انتشارات بین‌المللی
گاج

مجموعه کتاب‌های آی‌کیو قرن جدید

• ویــژه کنکور ۱۴۰۵ •

کنکور

حسابان جامع

دهــم | یازدهم | دوازدهم

+ کنکور ۱۴۰۴

مطابق با سبک جدید سؤالات کنکور

مؤلفان: مهندس سجاد عظمتی - مهندس مجید رفعتی
علی احمدی قزل دشت

مجموعه کتاب‌های فرمول بیست
ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی

9 786220 308706

مقدمه

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به کوشش توان کرد گیتی روان
به دانش توان یافت نیکو روان
(فردوسی)

- حسابان، برای بسیاری از دانش‌آموزان، درسی چالش‌برانگیز اما سرنوشت‌ساز در مسیر کنکور ریاضی است. «حسابان جامع آیکیو گاج» با هدف فراهم‌کردن یک مسیر روشن و مطمئن برای موفقیت در این درس طراحی شده‌است؛ رویکرد آن، ساده‌سازی مفاهیم دشوار، تقویت مهارت حل مسئله و ارائه پرسش‌هایی‌ست که نه‌تنها سطح کنکور را پوشش می‌دهند، بلکه افق یادگیری را گسترش می‌دهند.

- اگرچه مسیر موفقیت آسان نیست، اما با برنامه‌ریزی، پشتکار و تکیه بر منابع مناسب، رسیدن به درصد بالا در حسابان کاملاً ممکن است. کتابی که در دست شماست ، نه فقط یک منبع کمک‌درسی، بلکه همراهی مطمئن برای مسیر پرچالش کنکور است.

به شما اطمینان می‌دهیم ، با بررسی دقیق تست های این کتاب، در کنکور ۱۴۰۵ و حتی بعد از آن ، سؤالی خارج از این کتاب و یا سخت‌تر از این سوالات نخواهید دید .

- امید است با تلاش مستمر و بهره‌گیری از این منبع، گام‌های استواری به‌سوی موفقیت بردارید.

برای اینکه بتونی به بهترین شکل ممکن از این کتاب استفاده کنی، اول باید بدونی که تست‌های این کتاب رو به ترتیب سطح‌بندی اون‌ها پاسخ بدی. پس اول توضیحات کاملی راجع به سطح‌بندی تست‌ها براتون انجام میدیم:

سطح‌بندی تست‌ها

تست‌های آبی

۱

در ابتدا باید تست‌هایی که با رنگ آبی مشخص شده رو جواب بدی. به زبان دیگه، حل تست‌های آبی در گام اول برای هر دانش‌آموزی واجبه.تست‌های آبی، تست‌های مفهومی با محاسبات ساده هستن که اعتماد به نفس تو رو در ابتدا بالا میبرن.

تست‌های قرمز

۲

تست‌هایی که با رنگ قرمز مشخص شده، تست‌های سطح بالاتر، ترکیبی و با محاسبات بیشتر بوده که برای تسلط بر زوایای مختلف مباحث برای تو طراحی شده‌اند. بعد از حل تست‌های آبی، تست‌های قرمز رو حل کن و خودت رو بیشتر به چالش بکش.

تست‌های چالشی

۳

بعد از اینکه روی تست‌های آبی و قرمز کامل مسلط شدی، و میخوای بیشتر تلاش کنی و درصد بالاتری به دست بیاری، میتونی سراغ تست‌های IQ بری. این تست‌ها سخت، چالشی، ترکیبی و پرمحاسبه بوده و شما رو برای موفقیت در تست‌های سخت کنکور سراسری آماده میکنه.

دقت کنید! تست‌های سخت و چالشی کنکورهای سراسری سال‌های قبل هم، جزء این تست‌ها هستن.

تست‌های جنجالی

۴

این تست‌ها برای دانش‌آموزانی هست که به فکر درصد بالای ۸۰ بوده و بسیار سخت‌کوش و علاقه‌مند به تست‌های بسیار چالشی هستن. پس این تست‌ها به هیچ عنوان برای همه دانش‌آموزان مناسب نیست. تست‌های TNT بسیار سخت، بسیار چالشی و بسیار پرمحاسبه و خلاقانه بوده و در سال‌های اخیر یک یا دو تست کنکور از این سطح تست‌ها می‌باشد. سؤالات بسیار سخت کنکورهای اخیر باعث شد این سطح‌بندی رو براتون انجام بدیم تا رتبه‌های برتر کنکور هم با دیدن این کتاب لذت ببرن.

معرفی ویژگی‌های کتاب

۱

سرنخ

تا جای ممکن، سعی کردیم فصل‌ها رو به مباحث کوچکی تقسیم بکنیم، تا بتونی با دیدن هر تست، به زوایای مختلف و تیپ‌بندی در هر مبحث پی ببری. قبل شروع هر تیپ تست، برای اینکه بدونی قراره با چه مدل تستی روبه‌رو بشی، بهت سرنخ دادیم. اینجوری در هر آزمون، سرنخ هر تست رو به راحتی توی ذهنت پیدا میکنی

۲

هایلایت

درسنامه‌های کاربردی

درسنامه‌ها و نکات مهم رو برات در پاسخنامه کتاب هایلایت کردیم. در درسنامه‌ها از بیان نکات بیهوده و اضافی پرهیز شده تا خوندن اون‌ها کاربردی‌تر بشه. دیدن جداول و کادربندی‌های به جا، خوندن درسنامه‌ها رو برات لذت‌بخش میکنه.

۳

یه جوره دیگه !

طراح‌های کنکور سراسری، خواسته‌های سوال رو کمی عوض میکنن و در کنکورهای جدید ازش استفاده میکنن! پس در پاسخنامه کتاب، هر وقت آیکون رو دیدی، بدون میخوایم تو رو با تمام ایده‌ها و زوایای مختلف اون سوال آشنا کنیم.

۴

روش سریع‌تر

در حل برخی از سوال‌ها، در کنار روش‌های تشریحی و تستی، میتونی از روش سریع‌تر سوال رو حل کنی. پس سعی کردیم به‌روزترین و خاص‌ترین روش‌های میانبُر و سریع‌تر در حل سوال‌ها رو برات بیان کنیم تا پاسخنامه این کتاب، نسبت به کتاب‌های مشابه، متفاوت باشه و جامع‌ترین و کامل‌ترین پاسخنامه رو ببینی.

۵

دام تستی

طراح‌های کنکور برای اینکه بفهمن روی مباحث مسلطی یا نه، میان در صورت سوال‌ها از عبارت‌هایی استفاده میکنن که تو حتی بعد از حل سوال، گزینه غلط رو جواب بدی. در برخی موارد هم گزینه‌ها رو به گونه‌ای قرار میدن که تو رو به اشتباه بندازن! این موارد رو با آیکون دام تستی براتون مشخص کردیم که روی همه جنبه‌های پنهان سوال‌ها هم مسلط بشی و روز کنکور، اشتباه نکنی.

تشکر و قدردانی:

- تشکر ویژه می‌کنم از اساتید عزیزی که در مراحل تالیف، همراه ما بودن به خصوص آقای نریمان فتح‌اللهی که تک‌تک تست‌ها رو با حوصله بررسی کردن. و همچنین تشکر و قدردانی می‌کنیم از اساتید عزیزی که با نظرات و تجربه‌های ارزشمندشون، باعث شدند کتاب بهتری تالیف بشه.
- **اساتید:** معین کرمی، علی مقدم‌نیا، محمد مصطفی ابراهیمی، امید شیری‌نژاد، آرش عمید.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

سجاد عظمتی - مجید رفعتی - علی احمدی

sajad.azemati

فهرست

۱ تابع

درس اول: مفاهیم تابع
۱ شناسایی تابع ۱۰
۲ مقدار تابع ۱۱
۳ دامنه و برد تابع ۱۲
۴ تساوی دو تابع ۱۶

درس دوم: انتقال و تبدیل نمودار تابع
۵ انتقال و قرینه‌یابی ۱۷
۶ انبساط و انقباض نمودار ۲۱

درس سوم: انواع تابع ۲۳

درس چهارم: توابع صعودی و نزولی ۲۷

درس پنجم: اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع
۷ مقداردهی به ترکیب توابع ۳۴
۸ ضابطهٔ ترکیب توابع ۳۵
۹ دامنه و بُرد ترکیب توابع ۳۸
۱۰ وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب ۳۹

درس ششم: تابع یک‌به‌یک و تابع وارون
۱۱ تابع وارون ۴۲
۱۲ محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون ۴۴
۱۳ برخورد f و f^{-1} و برخورد f^{-1} و g ۴۷
۱۴ ترکیب تابع f و f^{-1} و ترکیب تابع f^{-1} و g ۴۸

درس هفتم: تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری ۵۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۳۱۲

۲ مثلثات

درس اول: مقدمات و مفاهیم اولیه مثلثات
۱۵ درجه و رادیان ۵۴
۱۶ نسبت‌های مثلثاتی مهم ۵۵
۱۷ دایرهٔ مثلثاتی ۵۹
۱۸ شیب خط و تانژانت ۶۱

درس دوم: اتحادها و روابط مثلثاتی
۱۹ روابط مثلثاتی مقدماتی ۶۲
۲۰ زاویه‌های متمم و مکمل ۶۴
۲۱ زاویه‌های ترکیبی $(\ldots,\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\pi\pm\alpha)$ ۶۴
۲۲ روابط 2α ۶۷
۲۳ رابطهٔ طلایی ۷۱
۲۴ کاربردها و نتایج روابط 2α ۷۲
۲۵ نسبت‌های مثلثاتی $\alpha\pm\beta$ ۷۴

درس سوم: توابع متناوب و نمودار ... ۸۰

درس چهارم: معادلات مثلثاتی
۲۶ حل معادلات مثلثاتی با کمک روابط 2α ۹۰
۲۷ حل معادلات مثلثاتی شامل کمان‌های $\alpha\pm\beta$ ۹۱
۲۸ دسته‌بندی و فاکتورگیری ۹۲
۲۹ معادلات مثلثاتی کسری ۹۲
۳۰ مسائل ترکیبی و خواسته‌های خاص ۹۴

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۳۷۰

۳ حد، پیوستگی و مجانب

درس اول: مفاهیم اولیه و محاسبهٔ حد توابع
۳۱ همسایگی ۹۶
۳۲ فرآیندهای حدی ۹۷
۳۳ قضایای حد ۱۰۰
۳۴ ابهام $\frac{0}{0}$ ۱۰۳
۳۵ حد مثلثاتی ۱۱۰

درس دوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت
۳۶ حد بی‌نهایت ۱۱۴
۳۷ حد در بی‌نهایت ۱۱۸

درس سوم: مجانب‌های قائم و افقی تابع
۳۸ مجانب قائم ۱۲۴
۳۹ یافتن مجانب افقی ۱۲۷
۴۰ سؤالات ترکیبی مجانب قائم و افقی ۱۲۸

درس چهارم: پیوستگی
۴۱ مفهوم پیوستگی ۱۳۱
۴۲ نقطهٔ مرزی خاص ۱۳۶
۴۳ پیوستگی در بازه ۱۳۷

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۴۳۳

۴ مشتق

درس اول: مفهوم هندسی مشتق و ... ۱۴۰
درس دوم: تابع مشتق و قوانین محاسبهٔ مشتق
۴۴ قواعد مشتق‌گیری ۱۴۲
۴۵ تکنیک‌های مشتق‌گیری ۱۴۵
۴۶ مشتق تابع مرکب ۱۴۶
۴۷ مشتق مرتبهٔ دوم ۱۵۰
۴۸ تعریف مشتق با ظاهری متفاوت! ۱۵۱
۴۹ مشتق توابع مثلثاتی ۱۵۲
۵۰ معادلهٔ خط مماس ۱۵۷
درس سوم: مشتق چپ و راست و مشتق‌پذیری
۵۱ مشتق توابع چند ضابطه‌ای ۱۶۱
۵۲ مشتق توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح ۱۶۳
۵۳ نقاط مشتق ناپذیر، دامنهٔ تابع مشتق و مشتق‌پذیری ... ۱۶۴
۵۴ نمودار تابع مشتق ۱۶۷
درس چهارم: آهنگ تغییر ۱۷۰
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۴۹۲

۵ کاربرد مشتق

درس اول: نقاط بحرانی و اکسترمم‌های تابع
۵۵ ارتباط یکنوایی تابع با مشتق آن ۱۷۴
۵۶ نقاط بحرانی ۱۷۶
۵۷ اکسترمم‌های نسبی تابع ۱۷۸
۵۸ اکسترمم‌های مطلق ۱۸۲
درس دوم: بهینه‌سازی ۱۸۶
درس سوم: جهت تقعر، نقطهٔ عطف و رسم نمودار تابع
۵۹ جهت تقعر تابع ۱۹۱
۶۰ نقطهٔ عطف ۱۹۳
۶۱ نمودارشناسی ۱۹۶
۶۲ ارتباط نمودارهای f و f′ و f″ ۲۰۳
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۵۴۴

۶ معادله و تابع درجه دوم

درس اول: معادلهٔ درجه دوم
۶۳ مجموع ریشه‌ها، حاصل ضرب ریشه‌ها و ... ۲۰۷
۶۴ علامت ریشه‌ها ۲۱۱
۶۵ نوشتن معادلهٔ درجه دوم ۲۱۲
۶۶ معادلات قابل تبدیل به درجهٔ دوم ۲۱۳
درس دوم: سهمی و ویژگی‌های آن
۶۷ ویژگی‌های سهمی ۲۱۴
۶۸ بررسی سهمی ۲۱۶
۶۹ نوشتن معادلهٔ سهمی ۲۱۷
۷۰ وضعیت سهمی و خط یا وضعیت دو سهمی نسبت به هم ۲۲۰
۷۱ گذر از نواحی ۲۲۱
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۵۹۸

۷ قدرمطلق و براکت

درس اول: قدرمطلق
۷۲ تعریف و ویژگی‌های قدرمطلق ۲۲۴
۷۳ معادلات قدرمطلقی ۲۲۴
۷۴ نامعادلات قدرمطلقی ۲۲۶
۷۵ نمودارهای قدرمطلقی ۲۲۷
درس دوم: جزء صحیح
۷۶ تعریف و ویژگی‌ها ۲۳۰
۷۷ معادله و نامعادلهٔ شامل جزء صحیح ۲۳۱
۷۸ نمودار توابع شامل جزء صحیح ۲۳۲
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۶۲۴

۸ توان گویا و عبارت جبری

درس اول: توان گویا و عبارت جبری
۷۹ ریشه و توان ۲۳۴
۸۰ مقایسه مقادیر تقریبی ریشهٔ n ام ۲۳۵
۸۱ اعداد با توان گویا ۲۳۶
۸۲ قوانین رادیکال‌ها ۲۳۶
درس دوم: عبارت‌های جبری
۸۳ اتحادها ۲۳۹
۸۴ ساده کردن عبارات رادیکالی ۲۴۲
۸۵ گویا کردن ۲۴۴
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۶۳۹

۹ معادله و نامعادله

درس اول: معادلات گویا و معادلات رادیکالی
۸۶ معادلات گویا ۲۴۸
۸۷ مسائل کاربردی معادلات گویا و مستطیل طلایی ۲۵۰
۸۸ معادلات گنگ ۲۵۱
درس دوم: نامعادلات و تعیین علامت
۸۹ تعیین علامت ۲۵۴
۹۰ حل نامعادله ۲۵۵
۹۱ وضعیت دو منحنی ۲۵۷
✓ پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۶۵۶

۱۰ تابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
۹۲ تابع نمایی ۲۶۰
۹۳ معادلات و نامعادلات تابع نمایی ۲۶۰
۹۴ نمودارهای توابع نمایی ۲۶۲
درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن
۹۵ مفهوم لگاریتم ۲۶۶
۹۶ قوانین لگاریتم ۲۶۷
۹۷ دامنهٔ توابع لگاریتمی ۲۷۱
۹۸ نمودار تابع لگاریتمی ۲۷۲
۹۹ معادلات لگاریتمی ۲۷۴
۱۰۰ نامعادلهٔ لگاریتمی ۲۷۶
۱۰۱ حل معادلات نمایی به کمک لگاریتم ۲۷۶
۱۰۲ ضابطهٔ وارون تابع نمایی و لگاریتمی ۲۷۷
۱۰۳ کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی ۲۷۷
۱۰۴ ترکیبی‌های لگاریتم ۲۷۸
✓ پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۶۷۲

۱۱ مجموعه، الگو و دنباله

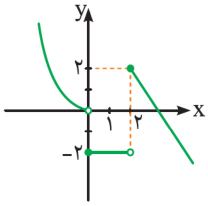
درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۱۰۵ مجموعه‌های اعداد ۲۸۰
۱۰۶ بازه‌ها ۲۸۰
۱۰۷ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۲۸۲
۱۰۸ متمم یک مجموعه و مجموعهٔ مرجع ۲۸۲
۱۰۹ قوانین مجموعه‌ها ۲۸۳
۱۱۰ محاسبهٔ تعداد اعضای مجموعه‌ها ۲۸۵
درس دوم: الگو و دنباله
۱۱۱ دنباله خطی و درجه ۲ ۲۸۷
۱۱۲ چند دنبالهٔ خاص (دنباله بازگشتی، فیبوناچی و ...) ۲۸۹
درس سوم: دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۱۳ دنبالهٔ حسابی ۲۹۱
۱۱۴ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۲۹۴
۱۱۵ دنباله هندسی ۲۹۶
۱۱۶ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی ۲۹۹
✓ پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۶۹۸

۱۲ هندسه تحلیلی

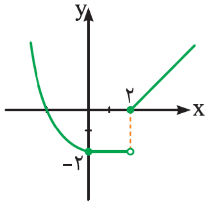
هندسه مختصاتی (تحلیلی)
۱۱۷ معادلهٔ خط ۳۰۲
۱۱۸ فاصلهٔ دو نقطه ۳۰۴
۱۱۹ فاصلهٔ نقطه از خط ۳۰۸
۱۲۰ فاصلهٔ دو خط موازی ۳۱۰
✓ پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۷۲۸

۲۳۷ اگر $f(x)=\begin{cases}-۲ & ; \quad x<۰\\ x-۳ & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x^۲ & ; \quad x<۰\\ ۱-x & ; \quad ۰\leq x<۲\\ ۱ & ; \quad x\geq ۲\end{cases}$ باشد، نمودار تابع $(f+g)(x)$ کدام است؟

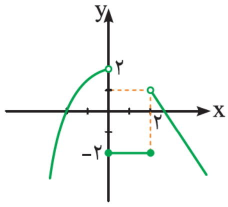
○ ۱)



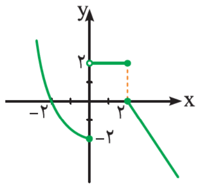
○ ۲)



○ ۳)



○ ۴)



مقداردهی به ترکیب توابع

۲۳۸ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ ، $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $g(f(a))=۵$ باشد، عدد a کدام است؟ (داخل ۹۱)

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۲۳۹ اگر $f=\{(۰,۳),(۲,-۲),(۴,۱)\}$ و $g=\{(-۱,۴),(۲,۳),(۴,۲)\}$ باشند، تابع $f\times g+fog$ کدام است؟

○ ۱) $\{(-۱,۳)\}$ ○ ۲) $\{(۲,۴),(-۱,۵)\}$

○ ۳) $\{(۴,۰)\}$ ○ ۴) $\{(-۱,۳),(۴,۰)\}$

۲۴۰ توابع $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ ، آن‌گاه دوتایی (a,b) کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۰)

○ ۱) $(۳,۴)$ ○ ۲) $(۴,۵)$ ○ ۳) $(۴,۳)$ ○ ۴) $(۵,۴)$

۲۴۱ اگر $f(x)=|x-۱|+|۲x+۱|$ و $g(x)=[-x+۱]$ باشند، $g(f(\sqrt{۳}-۱))$ کدام است؟

○ ۱) -۲ ○ ۲) -۳ ○ ۳) ۱ ○ ۴) ۲

۲۴۲ اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲+۲x+۱$ ، آن‌گاه $(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟

○ ۱) $۴(۱-\sqrt{۲})$ ○ ۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ○ ۳) ۴ ○ ۴) $۲\sqrt{۲}$

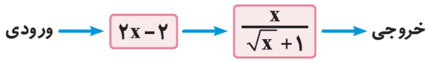
۲۴۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin \pi x-۱}$ ، مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ کدام است؟

○ ۱) -۱ ○ ۲) ۱ ○ ۳) صفر ○ ۴) تعریف‌نشده

۲۴۴ اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۲)

○ ۱) ۴ ○ ۲) -۴ ○ ۳) -۶ ○ ۴) ۶

۲۴۵ اگر خروجی ماشین مقابل برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی آن کدام است؟



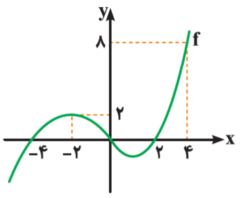
○ ۱) $\frac{۱۱}{۹}$ ○ ۲) $\frac{۷}{۲}$

○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۲۴۶ اگر $f(x)=\begin{cases}x-۱ & ۰\leq x\leq ۲\\ x+۱ & -۲\leq x\leq ۰\end{cases}$ باشد، معادلهٔ $fof(x)=۰$ چند ریشه دارد؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۴)

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۲۴۷ نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. اگر $g(x)=۶-f(x-۳)$ باشد، مقدار $(fog)(۱)$ کدام است؟



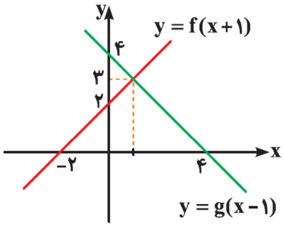
○ ۱) ۴

○ ۲) ۶

○ ۳) ۲

○ ۴) ۸

۲۴۸ نمودار دو تابع $y = f(x+۱)$ و $y = g(x-۱)$ به‌صورت مقابل است. مقدار $(gof)(۳)+(fog)(-۳)$ کدام است؟



○ ۱) ۵
○ ۲) ۶
○ ۳) ۷
○ ۴) ۸

۲۴۹ تابع‌های $f=\{(a,-۲),(-۱,b),(۱,۰),(۳,-۴)\}$ و $g(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ مفروض‌اند. اگر بُرد تابع gof به‌صورت $\{-۱,c,۱,۵\}$ باشد، مقدار bc کدام است؟

○ ۱) ۴
○ ۲) ۱۲
○ ۳) ۶
○ ۴) ۱۰

۲۵۰ اگر $(fog)(x)=x^۲+۳x+۱$ و $(gof)(x)=x^۲-x+۱$ و $f(۲)=۱$ باشد، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

○ ۱) ۵
○ ۲) ۶
○ ۳) ۷
○ ۴) ۸

۲۵۱ اگر $f(x+۱)=۲x+۱$ و $f(g(x)+x)=۶x+۱$ باشد، مقدار $(fog)(۳)$ کدام است؟

○ ۱) ۹
○ ۲) ۱۱
○ ۳) ۱۳
○ ۴) ۱۵

۲۵۲ اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲+۱\,;\,x<۲\\ ۳x-۴\,;\,x\geq ۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}f(x+۱);x<۱\\ f(x-۱);x\geq ۱\end{cases}$ باشد، مقدار $(fog)(۱)$ کدام است؟

○ ۱) ۱
○ ۲) ۲
○ ۳) ۳
○ ۴) ۴

ضابطهٔ ترکیب توابع

سرنخ در این بخش، می‌خوایم با کمک تابع‌های f و g ، ضابطهٔ تابع fog یا gof رو پیدا کنیم.

۲۵۳ اگر $f(x)=۲-|x-۲|$ ، ضابطهٔ تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

○ ۱) x
○ ۲) $۴-x$
○ ۳) $f(x)$
○ ۴) $۲-f(x)$

۲۵۴ اگر $f(x)=x^۲+۲x$ و $g(x)=x-۳$ و α و β ریشه‌های معادلهٔ $(gof)(x)=۲$ باشند، مقدار $\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

○ ۱) ۸
○ ۲) ۱۴
○ ۳) ۱۰
○ ۴) ۲

۲۵۵ اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x+۲}{۲-x}$ باشند، آن‌گاه ضابطهٔ تابع gof کدام است؟ (داخل ۹۶)

○ ۱) $x-۱$
○ ۲) $x+۱$
○ ۳) x
○ ۴) $۲x$

۲۵۶ اگر $f(x)=۲(x^۲-x-۳)$ و $g(x)=۳x+۱$ باشند، نمودار دو تابع fog و $f(x+۳)$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

○ ۱) ۱
○ ۲) ۲
○ ۳) ۳
○ ۴) غیرمتقاطع

۲۵۷ در تابع خطی f اگر $(fof)(x)=f(x-۳)+f(x+۱)$ باشد، مقدار $f(۵)$ کدام است؟

○ ۱) ۵
○ ۲) ۶
○ ۳) ۷
○ ۴) ۸

۲۵۸ اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$ باشند، جواب معادلهٔ $(gof)(x)=(fog)(x)$ کدام است؟ (خارج ۹۷)

○ ۱) $-۱,-۷$
○ ۲) $۱,-۷$
○ ۳) $-۱,۷$
○ ۴) $۱,۷$

۲۵۹ اگر $f(x)=x^۲+x-۲$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}(x-۳)$ مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی fog که در زیر محور xها قرار می‌گیرند، برابر کدام بازه است؟

○ ۱) $(-۴,۱)$
○ ۲) $(-۱,۵)$
○ ۳) $(-۲,۱)$
○ ۴) $(۱,۵)$ (خارج ۹۱)

۲۶۰ اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^۲+۲x+۴$ باشند، مجموعه جواب معادلهٔ $(gof)(x)=۳$ کدام است؟

○ ۱) $\mathbb{R}$
○ ۲) $\mathbb{Z}$
○ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$
○ ۴) $\varnothing$

۲۶۱ اگر $f(x)=x^۲-۷x+۱۰$ و $g(x)=[x]$ باشد، نمودارتابع fog در بازهٔ $[a,b)$ زیرمحور xها است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

○ ۱) ۵
○ ۲) ۴
○ ۳) ۳
○ ۴) ۲

۲۶۲ اگر $f(x)=|x-۳|$ و $g(x)=|۲x-۷|$ باشند، مجموع جواب‌های معادلهٔ $(gof)(x)=۱$ کدام است؟

○ ۱) ۶
○ ۲) ۱۳
○ ۳) ۱۹
○ ۴) ۱۲

۲۶۳ اگر $f(x)=x^{۲}+x$ و $g(x)=\sqrt{۴x+۱}$ باشند، مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع gof و خط به معادلهٔ $y=۳$ کدام است؟ (داخل ۹۵)

○ ۱) ۳ ○ ۲) ۴ ○ ۳) ۴/۵ ○ ۴) ۶

۲۶۴ تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۴)

○ ۱) $\frac{۱}{۹},۴$ ○ ۲) $\frac{۱}{۴},۹$ ○ ۳) $۴,\frac{۱}{۴}$ ○ ۴) $۴,۹$

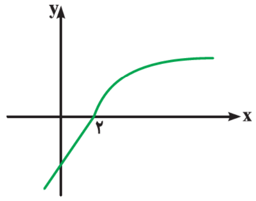
۲۶۵ نمودار تابع g محور xها را در نقاطی به طول ۱ و $۲\sqrt{۲}$ قطع می‌کند. اگر $f(x)=x\sqrt{x}$ باشد، اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع gof محور xها را قطع می‌کند، کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

○ ۱) ۱ ○ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ○ ۳) $\sqrt{۲}$ ○ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۶۶ توابع $f(x)=\begin{cases}۳x-۱۲\,;\,x\geq ۳\\ x^{۲}-۱\,;\,x<۳\end{cases}$ و $g(x)=۲x+۱$ را در نظر بگیرید. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $fog(x)=۰$ کدام است؟

○ ۱) $\frac{۱}{۳}$ ○ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ○ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ○ ۴) ۲

۲۶۷ اگر $f(x)=|\frac{۱}{۲}x-۱|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادلهٔ $g(f(g(x+۲)))=۰$ چند ریشه دارد؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

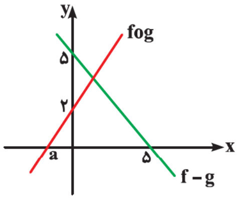


○ ۱) ۱
○ ۲) ۲
○ ۳) ۳
○ ۴) ۴

۲۶۸ اگر $f(x)=\begin{cases}۱\,;\,x\geq ۰\\ ۰\,;\,x<۰\end{cases}$ و $g(x)=x^{۲}-x$ باشد، نمودار دو تابع $y=fog$ و $y=x-f(x)$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (شبیه‌ساز تجربی ۱۴۰۰)

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) صفر

۲۶۹ نمودار دو تابع $f-g$ و fog به‌صورت مقابل است. اگر $۲g(x)=۳f(x)-۱۴$ باشد، مقدار a کدام است؟



○ ۱) $\frac{۱}{۳}$ ○ ۲) $\frac{۲}{۳}$
○ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ○ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

سرنخ بعضی وقتا هم تابع‌های fog و g رو داریم و می‌خوایم ضابطهٔ f رو پیدا کنیم. انواع این سؤالات براتون آوردیم.

۲۷۰ اگر $g(x)=۲x-۱$ و $(fog)(x)=\frac{x}{x-۳}$ باشد، مقدار $f(۳)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۱)

○ ۱) -۴ ○ ۲) -۲ ○ ۳) ۲ ○ ۴) ۴

۲۷۱ اگر $g(x)=۲x+۱$ و $(fog)(x)=۸x^{۲}+۶x+۵$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج ۹۵)

○ ۱) $۲x^{۲}+۳x+۱$ ○ ۲) $۲x^{۲}-۲x+۳$ ○ ۳) $۲x^{۲}-x+۴$ ○ ۴) $۲x^{۲}+x+۳$

۲۷۲ اگر $f(۲x-۳)=۴x^{۲}-۱۴x+۱۳$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$، برابر کدام است؟ (داخل ۹۷)

○ ۱) $x^{۲}-x+۳$ ○ ۲) $x^{۲}-۲x-۱$ ○ ۳) $x^{۲}-۲x+۱$ ○ ۴) $x^{۲}-x+۱$

۲۷۳ اگر $f(x-۳)=x^{۲}-۴x+۵$ باشد، آن‌گاه $f(۱-x)$ کدام است؟

○ ۱) $x^{۲}+۱$ ○ ۲) $x^{۲}+۳$ ○ ۳) $x^{۲}+۴x+۵$ ○ ۴) $x^{۲}-۴x+۵$

۲۷۴ اگر $g(x)=۲x-۳$ و $(fog)(x)=(۲x+۱)g(x)+۶x$ باشد، معادلهٔ محور تقارن تابع $y=f(x)$ کدام است؟

○ ۱) $x=-۲$ ○ ۲) $x=-۷$ ○ ۳) $x=۵$ ○ ۴) $x=-۳/۵$

۲۷۵ اگر $f(x)=۲x+۳$ و $g(f(x))=۸x^{۲}+۲۲x+۲۰$ باشند، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

○ ۱) $۲x^{۲}-۷x+۳$ ○ ۲) $۲x^{۲}-۳x+۷$ ○ ۳) $۴x^{۲}-۲x+۱۳$ ○ ۴) $۴x^{۲}-۴x+۱۱$

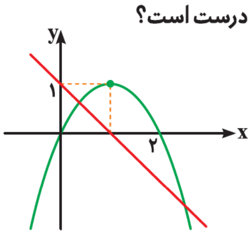
۲۷۶ اگر $(gof)(x)=۳f(x)+۴$ و $(fog)(x)=۲g^{۲}(x)+g(x)+۱$ باشد، کم‌ترین مقدار تابع $(f-g)(x)$ کدام است؟

○ ۱) -۳ ○ ۲) ۳/۵ ○ ۳) ۳ ○ ۴) $-۳/۵$

۲۷۷ اگر $f(x)=۲x^۲+x$ و $(gof)(x)=۶-۳x-۶x^۲$ باشد، نمودار تابع $y=g(x)$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

○ ۱) اول ○ ۲) دوم ○ ۳) سوم ○ ۴) چهارم

۲۷۸ نمودار تابع درجهٔ دوم fog و تابع خطی g به‌صورت مقابل است. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد تابع $y=f(x)$ درست است؟



الف) محور xها را در دو نقطه با طول مثبت قطع می‌کند.

ب) فقط از ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد.

پ) بیش‌ترین مقدار آن برابر ۱ است.

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲

○ ۳) ۳ ○ ۴) صفر

۲۷۹ اگر $f(x^۲-x)=x^۴-۲x^۳+x^۲+۵$ باشد، ضابطهٔ تابع $y=f(x)$ کدام است؟ (شبیه‌ساز تجربی ۹۷ و ۱۴۰۱)

○ ۱) $۲x^۲+۵$ ○ ۲) $x^۲+۵$

○ ۳) $x^۲+۵x$ ○ ۴) $-x^۲+۵$

۲۸۰ اگر $f(\frac{x^۲-۲}{x})=x^۲+x-۴-\frac{۲}{x}+\frac{۴}{x^۲}$ باشد، ضابطهٔ $y=f(x)$ کدام است؟

○ ۱) $x^۲-\frac{۲}{x}$ ○ ۲) $x^۲+\frac{۲}{x}$ ○ ۳) $x^۲-x$ ○ ۴) $x^۲+x$

سرنخ توی سؤالای زیر تابع‌های fog و f رو داریم و می‌خوایم ضابطهٔ g رو پیدا کنیم.

۲۸۱ دو تابع $f(x)=\frac{x+a}{x-۱}$ و $(fog)(x)=\frac{۵x-۲}{۳x+۱}$ را در نظر بگیرید. اگر $g(۱)=-۱۱$ باشد، مقدار a کدام است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۲۸۲ با توجه به ماشین شکل مقابل، اگر $g(x)=۳x+۴$ باشد، مقدار $f(۵)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow ۲x$$

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲

○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۲۸۳ اگر $f(x)=۴x^۲+۱۶x+۱۸$ و $(fog)(x)=x^۲+۲x+۳$ باشد، ضابطهٔ تابع خطی g با شیب منفی کدام است؟

○ ۱) $-\frac{۱}{۲}x+۱$ ○ ۲) $-x+\frac{۵}{۲}$ ○ ۳) $-\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۲}$ ○ ۴) $-\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$

۲۸۴ اگر $f(x)=\frac{۲x+۱}{x+۱}$ و $(fog)(x)=\frac{۲x}{x+۱}$ باشد، تابع $g(x)$ کدام است؟

○ ۱) $\frac{x+۱}{۲}$ ○ ۲) $\frac{x-۱}{۲}$ ○ ۳) $\frac{۲x+۱}{۲}$ ○ ۴) $\frac{۲x-۱}{۲}$

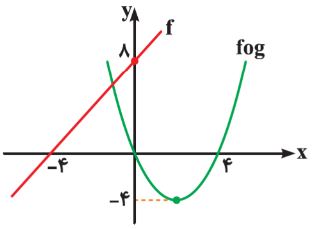
۲۸۵ اگر $f(x)=x^۲-x-۲$ و $f(g(x))=x^۲+x-۲$، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (تجربی خارج ۹۰)

○ ۱) $x^۲-۱$ ○ ۲) $x^۲+۱$ ○ ۳) $x^۲-۲x$ ○ ۴) $x^۲+۲x$

۲۸۶ اگر f تابعی اکیداً نزولی و $fof(x)=۴x-۳$ و $fog(x)=x^۲-x+۳$ باشند، بیشترین مقدار تابع $y=g(x)$ کدام است؟

○ ۱) $\frac{۱}{۴}$ ○ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ○ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ○ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۸۷ نمودار تابع خطی f و تابع درجهٔ دوم fog به‌صورت مقابل است. معادلهٔ محور تقارن تابع g کدام است؟



○ ۱) $x=-۱$

○ ۲) $x=۱$

○ ۳) $x=-۲$

○ ۴) $x=۲$

دامنه و بُرد، ترکیب توابع

مسترنخ توی سؤالای دامنهٔ تابع مرکب، حواستون به استفاده از گزینه‌ها باشه. ولی اگر سوال جوری طرح بشه که مجبور بشید دامنه رو پیدا کنید، لازمه اول دامنهٔ تابع f و g رو جداگانه حساب کنید.

۲۸۸ اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳x-۴}{x+۲}$ و دامنهٔ تابع fog برابر $\mathbb{R}-\{a,b\}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ○ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ○ ۴) ۲

۲۸۹ اگر $f(x)=\sqrt{۵-x}$ و $g(x)=x^۲+۴x$ باشند و دامنهٔ تابع fog به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ باشد، مقدار $a\times b$ کدام است؟

○ ۱) -۳ ○ ۲) -۵ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۵

۲۹۰ اگر $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ (داخل ۹۶)

○ ۱) $[۰,۱)$ ○ ۲) $\{۰\}$ ○ ۳) $(-۱,۱)$ ○ ۴) $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$

۲۹۱ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

○ ۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$ ○ ۲) $\mathbb{R}-\{۰,۸\}$ ○ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ○ ۴) $(۰,+\infty)$

۲۹۲ اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲+۲x)$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟

○ ۱) $[-۲,۴]$ ○ ۲) $[-۲,۰]$ ○ ۳) $[-۴,-۱]\cup(۱,۲]$ ○ ۴) $[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

۲۹۳ اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۴})^x$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۴)

○ ۱) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ○ ۲) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ ○ ۳) $(-۲,۰)$ ○ ۴) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

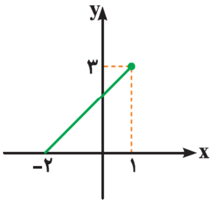
۲۹۴ اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ و $g(x)=\tan x;|x|<\frac{\pi}{۲}$ باشد، دامنهٔ تابع fog کدام است؟

○ ۱) $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴}]$ ○ ۲) $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$ ○ ۳) $[-\frac{\pi}{۴},۰)\cup(۰,\frac{\pi}{۴}]$ ○ ۴) $[-۱,۱]$

۲۹۵ اگر $f(۲x+۱)=۳x-۲\,;-۱\le x\le ۳$ و $g(x)=۴x-۳$ باشد، آنگاه دامنهٔ تابع fog کدام است؟

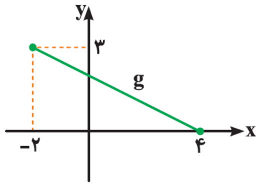
○ ۱) $[-۱,۳]$ ○ ۲) $[\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۲}]$ ○ ۳) $[\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}]$ ○ ۴) $[\frac{۵}{۳},\frac{۱۳}{۳}]$

۲۹۶ نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $y=(fof)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



○ ۱) ۱
○ ۲) ۲
○ ۳) ۴
○ ۴) بی‌شمار

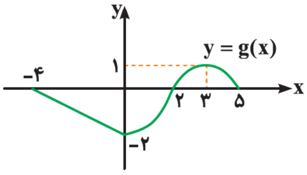
۲۹۷ اگر $f(x)=\frac{x+۱}{\sqrt{-x^۲+۶x-۸}}$ و نمودار تابع g به صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع fog شامل چند عدد صحیح است؟



○ ۱) ۲
○ ۲) ۳
○ ۳) ۶
○ ۴) ۷

مسترنخ سؤالات زیر مربوط به بُرد تابع fog هستن. برای حل این سؤالا، حتماً به نمودار تابع f (تابع بیرونی) توجه کنید.

۲۹۸ تابع f با دامنهٔ $[۰,۳]$ و بُرد $[-۲,۲]$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار تابع g به صورت زیر باشد، بُرد تابع gof شامل چند عدد صحیح است؟



○ ۱) ۱
○ ۲) ۲
○ ۳) ۳
○ ۴) ۴

۲۹۹ اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$ باشند، بُرد تابع gof کدام است؟ (داخل ۹۹)

○ ۱) $[۰,۲)$ ○ ۲) $[۰,۳)$ ○ ۳) $[۰,۴)$ ○ ۴) $[۱,۴)$

۳۰۰ اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\frac{۱-۲x}{x+۱}$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟ (خارج ۹۹)

○ ۱) $[-۱,۱)$ ○ ۲) $(-۱,۱]$ ○ ۳) $[۱,+\infty)$ ○ ۴) $(-\infty,۱]$

۳۰۱ دو تابع $f(x)=\log_۲^x$ و $g(x)=۸x-x^۲$ را در نظر بگیرید. اگر مجموعهٔ A و B به ترتیب دامنه و بُرد تابع fog باشند، مجموعهٔ $A\cap B$ دارای چند عضو صحیح است؟

○ ۱) ۲ ○ ۲) ۳ ○ ۳) ۴ ○ ۴) ۵

۳۰۲ بُرد تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(۱-\cos^۲x)$ کدام است؟

○ ۱) $[۰,+\infty)$ ○ ۲) $(۰,+\infty)$ ○ ۳) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ○ ۴) $[۰,۱]$

۳۰۳ اگر $f(x)=|۲x-۳|+۱$ و $g(x)=۱+۲\sin^۲x$ باشند، بُرد تابع fog کدام است؟

○ ۱) $[۲,۴]$ ○ ۲) $[۱,۳]$ ○ ۳) $[۱,۴]$ ○ ۴) $[۰,۳]$

۳۰۴ اگر $f(x)=\log_۲^x+\log_x^۲$ و $g(x)=۳^{x+۱}$ باشد، بُرد تابع gof کدام است؟

○ ۱) $(۰,+\infty)$ ○ ۲) $(۰,۳]\cup[۲۷,+\infty)$ ○ ۳) $(۰,\frac{۱}{۲۷}]\cup[\frac{۱}{۳},+\infty)$ ○ ۴) $(۰,\frac{۱}{۳}]\cup[۲۷,+\infty)$

وضعیت صعودی و نزولی توابع مرکب

۳۰۵ اگر $f=\{(۱,۳),(۲,-۱),(۳,۰),(۰,۱)\}$ و $g=\{(-۱,۴),(۰,۱),(۳,۲)\}$ باشند، چه تعداد از توابع زیر غیریکنوا هستند؟

الف) fog ب) fof پ) gof

○ ۱) صفر ○ ۲) ۱ ○ ۳) ۲ ○ ۴) ۳

۳۰۶ اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $(-۶,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\frac{x}{\sqrt{f(x+۲)-f(۳-۲x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

○ ۱) ۲ ○ ۲) ۳ ○ ۳) ۵ ○ ۴) ۷

۳۰۷ اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\frac{۲x+۵}{\sqrt{f(۴-|x|)-f(|x-۲|)}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۳۰۸ تابع f اکیداً نزولی و دامنهٔ آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۲)

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) صفر

۳۰۹ اگر $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی با دامنهٔ $[-۴,۵]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\log(f(x+۱)-f(۲-x))$ کدام است؟

○ ۱) $(۰/۵,۶]$ ○ ۲) $[-۴,۰/۵)$ ○ ۳) $(۰/۵,۵]$ ○ ۴) $[-۳,۰/۵)$

۳۱۰ نمودار تابع اکیداً صعودی $y=f(x)$ از نقطهٔ $A(۶,۳)$ می‌گذرد. اگر $g(x)=x^۲-x$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $(fog)(x)\le ۳$ شامل چند عدد صحیح است؟ (شبیه‌ساز کنکور ۱۴۰۲)

○ ۱) ۵ ○ ۲) ۳ ○ ۳) ۷ ○ ۴) ۶

۳۱۱ تابع اکیداً نزولی $y=f(x)$ با دامنهٔ $[۰,۴]$ و بُرد $[۱,۴]$ را در نظر بگیرید. اگر $f(۲)=۳$ و $f^{-۱}(۲)=۳$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $۱\le(fof)(x)\le ۲$ شامل چند عدد صحیح است؟ (شبیه‌ساز کنکور ۱۴۰۲)

○ ۱) ۲ ○ ۲) ۳ ○ ۳) ۴ ○ ۴) ۵

TNT **۳۱۲** اگر $f(x)=x+\sqrt{x}-۲$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $fof(x)\le f(\sqrt{x})$ شامل چند عدد صحیح است؟ (شبیه‌ساز کنکور ۱۴۰۲)

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

فصل اول

۱

درس ششم:

تابع یک به یک و تابع وارون

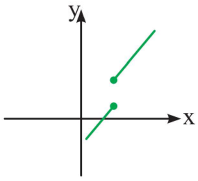
CHAPTER 1

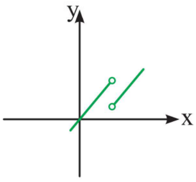
سرنخ مقدمهٔ بخش وارون تابع، شناسایی یک‌به‌یکی توابع است.

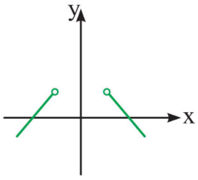
۳۱۳ اگر رابطهٔ $f=\{(۱,۴)\,,\,(۴,۵)\,,\,(۱,a^{۲}+۳a)\,,\,(b,|۲a+۳|)\}$ نمایش‌دهنده یک تابع یک‌به‌یک باشد، مقدار $b+a$ کدام می‌تواند باشد؟

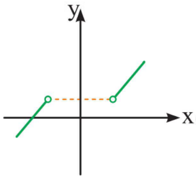
○ ۱) ۶ ○ ۲) ۹ ○ ۳) ۵ ○ ۴) ۴

۳۱۴ کدام یک از نمودارهای زیر، نمایش تابعی یک‌به‌یک است؟

○ ۱)


○ ۲)


○ ۳)


○ ۴)


۳۱۵ کدام جمله صحیح است؟

○ ۱) جمع دو تابع یک‌به‌یک، قطعاً تابعی یک‌به‌یک است.

○ ۲) تابع با دامنهٔ ۳ عضوی و برد ۲ عضوی، قطعاً غیر یک‌به‌یک است.

○ ۳) اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد، f^{K} ، $(K\in\mathbb{N})$ نیز تابعی یک‌به‌یک است.

○ ۴) اگر $|f|$ تابعی یک‌به‌یک باشد، f می‌تواند یک‌به‌یک نباشد.

۳۱۶ کدام تابع زیر یک‌به‌یک است؟

○ ۱) $y=|۲x|+x$ ○ ۲) $y=|x|+۲x$ ○ ۳) $y=|۲x|-۲x$ ○ ۴) $y=۲|x|-x$

۳۱۷ کدام تابع زیر یک‌به‌یک است؟

○ ۱) $y=x-[x]$ ○ ۲) $y=x+[x]$ ○ ۳) $y=x[x]$ ○ ۴) $y=[x+[x]]$

۳۱۸ کدام تابع زیر یک‌به‌یک است؟

○ ۱) $y=x^{۲}+۲x$ ○ ۲) $y=x^{۳}+۲x$ ○ ۳) $y=|\sqrt{x}-۲|$ ○ ۴) $y=\sqrt{|x|-۲}$

۳۱۹ کدام تابع غیر یک‌به‌یک است؟

○ ۱) $y=x^{۳}-۴x+۱$ ○ ۲) $y=\sqrt[۳]{x-۵}$ ○ ۳) $x+y+۱=۰$ ○ ۴) $y=(\frac{۲}{۳})^{x}$

۳۲۰ تابع با ضابطهٔ $y=|x^{۳}|$ چگونه است؟ (داخل ۹۵)

○ ۱) نزولی ○ ۲) صعودی ○ ۳) غیر یک‌به‌یک ○ ۴) یک‌به‌یک

۳۲۱ کدام تابع زیر یک به یک نیست؟

○ ۱) $y=\sqrt[۳]{x}+x$ ○ ۲) $y=x+(\frac{۱}{۲})^{x}$ ○ ۳) $y=\log x+x^{۳}$ ○ ۴) $y=\sqrt{x}+x^{۴}$

۳۲۲ اگر $f(x)=m^{۲}x^{۲}+۲x-x^{۲}+m$ تابعی همواره یک‌به‌یک باشد، حداکثر مقدار $f(۳/۵)$ کدام است؟

○ ۱) ۶ ○ ۲) ۷ ○ ۳) ۸ ○ ۴) ۹

۳۲۳ تابع $f(x) = ax^{۲} - (a+۲)x + ۳ - a$ در بازه $(-۲,-۱)$ یک به‌یک است. حدود a کدام است؟

○ ۱) $R - (-\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۵})$　○ ۲) $(-\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۵})$　○ ۳) $[-\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۵}]$　○ ۴) $R - [-\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۵}]$

۳۲۴ به ازای کدام مقدار b ، تابع $y = \frac{۲x+b}{x+۳+b}$ غیر یک‌به‌یک است؟

○ ۱) -۳　○ ۲) -۶　○ ۳) -۴　○ ۴) -۱

۳۲۵ اگر تابع $f(x) = ۲x + m^{۲}x - ۳mx + ۱$ همواره غیر یک‌به‌یک باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

○ ۱) -۱　○ ۲) $+۲$　○ ۳) $+۳$　○ ۴) -۴

۳۲۶ اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x+۱ & ; \quad x \geq ۱ \\ x+a & ; \quad x < ۱ \end{cases}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، a چند مقدار طبیعی می‌تواند داشته باشد؟

○ ۱) ۱　○ ۲) ۲　○ ۳) ۳　○ ۴) صفر

۳۲۷ اگر $g(x) = \begin{cases} x^{۳} - ۵ & ; \quad x > ۲ \\ \sqrt{x-a} & ; \quad a \leq x \leq ۲ \end{cases}$ تابعی یک‌به‌یک باشد ، حداقل مقدار a کدام است؟

○ ۱) -۵　○ ۲) -۴　○ ۳) -۷　○ ۴) -۶

۳۲۸ به ازای کدام مقادیر k تابع $f(x) = \begin{cases} ۴x+۱ & x > k \\ x-۵ & x \leq k \end{cases}$ یک به یک نیست؟

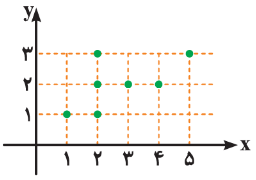
○ ۱) $[۱,۲]$　○ ۲) $(-\infty, -۲)$　○ ۳) $(۳,۴]$　○ ۴) $[۰,۱]$

۳۲۹ تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-b} & ; \quad b \leq x \leq ۰ \\ \sqrt{x} + a & ; \quad x > ۰ \end{cases}$ یک‌به‌یک است. کدام یک می‌تواند (a,b) باشد؟

○ ۱) $(۲,-۴)$　○ ۲) $(۴,۲)$　○ ۳) $(-۲,۴)$　○ ۴) $(-۲,-۴)$

سرنخ ممکنه تابعی یک‌به‌یک نباشه، اما با محدود کردن دامنه بشه ازش تابعی یک‌به‌یک ساخت.

۳۳۰ با حذف حداقل چند نقطه از نمودار مقابل یک تابع یک‌به‌یک خواهیم داشت؟



○ ۱) ۱
○ ۲) ۲
○ ۳) ۳
○ ۴) ۴

۳۳۱ دامنهٔ تابع $f(x) = ۲x^{۲} - ۱۶x + \sqrt{۷}$ را به کدام بازهٔ زیر محدود کنیم تا تابعی یک‌به‌یک داشته باشیم؟

○ ۱) $[-۶,۶]$　○ ۲) $(-\infty,۵]$　○ ۳) $(۳,۶]$　○ ۴) $[۵,+\infty)$

۳۳۲ تابع $f(x) = (۲x+۱)^{۲} + ۲(۳x-۱) - ۳$ در بازه $(-\infty, m]$ یک به یک است. بیشترین مقدار m کدام است؟

○ ۱) $-۱/۵$　○ ۲) $-۱/۲۵$　○ ۳) -۱　○ ۴) $-۱/۷۵$

۳۳۳ تابع $f(x) = \sin(\frac{x}{۲})$ در کدام دامنهٔ زیر یک‌به‌یک است؟

○ ۱) $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$　○ ۲) $(۰, ۲\pi)$　○ ۳) $(\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۳\pi}{۲})$　○ ۴) $(۰, \pi)$

۳۳۴ تابع $f(x) = \left| |x^{۲} - ۱| - ۱ \right|$ با کدام دامنهٔ زیر یک‌به‌یک است؟

○ ۱) $[-۱,۱]$　○ ۲) $[-\sqrt{۲}, -۱]$　○ ۳) $[۰, \sqrt{۲}]$　○ ۴) $[۱,+\infty)$

۳۳۵ بازهٔ $[a,b]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = |۲x-۴| + |۲x| + ۱$ در آن یک به یک نیست. این بازه شامل چند عدد صحیح است؟

○ ۱) ۱　○ ۲) ۲　○ ۳) ۳　○ ۴) صفر

۳۳۶ تابع $f(x) = |x-a| + a$ در بازهٔ $[۱,۵]$ یک به یک است. حدود a در کدام گزینه آمده است؟

○ ۱) $\mathbb{R} - (-۵,-۱)$　○ ۲) $\mathbb{R} - (-۵,۰)$　○ ۳) $\mathbb{R} - (۱,۵)$　○ ۴) $\mathbb{R} - \{۱,۵\}$

۳۳۷ اگر $g(x)$ تابعی یک‌به‌یک با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳x+۴}{g(x)-g(x^۲-۳)}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۳۳۸ اگر f تابع یک‌به‌یک روی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، معادله $f(۲^x)=f(x^۲)$ چند جواب مثبت دارد؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

تابع وارون

سرنخ توی بعضی سؤالا، از تعریف تابع وارون سؤال می‌پرسن، چند تا با هم ببینیم.

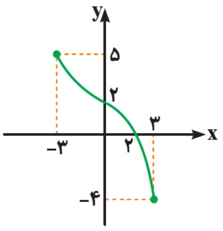
۳۳۹ وارون تابع $y=x^۳-x+۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (داخل ۱۴۰۱)

○ ۱) $(-۱,-۲)$ ○ ۲) $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$ ○ ۳) $(۱,۲)$ ○ ۴) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱۱}{۸})$

۳۴۰ اگر نقطهٔ $(-\frac{۱}{۸},-\frac{۳}{۵})$ روی تابع وارون تابع $y=\frac{x}{a+a|x|}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)

○ ۱) $\frac{۵}{۲۷}$ ○ ۲) ۵ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۳/۵

۳۴۱ نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۳,۳]$ به صورت مقابل است. اگر $\frac{f^{-۱}(۵)}{f(a)+f^{-۱}(۰)}=-\frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار a کدام است؟



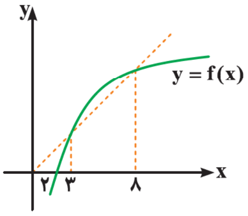
○ ۱) صفر

○ ۲) ۱

○ ۳) -۱

○ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۴۲ شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است؟ (داخل ۹۴)



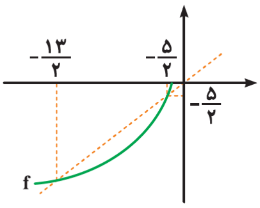
○ ۱) $(۰,۲]$

○ ۲) $[۲,۳]$

○ ۳) $[۲,۸]$

○ ۴) $[۳,۸]$

۳۴۳ شکل زیر، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f^{-۱}(x)}{x-f^{-۱}(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)



○ ۱) ۱

○ ۲) ۲

○ ۳) ۴

○ ۴) ۵

سرنخ این قسمت مبحث پر تکرار کنکورهای اخیره که باید مقدار تابع وارون رو در یک نقطه پیدا کنید. توی سه چهار سؤال اول نکته‌ها را یاد می‌گیرین، بعدش کلی تست قشنگ‌ارو می‌خونیم.

۳۴۴ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$ باشد. حاصل $g(۴)-g(۱۲)$ کدام است؟ (شبیه‌ساز تجربی ۹۹)

○ ۱) -۱۰ ○ ۲) ۶ ○ ۳) ۱۰ ○ ۴) -۶

۳۴۵ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}\ ,x\ge ۱$ باشد، $(gog)(۱)$ کدام است؟ (نوبت اول ۱۴۰۲)

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۴ ○ ۳) ۹ ○ ۴) صفر

۳۴۶ اگر $f(x-۱)=\log_{۳}^{(x+۱)}$ و $g(x)=۲\cos(\frac{\pi x}{۲})$ باشد، مقدار $(f^{-۱}og)(۴)$ کدام است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) −۱ ○ ۴) ۷

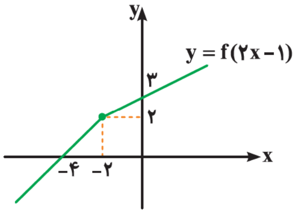
۳۴۷ اگر $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۱+|x|}$ و $g(x)=\sqrt{x}-۱$ باشد، حاصل $(f+g^{-۱})(-\frac{۲}{۵})$ کدام است؟

○ ۱) $-\frac{۲۳}{۲۵}$ ○ ۲) $-\frac{۱۱}{۲۵}$ ○ ۳) $-\frac{۲۳}{۷۵}$ ○ ۴) $-\frac{۱۱}{۷۵}$

۳۴۸ اگر $f(x)=\begin{cases}۶-۲x\ ;\ x<۲\\ ۴-x\ ;\ x\geq ۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۲x-۳\ ;\ x<۰\\ x-۴\ ;\ x\geq ۰\end{cases}$ باشد، مقدار $fog^{-۱}(-۵)+gof^{-۱}(-۲)$ کدام است؟

○ ۱) ۷ ○ ۲) ۸ ○ ۳) ۱۰ ○ ۴) ۱۲

۳۴۹ نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ به‌صورت مقابل است. مقدار $\frac{f^{-۱}(۲)+f^{-۱}(۳)}{f(-۵)}$ کدام است؟



○ ۱) −۷

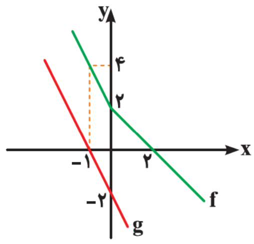
○ ۲) ۲

○ ۳) −۳

○ ۴) ۵

۳۵۰ با توجه به نمودارهای دو تابع f و g در شکل مقابل، حاصل $gof^{-۱}(-۲)+g^{-۱}of(-۱)$ چقدر است؟

(شبیه‌ساز خارج ۱۴۰۱)



○ ۱) −۱۶

○ ۲) −۱۴

○ ۳) −۱۳

○ ۴) −۱۰

۳۵۱ به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^{۳}+۶x^{۲}+ax+۱$ خط $۱۰y-x=-۱۰$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

○ ۱) ۱۵ ○ ۲) ۱۲ ○ ۳) ۹ ○ ۴) ۵ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۳)

۳۵۲ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$ در دامنهٔ محدود، خط $y=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+۴)$ کدام است؟

○ ۱) $\frac{۱}{۲}$ ○ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ○ ۳) ۲ ○ ۴) ۱ (ریاضی داخل ۱۴۰۲)

۳۵۳ وارون تابع $y=x^{۲}+\sqrt{b-ax}$ خط $y=x-۴$ را در نقطهٔ $(a,-۱)$ قطع می‌کند. مقدار $a-b$ کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

○ ۱) −۲ ○ ۲) −۴ ○ ۳) ۲ ○ ۴) ۴

۳۵۴ دو تابع با ضابطه‌های $g=\{(۲,۵),(۳,۴),(۱,۶),(۴,۷),(۸,۱)\}$ و $f(x)=۲x-۵$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-۱}og)(a)=۶$ باشد، a کدام است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴ (ریاضی داخل ۹۳)

۳۵۵ اگر $f=\{(\frac{۱}{۹},-۱),(\frac{۱}{۳},۱),(-\frac{۱}{۴},۳),(\frac{۱}{۴},-۳)\}$، $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ و $fog^{-۱}(a)=-۳$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

○ ۱) $-\frac{۱}{۹}$ ○ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ○ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ○ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۳۵۶ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵x+۹}\ ;\ x\geq ۳\\ ۳x-x^{۲}\ ;\ x<۳\end{cases}$ و $g=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-۱}og^{-۱})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟

○ ۱) ۲ ○ ۲) ۳ ○ ۳) ۶ ○ ۴) ۷

۳۵۷ دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ باشد، a کدام است؟

○ ۱) $\frac{۱}{۲}$ ○ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ○ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ○ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۳۵۸ اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^{۳}+x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$ کدام است؟ (خارج ۹۸)

○ ۱) ۱/۵ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۲/۵ ○ ۴) ۳

۳۵۹ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۹x+۶}{۱-x}$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۹)

○ ۱) $\frac{۲}{۵}$ ○ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ○ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ○ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۶۰ اگر $f(x)=\frac{۲x+۱}{۳}$ و $g(x)=\frac{۲x+a}{a-x}$ باشند و $(fog^{-۱})(-۱)=-\frac{۱۱}{۳}$ باشد، مقدار a کدام است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۳۶۱ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند. تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۸)

○ ۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$ ○ ۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$

○ ۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$ ○ ۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

۳۶۲ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، بُرد تابع $(g^{-۱}of)-f$ کدام است؟

○ ۱) $\{-۱,۴\}$ ○ ۲) $\{۲,۳\}$ ○ ۳) $\{۳,۴\}$ ○ ۴) $\{۲,-۱\}$ (ریاضی خارج ۹۸)

۳۶۳ اگر $f(x+۱)=\frac{g(x)-۱}{x}$ و $g^{-۱}(x)=۱-x$ باشند، مقدار $(fog)(۲)$ کدام است؟

○ ۱) -۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) -۳ ○ ۴) -۵

IQ **۳۶۴** اگر $f(x)=x^۲+۴x+۱۵$ و $(fog)(x)=x^۳g(x)+۴g(x)$ باشد، مقدار $g^{-۱}(۳)$ کدام است؟

○ ۱) ۲ ○ ۲) ۶ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۱

سرنخ می‌دونیم اگه $f(a)=b$ باشه، میشه نتیجه گرفت $f^{-۱}(b)=a$ هستش! این ویژگی در حالت کلی‌تر هم قابل استفاده است.

۳۶۵ اگر $f(x^۳+۲x)=۲^x-۱۴$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲)$ کدام است؟

○ ۱) ۱۶ ○ ۲) ۱۴ ○ ۳) ۷۲ ○ ۴) ۵۴

۳۶۶ اگر $f^{-۱}(\frac{x+۲}{x-۱})=x^۳-۱$ باشد، مقدار $f(۷)$ کدام است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۳۶۷ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۱}{۲x}$ بر دامنهٔ $(۰,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

○ ۱) $-\frac{۳}{۲}$ ○ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ (تجربی خارج ۹۹ و مشابه داخل ۹۹)

○ ۳) -۱ ○ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۶۸ اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۲x}$ باشند، آن‌گاه حاصل $g^{-۱}(۶)$ کدام است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۳۶۹ اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ باشند، حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است؟ (داخل ۸۹)

○ ۱) ۵ ○ ۲) ۶ ○ ۳) ۷ ○ ۴) ۸

محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون

سرنخ این بخش رو با وارون کردن تابع‌های خطی شروع می‌کنیم. فقط کافیه جای x و y رو عوض کنید!

۳۷۰ قرینهٔ خطی به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (داخل ۹۷)

○ ۱) -۲ ○ ۲) -۱ ○ ۳) ۱ ○ ۴) ۲

۳۷۱ نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{x-۳}{۲}$ را در راستای محور yها، ۶ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اگر A نقطهٔ تلاقی نمودار منحنی حاصل با نمودار f باشد، فاصلهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

○ ۱) $۲\sqrt{۵}$ ○ ۲) $\sqrt{۵}$ ○ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ○ ۴) $\sqrt{۲}$

۳۷۲ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۱)$ از نمودار وارون تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x+۲$ کدام است؟

○ ۱) $\sqrt{۷}$ ○ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ○ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ○ ۴) $\sqrt{۱۵}$

۳۷۳ تابع $f(x) = ۲x - ۱$ را در نظر بگیرید. اگر $g(x+۱) = f(x) - f^{-۱}(x)$ باشد، نمودارتابع $y = g(x)$ ازکدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

○ ۱) اول
○ ۲) دوم
○ ۳) سوم
○ ۴) چهارم

۳۷۴ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۵x + ۶}{x - ۳}$ به کدام صورت است؟

○ ۱) $y = x - ۲ \,;\, x \neq ۳$
○ ۲) $y = x - ۲ \,;\, x \neq ۱$
○ ۳) $y = x + ۲ \,;\, x \neq ۳$
○ ۴) $y = x + ۲ \,;\, x \neq ۱$

۳۷۵ اگر دو خط به معادلات $ax + by = ۸$ و $۲x - ۳y = b$ نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند، $a + b$ کدام است؟ (خارج ۹۳)

○ ۱) ± ۳
○ ۲) ± ۲
○ ۳) $۲, -۳$
○ ۴) $-۲, ۳$

۳۷۶ تابع خطی f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۳x - ۱}{a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(۳f^{-۱}(x)) = ۳x + ۵$ باشد، مقدار a کدام است؟

○ ۱) $\frac{۳}{۵}$
○ ۲) $\frac{۲}{۵}$
○ ۳) $-\frac{۳}{۵}$
○ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

سرنخ تست‌های زیر مربوط به وارون کردن تابع‌های رادیکالی و درجهٔ دوم و درجهٔ سوم است. توی این سؤالا به محدود کردن دامنه توجه کنید.

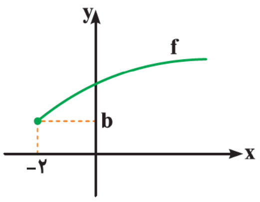
۳۷۷ ضابطهٔ وارون تابع $y = ۲ - \sqrt{x - ۱}$ به کدام صورت است؟ (داخل ۹۲)

○ ۱) $y = x^۲ - ۴x + ۵; x \leq ۲$
○ ۲) $y = -x^۲ + ۴x - ۵; x \leq ۲$
○ ۳) $y = x^۲ - ۴x + ۵; x \geq ۱$
○ ۴) $y = -x^۲ + ۴x - ۵; x \geq ۱$

۳۷۸ قرینهٔ نمودار تابع $y = ۲ + \sqrt{x - ۱}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۰)

○ ۱) ۳
○ ۲) ۳-
○ ۳) ۲-
○ ۴) ۴-

۳۷۹ نمودار تابع $f(x) = ۱ + \sqrt{x + a}$ به‌صورت زیر است. نمودار این تابع را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(a + b)$ کدام است؟



○ ۱) صفر
○ ۲) ۱
○ ۳) ۲-
○ ۴) ۴-

۳۸۰ نمودار تابع $y = \sqrt[۳]{x}$ را ۲ واحد به طرف xهای مثبت و ۱ واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌هیم. نمودار وارون تابع حاصل از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

○ ۱) اول
○ ۲) دوم
○ ۳) سوم
○ ۴) چهارم

۳۸۱ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = (x - ۲)^۲ + ۶x$ در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است. کدام است؟

○ ۱) $-۱ - \sqrt{x - ۳}$
○ ۲) $-۱ + \sqrt{x - ۳}$
○ ۳) $۲ + \sqrt{x - ۶}$
○ ۴) $۲ - \sqrt{x - ۶}$

۳۸۲ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = -۲ + \sqrt{x - ۳}$ در بازه‌ای که نمودار آن زیر محور xها قرار دارد، کدام است؟

○ ۱) $x^۲ + ۴x + ۷ \,;\, -۲ \leq x < ۰$
○ ۲) $x^۲ + ۴x + ۷ \,;\, ۳ \leq x < ۷$
○ ۳) $x^۲ - ۶x + ۴ \,;\, ۰ \leq x \leq ۳$
○ ۴) $x^۲ - ۶x + ۴ \,;\, x \geq ۰$

۳۸۳ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = -x^۲ + ۲x$ در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، کدام است؟

○ ۱) $۱ + \sqrt{۱ - x} \,;\, ۰ < x < ۱$
○ ۲) $۱ + \sqrt{۱ - x} \,;\, x < ۱$
○ ۳) $-۱ - \sqrt{۱ - x} \,;\, ۰ < x < ۱$
○ ۴) $۱ - \sqrt{۱ - x} \,;\, ۰ < x < ۱$

۳۸۴ نمودار تابع $y = x^۲ - ۲x \,;\, x \geq ۱$ را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

○ ۱) $-۱ - \sqrt{x - ۱}$
○ ۲) $-۱ + \sqrt{x - ۱}$
○ ۳) $-۱ - \sqrt{x + ۱}$
○ ۴) $-۱ + \sqrt{x + ۱}$

۳۸۵ اگر $g(x) = ۲x + ۱$ و $(fog)(x) = (۲x - ۱)g(x)$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $y = f(x)$ با شرط $x \leq ۱$ کدام است؟

○ ۱) $y = ۱ - \sqrt{x - ۱}$
○ ۲) $y = ۱ + \sqrt{x - ۱}$
○ ۳) $y = ۱ - \sqrt{x + ۱}$
○ ۴) $y = ۱ + \sqrt{x + ۱}$

۳۸۶ تابع $f(x)=x^{۲}\sqrt{x^{۲}}$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

○ ۱) $-\sqrt[۳]{x};x\geq ۰$

○ ۲) $-\sqrt{x^{۳}};x\leq ۰$

○ ۳) $-\sqrt[۳]{x};x\leq ۰$

○ ۴) $-\sqrt{x^{۳}};x\geq ۰$

۳۸۷ اگر $y=\frac{x+۲}{۴}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۲}$ ضابطهٔ تابع وارون $y=ax+a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

○ ۱) ۲

○ ۲) ۳

○ ۳) ۴

○ ۴) ۹

۳۸۸ ضابطهٔ وارون $f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}$ کدام است؟ (شبیه‌ساز ریاضی ۱۴۰۲)

○ ۱) $x^{۲}-۲x+۲\,;\,x\geq ۱$

○ ۲) $x^{۲}-۲x\,;\,x\geq ۱$

○ ۳) $x^{۲}+۲x+۲\,;\,x\geq -۱$

○ ۴) $x^{۲}+۲x\,;\,x\geq -۱$

۳۸۹ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{\frac{۱}{۴}x-۱}$ در دامنهٔ محدود کدام است؟ (شبیه‌ساز ریاضی خارج ۱۴۰۲)

○ ۱) $۲\sqrt{۴x+۴}+۲$

○ ۲) $۲\sqrt{۴x+۴}-۲$

○ ۳) $۲\sqrt{x^{۲}+۱}+۲$

○ ۴) $۲\sqrt{x^{۲}+۱}$

سرنخ تابع‌های قدرمطلقی هم در حالت کلی وارون‌پذیر نیستند و برای وارون کردن آن‌ها باید به محدودیت دامنه توجه کنید!

۳۹۰ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{(x+۱)^{۲}}-|۳x-۶|$ در یک بازهٔ نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

○ ۱) $-\frac{۱}{۲}x-۷,x\geq ۲$

○ ۲) $-\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۲},x\leq ۳$

○ ۳) $-۲x+۱۴,x\leq ۳$

○ ۴) $-۲x-\frac{۱۴}{۳},x\geq ۲$

۳۹۱ نمودار تابع $y=|۲x-۶|-|x+۴|+x$ در بازه‌ای اکیداً نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟ (داخل ۹۴)

○ ۱) $-x+۶;x\leq -۴$

○ ۲) $-x+۵;x\geq ۲$

○ ۳) $-\frac{۱}{۲}x+۱;-۴\leq x\leq -۳$

○ ۴) $-\frac{۱}{۲}x+۱;-۴\leq x\leq ۱۰$

۳۹۲ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|۲x-۴|-|x+۱|+x$ را در بازهٔ اکیداً نزولی در نظر بگیرید. نمودار تابع $f^{-۱}$ و خط $y=x+۱$ با کدام طول متقاطع هستند؟

○ ۱) ۱

○ ۲) $\frac{۱}{۲}$

○ ۳) $\frac{۱}{۳}$

○ ۴) غیرمتقاطع (شبیه‌ساز ۹۹)

۳۹۳ دو تابع $f(x)=۳-\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=x^{۲}-۲x$ را در نظر بگیرید. ضابطهٔ وارون تابع $y=(fog)(x)$ در بازه‌ای که نمودار آن اکیداً نزولی می‌باشد، کدام است؟

○ ۱) $-x+۳;x\leq ۱$

○ ۲) $-x+۴;x\leq ۱$

○ ۳) $-x+۳;x\leq ۳$

○ ۴) $-x+۴;x\leq ۳$

۳۹۴ تابع با ضابطهٔ $y=x|x-۲|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ وارون آن در این بازه کدام است؟ (داخل ۹۴)

○ ۱) $۱-\sqrt{۱+x};x\leq ۰$

○ ۲) $۱-\sqrt{۱-x};x\leq ۱$

○ ۳) $۱+\sqrt{۱-x};۰\leq x\leq ۱$

○ ۴) $۱-\sqrt{۱-x};۰\leq x\leq ۱$

۳۹۵ اگر $[x]=-۱$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $y=|x^{۲}-۱|$ کدام است؟

○ ۱) $\sqrt{x-۱};۰<x\leq ۱$

○ ۲) $-\sqrt{x-۱};۰<x\leq ۱$

○ ۳) $\sqrt{۱-x};۰\leq x<۱$

○ ۴) $-\sqrt{۱-x};۰\leq x<۱$

سرنخ چندتا هم وارون تابع دوضابطه‌ای ببینیم.

۳۹۶ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\;;\;x\geq ۰\\-\sqrt{-x}\;;\;x<۰\end{cases}$ کدام است؟ (داخل ۹۶)

○ ۱) $-x^{۲}$

○ ۲) $x^{۲}$

○ ۳) $x|x|$

○ ۴) $-x|x|$

۳۹۷ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۱\,;x>۱\\ ۲x+۲:x\leq ۱\end{cases}$ به‌صورت $f^{-۱}(x)=\begin{cases}a(x-۱);x>c\\ bx-۱;x\leq c\end{cases}$ است. مقدار $f^{-۱}(\frac{b}{a})$ کدام است؟

○ ۱) $\frac{۳}{۲}$ ○ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ○ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ○ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۹۸ اگر $f(x)=\begin{cases}x[x] & ; \ -۱<x<۰\\ ۲^x & ; \ ۰\leq x<۲\end{cases}$ باشد، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

○ ۱) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}-x & ; \ ۰<x<۱\\ \log_۲ x & ; \ ۱<x\leq ۴\end{cases}$

○ ۲) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}-x & ; \ ۰<x<۱\\ \log_۲ x & ; \ ۱\leq x<۴\end{cases}$

○ ۳) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}x & ; \ -۱<x<۰\\ \log_۲ x & ; \ ۱\leq x<۴\end{cases}$

○ ۴) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}x & ; \ ۰<x<۱\\ \log_۲ x & ; \ ۱\leq x<۴\end{cases}$

سرنخ یه روش خیلی خوب برای وارون کردن تابع‌های هموگرافیک داریم که برای حل تست‌های زیر ازش استفاده کنید و لذت ببرید.

۳۹۹ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{۳x+۲}{x-۱}+۲$ کدام است؟

○ ۱) $\frac{x+۲}{x-۳}-۲$ ○ ۲) $\frac{x}{x-۵}$ ○ ۳) $\frac{x+۲}{x-۳}+۲$ ○ ۴) $\frac{x}{x+۵}$

۴۰۰ تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{a\}$ و بُرد $\mathbb{R}-\{-۲\}$ مفروض است. اگر $f^{-۱}(x)=\frac{۵x-۳}{bx+۴}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

○ ۱) -۲ ○ ۲) ۲/۵ ○ ۳) -۴ ○ ۴) ۵

۴۰۱ اگر $fof(x)=\frac{af(x)+۱}{۲f(x)-۱}$ و $f^{-۱}(۰)=-۲$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $g(x)=\frac{۴x+۱}{۲x+a}$ کدام است؟

○ ۱) $\frac{-\frac{۱}{۲}x+۱}{۲x-۴}$ ○ ۲) $\frac{-x+۲}{۲x-۴}$ ○ ۳) $\frac{-۴x+۱}{۲x+۴}$ ○ ۴) وارون‌پذیر نیست.

۴۰۲ تابع $f(۲x+۴)=\frac{۴x-۶}{۲x+a}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(x)=f^{-۱}(x)$ باشد، مقدار a کدام است؟

○ ۱) -۴ ○ ۲) -۲ ○ ۳) ۴ ○ ۴) ۲

۴۰۳ اگر $x=\frac{f(x)-۳x}{f(x)+۴}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

○ ۱) $\frac{x-۱}{x+۷}$ ○ ۲) $\frac{x}{x+۷}$ ○ ۳) $\frac{x+۱}{x-۷}$ ○ ۴) $\frac{x}{x-۷}$

۴۰۴ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{x}{۱+|x|}$ به‌صورت $f^{-۱}(x)=\frac{ax}{۱-|x|}\,;|x|<b$ است. مقدار $a\times b$ کدام است؟

○ ۱) -۱ ○ ۲) ۱ ○ ۳) -۲ ○ ۴) ۲

برخورد f و $f^{-۱}$ و برخورد $f^{-۱}$ و g

سرنخ توی تست‌های زیر، می‌خوایم نقطهٔ برخورد $f^{-۱}$ و g رو بررسی کنیم.

۴۰۵ اگر $f(x)=x^۲-۲x-۳\ ;\ x\geq ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول متقاطع هستند؟ (تجربی داخل ۹۸)

○ ۱) ۱۲ ○ ۲) ۱۵ ○ ۳) ۱۸ ○ ۴) ۲۱

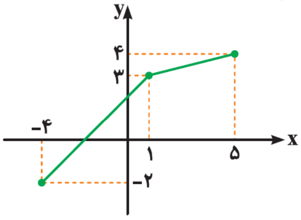
۴۰۶ اگر $f(x)=x^۲-۳x+۱\ ;\ x<\frac{۳}{۲}$ و $g^{-۱}(x)=۳x-۴$ باشند، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و g در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع‌اند؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) -۱ ○ ۴) -۲

۴۰۷ اگر $f(x)=x^۲-۴x+۱\,;x\leq ۲$ باشد، نمودار تابع $y=۱-f^{-۱}(x)$ و $g(x)=\sqrt{f(x)+۳}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

○ ۱) $۲\sqrt{۲}$ ○ ۲) $\sqrt{۲}$ ○ ۳) $۲\sqrt{۱۳}$ ○ ۴) $\sqrt{۶}$

۴۰۸ نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۴,۵]$ به‌صورت مقابل است. نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=x+|x-۲|$ در چند نقطه متقاطع هستند؟



○ ۱) ۱

○ ۲) ۲

○ ۳) ۳

○ ۴) متقاطع نیستند.

سرنخ برای حل تست‌های مربوط به برخورد f و $f^{-۱}$ به صعودی بودن تابع f توجه کنید.

۴۰۹ اگر $f(x)=x^۲+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ مفروض باشد، نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (داخل ۹۲)

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) غیرمتقاطع

۴۱۰ فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y=\sqrt{x+۳}-۱$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

○ ۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ○ ۲) $\sqrt{۲}$ ○ ۳) ۳ ○ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۴۱۱ نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۶)

○ ۱) $-۴,-۱$ ○ ۲) $۴,-۱$ ○ ۳) $-۴,۱$ ○ ۴) $۴,۱$

۴۱۲ فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^۳+۳x-۱۲$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

○ ۱) $۲\sqrt{۳}$ ○ ۲) $\sqrt{۳}$ ○ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ○ ۴) $\sqrt{۲}$

۴۱۳ نمودار وارون تابع $y=\log_۴^{(۲^{x+۲}+۳۲)}$ نمودار خود را در نقطهٔ A قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

○ ۱) $۲\sqrt{۲}$ ○ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ○ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ○ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۴۱۴ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱+x}}$ ، در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می‌کند؟ (ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

○ ۱) ۴ ○ ۲) ۳ ○ ۳) ۲ ○ ۴) ۱

ترکیب تابع f و $f^{-۱}$ و ترکیب تابع $f^{-۱}$ و g

سرنخ به نظرتون $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ با هم برابرند؟ بریم ببینیم با هم.

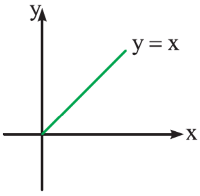
۴۱۵ تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۱}$ را در نظر بگیرید. کدام رابطه نادرست است؟

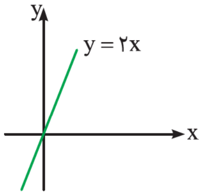
○ ۱) $(f^{-۱}of)(۱)=۱$ ○ ۲) $(fof^{-۱})(۱)=۱$ ○ ۳) $(f^{-۱}of)(۳)=۳$ ○ ۴) $(fof^{-۱})(۳)=۳$

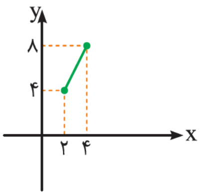
۴۱۶ در کدام تابع زیر رابطهٔ $(f^{-۱}of)(x)=(fof^{-۱})(x)$ برقرار نیست؟

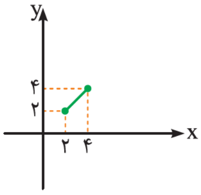
○ ۱) $f(x)=x^۲-۴x+۶;x\geq ۲$ ○ ۲) $f(x)=۱+۲^x$ ○ ۳) $f(x)=۱+\frac{۱}{x-۱}$ ○ ۴) $f(x)=۲+\sqrt{x-۲}$

۴۱۷ اگر $f(x)=۴x-x^۲;x\geq ۲$ باشد، نمودار تابع $y=(f^{-۱}of)(x)+(fof^{-۱})(x)$ کدام است؟

○ ۱)


○ ۲)


○ ۳)


○ ۴)


۴۱۸ اگر $g(\frac{x+۳}{۴}) = f^{-۱}(۳x+۱)$ قابل تعریف باشد، مقدار $(fog)(۳)$ کدام است؟

○ ۱) ۱۲　○ ۲) ۱۸　○ ۳) ۲۴　○ ۴) ۲۸

۴۱۹ با توجه به ماشین مقابل، اگر $f(x) = ۳ - \sqrt{x+۱}$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y = g(x)$ در کدام بازه زیر محور xها است؟

○ ۱) $[-۱,۸)$　○ ۲) $(۸,+\infty)$

○ ۳) $(۲,۳]$　○ ۴) $(۲,۴)$

۴۲۰ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{۲})$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

○ ۱) $\frac{۱}{۲}$　○ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$　○ ۳) $\sqrt{۲}$　○ ۴) ۴

۴۲۱ اگر $f(x) = x + \sqrt{x} + ۳$ باشد، نمودار دو تابع $fof^{-۱}$ و $y = \sqrt{-x+۶}$ در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع هستند؟

○ ۱) ۱　○ ۲) ۲　○ ۳) ۴　○ ۴) غیرمتقاطع‌اند.

سرنخ چندتا سؤال هم از وارون کردن ترکیب دو تابع ببینیم.

۴۲۲ دو تابع $f(x) = x^۳ + ۲$ و $g(x) = \frac{۱-x}{x+۲}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-۱}og)^{-۱}(۲)$ کدام است؟

○ ۱) $-\frac{۱۸}{۱۱}$　○ ۲) $-\frac{۱۹}{۱۱}$　○ ۳) $-\frac{۲۰}{۱۱}$　○ ۴) $-\frac{۲۱}{۱۱}$

۴۲۳ اگر $f(x) = -۵ + \frac{۱}{x-۱}$ و $g(x) = \frac{x+۳}{x+۲}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

○ ۱) $x-۳$　○ ۲) $\frac{x+۱}{۳}$　○ ۳) $\frac{۳x}{x-۱}$　○ ۴) $x+۳$

۴۲۴ اگر $(fog)(x) = \frac{۳x+۱}{x+۱}$ و $f^{-۱}(۴) = ۱$ باشد، مقدار $g^{-۱}(۱)$ کدام است؟

○ ۱) ۴　○ ۲) ۳-　○ ۳) ۱　○ ۴) ۲-

یادداشت:

فصل اول

۱

درس هفتم:
تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

CHAPTER 1

سرنخ درسته که تقسیم چندجمله‌ای‌ها برهم رو در سال نهم یاد گرفتین، اما در سال دوازدهم به‌طور تخصصی‌تری روش بحث میشه. جالبه بدونین که در سال‌های اخیر پای ثابت کنکور بوده.

۴۲۵ به ازای کدام مقدار a دو عبارت $P(x)=ax^{۲}+x-۷$ و $f(x)=۲x^{۳}-x^{۲}+ax+۳$ در تقسیم بر $x-۲$ هم باقی‌مانده هستند؟

○ ۱) -۹ ○ ۲) ۱۰ ○ ۳) ۷ ○ ۴) ۱۱

۴۲۶ چندجمله‌ای $f(x)=x^{۵}-۳x^{۳}+ax+۵$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. مقدار a کدام است؟ (تجربی نوبت اول ۱۴۰۴)

○ ۱) $-۱/۵$ ○ ۲) ۱/۵ ○ ۳) $-۲/۵$ ○ ۴) ۲/۵

۴۲۷ به‌ازای یک مقدار a چندجمله‌ای $P(x)=۲x^{۴}+ax^{۳}+۲x^{۲}-۳x$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x+۲$ کدام است؟ (خارج ۹۹)

○ ۱) -۱۰ ○ ۲) -۸ ○ ۳) ۴ ○ ۴) ۶

۴۲۸ چندجمله‌ای $P(x)=x^{۳}-۳ax-۷$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۲$ کدام است؟

○ ۱) -۲۵ ○ ۲) -۲۷ ○ ۳) -۱۵ ○ ۴) -۱۷

۴۲۹ کدام عدد را به حاصل‌ضرب $x^{۲}+۵$ و $x-۸$ اضافه کنیم تا حاصل بر $x-۳$ بخش‌پذیر باشد؟

○ ۱) ۲۵ ○ ۲) -۱۷ ○ ۳) ۷۰ ○ ۴) ۸۶

۴۳۰ اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای و رابطهٔ $P(x)=۲P(-x)+۴x$ برقرار باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ چقدر است؟ (شبیه‌ساز داخل ۹۹)

○ ۱) $\frac{-۷}{۵}$ ○ ۲) $-\frac{۸}{۳}$ ○ ۳) $\frac{-۸}{۵}$ ○ ۴) $\frac{-۷}{۳}$

۴۳۱ فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$، به ترتیب ۳ و ۱ باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x^{۲})+۴P(-x)$ بر $x-۲$ کدام است؟

○ ۱) ۷ ○ ۲) ۱ ○ ۳) صفر ○ ۴) -۱ (خارج ۹۹)

۴۳۲ اگر $P(x)=x^{۳}+mx^{۲}+(۳m-۲)x-۱۰m-۴$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x^{۲}+۱)+۳P(۱-x)$ بر $x+۱$ کدام است؟

○ ۱) صفر ○ ۲) ۴ ○ ۳) ۲ ○ ۴) ۸

سرنخ در سؤال زیر، مقسوم‌علیه ریشه نداره یا ریشه‌هاش به راحتی به دست نمیاد. ولی بازم میشه یه کارایی کرد!

۴۳۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=۲x^{۳}-x^{۲}-۴x+۱$ بر $x^{۲}+۱$ کدام است؟

○ ۱) $۲x-۱$ ○ ۲) $-۶x+۲$ ○ ۳) $-۲x+۱$ ○ ۴) $۶x-۲$

سرنخ در سؤالای بعدی، در مورد خارج‌قسمت پرسیدیم، طبیعیه که برای حل سؤالای زیر باید به محاسبهٔ باقی‌مانده مسلط باشین.

۴۳۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $P(x)=x^{۲}+۴x+۵$ برابر $x+۲$ است. اگر $f(۱)=۱۳$ و $f(-۱)=۱۱$ باشد، خارج‌قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟ (خارج ۱۴۰۱)

○ ۱) $-x+۲$ ○ ۲) $۲x-۱$ ○ ۳) $۳x-۲$ ○ ۴) $-۲x+۳$

۴۳۵ اگر $q(x)$ خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^7-4x^5+x^2+1$ بر $x+2$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۱- ○ ۴) ۲-

۴۳۶ چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+x+b$ بر $x+2$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۶ است. اگر $Q(x)$ خارج‌قسمت این تقسیم باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)+Q(\frac{x}{2})$ بر $x-2$ کدام است؟

○ ۱) ۱۵ ○ ۲) ۱۴ ○ ۳) ۱۳ ○ ۴) ۱۲

سرنخ در برخی مواقع توان مجهوله، اول تکلیف اونو روشن کنیم.

۴۳۷ عبارت $x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$ به‌ازای جمیع مقادیر n بر $x+2$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم این عبارت بر $x-1$ کدام است؟

○ ۱) ۶- ○ ۲) ۹- ○ ۳) ۱ ○ ۴) ۱۰-

۴۳۸ باقی‌ماندهٔ تابع چندجمله‌ای $P(x)=x^3+x^{\frac{2n+3}{n}}-2x^{n-3}+1+n$ بر $2x-1$ کدام است؟

○ ۱) ۳/۲۵ ○ ۲) ۳/۵ ○ ۳) ۲/۲۵ ○ ۴) ۲/۵

۴۳۹ چندجمله‌ای $P(x)=x^{3n+1}+2x^{3n}+x^6+3x^5+16a$ به‌ازای هر عدد طبیعی n بر $x+2$ بخش‌پذیر است. برای $n=1$ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر x^2+2x-3 کدام است؟ (ریاضی داخل ۱۴۰۱)

○ ۱) $-5x+44$ ○ ۲) $-15x+24$ ○ ۳) $-15x+14$ ○ ۴) $-5x+34$

سرنخ اکثر سؤالای کتاب درسی راجع به مقسوم‌علیه درجه یکه! اما در این بخش که سابقهٔ کنکوری هم داشته راجع به درجات بالاتر بحث کردیم.

۴۴۰ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-3x-4 برابر $3x-4$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x+1)$ بر $x+2$ کدام است؟

○ ۱) ۷- ○ ۲) ۷ ○ ۳) ۱ ○ ۴) ۱-

۴۴۱ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=ax^3+bx^2+2x+1$ بر x^2-1 برابر $x+2$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ کدام است؟

○ ۱) ۷- ○ ۲) ۵ ○ ۳) ۱- ○ ۴) ۹

۴۴۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^4+ax^2+3x+b$ بر x^2-x برابر $x+4$ و خارج‌قسمت آن $Q(x)$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $4P(x)+Q(x+1)$ بر $x-1$ کدام است؟

○ ۱) ۲۴ ○ ۲) ۱۲ ○ ۳) ۳۶ ○ ۴) ۴۸

۴۴۳ در تقسیم چندجمله‌ای $P(x+2)$ بر $2x^2-3x-1$ خارج‌قسمت برابر $Q(x)$ و باقی‌مانده صفر است. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

○ ۱) ۸ ○ ۲) ۴ ○ ۳) ۶ ○ ۴) ۱۲

۴۴۴ باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2+2x به‌ترتیب $3x+1$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-2)=3$ آن‌گاه مقدار باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+2$ کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

○ ۱) ۶- ○ ۲) ۵- ○ ۳) ۴- ○ ۴) ۳-

۴۴۵ تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به‌ترتیب ۲- و $\frac{1}{2}x+1$ باشند، کم‌ترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$، کدام است؟ (داخل ۱۴۰۰)

○ ۱) ۴ ○ ۲) ۶ ○ ۳) ۷ ○ ۴) ۹

سرنخ در بعضی مسائل مقسوم‌علیه ریشهٔ مضاعف دارد. در این سؤال‌ها باید کمی مشتق بلد باشیم.

۴۴۶ اگر $f(x)=2x^3+ax^2+bx+2$ بر x^2-4x+4 بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $2a+3b$ کدام است؟

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۴۴۷ باقی‌ماندهٔ $f(x)=x^3+ax^2+bx+6$ بر x^2-2x+1 برابر با $3x+1$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

○ ۱) ۲- ○ ۲) ۳- ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۲

سرنخ حالا وقتشه بریم سراغ اتحادها در حالت پیشرفته‌تر!

۴۴۸ عبارت $(x^۳+۲)^۹-(x^۳+x^۲+۱)^۹$ به چه تعداد از عبارت‌های زیر بخش‌پذیر نیست؟

الف) $x+۱$ ب) $x-۱$ پ) $x^۲-۱$ ت) $x^۲+۱$

○ ۱) ۱ ○ ۲) ۲ ○ ۳) ۳ ○ ۴) ۴

۴۴۹ در تساوی $\frac{P(x)}{x^۷-۱}=\frac{۱}{x^۶+x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+۱}-\frac{۲}{x^۷-۱}$ عبارت $P(x)$ کدام است؟

○ ۱) $x+۳$ ○ ۲) $-x+۳$ ○ ۳) $-x-۳$ ○ ۴) $x-۳$

۴۵۰ عبارت $x^{۲۰}+۱$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

○ ۱) $x^۲+۱$ ○ ۲) $x^{۱۰}+۱$ ○ ۳) $x^۵+۱$ ○ ۴) $x^۴+۱$

۴۵۱ عبارت $x^{۱۵}-۱$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

○ ۱) $x^۳+۱$ ○ ۲) $x^۲+۱$ ○ ۳) $x^۲+x+۱$ ○ ۴) $x^۲-x+۱$

۴۵۲ به‌ازای چه مقادیری از n چندجمله‌ای x^n-a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است؟

○ ۱) هر عدد طبیعی n ○ ۲) مقادیر زوج n ○ ۳) مقادیر فرد n ○ ۴) هیچ مقدار n

۴۵۳ خارج قسمت تقسیم عبارت $x^۹+۱$ بر $x+۱$ به‌ازای $x=-۱$ کدام است؟

○ ۱) صفر ○ ۲) ۶ ○ ۳) -۳ ○ ۴) ۹

۴۵۴ اگر $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $x^۶-۶۴$ بر $x+۲$ باشد، مقدار $Q(-۲)$ کدام است؟

○ ۱) -۱۹۲ ○ ۲) ۱۹۲ ○ ۳) -۹۶ ○ ۴) ۹۶

۴۵۵ اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $۲-x^{۱۴}$ بر $x^۲+x+۱$ باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ $(x\neq ۱)$ (ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

○ ۱) صفر ○ ۲) -۱ ○ ۳) -۲ ○ ۴) ۴

۴۵۶ اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای $p(x)=x^۵+ax^۳$ و $p(x)=x^۴+۳x^۳+۲x^۲$، دوجمله‌ای $x^n+x^۳$ باشد، مقدار na کدام است؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۴)

○ ۱) -۲ ○ ۲) -۱ ○ ۳) ۲ ○ ۴) ۱

یادداشت:

۲۳۱ **۲**

ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}}\to D_f=(۰,+\infty)$$

$$g(x)=\frac{x+\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}}\to D_g=(۰,+\infty)$$

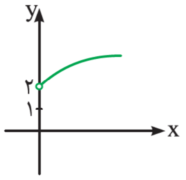
دامنهٔ تابع $f+g$ برابر $D_{f+g}=D_f\cap D_g=(۰,+\infty)$ است.

اکنون با به دست آوردن ضابطهٔ تابع $f+g$، آن را رسم می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$=\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+۲\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+۲$$



مطابق نمودار، برد تابع $f+g$ برابر $(۲,+\infty)$ است.

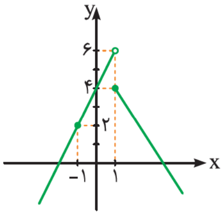
۲۳۲ **۱**

ابتدا ضابطهٔ تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}-x+۵ & ;\ x\geq ۱\\ ۲x+۴ & ;-۱\leq x<۱\\ ۳x+۵ & ;x<-۱\end{cases}$$

اکنون با رسم تابع $f+g$، برد آن را محاسبه می‌کنیم:

مطابق شکل، برد تابع $f+g$، برابر $(-\infty,۶)$ است.



۲۳۳ **۱**

دامنهٔ تابع f برابر $D_f=[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}]$ است. با توجه به دامنه توابع f و g، مقادیر مختلف تابع $y=(\sqrt{(f^۲+g).g})(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$x=۱:\ y=\sqrt{(f^۲(۱)+g(۱)).g(۱)}=\sqrt{(۲+۲)\times ۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$x=۰:\ y=\sqrt{(f^۲(۰)+g(۰)).g(۰)}=\sqrt{(۳+۳)\times ۳}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

بنابراین بیشترین مقدار این تابع، برابر $۳\sqrt{۲}$ است.

۲۳۴ **۲**

تابع $g(x)$ را با توجه به دامنهٔ تابع f تشکیل می‌دهیم $(D_g=D_f)$:

$$g(۲)=۲+f(۲)=۲+۷=۹\qquad g(۳)=۳+f(۳)=۳+(-۱)=۲$$

$$g(۴)=۴+f(۴)=۴+۲=۶\qquad g(۵)=۵+f(۵)=۵+۴=۹$$

اعضای برد تابع g عبارت است از: $R_g=\{۲,۶,۹\}$

بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{\text{مجموع اعضای برد}} ۲+۶+۹=۱۷$$

۲۳۵ **۱**

مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت ۱ اگر x عددی صحیح باشد آن‌گاه $x-[x]=۰$ و $[x]+[-x]=۰$ است پس:

$$f(x)-g(x)=۰-۲^۰=۰-۱=-۱$$

حالت ۲ اگر x عددی غیرصحیح باشد، آن‌گاه $[x]+[-x]=-۱$ و $۰<x-[x]<۱$ است، پس: $f(x)-g(x)=-۱-۲^{x-[x]}$

$$۰<x-[x]<۱\Rightarrow ۲^۰<۲^{x-[x]}<۲^۱\Rightarrow ۱<۲^{x-[x]}<۲$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)}-۱>-۲^{x-[x]}>-۲\xrightarrow{-۱}-۲>-۱-۲^{x-[x]}>-۳$$

بنابراین اگر x عددی غیرصحیح باشد $-۳<f(x)-g(x)<-۲$ است، پس برد تابع $f-g$ برابر است با: $R_{f-g}=(-۳,-۲)\cup\{-۱\}$

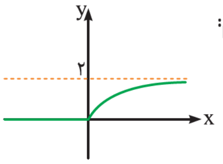
۲۳۶ **۲**

ابتدا ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست می‌آوریم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+|x|}{|x+۱|+۱}=\begin{cases}\frac{۲x}{x+۲} & ;\ x\geq ۰\\ ۰ & ;\ x<۰\end{cases}$$

اکنون با رسم تابع $\frac{f}{g}$، بُرد آن را محاسبه می‌کنیم:

مطابق شکل، برد تابع $\frac{f}{g}$، برابر $[۰,۲)$ است.

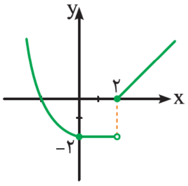


۲۳۷ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}x^۲-۲ & ;\ x<۰\\ -۲ & ;\ ۰\leq x<۲\\ x-۲ & ;\ x\geq ۲\end{cases}$$

اکنون نمودار تابع $f+g$ را رسم می‌کنیم:



۲۳۸ **۴**

ابتدا $g(f(a))=۵$ را با فلش نمایش می‌دهیم:

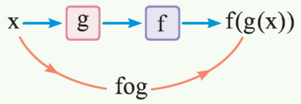
$$a\xrightarrow{f}○\xrightarrow{g}۵\Rightarrow(a,○)\in f,(○,۵)\in g$$

حال چون زوج مرتب $(۶,۵)$ در تابع g وجود دارد، پس $○=۶$ بوده و در نتیجه $f(a)=۶$ است: $f(a)=۶\Rightarrow a+\sqrt{a}=۶\Rightarrow a=۴$

هایلایت

نحوهٔ تشکیل تابع fog(x)

مقادیر **g(x)** به عنوان ورودی تابع f است.



۲۳۹ **۳**

از آن‌جایی که اشتراک دامنهٔ توابع f و g به‌صورت $\{۲,۴\}$ است، پس:

$$f\times g=\{(۲,-۲\times ۳),(۴,۱\times ۲)\}=\{(۲,-۶),(۴,۲)\}$$

حال تابع fog را تشکیل می‌دهیم و داریم:

$$-۱\xrightarrow{g}۴\xrightarrow{f}۱$$

$$۲\xrightarrow{g}۳\xrightarrow{f}\times\Rightarrow fog=\{(-۱,۱),(۴,-۲)\}$$

$$۴\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}-۲$$

$$\Rightarrow f\times g+fog=\{(۴,۰)\}$$

۲۴۰ ۲

با توجه به صورت سؤال داریم:

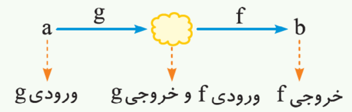
$$(۴,۲)\in fog \Rightarrow ۴\xrightarrow{g}\bigcirc\xrightarrow{f}۲\Rightarrow(\bigcirc,۲)\in f,(۴,\bigcirc)\in g$$

چون $(۳,۲)\in f$ ، پس $\bigcirc=۳$. پس $(۴,۳)\in g$ و در نتیجه $a=۴$ است. از طرفی:

$$(۴,۱)\in gof \Rightarrow ۴\xrightarrow{f}\bigcirc\xrightarrow{g}۱\Rightarrow(۴,\bigcirc)\in f,(\bigcirc,۱)\in g$$

با توجه به این‌که $(۴,۵)\in f$ ، پس $\bigcirc=۵$ است؛ بنابراین $(۵,۱)\in g$ و در نتیجه $b=۵$ خواهد بود. درنتیجه دوتایی (a,b) به‌صورت $(۴,۵)$ است.

هایلایت



$\Rightarrow (a,b)\in fog$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست توی همین سؤال، بپرسه:

«بُرد تابع fog کدام است؟»

جواب: $fog=\{(۱,۱),(۳,۷),(۴,۲),(۵,۷)\}\Rightarrow R_{fog}=\{۱,۲,۷\}$

۲۴۱ ۱

ابتدا $f(\sqrt{۳}-۱)$ را به‌دست می‌آوریم: $f(x)=|x-۱|+|۲x+۱|$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۳}-۱)=|\sqrt{۳}-۲|+|\underbrace{۲(\sqrt{۳}-۱)+۱}_{۲\sqrt{۳}-۱}|$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۳}-۱)=(۲-\sqrt{۳})+(۲\sqrt{۳}-۱)=\sqrt{۳}+۱$$

حال با جای‌گذاری $\sqrt{۳}+۱$ در تابع g داریم:

$$g(f(\sqrt{۳}-۱))=g(\sqrt{۳}+۱)=[-(\sqrt{۳}+۱)+۱]=[-\sqrt{۳}]=-۲$$

۲۴۲ ۱

ابتدا ضابطهٔ g را به‌صورت $g(x)=(x+۱)^۲$ می‌نویسیم و سپس مقادیر $f(۱-\sqrt{۲})$ و $g(۱-\sqrt{۲})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱)\ f(۱-\sqrt{۲})=|۱-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}-۱$$

$$۲)\ g(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲}+۱)^۲=(۲-\sqrt{۲})^۲=۶-۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow f(g(۱-\sqrt{۲}))-g(f(۱-\sqrt{۲}))=f(۶-۴\sqrt{۲})-g(\sqrt{۲}-۱)$$

$$=|۶-۴\sqrt{۲}|-(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲=\underbrace{۶-۴\sqrt{۲}-۲}_{۴-۴\sqrt{۲}}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۲۴۳ ۱

چون عبارت $\sin\pi x-۱$ زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ قرار دارد، پس:

$$\sin\pi x-۱\geq ۰\Rightarrow \sin\pi x\geq ۱ \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم مقادیر سینوس همواره در بازهٔ $[-۱,۱]$ هستند؛ بنابراین نامساوی (۱) تنها در صورتی برقرار است که $\sin\pi x=۱$ باشد، بنابراین:

$$\sin\pi x=۱\Rightarrow \pi x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k+\frac{۱}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای x، تمام ورودی‌های تابع f، اعدادی غیرصحیح هستند. همچنین می‌دانیم عبارت $[x]+[-x]$ به ازای مقادیر صحیح برابر صفر و به ازای مقادیر غیرصحیح برابر ۱- است. پس:

$$f(x)=\underbrace{[x]+[-x]}_{-۱}+\sqrt{\underbrace{\sin\pi x}_{۱}-۱}=(-۱)+\sqrt{۰}=-۱$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}f(x))=f(-\frac{۱}{۲}\times-۱)=f(\frac{۱}{۲})=-۱+۰=-۱$$

۲۴۴ ۳

ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=f([x+f(x)]=f([x+۲[x]-x])=f(۲[x])$$

$$=۲[۲[x]]-۲[x]=۴[x]-۲[x]=۲[x]\Rightarrow g(x)=۲[x]$$

حال با توجه به این‌که $f(-\frac{۵}{۳})=-۴+\frac{۵}{۳}=-\frac{۷}{۳}$ می‌باشد مقدار $g(f(-\frac{۵}{۳}))$ را به‌دست می‌آوریم:

$$g(f(-\frac{۵}{۳}))=g(-\frac{۷}{۳})=۲[-\frac{۷}{۳}]=۲\times(-۳)=-۶$$

۲۴۵ ۳

با فرض $f(x)=۲x-۲$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+۱}$ ، خروجی ماشین، همان خروجی تابع gof است. بنابراین اگر ورودی ماشین را a در نظر بگیریم، داریم:

$$g(f(a))=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{f(a)}{\sqrt{f(a)}+۱}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f(a)=۴\Rightarrow ۲a-۲=۴$$

$$\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

۲۴۶ ۳

ابتدا بررسی می‌کنیم تابع $f(x)$ در چه طول‌هایی صفر می‌شود.

$$f(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱ & ,\quad ۱\in[۰,۲]\ \checkmark\\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱ & ,\quad -۱\in[-۲,۰)\ \checkmark\end{cases}$$

اگر ۱- یا $f(x)=۱$ باشد، مقدار $f(f(x))$ برابر صفر است. بنابراین جواب‌های معادلهٔ $f(x)=-۱$ و $f(x)=۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۱\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۱\Rightarrow x=۲ & ,\quad ۲\in[۰,۲]\ \checkmark\\ x+۱=۱\Rightarrow x=۰ & ,\quad ۰\notin[-۲,۰)\ \times\end{cases}$$

$$f(x)=-۱\Rightarrow\begin{cases}x-۱=-۱\Rightarrow x=۰ & ,\quad ۰\in[۰,۲]\ \checkmark\\ x+۱=-۱\Rightarrow x=-۲ & ,\quad -۲\in[-۲,۰)\ \checkmark\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ $fof(x)=۰$ ، ۳ جواب قابل قبول دارد.

۲۴۷ ۴

برای پیدا کردن $f(g(۱))$ باید ابتدا $g(۱)$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=۶-f(x-۳)\xrightarrow{x=۱}g(۱)=۶-f(-۲)$$

$$\xrightarrow{\text{نمودار}}g(۱)=۶-۲=۴$$

بنابراین $f(g(۱))=f(۴)$ است. طبق نمودار $f(۴)=۸$ است، پس:

$$fog(۱)=۸$$

۲۴۸ ۲

با توجه به شکل صورت سوال $f(x+۱)=x+۲$ و $g(x-۱)=-x+۴$ است. حالا ابتدا $f(۳)$ و $g(-۳)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+۱)=x+۲\xrightarrow{x=۲}f(۳)=۲+۲=۴$$

$$g(x-۱)=-x+۴\xrightarrow{x=-۲}g(-۳)=۲+۴=۶$$

پس $g(f(۳))+f(g(-۳))=g(۴)+f(۶)$ است. حالا $f(۶)$ و $g(۴)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x+۱)=x+۲\xrightarrow{x=۵}f(۶)=۵+۲=۷$$

$$g(x-۱)=-x+۴\xrightarrow{x=۵}g(۴)=-۵+۴=-۱$$

پس $g(۴)+f(۶)=-۱+۷=۶$ است.

۲۴۹ **۳**

اعضای تابع gof را پیدا می‌کنیم:

$$a\xrightarrow{f}-۲\xrightarrow{g}۵$$

$$-۱\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}\frac{۲b-۱}{b+۱}$$

$$۱\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{g}-۱$$

$$۳\xrightarrow{f}-۴\xrightarrow{g}۳$$

با توجه به‌صورت سوال، اعضای بُرد تابع gof به‌صورت $\{-۱,c,۱,۵\}$ است، پس:

$$(۱)c=۳\ \ ,\ \ (۲)\frac{۲b-۱}{b+۱}=۱\Rightarrow ۲b-۱=b+۱\Rightarrow b=۲$$

$$\Rightarrow b\times c=۲\times۳=۶$$

۲۵۰ **۱**

می‌دانیم $f(۲)=۱$ است، پس:

$$g(f(x))=x^۲-x+۱\xrightarrow{x=۲}g(f(۲))=۲^۲-۲+۱=۳$$

$$\Rightarrow g(۱)=۳$$

حالا در رابطهٔ $fog(x)=x^۲+۳x+۱$ به جای x عدد ۱ می‌گذاریم:

$$f(g(۱))=۱^۲+۳+۱=۵\xrightarrow{g(۱)=۳}f(۳)=۵$$

۲۵۱ **۳**

ابتدا $g(۳)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(g(x)+x)=۶x+۱\xrightarrow{x=۳}f(g(۳)+۳)=۶\times۳+۱=۱۹$$

حالا اگر در رابطهٔ $f(x+۱)=۲x+۱$ به جای x عدد ۹ قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم $f(۱۰)=۱۹$ است. پس: $g(۳)+۳=۱۰\Rightarrow g(۳)=۷$

بنابراین $f(g(۳))=f(۷)$ است و داریم:

$$f(x+۱)=۲x+۱\xrightarrow{x=۶}f(۷)=۲(۶)+۱=۱۳$$

۲۵۲ **۲**

ابتدا $f(g(۱))$ را محاسبه می‌کنیم:

برای پیدا کردن $g(۱)$ باید در تابع $g(x)=\begin{cases}f(x+۱)\ ;\ x<۱\\ f(x-۱)\ ;\ x\geq۱\end{cases}$ سراغ ضابطهٔ پایینی برویم:

$$g(۱)=f(۱-۱)=f(۰)\xrightarrow{f(x)=x^۲+۱\,;\,x<۲}f(۰)=۱$$

$$\Rightarrow f(g(۱))=f(f(۰))=f(۱)=۱^۲+۱=۲$$

۲۵۳ **۳**

ضابطهٔ تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f(f(x))=۲-|f(x)-۲|=۲-|۲-|x-۲|-۲|$$

$$=\underbrace{۲-|-|x-۲||}_{۲-|x-۲|}=f(x)$$

۲۵۴ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(x)=x^۲+۲x\\ g(x)=x-۳\end{cases}\Rightarrow g(f(x))=(x^۲+۲x)-۳$$

حال معادلهٔ $(gof)(x)=۲$ را حل می‌کنیم:

$$x^۲+۲x-۳=۲\Rightarrow x^۲+۲x-۵=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-۲\\ P=\alpha\times\beta=-۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=(-۲)^۲-۲(-۵)=۱۴$$

یه جوره دیگه! طراح می تونست اینجوری بپرسه:

«جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $fog(x)=۱$ کدام است؟»

جواب: $۲+\sqrt{۲}$

۲۵۵ **۴**

در تابع g، به جای همهٔ xها، $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$g(f(x))=\frac{۲f(x)+۲}{۲-f(x)}=\frac{۲(\frac{۲x-۱}{x+۱})+۲}{۲-(\frac{۲x-۱}{x+۱})}=\frac{\frac{۴x-۲}{x+۱}+۲}{۲-\frac{۲x-۱}{x+۱}}$$

$$\Rightarrow g(f(x))=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{\cancel{x+۱}}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{\cancel{x+۱}}}=\frac{۶x}{۳}=۲x$$

روش سریع‌تر با جای‌گذاری $x=۲$ در تابع gof داریم:

$$g(f(۲))=g(۱)=۴$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=۲$ برابر ۴ می‌شود، گزینهٔ (۴) است.

۲۵۶ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع‌های $fog(x)$ و $f(x+۳)$ را پیدا می‌کنیم:

۱) $f(g(x))=۲((۳x+۱)^۲-(۳x+۱)-۳)=۲(۹x^۲+۳x-۳)$

۲) $f(x+۳)=۲((x+۳)^۲-(x+۳)-۳)=۲(x^۲+۵x+۳)$

حالا نقاط تلاقی این دو نمودار را پیدا می‌کنیم:

$$fog(x)=f(x+۳)\Rightarrow ۲(۹x^۲+۳x-۳)=۲(x^۲+۵x+۳)$$

$$\Rightarrow ۸x^۲-۲x-۶=۰\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=۰}\begin{cases}x=۱\\ x=-\frac{۳}{۴}\end{cases}$$

پس این دو نمودار در دو نقطه به‌طول‌های $x=۱$ و $x=\frac{-۳}{۴}$ متقاطع‌اند.

۲۵۷ **۲**

ضابطهٔ تابع خطی f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$f(f(x))=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b$$

حالا با توجه به رابطهٔ $(fof)(x)=f(x-۳)+f(x+۱)$ داریم:

$$a^۲x+ab+b=a(x-۳)+b+a(x+۱)+b$$

$$\Rightarrow a^۲x+ab=۲ax-۲a+b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۲a\xrightarrow{a\neq۰}a=۲\\ ab=-۲a+b\Rightarrow ۲b=-۴+b\Rightarrow b=-۴\end{cases}$$

پس $f(x)=۲x-۴$ است و $f(۵)=۱۰-۴=۶$ است.

۲۵۸ **۱**

با توجه به $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=x+۴$ ضابطه‌های $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را به‌دست آورده و معادلهٔ $(gof)(x)=(fog)(x)$ را حل می‌کنیم:

۱) $(gof)(x)=g(f(x))=\frac{۲x-۱}{x+۲}+۴=\frac{۲x-۱+۴(x+۲)}{x+۲}=\frac{۶x+۷}{x+۲}$

$$۲)\ (fog)(x)=f(g(x))=\frac{۲(x+۴)-۱}{(x+۴)+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}$$

$$\Rightarrow\frac{۶x+۷}{x+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}\Rightarrow\underbrace{(۶x+۷)(x+۶)}_{۶x^۲+۴۳x+۴۲}=\underbrace{(۲x+۷)(x+۲)}_{۲x^۲+۱۱x+۱۴}$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۳۲x+۲۸=۰\Rightarrow\underbrace{x^۲+۸x+۷}_{a+c=b}=۰\Rightarrow x=-۱,x=-۷$$

روش سریع‌تر می‌توانستیم از گزینه‌ها اعداد را جای‌گذاری کنیم.

۲۵۹ **۲**

ابتدا ضابطهٔ fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x))=(\frac{x-۳}{۲})^۲+(\frac{x-۳}{۲})-۲=\frac{x^۲-۴x-۵}{۴}$$

می‌دانیم عرض نقاطی از نمودار تابع که زیر محور xها قرار می‌گیرند، منفی است:

$$\frac{x^۲-۴x-۵}{۴}<۰\Rightarrow(x+۱)(x-۵)<۰\Rightarrow-۱<x<۵$$

روش سریع‌تر چون $x=۰$ و $x=۴$ در نامعادلهٔ $f(g(x))<۰$ صدق می‌کنند؛ پس گزینهٔ (۲) درست است.

۲۶۰ **۳**

می‌دانیم $[x]+[-x]$ به ازای xهای صحیح برابر صفر و به ازای xهای غیرصحیح برابر ۱- است، پس دو حالت برای مقادیر x در نظر می‌گیریم:

$x\in\mathbb{Z}:g(f(x))=g(۰)=۴$

$x\notin\mathbb{Z}:g(f(x))=g(-۱)=۳$

پس به ازای تمام xهای غیرصحیح تابع gof برابر ۳ است.

۲۶۱ **۴**

می‌دانیم $f(x)=x^۲-۷x+۱۰=(x-۲)(x-۵)$ است. حالا ضابطهٔ $fog(x)$ را پیدا می‌کنیم و برای این‌که ببینیم نمودار آن در کدام بازه زیرمحور xها قرار دارد، خواهیم داشت:

$$f(g(x))=([x]-۲)([x]-۵)<۰\Rightarrow ۲<[x]<۵$$

چون حاصل $[x]$ مقداری صحیح است، پس $[x]=۳$ یا $[x]=۴$ است، یعنی: $۳\le x<۵$

بنابراین نمودار fog در بازهٔ $[۳,۵)$ زیر محور xها قرار دارد و $b-a=۵-۳=۲$ است.

۲۶۲ **۴**

ضابطهٔ gof را تشکیل می‌دهیم و آن را برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$gof(x)=۱\Rightarrow|۲|x-۳|-۷|=۱\Rightarrow\begin{cases}۱)\ ۲|x-۳|-۷=۱\\ ۲)\ ۲|x-۳|-۷=-۱\end{cases}$$

حالا هر یک از معادله‌های (۱) و (۲) را حل می‌کنیم:

$$۱)\ ۲|x-۳|=۸\Rightarrow|x-۳|=۴\Rightarrow\begin{cases}x-۳=۴\Rightarrow x=۷\\ x-۳=-۴\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

$$۲)\ ۲|x-۳|=۶\Rightarrow|x-۳|=۳\Rightarrow\begin{cases}x-۳=۳\Rightarrow x=۶\\ x-۳=-۳\Rightarrow x=۰\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادلهٔ $(gof)(x)=۱$ برابر است با:

$$۷+(-۱)+۶+۰=۱۲$$

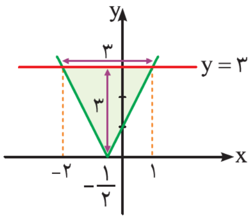
۲۶۳ **۳**

ابتدا ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$g(f(x))=\sqrt{۴(x^۲+x)+۱}=\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}$$

$$=\sqrt{(۲x+۱)^۲}=|۲x+۱|$$

حال نمودار تابع $(gof)(x)=|۲x+۱|$ و خط $y=۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:



$$|۲x+۱|=۳\Rightarrow x=-۲,x=۱\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times۳\times۳=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۲۶۴ **۲**

چون نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه با طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند پس $f(۶)=۰$ و $f(-\frac{۱}{۴})=۰$ است. حال برای مشخص کردن محل برخورد نمودار تابع fog با محور xها، باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$f(g(x))=۰\Rightarrow\begin{cases}g(x)=۶\Rightarrow x-\sqrt{x}=۶\Rightarrow x=۹\\ g(x)=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow x-\sqrt{x}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

۲۶۵ **۱**

چون g محور طول‌ها را در $x=۱$ و $x=۲\sqrt{۲}$ قطع می‌کند، پس:

$$g(۱)=۰\quad,\quad g(۲\sqrt{۲})=۰$$

بنابراین تابع $g(f(x))$ در نقاطی محور xها را قطع می‌کند که $f(x)=۱$ یا $f(x)=۲\sqrt{۲}$ باشد:

$$f(x)=۱\Rightarrow x\sqrt{x}=۱\Rightarrow x=۱$$

$$f(x)=۲\sqrt{۲}\Rightarrow x\sqrt{x}=۲\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۳=۸\Rightarrow x=۲$$

بنابراین اختلاف طول برابر است با: $۲-۱=۱$

۲۶۶ **۲**

ابتدا تابع $fog(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(g(x))=f(۲x+۱)=\begin{cases}۳(۲x+۱)-۱۲ & ;۲x+۱\ge۳\\ (۲x+۱)^۲-۱ & ;۲x+۱<۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(g(x))=\begin{cases}۶x-۹ & ;x\ge۱\\ ۴x^۲+۴x & ;x<۱\end{cases}$$

حالا برای حل معادلهٔ $fog(x)=۰$ هریک از ضابطه‌ها را برابر صفر می‌گذاریم:

$$x\ge۱:۶x-۹=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$x<۱:۴x^۲+۴x=۰\Rightarrow۴x(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=-۱\end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{۳}{۲}+۰+(-۱)=\frac{۱}{۲}$ است.

۲۶۷ **۲**

با توجه به نمودار تابع $g(x)$ در صورت سؤال $g(۲)=۰$ است، پس برای حل معادله داریم:

$$g(f(g(x+۲)))=۰ \Rightarrow f(g(x+۲))=۲$$

حالا باید $f(x)$ را برابر ۲ قرار دهیم:

$$f(x)=|\frac{۱}{۲}x-۱|=۲ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}x-۱=۲ \Rightarrow x=۶ \\ \frac{۱}{۲}x-۱=-۲ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

پس باید $g(x+۲)$ برابر ۲- یا ۶ باشد:

$g(x+۲)=۶ \rightarrow$ یک جواب

$g(x+۲)=-۲ \rightarrow$ یک جواب

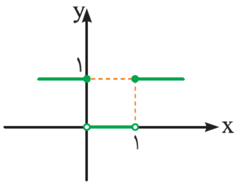
پس معادله دارای ۲ ریشه است.

۲۶۸ **۱**

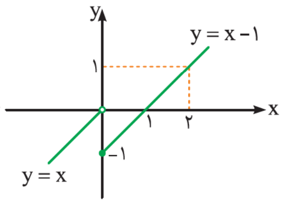
ضابطهٔ تابع‌های $y=fog$ و $y=x-f(x)$ را پیدا می‌کنیم و نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم:

$$f(g(x))=\begin{cases} ۱\,; & x^۲-x\geq ۰ \\ ۰\,; & x^۲-x<۰ \end{cases}$$

$$=\begin{cases} ۱\,; & x\leq ۰ \text{ یا } x\geq ۱ \\ ۰\,; & ۰<x<۱ \end{cases} \Rightarrow$$



$$y=x-f(x)=\begin{cases} x-۱\,; & x\geq ۰ \\ x & ; x<۰ \end{cases} \Rightarrow$$



دو نمودار فقط در یک نقطه به طول $x=۲$ مشترک هستند.

۲۶۹ **۴**

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x)-g(x)=-x+۵$ است. در ضمن با توجه به رابطهٔ صورت سؤال $۲g(x)=۳f(x)-۱۴$ است، پس:

$$-۲\times\begin{cases} f(x)-g(x)=-x+۵ \\ ۳f(x)-۲g(x)=۱۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲f(x)+۲g(x)=۲x-۱۰ \\ ۳f(x)-۲g(x)=۱۴ \end{cases}$$

از حل دو معادله و دو مجهول بالا نتیجه می‌گیریم $f(x)=۲x+۴$ و $g(x)=۳x-۱$ است. بنابراین:

$$f(g(x))=۲(۳x-۱)+۴=۶x+۲$$

از طرفی با توجه به نمودار صورت سؤال، $f(g(x))=-\frac{۲}{a}x+۲$ است، پس:

$$-\frac{۲}{a}=۶ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

۲۷۰ **۲**

چون $f(g(x))$ را داریم و $f(۳)$ را می‌خواهیم، پس $g(x)$ را برابر ۳ می‌گذاریم:

$$g(x)=۳ \Rightarrow ۲x-۱=۳ \Rightarrow x=۲$$

حالا در تابع $(fog)(x)$ به‌جای x عدد ۲ قرار می‌دهیم:

$$f(g(x))=\frac{x}{x-۳} \xrightarrow{x=۲} f(g(۲))=\frac{۲}{۲-۳} \Rightarrow f(۳)=-۲$$

هایلایت

یافتن ضابطهٔ تابع بیرونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطهٔ تابع مرکب fog و تابع g [تابع درونی] را می‌دهند و ضابطهٔ تابع f [تابع بیرونی] یعنی $f(x)$ را می‌خواهند. برای حل این مدل از سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ضابطهٔ تابع $g(x)$ را برابر t فرض کرده و مقدار x را برحسب t به‌دست می‌آوریم.

۲ در تابع مرکب داده شده، به جای x عبارت به‌دست آمده برحسب t را قرار می‌دهیم و تابع f برحسب t یعنی $f(t)$ را به‌دست می‌آوریم.

۳ در تابع $f(t)$ به‌جای همهٔ tها، x می‌گذاریم تا ضابطهٔ $f(x)$ به‌دست آید.

یه جوره دیگه! طراح می تونست یه سؤال جدید و البته سخت بپرسه. اینجوری:

«اگر $fog(x)=\frac{x}{x-۳}$ و $g(x)=۲x-۱$ باشد، بُرد تابع $f(x)$ کدام است؟»

جواب: $f(x)=\frac{x+۱}{x-۵} \Rightarrow$ بُرد $=\mathbb{R}-\{۱\}$

۲۷۱ **۳**

با در نظر گرفتن $g(x)=t$ داریم:

$$۲x+۱=t \Rightarrow x=\frac{t-۱}{۲} \Rightarrow f(g(x))=۸x^۲+۶x+۵$$

$$\Rightarrow f(t)=۸(\frac{t-۱}{۲})^۲+۶(\frac{t-۱}{۲})+۵=۲(t^۲-۲t+۱)+۳(t-۱)+۵$$

با ساده‌کردن عبارت به‌دست آمده، $f(t)=۲t^۲-t+۴$ می‌شود که با جای‌گذاری x به جای t، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=۲x^۲-x+۴$ خواهد شد.

روش سریع‌تر با جای‌گذاری عدد دلخواه $x=۰$ در تابع fog داریم:

$$f(g(۰))=۵ \xrightarrow{g(۰)=۱} f(۱)=۵ \Rightarrow \text{گزینهٔ } (۳)$$

یه جوره دیگه! طراح می تونست بپرسه:

«کم‌ترین مقدار تابع f کدام است؟» جواب: $\frac{۳۱}{۸}$

«معادلهٔ محور تقارن تابع f کدام است؟» جواب: $x=\frac{۱}{۴}$

«نمودار تابع f از کدام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟» جواب: سوم و چهارم

۲۷۲ **۴**

فرض می‌کنیم $۲x-۳=t$ باشد، بنابراین: $۲x-۳=t \Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲}$

$$\Rightarrow f(۲x-۳)=f(t)=۴(\frac{t+۳}{۲})^۲-۱۴(\frac{t+۳}{۲})+۱۳$$

حال عبارت به‌دست آمده را ساده می‌کنیم و در انتها به جای t مجدداً x قرار می‌دهیم:

$$f(t)=\cancel{۴}(\frac{t^{۲}+۶t+۹}{\cancel{۴}})-۷t-۲۱+۱۳=t^{۲}-t+۱$$

$$\Rightarrow f(x)=x^{۲}-x+۱$$

روش سریع‌تر با قرار دادن $x=۰$ در ضابطهٔ $f(۲x-۳)$ داریم:

$$f(۰-۳)=۴(۰)^{۲}-۱۴(۰)+۱۳\Rightarrow f(-۳)=۱۳$$

تنها گزینه‌ای که با قرار دادن $x=-۳$ برابر ۱۳ می‌شود، گزینهٔ (۴) است.

۲۷۳ **۴**

با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x-۳=t\Rightarrow x=t+۳\Rightarrow f(t)=(t+۳)^{۲}-۴(t+۳)+۵$$

$$\Rightarrow f(t)=t^{۲}+۶t+۹-۴t-۱۲+۵\Rightarrow f(x)=x^{۲}+۲x+۲$$

$$\Rightarrow f(۱-x)=\underbrace{(۱-x)^{۲}+۲(۱-x)+۲}_{۱-۲x+x^{۲}+۲-۲x+۲}\Rightarrow f(۱-x)=x^{۲}-۴x+۵$$

روش سریع‌تر می‌توانیم در تابع $f(x-۳)$ به جای x عبارت $۴-x$ قرار دهیم.

روش سریع‌تر برای عددگذاری در این سؤال ابتدا باید عدد مناسب را به‌دست آوریم:

$$x-۳=۱-x\Rightarrow x=۲$$

$$\xrightarrow[f(x-۳)]{\text{جای‌گذاری در}}f(۲-۳)=۲^{۲}-۴\times۲+۵\Rightarrow f(-۱)=۱$$

با قرار دادن $x=۲$ در ضابطهٔ $f(۱-x)$، به $f(-۱)$ می‌رسیم و می‌دانیم $f(-۱)=۱$ است، پس گزینه‌ای نشان‌دهندهٔ ضابطهٔ $f(۱-x)$ است که با قرار دادن $x=۲$ در آن، حاصل برابر ۱ شود. در میان گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۴) این ویژگی را دارد.

۲۷۴ **۴**

ابتدا تابع $fog(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$fog(x)=(۲x+۱)g(x)+۶x=(۲x+۱)(۲x-۳)+۶x$$

$$=۴x^{۲}+۲x-۳$$

حالا با در نظر گرفتن $g(x)=t$ داریم:

$$۲x-۳=t\Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲}\Rightarrow f(g(x))=۴x^{۲}+۲x-۳$$

$$\Rightarrow f(t)=۴(\frac{t+۳}{۲})^{۲}+۲(\frac{t+۳}{۲})-۳=(t+۳)^{۲}+(t+۳)-۳$$

$$\Rightarrow f(t)=t^{۲}+۷t+۹$$

با جای‌گذاری x به جای t، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=x^{۲}+۷x+۹$ می‌شود و معادلهٔ محور تقارن آن برابر است با:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۷}{۲}=-۳/۵$$

۲۷۵ **۳**

ابتدا ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم. فرض کنیم $f(x)=t$ باشد:

$$۲x+۳=t\Rightarrow x=\frac{t-۳}{۲}\Rightarrow g(f(x))=۸x^{۲}+۲۲x+۲۰$$

$$\Rightarrow g(t)=۸(\frac{t-۳}{۲})^{۲}+۲۲(\frac{t-۳}{۲})+۲۰=۲(t-۳)^{۲}+۱۱(t-۳)+۲۰$$

با ساده کردن عبارت به‌دست آمده $g(t)=۲t^{۲}-t+۵$ خواهد شد، که با جای‌گذاری x به جای t، ضابطهٔ g به‌صورت $g(x)=۲x^{۲}-x+۵$ خواهد شد. پس:

$$f(g(x))=۲(۲x^{۲}-x+۵)+۳=۴x^{۲}-۲x+۱۳$$

۲۷۶ **۴**

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$۱)\ g(f(x))=۳f(x)+۴\Rightarrow g(x)=۳x+۴$$

$$۲)\ f(g(x))=۲g^{۲}(x)+g(x)+۱\Rightarrow f(x)=۲x^{۲}+x+۱$$

حالا تابع $(f-g)(x)$ را پیدا می‌کنیم و داریم:

$$y=f(x)-g(x)=(۲x^{۲}+x+۱)-(۳x+۴)=۲x^{۲}-۲x-۳$$

در این سهمی طول رأس برابر $x_S=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲}$ است و کم‌ترین مقدار آن برابر است با:

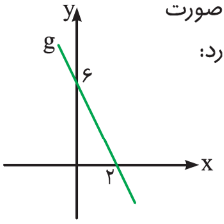
$$y_{min}=۲(\frac{۱}{۲})^{۲}-۲(\frac{۱}{۲})-۳=\frac{۱}{۲}-۱-۳=-۳/۵$$

۲۷۷ **۳**

ابتدا ضابطهٔ تابع gof را مرتب و دسته‌بندی می‌کنیم:

$$g(f(x))=۶-۳(۲x^{۲}+x)=۶-۳f(x)$$

پس $g(x)=۶-۳x$ است و نمودارش به‌صورت مقابل است که فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد:



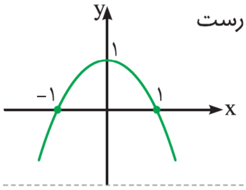
۲۷۸ **۱**

با توجه به نمودار صورت سؤال، سهمی fog محور xها را در دو نقطهٔ $x=۰$ و $x=۲$ قطع کرده و نقطهٔ رأس آن $A(۱,۱)$ است، پس $(fog)(x)=-x^{۲}+۲x$ است. در ضمن تابع خطی g محور xها را در نقطهٔ ۱ قطع می‌کند و عرض از مبدأ آن نیز ۱ است، پس $g(x)=-x+۱$ است. حالا برای پیدا کردن تابع f داریم:

$$g(x)=-x+۱=t\Rightarrow x=۱-t\Rightarrow f(g(x))=-x^{۲}+۲x$$

$$\Rightarrow f(t)=-(۱-t)^{۲}+۲(۱-t)=-t^{۲}+۱\Rightarrow f(x)=-x^{۲}+۱$$

با توجه به نمودار تابع f، فقط عبارت (پ) درست است.



۲۷۹ **۲**

واضح است که $(x^{۲}-x)^{۲}=x^{۴}-۲x^{۳}+x^{۲}$ است، پس:

$$f(x^{۲}-x)=(x^{۴}-۲x^{۳}+x^{۲})+۵=(x^{۲}-x)^{۲}+۵$$

حالا به جای $x^{۲}-x$ می‌توانیم x بگذاریم، یعنی $f(x)=x^{۲}+۵$ است.

۲۸۰ **۴**

ابتدا ضابطهٔ $f(\frac{x^۲-۲}{x})=x^۲+x-۴-\frac{۲}{x}+\frac{۴}{x^۲}$ را مرتب و دسته‌بندی می‌کنیم:

$$f(x-\frac{۲}{x})=(x^۲+\frac{۴}{x^۲}-۴)+(x-\frac{۲}{x})=(x-\frac{۲}{x})^۲+(x-\frac{۲}{x})$$

حالا به جای $x-\frac{۲}{x}$ می‌گذاریم x، ببینید: $f(x)=x^۲+x$

یه جوره دیگه! نمونه‌های معروف‌تر و البته ساده‌تر این سوال رو اینجور مطرح می‌کنن:

«اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ باشد، نمودار تابع $y=f(x)$ در کدام بازه زیر محور xهااست؟»

۲۸۱ **۲**

در ضابطهٔ $fog(x)$ به جای x عدد ۱ می‌گذاریم:

$$f(g(۱))=\frac{۵(۱)-۲}{۳(۱)+۱}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow f(-۱۱)=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{-۱۱+a}{-۱۱-۱}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow -۴۴+۴a=-۳۶\Rightarrow a=۲$$

هایلایت

یافتن ضابطهٔ تابع درونی با معلوم بودن تابع مرکب

در بعضی از سؤالات، ضابطهٔ تابع مرکب fog و تابع f **(تابع بیرونی)** داده شده و ضابطهٔ تابع g **(تابع درونی)** یعنی $g(x)$ را می‌خواهند.

برای حل این مدل سؤالات به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ در تابع $f(x)$ به جای همهٔ xها، $g(x)$ را قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ به‌دست آید.

۲ تابع $f(g(x))$ به‌دست‌آمده را مساوی با تابع مرکب fog که در مسئله داده‌شده، قرار می‌دهیم و معادلهٔ حاصل را برحسب $g(x)$ حل می‌کنیم.

۲۸۲ **۲**

با توجه به ماشین داده شده، $g(f(x))=۲x$ است. حال برای به‌دست آوردن $f(۵)$ یک بار در تابع $(gof)(x)$ به جای x عدد ۵ می‌گذاریم و یک بار هم در تابع $g(x)$ به جای xها، $f(۵)$ می‌گذاریم:

$$\left.\begin{matrix}g(f(۵))=۲\times۵=۱۰\\g(f(۵))=۳f(۵)+۴\end{matrix}\right.\Rightarrow ۳f(۵)+۴=۱۰\Rightarrow f(۵)=۲$$

۲۸۳ **۳**

ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و fog را با کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$f(x)=۴(x^۲+۴x+۴)+۲=۴(x+۲)^۲+۲$$

$$fog(x)=x^۲+۲x+۱+۲=(x+۱)^۲+۲$$

حالا در تابع $f(x)$ به جای xها، تابع $g(x)$ قرار می‌دهیم و آن را با ضابطهٔ fog در صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(g(x))=۴(g(x)+۲)^۲+۲\\f(g(x))=(x+۱)^۲+۲\end{cases}\Rightarrow ۴(g(x)+۲)^۲=(x+۱)^۲$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }}\begin{cases}۲(g(x)+۲)=x+۱\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}\ \times\\۲(g(x)+۲)=-x-۱\Rightarrow g(x)=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۲}\ \checkmark\end{cases}$$

۲۸۴ **۲**

بهتر است ابتدا ضابطهٔ دو تابع f و fog را ساده‌تر کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{x+۱}=\frac{۲x+۲-۱}{x+۱}=۲-\frac{۱}{x+۱}$$

$$fog(x)=\frac{۲x}{x+۱}=\frac{۲x+۲-۲}{x+۱}=۲-\frac{۲}{x+۱}$$

حالا در تابع $f(x)$ به جای xها، تابع $g(x)$ قرار می‌دهیم و آن را با ضابطهٔ fog داده شده در صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(g(x))=۲-\frac{۱}{g(x)+۱}\\f(g(x))=۲-\frac{۲}{x+۱}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{g(x)+۱}=\frac{۲}{x+۱}$$

$$\Rightarrow g(x)+۱=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}$$

۲۸۵ **۱**

ابتدا با کمک اتحاد مربع کامل، ضابطهٔ توابع f و fog را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲-x+\frac{۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=(x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}$$

$$f(g(x))=x^۲+x+\frac{۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=(x+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}$$

حال در تابع f، به جای همهٔ xها، $g(x)$ می‌گذاریم:

$$f(g(x))=(g(x)-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}$$

از طرفی در صورت سؤال $f(g(x))=(x+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}$ است، پس:

$$(g(x)-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}=(x+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}\Rightarrow(g(x)-\frac{۱}{۲})^۲=(x+\frac{۱}{۲})^۲$$

$$\begin{cases}g(x)-\frac{۱}{۲}=x+\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=x+۱\\g(x)-\frac{۱}{۲}=-x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(f+g)(x)=(x^۲-x-۲)+(x+۱)=x^۲-۱\\(f+g)(x)=(x^۲-x-۲)+(-x)=x^۲-۲x-۲\end{cases}$$

۲۸۶ **۲**

چون ترکیب تابع $f(x)$ با خودش، تابعی خطی است، پس $f(x)$ تابعی خطی بوده و داریم:

$$f(x)=ax+b\Rightarrow f(f(x))=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b$$

با توجه به صورت سؤال $f(f(x))=۴x-۳$ است، پس:

$$a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲\xrightarrow[a<۰]{f\ \text{نزولی}}a=-۲$$

$$ab+b=-۳\Rightarrow -۲b+b=-۳\Rightarrow -b=-۳\Rightarrow b=۳$$

پس $f(x)=-۲x+۳$ است. حالا با توجه به این‌که $fog(x)=x^۲-x+۳$ است، سراغ پیدا کردن تابع $g(x)$ می‌رویم:

$$\begin{cases}f(g(x))=x^۲-x+۳\\f(g(x))=-۲g(x)+۳\end{cases}\Rightarrow -۲g(x)+۳=x^۲-x+۳$$

$$\Rightarrow -۲g(x)=x^۲-x\Rightarrow g(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x$$

طول رأس این سهمی برابر $x=-\frac{\frac{۱}{۲}}{۲(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۱}{۲}$ و بیشترین مقدار آن برابر است با:

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}$$

۲۸۷ **۴**

نمودار تابع fog محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۴ و صفر قطع کرده است و چون نقطهٔ رأس آن $(۲,-۴)$ است، پس $fog(x)=x^{۲}-۴x$ می‌باشد. در ضمن $f(x)=۲x+۸$ است.

حالا ضابطهٔ تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(g(x))=۲g(x)+۸ \\ f(g(x))=x^{۲}-۴x \end{cases} \Rightarrow ۲g(x)+۸=x^{۲}-۴x$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۲}(x^{۲}-۴x-۸)\xrightarrow{\text{محور تقارن}}x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲(۱)}=۲$$

۲۸۸ **۱**

ابتدا دامنهٔ توابع g و f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۱}:D_f=\mathbb{R}-\{۱\},g(x)=\frac{۳x-۴}{x+۲};D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\neq -۲\,|\,\underbrace{\frac{۳x-۴}{x+۲}\neq ۱}_{۳x-۴\neq x+۲}\}$$

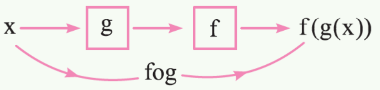
$$=\{x\neq -۲\,|\,x\neq ۳\}=\mathbb{R}-\{-۲,۳\}\Rightarrow a+b=-۲+۳=۱$$

> یه جوره دیگه! طراح می تونست اینجوری بپرسه:
>
> «اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۱}$ و دامنهٔ تابع fof برابر $\mathbb{R}-\{a,b\}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟» جواب: $a+b=۰+۱=۱$

هایلایت

یافتن دامنهٔ تابع مرکب

با توجه به نحوهٔ تشکیل تابع fog مشخص است که $g(x)$ به جای مقادیر ورودی تابع f قرار می‌گیرد، پس دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow D_{f(g(x))}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$$

۲۸۹ **۲**

دامنهٔ تابع f برابر $x\leq ۵$ و دامنهٔ تابع g برابر $\mathbb{R}$ است. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع fog باید دو شرط زیر را بررسی کنیم:

$$۱)\ x\in D_g\Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

$$۲)\ g(x)\in D_f\Rightarrow x^{۲}+۴x\leq ۵\Rightarrow x^{۲}+۴x-۵\leq ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x+۵)\leq ۰\Rightarrow -۵\leq x\leq ۱$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم دامنهٔ تابع fog به‌صورت بازهٔ $[-۵,۱]$ است، پس: $a\times b=-۵\times ۱=-۵$

۲۹۰ **۲**

ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\Rightarrow x\neq \pm ۱$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^{۲}}\Rightarrow x(۱-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\neq \pm ۱\,|\,۰\leq \frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\leq ۱\}$$

حال باید جواب نامعادلهٔ $۰\leq \frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\leq ۱$ را مشخص کنیم:

$$۱)\ \frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\geq ۰\xrightarrow{۱+x^{۲}>۰}۱-x^{۲}>۰\Rightarrow x^{۲}<۱\Rightarrow -۱<x<۱$$

$$۲)\ \frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\leq ۱\Rightarrow \frac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}-۱\leq ۰\Rightarrow \frac{۱+x^{۲}-۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}\leq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲x^{۲}}{۱-x^{۲}}\leq ۰\xrightarrow{۲x^{۲}\geq ۰}۱-x^{۲}<۰\Rightarrow ۱<x^{۲}$$

$\Rightarrow x>۱$ یا $x<-۱$ یا $x=۰$

با توجه به این‌که اشتراک جواب‌های به‌دست آمده از نامعادله برابر $x=۰$ است، پس: $D_{gof}=\{x\neq \pm ۱\,|\,x=۰\}=\{۰\}$

> **روش سریع‌تر** $x=\frac{۱}{۲}$ را در تابع gof قرار می‌دهیم:
>
> $$g(f(\tfrac{۱}{۲}))=g(\tfrac{۵}{۳})=\sqrt{\tfrac{۵}{۳}-(\tfrac{۵}{۳})^{۲}}=\sqrt{\tfrac{۵}{۳}(۱-\tfrac{۵}{۳})}=\sqrt{-\tfrac{۱۰}{۹}}$$
>
> پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) حذف می‌شوند.

۲۹۱ **۱**

ابتدا دامنهٔ توابع f و g را مشخص می‌کنیم. از آن‌جایی که عبارت $x+|x|$ به ازای $x>۰$ برابر $۲x$ و به ازای $x\leq ۰$ برابر صفر است، پس $D_f=\mathbb{R}$ است. در تابع کسری g نیز مخرج نباید صفر شود، پس $D_g=\mathbb{R}-\{۰,۴\}$ است، بنابراین:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\sqrt{x+|x|}\neq ۰,\sqrt{x+|x|}\neq ۴\}$$

تابع f به ازای $x\leq ۰$ برابر صفر و به ازای $x=۸$ برابر ۴ می‌شود، پس:

$$D_{gof}=(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$$

> **روش سریع‌تر** چون $x=-۱$ و $x=۸$ در تابع gof صدق نمی‌کنند؛ پس گزینهٔ (۱) درست است.

۲۹۲ **۴**

ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۳-x}\Rightarrow ۳-x\geq ۰\Rightarrow ۳\geq x$$

$g(x)=\log_{۲}(x^{۲}+۲x)\Rightarrow x(x+۲)>۰\Rightarrow x<-۲$ یا $x>۰$

$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x<-۲$ یا $x>۰\,|\,\log_{۲}(x^{۲}+۲x)\leq ۳\}$

بنابراین باید جواب نامعادلهٔ $\log_{۲}(x^{۲}+۲x)\leq ۳$ را مشخص کنیم:

$$\log_{۲}(x^{۲}+۲x)\leq ۳\Rightarrow x^{۲}+۲x\leq ۲^{۳}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۲x-۸\leq ۰\Rightarrow (x-۲)(x+۴)\leq ۰\Rightarrow -۴\leq x\leq ۲$$

بنابراین دامنهٔ fog برابر می‌شود با:

$$D_{fog} = \{x < -۲ \text{ یا } x > ۰ \,|\, -۴ \le x \le ۲\} = [-۴,-۲) \cup (۰,۲]$$

روش سریع‌تر با قرار دادن $x = -۲$ در تابع fog عبارت جلوی لگاریتم صفر می‌شود، پس $x = -۲$ نباید در دامنهٔ تابع باشد. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) حذف می‌شوند.

۲۹۳ **۱**

ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^۲+x+۲}} \Rightarrow -x^۲+x+۲>۰ \Rightarrow \underbrace{x^۲-x-۲}_{(x-۲)(x+۱)}<۰$$

$$\Rightarrow -۱ < x < ۲$$

$$g(x) = (\frac{۱}{۴})^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -۱ < (\frac{۱}{۴})^x < ۲\}$$

می‌دانیم همواره $-۱ < (\frac{۱}{۴})^x$ است. پس کافیست نامعادلهٔ $(\frac{۱}{۴})^x < ۲$ را حل کنیم:

$$(\frac{۱}{۴})^x < ۲ \Rightarrow (۲^{-۲})^x < ۲ \Rightarrow ۲^{-۲x} < ۲^۱ \Rightarrow -۲x < ۱ \Rightarrow x > -\frac{۱}{۲}$$

پس دامنهٔ fog برابر است با:

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -\frac{۱}{۲}\} = (-\frac{۱}{۲},+\infty)$$

روش سریع‌تر $x = ۰$ در تابع fog صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شود. $x = ۱$ نیز در تابع fog صدق می‌کند، پس جواب گزینهٔ (۱) است.

۲۹۴ **۳**

ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x} : ۱-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ \le ۱ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱$$

$$\xrightarrow{x \neq ۰} D_f = [-۱,۰) \cup (۰,۱]$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\}$$

$$= \{-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲} \,|\, -۱ \le \tan x \le ۱, \tan x \neq ۰\}$$

با توجه به این‌که $-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$ است، از $-۱ \le \tan x \le ۱$ و $\tan x \neq ۰$ نتیجه می‌گیریم $-\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۴}, x \neq ۰$ است، بنابراین دامنهٔ تابع fog به‌صورت $[-\frac{\pi}{۴},۰) \cup (۰,\frac{\pi}{۴}]$ است.

۲۹۵ **۳**

در مرحله اول لازم است دامنه توابع f و g را با توجه به $-۱ \le x \le ۳$ به‌دست آوریم.

$$f(۲x+۱) = ۳x-۲ \Rightarrow -۱ \le x \le ۳ \xrightarrow{\times ۲} -۲ \le ۲x \le ۶$$

$$\xrightarrow{+۱} -۱ \le ۲x+۱ \le ۷ \Rightarrow D_f = [-۱,۷]$$

$$g(x) = ۴x-۳ \Rightarrow -۱ \le x \le ۳ \Rightarrow D_g = [-۱,۳]$$

ضابطه $f(x)$ را هم پیدا کنیم وارد مرحله بعدی می‌شویم:

$$f(۲x+۱) = ۳x-۲ \xRightarrow[x=\frac{t-۱}{۲}]{۲x+۱=t} f(t) = \frac{۳t-۳}{۲} - ۲ = \frac{۳t-۳-۴}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۳x-۷}{۲}$$

سپس با توجه به تعریف، دامنه تابع fog را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\} = \{\underbrace{x \in [-۱,۳]}_{I} \,|\, \underbrace{-۱ \le ۴x-۳ \le ۷}_{II}\}$$

$$(II)\ -۱ \le ۴x-۳ \le ۷ \xrightarrow{+۳} ۲ \le ۴x \le ۱۰ \xrightarrow{\div ۴} \frac{۱}{۲} \le x \le \frac{۵}{۲}$$

$$(I) \cap (II) = [-۱,۳] \cap [\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}] \Rightarrow D_{fog} = [\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}]$$

۲۹۶ **۲**

با توجه به شکل صورت سؤال، f تابعی خطی با ضابطهٔ $f(x) = x+۲$ و دامنهٔ $[-۲,۱]$ است، پس:

$$D_{fof} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_f\} = \{-۲ \le x \le ۱ \,|\, -۲ \le f(x) \le ۱\}$$

حال نامعادلهٔ $-۲ \le f(x) \le ۱$ را حل می‌کنیم:

$$-۲ \le x+۲ \le ۱ \Rightarrow -۴ \le x \le -۱$$

از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $D_{fof} = [-۲,-۱]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست همین سؤالو اینجوری بپرسه: «تابع $f(x) = x+۲$ با دامنهٔ $[-۲,۱]$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع $y=(fof)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟»

۲۹۷ **۱**

با توجه به نمودار صورت سؤال $g(x) = -\frac{۱}{۲}x+۲$ و دامنهٔ آن برابر بازهٔ $[-۲,۴]$ است. حالا دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x+۱}{\sqrt{-x^۲+۶x-۸}} : \underbrace{-x^۲+۶x-۸}_{-(x-۲)(x-۴)} > ۰ \Rightarrow ۲ < x < ۴$$

حالا برای پیدا کردن دامنهٔ تابع fog باید هر دو شرط زیر را بررسی کنیم:

$$۱)\ x \in D_g \Rightarrow x \in [-۲,۴]$$

$$۲)\ g(x) \in D_f \Rightarrow ۲ < -\frac{۱}{۲}x+۲ < ۴ \Rightarrow ۰ < -\frac{۱}{۲}x < ۲$$

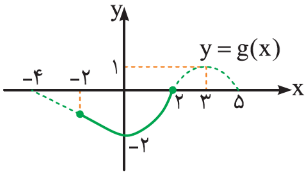
$$\Rightarrow -۴ < x < ۰$$

از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم $-۲ \le x < ۰$ است که شامل دو عدد صحیح ۲- و ۱- است.

۲۹۸ **۳**

برای پیدا کردن بُرد gof، بُرد تابع f یعنی بازهٔ $[-۲,۲]$ را به عنوان دامنهٔ تابع g در نظر بگیریم:

با توجه به نمودار تابع g در بازهٔ $[-۲,۲]$، بُرد تابع g در این بازه برابر $[-۲,۰]$ است که شامل ۳ عدد صحیح ۰ و ۱- و ۲- است.



هایلایت

یافتن بُرد تابع مرکب

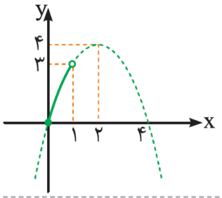
برای به‌دست آوردن بُرد تابع مرکب fog به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ ابتدا بُرد تابع درونی یعنی g را به‌دست می‌آوریم.

۲ بُرد تابع درونی را به عنوان دامنهٔ تابع بیرونی یعنی f در نظر می‌گیریم.

۳ سپس بُرد تابع بیرونی را با دامنهٔ جدید به‌دست می‌آوریم.

۲۹۹ **۲**



می‌دانیم $۱ > [۲x] - ۲x \ge ۰$ است. بنابراین باید برد $g(x) = -x^۲ + ۴x$ را به ازای ورودی $[۰,۱)$ به‌دست آوریم:

$$\Rightarrow \text{gof برد تابع} = [۰,۳)$$

۳۰۰ **۳**

ابتدا ضابطهٔ g را ساده می‌کنیم و سپس تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{۱-۲x}{x+۱} = \frac{\overbrace{-۲x-۲}^{-۲(x+۱)}+۳}{x+۱} = -۲ + \frac{۳}{x+۱}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = -۲ + \frac{۳}{[x]-x+۱}$$

از طرفی می‌دانیم $۰ \le x-[x] < ۱$ پس $-۱ < [x]-x \le ۰$ بنابراین:

$$۰ < [x]-x+۱ \le ۱ \Rightarrow \frac{۳}{[x]-x+۱} \ge ۳ \Rightarrow -۲ + \frac{۳}{[x]-x+۱} \ge ۱$$

پس برد تابع gof به‌صورت $[۱,+\infty)$ است.

روش سریع‌تر چون $-۱ < [x]-x \le ۰$ است، می‌توانستیم نمودار تابع $g(x) = \frac{۱-۲x}{x+۱}$ را رسم کنیم و برد آن را در بازهٔ $(-۱,۰]$ به‌دست آوریم.

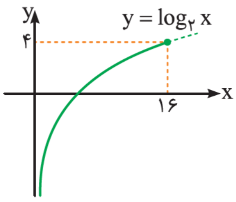
۳۰۱ **۳**

دامنهٔ تابع $f(x) = \log_۲^x$ برابر $x > ۰$ و دامنهٔ تابع $g(x) = ۸x - x^۲$ برابر $\mathbb{R}$ است. حالا دامنهٔ تابع fog را پیدا می‌کنیم:

$۱)\ x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$۲)\ g(x) \in D_f \Rightarrow ۸x - x^۲ > ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۸$

پس دامنهٔ تابع fog برابر بازهٔ $A = (۰,۸)$ است. بُرد تابع $g(x)$ در بازهٔ $(۰,۸)$ برابر $(۰,۱۶)$ است. حالا برای پیدا کردن محدودهٔ بُرد تابع fog، می‌توانیم نمودار تابع f را در بازهٔ $(۰,۱۶]$ رسم کنیم:



$$\Rightarrow \text{fog بُرد تابع} = B = (-\infty,۴]$$

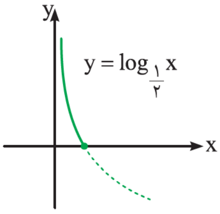
پس $A \cap B = (۰,۴]$ است که شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

۳۰۲ **۱**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}(۱-\cos^۲ x) = \log_{\frac{۱}{۲}}(\sin^۲ x)$$

می‌دانیم $-۱ \le \sin x \le ۱$ است، پس $۰ \le \sin^۲ x \le ۱$ است. در ضمن چون $\sin^۲ x$ جلوی لگاریتم قرار دارد، پس $۰ < \sin^۲ x \le ۱$ است. حالا به نمودار تابع $y = \log_{\frac{۱}{۲}} x$ توجه کنید:



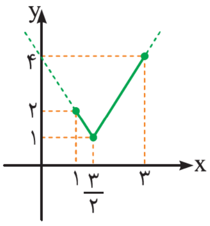
چون در تابع $f(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}(\sin^۲ x)$ عبارت جلوی لگاریتم در بازهٔ $(۰,۱]$ قرار دارد، پس بُرد تابع f در این بازه به‌صورت بازهٔ $[۰,+\infty)$ است.

۳۰۳ **۳**

می‌دانیم $۰ \le \sin^۲ x \le ۱$ است، پس:

$$۰ \le ۲\sin^۲ x \le ۲ \Rightarrow ۱ \le ۱+۲\sin^۲ x \le ۳$$

حالا باید بُرد تابع f را به ازای ورودی $[۱,۳]$ پیدا کنیم:



$$\Rightarrow R_{fog} = [۱,۴]$$

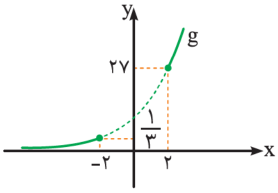
دام تستی اگر ابتدا و انتهای بازهٔ $[۱,۳]$ رو در تابع f قرار بدی، برد تابع fog رو بازهٔ $[۲,۴]$ به دست میاری که غلطه!

۳۰۴ **۴**

می‌دانیم $\log_x ۲ = \frac{۱}{\log_۲ x}$ است. پس:

$$f(x) = \log_۲ x + \frac{۱}{\log_۲ x}$$

در ضمن می‌دانیم مجموع هر عدد حقیقی با معکوسش در بازهٔ $[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,-۲]$ است. حالا باید بُرد تابع g را به ازای ورودی $(-\infty,-۲] \cup [۲,+\infty)$ پیدا کنیم:



$$\Rightarrow R_{gof} = (۰,\frac{۱}{۳}] \cup [۲۷,+\infty)$$

هایلایت

۱ اگر $x > ۰$ باشد: $x + \frac{۱}{x} \ge ۲$

۲ اگر $x < ۰$ باشد: $x + \frac{۱}{x} \le -۲$

۳۰۵ **۳**

به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

$$\text{الف)}\ \begin{cases} -۱ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f} \times \\ ۰ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۳ \\ ۳ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} -۱ \end{cases} \Rightarrow fog = \{(۰,۳),(۳,-۱)\}$$

ب) $\begin{cases} ۱ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{f} ۰ \\ ۲ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{f} \times \\ ۳ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۱ \\ ۰ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{f} ۳ \end{cases} \Rightarrow fof=\{(۰,۳),(۱,۰),(۳,۱)\}$

پ) $\begin{cases} ۱ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} ۲ \\ ۲ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{g} ۴ \\ ۳ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{g} ۱ \\ ۰ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{g} \times \end{cases} \Rightarrow gof=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۱)\}$

تابع fog نزولی و توابع fof و gof غیریکنوا هستند.

۳۰۶ **۱**

$$f(x+۲)-f(۳-۲x)>۰ \quad \Rightarrow f(x+۲)>f(۳-۲x)$$

$$\longrightarrow x+۲>۳-۲x \quad \Rightarrow ۳x>۱ \quad \Rightarrow x>\frac{۱}{۳} \ (۱)$$

از طرفی دامنهٔ تابع f برابر بازهٔ $(-۶,۴]$ است:

$$-۶<x+۲\le ۴ \quad \Rightarrow \quad -۸<x\le ۲ \ (۲)$$

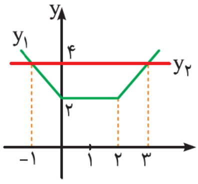
$$-۶<۳-۲x\le ۴ \quad \Rightarrow \quad -۹<-۲x\le ۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{-۱}{۲}\le x<\frac{۹}{۲} \ (۳)$$

از اشتراک ۳ بازهٔ بالا، عدد x برابر $(\frac{۱}{۳},۲]$ به دست می‌آید که این بازه تنها شامل دو عدد صحیح است.

۳۰۷ **۲**

$$f(۴-|x|)-f(|x-۲|)>۰ \quad \Rightarrow f(۴-|x|)>f(|x-۲|)$$

$$\longrightarrow ۴-|x|>|x-۲| \quad \Rightarrow \underbrace{|x|+|x-۲|}_{y_۱}<\underbrace{۴}_{y_۲}$$



با رسم $y_۱$ و $y_۲$ در یک دستگاه مختصات، مجموعه‌جواب نامعادله بالا را به‌دست می‌آوریم: مطابق شکل، مجموعه جواب نامعادله برابر $(-۱,۳)$ است که این بازه شامل ۲ عدد طبیعی است.

۳۰۸ **۱**

$$۱)\ f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲)\Rightarrow m^۲-m-۵>-۳+۲m-m^۲$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-۳m-۲>۰\Rightarrow(۲m+۱)(m-۲)>۰\Rightarrow m<-\frac{۱}{۲} \text{ یا } m>۲$$

در ضمن چون دامنهٔ تابع مجموعه‌ای از مقادیر منفی است، پس:

$$۲)\ m^۲-m-۵<۰\Rightarrow \frac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲}<m<\frac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲}$$

۳) $-۳+۲m-m^۲<۰ \xrightarrow{a<۰,\Delta<۰}$ همواره برقرار است.

از اشتراک (۱) و (۲) و (۳) مجموعه جواب نامعادله برابر $(\frac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲},-\frac{۱}{۲})\cup(۲,\frac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲})$ است که فقط یک مقدار صحیح یعنی $m=-۱$ در این بازه قرار دارد.

۳۰۹ **۴**

ابتدا دامنه تابع y را به دست می‌آوریم:

$$f(x+۱)-f(۲-x)>۰ \quad \Rightarrow f(x+۱)>f(۲-x)$$

$$\longrightarrow x+۱<۲-x\Rightarrow ۲x<۱\Rightarrow x<\frac{۱}{۲} \ (۱)$$

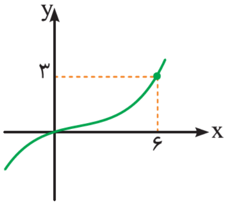
از طرفی دامنهٔ تابع f برابر $[-۴,۵]$ است:

$$-۴\le x+۱\le ۵\Rightarrow -۵\le x\le ۴ \ \ (۲)$$

$$-۴\le ۲-x\le ۵\Rightarrow -۶\le -x\le ۳\Rightarrow -۳\le x\le ۶ \ \ (۳)$$

از اشتراک ۳ بازهٔ بالا، محدودهٔ x برابر $[-۳,۰/۵)$ به دست می‌آید.

۳۱۰ **۴**



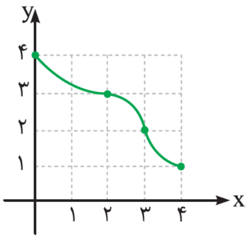
از آن‌جایی که f تابعی اکیداً صعودی است و از نقطهٔ $A(۶,۳)$ می‌گذرد، نمودار آن را به‌صورت مقابل فرض می‌کنیم. با توجه به نمودار، به ازای $x\le ۶$ رابطهٔ $f(x)\le ۳$ برقرار است، پس:

$$f(g(x))\le ۳\Rightarrow g(x)\le ۶\Rightarrow x^۲-x\le ۶\Rightarrow x^۲-x-۶\le ۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)(x+۲)\le ۰\Rightarrow -۲\le x\le ۳$$

> یه جوره دیگه! طراح توی همین سوال، میتونست اینجوری بپرسه: «دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۳-(fog)(x)}$ کدام است؟»

۳۱۱ **۲**



با توجه به این‌که f تابعی اکیداً نزولی، و $D_f=[۰,۴]$ و $R_f=[۱,۴]$ و $f(۲)=۳$ و $f(۳)=۲$ است، نمودار f را به‌صورت مقابل فرض می‌کنیم و با توجه به مقادیر تابع داریم:

$$۱\le f(f(x))\le ۲\Rightarrow ۳\le f(x)\le ۴\Rightarrow ۰\le x\le ۲$$

پس مجموعه نامعادله شامل سه عدد صحیح $x=۰,۱,۲$ است.

۳۱۲ **۲**

تابع f از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=x$ و $y=\sqrt{x}-۲$ به‌دست آمده، پس اکیداً صعودی است:

$$f(f(x))\le f(\sqrt{x})\Rightarrow f(x)\le\sqrt{x}\Rightarrow x+\sqrt{x}-۲\le\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x-۲\le ۰\Rightarrow x\le ۲$$

از طرفی به دلیل وجود $\sqrt{x}$، باید $x\ge ۰$ باشد.

حالا دامنهٔ تابع $fof(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)\in D_f\Rightarrow x+\sqrt{x}-۲\ge ۰\Rightarrow(\sqrt{x}-۱)(\underbrace{\sqrt{x}+۲}_{\text{همواره مثبت}})\ge ۰$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}-۱\ge ۰\Rightarrow\sqrt{x}\ge ۱\Rightarrow x\ge ۱$$

از اشتراک مقادیر به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم $۱\le x\le ۲$ است که شامل اعداد صحیح $x=۱$ و $x=۲$ می‌باشد.

۳۱۳ **۳**

برای اینکه رابطهٔ f نمایش دهنده یک تابع باشد، باید در زوج مرتب‌های $(۱,a^۲+۳a)$ و $(۱,۴)$ مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند.

$$a^۲+۳a=۴\Rightarrow a^۲+۳a-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\a=-۴\end{cases}$$

اکنون شرط یک‌به‌یک بودن رابطهٔ f را بررسی می‌کنیم:

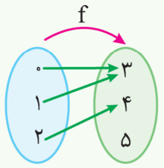
$$a=۱\rightarrow f=\{(۱,۴),(۴,۵),(b,۵)\}\rightarrow b=۴\Rightarrow b+a=۵$$

$$a=-۴\rightarrow f=\{(۱,۴),(۴,۵),(b,۵)\}\rightarrow b=۴\Rightarrow b+a=۰$$

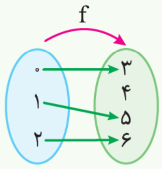
هایلایت

تابع یک به یک

اگر در یک رابطهٔ تشکیل‌شده از زوج‌مرتب‌ها، به‌صورت (x , y)، به‌ازای هر x، فقط یک y داشته باشیم، آن رابطه یک تابع است. هم‌چنین اگر در تابع، به‌ازای هر y، فقط یک xداشته باشیم، به این تابع، یک‌به‌یک گویند.



تابع است و یک‌به‌یک نیست.



تابع یک‌به‌یک است.

اگر تابع f به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها به شکل (x , y) باشد، به شرطی یک‌به‌یک است که هیچ دو x مختلفی دارای y یکسان نباشند.

مثلاً تابع $f=\{(۱,۲),(۳,۰),(۴,۲)\}$ یک‌به یک نیست، زیرا دو زوج مرتب $(۱,۲),(۴,۲)$ دارای مؤلفهٔ دوم یکسان هستند.

نمودار تابع f به شرطی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

🔥 توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، یک‌به‌یک هستند.

۳۱۴ **۴**

می‌دانیم برای اینکه یک تابع، یک‌به‌یک باشد، باید هر خط افقی، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

در بین گزینه‌ها، تنها نمودار تابع گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

۳۱۵ **۲**

به بررسی همه گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=-x$ را در نظر بگیرید. هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ یک‌به‌یک هستند، اما مجموع آنها یعنی $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x-x=۰$ یک تابع غیر یک‌به‌یک است.

۲) می‌دانیم برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، باید تعداد اعضای دامنه و برد با هم برابر باشند، بنابراین تابع با دامنهٔ ۳ عضوی و برد ۲ عضوی، قطعاً غیر یک‌به‌یک است.

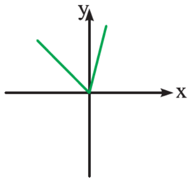
۳) تابع یک‌به‌یک $f(x)=x$ را در نظر بگیرید. اگر $k=۲$ باشد، $f^{۲}(x)=x^{۲}$ تابعی یک‌به‌یک نیست.

۴) وقتی $|f|$ یک‌به‌یک است، یعنی قدرمطلق هیچ دو اندازه تابعی با هم برابر نشده است. بنابراین خود تابع f نیز حتماً یک‌به‌یک بوده است.

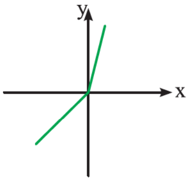
۳۱۶ **۲**

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

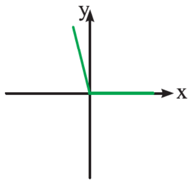
۱) $y=\begin{cases}۳x & ; x\geq ۰\\ -x & ; x<۰\end{cases}$



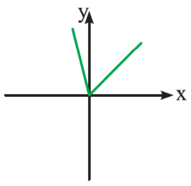
۲) $y=\begin{cases}۳x & ; x\geq ۰\\ x & ; x<۰\end{cases}$



۳) $y=\begin{cases}۰ & ; x\geq ۰\\ -۴x & ; x<۰\end{cases}$



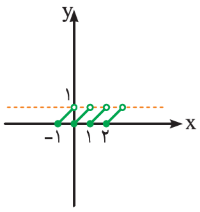
۴) $y=\begin{cases}x & ; x\geq ۰\\ -۳x & ; x<۰\end{cases}$



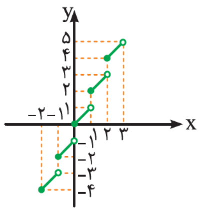
۳۱۷ **۲**

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

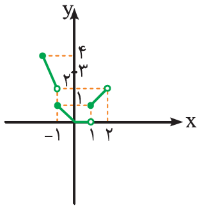
۱) $y=x-[x]$



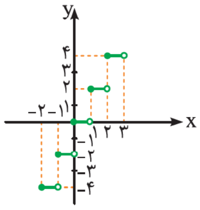
۲) $y=x+[x]$



۳) $y=x[x]$



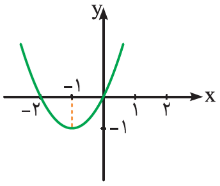
۴) $y=[x+[x]]=[x]+[x]=۲[x]$



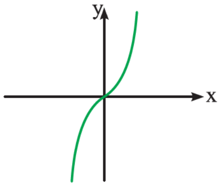
۳۱۸ **۲**

نمودار هر یک از توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

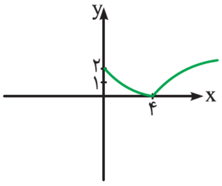
۱) $y=x^{۲}+۲x=(x+۱)^{۲}-۱$



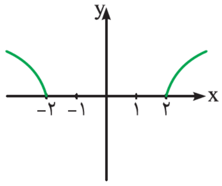
۲) $y=x^{۳}+۲x$



۳) $y=|\sqrt{x}-۲|$



۴) $y=\sqrt{|x|-۲}$



۳۱۹ **۱**

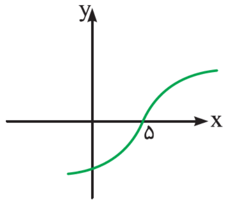
می‌دانیم تابع یک‌به‌یک، هر خط افقی $y=k$ را باید حداکثر در یک نقطه قطع کند.

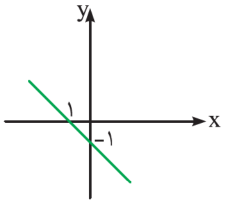
با بررسی گزینه (۱) داریم:

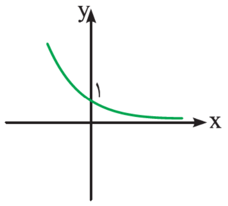
$$x^۳-۴x+۱=k \xrightarrow{k=۱} x^۳-۴x+۱=۱ \Rightarrow x^۳-۴x=۰$$

$$\Rightarrow x(x^۲-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \\ x=-۲ \end{cases}$$

چون تابع موجود در گزینه (۱)، خط افقی $y=۱$ را در ۳ نقطه قطع کرده، بنابراین تابع یک‌به‌یک نیست. باقی گزینه‌ها، نمایانگر یک تابع یک‌به‌یک هستند.

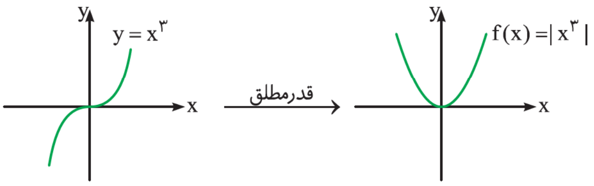
۲)


۳)


۴)


۳۲۰ **۳**

ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x^۳|$ را رسم می‌کنیم.



باتوجه‌به‌نمودارتابعf، غیریکنوا است. ازطرفی چون خطی موازی محورxها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند (مثلاً خط $y=۱$) پس تابع یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌ناپذیر است.

۳۲۱ **۲**

مجموع دوتابع اکیداًصعودی، خودیک تابع اکیداًصعودی ویک‌به‌یک است. توابع موجود درگزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) از جمع دو تابع اکیداً صعودی به دست آمده‌اند. بنابراین یک‌به‌یک ووارون‌پذیراند. تابع موجوددرگزینه (۲)، مجموع یک تابع صعودی و یک تابع نزولی است.
و نقاط $(۰,۱)$ و $(-۱,۱)$ با عرضی یکسان روی آن واقع شده‌اند، بنابراین یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

۳۲۲ **۳**

می‌دانیم توابع درجه دو، توابعی غیر یک‌به‌یک هستند، برای اینکه تابع $f(x)$ یک تابع یک‌به‌یک باشد، باید ضریب $x^۲$ برابر صفر شود:

$$f(x)=m^۲x^۲+۲x-x^۲+m=f(x)=(m^۲-۱)x^۲+۲x+m$$

$$\rightarrow m^۲-۱=۰ \Rightarrow m=\pm۱ \rightarrow \begin{cases} f(x)=۲x+۱ \\ f(x)=۲x-۱ \end{cases}$$

حاصل $f(۳/۵)$ برابر است با:

$$\begin{cases} f(۳/۵)=۲(۳/۵)+۱=۸ \\ f(۳/۵)=۲(۳/۵)-۱=۶ \end{cases}$$

بنابراین حداکثر مقدار $f(۳/۵)$ برابر ۸ است.

۳۲۳ **۱**

با توجه به تابع f، ۲ حالت پیش می‌آید:

حالت ۱ تابع f خطی باشد یعنی $a=۰$ باشد:

$$a=۰ \Rightarrow f(x)=-۲x+۳ \quad (I)$$

و می‌دانیم که توابع خطی در $x\in\mathbb{R}$ یک‌به یک هستند.

حالت ۲ تابع f درجه ۲ باشد، بنابراین بازهٔ $(-۲,-۱)$ باید بعد از طول رأس سهمی باشد یا قبل از آن.

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-(a+۲)}{۲a}=\frac{a+۲}{۲a}$$

$$۱)\ \frac{a+۲}{۲a}\geq-۱ \rightarrow \frac{a+۲+۲a}{۲a}\geq۰ \rightarrow \frac{۳a+۲}{۲a}\geq۰$$

a		$-\frac{۲}{۳}$		۰	
$\frac{۳a+۲}{۲a}$	+	۰	−	ت.ن	+

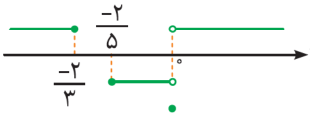
$$\xrightarrow{\geq۰} a\leq-\frac{۲}{۳} \cup a>۰ \quad (II)$$

$$۲)\ \frac{a+۲}{۲a}\leq-۲ \rightarrow \frac{a+۲+۴a}{۲a}\leq۰ \rightarrow \frac{۵a+۲}{۲a}\leq۰$$

a		$-\frac{۲}{۵}$		۰	
$\frac{۵a+۲}{۲a}$	+	۰	−	ت.ن	+

$$\xrightarrow{\leq۰} -\frac{۲}{۵}\leq a<۰ \quad (III)$$

از اجتماع ۳ مقدار به‌دست آمده برای a حدود آن به‌دست می‌آید:



$$a\in(-\infty,-\frac{۲}{۳}]\cup[-\frac{۲}{۵},+\infty)$$

۳۲۴ **۲**

در توابع هموگرافیک به شکل $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر صورت و مخرج پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک‌به‌یک نبوده و در نتیجه وارون‌پذیر نیست.

این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد که $ad-bc=۰$ باشد.

$$f(x)=\frac{۲x+b}{x+۳+b} \rightarrow (۲)(۳+b)-(b)(۱)=۰$$

$$\Rightarrow ۶+۲b-b=۰ \quad \Rightarrow \quad b=-۶$$

۳۲۵ **۲**

اگر تابع $f(x)$ یک تابع ثابت باشد، در آن صورت غیر یک‌به‌یک است. بنابراین باید ضریب x در تابع $f(x)$ برابر صفر شود:

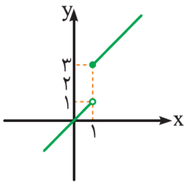
$$f(x)=۲x+m^۲x-۳mx+۱=(m^۲-۳m+۲)x+۱$$

$$\rightarrow m^۲-۳m+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۱ \\ m=۲ \end{cases}$$

۳۲۶ **۲**

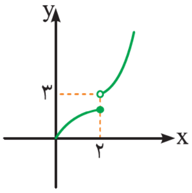
نمودار تابع f بدون در نظرگرفتن مقدار a به صورت مقابل است:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & ; \ x\geq۱ \\ x+a & ; \ x<۱ \end{cases}$$



با توجه به شکل، a می‌تواند دو مقدار طبیعی ۲ و ۱ را اختیار کند.

۳۲۷ **۳**



ابتدا نمودار تابع f را بدون در نظر گرفتن مقدار a رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۳}-۵ & ; \quad x>۲ \\ \sqrt{x-a} & ; \quad a\le x\le ۲ \end{cases}$$

با توجه به شکل، حداقل مقدار a زمانی اتفاق می‌افتد، که مقدار تابع $y=\sqrt{x-a}$ در $x=۲$، برابر ۳ شود:

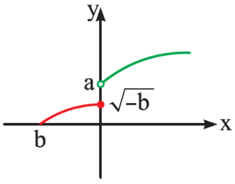
$$x=۲ : \sqrt{۲-a}=۳ \Rightarrow ۲-a=۹ \Rightarrow a=-۷$$

۳۲۸ **۲**

مقدار تابع $y=۴x+۱$ در $x=k$ باید کمتر از مقدار تابع $y=x-۵$ در $x=k$ باشد:

$$x=k : ۴k+۱<k-۵ \Rightarrow ۳k<-۶ \Rightarrow k<-۲$$

۳۲۹ **۱**



ابتدا بدون توجه به علامت و مقدار b,a ، تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

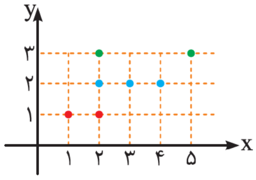
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-b} & ; \quad b\le x\le ۰ \\ \sqrt{x}+a & ; \quad x>۰ \end{cases}$$

در نقطهٔ $x=۰$ ، مقدار تابع برابر $\sqrt{-b}$ است. پس $-b\ge ۰$ و در نتیجه $b\le ۰$ است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند.

همچنین مطابق شکل، باید a مقداری مثبت داشته باشد تا تابع $f(x)$ ، یک تابع یک‌به‌یک شود. بنابراین گزینه (۱) می‌تواند پاسخ سؤال باشد.

۳۳۰ **۴**

برای اینکه نمودار یک‌به‌یک باشد، باید روی هر خط افقی، حداکثر یک نقطه بماند.



پس باید از میان نقاط سبز یک نقطه، از میان نقاط آبی دو نقطه و از میان نقاط قرمز یک نقطه حذف کنیم. پس باید حداقل ۴ نقطه حذف کنیم.

۳۳۱ **۴**

طول رأس سهمی برابر $x_S=\frac{-(-۱۶)}{۲(۲)}=۴$ است. تابع در هر یک از بازه‌های $[۴,+\infty)$ و $(-\infty,۴]$ و هر زیر مجموعه از این دو بازه، یک‌به‌یک است. بنابراین گزینه (۴) پاسخ سؤال است.

۳۳۲ **۲**

ضابطهٔ تابع f به صورت زیر است:

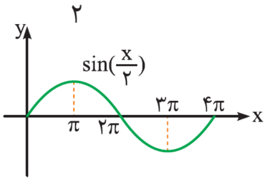
$$f(x)=(۲x+۱)^{۲}+۲(۳x-۱)-۳=۴x^{۲}+۴x+۱+۶x-۲-۳$$

$$\Rightarrow f(x)=۴x^{۲}+۱۰x-۴$$

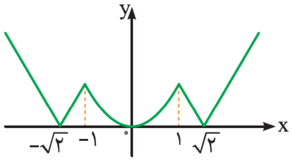
طول رأس این سهمی برابر $x_S=\frac{-۱۰}{۲(۴)}=-۱/۲۵$ است. تابع در هر یک از بازه‌های $[-۱/۲۵+\infty)$ و $(-\infty,-۱/۲۵]$ و هر زیر مجموعه از این دو بازه یک‌به‌یک است. بنابراین بیشترین مقدار m ، برابر ۱/۲۵- است.

۳۳۳ **۴**

مطابق شکل، تابع $f(x)=\sin(\frac{x}{۲})$ با دورهٔ تناوبی $T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$ ، در بازه‌های $(۰,\pi)$ ، $(\pi,۳\pi)$ و $(۳\pi,۴\pi)$ یک‌به‌یک است. بنابراین گزینه (۴) پاسخ سوال است.



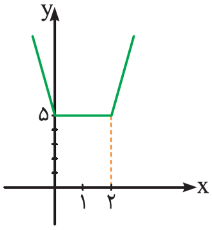
۳۳۴ **۲**



ابتدا تابع f را رسم می‌کنیم:

مطابق شکل، تابع f در بازهٔ $[-\sqrt{۲},-۱]$ یک‌به‌یک است.

۳۳۵ **۳**

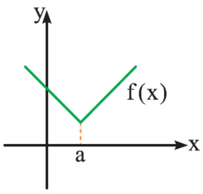


ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۴x-۳ & ; \quad x>۲ \\ ۵ & ; \quad ۰\le x\le ۲ \\ -۴x+۵ & ; \quad x<۰ \end{cases}$$

مطابق نمودار، تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ یک‌به‌یک نیست که این بازه، شامل ۳ عدد صحیح است.

۳۳۶ **۳**



برای اینکه تابع f در بازهٔ $[۱,۵]$ وارون‌پذیر باشد، باید در این بازه یک‌به‌یک باشد، بنابراین مقدار a نباید در بازه $[۱,۵]$ قرار بگیرد:

$$\begin{cases} a\ge ۵ \\ \text{یا} \\ a\le ۱ \end{cases} \Rightarrow a\in(-\infty,۱]\cup[۵,+\infty) \Rightarrow a\in\mathbb{R}-(۱,۵)$$

۳۳۷ **۲**

برای به دست آوردن دامنهٔ تابع f ، ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$g(x)-g(x^{۲}-۳)=۰ \Rightarrow g(x)=g(x^{۲}-۳)$$

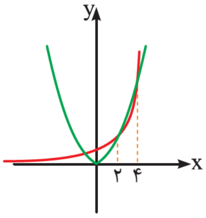
$$\xrightarrow{\text{تابع g یک به یک است}} x=x^{۲}-۳ \Rightarrow x^{۲}-x-۳=۰$$

معادلهٔ بالا، دارای ۲ ریشه است. بنابراین دامنهٔ تابع f ، شامل ۲ عدد حقیقی نمی‌باشد.

۳۳۸ **۲**

چون تابع f یک تابع یک‌به‌یک است، پس داریم:

$$f(۲^{x})=f(x^{۲}) \to ۲^{x}=x^{۲}$$



می‌دانیم معادله بالا، دارای دو جواب مثبت $x=۲$ و $x=۴$ است.

۳۳۹ **۲**

در میان گزینه‌ها، نمودار تابع $y=x^{۳}-x+۱$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸})$ می‌گذرد:

$$y=(\frac{۱}{۲})^{۳}-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱-۴+۸}{۸}=\frac{۵}{۸}$$

پس وارون این تابع از نقطهٔ $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$ می‌گذرد.

هایلایت

اگر نقطهٔ $A(a,b)$ روی نمودار تابع f باشد، نقطهٔ $A'(b,a)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ است (و برعکس).

۳۴۰ **۳**

چون نقطهٔ $A(-\frac{۱}{۸},-\frac{۳}{۵})$ روی تابع وارون قرار دارد، پس نقطهٔ $A'(-\frac{۳}{۵},-\frac{۱}{۸})$ روی خودِ تابع $y=\frac{x}{a+a|x|}$ قرار دارد:

$$-\frac{۱}{۸}=\frac{-\frac{۳}{۵}}{a+a|-\frac{۳}{۵}|}\Rightarrow\frac{۱}{۸}=\frac{\frac{۳}{۵}}{a+\frac{۳}{۵}a}\Rightarrow\frac{۸}{۵}a=\frac{۲۴}{۵}\Rightarrow a=۳$$

۳۴۱ **۱**

با توجه به نمودار، $f(-۳)=۵$ و $f(۲)=۰$ است، پس:

$$\begin{cases}f^{-۱}(۵)=-۳\\ f^{-۱}(۰)=۲\end{cases}\Rightarrow\frac{f^{-۱}(۵)}{f(a)+f^{-۱}(۰)}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{-۳}{f(a)+۲}=-\frac{۳}{۴}$$

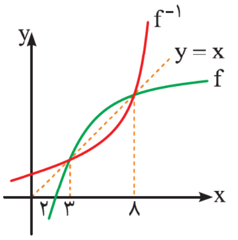
$$\Rightarrow f(a)+۲=۴\Rightarrow f(a)=۲\xrightarrow{f(۰)=۲}a=۰$$

۳۴۲ **۴**

عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x-f^{-۱}(x)\geq ۰\Rightarrow x\geq f^{-۱}(x)$$

با توجه به نمودار مقابل، بازه‌ای که در آن مقادیر $y=f^{-۱}(x)$ کم‌تر یا مساوی مقادیر $y=x$ باشد، برابر بازهٔ $[۳,۸]$ است.

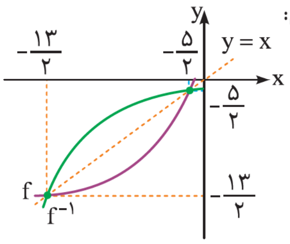


هایلایت

برای رسم نمودار $f^{-۱}$ از روی نمودار تابع f، باید نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

۳۴۳ **۳**

با توجه به این‌که نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، پس نمودار تابع $f^{-۱}$ را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم.
حالا برای پیدا کردن دامنهٔ تابع خواسته شده، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:



$$\frac{f^{-۱}(x)}{x-f^{-۱}(x)}\geq ۰$$

چون نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ همواره پایین محور xها است، پس $f^{-۱}(x)<۰$ است. بنابراین باید مخرج کسر نیز منفی باشد.

$$\frac{\overset{\text{همواره منفی}}{\boxed{f^{-۱}(x)}}}{x-f^{-۱}(x)}\geq ۰\Rightarrow x-f^{-۱}(x)<۰\Rightarrow x<f^{-۱}(x)$$

با توجه به شکل، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ در بازهٔ $(\frac{-۱۳}{۲},\frac{-۵}{۲})$ بالاتر از نمودار تابع $y=x$ قرار دارد؛ که این بازه شامل ۴ عدد صحیح $x=-۶,-۵,-۴,-۳$ است.

۳۴۴ **۲**

چون g وارون f است، پس باید $f^{-۱}(۴)-f^{-۱}(۱۲)$ را به‌دست آوریم.

می‌توانیم تابع f را یک بار برابر ۴ و یک بار برابر ۱۲ بگذاریم:

$$\begin{cases}-x+\sqrt{-۲x}=۴\Rightarrow x=-۲\\ -x+\sqrt{-۲x}=۱۲\Rightarrow x=-۸\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۴)-f^{-۱}(۱۲)=(-۲)-(-۸)=۶$$

هایلایت

برای محاسبهٔ $f^{-۱}(a)$، می‌توانیم ضابطهٔ تابع f را، برابر عدد a قرار دهیم و یک معادله حل کنیم.

یه جوره دیگه! طراح در کنکور تجربی خارج ۹۹ این سؤال رو اینجوری پرسید:

«فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g(۳)+g(۱۵)$ کدام است؟» جواب:

$$\left.\begin{matrix}g(۳)=f^{-۱}(۳)=۱\\ g(۱۵)=f^{-۱}(۱۵)=۹\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{مجموع}}۱+۹=۱۰$$

۳۴۵ **۳**

چون $g(۱)=f^{-۱}(۱)$ است، پس:

$$f(x)=x-۲\sqrt{x}+۱=۱\xrightarrow{x\geq ۱}x=۴\Rightarrow g(۱)=۴$$

حال مقدار $g(۴)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x-۲\sqrt{x}+۱=۴\Rightarrow x=۹\Rightarrow g(۴)=۹\Rightarrow g(g(۱))=۹$$

یه جوره دیگه! طراح ممکن بود اینجوری بپرسه:

«اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع g کدام است؟»

$$y=x-۲\sqrt{x}+۱=(\sqrt{x}-۱)^{۲}\Rightarrow\sqrt{y}=|\sqrt{x}-۱|$$

$$\xrightarrow{x\geq ۱}\sqrt{x}=\sqrt{y}+۱\Rightarrow g(x)=(\sqrt{x}+۱)^{۲}$$

۳۴۶ **۴**

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x-۱)=\log_{۳}(x+۱)\xrightarrow{x\to x+۱}f(x)=\log_{۳}(x+۲)$$

حالا سراغ محاسبهٔ $f^{-۱}(g(۴))$ می‌رویم. چون $g(۴)=۲\cos ۲\pi=۲$ است، پس باید $f^{-۱}(۲)$ را پیدا کنیم:

$$f(x)=۲\Rightarrow \log_{۳}(x+۲)=۲\Rightarrow x+۲=۹\Rightarrow x=۷$$

پس $f^{-۱}(۲)=۷$ است.

یه جوره دیگه! همین سؤالو با یک تابع نمایی هم ببینیم: «اگر $f(x-۱)=۲^{۳x-۴}+۱$ و $g(x)=۲\cos(\frac{\pi x}{۲})$ باشد، مقدار $f^{-۱}og(۴)$ کدام است؟» که جوابش برابر است با: $f^{-۱}(g(۴))=f^{-۱}(۲)=\frac{۱}{۳}$

۳۴۷ **۳**

می‌خواهیم حاصل $f(-\frac{۲}{۵})+g^{-۱}(-\frac{۲}{۵})$ را پیدا کنیم. با فرض $f(-\frac{۲}{۵})=a$ و $g^{-۱}(-\frac{۲}{۵})=b$ داریم:

$$۱)\ f^{-۱}(a)=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow \frac{a}{۱+|a|}=-\frac{۲}{۵}\xrightarrow{a<۰}\frac{a}{۱-a}=-\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵a=-۲+۲a\Rightarrow ۳a=-۲\Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow f(-\frac{۲}{۵})=-\frac{۲}{۳}$$

$$۲)\ g(b)=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow \sqrt{b}-۱=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow \sqrt{b}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow b=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow g^{-۱}(-\frac{۲}{۵})=\frac{۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow (f+g^{-۱})(-\frac{۲}{۵})=-\frac{۲}{۳}+\frac{۹}{۲۵}=\frac{-۵۰+۲۷}{۷۵}=-\frac{۲۳}{۷۵}$$

یه جوره دیگه! در آزمون مجدد ۱۴۰۱ طراح اینجوری پرسید: «اگر $f(x)=\frac{x}{۱+|x|}$ باشد، حاصل $f^{-۱}(-\frac{۳}{۷})+f^{-۱}(\frac{۵}{۹})$ کدام است؟»

جواب: $-\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴}=\frac{۱}{۲}$

۳۴۸ **۳**

برای پیدا کردن $f^{-۱}(-۲)$ باید در تابع $f(x)=\begin{cases}۶-۲x\ ;\ x<۲\\ ۴-x\ ;\ x\geq ۲\end{cases}$ ضابطهٔ پایینی را برابر ۲- بگذاریم:

$$۴-x=-۲\Rightarrow x=۶\Rightarrow f^{-۱}(-۲)=۶$$

برای پیدا کردن $g^{-۱}(-۵)$ باید در تابع $g(x)=\begin{cases}۲x-۳;x<۰\\ x-۴;x\geq ۰\end{cases}$ ضابطهٔ بالایی را برابر ۵- بگذاریم:

$$۲x-۳=-۵\Rightarrow x=-۱\Rightarrow g^{-۱}(-۵)=-۱$$

حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$f(g^{-۱}(-۵))+g(f^{-۱}(-۲))=f(-۱)+g(۶)=۸+۲=۱۰$$

۳۴۹ **۳**

مطابق شکل، نقاط $(-۲,۲),(۰,۳)$ روی نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ قرار دارند، پس در آن صدق می‌کنند:

$$(-۲,۲)\Rightarrow f(۲\times -۲-۱)=۲\Rightarrow f(-۵)=۲\Rightarrow f^{-۱}(۲)=-۵$$

$$(۰,۳)\Rightarrow f(۲\times ۰-۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-۱}(۲)+f^{-۱}(۳)}{f(-۵)}=\frac{(-۵)+(-۱)}{۲}=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

۳۵۰ **۳**

ابتدا با توجه به شکل صورت سؤال، ضابطهٔ توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-۲x+۲\ ;\ x\leq ۰\\ -x+۲\ ;\ x>۰\end{cases},\ g(x)=-۲x-۲$$

حالا برای پیدا کردن $f^{-۱}(-۲)$ باید ضابطهٔ پایینی تابع f را برابر ۲- قرار دهیم:

$$-x+۲=-۲\Rightarrow x=۴\Rightarrow f^{-۱}(-۲)=۴$$

پس سادهٔ شدهٔ عبارت مورد نظر برابر است با:

$$g(f^{-۱}(-۲))+g^{-۱}(f(-۱))=g(۴)+g^{-۱}(۴)$$

برای پیدا کردن $g^{-۱}(۴)$ داریم:

$$g(x)=-۲x-۲=۴\Rightarrow x=-۳\Rightarrow g^{-۱}(۴)=-۳$$

$$\Rightarrow g(۴)+g^{-۱}(۴)=(-۱۰)+(-۳)=-۱۳$$

۳۵۱ **۲**

ابتدا مختصات نقطه برخورد را به کمک ضابطه خط به‌دست می‌آوریم:

$$۱۰y-x=-۱۰\xrightarrow{y=۱}۱۰-x=-۱۰\Rightarrow x=۲۰$$

پس مختصات نقطه برخورد تابع $f^{-۱}$ با خط برابر $(۲۰,۱)$ است و این نقطه روی تابع $f^{-۱}$ قرار دارد، یعنی $f^{-۱}(۲۰)=۱$ است. داریم:

$$f^{-۱}(۲۰)=۱\Rightarrow f(۱)=۲۰\Rightarrow (۱)^{۳}+۶(۱)^{۲}+a(۱)+۱=۲۰\Rightarrow a=۱۲$$

۳۵۲ **۴**

چون وارون تابع f خط $y=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند، پس:

$$y=۱۲-x\xrightarrow{y=۱۰}۱۰=۱۲-x\Rightarrow x=۲\Rightarrow (۲,۱۰)\in f^{-۱}$$

در نتیجه $(۱۰,۲)\in f$ است، پس:

$$f(۱۰)=۲\Rightarrow \sqrt{۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}}=۲\Rightarrow ۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۰m-۱}=۳\Rightarrow m=۱\Rightarrow f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}$$

$$\Rightarrow f(m+۴)=f(۵)=۱$$

۳۵۳ **۳**

نقطهٔ $(a,-۱)$ روی خط $y=x-۴$ است، بنابراین:

$$y=x-۴\xrightarrow{(a,-۱)}-۱=a-۴\Rightarrow a=۳$$

پس نقطهٔ $(۳,-۱)$ روی وارون تابع f قرار دارد، در نتیجه نقطهٔ $(-۱,۳)$ روی تابع f است.

$$f(x)=x^۲+\sqrt{b-ax}\xrightarrow{a=۳}f(x)=x^۲+\sqrt{b-۳x}$$

$$f(-۱)=۳\Rightarrow ۳=۱+\sqrt{b-۳(-۱)}\Rightarrow ۲=\sqrt{b+۳}$$

$$\Rightarrow ۴=b+۳\Rightarrow b=۱$$

مقدار $a-b$ برابر است با: $a-b=۳-۱=۲$

۳۵۴ **۴**

چون $f^{-۱}(g(a))=۶$ است، پس $f(۶)=g(a)$ است. در ضمن $f(۶)=۷$ است، پس:

$$g(a)=۷\xrightarrow{(۴,۷)\in g}a=۴$$

۳۵۵ **۳**

در تابع f داریم، $f(\frac{۱}{۴})=-۳$ و با توجه به این‌که $f(g^{-۱}(a))=-۳$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $g^{-۱}(a)=\frac{۱}{۴}$ بنابراین:

$$g^{-۱}(a)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow g(\frac{۱}{۴})=a$$

ضابطهٔ $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ است، پس می‌توان نوشت:

$$g(\frac{۱}{۴})=-(\frac{۱}{۴})\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۸}$$

۳۵۶ **۲**

چون $f^{-۱}(g^{-۱}(a))=۸$ است، پس $g^{-۱}(a)=f(۸)$ است. از طرفی برای پیدا کردن $f(۸)$، باید به سراغ ضابطهٔ بالایی تابع f برویم:

$$x\geq ۳:f(x)=\sqrt{۵x+۹}\xrightarrow{x=۸}f(۸)=\sqrt{۵\times ۸+۹}=۷$$

بنابراین $g^{-۱}(a)=۷$ است، یعنی $g(۷)=a$ است. با توجه به تابع g نتیجه می‌گیریم $a=۳$ است.

۳۵۷ **۲**

چون $f^{-۱}(g(۲a))=۶$ است، پس $g(۲a)=f(۶)$ است، بنابراین با توجه به تابع‌های f و g داریم:

$$g(۲a)=f(۶)\xrightarrow{f(۶)=۳}g(۲a)=۳\Rightarrow\frac{۲a}{۲a-۱}=۳$$

$$\Rightarrow ۶a-۳=۲a\Rightarrow ۴a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۳۵۸ **۴**

فرض می‌کنیم $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=\alpha$ باشد، پس:

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=\alpha\Rightarrow g(\alpha)=f^{-۱}(۸)\ (۱)$$

حال برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۸)$ ضابطهٔ f را برابر ۸ می‌گذاریم:

$$۸=\frac{۲}{۵}x-۴\Rightarrow\frac{۲}{۵}x=۱۲\Rightarrow x=۳۰\Rightarrow f^{-۱}(۸)=۳۰$$

بنابراین از (۱) داریم:

$$g(\alpha)=f^{-۱}(۸)=۳۰\Rightarrow\alpha^۳+\alpha=۳۰\Rightarrow\alpha=۳\Rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=۳$$

۳۵۹ **۱**

ابتدا $f^{-۱}(۲۰)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x+\sqrt{x}=۲۰\Rightarrow x=۱۶\Rightarrow f^{-۱}(۲۰)=۱۶$$

پس $g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))=g^{-۱}(۱۶)$ است، پس ضابطهٔ g را برابر ۱۶ می‌گذاریم:

$$\frac{۹x+۶}{۱-x}=۱۶\Rightarrow ۹x+۶=۱۶-۱۶x\Rightarrow ۲۵x=۱۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲}{۵}\Rightarrow g^{-۱}(۱۶)=\frac{۲}{۵}$$

۳۶۰ **۳**

می‌دانیم $f(g^{-۱}(-۱))=-\frac{۱۱}{۳}$ است، پس ابتدا ضابطهٔ تابع f را برابر $-\frac{۱۱}{۳}$ می‌گذاریم:

$$\frac{۲x+۱}{۳}=-\frac{۱۱}{۳}\Rightarrow ۲x=-۱۲\Rightarrow x=-۶$$

پس $f(-۶)=-\frac{۱۱}{۳}$ است، بنابراین $g^{-۱}(-۱)=-۶$ است. یعنی $g(-۶)=-۱$ است:

$$g(-۶)=\frac{-۱۲+a}{a+۶}=-۱\Rightarrow -۱۲+a=-a-۶\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

۳۶۱ **۱**

$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$ است، حالا خواهیم داشت:

$$x=۲:\frac{g(۲)}{g(f^{-۱}(۲))}=\frac{g(۲)}{g(۱)}\Rightarrow\times$$

$$x=۵:\frac{g(۵)}{g(f^{-۱}(۵))}=\frac{g(۵)}{g(۲)}=\frac{۶}{۳}=۲$$

$$x=۴:\frac{g(۴)}{g(f^{-۱}(۴))}=\frac{g(۴)}{g(۳)}=\frac{۲}{۱}=۲$$

$$x=۶:\frac{g(۶)}{g(f^{-۱}(۶))}=\frac{g(۶)}{g(۴)}\Rightarrow\times$$

پس تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$ به‌صورت $\{(۵,۲),(۴,۲)\}$ است.

۳۶۲ **۴**

$g^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$ است. حالا خواهیم داشت:

$$x=۱:g^{-۱}(f(۱))-f(۱)=g^{-۱}(۲)-f(۱)=۴-۲=۲$$

$$x=۲:g^{-۱}(f(۲))-f(۲)=g^{-۱}(۵)-f(۲)\Rightarrow\times$$

$$x=۳:g^{-۱}(f(۳))-f(۳)=g^{-۱}(۴)-f(۳)\Rightarrow\times$$

$$x=۴:g^{-۱}(f(۴))-f(۴)=g^{-۱}(۶)-f(۴)=۵-۶=-۱$$

پس برد تابع $(g^{-۱}of)-f$ برابر $\{۲,-۱\}$ است.

۳۶۳ **۱**

ابتدا مقدار $g(۲)$ را به‌دست می‌آوریم، پس ضابطهٔ $g^{-۱}$ را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$۱-x=۲\Rightarrow x=-۱\Rightarrow g(۲)=-۱$$

پس $f(g(۲))=f(-۱)$ است و داریم:

$$f(x+۱)=\frac{g(x)-۱}{x}\xrightarrow{x=-۲}f(-۱)=\frac{g(-۲)-۱}{-۲}$$

حالا برای به‌دست آوردن $g(-۲)$، تابع $g^{-۱}$ را برابر ۲- قرار می‌دهیم:

$$۱-x=-۲ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow g(-۲)=۳$$

$$\Rightarrow f(-۱)=\frac{g(-۲)-۱}{-۲}=\frac{۳-۱}{-۲}=-۱$$

۳۶۴ **۱**

فرض می‌کنیم $g^{-۱}(۳)=a$ باشد، پس $g(a)=۳$ است. حالا در ضابطهٔ fog به جای xها، a قرار می‌دهیم:

$$f(g(a))=a^۳g(a)+۴g(a)\xrightarrow{g(a)=۳}f(۳)=۳a^۳+۴\times۳$$

از طرفی با توجه به ضابطهٔ تابع f داریم:

$$f(۳)=۳^۲+۴(۳)+۱۵=۳۶$$

$$\Rightarrow ۳a^۳+۱۲=۳۶ \Rightarrow ۳a^۳=۲۴ \Rightarrow a^۳=۸ \Rightarrow a=۲$$

پس $g^{-۱}(۳)=a=۲$ است.

۳۶۵ **۳**

چون $f(x^۳+۲x)=۲^x-۱۴$ است، پس $f^{-۱}(۲^x-۱۴)=x^۳+۲x$ است و با جای‌گذاری $x=۴$ مقدار $f^{-۱}(۲)$ به‌دست می‌آید:

$$x=۴: f^{-۱}(۲^۴-۱۴)=۴^۳+۲\times۴ \Rightarrow f^{-۱}(۲)=۷۲$$

۳۶۶ **۴**

چون $f^{-۱}(\frac{x+۲}{x-۱})=x^۳-۱$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت $f(x^۳-۱)=\frac{x+۲}{x-۱}$ است. حال چون $f(۷)$ را می‌خواهیم، پس داریم:

$$x^۳-۱=۷ \Rightarrow x^۳=۸ \Rightarrow x=۲$$

بنابراین با جای‌گذاری $x=۲$ در ضابطهٔ تابع داریم:

$$f(۲^۳-۱)=\frac{۲+۲}{۲-۱} \Rightarrow f(۷)=۴$$

۳۶۷ **۴**

برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد $f^{-۱}(x)$ و نیمساز ناحیهٔ دوم یعنی $y=-x\ ;\ x<۰$ از ویژگی تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$f^{-۱}(x)=-x \Rightarrow f(-x)=x \Rightarrow -x+\frac{۱}{۲x}=x$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲x}=۲x \Rightarrow ۴x^۲=۱ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{x<۰}x=-\frac{۱}{۲}$$

۳۶۸ **۲**

با فرض $g^{-۱}(۶)=a$ داریم:

$$g(a)=۶ \Rightarrow f(a)+\sqrt{f(a)}=۶ \Rightarrow f(a)=۴$$

حال چون $f^{-۱}(x)$ داده شده، پس می‌توانیم از $f(a)=۴$ نتیجه بگیریم $f^{-۱}(۴)=a$ است:

$$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۲x}\xrightarrow{x=۴}a=f^{-۱}(۴)=\sqrt[۳]{۸}=۲ \Rightarrow g^{-۱}(۶)=۲$$

۳۶۹ **۴**

با فرض $g^{-۱}(۱۶)=a$ داریم: $g(a)=۱۶ \Rightarrow f(۳a-۴)=۱۶$

حال از $f(۳a-۴)=۱۶$ نتیجه می‌گیریم $f^{-۱}(۱۶)=۳a-۴$ است و خواهیم داشت:

$$f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}\xrightarrow{x=۱۶}۳a-۴=f^{-۱}(۱۶)=۱۶+\sqrt{۱۶}=۲۰$$

$$\Rightarrow a=۸$$

بنابراین $g^{-۱}(۱۶)=۸$ است.

۳۷۰ **۱**

نمودار هر تابع (به شرط وارون‌پذیر بودن) و وارون آن نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. پس باید وارون تابع خطی داده شده را به‌دست آوریم. بنابراین کافی است جای x و y را عوض کنیم تا معادلهٔ خط d به‌دست آید:

$$۳y-۲x=۴\xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}}d: ۳x-۲y=۴$$

$$\xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}}y=-۲$$

روش سریع‌تر می‌توانیم بدون محاسبهٔ تابع وارون، در معادلهٔ خط اولیه به‌جای y صفر بگذاریم.

۳۷۱ **۴**

برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون f، نحوهٔ تشکیل تابع f را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{tikzcd} f: -۳ \arrow[r] & ÷۲ \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^{-۱}: +۳ & ×۲ \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲x+۳\xrightarrow[\text{به‌پایین}]{\text{۶ واحد}}y=۲x+۳-۶$$

حالا نقطهٔ برخورد تابع حاصل را با تابع f پیدا می‌کنیم:

$$\frac{x-۳}{۲}=۲x-۳ \Rightarrow x-۳=۴x-۶ \Rightarrow ۳x=۳ \Rightarrow x=۱$$

$$\Rightarrow f(۱)=-۱ \Rightarrow A(۱,-۱) \Rightarrow OA=\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

هایلایت

برای وارون کردن توابعی که در ضابطهٔ آن‌ها یک x وجود دارد، یک راهکار جالب و سریع این است که ابتدا نحوهٔ تشکیل تابع f را پیدا کنید. سپس برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون تابع، اعمال را به طور برعکس و از آخر به اول روی x انجام دهید. در جدول زیر، تعدادی از این اعمال و برعکس آن‌ها آورده شده:

+	−
×	÷
توان ۲	$\sqrt{\ }$
توان ۳	$\sqrt[۳]{\ }$
a^x	$\log_a x$

۳۷۲ **۳**

با توجه به تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x+۲$ داریم:

$$\begin{tikzcd} f: ×\frac{۲}{۳} \arrow[r] & +۲ \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} f^{-۱}: ÷\frac{۲}{۳} & -۲ \arrow[l] \end{tikzcd}$$

پس $f^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳x-۶}{۲}$ است. حالا معادلهٔ $f^{-۱}$ را مرتب می‌کنیم و فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۱)$ را از آن پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{۳x-۶}{۲} \Rightarrow ۳x-۲y-۶=۰$$

$$\Rightarrow AH=\frac{|۲۱-۲-۶|}{\sqrt{۳^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

۳۷۳ **۲**

با توجه به تابع $f(x)=۲x-۱$ داریم:

$$f:\ \boxed{\times ۲}\rightarrow\boxed{-۱}\ \Rightarrow\ f^{-۱}:\ \boxed{\div ۲}\leftarrow\boxed{+۱}$$

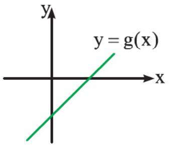
بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۲}$ است و داریم:

$$g(x+۱)=f(x)-f^{-۱}(x)=۲x-۱-\frac{x+۱}{۲}=\frac{۳x-۳}{۲}$$

حالادرتابع $g(x+۱)$ به‌جایxها $x-۱$ قرارمی‌دهیم‌تابه‌تابع $g(x)$ برسیم:

$$g(x+۱)=\frac{۳x-۳}{۲}\xrightarrow{x\Rightarrow x-۱}g(x)=\frac{۳(x-۱)-۳}{۲}=\frac{۳x-۶}{۲}$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{۳}{۲}x-۳\Rightarrow$$

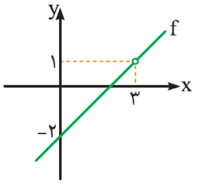


$\Rightarrow$ از ناحیهٔ‌دوم‌نمی‌گذرد.

۳۷۴ **۴**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x-۳)}{x-۳}=x-۲\ ;\ x\neq ۳\Rightarrow$$



عدد ۱ در محدودهٔ بُرد تابع f وجود ندارد، پس: $f^{-۱}(x)=x+۲\ ;\ x\neq ۱$

۳۷۵ **۲**

چون این دو خط نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقارن‌اند، پس وارون یکی از آن‌ها با دیگری برابر است. بنابراین در خط $۲x-۳y=b$ جای x و y را عوض می‌کنیم تا وارون آن یعنی $۲y-۳x=b$ به‌دست آید.

پس $۲y-۳x=b$ و $ax+by=۸$ برابراند، پس: $\frac{a}{-۳}=\frac{b}{۲}=\frac{۸}{b}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{b}{۲}=\frac{۸}{b}\Rightarrow b^{۲}=۱۶\Rightarrow b=\pm ۴\\ \frac{a}{-۳}=\frac{b}{۲}\Rightarrow ab=-۲۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=۴\Rightarrow a=-۶\Rightarrow a+b=-۲\\ b=-۴\Rightarrow a=۶\Rightarrow a+b=۲\end{cases}$$

۳۷۶ **۲**

با توجه به تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{a}$ داریم:

$$f:\ \boxed{\times ۳}\rightarrow\boxed{-۱}\rightarrow\boxed{\div a}$$

$$\Rightarrow\ f^{-۱}:\ \boxed{\div ۳}\leftarrow\boxed{+۱}\leftarrow\boxed{\times a}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{ax+۱}{۳}$ است. حالا $f(۳f^{-۱}(x))$ راتشکیل می‌دهیم:

$$f(۳f^{-۱}(x))=f(ax+۱)=\frac{۳(ax+۱)-۱}{a}=\frac{۳ax+۲}{a}=۳x+\frac{۲}{a}$$

$$\Rightarrow ۳x+\frac{۲}{a}=۳x+۵\Rightarrow\frac{۲}{a}=۵\Rightarrow a=\frac{۲}{۵}$$

۳۷۷ **۱**

نحوهٔ تولید تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۱}$ به‌صورت زیر است:

$$f:\ \boxed{-۱}\rightarrow\boxed{-\sqrt{\ }}\rightarrow\boxed{+۲}$$

$$f^{-۱}:\ \boxed{+۱}\leftarrow\boxed{\text{توان ۲}}\leftarrow\boxed{-۲}$$

پس $f^{-۱}(x)=(x-۲)^{۲}+۱$ است. در ضمن بُرد تابع f بازهٔ $(-\infty,۲]$ است، پس دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ نیز برابر همین بازه است.

> **روش سریع‌تر** چون $f(۵)=۰$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-۱}(۰)=۵$ باشد. فقط گزینهٔ (۱) این ویژگی را دارد.

۳۷۸ **۳**

ابتدا نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم، یعنی آن را وارون می‌کنیم. توجه کنید بُرد تابع f بازهٔ $[۲,+\infty)$ است:

$$y:\ \boxed{-۱}\rightarrow\boxed{\sqrt{\ }}\rightarrow\boxed{+۲}$$

$$y^{-۱}:\ \boxed{+۱}\leftarrow\boxed{\text{توان ۲}}\leftarrow\boxed{-۲}$$

$$\Rightarrow y^{-۱}=(x-۲)^{۲}+۱; x\geq ۲$$

حالا نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

$$y=(x-۲)^{۲}+۱\xrightarrow[\text{۲ واحد راست}]{x\rightarrow(x-۲)}y=(x-۴)^{۲}+۱$$

$$\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۳ واحد}}g(x)=(x-۴)^{۲}+۱-۳$$

پس $g(x)=(x-۴)^{۲}-۲$ است و $g(۴)=-۲$ است.

۳۷۹ **۳**

با توجه به شکل صورت سؤال $f(x)=۱+\sqrt{x+۲}$ است. پس $a=۲$ و $b=۱$ می‌باشد. حالا، اگر نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه کنیم، به تابع $y=۱+\sqrt{-x+۲}$ می‌رسیم که بُرد آن به‌صورت بازهٔ $[۱,+\infty)$ است. حالا نمودار حاصل را وارون می‌کنیم:

$$y:\ \boxed{\times -۱}\rightarrow\boxed{+۲}\rightarrow\boxed{\sqrt{\ }}\rightarrow\boxed{+۱}$$

$$y^{-۱}:\ \boxed{\div -۱}\leftarrow\boxed{-۲}\leftarrow\boxed{\text{توان ۲}}\leftarrow\boxed{-۱}$$

$$\Rightarrow y^{-۱}=۲-(x-۱)^{۲}\ ;\ x\geq ۱$$

در نتیجه $g(x)=۲-(x-۱)^{۲}\ ;\ x\geq ۱$ است و داریم:

$$g(a+b)=g(۲+۱)=۲-(۳-۱)^{۲}=۲-۴=-۲$$

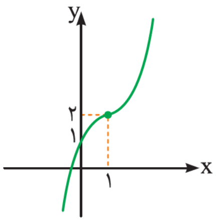
۳۸۰ **۴**

وقتی نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا منتقل کنیم به نمودار $y=۱+\sqrt[۳]{x-۲}$ می‌رسیم. حالا وارون تابع حاصل را پیدا می‌کنیم:

$$y:\ \boxed{-۲}\rightarrow\boxed{\sqrt[۳]{\ }}\rightarrow\boxed{+۱}$$

$$y^{-۱}:\ \boxed{+۲}\leftarrow\boxed{\text{توان ۳}}\leftarrow\boxed{-۱}\ \Rightarrow y^{-۱}=(x-۱)^{۳}+۲$$

از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد. $\Rightarrow$



$\Rightarrow$

یه جوره دیگه! طراح می تونست یکم تست رو جذاب‌تر بپرسه! اینجوری: «اگر نمودار وارون تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+a$ از نقطهٔ $(۲,۱)$ بگذرد، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟»

جواب : $(۱,۲)\in f\Rightarrow a=۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt[۳]{x-۲}$

۳۸۱ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(x^{۲}-۴x+۴)+۶x=x^{۲}+۲x+۴=(x+۱)^{۲}+۳$$

طول رأس این سهمی برابر $x=-۱$ است که در بازهٔ $x\geq -۱$ اکیداً صعودی است. حالا ضابطهٔ وارون تابع را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$f:\ \boxed{+۱}\rightarrow\boxed{\text{توان ۲}}\rightarrow\boxed{+۳}$$

$$f^{-۱}:\ \boxed{-۱}\leftarrow\boxed{\sqrt{\ }}\leftarrow\boxed{-۳}\ \Rightarrow f^{-۱}(x)=-۱+\sqrt{x-۳}$$

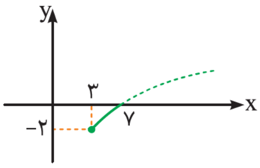
یه جوره دیگه! طراح میتونه همین تست رو کمی ساده‌تر بپرسه:

«ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۴\ ;\ x\geq -۱$ کدام است؟»

یا اگه بخواد راه عددگذاری رو سفت‌تر کنه، اینجوری بپرسه:

«ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۴\ ;\ x\geq -۱$ به صورت $f^{-۱}(x)=a+\sqrt{x+b}$ است. مقدار $a\times b$ کدام است؟»

۳۸۲ **۱**



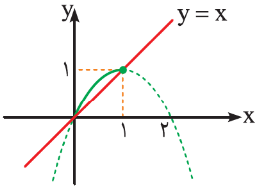
مطابق شکل نمودار تابع f در بازهٔ $[۳,۷)$ زیرمحور xها قرار دارد و محدودهٔ بُرد آن در این بازه به‌صورت $[-۲,۰)$ است: حالا ضابطهٔ وارون تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f:\ \boxed{-۳}\rightarrow\boxed{\sqrt{\ }}\rightarrow\boxed{-۲}$$

$$f^{-۱}:\ \boxed{+۳}\leftarrow\boxed{\text{توان ۲}}\leftarrow\boxed{+۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x+۲)^{۲}+۳;-۲\leq x\leq ۰$$

۳۸۳ **۴**



نمودار تابع f را در بازه‌ای که بالای نیمساز ربع اول و سوم است، در نظر می‌گیریم: بُرد تابع در این بازه به صورت $(۰,۱)$ است. حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم و وارون آن را در این بازه پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=-x^{۲}+۲x-۱+۱=-(x-۱)^{۲}+۱\ ;\ ۰<x<۱$$

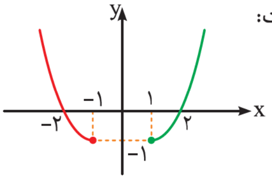
$$f:\ \boxed{-۱}\rightarrow\boxed{\text{توان ۲}}\rightarrow\boxed{\times -۱}\rightarrow\boxed{+۱}$$

$$f^{-۱}:\ \boxed{+۱}\leftarrow\boxed{-\sqrt{\ }}\leftarrow\boxed{\div -۱}\leftarrow\boxed{-۱}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$$

۳۸۴ **۳**

وقتی نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۲x\ ;\ x\geq ۱$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، باید به جای همهٔ xها، x− قرار دهیم. پس ضابطهٔ آن پس از قرینه نسبت به محور yها به صورت زیر است:



$$y=x^{۲}+۲x\ ;\ x\leq -۱$$

$$\Rightarrow y=(x+۱)^{۲}-۱\ ;\ x\leq -۱$$

حالا نمودار این تابع را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم یعنی آن را وارون می‌کنیم:

$$y:\ \boxed{+۱}\rightarrow\boxed{\text{توان ۲}}\rightarrow\boxed{-۱}$$

$$y^{-۱}:\ \boxed{-۱}\leftarrow\boxed{-\sqrt{\ }}\leftarrow\boxed{+۱}\ \Rightarrow y^{-۱}=-۱-\sqrt{x+۱}$$

۳۸۵ **۳**

ابتدا باید ضابطهٔ تابع $y=f(x)$ را پیدا کنیم:

$$fog(x)=(۲x-۱)g(x)=(۲x-۱)(۲x+۱)=۴x^{۲}-۱$$

حالا با فرض $g(x)=۲x+۱=t$ داریم:

$$x=\frac{t-۱}{۲}\Rightarrow f(g(x))=۴x^{۲}-۱\Rightarrow f(t)=۴(\frac{t-۱}{۲})^{۲}-۱=t^{۲}-۲t$$

پس $f(x)=x^{۲}-۲x$ است و طبق گفتهٔ صورت سؤال باید ضابطهٔ وارون آن را در $x\leq ۱$ پیدا کنیم:

$$f(x)=x^{۲}-۲x+۱-۱=(x-۱)^{۲}-۱;\ x\leq ۱$$

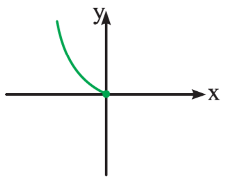
$$f:\ \boxed{-۱}\rightarrow\boxed{\text{توان ۲}}\rightarrow\boxed{-۱}$$

$$f^{-۱}:\ \boxed{+۱}\leftarrow\boxed{-\sqrt{\ }}\leftarrow\boxed{+۱}\ \Rightarrow f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{x+۱}$$

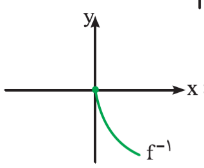
۳۸۶ **۱**

می‌دانیم $f(x)=x^{۲}\sqrt{x^{۲}}=x^{۲}|x|$ است که در بازهٔ $x\leq ۰$ نزولی است، پس:

$x\leq ۰: f(x)=-x^{۳}\Rightarrow$



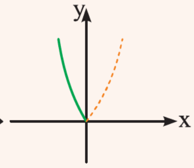
$\xrightarrow[y=x]{\text{قرینه نسبت به}}$



$\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x}\ ;\ x\geq ۰$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست از علامت جمع بین $x^{۲}$ و $\sqrt{x^{۲}}$ استفاده کنه: «تابع $f(x)=x^{۲}+\sqrt{x^{۲}}$ در یک بازهٔ نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه کدام است؟»

$$f(x)=x^{۲}+|x|=\begin{cases}x^{۲}+x\,;\,x>۰\\ x^{۲}-x\,;\,x\le ۰\end{cases}\xrightarrow{\text{رسم}}$$



$$\xrightarrow{\text{وارون}}y^{-۱}=\frac{۱}{۲}-\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}\;;x\ge ۰$$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده نکنه: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x\sqrt{x}$ کدام است؟»

$$f(x)=x^{\frac{۳}{۲}};x\ge ۰\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}}$$

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست از توان ۲ استفاده نکنه و همچنین بین x و $\sqrt{x}$ علامت جمع قرار بده! ببینیم: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ کدام است؟»

جواب: $f(x)=x+\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}=(\sqrt{x}+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲})^{۲}$$

۳۸۷ **۳**

می‌دانیم اگر $f^{-۱}(a)=b$ باشد، آنگاه $f(b)=a$ خواهد بود. بنابراین در یک عدد دلخواه رابطه را بررسی می‌کنیم:

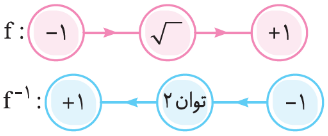
$$f(۸)=\frac{۱۰}{۴}-\frac{۳}{۲}=۱\Rightarrow f^{-۱}(۱)=۸$$

$$f^{-۱}(۱)=a(۱)+a(\sqrt{۱})=۲a\Rightarrow ۲a=۸\Rightarrow a=۴$$

۳۸۸ **۱**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}=\sqrt{(\sqrt{x-۱}+۱)^{۲}}=\sqrt{x-۱}+۱$$



$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^{۲}+۱=x^{۲}-۲x+۲\;;\;x\ge ۱$$

روش سریع‌تر عددگذاری کنیم! چون $f(۵)=۳$ است، پس گزینه‌ای درست است که $f^{-۱}(۳)=۵$ باشد. پس گزینهٔ (۱) درست است.

یه جوره دیگه! اگه طراح رادیکال بیرونی رو نذاره، باز هم برای وارون کردن می‌تونیم از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کنیم، مثلاً اینجوری بپرسه «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x-۲}+۳$ کدام است؟»

جواب: $f(x)=x+۲\sqrt{x+۲}+۳=(\sqrt{x+۲}+۱)^{۲}$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(\sqrt{x}-۱)^{۲}-۲$$

۳۸۹ **۳**

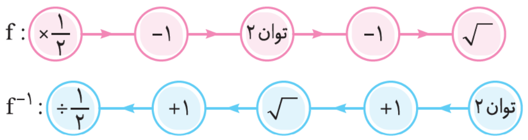
ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$۱)\;x\ge ۰\quad ۲)\;\frac{۱}{۴}x-۱\ge ۰\Rightarrow x\ge ۴\Rightarrow D_f=[۴,+\infty)$$

حالا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{\frac{۱}{۴}x-۱}=\sqrt{\frac{۱}{۴}x^{۲}-x}=\sqrt{(\frac{۱}{۲}x-۱)^{۲}-۱}$$

نحوهٔ تولید تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲\sqrt{x^{۲}+۱}+۲$$

روش سریع‌تر میتونیم عددگذاری کنیم! چون $f(۴)=۰$ است، پس گزینه‌ای درست است که در آن $f^{-۱}(۰)=۴$ باشد، پس گزینهٔ (۳) درست است.

۳۹۰ **۲**

ضابطهٔ تابع را به‌صورت $y=|x+۱|-|۳x-۶|$ ساده می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}۲x-۷\;;\;x\le -۱\\ ۴x-۵\;;\;-۱<x<۲\\ -۲x+۷\;;\;x\ge ۲\end{cases}\xrightarrow{\text{نزولی}}y=-۲x+۷\;;\;x\ge ۲$$

پس ضابطهٔ وارون تابع در بازه‌ای که نزولی است، به‌صورت $y^{-۱}=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\;;\;x\le ۳$ است.

یه جوره دیگه! طراح می‌تونست خواستهٔ سوال رو کمی سخت‌تر کنه و اینجوری بپرسه: «نمودار وارون تابع در بازهٔ نزولی و نمودار تابع $y=x^{۲}-۳x$ در چند نقطه مشترک هستند؟» جواب: در یک نقطه به طول $x=-۱$ مشترک‌اند.

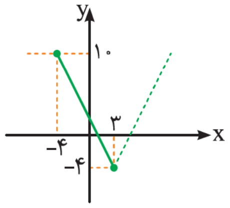
هایلایت

برای به‌دست آوردن وارون توابع قدرمطلقی، ابتدا باید تعیین کنیم تابع در کدام بازه یک‌به‌یک است. برای این منظور تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم. سپس بازه‌هایی را که تابع در آن‌ها یک‌به‌یک است، تعیین کرده و ضابطهٔ وارون تابع را به‌دست می‌آوریم.

۳۹۱ **۴**

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۱۰\;;\;x<-۴\\ -۲x+۲\;;\;-۴\le x\le ۳\\ ۲x-۱۰\;;\;x>۳\end{cases}\Rightarrow$$



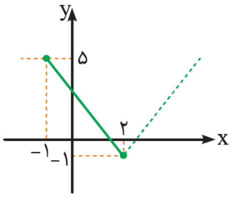
ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+۱$ است.

از طرفی چون بُرد تابع f در این بازه برابر $-۴\le y\le ۱۰$ است، پس دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ در این بازه به‌صورت $-۴\le x\le ۱۰$ است.

۳۹۲ **۳**

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۵ & ;\ x<-۱\\ -۲x+۳ & ;\ -۱\le x\le ۲\\ ۲x-۵ & ;\ x>۲\end{cases}\Rightarrow$$



ضابطهٔ وارون تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲};-۱\le x\le ۵$ است. حال طول نقطهٔ برخورد منحنی $f^{-۱}$ و g را محاسبه می‌کنیم:

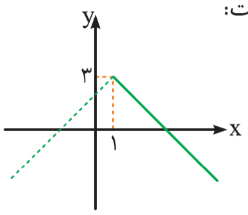
$$f^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow -\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}=x+۱\Rightarrow \frac{۳}{۲}x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

۳۹۳ **۴**

ضابطهٔ $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x))=۳-\sqrt{x^۲-۲x+۱}=۳-\sqrt{(x-۱)^۲}=۳-|x-۱|$$

پس نمودار تابع fog به‌صورت مقابل است:

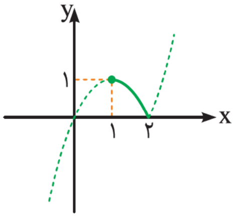


ضابطهٔ تابع در بازهٔ اکیداً نزولی به‌صورت $y=-x+۴$ است و چون بُرد تابع در بازهٔ اکیداً نزولی برابر $(-\infty,۳]$ است، پس ضابطهٔ وارون آن به‌صورت مقابل است: $y=-x+۴;x\le ۳$

۳۹۴ **۳**

نمودار تابع $f(x)=x|x-۲|$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-۲);x\le ۲\\ x(x-۲);x>۲\end{cases}\Rightarrow$$



ضابطهٔ وارون تابع f در بازهٔ نزولی به‌صورت زیر است:

$$y=-x(x-۲)=-x^۲+۲x-۱+۱=-(x-۱)^۲+۱$$

y: (−۱) → (توان ۲) → (×−۱) → (+۱)

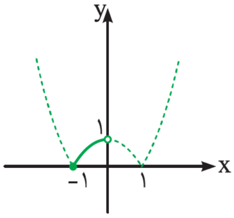
$y^{-۱}$: (+۱) ← (√) ← (÷−۱) ← (−۱)

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{۱-x}$$

بُرد تابع f در این بازه برابر $۰\le y\le ۱$ است، پس دامنهٔ $f^{-۱}$ نیز برابر $۰\le x\le ۱$ است.

۳۹۵ **۴**

چون $[x]=-۱$ است، پس $-۱\le x<۰$ است. حالا نمودار تابع $y=|x^۲-۱|$ را رسم می‌کنیم:



محدودهٔ برد تابع در بازهٔ مورد نظر برابر بازهٔ $[۰,۱)$ است. حالا نحوهٔ تولید تابع $y=-x^۲+۱$ به‌صورت زیر است:

y: (توان ۲) → (×(−۱)) → (+۱)

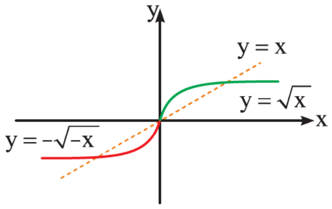
$y^{-۱}$: (√) ← (÷(−۱)) ← (−۱)

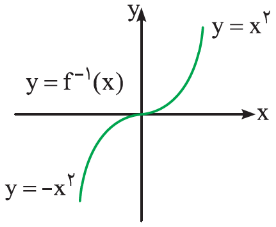
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{۱-x};۰\le x<۱$$

۳۹۶ **۳**

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، با توجه به این که وارون تابع‌های رادیکالی با فرجهٔ ۲، به شکل سهمی هستند خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x};x\ge ۰\\ -\sqrt{-x};x<۰\end{cases}\Rightarrow$$





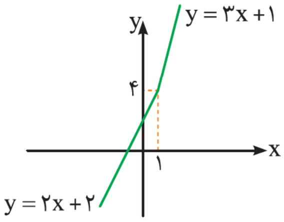
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=x|x|;x\in\mathbb{R}$$

یه جوره دیگه! توی کنکور خارج از کشور سال ۹۲، طراح پرسید: «ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & ;\ x\ne ۰\\ ۰ & ;\ x=۰\end{cases}$ کدام است؟» برای حل کافیه $|x|$ رو باز کنید که جواب میشه: $f^{-۱}(x)=x|x|$

۳۹۷ **۲**

نمودار تابع f به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}۳x+۱;x>۱\\ ۲x+۲;x\le ۱\end{cases}$$



حالا با توجه به برد هر یک از ضابطه‌ها، ضابطهٔ وارون تابع به شکل زیر است:

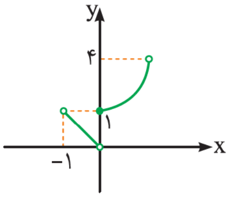
$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳}(x-۱); x>۴\\ \frac{x}{۲}-۱; x\leq ۴\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}, b=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(\frac{b}{a})=f^{-۱}(\frac{۳}{۲})=\frac{\frac{۳}{۲}}{۲}-۱=-\frac{۱}{۴}$$

۳۹۸ **۲**

بهتر است، نمودار تابع f را رسم کنیم. توجه کنید در ضابطهٔ بالایی، وقتی $-۱<x<۰$ است، پس $[x]=-۱$ می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}-x\ ;\ -۱<x<۰\\ ۲^x\ ;\ ۰\leq x<۲\end{cases}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases}-x & ; ۰<x<۱\\ \log_۲ x & ; ۱\leq x<۴\end{cases}$$

۳۹۹ **۲**

ابتدا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۳x+۲+۲x-۲}{x-۱}=\frac{۵x}{x-۱}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{x-۵}$$

دام تستی اگر مخرج مشترک نمی‌گرفتی، گزینهٔ (۳) رو میزدی که غلطه!

هایلایت

اگر تابع کسری $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ یک‌به‌یک باشد:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

اگر $a+d=۰$ باشد، وارون تابع با خود تابع برابر است.

۴۰۰ **۴**

چون $f^{-۱}(x)=\frac{۵x-۳}{bx+۴}$ است، پس $f(x)=\frac{-۴x-۳}{bx-۵}$ است. حالا چون بُرد f برابر $\mathbb{R}-\{-۲\}$ است، پس:

$$\frac{-۴}{b}=-۲\Rightarrow b=۲\Rightarrow f(x)=\frac{-۴x-۳}{۲x-۵}$$

از طرفی دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{a\}$ است، پس:

$$a=\frac{۵}{۲}\Rightarrow ab=\frac{۵}{۲}\times ۲=۵$$

۴۰۱ **۴**

$$f(f(x))=\frac{af(x)+۱}{۲f(x)-۱}\Rightarrow f(x)=\frac{ax+۱}{۲x-۱}$$

از طرفی چون $f^{-۱}(۰)=-۲$ است، پس $f(-۲)=۰$ است:

$$f(-۲)=\frac{-۲a+۱}{-۴-۱}=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

پس $g(x)=\frac{۴x+۱}{۲x+\frac{۱}{۲}}$ است. چون صورت این کسر، مضربی از مخرج آن است، پس تابع g وارون‌پذیر نیست.

هایلایت

در توابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر صورت و مخرج کسر پس از فاکتورگیری با هم ساده شوند و عدد ثابت باقی بماند، تابع یک به یک نبوده و در نتیجه وارون‌پذیر نیست. این اتفاق در صورتی رُخ می‌دهد که $ad=bc$ باشد.

۴۰۲ **۴**

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. برای این‌که $f(x)$ را پیدا کنیم باید در تساوی داده شده به جای xها عبارت $\frac{x-۴}{۲}$ قرار دهیم:

$$f(۲\times\frac{x-۴}{۲}+۴)=\frac{۴\times\frac{x-۴}{۲}-۶}{۲\times\frac{x-۴}{۲}+a}\Rightarrow f(x)=\frac{۲x-۱۴}{x+a-۴}$$

چون $f(x)=f^{-۱}(x)$ است، پس: $(a-۴)+(۲)=۰\Rightarrow a=۲$

۴۰۳ **۲**

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x=\frac{f(x)-۳x}{f(x)+۴}\Rightarrow xf(x)+۴x=f(x)-۳x$$

$$\Rightarrow xf(x)-f(x)=-۷x\Rightarrow f(x)(x-۱)=-۷x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-۷x}{x-۱}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{x+۷}$$

۴۰۴ **۲**

چون مخرج کسر بزرگ‌تر از صورت کسر است و هم‌چنین علامت آن همواره مثبت است، پس $-۱<\frac{x}{۱+|x|}<۱$ است. یعنی محدودهٔ بُرد تابع f به‌صورت $(-۱,۱)$ است. حالا ضابطهٔ وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+۱}; x\geq ۰\\ \frac{x}{-x+۱}; x<۰\end{cases}\xrightarrow[\text{هموگرافیک}]{\text{طبق وارون}}f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{-x}{x-۱}; ۰\leq x<۱\\ \frac{-x}{-x-۱}; -۱<x<۰\end{cases}$$

می‌توانیم ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به‌صورت زیر مرتب کنیم:

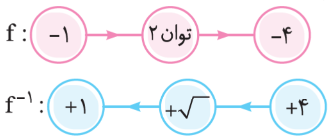
$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x}{۱-x}\ ; ۰\leq x<۱\\ \frac{x}{۱+x}\ ; -۱<x<۰\end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۱-|x|}\ ;\ \underbrace{-۱<x<۱}_{|x|<۱}$$

با مقایسهٔ ضابطهٔ $f^{-۱}$ با صورت سؤال، نتیجه می‌گیریم $a=۱$ و $b=۱$ است و $a\times b=۱$ است.

۴۰۵ **۴**

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۱)^۲-۴\ ;\ x\geq ۱$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:



$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$$

حالا نقاط تلاقی نمودارهای $f^{-۱}$ و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{\text{جای‌گذاری}}x=۲۱$$

۴۰۶ **۳**

ابتدا نقطهٔ برخورد f و $g^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=g^{-۱}(x)\Rightarrow x^{۲}-۳x+۱=۳x-۴\Rightarrow x^{۲}-۶x+۵=۰$$

$$\xrightarrow[x<\frac{۳}{۲}]{\text{مجموع ضرایب برابر صفر}}\begin{cases}x=۱\xrightarrow{y=۳x-۴}y=-۱\Rightarrow A(۱,-۱)\\ x=۵\ \times\end{cases}$$

چون دو تابع f و $g^{-۱}$ در نقطهٔ $A(۱,-۱)$ متقاطع‌اند، پس دو تابع $f^{-۱}$ و g در نقطهٔ $A'(-۱,۱)$ متقاطع‌اند.

هایلایت

اگر دو تابع f و $g^{-۱}$ در نقطهٔ $A(a,b)$ متقاطع باشند، آن‌گاه دو تابع $f^{-۱}$ و g در نقطهٔ $A'(b,a)$ متقاطع‌اند.

۴۰۷ **۲**

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x^{۲}-۴x+۱=(x-۲)^{۲}-۳\ ;\ x\le ۲$$

مراحل تولید تابع f به شکل زیر است:

$$f:\ \boxed{-۲}\rightarrow\boxed{\text{توان ۲}}\rightarrow\boxed{-۳}$$

$$f^{-۱}:\ \boxed{+۲}\leftarrow\boxed{-\sqrt{\ }}\leftarrow\boxed{+۳}\ \Rightarrow f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۳}$$

حالا نقاط تقاطع توابع $y=۱-f^{-۱}(x)$ و $y=\sqrt{f(x)+۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱-f^{-۱}(x)=\sqrt{f(x)+۳}\Rightarrow\sqrt{x+۳}-۱=\sqrt{(x-۲)^{۲}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+۳}-۱=|x-۲|\xrightarrow{x\le ۲}\sqrt{x+۳}-۱=-(x-۲)$$

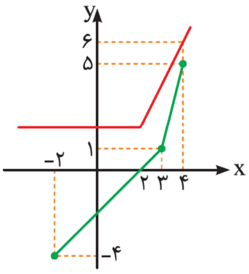
$$\Rightarrow\sqrt{x+۳}=-x+۳\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=۶\times\end{cases}\xrightarrow{y=|x-۲|}y=۱$$

$$\Rightarrow A(۱,۱)\Rightarrow|OA|=\sqrt{۲}$$

۴۰۸ **۴**

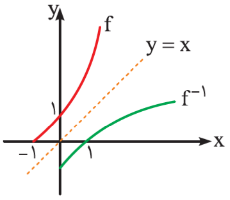
با توجه به شکل صورت سؤال، سه نقطهٔ $A(-۴,-۲)$ ، $B(۱,۳)$ و $C(۵,۴)$ روی نمودار تابع f قرار دارند، پس سه نقطهٔ $A'(-۲,-۴)$ و $B'(۳,۱)$ و $C'(۴,۵)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ هستند.

حالا با کمک سه نقطهٔ A' و B' و C' نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ را رسم می‌کنیم و با توجه به نمودار تابع قدرمطلقی $g(x)=x+|x-۲|$ داریم:



$\Rightarrow$ متقاطع نیستند

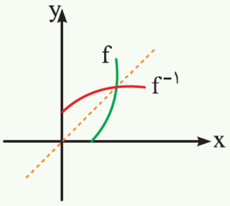
۴۰۹ **۴**



نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲}$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد و هیچ نقطهٔ تلاقی با آن ندارد، پس f و $f^{-۱}$ همدیگر را قطع نمی‌کنند.

هایلایت

برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودارهای f و $f^{-۱}$، راهکار کلی این است که ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به‌دست آوریم و سپس معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$ را حل کنیم.



❗ در توابع اکیداً صعودی و توابع هموگرافیک نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ [در صورت وجود]، همان نقاط برخورد f و خط $y=x$ است. پس در این توابع معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم.

❗ در توابع اکیداً نزولی، می‌توانیم برای پیدا کردن محل تلاقی f و $f^{-۱}$ از رسم نمودار استفاده کنیم.

۴۱۰ **۲**

تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}-۱$ یک تابع اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل تقاطع این تابع با وارونش، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+۳}-۱=x\Rightarrow\sqrt{x+۳}=x+۱\Rightarrow x+۳=x^{۲}+۲x+۱$$

$$\Rightarrow x^{۲}+x-۲=۰\Rightarrow(x+۲)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\xrightarrow{y=x}y=۱\\ x=-۲\ \times\end{cases}$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ $M(۱,۱)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OM|=\sqrt{(۱-۰)^{۲}+(۱-۰)^{۲}}=\sqrt{۲}$$

۴۱۱ **۲**

چون تابع f یک تابع هموگرافیک است، پس برای مشخص کردن نقاط برخورد f و $f^{-۱}$ می‌توانیم معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=x\Rightarrow x+۴=x^{۲}-۲x$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۳x-۴=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-۱\\ x=۴\end{cases}$$

۴۱۲ **۳**

تابع $f(x)=x^{۳}+۳x-۱۲$ از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=x^{۳}$ و $y=۳x-۱۲$ به‌دست آمده، پس اکیداً صعودی است. بنابراین برای پیدا کردن محل برخورد این تابع با وارونش، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم:

$$x^{۳}+۳x-۱۲=x\Rightarrow x^{۳}+۲x-۱۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow A(۲,۲)$$

$$\Rightarrow OA=\sqrt{۲^{۲}+۲^{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

یه جوره دیگه! «فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $f(x)=۲x-۳+\sqrt{x-۱}$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟»

جواب: $۲\sqrt{۲}$

۴۱۳ **۲**

تابع $y=\log_{۴}(۲^{x+۲}+۳۲)$ از ترکیب دو تابع اکیداً صعودی $f(x)=\log_{۴}x$ و $g(x)=۲^{x+۲}+۳۲$ به‌دست آمده (تابع fog) پس اکیداً صعودی است. پس برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد این تابع با وارونش، داریم:

$$\log_{۴}(۲^{x+۲}+۳۲)=x\Rightarrow ۴^{x}=۲^{x+۲}+۳۲\Rightarrow(۲^{x})^{۲}-۴\times(۲^{x})-۳۲=۰$$

$$\xrightarrow{۲^{x}=t}t^{۲}-۴t-۳۲=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-۴ & \times\\ t=۸\Rightarrow ۲^{x}=۸\Rightarrow x=۳\end{cases}$$

پس $A(۳,۳)$ است و فاصلهٔ آن از نقطهٔ $O(۰,۰)$ برابر $OA=۳\sqrt{۲}$ است.

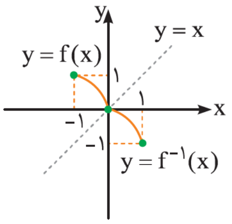
۴۱۴ **۴**

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱+x}}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱)\ ۱+x\geq ۰\Rightarrow x\geq -۱$$

$$۲)\ ۱-\sqrt{۱+x}\geq ۰\Rightarrow\sqrt{۱+x}\leq ۱\Rightarrow ۱+x\leq ۱\Rightarrow x\leq ۰$$

از اشتراک بازه‌های (۱) و (۲) دامنهٔ تابع f برابر بازهٔ $[-۱,۰]$ به‌دست می‌آید. حالا می‌دانیم تابع $y=\sqrt{۱+x}$ اکیداً صعودی است، پس $y=-\sqrt{۱+x}$ اکیداً نزولی و $y=۱-\sqrt{۱+x}$ نیز اکیداً نزولی است. از طرفی می‌دانیم تابع f از ترکیب تابع اکیداً نزولی $y=۱-\sqrt{۱+x}$ و تابع اکیداً صعودی $\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید. پس تابع f یک تابع اکیداً نزولی است. حالا یک تابع اکیداً نزولی در بازهٔ $[-۱,۰]$ رسم می‌کنیم و برای رسم کردن وارون آن، نمودار را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم:



پس دو تابع f و $f^{-۱}$ فقط در $x=۰$ متقاطع‌اند.

۴۱۵ **۴**

دامنهٔ تابع f به‌صورت بازهٔ $[۱,+\infty)$ و برد تابع f برابر بازهٔ $(-\infty,۲]$ است.

درضمن می‌دانیم $f^{-۱}of(x)=x;x\in D_f$ و $fof^{-۱}(x)=x;x\in R_f$ است. حالا چون $x=۳$ در برد تابع f قرار ندارد، پس $fof^{-۱}(۳)$ تعریف نشده است.

هایلایت

اگر تابع $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، ترکیب این تابع با وارونش، همواره برابر با x است. از طرفی با توجه به دامنهٔ توابع f و $f^{-۱}$، با حالت‌های زیر مواجه می‌شویم:

۱ در تابع $f^{-۱}of$، چون x ابتدا وارد تابع f می‌شود، پس x باید عضو دامنهٔ f باشد:

$$(f^{-۱}of)(x)=x\ ;\ x\in D_f$$

۲ در تابع $fof^{-۱}$، چون x ابتدا وارون تابع $f^{-۱}$ می‌شود، پس x باید عضو دامنهٔ $f^{-۱}$ باشد:

$$(fof^{-۱})(x)=x\ ;\ x\in D_{f^{-۱}}$$

۴۱۶ **۲**

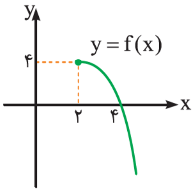
برای این‌که تساوی داده شده برقرار باشد، باید f تابعی وارون‌پذیر با دامنه و برد یکسان باشد. در میان گزینه‌ها، دامنه و برد توابع موجود در گزینه‌های (۱) و (۴) به‌صورت بازهٔ $[۲,+\infty)$ و دامنه و برد تابع گزینهٔ (۳) برابر $\mathbb{R}-\{۱\}$ است. اما در گزینهٔ (۲) دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ و بُرد آن برابر $(۱,+\infty)$ است.

۴۱۷ **۳**

ابتدا نمودار تابع $f(x)=۴x-x^{۲};x\geq ۲$ را رسم می‌کنیم:

دامنهٔ تابع f برابر بازهٔ $[۲,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $(-\infty,۴]$ است.

پس:



$$\Rightarrow\begin{cases}f^{-۱}of(x)=x;x\geq ۲\\ fof^{-۱}(x)=x:x\leq ۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=(f^{-۱}of)(x)+(fof^{-۱})(x)=x+x=۲x;۲\leq x\leq ۴$$

که نمودار این تابع در گزینهٔ (۳) آمده است.

۴۱۸ **۴**

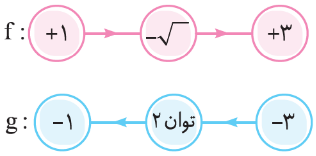
برای پیدا کردن $g(۳)$، باید در تساوی داده شده به جای x عدد ۹ بگذاریم:

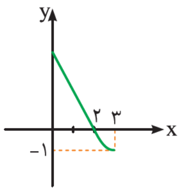
$$f^{-۱}(۳x+۱)=g(\frac{x+۳}{۴})\xrightarrow{x=۹}f^{-۱}(۲۸)=g(۳)$$

$$\Rightarrow f(g(۳))=f(f^{-۱}(۲۸))=۲۸$$

۴۱۹ **۳**

چون ترکیب دو تابع f و g برابر x یعنی تابع همانی است، پس دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند، یعنی $g(x)=f^{-۱}(x)$ است. حالا نمودار تابع f و وارون آن را رسم می‌کنیم:





$$\Rightarrow g(x)=(x-۳)^{۲}-۱\ ;\ x\le ۳$$

یه جوره دیگه! طراح به جای این‌که f و g رو به شکل ماشین نمایش بده، می‌تونست بگه «اگر $f(x)=۳-\sqrt{x+۱}$ و ترکیب دو تابع f و g تابع همانی باشد، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۴۲۰ **۲**

چون در تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$ رابطهٔ $a+d=۰$ برقرار است، پس $f(x)=f^{-۱}(x)$ است، بنابراین:

$$f(f(f(\sqrt{۲})))=f(f^{-۱}(f(\sqrt{۲})))=f(\sqrt{۲})$$

$$=\frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}=\frac{۲}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

یه جوره دیگه! یادش بخیر در کتاب میکروطبقه‌بندی ریاضی سال ۹۹ و قبل از این‌که سروکلهٔ این تیپ سوال در کنکورها پیدا بشه، این تست رو آورده بودم: «اگر $f(x)=\frac{۲x+۱}{۵x-۲}$ باشد، حاصل $fof(\sqrt{۵})$ کدام است؟» جواب: $\sqrt{۵}$

۴۲۱ **۴**

تابع $f(x)=x+\sqrt{x}+۳$ از جمع دو تابع اکیداً صعودی $y=x$ و $y=\sqrt{x}+۳$ به‌دست آمده است. پس تابعی اکیداً صعودی است که دامنهٔ آن برابر $[۰,+\infty)$ و بُرد آن $[۳,+\infty)$ است. در ضمن می‌دانیم $fof^{-۱}(x)=x\ ;\ x\ge ۳$ است. حالا نقطهٔ برخورد این تابع را با $y=\sqrt{-x+۶}$ پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{-x+۶}=x\Rightarrow -x+۶=x^{۲}\Rightarrow \underbrace{x^{۲}+x-۶}_{(x+۳)(x-۲)}=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۳\\x=۲\end{cases}$$

هر دو مقدار x به‌دست آمده در دامنهٔ تابع $fof^{-۱}(x)$ وجود ندارد، پس این دو تابع متقاطع نیستند.

۴۲۲ **۲**

می‌دانیم $(f^{-۱}og)^{-۱}(۲)=g^{-۱}(f(۲))$ است. درضمن با توجه به ضابطهٔ f واضح است که $f(۲)=۲^{۳}+۲=۱۰$ است. پس $g^{-۱}(f(۲))=g^{-۱}(۱۰)$ است. حالا برای پیدا کردن $g^{-۱}(۱۰)$ کافی است، ضابطهٔ g را برابر ۱۰ قرار دهیم:

$$\frac{۱-x}{x+۲}=۱۰\Rightarrow ۱-x=۱۰x+۲۰\Rightarrow ۱۱x=-۱۹\Rightarrow x=-\frac{۱۹}{۱۱}$$

هایلایت

برای به‌دست آوردن تابع $f^{-۱}og^{-۱}$ با داشتن توابع f و g، می‌توانیم تابع gof را به‌دست آوریم و سپس آن را وارون کنیم، یعنی:

$$(f^{-۱}og^{-۱})(x)=(gof)^{-۱}(x)$$

۴۲۳ **۴**

می‌دانیم $g^{-۱}of^{-۱}(x)=(fog)^{-۱}(x)$ است، پس می‌توانیم تابع $fog(x)$ را پیدا کنیم و سپس آن را وارون کنیم:

$$f(g(x))=-۵+\frac{۱}{\frac{x+۳}{x+۲}-۱}=-۵+\frac{۱}{\frac{۱}{x+۲}}=x-۳$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}}(fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)=x+۳$$

۴۲۴ **۲**

تابع $(fog)(x)=\frac{۳x+۱}{x+۱}$ را وارون می‌کنیم:

$$(fog)^{-۱}(x)=\frac{-x+۱}{x-۳}\Rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(x))=\frac{-x+۱}{x-۳}$$

$$\xrightarrow{x=۴}g^{-۱}(f^{-۱}(۴))=\frac{-۴+۱}{۴-۳}=-۳\Rightarrow g^{-۱}(۱)=-۳$$

۴۲۵ **۲**

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=ax^{۲}+x-۷$ بر $x-۲$ برابر $P(۲)$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=۲x^{۳}-x^{۲}+ax+۳$ بر $x-۲$ برابر $f(۲)$ است:

$$P(۲)=a(۲)^{۲}+۲-۷=۴a-۵$$

$$f(۲)=۲(۲)^{۳}-۲^{۲}+۲a+۳=۱۶-۴+۲a+۳=۲a+۱۵$$

حال چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ و $f(x)$ بر $x-۲$ یکسان است، بنابراین:

$$P(۲)=f(۲)\Rightarrow ۴a-۵=۲a+۱۵\Rightarrow ۲a=۲۰\Rightarrow a=۱۰$$

هایلایت

تقسیم

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای باشند و درجهٔ $p(x)$ از صفر بزرگتر باشد، آنگاه تساوی زیر برقرار باشد *[این تساوی را اتحاد تقسیم می‌نامند]*:

$$\begin{array}{c|l} f(x) & p(x) \\ \vdots & q(x) \\ \hline r(x) & \end{array} \rightarrow f(x)=p(x)\times q(x)+r(x)$$

توجه کنید در اتحاد تقسیم، درجهٔ باقی‌مانده از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر با $f(-\frac{b}{a})$ است.

مثلاً باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $x^۴-۳x^۳+x+۹$ بر $x-۲$ برابر است با:

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow r=f(۲)$$

$$=۲^۴-۳\times ۲^۳+۲+۹=۱۶-۲۴+۲+۹=۳$$

۴۲۶ **۱**

ابتدا ریشهٔ عبارت $x+۲$ را به‌دست می‌آوریم: $x+۲=۰\Rightarrow x=-۲$

اگر $f(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد، $f(-۲)=۰$ است.

$$f(-۲)=(-۲)^۵-۳(-۲)^۳+a(-۲)+۵=۰\Rightarrow -۲a=۳$$

$$\Rightarrow a=\frac{-۳}{۲}=-۱/۵$$

۴۲۷ **۱**

چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است، پس:

$$P(\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow ۲(\frac{۱}{۲})^۴+a(\frac{۱}{۲})^۳+۲(\frac{۱}{۲})^۲-۳(\frac{۱}{۲})=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}+\frac{a}{۸}+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow \frac{a+۱}{۸}=۱\Rightarrow a=۷$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$P(-۲)=۲(-۲)^۴+۷(-۲)^۳+۲(-۲)^۲-۳(-۲)$$

$$=۳۲-۵۶+۸+۶=-۱۰$$

۴۲۸ **۲**

می‌دانیم اگر $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $P(۱)=۰$ بنابراین:

$$P(۱)=(۱)^۳-۳a(۱)-۷=۰\Rightarrow a=-۲$$

پس ضابطهٔ $P(x)$ به صورت مقابل است: $P(x)=x^۳+۶x-۷$

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ کافی است $P(-۲)$ را محاسبه کنیم:

$$P(-۲)=(-۲)^۳+۶(-۲)-۷=-۸-۱۲-۷=-۲۷$$

۴۲۹ **۳**

فرض می‌کنیم با اضافه کردن عدد a به حاصل‌ضرب $x^۲+۵$ و $x-۸$ حاصل بر $x-۳$ بخش‌پذیر می‌شود، پس:

$$f(x)=(x^۲+۵)(x-۸)+a$$

حال چون $f(x)$ بر $x-۳$ بخش‌پذیر است، پس باید $f(۳)=۰$ باشد:

$$f(۳)=۰\Rightarrow (۳^۲+۵)(۳-۸)+a=۱۴\times(-۵)+a$$

$$=-۷۰+a=۰\Rightarrow a=۷۰$$

۴۳۰ **۲**

به دنبال باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$، یعنی $P(-۲)$ هستیم.

به همین دلیل در معادله $P(x)=۲P(-x)+۴x$ به جای x عدد ۲- را قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$x=-۲: P(-۲)=۲P(۲)-۸ \qquad (I)$$

و برای پیدا کردن $P(-۲)$، در معادله بالا $x=۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=۲: P(۲)=۲P(-۲)+۸ \qquad (II)$$

از حل دستگاه شامل معادلات (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} P(۲)=۲P(-۲)+۸ \\ P(-۲)=۲P(۲)-۸ \end{cases}\Rightarrow P(-۲)=۲(۲P(-۲)+۸)-۸$$

$$\Rightarrow P(-۲)=۴P(-۲)+۱۶-۸\Rightarrow ۳P(-۲)=-۸\Rightarrow P(-۲)=\frac{-۸}{۳}$$

یه جوره دیگه! طراح در کنکور ۹۹ مشابه این تست رو این‌جوری پرسید:

«فرض کنید چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x)=P(x-۱)+P(۱-x)$ آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ کدام است؟»

جواب: صفر

۴۳۱ **۱**

چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$ به‌ترتیب ۳ و ۱ است، پس:

$$P(۴)=۳ \ , \ P(-۲)=۱$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x^۲)+۴P(-x)$ بر $x-۲$ برابر است با:

$$P(۲^۲)+۴P(-۲)=P(۴)+۴P(-۲)=۳+۴(۱)=۷$$

۴۳۲ **۱**

برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x^۲+۱)+۳P(۱-x)$ بر $x+۱$، باید در عبارت، $x=-۱$ را جای‌گذاری کنیم:

$$P((-۱)^۲+۱)+۳P(۱-(-۱))=P(۲)+۳P(۲)=۴P(۲)$$

اکنون حاصل $P(۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$P(۲)=(۲)^۳+m(۲)^۲+(۳m-۲)(۲)-۱۰m-۴$$

$$=۸+۴m+۶m-۴-۱۰m-۴=۰$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x^۲+۱)+۳P(۱-x)$ بر $x+۱$ برابر است با:

$$۴P(۲)=۴\times ۰=۰$$

۴۳۳ **۲**

در این سؤال $x^۲+۱=۰$ ریشه ندارد. ولی می‌توان نتیجه گرفت که $x^۲=-۱$ است.

حال در ضابطهٔ $f(x)$ داریم: $f(x)=۲x^۳-x^۲-۴x+۱$

$$۲xx^۲-x^۲-۴x+۱=۲x(-۱)-(-۱)-۴x+۱=-۶x+۲$$

در حوزهٔ اعداد فراتر از $\mathbb{R}$ عبارت $\sqrt{-۱}$ نیز تعریف شده است. این حوزه اعداد مختلط نام دارد و آن را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهند. پس عبارت $x^۲=-۱$ در حوزهٔ اعداد مختلط تعریف شده است.

هایلایت

در محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر عبارتی مانند $P(x)$ که $P(x)$ ریشه ندارد، می‌توانیم $P(x)=۰$ قرار دهیم و با نتایج این کار بازی کنیم تا در $f(x)$ قرار دهیم. عبارتی که به‌دست می‌آوریم همان باقی‌مانده است.

۴۳۴ **۴**

اتحاد تقسیم را می‌نویسیم و در آن $x=۱$ و $x=-۱$ می‌گذاریم:

$f(x)=(x^۲+۴x+۵)Q(x)+x+۲$

۱) $f(۱)=۱۰Q(۱)+۳=۱۳\Rightarrow Q(۱)=۱$

۲) $f(-۱)=۲Q(-۱)+۱=۱۱\Rightarrow Q(-۱)=۵$

با توجه به گزینه‌ها، فقط $Q(x)=-۲x+۳$ مناسب است.

۴۳۵ **۴**

ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-۲)=(-۲)^۷-۴(-۲)^۵+(-۲)^۲+۱=-۱۲۸+۱۲۸+۴+۱=۵$$

حال اتحاد تقسیم را نوشته و از آن‌جایی که باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x-۱$ برابر $q(۱)$ است، در اتحاد تقسیم $x=۱$ را قرار می‌دهیم:

اتحاد تقسیم: $x^۷-۴x^۵+x^۲+۱=(x+۲)q(x)+۵$

$$\xrightarrow{x=۱}۱-۴+۱+۱=(۱+۲)q(۱)+۵\Rightarrow-۶=۳q(۱)\Rightarrow q(۱)=-۲$$

۴۳۶ **۲**

چون $P(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس $P(-۲)=۰$ است.

$P(-۲)=-۸+۴a-۲+b=۰\Rightarrow ۴a+b=۱۰$ (۱)

و باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۱$ برابر ۶ است، پس $P(۱)=۶$ است.

$P(۱)=۱+a+۱+b=۶\Rightarrow a+b=۴$ (۲)

با معادله (۱) و (۲) در دستگاه داریم:

$$\begin{cases}۴a+b=۱۰\\ a+b=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=۲\end{cases}$$

پس $P(x)$ به صورت $x^۳+۲x^۲+x+۲$ است. با تقسیم $P(x)$ بر $x-۱$ داریم:

$$x^۳+۲x^۲+x+۲=(x-۱)\underbrace{(x^۲+۳x+۴)}_{Q(x)}+۶$$

برای محاسبه باقی‌مانده تقسیم $P(x-۱)+Q(\frac{x}{۲})$ بر $x-۲$ مقدار $x=۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\xrightarrow{x=۲}P(۱)+Q(۱)=۶+۸=۱۴$$

۴۳۷ **۲**

چون $P(x)=x^{۲n+۱}+۲x^{۲n}+x^۵-۵x^۳+k$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس $P(-۲)=۰$ است و داریم:

$$P(-۲)=۰\Rightarrow(-۲)^{۲n+۱}+۲(-۲)^{۲n}+(-۲)^۵-۵(-۲)^۳+k=۰$$

$$\Rightarrow-۲\times(-۲)^{۲n}+۲(-۲)^{۲n}-۳۲+۴۰+k=۰\Rightarrow k=-۸$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم این چندجمله‌ای بر $x-۱$ برابر $P(۱)$ است:

$$P(۱)=(۱)^{۲n+۱}+۲(۱)^{۲n}+۱^۵-۵(۱)^۳-۸=۱+۲+۱-۵-۸=-۹$$

۴۳۸ **۳**

چون تابع $P(x)$ یک چندجمله‌ای است، باید توان‌های متغیرهای آن، اعداد حسابی $(\mathbb{W})$ باشد، داریم:

۱) $(n-۳)\in\mathbb{W}\Rightarrow n-۳\geq۰\Rightarrow n\geq۳$

۲) $\frac{۲n+۳}{n}\in\mathbb{W}\Rightarrow(\frac{۲n}{n}+\frac{۳}{n})\in\mathbb{W}\Rightarrow(۲+\frac{۳}{n})\in\mathbb{W}\Rightarrow\begin{cases}n=۱ ✗\\ n=۳ ✓\end{cases}$

بنابراین تابع $P(x)$ به صورت $P(x)=x^۳+x^۳-۲+۱+۳$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم این عبارت بر $۲x-۱$ را پیدا می‌کنیم:

$$۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ ,\ P(x)=۲x^۳+۲$$

$$P(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})^۳+۲=۲(\frac{۱}{۸})+۲=۲/۲۵$$

۴۳۹ **۱**

چون $P(x)$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس فرض می‌کنیم $n=۱$ باشد:

$P(x)=x^۴+۲x^۳+x^۶+۳x^۵+۱۶a$

$$\xrightarrow{P(-۲)=۰}-۳۲+۱۶a=۰\Rightarrow a=۲$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x^۲+۲x-۳$ را به صورت $ax+b$ در نظر می‌گیریم و با اتحاد تقسیم داریم:

$$x^۴+۲x^۳+x^۶+۳x^۵+۳۲=\underbrace{(x^۲+۲x-۳)}_{(x-۱)(x+۳)}Q(x)+ax+b$$

$$\left.\begin{array}{l}۱)\,P(۱)=۳۹=a+b\\ ۲)\,P(-۳)=۵۹=-۳a+b\end{array}\right.\Rightarrow a=-۵\ ,\ b=۴۴$$

$\Rightarrow$ باقی‌مانده: $-۵x+۴۴$

۴۴۰ **۱**

با توجه به نمایش تقسیم داریم:

$$P(x)=(x^{۲}-۳x-۴)q(x)+(۳x-۴)$$

$$\Rightarrow P(x)=(x+۱)(x-۴)q(x)+(۳x-۴)\Rightarrow \begin{cases}P(-۱)=-۷\\ P(۴)=۸\end{cases}$$

باقی‌مانده‌تقسیم $P(x+۱)$ بر $x+۲$ ، برابر $P(-۲+۱)=P(-۱)=-۷$ است.

هایلایت

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر مقسوم علیه درجهٔ دوم [یا بالاتر]

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر یک عبارت درجهٔ دوم [یا با درجهٔ بالاتر] راهکار کلی این است که ابتدا مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار دهیم. سپس در مقسوم‌علیه، جمله با درجهٔ بیشتر را برحسب سایر جملات به دست آورده و آن را در $f(x)$ قرار می‌دهیم. این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجهٔ عبارت $f(x)$ کم‌تر از درجهٔ مقسوم‌علیه شود. عبارت به‌دست آمده، همان باقی‌مانده است. [این روش به روش کاهش توان مشهور است.]

مثلاً برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ عبارت $f(x)=۲x^{۳}+۵x-۹$ بر $x^{۳}-x$ ، مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$x^{۳}-x=۰\Rightarrow x^{۳}=x\xrightarrow[f(x)]{\text{جای‌گذاری}}۲x+۵x-۹=۷x-۹$$

بنابراین باقی مانده $۷x-۹$ است.

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر یک عبارت درجهٔ دوم [یا با درجهٔ بالاتر] اگر مقسوم‌علیه قابل تجزیه به عوامل درجهٔ اول باشد، با جای‌گذاری ریشه‌های عوامل مقسوم‌علیه در اتحاد تقسیم، باقی‌مانده را به‌دست می‌آوریم.

! اگر مقسوم علیه، یک عبارت درجهٔ دوم باشد، باقی‌مانده حداکثر از درجهٔ اول خواهد بود. پس باید باقی‌مانده را به‌صورت $ax+b$ درنظربگیریم.

۴۴۱ **۴**

مقسوم‌علیه را به صورت $(x-۱)(x+۱)$ می‌نویسیم و با کمک اتحاد تقسیم داریم:

$$ax^{۳}+bx^{۲}+۲x+۱=(x-۱)(x+۱)q(x)+x+۲$$

$$\left.\begin{array}{l}x=۱: a+b+۳=۰+۳\Rightarrow a+b=۰\\ x=-۱: -a+b-۱=۰+۱\Rightarrow -a+b=۲\end{array}\right\}\Rightarrow a=-۱\ ,\ b=۱$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+۲$ را به دست می‌آوریم:

$$f(-۲)=-۸a+۴b-۴+۱=-۸(-۱)+۴(۱)-۳=۹$$

۴۴۲ **۱**

با توجه به اتحاد تقسیم داریم: $P(x)=(x^{۲}-x)Q(x)+x+۴$

$$\Rightarrow P(x)=x(x-۱)Q(x)+x+۴\Rightarrow\begin{cases}P(۰)=۴\\ P(۱)=۵\end{cases}$$

با جای‌گذاری در $P(x)$ داریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}(۰)^{۴}+a(۰)^{۲}+۳(۰)+b=۴\Rightarrow b=۴\\ (۱)^{۲}+a(۱)^{۲}+۳(۱)+۴=۵\Rightarrow a=-۳\end{cases}$$

بنابراین $P(x)=x^{۴}-۳x^{۲}+۳x+۴$ و خارج‌قسمت آن در تقسیم بر $x^{۲}-x$ برابر $Q(x)=x^{۲}+x-۲$ است.

باقی‌مانده تقسیم $۴P(x)+Q(x+۱)$ بر $x-۱$ برابر است با:

$$\xrightarrow{x=۱}۴P(۱)+Q(۲)=۴(۵)+((۲)^{۲}+۲-۲)=۲۰+۴=۲۴$$

۴۴۳ **۱**

با توجه به اتحاد تقسیم داریم:

$$P(x+۲)=(۲x^{۲}-۳x-۱)Q(x)$$

وقتی باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x+۱$ برابر ۲ می‌شود، یعنی $Q(-۱)=۲$ است. اکنون برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۱$ ، کافی است در $P(x+۲)$ ، جای x عدد ۱- را قرار دهیم که به $P(۱)$ برسیم.

$$x=-۱: P(-۱+۲)=(۲(-۱)^{۲}-۳(-۱)-۱)Q(-۱)$$

$$\Rightarrow P(۱)=(۲+۳-۱)Q(-۱)=۴Q(-۱)=۴\times۲=۸$$

۴۴۴ **۴**

با توجه به اتحاد تقسیم $P(x)=(x^{۲}+۲x)Q(x)+۳x+۱$ است، پس مشتق آن برابر است با:

$$P'(x)=(۲x+۲)Q(x)+Q'(x)(x^{۲}+۲x)+۳$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+۲$ برابر $P'(-۲)$ است:

$$P'(-۲)=-۲\underbrace{Q(-۲)}_{۳}+\underbrace{Q'(-۲)\times۰}_{۰}+۳=-۳$$

۴۴۵ **۳**

با فرض $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ نتیجه می‌گیریم $P'(x)=۲ax+b$ است، پس با توجه به اتحاد تقسیم خواهیم داشت:

$$P(x)=P'(x)(\frac{۱}{۲}x+۱)+(-۲)$$

$$\Rightarrow ax^{۲}+bx+c=(۲ax+b)(\frac{۱}{۲}x+۱)-۲$$

$$\Rightarrow ax^{۲}+bx+c=ax^{۲}+(۲a+\frac{b}{۲})x+b-۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a+\frac{b}{۲}=b\Rightarrow ۲a=\frac{b}{۲}\Rightarrow b=۴a\\ c=b-۲\end{cases}$$

$$\xrightarrow{a,b,c\in\mathbb{N}}\begin{cases}a=۱\ ,\ c=۲\ ,\ b=۴\\ \text{یا}\\ a=۲\ ,\ c=۶\ ,\ b=۸\end{cases}$$

پس $a+b+c$ می‌تواند برابر ۷ یا ۱۶ باشد که کمترین مقدار آن برابر با ۷ است.

۴۴۶ **۳**

دراین‌سؤال $f(x)$ بر $(x-۲)^{۲}$ $=x^{۲}-۴x+۴$ بخش‌پذیراست.بنابراین:

$$\begin{cases}f(۲)=۰\\ f'(۲)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۶+۴a+۲b+۲=۰\\ \underset{x=۲}{\underset{\downarrow}{(۶x^{۲}+۲ax+b)=۰}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a+b=-۹\\ ۴a+b=-۲۴\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}a=-۷/۵\\ b=۶\end{array}$$

بنابراین $۲a+۳b=-۱۵+۱۸=۳$ است.

هایلایت

اگر عبارت چند جمله‌ای $f(x)$ ، بر یک عبارت مربع کامل مانند $(x-a)^{۲}$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه هر دو شرط زیر برقرار است:

① $f(a)=۰$ ② $f'(a)=۰$

۴۴۷ **۱**

ازآنجاکه باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-۱)^۲$ برابر با $۳x+۱$ است، نتیجه می‌گیریم که $f(x)-۳x-۱$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیر است. در نتیجه تابع $g(x)=x^۳+ax^۲+(b-۳)x+۵$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{cases} g(۱)=۰ \\ g'(۱)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱+a+(b-۳)+۵=۰ \\ (۳x^۲+۲a)+(b-۳))\underset{x=۱}{\underset{\downarrow}{=}}۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۳ \\ ۲a+b=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=۳, b=-۶$$

بنابراین $\frac{b}{a}=-۲$ است.

۴۴۸ **۱**

با توجه به این‌که عبارت a^n-b^n بر $a-b$ بخش‌پذیر است. پس $(x^۳+x^۲+۱)^۹-(x^۳+۲)^۹$ بر $(x^۳+x^۲+۱)-(x^۳+۲)=x^۲-۱$ بخش‌پذیر است. بنابراین عبارت موردنظر برگزینه‌ای که شامل $x^۲-۱$ یا هرکدام از عامل‌های آن یعنی $x+۱$ یا $x-۱$ است بخش‌پذیر است. اما بر $x^۲+۱$ بخش‌پذیر نیست.

۴۴۹ **۲**

با توجه به این‌که $x^۷-۱=(x-۱)(x^۶+x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$ است، در سمت چپ تساوی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۲}{x^۷-۱}-\frac{x-۱}{(x^۶+x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)(x-۱)}=\frac{۲-(x-۱)}{x^۷-۱}$$

$$=\frac{۳-x}{x^۷-۱}$$

با مقایسه عبارت به‌دست‌آمده با سمت راست تساوی نتیجه می‌گیریم:

$$P(x)=۳-x$$

۴۵۰ **۴**

می‌دانیم عبارت x^n+a^n وقتی بر $x+a$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد. بنابراین تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $x^{۲۰}+۱=(x^۲)^{۱۰}+۱ \rightarrow$ زوج است. $n=۱۰$ ✗

۲) $x^{۲۰}+۱=(x^{۱۰})^۲+۱ \rightarrow$ زوج است. $n=۲$ ✗

۳) $x^{۲۰}+۱=(x^۵)^۴+۱ \rightarrow$ زوج است. $n=۴$ ✗

۴) $x^{۲۰}+۱=(x^۴)^۵+۱ \rightarrow$ فرد است. $n=۵$ ✓

۴۵۱ **۳**

با توجه به این‌که عبارت a^n-b^n همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است، پس $x^{۱۵}-۱^{۱۵}$ نیز برای $x-۱$ بخش‌پذیر است، اما این عبارت در گزینه‌ها نیست، از طرفی چون $x^{۱۵}-۱^{۱۵}=(x^۳)^۵-(۱^۳)^۵$، پس این عبارت بر $x^۳-۱^۳$ و عامل‌های آن نیز بخش‌پذیر است. با تجزیهٔ $x^۳-۱$ داریم:

$$x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱)$$

پس $x^{۱۵}-۱$ بر $x^۲+x+۱$ بخش‌پذیر است.

۴۵۲ **۲**

x^n-a^n فقط زمانی بر $x+a$ بخش‌پذیر است که n زوج باشد.

۴۵۳ **۴**

می‌دانیم $x^۹+۱$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است. حال با توجه به اتحاد تقسیم داریم:

$$x^۹+۱=(x+۱)Q(x) \Rightarrow Q(x)=\frac{x^۹+۱}{x+۱}$$

به‌ازای $x=-۱$ عبارت تعریف نشده است، پس می‌توان به جای محاسبه $Q(-۱)$ از $\lim\limits_{x\to-۱}Q(x)$ استفاده کرد:

$$\lim_{x\to-۱}Q(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{x^۹+۱}{x+۱}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to-۱}\frac{۹x^۸}{۱}=۹(-۱)^۸=۹$$

۴۵۴ **۱**

با توجه به این‌که چندجمله‌ای $x^۶-۶۴$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس اتحاد تقسیم به صورت $x^۶-۶۴=(x+۲)Q(x)$ است که از آن نتیجه می‌گیریم $Q(x)=\frac{x^۶-۶۴}{x+۲}$ می‌باشد. حال برای به‌دست آوردن $Q(-۲)$ از راه حل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۲}Q(x)=\lim_{x\to-۲}\frac{x^۶-۶۴}{x+۲}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to-۲}\frac{۶x^۵}{۱}=۶(-۲)^۵=-۱۹۲$$

۴۵۵ **۴**

اتحاد تقسیم را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲-x^{۱۴}=(x^۲+x+۱)Q(x)+r(x)$$

حالا طرفین این تساوی را در $(x-۱)$ ضرب می‌کنیم و با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\xrightarrow{\times(x-۱)}(x-۱)(۲-x^{۱۴})=(x^۲+x+۱)Q(x)(x-۱)+(x-۱)r(x)$$

$$\Rightarrow (x-۱)(۲-x^{۱۴})=(x^۳-۱)Q(x)+(x-۱)r(x)$$

حالا مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$x^۳-۱=۰\Rightarrow x^۳=۱\xrightarrow{\text{به توان ۴}}x^{۱۲}=۱\xrightarrow{\times x^۲}x^{۱۴}=x^۲$$

پس در اتحاد تقسیم به‌جای $x^۳$ عدد ۱ و به‌جای $x^{۱۴}$ عبارت $x^۲$ را قرار می‌دهیم:

$$(x-۱)(۲-x^۲)=\overbrace{(۱-۱)Q(x)}^{۰}+(x-۱)r(x)$$

$$\Rightarrow (x-۱)(۲-x^۲)=(x-۱)r(x)\Rightarrow r(x)=۲-x^۲$$

حالا مقسوم‌علیه یعنی $x^۲+x+۱$ را برابر صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$x^۲+x+۱=۰\Rightarrow x^۲=-x-۱$$

$$\Rightarrow r(x)=۲-x^۲=۲-(-x-۱)=x+۳$$

در نتیجه $r(x)=x+۳$ است و مجموع ضرایب آن برابر ۴ است.

۴۵۶ **۱**

عبارت $q(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$q(x)=x^۲(x^۲+۳x+۲)=x^۲(x+۲)(x+۱)$$

چون دوجمله‌ای $x^n+x^۳$ بزرگ‌ترین عامل مشترک عبارت است، پس باید عبارات $x^۲(x+۱)=x^۳+x^۲$ باشد، چرا که عبارت $x^۳+۲x^۲$ نوشته می‌شود که به‌دلیل وجود ضریب ۲، با ساختار به صورت $x^n+x^۳$ داده شده، انطباق ندارد. با مقایسهٔ $x^n+x^۳$ و $x^۳+x^۲$ متوجه می‌شویم $n=۲$.

از طرفی چون $x^۲(x+۱)$ عامل $p(x)$ نیز هست، پس $p(-۱)=۰$ است.

$$p(-۱)=۰\Rightarrow(-۱)^۵+a(-۱)^۳=۰\Rightarrow a=-۱$$

برای محاسبهٔ na داریم: $۲\times-۱=-۲$