدر غنی نیست که بتوان از آن برای اثبات حکم استفاده کرد. مثلاً در اثبات حکم «برای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است»، از طبیعی بودن n ، به سختی می‌توان فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ را نتیجه گرفت. بنابراین در این جا باید n را در دو حالت زوج و فرد در نظر بگیریم و در هر حالت نشان دهیم $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است. به این روش اثبات که فرض را به فرض‌های کوچک‌تر تبدیل کرده و از هر فرض، به حکم مسئله می‌رسیم اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها می‌گوییم. **در واقع چند اثبات مستقیم رو باید انجام بدیم.**

ابزارهای لازم در اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها:

۱. اگر فرض مسئله به صورت « a یک عدد حقیقی است.» باشد، با توجه به حکم مسئله می‌توان a را به دو حالت $a = 0$ و $a \neq 0$ یا $a > 0$ و $a < 0$ تبدیل کرد.

۲. اگر فرض مسئله به صورت « a یک عدد صحیح یا یک عدد طبیعی است.» باشد و حکم مسئله در مورد زوج یا فرد بودن یک عبارت بود می‌توان a را به اعداد زوج و فرد یعنی $a = 2k$ و $a = 2k + 1$ تبدیل کرد.

۳. اگر فرض مسئله به صورت « a یک عدد صحیح یا یک عدد طبیعی است.» باشد و حکم مسئله در مورد مضرب m بودن یک عبارت بود می‌توان a را به صورت $mk + 1$ ، $mk + 2$ ، ... و $mk + (m-1)$ در نظر گرفت. مثلاً اعداد صحیح به یکی از صورت‌های $3k$ ، $3k + 1$ و $3k + 2$ هستند.

۴. اگر فرض مسئله شامل تعداد محدودی عدد بود، کافی است هریک از اعداد را به عنوان حالت‌های مختلف برای آن مسئله در نظر بگیریم. مثلاً اگر بگویید «کدام عدد یا عددها از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ می‌تواند یک عبارت را زوج یا فرد یا مضرب m یا ... کند»، کافی است حاصل عبارت خواسته شده را به ازای $n = 1$ ، $n = 2$ ، ... و $n = 5$ به دست آوریم و ببینیم کدام n یا n ها خواسته سؤال را برآورده می‌کنند.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌های کتاب درسی: موارد زیر در کتاب درسی مطرح شده است:

(مثال صفحه ۴ کتاب درسی)

۱. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

اثبات

حالت اول: فرض می‌کنیم n زوج باشد، پس $n = 2k$ می‌باشد و داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 7 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$$

حالت دوم: فرض می‌کنیم n فرد باشد، پس $n = 2k + 1$ می‌باشد و داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k + 1)^2 - 5(2k + 1) + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7 = 4k^2 - 6k + 3 = 2(2k^2 - 3k + 1) + 1 = 2q + 1$$

(مثال صفحه ۴ کتاب درسی)

۲ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی و $ab = 0$ باشد، آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

اثبات

حالت اول فرض می‌کنیم $a = 0$ باشد، در این صورت حکم برقرار است زیرا حکم، ترکیب فصلی $a = 0$ و $b = 0$ است و چون $a = 0$ برقرار است، پس حکم $b = 0 \vee a = 0$ درست می‌باشد.

توجه کن گزاره مرکب $p \vee q$ زمانی نادرسته که p و q نادرست باشند، در غیر این صورت $p \vee q$ درسته.

حالت دوم فرض می‌کنیم $a \neq 0$ باشد، حال برای آن که حکم درست باشد باید نشان دهیم $b = 0$ است، چون $a \neq 0$ است پس $\frac{1}{a}$ یک عدد حقیقی است و داریم:

$$ab = 0 \xrightarrow{\frac{1}{a} \times} \frac{1}{a} \times ab = \frac{1}{a} \times 0 \Rightarrow b = 0$$

(تمرین ۴ صفحه ۸ کتاب درسی)

۳ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ باشد؟

از تساوی $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ داریم:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } y = 0$$

بنابراین x و y هایی که در این تساوی صدق می‌کنند باید حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد.

(کار در کلاس قسمت الف) صفحه ۵ کتاب درسی)

۳ اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ عددی زوج است.

اثبات

ابتدا تمام حالت‌ها را از نظر زوج و فرد بودن برای a و b در نظر می‌گیریم:

$$a = 2k, b = 2k' \Rightarrow ab = 2k \times 2k' = 4kk' = 2(\underbrace{2kk'}_q) = 2q$$

$$a = 2k, b = 2k' + 1 \Rightarrow ab = 2k \times (2k' + 1) = 4kk' + 2k = 2(\underbrace{2kk' + k}_q) = 2q$$

$$a = 2k + 1, b = 2k' \Rightarrow ab = (2k + 1) \times 2k' = 4kk' + 2k' = 2(\underbrace{2kk' + k'}_q) = 2q$$

$$a = 2k + 1, b = 2k' + 1 \Rightarrow ab = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(\underbrace{2kk' + k + k'}_q) + 1 = 2q + 1$$

بنابراین ab هنگامی فرد است که a و b فرد باشند، پس:

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 4k^2 + 4k'^2 + 4k + 4k' + 2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k'^2 + 2k + 2k' + 1}_q) = 2q$$

آه تو سؤال نگه با در نظر گرفتن همه حالت‌ها اثبات کن، نیازی به بررسی حالت‌های مختلف برای a و b نیست. کافیست بگی چون ab فرده پس a و b فردن و بعد بری ثابت کنی $a^2 + b^2$ زوج میشه.

۴ $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ است و $n \in S$ ، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد، ثابت کنید $n \in A$.

(کار در کلاس قسمت ب) صفحه ۵ کتاب درسی)

اثبات

همه حالت‌ها را برای n در نظر می‌گیریم:

$$n = 1 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1 \quad \times$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4 \times 9}{4} = 9 \quad \times$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{9 \times 16}{4} = 36 \quad \checkmark$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{16 \times 25}{4} = 100 \quad \checkmark$$

$$n = 5 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{25 \times 36}{4} = 225 \quad \times$$

$$n = 6 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{36 \times 49}{4} = 441 \quad \times$$

فقط به ازای $n = 3$ و $n = 4$ حاصل $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج شد.

■ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها از دیدگاه منطق گزاره‌ها: برای اثبات گزاره $p \Rightarrow q$ اگر بتوان p را به فرض‌های کوچک‌تر p_1 و p_2 تبدیل کرد

آن گاه گزاره را می‌توان به صورت $(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q$ نمایش داد. حال با توجه به هم‌ارزی $\square \Rightarrow \square \equiv \sim \square \vee \square$ و استفاده از ویژگی‌های ترکیب فصلی و عطفی داریم:

$$(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q \equiv \sim (p_1 \vee p_2) \vee q \equiv (\sim p_1 \wedge \sim p_2) \vee q \equiv (\sim p_1 \vee q) \wedge (\sim p_2 \vee q) \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید باید از هریک از فرض‌های p_1 و p_2 حکم را ثابت کرد. (متماً می‌دونی $p \wedge q$ وقتی درسته که هم p درست باشه و هم q پس باید هم $q \Rightarrow p_1$ رو ثابت کنی و هم $q \Rightarrow p_2$)

نتیجه می‌توان ثابت کرد که اگر p را بتوان به n گزاره $p_1, p_2, \dots, p_n$ تبدیل کرد، داریم:

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

پرسش‌های تشریحی

بسته
۳

● جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۱۴۰. برای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^2 + 3n + 3$ عددی است. (فرد - زوج)
۱۴۱. اگر $n = 2k - 1$ باشد، آن‌گاه می‌توان نشان داد عدد $n^2 - 5n + 1$ به صورت $2q - 1$ است. مقدار q بر حسب k برابر است.
۱۴۲. اگر a و b دو عدد حقیقی و $ab = 0$ آن‌گاه $a = 0$ $b = 0$ (یا - و)

● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱۴۳. گزاره $q \Rightarrow (p_1 \vee p_2) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow q) \vee (p_2 \Rightarrow q)$ هم‌ارز است.
۱۴۴. هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد. (خرداد ۱۴۰۰)
۱۴۵. اعداد طبیعی a و b وجود دارند که $a^2 + b^2 = (a - b)^2$ باشد.
۱۴۶. اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، آن‌گاه $f + g$ در $x = a$ پیوسته است.
۱۴۷. اگر a و b مضرب ۳ نباشند، $a + b$ نیز مضرب ۳ نیست.

● درستی عبارات زیر را به کمک اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها ثابت کنید.

۱۴۸. برای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است. (مثال صفحه ۴ کتاب درسی - خرداد ۱۴۰۱ داخل و خارج)
۱۴۹. برای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 - 9n + 1$ همواره عددی فرد است. (مرداد ۱۴۰۴)
۱۵۰. $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ است و $n \in S$ ، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد آن‌گاه $n \in A$.

(کار در کلاس قسمت (ب) صفحه ۵ کتاب درسی)

۱۵۱. اگر a و b اعداد طبیعی و $a - b$ فرد باشد، آن‌گاه ab زوج است.
۱۵۲. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$.
۱۵۳. اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، $a^2 + b^2$ عددی زوج است. (کار در کلاس قسمت (الف) صفحه ۵ کتاب درسی - خرداد ۹۸ خارج)
۱۵۴. اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab فرد باشد، ثابت کنید حاصل $a^2 + b^2$ عددی زوج است. (دی ۱۴۰۳)
۱۵۵. برای هر عدد حقیقی a رابطه $a + |a| \geq 0$ برقرار است.
۱۵۶. اگر a و b اعداد صحیح باشند، آن‌گاه عدد $ab(a^2 - b^2)$ عددی زوج است.
۱۵۷. اگر n عدد طبیعی باشد، $n^2 + n^3$ همواره زوج است.
۱۵۸. اگر $S = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$ باشد، آن‌گاه به ازای هر $n \in S$ ، عدد $n^2 + n$ مضرب ۳ است.
۱۵۹. اگر $a + b$ فرد باشد، آن‌گاه $(a - 1)^2 + b^2$ زوج است.
۱۶۰. برای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^2 + 1$ بر ۴ بخش پذیر نیست.
۱۶۱. مجموع هر عدد طبیعی با مربع آن عدد، عددی زوج است.
۱۶۲. برای هر عدد طبیعی n ، عدد $n^3 - n$ مضرب ۳ است.
۱۶۳. مجموع مکعبات هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۹ است.
۱۶۴. اگر a مضرب ۳ نباشد، $a^2 - 1$ مضرب ۳ است.
۱۶۵. اگر n مضرب ۵ نباشد، آن‌گاه $n^4 - 1$ مضرب ۵ است.

● به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

۱۶۶. نشان دهید برای اثبات گزاره $q \Rightarrow (p_1 \vee p_2) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)$ را ثابت کنیم. (تمرین ۴ صفحه ۸ کتاب درسی - خرداد ۱۴۰۰)
۱۶۷. آیا اعداد صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ باشد؟
۱۶۸. در اثبات حکم «برای هر عدد طبیعی n ، عدد $A = n^2 - 5n + 3$ عددی فرد است.» با در نظر گرفتن همه حالت‌ها، وقتی $n = 2k - 1$ ، آن‌گاه $A = 2q - 1$ می‌شود. q را به دست آورید.
۱۶۹. مجموعه $A = \{x \in \mathbb{W} \mid x \leq 3\}$ مفروض است. در چند عضو از مجموعه $A \times A$ مجموع مربعات مؤلفه‌ها با مربع مجموع مؤلفه‌های آن برابر است؟

برهان خلف

بسته چهارم



برهان خلف: نوعی اثبات غیرمستقیم است و به این صورت است که فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد (در واقع با این کار به فرض موقتی برای فورمون می‌سازیم)، سپس به کمک فرض موقتی جدید (فلاف حکم) و فرض مسئله و با قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست، به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض مسئله می‌رسیم. بنابراین فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می‌شود. (می‌روئیم یک گزاره فقط یک ارزش داره یا درسته یا نادرسته. حالا وقتی به این نتیجه رسیدیم که حکم نمی‌تونه نادرست باشه، پس حتماً درسته.)

نکته در آمار و احتمال دیدیم که $p \Rightarrow q$ با $p \Rightarrow \sim q$ هم‌ارز هستند. بنابراین روش برهان خلف با این مطلب توجیه می‌شود.

ابزارهای لازم برای برهان خلف:

۱ مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گویا، عددی گویا است. (فقط هواسست باشه که تو تقسیم عددگویی a بر b ، حتماً b باید مخالف صفر باشه.)

۲ مجموع تعداد فردی از اعداد فرد، عددی فرد است و هم چنین وقتی حاصل ضرب چند عدد، فرد باشد، تک تک اعداد، فرد هستند.

۳ مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است عددی گنگ یا عددی گویا باشد.

۴ اگر توابع f و g در $x = a$ پیوسته باشند، توابع $f + g$ ، $f - g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ در $x = a$ پیوسته می‌باشند. (تو $\frac{f}{g}$ باید $g(a) \neq 0$ باشه.)

اثبات با برهان خلف‌های کتاب درسی: درستی موارد زیر در کتاب درسی به کمک برهان خلف ثابت شده است:

۱ حاصل جمع یک عدد گویا با یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (مثال صفحه ۵ کتاب درسی)

اثبات

فرض می‌کنیم r عددی گویا و x عددی گنگ است. باید نشان دهیم $r + x$ عددی گنگ است. فرض می‌کنیم $r + x$ گنگ نباشد، پس عددی گویا است (فرض خلف). می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است، پس $(r + x) - r$ یعنی x عددی گویا می‌باشد که در تناقض با فرض گنگ بودن x است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی $r + x$ عددی گنگ است.

۲ حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (مثال صفحه ۵ کتاب درسی)

اثبات

فرض می‌کنیم r عدد گویای مخالف صفر و x عددی گنگ باشد، باید نشان دهیم rx عددی گنگ است. فرض می‌کنیم rx عددی گنگ نباشد، پس عددی گویا است (فرض خلف). می‌دانیم حاصل تقسیم دو عدد گویا، عددی گویا است، پس $\frac{rx}{r} = x$ عددی گویا است که این با فرض گنگ بودن x در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است، یعنی rx عددی گنگ است.

نکته در مورد اعداد گویا و اعداد گنگ بدانید:

- ۱** مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گویا، عددی گویا است که روش اثبات، اثبات مستقیم است. فقط در تقسیم دو عدد گویا، عددی که در مخرج قرار می‌گیرد باید مخالف صفر باشد.
- ۲** مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم یک عدد گنگ و یک عدد گویا، عددی گنگ است که روش اثبات، برهان خلف است. فقط در حاصل ضرب و حاصل تقسیم، عدد گویا باید مخالف صفر باشد.
- ۳** مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گنگ، می‌تواند گنگ یا گویا باشد. این مورد به صورت درستی یا نادرستی و یا آرایه مثال نقض مورد پرسش قرار می‌گیرد.

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند. (تمرین ۳ صفحه ۸ کتاب درسی)

اثبات

فرض می‌کنیم $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد، پس عددی گویا است. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است، پس $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta$ عددی گویا می‌باشد که در تناقض با فرض گنگ بودن β است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. فرض می‌کنیم $\alpha - \beta$ گنگ نباشد، پس عددی گویا است، می‌دانیم مجموع دو عدد گویا، عددی گویا است، پس $(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta) = 2\alpha$ عددی گویا می‌باشد. چون عدد 2α و $\frac{2\alpha}{2} = \alpha$ عددی گویا می‌باشد که در تناقض فرض گنگ بودن α است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

(کار در کلاس قسمت (الف) صفحه ۶ کتاب درسی)

۴ اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

اثبات

فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد، پس عددی گویا است. می‌دانیم حاصل تقسیم دو عدد گویا، عددی گویا است، پس حاصل تقسیم اعداد گویای ۱ و $\frac{1}{x}$ یعنی $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ عددی گویا است که در تناقض با فرض گنگ بودن x است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵ a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 همان اعداد ولی به ترتیب دیگری هستند. عدد $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

(مثال صفحه ۶ کتاب درسی)

اثبات

فرض می‌کنیم $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد، پس عددی فرد است. چون حاصل ضرب سه عامل $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3$ فرد است، پس هر کدام از عامل‌ها فرد هستند، بنابراین مجموع آن‌ها نیز باید فرد باشد، پس $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$ باید فرد باشد در حالی که مجموع آن‌ها صفر می‌شود و صفر عددی زوج است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

(کار در کلاس قسمت (ب) صفحه ۶ کتاب درسی)

۶ اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، آنگاه $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

اثبات

فرض می‌کنیم $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته نباشد، پس پیوسته است. می‌دانیم تفاضل دو تابع پیوسته در $x = a$ ، در این نقطه پیوسته است، پس $(f + g) - f = g$ در $x = a$ پیوسته است که در تناقض با ناپیوسته بودن g در $x = a$ می‌باشد، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

برهان خلف

پرسش‌های تشریحی

بسته
۴

● جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

- ۱۷۰. اگر حاصل ضرب سه عدد فرد باشد، مجموع آن‌ها عددی است. (فرد - زوج)
- ۱۷۱. حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی است. (گنگ - گویا)
- ۱۷۲. حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی است. (گویا - گنگ)
- ۱۷۳. اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، عدد $\alpha - \beta$ است. (گویا - گنگ)

● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

- ۱۷۴. اگر a یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{a}$ نیز گنگ است. (دی ۱۴۰۱)
- ۱۷۵. حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۱۴۰۴ - دی ۱۴۰۲ - شهریور ۱۴۰۲)
- ۱۷۶. حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (خرداد ۱۴۰۲)
- ۱۷۷. اگر α و β دو عدد گنگ متمایز باشند، $\alpha + \beta$ همواره گنگ است.
- ۱۷۸. اگر α یک عدد گویا و β یک عدد گنگ باشد، عدد $4\alpha + 2\beta$ همواره گنگ است.
- ۱۷۹. اگر α و β دو عدد گنگ غیرمساوی باشند، حاصل $\frac{\alpha + \beta}{2}$ عددی گنگ است. (دی ۱۴۰۳)

● گزاره‌های زیر را به کمک برهان خلف ثابت کنید.

- ۱۸۰. اگر x و y دو عدد حقیقی، $x \neq 3$ و $x + 4y^2 = 7$ باشد، آنگاه $y \neq -1$ است. (کار در کلاس قسمت (الف) صفحه ۶ کتاب درسی - خرداد ۹۹ - دی ۱۴۰۱)
- ۱۸۱. اگر x یک عدد گنگ باشد، آنگاه $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است. (مثال صفحه ۵ کتاب درسی - تیر ۹۸ - شهریور ۱۴۰۰)
- ۱۸۲. جمع عدد گویا با عدد گنگ، عددی گنگ می‌شود. (مثال صفحه ۵ کتاب درسی - خرداد ۱۴۰۲)
- ۱۸۳. حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در عدد گنگ، عددی گنگ است. (تمرین ۳ صفحه ۸ کتاب درسی - دی ۹۷ و ۹۹ و ۱۴۰۰)
- ۱۸۴. اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، $\alpha - \beta$ و $2\beta + \alpha$ گنگ هستند.
- ۱۸۵. اگر r عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، آنگاه $r - x$ عددی گنگ است.
- ۱۸۶. با فرض صحیح بودن n ، اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n نیز زوج است.

۱۸۷. با فرض صحیح بودن n ، اگر n^2 فرد باشد، آن گاه n هم فرد است.
۱۸۸. اگر n عدد صحیح و n^3 مضرب ۲ باشد، آن گاه n مضرب ۲ است.
۱۸۹. با فرض صحیح بودن n ، اگر n^2 مضرب ۵ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۵ است.
۱۹۰. با فرض صحیح بودن n ، اگر n^2 مضرب ۳ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است.
۱۹۱. اگر a و b اعداد صحیح و $a^2 + b^2$ فرد باشد آن گاه a فرد یا b فرد است.
۱۹۲. اگر n یک عدد طبیعی و $3 + 5n$ زوج باشد، آن گاه n عددی فرد است.
۱۹۳. اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی تابع g در $x = a$ ناپیوسته باشد، آن گاه $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است. (کار در کلاس قسمت (ب) صفحه ۶ کتاب درسی)
۱۹۴. AD نیمساز زاویه داخلی A در مثلث ABC است. اگر $BD \neq DC$ آن گاه $AB \neq AC$ است.
۱۹۵. a ، b ، c سه عدد صحیح هستند، عدد $(a-b)(b-3c)(c-5a)$ عددی زوج است.
۱۹۶. a_1 ، a_2 و a_3 عددهای صحیح و b_1 ، b_2 و b_3 همان اعداد ولی به ترتیب دیگری هستند. عدد $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است. (مثال صفحه ۶ کتاب درسی - شهریور ۱۴۰۱)
۱۹۷. a_1 ، a_2 و a_3 اعداد صحیح متمایز و b_1 ، b_2 و b_3 همان اعداد که با ترتیب دیگری قرار گرفته اند هستند. عدد $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$ عددی زوج است.
۱۹۸. $\log_2 5$ عددی گنگ است.
۱۹۹. اگر سه خط d ، d' و d'' دوجه دو متمایز، $d' \parallel d$ و $d'' \parallel d'$ آن گاه $d \parallel d''$.
۲۰۰. از یک نقطه خارج یک خط نمی توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.
۲۰۱. $\sqrt{3}$ عددی گنگ است. (کتاب راهنمای معلم) ۲۰۲. $\sqrt{5}$ عددی گنگ است.
۲۰۳. $\sqrt[3]{2}$ عددی گنگ است. ۲۰۴. $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ عددی گنگ است.
۲۰۵. $\sqrt{3}$ عدد گنگ و a یک عدد گویا است، آن گاه $a - \sqrt{3}$ عددی گنگ است.

گزاره های هم ارز و ترکیب دو شرطی

بسته پنجم



■ **دو گزاره هم ارز:** دو گزاره P و Q را هم ارز می گوئیم هرگاه ارزش یکسانی داشته باشند یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

■ **ترکیب دو شرطی:** ترکیب دو شرطی P و Q را به صورت $P \Leftrightarrow Q$ نمایش می دهیم. گزاره دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ وقتی درست است که P و Q هم ارز باشند، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

نکته می دانیم $P \Leftrightarrow Q$ با $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ هم ارز است، پس برای آن که تشخیص دهیم دو گزاره P و Q هم ارز هستند باید بررسی کنیم که $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست باشند.

■ **گزاره های هم ارز و ترکیب های دو شرطی کتاب درسی:** موارد زیر در کتاب درسی آمده است. در بعضی از آن ها، کتاب درسی از شما می خواهد دلیل بیاورید.

(کار در کلاس قسمت (الف) صفحه ۸ کتاب درسی)

۱ اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم ارزند؟

بله. (منظور کتاب درسی اینه که فقط تشفیص بریم هم ارز هستن یا نه، اما دلیلشو ببینید.)

ابتدا باید نشان دهیم گزاره شرطی «اگر n زوج باشد، آن گاه n^2 زوج است» درست است. به کمک اثبات مستقیم داریم: $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2q$

حال باید نشان دهیم گزاره شرطی «اگر n^2 زوج باشد، آن گاه n زوج است.» درست است. به کمک برهان خلف، فرض می کنیم n زوج نباشد، پس عددی فرد است. حال داریم:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$$

که نتیجه به دست آمده با فرض زوج بودن n^2 در تناقض است، پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

(کار در کلاس قسمت (ب) صفحه ۸ کتاب درسی)

۲ آیا دو گزاره زیر هم ارزند؟

آ، نقطه C روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد. ب) فاصله نقطه C از دو سر پاره خط AB یکسان است.

بله - این مطلب را در کتاب هندسه (۱) دیده بودیم. (نیازی به اثبات نیست. کتاب گفته فقط تشفیص بریم هم ارز هستن یا نه.)

(مثال صفحه ۶ کتاب درسی)

۳ آیا ترکیب دو شرطی $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ برای هر عدد حقیقی a و b درست است؟ چرا؟

بله - باید نشان دهیم گزاره‌های شرطی $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ و $a = b \Rightarrow a^3 = b^3$ درست هستند. واضح است گزاره شرطی $a = b \Rightarrow a^3 = b^3$ درست است، چون طرفین یک تساوی را می‌توان به توان رساند. از طرفی ترکیب شرطی $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$ نیز درست است زیرا:

روش اول می‌دانیم تابع $f(x) = x^3$ تابع یک به یک است، پس از تساوی $f(a) = f(b)$ یعنی $a^3 = b^3$ می‌توان نتیجه گرفت که $a = b$ می‌باشد.

$$a^3 = b^3 \Rightarrow a^3 - b^3 = 0 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0$$

روش دوم

اگر $a^2 + ab + b^2 = 0$ را یک معادله درجه دوم برحسب a در نظر بگیریم، دلتای معادله برابر $\Delta = b^2 - 4(1)(b^2) = -3b^2$ می‌شود، با فرض این که a و b مخالف صفر هستند $a^2 + ab + b^2 > 0$ بوده، پس فقط $a - b$ می‌تواند صفر باشد و این یعنی $a = b$ می‌باشد. در حالتی که a و b صفر باشند واضح است که گزاره شرطی درست است.

(مثال صفحه ۶ کتاب درسی)

۴ آیا ترکیب دو شرطی $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ درست است؟

خیر - ترکیب شرطی $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ درست است اما ترکیب شرطی $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ نادرست است. مثلاً $2^2 = (-2)^2$ ولی $2 \neq -2$ است.

(کار در کلاس قسمت (ب) صفحه ۷ کتاب درسی)

۵ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ، آیا ترکیب دو شرطی $a^3 < b^3 \Leftrightarrow a < b$ درست است؟

بله - (در اینجا کتاب درسی نپرسیده که چرا درست است اما دلیلشو ببینید.)

می‌دانیم تابع $f(x) = x^3$ ، تابع اکیداً صعودی است، بنابراین اگر $a < b$ آن‌گاه $f(a) < f(b)$ می‌باشد یعنی $a^3 < b^3$ است و هم‌چنین اگر $f(a) < f(b)$ یعنی $a^3 < b^3$ باشد آن‌گاه $a < b$ است.

(کار در کلاس قسمت (الف) صفحه ۷ کتاب درسی)

۶ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ، آیا ترکیب دو شرطی $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$ درست است؟

خیر - (در اینجا کتاب درسی نپرسیده که چرا درست است اما دلیلشو ببینید.)

ترکیب شرطی $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$ نادرست است زیرا $-4 < -2$ ولی $(-4)^2 > (-2)^2$ می‌باشد. بنابراین ترکیب دو شرطی $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$ نادرست است.

گزاره‌های هم‌ارز و ترکیب دوشروطی

پرسش‌های تشریحی

بسته
۵

● جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۲۰۶. اگر گزاره دو شرطی $q \Leftrightarrow p$ درست و ارزش p نادرست باشد، آن‌گاه q است. (درست - نادرست)

۲۰۷. ارزش گزاره $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ ، است. (درست - نادرست)

● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۲۰۸. اگر $a, b \geq 0$ باشند، آن‌گاه گزاره دو شرطی $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$ درست است.

۲۰۹. اگر دو گزاره P و Q هم‌ارز باشند، آن‌گاه $Q \Leftrightarrow P$ درست است.

۲۱۰. اگر $Q \Leftrightarrow P$ درست باشد، Q و P هر دو درست هستند.

۲۱۱. $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2; a, b \in \mathbb{R}$

(مثال صفحه ۶ کتاب درسی)

۲۱۲. $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3; a, b \in \mathbb{R}$

(مثال صفحه ۶ کتاب درسی)

۲۱۳. گزاره‌های « n زوج است» و « n^2 زوج است» هم‌ارز هستند.

(کار در کلاس قسمت (الف) صفحه ۸ کتاب درسی)

۲۱۴. گزاره‌های «نقطه C روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.» و «فاصله C از دو سر پاره خط AB یکسان است» هم‌ارزند.

(کار در کلاس قسمت (ب) صفحه ۸ کتاب درسی)

۲۱۵. گزاره‌های «مثلث با اضلاع a, b, c قائم‌الزاویه است» و « $a^2 = b^2 + c^2$ » هم‌ارز هستند.

۲۱۶. اگر h_a, h_b, h_c ارتفاع‌های مثلث ABC باشند، گزاره‌های « $a > b + c$ » و « $\frac{1}{h_a} > \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ » هم‌ارز هستند.

۲۱۷. گزاره‌های « n عددی طبیعی و مربع کامل است» و « $n = 8k + 1$ » هم‌ارز هستند.

۲۱۸. گزاره‌های « a و b اعداد زوج هستند» و « $a + b$ عددی زوج است» هم‌ارز هستند.

۲۱۹. گزاره‌های « a و b اعداد زوج هستند» و « ab عددی زوج است» هم‌ارز هستند.

۲۲۰. گزاره‌های « n مضرب ۳ است» و « n^2 مضرب ۳ است» هم‌ارز هستند.

۲۲۱. گزاره‌های « n مضرب ۶ است» و « n^2 مضرب ۶ است» هم‌ارز هستند.

۲۲۲. گزاره‌های « n مضرب ۱۲ است» و « n^2 مضرب ۱۲ است» هم‌ارز هستند.

۲۲۳. $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3; a, b \in \mathbb{R}$

۲۲۴. $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2; a, b \in \mathbb{R}$

۲۲۵. اگر $x = 2$ آن‌گاه $x^2 = 4$ و بالعکس.

۲۲۶. اگر A, B و C سه مجموعه ناتهی باشند، $A = B$ اگر و تنها اگر $A \cup C = B \cup C$.

۲۲۷. a و b اعداد گویا هستند اگر و تنها اگر $a + b$ گویا باشد.

۲۲۸. a و b اعداد گنگ هستند اگر و تنها اگر ab عددی گنگ باشد.

● گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۲۲۹. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ، کدام یک از ترکیب‌های دوشرطی زیر درست است؟

$$(1) a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \quad (2) a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \quad (3) a < b \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \quad (4) a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

اثبات بازگشتی

بسته ششم



اثبات بازگشتی: برای اثبات درستی یا نادرستی یک نامساوی می‌توانیم از گزاره‌های هم‌ارز استفاده کنیم، به این ترتیب که آن‌قدر نامساوی‌های هم‌ارز با نامساوی حکم ارائه دهیم تا به یک نامساوی به وضوح درست یا نادرست برسیم. از آن جایی که تمام نامساوی‌ها هم‌ارز هستند، پس از روی درستی یا نادرستی نامساوی آخر، می‌توانیم به درستی یا نادرستی حکم پی ببریم.

اثبات‌های بازگشتی کتاب درسی: در کتاب درسی موارد زیر با اثبات بازگشتی ثابت شده است:

(مثال صفحه ۷ کتاب درسی)

۱. اگر $a > 0$ آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

اثبات

ابتدا این سؤال با توضیحات کامل ببینیم که روند اثبات بازگشتی رو درک کنیم:

طرفین نامساوی $a + \frac{1}{a} \geq 2$ را در a ضرب می‌کنیم، چون $a > 0$ است، پس نامساوی جدیدی که ایجاد می‌شود با نامساوی اولیه هم‌ارز است.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

حال واضح است که نامساوی $a^2 + 1 \geq 2a$ را می‌توانیم به صورت $a^2 + 1 - 2a \geq 0$ بنویسیم، پس این دو نامساوی نیز هم‌ارز هستند:

$$a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$$

$$a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$$

می‌دانیم $(a - 1)^2 = a^2 + 1 - 2a$ می‌باشد، پس:

حال چون می‌دانیم $(a - 1)^2 \geq 0$ همواره درست است، پس تمام نامساوی‌های قبلی که با این نامساوی هم‌ارز هستند درست می‌باشند، پس $a + \frac{1}{a} \geq 2$ است.

اما برای پاسخگویی در امتحان نیازی به توضیحات فارسی نیست و فقط کافی است به صورت زیر بنویسیم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0 \quad (\text{گزاره همیشه درست})$$

(گزاره همیشه درست رو آفرش ننویس / ۲۵ نمره ازت کم میشه.)

(تمرین ۱ قسمت (الف) صفحه ۸ کتاب درسی)

۲. اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت باشند آن‌گاه $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ است.

اثبات

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \quad (\text{گزاره همیشه درست})$$

نکته اگر X و Y دو عدد نامنفی باشند، به $\frac{X+Y}{2}$ میانگین حسابی و به $\sqrt{XY}$ میانگین هندسی آن‌ها می‌گویند.

؟ مجموع میانگین حسابی و میانگین هندسی دو عدد ۹ و ۲۵ را به دست آورید.

✓ میانگین حسابی دو عدد برابر است با:

$$\text{میانگین حسابی} = \frac{9+25}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

از طرفی میانگین هندسی دو عدد ۹ و ۲۵ برابر است با:

$$\text{میانگین هندسی} = \sqrt{9 \times 25} = 3 \times 5 = 15$$

بنابراین مجموع آن‌ها برابر $17 + 15 = 32$ می‌باشد.

(مثال صفحه ۷ کتاب درسی)

۳ میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

اثبات

باید ثابت کنیم $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ است، پس:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \quad (\text{گزاره همیشه درست})$$

(مثال صفحه ۷ کتاب درسی)

۴ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ است.

اثبات

روش اول گزاره همیشه درست) $a^2 + 2a(\frac{b}{2}) + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a(\frac{b}{2}) + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

روش دوم گزاره همیشه درست) $a^2 + 2(\frac{a}{2})b + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 2(\frac{a}{2})b + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\frac{a}{2} + b)^2 + \frac{3a^2}{4} \geq 0$

روش سوم گزاره همیشه درست) $a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$

روش‌های اول و سوم در کتاب درسی ارائه شده و روش دوم هم در متن کتاب درسی از شما فواسته شده.

(تمرین ۵ صفحه ۸ کتاب درسی)

؟ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b با شرط $a+b \neq 0$ چنان وجود دارند که $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ باشد؟

✓ از تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ داریم:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = ab$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} = 0$$

می‌دانیم $(a + \frac{b}{2})^2 \geq 0$ و $\frac{3b^2}{4} \geq 0$ است، پس:

$$\begin{cases} (a + \frac{b}{2})^2 = 0 \\ \frac{3b^2}{4} = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \xRightarrow{b=0} (a + \frac{0}{2})^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

بنابراین $a=0$ و $b=0$ است که با فرض ناصفر بودن a و b تناقض دارد.

(تمرین ۱ قسمت (ب) صفحه ۸ کتاب درسی)

۵ برای هر سه عدد حقیقی x, y, z و $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ است.

اثبات

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \quad (\text{گزاره همیشه درست})$$

(تمرین ۱ قسمت (پ) صفحه ۸ کتاب درسی)

۶ برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ است.

اثبات

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0 \quad (\text{گزاره همیشه درست}) \end{aligned}$$

اثبات بازگشتی

پرسش‌های تشریحی

بسته
۶

● جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۲۳۰. در اثبات حکم «اگر a و b دو عدد حقیقی هم علامت باشند، آن‌گاه $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ است.» به روش بازگشتی به گزاره همیشه درست می‌رسیم
 $((a - b)^2 \geq 0 - (a + b)^2 \geq 0)$

۲۳۱. اختلاف میانگین حسابی و هندسی دو عدد ۳۶ و ۱۶ برابر است.

۲۳۲. میانگین هندسی دو عدد طبیعی ۱۶ و برابر ۲۰ است.

● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۲۳۳. برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a + b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است. (دی ۱۴۰۱)

۲۳۴. میانگین حسابی دو عدد ۴ و ۹ برابر ۶ است.

۲۳۵. میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها بیش تر نیست.

۲۳۶. اگر a یک عدد حقیقی و مخالف صفر باشد آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ است.

۲۳۷. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ است.

● به کمک اثبات بازگشتی، درستی گزاره‌های زیر را نشان دهید.

(مثال صفحه ۷ کتاب درسی - تیرو دی ۹۸ - خرداد ۱۴۰۱)

$$۲۳۸. a + \frac{1}{a} \geq 2; a > 0$$

$$۲۳۹. a + \frac{1}{a} \leq -2; a < 0$$

(تمرین ۱ قسمت (الف) صفحه ۸ کتاب درسی - خرداد ۹۹)

$$۲۴۰. \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2; xy > 0$$

$$۲۴۱. a + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}; a > 0$$

$$۲۴۲. \frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$$

$$۲۴۳. ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2; a, b > 0$$

$$۲۴۴. \frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$$

$$۲۴۵. \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a+b}}; a, b > 0$$

$$۲۴۶. (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4; a, b > 0$$

$$۲۴۷. a^2 + b^2 \geq 2(b-1)$$

$$۲۴۸. \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}; a, b > 0$$

$$۲۴۹. a^2 + b^2 + 1 \geq a\sqrt{b^2 + 1} + b\sqrt{a^2 + 1}; a, b > 0$$

$$۲۵۰. a^2 + b^2 + c^2 + 5 \geq 2(a+b+c)$$

$$۲۵۱. a + b + 1 \geq \sqrt{b} + \sqrt{ab} - \sqrt{a}$$



(خرداد ۱۴۰۲)

$$x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2 \quad .252$$

(شهریور ۱۴۰۲)

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4 \quad .253$$

(دی ۱۴۰۱)

$$y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \quad .254$$

(تمرین ۱ قسمت (پ) صفحه ۸ کتاب درسی - خرداد ۹۸ خارج - دی ۹۷)

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \quad .255$$

(خرداد ۱۴۰۴)

$$5a^2 + b^2 \geq 4ab \quad .256$$

(دی ۱۴۰۳)

$$3x^2 + y^2 \geq 6x - 3 \quad .257$$

(خرداد ۱۴۰۳)

$$a^2 + b^2 \geq (a - 1)(b + 1) \quad .258$$

(مثال صفحه ۷ کتاب درسی - خرداد ۹۸ - شهریور ۹۹ - مرداد ۱۴۰۳)

میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن ها کمتر نیست.

(خرداد ۱۴۰۰)

حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی با نصف مجموع مربعات آن ها است.

(دی ۱۴۰۲)

مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل ضرب آن ها کم تر نیست.

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}; a, b > 0 \quad .262$$

(مثال صفحه ۷ کتاب درسی)

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \quad .263$$

$$a^2 + 2b^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc \quad .264$$

(تمرین ۱ قسمت (ب) صفحه ۸ کتاب درسی - شهریور ۹۸)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \quad .265$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1) \quad .266$$

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c; a, b, c > 0 \quad .267$$

$$5a^2 + 5b^2 - 4b + 4a + 2 \geq 0 \quad .268$$

$$5a^2 + 2b^2 - 2(2a + b) \geq 4ab - 5 \quad .269$$

$$a^4 + b^4 + 4ab + 2 \geq 0 \quad .270$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad .271$$

$$a^4 + a^3 + a + 1 \geq 0 \quad .272$$

(کتاب راهنمای معلم)

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2; a + b > 0 \quad .273$$

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3; a, b > 0 \quad .274$$

$$a^2 + 1 \geq 2a(b - a + 1); a > b > 0 \quad .275$$

$$|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2} \quad .276$$

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}; a, b > 0 \quad .277$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}; a, b > 0 \quad .278$$

$$\frac{a^3}{b^2} \geq \frac{a^2}{b} + a - b; a, b > 0 \quad .279$$

$$m + \frac{4}{m^2} \geq 3; m > 0 \quad .280$$

(کتاب راهنمای معلم)

● به پرسش های زیر پاسخ دهید.

۲۸۱. میانگین هندسی و میانگین حسابی اعداد ۳ و ۲۷ را به دست آورید.

۲۸۲. اگر $0 < \theta < 180^\circ$ باشد، نشان دهید $2 \geq \frac{2}{\sin \theta} - \cos \theta \cot \theta$ است.

۲۸۳. اگر اعداد a, b, c و d مثبت باشند، نشان دهید $\frac{cd(a^2 + b^2) + bd(a^2 + c^2)}{abcd} \geq 4$ است.

(کتاب راهنمای معلم)

۲۸۴. اگر a و b اعداد مثبت و $a + b = 1$ باشد، ثابت کنید $ab \leq \frac{1}{4}$ است.

۲۸۵. اگر a و b دو عدد مثبت و $a + b = 1$ باشد، نشان دهید $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$ است.

۲ بخش



پاسخنامه

آشنایی با نظریه اعداد

۱

۵؛ کتاب درسی گفته عدد $2^n + 1$ به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ عددی اول می شود اما به ازای $n = 5$ اول نیست.

۲

۴؛ به ازای $n = 4$ عدد $n^2 + n + 5$ برابر ۲۵ می شود که اول نیست اما به ازای $n = 1, 2, 3$ عدد $n^2 + n + 5$ عددی اول می شود. دقت کنید کوچک ترین عدد طبیعی به عنوان مثال نقض مدنظر است.

۳

گویا؛ مربع $\sqrt{5} - 3$ برابر است با:
 $(3 - \sqrt{5})^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$
 همان طور که می بینید حاصل یک عدد گنگ می شود، پس مثال نقض عبارت مربع هر عدد گنگ، عددی گویا است، می باشد.

۴

نیست؛ مثلاً اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، اعداد صحیح متوالی هستند که مجموع آن ها برابر ۲۱ می شود ولی بر ۶ بخش پذیر نیست.

۵

درست

۶

درست

۷

درست؛ مربع عدد طبیعی یک از خودش بزرگ تر نیست پس عدد ۱ مثال نقض حکم می باشد.

۸

نادرست؛ $2^2 > (-5)^2$ ولی $2 \not\geq 5$

۹

نادرست؛ $-5 > 2$ ولی $2^2 \not\geq (-5)^2$

۱۰

نادرست؛ $n = 3$ مثال نقض حکم $2^n > n^2$ است زیرا $2^3 \not\geq 3^2$.

۱۱

نادرست؛ مثلاً $\sqrt{2}$ عددی گنگ است ولی مربع آن یعنی $(\sqrt{2})^2 = 2$ عددی گویا می باشد.

۱۲

نادرست؛ هر متوازی الاضلاعی که دو قطر برابر داشته باشد، مستطیل است بنابراین مثال نقض ندارد.

حرفه ای باش! اگر گفته می شد هر چهارضلعی که دو قطر برابر داشته باشد، مستطیل است آن گاه مثال نقض داشت مثلاً دوزنقه متساوی الساقین دو قطر برابر دارد ولی مستطیل نیست.

۱۳

نادرست؛ $a = 2$ و $b = 1$ مثال نقض گزاره می باشد زیرا $a + 2b = 4$ می شود که زوج است ولی $a^2 + b^2$ برابر ۵ می باشد که عددی فرد است.

۱۴

درست؛ وقتی مجموع دو عبارت نامنفی صفر می شود، پس تک تک آن ها صفر هستند.

۱۵

نادرست؛ اگر $p = 2$ باشد، $p + 1$ برابر عدد فرد ۳ می شود.

۱۶

درست؛ در کتاب درسی تمرینی وجود داشت که می گفت: ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. اما الان این تمرین از کتاب حذف شده است.

۱۷

$a = -2$ ؛ -2 یک عدد حقیقی است و $a^2 = 4$ می شود که مثبت است در حالی که a مثبت نیست.

۱۸

$x = \frac{1}{3}$ ؛ $x = \frac{1}{3}$ از عدد ۳ بزرگ تر است در حالی که بزرگ تر از $\frac{1}{3}$ نیست.

حرفه ای باش! اگر صورت سؤال اینجوری بود «اگر $x > 3$ آن گاه $x \geq \frac{1}{3}$ » اونوقت دیگه $x = \frac{1}{3}$ مثال نقض نبود و باید عددی بین ۳ و $\frac{1}{3}$ انتخاب می کردیم. برای به دست آوردن یک عدد، بین دو عدد گویا کافیه صورت های دو عدد گویا را با هم و مخرج های آن ها را با هم جمع کنیم، مثلاً مثال نقض در مورد این سؤال می شد:

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{1+3}{3+1} = \frac{4}{4}$$

۱۹

$x = 2$ ؛ در این صورت $2^2 \geq 2$ می باشد در حالی که $x = 2$ عددی مثبت است.

۲۰

$x = -1$ ؛ $-1 > (-1)^2$ در حالی که $x = -1$ عددی منفی است.

۲۱

$$x = \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

۲۲

$x = \frac{1}{4}$ ؛ در این صورت $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ می شود که از $\frac{1}{4}$ بزرگ تر است.

۲۳

$x = -2$ ؛ در این صورت $4 - x^2$ برابر صفر می شود که از ۳ کوچک تر در حالی که $x = -2$ بزرگ تر از ۱ نیست.

۲۴

$$d = -2, c = -6, b = 10, a = 3$$

در این صورت: $3 \times (-6) \not\geq 10 \times (-2)$

۲۵

$x = 1, y = 1$ و $z = 1$ ؛ در این صورت داریم:

$$\frac{1}{1+1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq 2$$

۲۶

$a = 0$ و $b = 2$ ؛ در این صورت $ab = 0$ می‌شود در حالی که b صفر نیست.

حرفه‌ای باش! حکم ما $a = 0$ و $b = 0$ هستش یعنی هم a و هم b باید صفر باشند. درستش اینه که $a = 0$ یا $b = 0$.

۲۷

۱، ۲، ۳ و ۴؛ مجموع آن‌ها برابر $1+2+3+4=10$ می‌شود که بر ۴ بخش پذیر نیست.

۲۸

$n = 2$ ؛ مجموع دو عدد متوالی بر ۲ بخش پذیر نیست مثلاً $1+2=3$ در حالی که ۳ بر ۲ بخش پذیر نیست.

حرفه‌ای باش! اگر n زوج باشد، مجموع n عدد متوالی بر n بخش پذیر نیست اما اگر n فرد باشد، مجموع n عدد متوالی بر n بخش پذیر می‌باشد.

۲۹

$1 = 1^2$ کوچک‌تر از 1^3 نیست.

۳۰

$a = 1$ ، $b = 3$ ، $ab = 3$ عددی فرد است در حالی که $1+9=10=a^2+b^2$ می‌شود که عددی زوج می‌باشد.

۳۱

۲؛ عدد طبیعی ۲ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

حرفه‌ای باش! بد نیست یادت باشه که اعداد به فرم 2^n را نمی‌شه به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت. مثل ۲، ۴، ۸، ۱۶، ...

۳۲

$p = 5$ ؛ در این صورت $p^2 + 1 = 26$ می‌شود که ۲۶ عددی اول نیست.

۳۳

$n = 5$ ؛ قرار بود حفظ کنیم.

۳۴

$n = 4$ ؛ به ازای $n = 4$ ، $2^n - 1$ برابر ۱۵ می‌شود که عدد اول نیست.

۳۵

$n = 3$ ؛ به ازای $n = 3$ عدد $2^n + 1$ برابر ۹ می‌شود که اول نیست.

۳۶

$n = 5$ ؛ به ازای $n = 5$ عدد $2^n + 3$ برابر ۳۵ می‌شود که عددی اول نیست.

۳۷

$n = 2$ ؛ به ازای $n = 2$ عدد $5^n + 2$ برابر ۲۷ می‌شود که اول نیست.

۳۸

$n = 4$ ؛ به ازای $n = 4$ عدد $3^n + 4$ برابر ۸۵ می‌شود که اول نیست.

۳۹

$n = 5$ ؛ به ازای $n = 5$ عدد $3^n + 2$ برابر ۲۴۵ می‌شود که اول نیست.

۴۰

$n = 3$ ؛ به ازای $n = 3$ عدد $5^n + 2^n$ برابر ۱۳۳ می‌شود که اول نیست.

۴۱

$n = 41$ ؛ به ازای $n = 41$ عدد $n^2 + n + 41$ مضرب ۴۱ می‌شود.
($41^2 + 41 + 41 = 41k$)

۴۲

۹ و ۴؛ اعداد ۹ و ۴ هر دو مرکب هستند در حالی که مجموع آن‌ها ۱۳ می‌شود و عددی اول است.

۴۳

$a = 2$ و $b = 3$ ؛ اعداد ۲ و ۳ اول هستند و مجموع آن‌ها یعنی ۵ نیز عددی اول است.

۴۴

۱ و ۲؛ حاصل ضرب آن‌ها ۲ می‌شود که عددی اول است.

۴۵

۹ و ۱۶؛ ۱۶ مربع کامل هستند و مجموع آن‌ها یعنی ۲۵ نیز مربع کامل است.

۴۶

۱۳؛ مجموع ارقام عدد ۱۳ برابر ۴ است که بر ۴ بخش پذیر می‌باشد در حالی که عدد ۱۳ بر ۴ بخش پذیر نیست.

۴۷

$n = 6$ ؛ به ازای $n = 6$ ، n^2 برابر ۳۶ می‌شود که مضرب ۱۲ است در حالی که $n = 6$ مضرب ۱۲ نیست.

۴۸

$x = 1$ و $y = 1$ ؛ می‌دانیم $\sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ ، $\sqrt{y} = \sqrt{1} = 1$ و $\sqrt{x+y} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ در حالی که $1+1 \neq \sqrt{2}$ است.

حرفه‌ای باش! اگه می‌گفت برای هر دو عدد حقیقی و متمایز x و y اونوقت باید مثالی می‌زدی که x و y برابر نباشن مثلاً $x = 1$ و $y = 3$ یا کلی مثال دیگه.

۴۹

$x = -2$ و $x = -3$ ؛ در این صورت $\sqrt{xy}$ تعریف می‌شود در حالی که $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ تعریف نمی‌شوند.

۵۰

$x = 2$ و $y = 1$ ؛ اعداد $x = 2$ و $y = 1$ در نامساوی $x > y > 0$ صدق می‌کنند ولی عبارت $\sqrt{x-y} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$ با عبارت $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$ برابر نیست.

۵۱

$\sqrt{2}$ و $\sqrt{8}$ ؛ اعداد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{8}$ گنگ هستند ولی حاصل ضرب آن‌ها یعنی $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ گنگ نیست.

۵۲

$x = \sqrt{2}$ و $y = \sqrt{2}$ ؛ در این صورت $x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4$ که عددی گویا است.

۵۳

$n = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$ ؛ ابتدا عدد $9n^2 - 12n + 5$ را به صورت زیر می‌نویسیم:
 $9n^2 - 12n + 5 = (3n-2)^2 + 1$

حال n را طوری انتخاب می‌کنیم که حاصل داخل پرانتز برابر یک عدد رادیکالی باشد:

$$3n - 2 = \sqrt{2} \Rightarrow n = \frac{2 + \sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow (3n - 2)^2 + 1 = \left(3\left(\frac{\sqrt{2} + 2}{3}\right) - 2\right)^2 + 1 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 3$$

54 $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ ؛ هر دو عدد گنگ هستند ولی مجموع آن‌ها یعنی صفر عددی گویا است.

55 صفر و $\sqrt{2}$ ؛ صفر عددی گویا و $\sqrt{2}$ عددی گنگ است و حاصل ضرب آن‌ها صفر می‌شود که عددی گویا است.

56 گویا است. $a = 2$ ، $b = 1$ و $c = 8$ ؛ در این صورت $b\sqrt{ac}$ برابر ۴ می‌شود که عددی گویا است.

57 گویا است در حالی که $a + 2b$ برابر $8 + \sqrt{2}$ می‌باشد که عددی گنگ است.

58 $\sqrt[3]{2}$ ؛ $\sqrt[3]{2}$ عددی گنگ است در حالی که مکعب آن برابر ۲ می‌شود که عددی گویا است.

59 ۲ و صفر؛ هر دو عدد گویا هستند اما تقسیم ۲ بر صفر تعریف نشده است.

60 در این صورت $A - B = A - C = \emptyset$ می‌باشد در حالی که مجموعه‌های B و C برابر نیستند.

61 در این صورت $A - C = B - C = \emptyset$ است در حالی که مجموعه‌های A و B برابر نیستند.

62 در این صورت $A \cup B = A \cup C$ است ولی $B \neq C$ می‌باشد.

63 در این صورت $A \cap B = A \cap C = \{1\}$ می‌باشد در حالی که $B \neq C$ است.

64 همان طور که می‌بینید $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C$ در حالی که $A \subseteq C$ می‌باشد.

65 $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ ؛ همان طور که می‌بینید ۲ عضو مجموعه A است و A نیز عضو مجموعه B می‌باشد، در حالی که ۲ عضو مجموعه B است.

66

در این صورت $A \times B = \{(1, a), (1, b)\}$ و $B \times A = \{(a, 1), (b, 1)\}$ می‌باشند که با هم برابر نیستند.

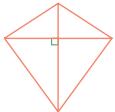
67

مثلث متساوی‌الساقین؛ مثلث متساوی‌الساقین دو ارتفاع برابر دارد در حالی که متساوی‌الاضلاع نیست.

68

دو زنگه متساوی‌الساقین؛ دو قطر برابر دارد در حالی که مستطیل نیست.

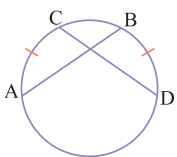
69



70

مثلث منفرجه‌الزاویه؛ در مثلث منفرجه‌الزاویه نقطه هم‌رسمی ارتفاع‌ها بیرون مثلث است.

71



کمان‌های $\widehat{AC}$ و $\widehat{BD}$ برابرند، در حالی که وترهای AB و CD موازی نیستند.

72

در این صورت $|x + y|$ برابر $|-1| = 1$ و $|x| = |-2| = 2$ و $|y| = |1| = 1$ است و $1 \neq 2 + 1$ می‌شود.

73

$x = 2/5$ و $y = 1/5$ ؛ در این صورت داریم:

$$\begin{cases} [x + y] = [2/5 + 1/5] = [4/5] = 0 \\ [2/5] = 0, [1/5] = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \neq 0 + 0$$

74

در این صورت $|x| = |-2/5| = 2/5$ و $|[-2/5]| = 3/5$ و $2/5 \neq 3/5$ می‌باشد که با هم برابر نیستند.

75

$a = 0$ و $b = 2$ ؛ در این صورت مجموع مربعات آن‌ها ۴ و مربع مجموع آن‌ها نیز ۴ است.

76

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ؛ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ می‌باشد در حالی که B و ماتریس‌های صفر نیستند.

77

$f(x) = x$ و $g(x) = -2x$ ؛ تابع $f(x)$ اکیداً صعودی و تابع $g(x)$ اکیداً نزولی است در حالی که مجموع آن‌ها یعنی $f(x) + g(x) = -x$ اکیداً نزولی می‌باشد.

78

$$f(x) = x$$

۹۲

نادرست؛ عدد فرد به توان هر عدد طبیعی برسد، عددی فرد می‌شود.

۹۳

درست؛ مربع هر عدد فرد عددی فرد است، پس:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2k+1 + 2k'+1 + 2k''+1 \\ = 2k + 2k' + 2k'' + 3 = 2(\underbrace{k+k'+k''}_{q} + 1) + 1 = 2q+1$$

۹۴

نادرست؛ مثلاً ۲، ۳، ۴ سه عدد طبیعی متوالی هستند ولی مجموع آن‌ها یعنی ۹ بر ۶ بخش‌پذیر نیست. توجه کنید که مجموع سه عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

۹۵

نادرست؛ مثلاً میانگین چهار عدد متوالی ۱، ۲، ۳ و ۴ برابر $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ است که با هیچ کدام از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ برابر نیست.

۹۶

درست

$$a = 2k+1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'} + 1) + 1 = 2k'+1 \\ a = 2k+1 \Rightarrow a^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ = 2(\underbrace{4k^3 + 6k^2 + 3k}_{k''} + 1) = 2k''+1 \\ a^2 + a^3 = 2k'+1 + 2k''+1 = 2k' + 2k'' + 2 = 2(\underbrace{k'+k''}_{q} + 1) = 2q$$

حرفه‌ای باش! به توان رساندن، ماهیت عدد را از نظر زوج یا فرد بودن تغییر نمی‌دهد. چون a فرد است، a^2 و a^3 نیز فرد هستند و مجموع آن‌ها حتماً زوج می‌شود.

۹۷

درست

۹۸

فرض می‌کنیم $a = 2k+1$ باشد، پس:

$$a+3 = 2k+1+3 = 2k+4 = 2(\underbrace{k+2}_{q}) = 2q$$

۹۹

فرض می‌کنیم عدد زوج $2k$ و عدد فرد $2k'+1$ باشد، پس:

$$2k + 2k' + 1 = 2(\underbrace{k+k'}_{q}) + 1 = 2q+1$$

۱۰۰

فرض می‌کنیم دو عدد فرد $2k+1$ و $2k'+1$ باشند، پس:

$$2k+1 + 2k'+1 = 2k + 2k' + 2 = 2(\underbrace{k+k'+1}_{q}) = 2q$$

۱۰۱

فرض می‌کنیم عدد زوج $2k$ و عدد فرد $2k'+1$ باشد، پس:

$$7 \times 2k + 2k' + 1 = 2(\underbrace{7k + k'}_{q}) + 1 = 2q+1$$

۷۹

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$$

حرفه‌ای باش! در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر $a+d=0$ باشد، $f(x) = f^{-1}(x)$ می‌باشد.

۸۰

$x = \frac{\pi}{2}$ ؛ در این صورت $\sin 2(\frac{\pi}{2}) = \sin \pi = 0$ و $2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$ می‌باشند که با هم برابر نیستند.

۸۱

$\alpha = 3^\circ$ و $\beta = 15^\circ$ ؛ در این صورت $\frac{1}{2} \sin 3^\circ = \sin 15^\circ$ است در حالی که $15^\circ \neq 3^\circ$.

۸۲

$x = \frac{\pi}{2}$ ؛ در این صورت $\tan x$ تعریف نمی‌شود.

۸۳

$a = 10$ و $b = 100$ ؛ در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \log ab = \log 1000 = 3 \\ \log a = \log 10 = 1 \Rightarrow 3 \neq 1 \times 2 \\ \log b = \log 100 = 2 \end{cases}$$

۸۴

$\alpha = 7^\circ$ و $\beta = 8^\circ$ ؛ هر دو زاویه حاده هستند اما مجموع آن‌ها برابر 15° است که حاده نیست.

۸۵

زوج

۸۶

فرد

۸۷

اثبات مستقیم

۸۸

است

۸۹

فرد؛ اگر $a+b$ فرد باشد، حتماً یکی از اعداد زوج و دیگری فرد است. از طرفی می‌دانیم توان دوم عدد زوج، عددی زوج و توان دوم عدد فرد، عددی فرد است، پس $a^2 + b^2$ که مجموع یک عدد زوج و یک عدد فرد است، عددی فرد می‌شود.

۹۰

درست؛ اگر $a+1$ فرد باشد، a حتماً زوج است و $a-4$ که تفاضل دو عدد زوج می‌باشد نیز عددی زوج می‌شود.

۹۱

نادرست؛ مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است.

$$2k+1 + 2k'+1 = 2k + 2k' + 2 = 2(\underbrace{k+k'+1}_{q}) = 2q$$

توجه کنید در محاسبات بالا $\frac{n-1}{2}$ را برابر q فرض کرده‌ایم.

حرفه‌ای باش! همواره داریم:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۱۱۱

فرض می‌کنیم دو عدد فرد، $2k+1$ و $2k'+1$ باشند، پس:

$$\begin{aligned}(2k+1)^2 + (2k'+1)^2 &= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 \\&= 4k^2 + 4k'^2 + 4k + 4k' + 2 \\&= 2(2k^2 + 2k'^2 + 2k + 2k' + 1) = 2q\end{aligned}$$

۱۱۲

فرض می‌کنیم $a = 2k+1$ و $b = 2k'+1$ باشند، پس:

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 &= (2k+1)^3 + (2k'+1)^3 \\&= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 + 8k'^3 + 12k'^2 + 6k' + 1 \\&= 8k^3 + 8k'^3 + 12k^2 + 12k'^2 + 6k + 6k' + 2 \\&= 2(4k^3 + 4k'^3 + 6k^2 + 6k'^2 + 3k + 3k' + 1) = 2q\end{aligned}$$

۱۱۳

فرض می‌کنیم دو عدد فرد $2k+1$ و $2k'+1$ باشند، پس:

$$\begin{aligned}(2k+1)^2 - (2k'+1)^2 &= (4k^2 + 4k + 1) - (4k'^2 + 4k' + 1) \\&= 4k^2 - 4k'^2 + 4k - 4k' = 4(k^2 - k'^2 + k - k') = 4q\end{aligned}$$

۱۱۴

فرض می‌کنیم $n = 2k+1$ باشد. پس:

$$\begin{aligned}n^2 - 5n + 7 &= (2k+1)^2 - 5(2k+1) + 7 \\&= 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7 \\&= 4k^2 - 6k + 3 = 2(2k^2 - 3k + 1) + 1 = 2q + 1\end{aligned}$$

۱۱۵

فرض می‌کنیم $n = 2k$ است، پس:

$$\begin{aligned}n^2 - 5n + 7 &= (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 7 \\&= 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1\end{aligned}$$

۱۱۶

فرض می‌کنیم دو عدد فرد $2k+1$ و $2k'+1$ باشند، پس:

$$\begin{aligned}(2k+1)(2k'+1) + 1 &= 4kk' + 2k + 2k' + 1 + 1 \\&= 4kk' + 2k + 2k' + 2 = 2(2kk' + k + k' + 1) = 2q\end{aligned}$$

۱۱۷

فرض می‌کنیم دو عدد زوج متوالی $2k$ و $2k+2$ هستند، پس:

$$\begin{aligned}2k(2k+2) + 1 &= 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2 \\&= 2(k + k' + k'' + 1) + 1 = 2q + 1\end{aligned}$$

۱۱۸

فرض می‌کنیم سه عدد فرد $2k+1$ ، $2k'+1$ و $2k''+1$ باشند، پس:

$$\begin{aligned}2k+1 + 2k'+1 + 2k''+1 &= 2k + 2k' + 2k'' + 3 \\&= 2(k + k' + k'' + 1) + 1 = 2q + 1\end{aligned}$$

۱۰۲

فرض می‌کنیم دو عدد فرد متوالی $2k+1$ و $2k+3$ باشند، پس:

$$\begin{aligned}(2k+1)(2k+3) &= 4k^2 + 6k + 2k + 3 = 4k^2 + 8k + 3 \\&= 2(2k^2 + 4k + 1) + 1 = 2q + 1\end{aligned}$$

۱۰۳

فرض می‌کنیم دو عدد فرد، $2k+1$ و $2k'+1$ باشند، پس:

$$(2k+1)(2k'+1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1 = 2q + 1$$

۱۰۴

فرض می‌کنیم عدد زوج $2k$ و عدد فرد $2k'+1$ باشد، پس:

$$2k(2k'+1) = 4kk' + 2k = 2(2kk' + k) = 2q$$

نتیجه حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی، زوج است، زیرا دو عدد صحیح متوالی یکی زوج و دیگری فرد است.

۱۰۵

فرض می‌کنیم عدد فرد $2k+1$ باشد، پس:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$$

۱۰۶

فرض می‌کنیم عدد فرد $2k+1$ باشد، پس:

$$(2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1 = 2q + 1$$

۱۰۷

فرض می‌کنیم $n-1$ ، n و $n+1$ سه عدد صحیح متوالی باشند، پس:

$$n-1 + n + n+1 = 3n$$

۱۰۸

فرض می‌کنیم $n-2$ ، $n-1$ ، n ، $n+1$ و $n+2$ پنج عدد صحیح متوالی باشند، پس:

$$n-2 + n-1 + n + n+1 + n+2 = 5n$$

۱۰۹

فرض می‌کنیم پنج عدد متوالی $n-2$ ، $n-1$ ، n ، $n+1$ و $n+2$ باشند، که واضح است عدد وسطی n است، پس:

$$\bar{x} = \frac{n-2 + n-1 + n + n+1 + n+2}{5} = \frac{5n}{5} = n$$

۱۱۰

فرض می‌کنیم n ، $n+1$ ، $n+2$ ، ... و $n+(n-1)$ عدد صحیح متوالی باشند، پس:

$$n + n+1 + n+2 + \dots + n + (n-1) = n \times n + (1+2+\dots+n-1)$$

$$= n^2 + \frac{(n-1) \times n}{2}$$

چون n عددی فرد است، پس $n-1$ زوج بوده و $\frac{n-1}{2}$ عددی صحیح است، بنابراین داریم:

$$n^2 + \frac{(n-1)n}{2} = n^2 + nq = n(n+q) = nq'$$

۱۲۷

فرض می‌کنیم که دو عدد گویا $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هستند. می‌دانیم a, b, c و d اعداد صحیح و $d \neq 0$ است. پس:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

می‌دانیم حاصل ضرب و حاصل جمع دو عدد صحیح، عددی صحیح است، پس $ad+bc$ و bd اعداد صحیح هستند و چون b و d مخالف صفر هستند، پس $bd \neq 0$ می‌باشد و این یعنی $\frac{ad+bc}{bd}$ که همان مجموع دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ است، عددی گویا می‌باشد.

۱۲۸

فرض می‌کنیم دو عدد گویا $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هستند که a, b, c و d اعداد صحیح و b و d مخالف صفر می‌باشند، پس:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

می‌دانیم حاصل ضرب دو عدد صحیح، عددی صحیح است پس ac و bd عددی صحیح می‌باشند و چون b و d مخالف صفر هستند، پس $bd \neq 0$ می‌باشد و این یعنی $\frac{ac}{bd}$ عددی گویا است.

۱۲۹

فرض می‌کنیم $a = \frac{m}{n}$ و $b = \frac{p}{q}$ باشند که در آن‌ها m, n, p, q اعداد صحیح و n و q مخالف صفر هستند، از آن جایی که $b \neq 0$ است پس p نیز مخالف صفر می‌باشد. حال داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} = \frac{mq}{np}$$

می‌دانیم حاصل ضرب دو عدد صحیح، عددی صحیح است، پس mq و np اعداد صحیح هستند و چون n و p مخالف صفر هستند پس $np \neq 0$ می‌باشد و این یعنی $\frac{mq}{np}$ عددی گویا است.

۱۳۰

فرض می‌کنیم دو عدد گویا $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هستند که a, b, c و d اعداد صحیح و b و d مخالف صفر هستند، پس:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

می‌دانیم حاصل ضرب و حاصل تفاضل دو عدد صحیح، عددی صحیح است و هم‌چنین چون b و d مخالف صفر هستند، پس $bd \neq 0$ می‌باشد و این یعنی $\frac{ad-bc}{bd}$ اعداد صحیح و $bd \neq 0$ است، پس $\frac{ad-bc}{bd}$ یک عدد گویا می‌باشد.

۱۳۱

$$\begin{aligned} \overline{abc} &= 3q \Rightarrow \overline{a00} + \overline{b0} + c = 3q \Rightarrow 100 \times a + 10 \times b + c = 3q \\ &\Rightarrow \underbrace{99a}_{3q'} + a + \underbrace{9b}_{3q''} + b + c = 3q \Rightarrow a + b + c = 3q - 3q' - 3q'' \\ &= 3(q - q' - q'') = 3k \end{aligned}$$

۱۳۲

$$\begin{aligned} \overline{abcde} &= \overline{abc00} + \overline{de} = 100 \times \overline{abc} + \overline{de} \\ \overline{abcde} &= 4q \Rightarrow 100 \times \overline{abc} + \overline{de} = 4q \\ &\Rightarrow 4 \times \underbrace{25 \times \overline{abc}}_{q'} + \overline{de} = 4q \Rightarrow 4q' + \overline{de} = 4q \\ &\Rightarrow \overline{de} = 4q - 4q' \Rightarrow \overline{de} = 4(q - q') = 4q'' \end{aligned}$$

۱۱۹

فرض می‌کنیم دو عدد طبیعی متوالی n و $n+1$ باشند، پس $k = n(n+1)$ است. حال داریم:

$$4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

۱۲۰

فرض می‌کنیم دو عدد زوج متوالی $2k$ و $2k+2$ باشند، پس:

$$2k(2k+2)+1 = 4k^2+4k+1 = (2k+1)^2$$

می‌دانیم $(2k+1)^2$ یک عدد مربع کامل است.

۱۲۱

چون $4k+1$ مربع کامل است؛ داریم:

$$4k+1 = n^2 \Rightarrow 4k = n^2 - 1 \Rightarrow k = \frac{n^2-1}{4} = \frac{(n-1)(n+1)}{4}$$

$$= \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

چون $4k+1$ عددی فرد است، پس n^2 و در نتیجه n نیز عددی فرد می‌باشد. بنابراین $n-1$ و $n+1$ هر دو زوج هستند و در نتیجه $\frac{n-1}{2}$ و $\frac{n+1}{2}$ اعداد طبیعی می‌باشند. حال باید نشان دهیم این دو عدد متوالی اند، پس:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right) - \left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n+1-n+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

۱۲۲

فرض می‌کنیم سه عدد زوج متوالی $2k-2$ ، $2k$ و $2k+2$ باشند، پس:

$$(2k-2) \times 2k \times (2k+2) = 8(k-1) \times k \times (k+1) = 8q$$

۱۲۳

عدد $5n+7$ را می‌توان به صورت $(n-2)(n-3)+1$ نوشت. چون $n-2$ و $n-3$ دو عدد متوالی اند، پس حاصل ضرب آن‌ها زوج بوده و داریم:

$$(n-2)(n-3)+1 = 2k+1$$

۱۲۴

چون a زوج است، پس $a-1 \neq 0$ می‌باشد حال طرفین تساوی $(a-1)b = 0$ را در $\frac{1}{a-1}$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\frac{1}{a-1} \times (a-1)b = \frac{1}{a-1} \times 0 \Rightarrow b = 0$$

۱۲۵

از $x+y=1$ نتیجه می‌گیریم $y=1-x$ ، پس:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{1-x}\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{1-x-1}{1-x}\right)$$

$$= \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{-x}{1-x}\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$$

۱۲۶

فرض می‌کنیم چهار عدد صحیح متوالی n ، $n+1$ ، $n+2$ و $n+3$ باشند، پس:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= \underbrace{n(n+3)}_{n^2+3n} \underbrace{(n+1)(n+2)}_{n^2+3n+2} + 1 \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

۱۴۰

فرد

۱۴۱

$$2k^2 - 7k + 4$$

$$n = 2k - 1 \Rightarrow n^2 - 5n + 1 = (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 1$$

$$= 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 1 = 4k^2 - 14k + 7$$

$$= 2(2k^2 - 7k + 4) - 1 \Rightarrow q = 2k^2 - 7k + 4$$

۱۴۲

یا

۱۴۳

نادرست؛ گزاره $(p_1 \vee p_2) \Rightarrow q$ هم‌ارز $(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)$ است.

۱۴۴

نادرست؛ اگر حداقل یکی از اعداد x و y صفر باشند، رابطه درست است.

۱۴۵

نادرست

$$\begin{cases} (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$$

۱۴۶

نادرست؛ $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

۱۴۷

نادرست؛ مثلاً ۴ و ۵ مضرب ۳ نیستند اما مجموع آن‌ها یعنی ۹ مضرب ۳ است.

۱۴۸

حالت اول فرض می‌کنیم n زوج باشد، پس $n = 2k$ می‌باشد و داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 7$$

$$= 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$$

حالت دوم فرض می‌کنیم n فرد باشد، پس $n = 2k + 1$ می‌باشد و داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k + 1)^2 - 5(2k + 1) + 7$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7 = 4k^2 - 6k + 3$$

$$= 2(2k^2 - 3k + 1) + 1 = 2q + 1$$

۱۴۹

حالت اول فرض می‌کنیم n زوج باشد، پس $n = 2k$ می‌باشد و داریم:

$$n^2 - 9n + 1 = (2k)^2 - 9(2k) + 1 = 4k^2 - 18k + 1$$

$$= 2(2k^2 - 9k) + 1 = 2q + 1$$

حالت دوم فرض می‌کنیم n فرد باشد، پس $n = 2k + 1$ می‌باشد و داریم:

$$n^2 - 9n + 1 = (2k + 1)^2 - 9(2k + 1) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 18k - 9 + 1$$

$$= 4k^2 - 14k - 7 = 2(2k^2 - 7k - 4) - 1 = 2q - 1$$

۱۳۳

$$\overline{abcabc} = \overline{abc000} + \overline{abc} = \overline{abc} + 1000 \times \overline{abc} = 1001 \times \overline{abc}$$

$$= 7 \times 11 \times 13 \times \overline{abc}$$

۱۳۴

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0 \xrightarrow{(a-1)^2 \geq 0} a > 0$$

۱۳۵

فرض می‌کنیم دو عدد صحیح زوج متوالی $2k$ و $2k + 2$ باشند، پس:

$$2k(2k + 2) = 4k(k + 1) = 4 \times 2q = 8q$$

حرفه‌ای باش! چون از دو عدد متوالی، یکی زوج و دیگری فرد است، پس حتماً حاصل ضرب آن‌ها زوج می‌باشد. به‌طور کلی حاصل ضرب هر n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است مثلاً حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی بر $6 = 3!$ بخش‌پذیر می‌باشد.

۱۳۶

فرض می‌کنیم عدد فرد $2k + 1$ باشد، پس:

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$$

۱۳۷

فرض می‌کنیم عدد فرد $2k + 1$ باشد، پس:

$$(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$$

$$= 4 \times 2q = 8q$$

۱۳۸

چون a عددی زوج است، پس $a = 2k$ خواهد بود و داریم:

$$a(a^2 - 4) = 2k(4k^2 - 4) = 8k(k^2 - 1) = 8k(k - 1)(k + 1)$$

$$= 8 \times 6q = 48q$$

۱۳۹

فرض می‌کنیم $n^3 = 7p + 1$ باشد، پس:

$$7p + 1 = n^3 \Rightarrow 7p = n^3 - 1 \Rightarrow 7p = (n - 1)(n^2 + n + 1)$$

حال داریم:

$$1) \begin{cases} n - 1 = 7 \\ n^2 + n + 1 = p \end{cases} \quad \text{یا} \quad 2) \begin{cases} n^2 + n + 1 = 7 \\ n - 1 = p \end{cases}$$

حالت اول

$$n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8 \Rightarrow n^2 + n + 1 = 64 + 8 + 1 = 73 \Rightarrow p = 73$$

حالت دوم

$$n^2 + n + 1 = 7 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow (n + 3)(n - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -3 \\ n = 2 \end{cases}$$

$$p = n - 1 \Rightarrow \begin{cases} p = -3 - 1 = -4 & (\text{غ ق ق}) \\ p = 2 - 1 = 1 & (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

همان‌طور که دیدید عدد اول ۷۳ وجود دارد.

۱۵۳

ابتدا تمام حالت‌ها را از نظر زوج و فرد بودن برای a و b در نظر می‌گیریم:

$$a = 2k, b = 2k' \Rightarrow ab = 2k \times 2k' = 4kk' = 2(2kk') = 2q \quad \times$$

$$a = 2k, b = 2k' + 1 \Rightarrow ab = 2k \times (2k' + 1)$$

$$= 4kk' + 2k = 2(2kk' + k) = 2q \quad \times$$

$$a = 2k + 1, b = 2k' \Rightarrow ab = (2k + 1) \times 2k' = 4kk' + 2k'$$

$$= 2(2kk' + k') = 2q \quad \times$$

$$a = 2k + 1, b = 2k' + 1 \Rightarrow ab = (2k + 1)(2k' + 1)$$

$$= 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1 = 2q + 1 \quad \checkmark$$

بنابراین ab هنگامی فرد است که a و b فرد باشند، پس:

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 4k^2 + 4k'^2 + 4k + 4k' + 2$$

$$= 2(2k^2 + 2k'^2 + 2k + 2k' + 1) = 2q$$

اگر تو صورت سؤال نکه با در نظر گرفتن همه حالت‌ها ثابت کن، فقط کافیست پاسخ پایین رو بنویسی. مثلاً تو امتحان نهایی خرداد ۹۸ نگفته بود. چون ab فرد است، پس a و b فرد می‌باشند، حال داریم:

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1$$

$$= 4k^2 + 4k'^2 + 4k + 4k' + 2 = 2(2k^2 + 2k'^2 + 2k + 2k' + 1) = 2q$$

۱۵۴

چون ab فرد است، پس a و b فرد می‌باشند. حال داریم:

$$\begin{cases} a = 2k + 1 \\ b = 2k' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 4k^2 + 4k'^2 + 4k + 4k' + 2$$

$$= 2(2k^2 + 2k'^2 + 2k + 2k' + 1) = 2q$$

۱۵۵

برای a دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر $a \geq 0$ باشد در این صورت $|a| = a$ می‌باشد، پس:

$$a + |a| \geq 0 \Rightarrow a + a \geq 0 \Rightarrow 2a \geq 0$$

حالت دوم اگر $a < 0$ باشد آن‌گاه $|a| = -a$ می‌باشد، پس:

$$a + |a| \geq 0 \Rightarrow a + (-a) \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0$$

۱۵۶

حالت اول a و b زوج باشند:

$$\Rightarrow ab(a^2 - b^2) = 2k \times (2k')((2k)^2 - (2k')^2) = 2q$$

حالت دوم a زوج و b فرد باشد:

$$\Rightarrow ab(a^2 - b^2) = 2k \times (2k' + 1)((2k)^2 - (2k' + 1)^2) = 2q$$

۱۵۰

همه حالت‌ها را برای n در نظر می‌گیریم:

$$n = 1 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1 \quad \times$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4 \times 9}{4} = 9 \quad \times$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{9 \times 16}{4} = 36 \quad \checkmark$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{16 \times 25}{4} = 100 \quad \checkmark$$

$$n = 5 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{25 \times 36}{4} = 25 \times 9 = 225 \quad \times$$

$$n = 6 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{36 \times 49}{4} = 9 \times 49 = 441 \quad \times$$

فقط به ازای $n = 3$ و $n = 4$ حاصل $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج شد.

۱۵۱

حالت‌های مختلف را برای a و b در نظر می‌گیریم:

$$a = 2k, b = 2k' \Rightarrow a - b = 2k - 2k' = 2(k - k') = 2q \quad \times$$

$$a = 2k, b = 2k' + 1 \Rightarrow a - b = 2k - (2k' + 1) = 2k - 2k' - 1$$

$$\Rightarrow a - b = 2k - 2k' - 1 + 2 - 2 = 2(k - k' - 1) + 1 = 2q + 1 \quad \checkmark$$

$$a = 2k + 1, b = 2k' \Rightarrow a - b = 2k + 1 - 2k'$$

$$= 2(k - k') + 1 = 2q + 1 \quad \checkmark$$

$$a = 2k + 1, b = 2k' + 1 \Rightarrow a - b = 2k + 1 - (2k' + 1)$$

$$= 2k - 2k' = 2(k - k') = 2q \quad \times$$

بنابراین برای آن‌که $a - b$ فرد باشد، باید a و b یکی زوج و دیگری فرد باشد:

$$a = 2k, b = 2k' + 1 \Rightarrow ab = 2k(2k' + 1) = 2q$$

$$a = 2k + 1, b = 2k' \Rightarrow ab = (2k + 1) \times 2k'$$

$$= 2((2k + 1)k') = 2q$$

۱۵۲

حالت اول فرض می‌کنیم $a = 0$ باشد، در این صورت حکم برقرار است

زیرا حکم، ترکیب فصلی $a = 0$ و $b = 0$ است و چون $a = 0$ برقرار است، پس حکم $b = 0 \vee a = 0$ درست می‌باشد.

حالت دوم فرض می‌کنیم $a \neq 0$ باشد، حال برای آن‌که حکم درست باشد

باید نشان دهیم $b = 0$ است، چون $a \neq 0$ است پس $\frac{1}{a}$ یک عدد حقیقی است و داریم:

$$ab = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \times ab = \frac{1}{a} \times 0 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} a = rk, b = rk' + 1 &\Rightarrow (a-1)^r + b^r = (rk-1)^r + (rk'+1)^r \\ &= rk^r - rk + 1 + rk'^r + rk' + 1 = rk^r + rk'^r - rk + rk' + 2 \\ &= 2(rk^r + rk'^r - rk + rk' + 1) = 2q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = rk+1, b = rk' &\Rightarrow (a-1)^r + b^r = (rk+1-1)^r + (rk')^r \\ &= rk^r + rk'^r = 2(rk^r + rk'^r) = 2q \end{aligned}$$

۱۶۰

روش اول

حالت اول n زوج باشد:

$$n = rk \Rightarrow n^r + 1 = (rk)^r + 1 = rk^r + 1 = 2q + 1$$

حالت دوم n فرد باشد:

$$\begin{aligned} n = rk+1 &\Rightarrow n^r + 1 = (rk+1)^r + 1 = rk^r + rk + 1 + 1 \\ &= 2(k^r + k) + 2 = 2q + 2 \end{aligned}$$

روش دوم

حالت اول n = rk باشد:

$$n^r + 1 = (rk)^r + 1 = rk^r + 1 = 2(k^r) + 1 = 2q + 1$$

حالت دوم n = rk+1 باشد:

$$\begin{aligned} n^r + 1 &= (rk+1)^r + 1 = rk^r + rk + 1 + 1 = 2(k^r + k) + 2 \\ &= 2q + 2 \end{aligned}$$

حالت سوم n = rk+2 باشد:

$$\begin{aligned} n^r + 1 &= (rk+2)^r + 1 = rk^r + rk + 4 + 1 \\ &= 2(k^r + k + 1) + 1 = 2q + 1 \end{aligned}$$

حالت چهارم n = rk+3 باشد:

$$\begin{aligned} n^r + 1 &= (rk+3)^r + 1 = rk^r + 2rk + 1 \\ &= 2(k^r + k + 1) + 1 = 2q + 1 \end{aligned}$$

۱۶۱

روش اول فرض می‌کنیم عدد طبیعی موردنظر a باشد باید نشان دهیم

$a + a^r$ عددی زوج است. اگر a زوج باشد، داریم:

$$a + a^r = rk + (rk)^r = rk + rk^r = 2(k + rk^r) = 2q$$

اگر a فرد باشد، داریم:

$$\begin{aligned} a + a^r &= rk+1 + (rk+1)^r = rk+1 + rk^r + rk + 1 \\ &= rk^r + rk + 2 = 2(k^r + k + 1) = 2q \end{aligned}$$

روش دوم $a + a^r$ را می‌توان به صورت $a(1+a)$ نوشت که حاصل ضرب

دو عدد متوالی است. چون دو عدد متوالی همواره یکی زوج و دیگری فرد است، پس حاصل ضرب آن‌ها همواره زوج می‌باشد.

حالت سوم a فرد و b زوج باشد:

$$\begin{aligned} a = rk+1, b = rk' &\Rightarrow ab(a^r - b^r) = (rk+1)rk'((rk+1)^r - (rk')^r) \\ &= 2(rk+1) \times rk'((rk+1)^r - (rk')^r) = 2q \end{aligned}$$

حالت چهارم a و b فرد باشند:

$$\begin{aligned} a = rk+1, b = rk'+1 &\Rightarrow ab(a^r - b^r) = (rk+1)(rk'+1)((rk+1)^r - (rk'+1)^r) \\ &= (rk+1)(rk'+1)((rk^r + rk + 1) - (rk'^r + rk' + 1)) \\ &= (rk+1)(rk'+1)(rk^r + rk - rk'^r - rk') \\ &= 2((rk+1)(rk'+1)(rk^r + rk - rk'^r - rk')) = 2q \end{aligned}$$

۱۵۷

حالت اول اگر n زوج باشد:

$$\begin{aligned} n = rk &\Rightarrow n^r + n^r = (rk)^r + (rk)^r = 2rk^r \\ &= 2k^r = 2(2k^r) = 2q \end{aligned}$$

حالت دوم اگر n فرد باشد:

$$\begin{aligned} n = rk+1 &\Rightarrow n^r + n^r = (rk+1)^r + (rk+1)^r \\ &= 2k^r + 2rk^r + 2k + 1 + 2k^r + 2rk + 1 = 2k^r + 2rk^r + 2k + 2 \\ &= 2(k^r + rk^r + k + 1) = 2q \end{aligned}$$

۱۵۸

روش اول

$$n = 2 \Rightarrow n^r + n = 2^r + 2 = 2 \times 2$$

$$n = 3 \Rightarrow n^r + n = 3^r + 3 = 3 \times 3$$

$$n = 5 \Rightarrow n^r + n = 5^r + 5 = 5 \times 5$$

$$n = 6 \Rightarrow n^r + n = 6^r + 6 = 3 \times 12$$

$$n = 8 \Rightarrow n^r + n = 8^r + 8 = 3 \times 24$$

$$n = 9 \Rightarrow n^r + n = 9^r + 9 = 3 \times 30$$

$$n = 11 \Rightarrow n^r + n = 11^r + 11 = 3 \times 44$$

$$n = 12 \Rightarrow n^r + n = 12^r + 12 = 3 \times 52$$

روش دوم اعضای مجموعه S به فرم $3k+2$ یا $3k$ هستند، پس:

$$n = rk \Rightarrow n^r + n = 9k^r + rk = 3(3k^r + k) = 3q$$

$$\begin{aligned} n = rk+2 &\Rightarrow n^r + n = (rk+2)^r + rk+2 \\ &= 9k^r + 12k + 6 = 3(3k^r + 4k + 2) = 3q \end{aligned}$$

۱۵۹

ابتدا حالت‌های مختلف زوج یا فرد بودن را برای a و b در نظر می‌گیریم:

$$a = rk, b = rk' \Rightarrow a + b = rk + rk' = 2(k + k') = 2q \quad \times$$

$$a = rk, b = rk'+1 \Rightarrow a + b = rk + rk' + 1 = 2(k + k') + 1 = 2q + 1 \quad \checkmark$$

$$a = rk+1, b = rk' \Rightarrow a + b = rk+1 + rk' = 2(k + k') + 1 = 2q + 1 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} a = rk+1, b = rk'+1 &\Rightarrow a + b = rk+1 + rk'+1 = 2k + 2k' + 2 \\ &= 2(k + k' + 1) = 2q \quad \times \end{aligned}$$

حالت سوم: $n = \Delta k + 3$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} n = \Delta k + 3 &\Rightarrow n^2 = 2\Delta k^2 + 3 \cdot \Delta k + 9 \\ &\Rightarrow n^2 = \Delta(\underbrace{\Delta k^2 + 6k + 3}_{q}) + 3 = \Delta q + 3 \\ &\Rightarrow n^4 = (\Delta q + 3)^2 = 2\Delta q^2 + 4 \cdot \Delta q + 9 = \Delta(\underbrace{\Delta q^2 + 4q + 3}_{q'}) + 9 \\ &= \Delta q' + 9 \Rightarrow n^4 - 9 = \Delta q' \end{aligned}$$

حالت چهارم: $n = \Delta k + 4$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} n = \Delta k + 4 &\Rightarrow n^2 = 2\Delta k^2 + 4 \cdot \Delta k + 16 \\ &\Rightarrow n^2 = \Delta(\underbrace{\Delta k^2 + 8k + 4}_{q}) + 4 = \Delta q + 4 \\ &\Rightarrow n^4 = (\Delta q + 4)^2 = 2\Delta q^2 + 4 \cdot \Delta q + 16 \\ &= \Delta(\underbrace{\Delta q^2 + 8q + 4}_{q'}) + 4 = \Delta q' + 4 \Rightarrow n^4 - 4 = \Delta q' \end{aligned}$$

۱۶۶

برای اثبات گزاره $p \Rightarrow q$ اگر بتوان p را به فرض‌های کوچک‌تر p_1 و p_2 تبدیل کرد آن‌گاه گزاره را می‌توان به صورت $q \Rightarrow (p_1 \vee p_2)$ نمایش داد. حال باتوجه به هم ارزی $\Box \Rightarrow \bigcirc \equiv \sim \Box \vee \bigcirc$ و استفاده از ویژگی‌های ترکیب فصلی و عطفی داریم:

$$\begin{aligned} (p_1 \vee p_2) \Rightarrow q &\equiv \sim (p_1 \vee p_2) \vee q \equiv (\sim p_1 \wedge \sim p_2) \vee q \\ &\equiv (\sim p_1 \vee q) \wedge (\sim p_2 \vee q) \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید باید از هر یک از فرض‌های P_1 و P_2 حکم را ثابت کرد.

نتیجه می‌توان ثابت کرد که اگر p را بتوان به n گزاره $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ تبدیل کرد، داریم:

$$\begin{aligned} (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q \\ \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q) \end{aligned}$$

۱۶۷

از تساوی $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ داریم:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0 \\ \text{بنابراین } x \text{ و } y \text{ هایی که در این تساوی صدق می‌کند باید حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد.} \end{aligned}$$

۱۶۸

$$\begin{aligned} n = 2k - 1 &\Rightarrow A = (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 3 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 3 = 4k^2 - 14k + 9 \\ &= 2(\underbrace{2k^2 - 7k + 5}_{q}) - 1 = 2q - 1 \end{aligned}$$

بنابراین $q = 2k^2 - 7k + 5$ می‌باشد.

۱۶۲

حالت اول: فرض می‌کنیم $n = 3k$ باشد، پس:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = 3k(3k - 1)(3k + 1) = 3q$$

حالت دوم: فرض می‌کنیم $n = 3k + 1$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n - 1)(n + 1) = (3k + 1)(3k)(3k + 2) \\ &= (3k + 1) \times 3k \times (3k + 2) = 3((3k + 1)k(3k + 2)) = 3q \end{aligned}$$

حالت سوم: فرض می‌کنیم $n = 3k + 2$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n - 1)(n + 1) = (3k + 2)(3k + 1)(3k + 3) \\ &= (3k + 2)(3k + 1)(3k + 3) = 3((3k + 2)(3k + 1)(k + 1)) = 3q \end{aligned}$$

۱۶۳

فرض می‌کنیم سه عدد صحیح متوالی $n - 1$ ، n و $n + 1$ باشند، پس:

$$\begin{aligned} (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 \\ &= n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 2 \\ &= 3n^2 + 2 = 3n(n + 2) \end{aligned}$$

حال n می‌تواند یکی از حالت‌های زیر باشد:

$$\begin{aligned} n = 3k &\Rightarrow 3n(n + 2) = 3(3k)((3k)^2 + 2) \\ &= 9k((3k)^2 + 2) = 9q \\ n = 3k + 1 &\Rightarrow 3n(n + 2) = 3(3k + 1)((3k + 1)^2 + 2) \\ &= 3(3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 2) = 9(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1) = 9q \\ n = 3k + 2 &\Rightarrow 3n(n + 2) = 3(3k + 2)((3k + 2)^2 + 2) \\ &= 3(3k + 2)(9k^2 + 12k + 6) = 9(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2) = 9q \end{aligned}$$

۱۶۴

چون a مضرب ۳ نیست پس $a = 3k + 1$ یا $a = 3k + 2$ است، پس:

$$\begin{aligned} a = 3k + 1 &\Rightarrow a^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 \\ &= 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k) = 3q \\ a = 3k + 2 &\Rightarrow a^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1 \\ &= 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1) = 3q \end{aligned}$$

۱۶۵

حالت اول: $n = \Delta k + 1$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} n = \Delta k + 1 &\Rightarrow n^2 = 2\Delta k^2 + 1 \cdot \Delta k + 1 = \Delta(\underbrace{\Delta k^2 + 2k}_{q}) + 1 = \Delta q + 1 \\ &\Rightarrow n^4 = (\Delta q + 1)^2 = 2\Delta q^2 + 1 \cdot \Delta q + 1 = \Delta(\underbrace{\Delta q^2 + 2q}_{q'}) + 1 \\ &= \Delta q' + 1 \Rightarrow n^4 - 1 = \Delta q' \end{aligned}$$

حالت دوم: $n = \Delta k + 2$ باشد، پس:

$$\begin{aligned} n = \Delta k + 2 &\Rightarrow n^2 = 2\Delta k^2 + 2 \cdot \Delta k + 4 = \Delta(\underbrace{\Delta k^2 + 4k}_{q}) + 4 = \Delta q + 4 \\ &\Rightarrow n^4 = (\Delta q + 4)^2 = 2\Delta q^2 + 4 \cdot \Delta q + 16 = \Delta(\underbrace{\Delta q^2 + 8q + 4}_{q'}) + 4 \\ &= \Delta q' + 4 \Rightarrow n^4 - 4 = \Delta q' \end{aligned}$$