



کنکور

# ریاضیات کامل انسانی



## میکرو فیلم

۳۸+ ساعت فیلم آموزشی اختصاصی

مؤلف: مهندس امیر زراندوز

درسنامه‌های کامل + تست‌های فراوان + پاسخ‌های روان

## مقدمه

سلام به همه دانش آموزان با صفای رشته انسانی، کتابی که الان دارید مقدمه اش رو می خونید حاصل بیش از ۱ سال تألیف بنده و حدود ۱۸ سال سابقه تدریس در این درسه. قطعاً شما هم متوجه شدین که تعداد داوطلبان انسانی، روزبه روز در حال افزایش هست و حتی از رشته های دیگه هم، به رشته انسانی ورود می کنن پس باید حواستون باشه که رقابت برای رسیدن به (شهر- رشته) های خوب، بسیار بالا رفته، پس الان کسی نباید بگه چون ریاضی رو دوست ندارم میذارمش کنار و بقیه دروس رو بالا می زنم. واقعاً هیچ تضمینی وجود نداره که شما درس های دیگه رو بالا بنزید چون هر سال، یک یا دو درس کنکور، بسیار سخت طرح می شن و حتی رتبه های خیلی خوب هم در این یکی دو درس، گیر می کنن. ضمناً هر درس، ارزش خاص خودشو داره و باید یک تعادلی بین درصدهای دروس مختلفتون باشه تا از بقیه جلوتر بیفتین. حالا که فهمیدین این درس رو نباید کنار بذارین چند تا از ویژگی های این کتاب رو بهترتون میگم:

۱ هر فصل کتاب درسی به چند بخش کوچک تر تقسیم شده و بلافاصله بعد از هر درسنامه، تست های اون بخش آورده شده، به جرأت می تونم بگم چنین تقسیم بندی دقیقی، در هیچ کتاب دیگه ای دیده نمی شه.

۲ با توجه به این که سؤالات کنکورهای جدید، عموماً دشوار شدن بر همین اساس من اومدم و درسنامه مربوط به این سؤالات دشوار رو هم آوردم تا به قول معروف، با دیدن این سؤالات، بهترتون شوک وارد نشه.

۳ بچه های عزیز لطفاً بعد از این که درسنامه هر قسمت رو مطالعه کردید، برید سراغ تست های واجب. بعد از این که تست های واجب رو حل کردید، برای این که به تسلط کافی برسید برید سراغ تست های تسلط. در نهایت اگر سطح ریاضیتون بالاست، می تونید از تست های IQ هم استفاده کنید و روی آن ها فکر کنید.

۴ در آخر کتاب، چند دوره آزمون براتون آوردم تا خودتونو محک بنزید.

۵ علاوه بر فیلم های بنده که به کمک اون ها به ساده ترین روش ها، ریاضی رو یاد می گیرید اگه احياناً مشکلی داشتین می تونید در فضای مجازی با من در ارتباط باشید. در تلگرام با آیدی **amirzarandooz** و در اینستاگرام با آیدی **amir\_zarandooz\_2** می تونید پیام بدین تاراهنماییتون کنم. ضمناً تمام دانش آموزانی که این کتاب رو تهیه کردند می تونن در کانال رایگان رفع اشکال بنده عضو بشن. برای این کار در اینستاگرام به بنده پیام بدین.

۶ در متن کتاب، هر جا حس کردم بچه ها دچار سؤال یا ابهام هستن یک سؤال و پاسخ بین شاگرد و دبیر طراحی کردم که به زبان عامیانه بیان شده تا حس کنید واقعاً سرکلاس من هستین. همین جا لازم می دونم از جناب آقای محمّد جوکار، مدیریت خوش فکر و بااخلاق انتشارات گاج تشکر مخصوص داشته باشم که همیشه بنده رو مورد لطف و حمایت خودشون قرار دادن.

۷ دوست و همکار خوبم جناب آقای محمدرضا پژوم به خاطر ایده های قشنگشون و از خانم فاطمه ایلخانی به خاطر بررسی کتاب تشکر می کنم. ضمناً از آقای علی فلاح به خاطر ویراستاری دقیق و موشکافانه شون ممنونم.

امیر زراندوز

# فهرست مطالب

## فصل صفرم

۸ یادآوری اتحادها، تجزیه و عبارت‌های گویا

## فصل سوم: تابع (پایه یازدهم)

۱۲۹ قسمت اول: توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

۱۴۵ قسمت دوم: توابع پلکانی و قدرمطلق

۱۶۳ قسمت سوم: اعمال روی توابع

## فصل اول: معادله درجه دوم

۲۵ قسمت اول: معادله درجه اول و روش‌های حل آن

۳۱ قسمت دوم: معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

۴۹ قسمت سوم: کاربردهای معادله درجه دوم

۶۰ قسمت چهارم: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

## فصل چهارم: کار با داده‌های آماری

۱۸۴ قسمت اول: گردآوری داده‌ها، انواع متغیرها

۱۹۲ قسمت دوم: معیارهای گرایش به مرکز (حدوسط)

۲۰۳ قسمت سوم: معیارهای (شاخص‌های) پراکندگی

## فصل پنجم: نمایش داده‌ها

۲۱۷ قسمت اول: نمودارهای تک متغیره

۲۳۰ قسمت دوم: نمودارهای چند متغیره

## فصل دوم: تابع (پایه دهم)

۶۹ قسمت اول: مفهوم رابطه و روش‌های نمایش آن

۷۳ قسمت دوم: مفهوم تابع و روش‌های نمایش آن

۸۳ قسمت سوم: مقدار تابع در یک نقطه، دامنه و برد تابع

۹۳ قسمت چهارم: توابع خطی و کاربرد آن‌ها در حل مسائل

۱۰۹ قسمت پنجم: سهمی (نمودار تابع درجه دوم)

## فصل ششم: آمار

۲۳۸ قسمت اول: شاخص‌های آماری

۲۵۳ قسمت دوم: سری‌های زمانی

# فهرست مطالب

## فصل دهم: الگوهای غیرخطی

۳۹۶ قسمت اول: دنباله هندسی

۴۱۶ قسمت دوم: ریشه  $n$  ام و توان های گویا

۴۳۰ قسمت سوم: تابع نمایی

۴۴۱ آزمون های جامع

۴۵۹ پاسخ نامه تشریحی

## فصل هفتم: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

۲۶۲ قسمت اول: گزاره ها - منطق ریاضی

۲۶۸ قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی

۲۷۷ قسمت سوم: گزاره های شرطی و دوشرطی

۲۹۰ قسمت چهارم: استدلال های ریاضی

## فصل هشتم: آمار و احتمال

۳۰۱ قسمت اول: اصول شمارش

۳۱۳ قسمت دوم: تبدیل - ترکیب

۳۲۱ قسمت سوم: احتمال (۱)

۳۴۲ قسمت چهارم: احتمال (۲)

۳۵۰ قسمت پنجم: چرخه آمار در حل مسائل

## فصل نهم: الگوهای خطی

۳۶۴ قسمت اول: مدل سازی و دنباله

۳۷۷ قسمت دوم: دنباله حسابی (عددی)

# فیلم‌های آموزشی

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر درس QR-code های زیر را اسکن کنید.

فصل صفر

فصل دوم

فصل اول

فصل چهارم

فصل سوم

فصل ششم

فصل پنجم

فصل هشتم

فصل هفتم

فصل دهم

فصل نهم



# درسنامه و تست

## فصل صفر

# یادآوری اتحادها، تجزیه و عبارتهای گویا

قبل از این که درس رو شروع کنم دوس دارم یه سلام و احوالپرسی کنم باهاتون. سلام، خویین دانشجویهای آینده؟ آقایان و خانمهای رشته انسانی، همین شروع کتاب، دوس دارم براتون آرزو کنم که هم تو مسائل درسی هم غیردرسی، به هر چی که خوبه برسید. شما در سالهای قبل با مفهوم عبارت جبری و اتحاد و تجزیه آشنا شدید پس فقط می‌خواهیم این مباحث رو یادآوری کنیم براتون. دوستان خوبم، خواهشاً فرمول اتحادها رو حتماً حفظ کنید چون تا آخر کتاب باهاشون سروکار داریم. اینقدر که اسم اتحادها توی ریاضی میاد اسم فریود توی روانشناسی نمیاد! این فصل به طور غیرمستقیم در تمام کتاب، کاربرد داره.

برای مشاهده فیلم آموزش این درس QR-code یا راستن کنید.

## انواع اتحادهای جبری مشهور

**1 اتحادهای مربع دو جمله‌ای:** در این اتحادها دو جمله‌ای‌های  $a + b$  و  $a - b$  به توان ۲ می‌رسند.  $a$  را جمله اول و  $b$  را جمله دوم می‌نامیم:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{مثال} \quad (\Delta x + 3y)^2 = (\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(3y) + (3y)^2 = \Delta^2 x^2 + 6\Delta xy + 9y^2$$

$\begin{matrix} \text{دو برابر اولی در دومی} \\ \uparrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{اولی به توان ۲} \qquad \qquad \text{دومی به توان ۲} \end{matrix}$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{مثال} \quad \left(\frac{m}{3} - 6z\right)^2 = \left(\frac{m}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{m}{3}\right)(6z) + (6z)^2 = \frac{m^2}{9} - 4mz + 36z^2$$

$\begin{matrix} \text{دو برابر اولی در دومی} \\ \uparrow \qquad \qquad \downarrow \\ \text{اولی به توان ۲} \qquad \qquad \text{دومی به توان ۲} \end{matrix}$

$$\left(\frac{m}{3}\right)^2 = \frac{m^2}{3^2} = \frac{m^2}{9}$$

یه لحظه به من توجه کن! در محاسبه  $\left(\frac{m}{3}\right)^2$  دقت کنید که توان ۲ هم برای  $m$  است و هم برای ۳، یعنی:

ضمناً برای محاسبه  $2\left(\frac{m}{3}\right)(6z)$  ابتدا به عددها توجه کنید، یعنی اول عدد ۶ را با عدد ۳ ساده می‌کنیم که جوابش برابر ۲ می‌شود. حالا ۲ به دست آمده را در سمت چپ ضرب می‌کنیم:

$$2\left(\frac{m}{3}\right)(6z) = 4mz$$

در محاسبه  $(6z)^2$  هم باید دقت کنید که توان ۲ هم برای ۶ است، هم برای  $z$ :

$$(6z)^2 = 6^2 \times z^2 = 36z^2$$

**مثال:** حاصل  $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$  را به دست آورید.

**پاسخ:** به کمک اتحادهای مربع دو جمله‌ای حاصل هر کدام از عبارتهای  $(1 + \sqrt{2})^2$  و  $(1 - \sqrt{2})^2$  را حساب کرده، جوابها را با هم جمع می‌کنیم:

$$(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = [1^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2] + [1^2 - 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2] = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 6$$

**تست:** اگر  $x - y = 3$  و  $x \cdot y = 4$  باشد، حاصل  $x^2 + y^2$  کدام است؟

۲۴ **۱**

۲۰ **۲**

۱۷ **۳**

۱۴ **۴**

**پاسخ:** مقدار  $x - y$  به ما داده شده ولی مقدار  $x^2 + y^2$  را باید به دست آوریم. در این جور سوالات، باید خودمان دو طرف رابطه داده شده را به توان ۲ برسانیم:

$$x - y = 3 \xrightarrow{\text{سمت چپ رو به کمک اتحاد دوم باز کن}} x^2 - 2xy + y^2 = 9 \xrightarrow{\text{دو طرف رو به توان ۲ برسون}} (x - y)^2 = 3^2$$

$$\xrightarrow{\text{به جای } x \cdot y \text{ مقدارش رو که در متن سؤال داده شده بنار}} x^2 - 2(4) + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 8 + y^2 = 9$$

$$\xrightarrow{\text{عدد } -8 \text{ رو به راست ببر چون } x^2 + y^2 \text{ رو میخوایم}} x^2 + y^2 = 9 + 8 \Rightarrow x^2 + y^2 = 17 \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

**تست:** اگر  $x + \frac{1}{x} = 4$  باشد، حاصل  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  کدام است؟

۱۶ **۴**

۱۴ **۲**

۱۲ **۲**

۱۰ **۱**

**پاسخ:**

$$x + \frac{1}{x} = 4 \xrightarrow[\text{برسون}]{\text{دو طرف رو به توان ۲}} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2 \xrightarrow[\text{سمت چپ رو به کمک اتحاد اول باز کن}]{\text{سمت چپ رو به کمک اتحاد اول باز کن}} x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16 \xrightarrow[\text{گزینه (۳) صحیح است.}]{\text{عدد ۲ رو بر سمت راست}} x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14$$

**۲ اتحاد مزدوج:** در این اتحاد، دو پرانتز به شکل  $(a + b)$  و  $(a - b)$  در هم ضرب می‌شوند، در این حالت خیلی سریع می‌گوییم جواب برابر می‌شود با  $a^2 - b^2$ .

به عبارت دیگر در این اتحاد، جملاتی مانند  $a$  و  $b$  عیناً در دو پرانتز تکرار می‌شوند. فقط در یکی از پرانتزها علامت بین  $a$  و  $b$  مثبت و در پرانتز دیگر علامت بین  $a$  و  $b$  منفی است.

دومی به توان ۲  
اولی به توان ۲

**مثال**  $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2 = 5 - 2 = 3$

**مثال**  $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

**تست:** حاصل عبارت  $A = (\sqrt{x} - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  چقدر است؟

۱ **۴**

-۱ **۲**

$\sqrt{2} - 1$  **۲**

$\sqrt{2} + 1$  **۱**

**پاسخ:** اگر همین الان به جای  $x$  ها  $\sqrt{2}$  را قرار دهیم، محاسبات پیچیده‌ای خواهیم داشت، پس ابتدا پرانتزهای اول و آخر را در کنار هم می‌نویسیم و به کمک اتحاد مزدوج حاصل ضرب آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \underbrace{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x + 1) = ((\sqrt{x})^2 - 1^2)(x + 1) = \underbrace{(x - 1)(x + 1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = x^2 - 1$$

گزینه (۴) صحیح است.  $\Rightarrow (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$  حالا به جای  $x$  عدد  $\sqrt{2}$  رو بنذار

**تست:** حاصل عبارت  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b)(a^2 + b^2)$  کدام است؟

$a^4 - b^4$  **۴**

$a^6 - b^6$  **۲**

$a^8 - b^8$  **۲**

$a^2 - b^2$  **۱**

**پاسخ:** ابتدا حاصل ضرب دو پرانتز سمت چپ را حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

حالا حاصل ضرب عبارت  $a - b$  در  $a + b$  به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{(a - b)(a + b)}_{\text{دوباره اتحاد مزدوج}} = a^2 - b^2$$

و در نهایت، عبارت  $a^2 - b^2$  را در  $a^2 + b^2$  ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}_{\text{باز هم اتحاد مزدوج}} = (a^2)^2 - (b^2)^2 = a^4 - b^4 \Rightarrow \text{گزینه (۴) درست است.}$$

یه لحظه به من توجه کن! انسانی‌ها، در مبحث اتحادها، نیازی به حفظ فرمول اتحاد جمله مشترک نیست (دنبال علتش نباشین لطفاً) بلکه فقط در تجزیه که

کمی جلوتر آموزش می‌دهیم به این اتحاد نیاز داریم پس فعلاً فراموشش کنید و اگر دو پرانتز دیدید که یک عبارت در آن‌ها تکرار شده، پرانتزها را به شکل معمولی

در هم ضرب کنید؛ مثلاً:

$$(6x + 2)(6x - 3) = 36x^2 - 18x + 12x - 6 = 36x^2 - 6x - 6$$

**مفهوم تجزیه**

اگر یک عبارت جبری را بتوانیم به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر (با توان کم‌تر موهول) بنویسیم، می‌گوییم آن عبارت را تجزیه کرده‌ایم. این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که دیگر نتوان عبارت‌ها را تجزیه کرد. به هر کدام از عبارت‌های جبری به دست آمده از تجزیه، یک عامل اول می‌گوییم. مثلاً عبارت  $X^2 - 16$  را به شکل  $(X - 4)(X + 4)$  تجزیه می‌کنیم (نمونه هم‌پایه‌رو کمی پلوئر توضیح میدهد) یعنی در ابتدا توان  $X$  برابر ۲ بود ولی بعد از تجزیه، توان  $X$  در هر کدام از پرانتزها برابر ۱ شد، یعنی با تجزیه، توان  $X$  کوچک‌تر می‌شود. هر عبارت جبری به عامل‌هایش بخش پذیر است. مثلاً وقتی عبارت  $X^2 - 5X - 6$  را به صورت  $(X + 1)(X - 6)$  تجزیه می‌کنیم،  $(X + 1)$  و  $(X - 6)$  هر دو، عوامل اول عبارت اصلی هستند و ضمناً عبارت اصلی یعنی  $X^2 - 5X - 6$  هم بر  $X + 1$  و هم بر  $X - 6$  بخش پذیر است.

**روش‌های تجزیه یک عبارت جبری**

**۱ فاکتورگیری:** در این روش از عوامل مشترک با توان کوچک‌تر، فاکتور می‌گیریم. به عبارت  $5X^3 - 10X^2$  توجه کنید. اول به عددها نگاه می‌کنیم. عدد  $10$  بر  $5$  بخش پذیر است پس از  $5$  فاکتور می‌گیریم. حالا به متغیرها توجه می‌کنیم بین  $X^3$  و  $X^2$  باید از  $X^2$  فاکتور بگیریم چون توانش کوچک‌تر است پس در کل از  $5X^2$  فاکتور می‌گیریم:

حالا می‌خواهیم جملات داخل پرانتز را بسازیم.  $5X^2$  چطوری به  $5X^3$  تبدیل می‌شود؟ باید در  $X$  ضرب شود، هم‌چنین برای تبدیل  $5X^2$  به  $10X^2$  باید  $2$  ضرب کنیم. پس جملات داخلی پرانتز هم به دست آمدند:

به لحظه به من توجه کن! گاهی باید از یک پرانتز هم فاکتور بگیریم پس لطفاً وحشت نکنید به عبارت زیر توجه کنید:

$$12x^2y(x-y)^4 - 7xy^2(x-y)^3$$

$12$  و  $7$  عامل مشترکی ندارند، از بین  $X$  و  $X^2$  باید از  $X$ ، از بین  $Y$  و  $Y^2$  باید از  $Y$  و از بین  $(x-y)^3$  و  $(x-y)^4$  باید از  $(x-y)^3$  فاکتور بگیریم، پس در کل، از  $xy(x-y)^3$  فاکتور می‌گیریم:

**مثال:** عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$(a+b)^2 - 2(a+b)$        $2xy^3 - 6x^2y^2z^2$   
  $15y(x-y)^3 - 18x^2(x-y)^2$        $12x^4(x^2-5)^2 + 3x^3(x^2-5)^3$

**پاسخ:**  از  $(a+b)$  فاکتور می‌گیریم.  
 از  $2xy^2$  فاکتور می‌گیریم.  
 دقت کنید که  $18$  و  $15$  هر دو به  $3$  بخش پذیرند پس خواهیم داشت:  
  $15y(x-y)^3 - 18x^2(x-y)^2 = 3(x-y)^2[5y(x-y) - 6x^2] = 3(x-y)^2[5yx - 5y^2 - 6x^2]$   
  $12x^4(x^2-5)^2 + 3x^3(x^2-5)^3 = 3x^3(x^2-5)^2[4x + (x^2-5)]$

**تست:** عبارت جبری  $10x^2z^2 - 15xy^3$  بر کدام عبارت، بخش پذیر است؟

- $10x$        $15x$        $5x^2$        $2z^2 - 3y^3$

**پاسخ:**   $15$  و  $10$  هر دو بر  $5$  بخش پذیرند. ضمناً  $X$  و  $X^2$  مشاهده می‌کنیم که باید از  $X$  فاکتور بگیریم چون توانش کوچک‌تر است.

گزینه (۱) صحیح است.  $\Rightarrow 10x^2z^2 - 15xy^3 \xrightarrow{\text{فاکتور از } 5x} 5x(2xz^2 - 3y^3)$

**تست:** در تجزیه  $20x^5(x^2+3)^3 - 10x^3(x^2+3)^4$  کدام عامل، وجود ندارد؟

- $10x^3$        $x^2+3$        $x^2+3$        $x^2-3$

**پاسخ:**   $10x^3$   
 $20x^5(x^2+3)^3 - 10x^3(x^2+3)^4 = 10x^3(x^2+3)^3[2x^2 - (x^2+3)] = 10x^3(x^2+3)^3(2x^2 - x^2 - 3)$

ملاحظه می‌کنید که عبارت تجزیه شده بالا شامل  $(x^2+3)$  نیست، پس جواب گزینه (۲) است.

۲ استفاده از اتحادها: در این روش از اتحادها برای تجزیه کردن کمک می‌گیریم.

۱ تجزیه از طریق اتحاد مربع دو جمله‌ای: اگر یک عبارت سه تا جمله داشت و دلتای آن، صفر شد ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ) قطعاً می‌توانیم از اتحادهای اول یا دوم برای تجزیه آن استفاده کنیم.

تجزیه به کمک اتحاد اول  $\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

تجزیه به کمک اتحاد دوم  $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

به عبارت دیگر در مبحث اتحادها در متن سؤال، عبارت  $(a + b)^2$  یا  $(a - b)^2$  داده می‌شد و ما می‌گفتیم جواب‌هایشان می‌شود  $a^2 + 2ab + b^2$  یا  $a^2 - 2ab + b^2$  ولی در مبحث تجزیه، بر عکس است یعنی عبارت‌های  $a^2 + 2ab + b^2$  یا  $a^2 - 2ab + b^2$  به ما داده می‌شوند و ما باید آن‌ها را به شکل اولیه آن‌ها یعنی  $(a + b)^2$  یا  $(a - b)^2$  تبدیل کنیم. البته کمی جلوتر خواهید دید که برای تجزیه از بقیه اتحادها نیز به صورت برعکس استفاده می‌کنیم.

$$4x^2 - 4x + 1$$

↓       ↓       ↓  
a=4   b=-4   c=+1

به عبارت مقابل توجه کنید:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(+1) = 16 - 16 = 0$$

می‌خواهیم آن را تجزیه کنیم، ابتدا دلتا را تشکیل می‌دهیم:

دلتا صفر شد پس متوجه می‌شویم که می‌توانیم از اتحاد مربع دو جمله‌ای (اول یا دوم) برای تجزیه این عبارت استفاده کنیم. ضریب X منفی است پس از اتحاد دوم کمک می‌گیریم، از  $4x^2$  و ۱ جذر می‌گیریم تا a و b در اتحاد مشخص شوند.

حالا عبارت داده‌شده را به شکل  $(a - b)^2$  می‌نویسیم:

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

جذر       جذر  
a=2x    b=1

تست: تجزیه شده چند تا از عبارتهای زیر، نادرست است؟

- ۱ صفر    ۲ ۱    ۳ ۲    ۴ ۳
- ۱  $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$     ۲  $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = (x - \frac{1}{9})^2$     ۳  $2x^5(x-1)^3 - 8x^3(x-1)^4 = 2x^3(x-1)^2(x-2)^2$

پاسخ: ۱

$$4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (+4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

جذر       جذر  
a=2x    b=1

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\frac{2}{3})^2 - 4(1)(\frac{1}{9}) = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = (x - \frac{1}{3})^2$$

جذر       جذر  
a=x       b=1/3

دلتا صفر شد ضمناً ضریب X مثبت است. پس از اتحاد اول استفاده می‌کنیم:

دلتا صفر شد و ضریب x عددی منفی است پس از اتحاد دوم برای تجزیه عبارت استفاده می‌کنیم:

$$2x^5(x-1)^3 - 8x^3(x-1)^4 \stackrel{\text{فاکتورگیری}}{=} 2x^3(x-1)^3 [x^2 - 4(x-1)] = 2x^3(x-1)^3 [x^2 - 4x + 4] = 2x^3(x-1)^3(x-2)^2$$

تجزیه با اتحاد دوم

پس گزینه (۳) درست است.

اتحاد مربع دو جمله‌ای، مزدوج و یک جمله مشترک

۱. واجب ۱. حاصل  $(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - 1)^2$  کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{2}$     ۲)  $4\sqrt{2}$     ۳)  $1 + 4\sqrt{2}$     ۴)  $4$

۲. تسلط ۲. عبارت A در تساوی  $(\frac{x}{3} - 4)^2 = \frac{x^2}{9} + A + 16$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{8}{3}x$     ۲)  $\frac{4}{3}x$     ۳)  $-\frac{4}{3}x$     ۴)  $-\frac{8}{3}x$

۳. واجب ۳. اگر  $xy^2 = \frac{4}{3}$  باشد، حاصل  $(x + 3y^2)^2 - (x - 3y^2)^2$  کدام است؟

- ۱) ۸    ۲) ۱۲    ۳) ۱۶    ۴) ۱۸

۴. واجب ۴. حاصل عبارت  $A = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})$  به ازای  $x = \sqrt{2}$  و  $y = \sqrt{5}$  کدام است؟

- ۱) -۳    ۲) -۴    ۳) -۵    ۴) -۶

۵. واجب ۵. اگر مساحت مربع مقابل را A و مساحت مثلث را B بنامیم، حاصل  $A + 2B$  کدام است؟

- ۱)  $5x^2 - 2x$     ۲)  $5x^2 + 1$   
۳)  $x^2 - 5x$     ۴)  $x^2 + 7x$

۶. واجب ۶. اگر  $2x + \frac{5}{x} = 9$  باشد حاصل  $4x^2 + \frac{25}{x^2}$  کدام است؟

- ۱) ۴۳    ۲) ۵۱    ۳) ۵۷    ۴) ۶۱

۷. تسلط ۷. اگر  $(5x - \frac{3}{2x}) = 4$  باشد، حاصل  $(25x^2 + \frac{9}{4x^2})$  کدام است؟

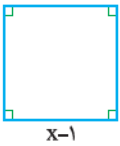
- ۱) ۲۴    ۲) ۲۹    ۳) ۳۱    ۴) ۳۲

۸. تسلط ۸. اگر  $(3x + \frac{1}{2x}) = 5$  باشد، حاصل  $(9x^2 + \frac{1}{4x^2})$  کدام است؟

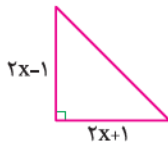
- ۱) ۱۸    ۲) ۲۰    ۳) ۲۱    ۴) ۲۲

۹. تسلط ۹. در تساوی  $\frac{1-x^{16}}{A} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ ، عبارت A کدام است؟

- ۱)  $1-x$     ۲)  $1-x^2$     ۳)  $1-x^4$     ۴)  $1-x^8$



(سراسری - ۹۷)



(سراسری - ۹۵)

(سراسری خارج کشور - ۹۵)

استفاده از فاکتورگیری در تجزیه

۱۰. تسلط ۱۰. دو جمله‌ای  $40x^3y^2 - 30xy^4$  بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

- ۱)  $4x^2 - 3y^2$     ۲)  $4x^2 + 3y^2$     ۳)  $10x^2y^2$     ۴)  $10xy^3$

۱۱. تسلط ۱۱. در تجزیه  $2x(x^2 - 6)^2 - x^2(x^2 - 6)^2$  کدام عامل زیر وجود ندارد؟

- ۱)  $x^2 - 12$     ۲)  $x^2 - 13$     ۳)  $x$     ۴)  $x^2 - 6$

استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای و اتحاد مزدوج

۱۲. واجب ۱۲. عبارت  $16x^3y + 40x^2y^2 + 25xy^3$  بر کدام عامل بخش پذیر است؟

- ۱)  $4x - 5y$     ۲)  $(4x + 5y)^2$     ۳)  $x^2y^2$     ۴)  $(5x + 4y)^2$

۱۳. واجب ۱۳. در تجزیه  $x^6y^2 - x^2y^6$  کدام عامل وجود ندارد؟

- ۱)  $x^2 + y^2$     ۲)  $x + y$     ۳)  $x - y$     ۴)  $(x + y)^2$

بچه‌های عزیز! از این درس در کنکور، سؤال مستقیم ندارید ولی برای فصل‌های بعدی کاربرد زیادی دارد.

- ۱۴. iQ** دو جمله‌ای  $x^8 - 256$  بر کدام عبارت زیر بخش‌پذیر نیست؟
- $x^2 + 4$  (۲)
 $x^4 + 16$  (۱)
 $x - 4$  (۳)
 $x - 2$  (۴)
- ۱۵. واجب** اگر  $c - d = -7$  و  $d^2 - c^2 = 77$  باشد مقدار  $c^2 + d^2 + 2cd$  کدام است؟
- ۶۴ (۱)
۸۱ (۲)
۱۲۱ (۳)
۱۴۴ (۴)
- ۱۶. واجب** کدام عبارت در تجزیه‌شده عبارت  $(x^2 - 2x^2 + 1)$  وجود دارد؟
- $(x - 1)^2$  (۱)
 $(x + 1)^2$  (۲)
 $(x - 1)^2$  (۳)
 $(x - 2)^2$  (۴)
- ۱۷. واجب** اگر عبارت  $5x^2 + mx + 10$  به صورت توان دوم مجموع دو جمله باشد، مقدار  $m$  کدام است؟
- $2\sqrt{10}$  (۱)
 $2\sqrt{5}$  (۲)
 $10\sqrt{2}$  (۳)
 $5\sqrt{2}$  (۴)
- ۱۸. iQ** اگر  $2x - y = 6$  و  $4x^2 - y^2 = 12$  باشد،  $x + y$  کدام است؟
- صفر (۱)
۴ (۲)
-۴ (۳)
۲ (۴)
- ۱۹. iQ** اگر  $a - 2b = 5$  و  $a^2 = 4b^2 + 15$  باشد، حاصل  $a^2 - 2b$  کدام است؟
- ۶۳ (۱)
۶۵ (۲)
۳۳ (۳)
۳۱ (۴)
- ۲۰. iQ** اگر  $x^2 + 4y^2 = 4xy$  باشد، مقدار  $x^2 - 4y^2$  کدام است؟
- ۵ (۱)
۲ (۲)
-۳ (۳)
صفر (۴)

### استفاده از اتحاد یک جمله مشترک

- ۲۱. واجب** عبارت  $2x^3 + 2x^2 - 4x$  بر کدام دو جمله‌ای بخش‌پذیر نیست؟
- $x + 1$  (۱)
 $x - 1$  (۲)
 $x + 2$  (۳)
 $2x$  (۴)
- ۲۲. تسلط** عبارت  $4x^3 - 6x^2 + 2x$  بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟
- $2x + 1$  (۱)
 $2x - 1$  (۲)
 $x + 1$  (۳)
 $x + 2$  (۴)
- ۲۳. واجب** عبارت  $x^2 - 3x^2 - 4$  بر کدام عبارت بخش‌پذیر نیست؟
- $x^2 + 1$  (۱)
 $x + 2$  (۲)
 $x - 2$  (۳)
 $x + 1$  (۴)
- ۲۴. واجب** در تجزیه عبارت  $(x^2 - 12)^2 - 16x^2$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟
- $x - 6$  (۱)
 $x + 2$  (۲)
 $x + 3$  (۳)
 $x + 6$  (۴)
- ۲۵. iQ** در تجزیه  $16x^4 + 24x^2 - 7$  کدام عامل وجود ندارد؟
- $2x - 1$  (۱)
 $4x^2 + 7$  (۲)
 $2x^2 + 7$  (۳)
 $2x + 1$  (۴)
- ۲۶. iQ** در تجزیه  $a(a - 2)(a - 3) - 4a + 8$  کدام عامل وجود ندارد؟
- $a - 1$  (۱)
 $a - 2$  (۲)
 $a + 1$  (۳)
 $a - 4$  (۴)
- ۲۷. iQ** در تجزیه  $a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36$  کدام عامل وجود ندارد؟
- $a - 6$  (۱)
 $a - 3$  (۲)
 $a - 2$  (۳)
 $a + 2$  (۴)
- ۲۸. iQ** عبارت  $(x^2 + x)^2 - (x^2 + x) - 2$  بر کدام عامل بخش‌پذیر است؟
- $x^2 + x - 1$  (۱)
 $x + 1$  (۲)
 $x - 2$  (۳)
 $x + 2$  (۴)
- ۲۹. iQ** عبارت  $2 + 3(x^2 - 4x + 2) + 3(x^2 - 4x + 2)^2$  بر کدام عامل بخش‌پذیر نیست؟
- $x - 1$  (۱)
 $x - 2$  (۲)
 $x - 3$  (۳)
 $x + 1$  (۴)
- ۳۰. واجب** در تجزیه  $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$  کدام عامل وجود ندارد؟
- $x - 8$  (۱)
 $x - 4$  (۲)
 $x + 2$  (۳)
 $x + 4$  (۴)
- (سراسری - ۸۳)
- (سراسری خارج از کشور - ۹۳)
- (سراسری خارج از کشور - ۹۷)
- (سراسری خارج از کشور - ۸۸)
- (سراسری - ۹۰)
- (سراسری خارج از کشور - ۹۰)

## فصل اول

## قسمت اول

# معادله درجه اول و روش‌های حل آن

خوبان سلام. قطعاً همگی شما کلمه «معادله» به گوشتون خورده. نه فقط توی ریاضی بلکه در محاوره‌ها و گفتگوهای معمول هم خیلی‌ها از این کلمه استفاده می‌کنن. در علم اقتصاد هم مفهوم‌هایی داریم به نام‌های معادله تقاضا، معادله درآمد، معادله هزینه و معادله سود. خلاصه کاربرد معادله‌ها در ریاضی بیش‌تر از اتحاد و تجزیه نباشه کم‌تر نیست. اینا رو گفتیم که این قسمت رو هم مثل قسمت‌های قبلی، خیلی جدی و دقیق بخونید. معمولاً سؤال مستقیم از معادله درجه اول مطرح نمی‌شه ولی در خیلی از مباحث دیگه، کاربرد داره.

برای مشاهده فیلم آموزش این فصل QR-code یا با اسکن کنید.

## معادله درجه اول و حل آن

معادله‌ای که پس از ساده شدن به صورت  $ax + b = 0$  درآید که در آن  $a \neq 0$  و  $b \in \mathbb{R}$  یک معادله درجه اول نامیده می‌شود.

مثلاً تمام معادلات  $0 = 1 - 2x$ ،  $0 = 3x - 6$  و  $0 = 5x - 4$  معادله درجه اول هستند ولی معادلات  $0 = x^2 - 3x$  و  $1 = 3x - \frac{1}{x}$  درجه اول نیستند. (X نباید در مخرج کسر باشه یا توانی به جز داشته باشه)

قبلاً با حل چنین معادله‌هایی آشنا شده‌اید و می‌دانید که معلوم‌ها را به یک طرف و مجهول‌ها را به طرف دیگر معادله می‌بریم و در نهایت جواب برابر می‌شود با طرف معلوم، تقسیم بر ضریب مجهول.

### مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$2x(x-4) = (2x-1)(x+2) \quad \text{ب}$$

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{x}{4} \quad \text{ب}$$

$$2x+12 = 3x+2 \quad \text{ا}$$

**پاسخ: ا)** معلوم‌ها را به یک طرف و مجهول‌ها را هم به طرف دیگر می‌بریم و با هم جمع جبری می‌کنیم، فقط به این نکته توجه می‌کنیم که هر عبارتی را که جابه‌جا می‌کنیم، قرینه می‌شود:

$$2x+12 = 3x+2 \Rightarrow 2x-3x = 2-12 \Rightarrow -x = -10$$

حالا مقدار X برابر است با طرف معلوم تقسیم بر ضریب مجهول:

$$x = \frac{-10}{-1} = 10$$

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{2(x+1) - 3(x-1)}{6} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{2x+2-3x+3}{6} = \frac{x}{4}$$

مخرج مشترک می‌گیریم

$$\Rightarrow \frac{-x+5}{6} = \frac{x}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4x = 6(-x+5) \Rightarrow 4x = -6x+30 \Rightarrow 4x+6x = 30 \Rightarrow 10x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{10} = 3$$

**روش دوم:** (از بین بردن مخرج‌ها) می‌توانیم از همان اول دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب کنیم (مخرج مشترک، همان ک.م.م مخرج‌هاست).

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{x}{4} \xrightarrow{\times 12} 4\left(\frac{x+1}{3}\right) - 6\left(\frac{x-1}{2}\right) = 3\left(\frac{x}{4}\right) \Rightarrow 4(x+1) - 6(x-1) = 3x \Rightarrow 4x+4-6x+6 = 3x$$

$$\Rightarrow 4x-6x-3x = -4-6 \Rightarrow -5x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$2x(x-4) = (2x-1)(x+2) \Rightarrow 2x^2 - 8x = 2x^2 + 4x - x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 2x^2 - 4x + x + 2 = -2 \Rightarrow -11x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-11} = \frac{2}{11}$$



**مثال:** عددی طبیعی را بیابید که:

۱ اگر از دو برابر آن سه واحد کم کنیم، حاصل برابر با ۲۵ گردد.

۲ اگر نصفش را با ثلثش جمع کنیم، حاصل از خمسش ۱ واحد بیش تر شود.

**پاسخ:** ۱ آن عدد را  $X$  در نظر می‌گیریم، لذا دو برابر آن، برابر می‌شود با  $2X$  پس داریم:

$$2X - 3 = 25 \Rightarrow 2X = 25 + 3 \Rightarrow 2X = 28 \Rightarrow X = \frac{28}{2} = 14$$

۲ آن عدد را  $X$  در نظر می‌گیریم، نصف  $X$  می‌شود  $\frac{X}{2}$ ، ثلثش می‌شود  $\frac{X}{3}$  و خمسش می‌شود  $\frac{X}{5}$  پس داریم:

$$\frac{X}{2} + \frac{X}{3} = \frac{X}{5} + 1 \xrightarrow{\text{تمام جملات رو در ۳ ضرب کن}} 15X + 10X = 6X + 30 \Rightarrow 25X - 6X = 30 \Rightarrow 19X = 30 \Rightarrow X = \frac{30}{19}$$

ولی جواب قابل قبول نیست چون عدد  $\frac{30}{19}$  طبیعی نیست.

**تست:** طول و عرض یک مستطیل به نسبت ۳ به ۱ می‌باشند. اگر محیط این مستطیل ۵۶ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۷۰ ۱

۱۴۷ ۲

۲۴۳ ۳

۱۷۵ ۴

**پاسخ:** اگر طول و عرض این مستطیل را به ترتیب  $X$  و  $Y$  بنامیم آن‌گاه طبق فرض سؤال خواهیم داشت:

$$\frac{X}{Y} = \frac{3}{1} \Rightarrow X = 3Y$$

$$\text{محیط} = 56 \Rightarrow (X + Y) \times 2 = 56 \xrightarrow{\text{به جای } X \text{ مقدار } 3Y \text{ رو بنذار}} \overbrace{(3Y + Y)}^{4Y} \times 2 = 56 \Rightarrow 8Y = 56 \Rightarrow Y = \frac{56}{8} = 7 \Rightarrow X = 3Y = 3(7) = 21$$

گزینه (۳) صحیح است.  $\Rightarrow X \cdot Y = 21 \times 7 = 147$

**تست:** مجموع سه عدد زوج متوالی برابر با ۴۲ می‌باشد، یکان عدد کوچک‌تر کدام است؟

۲ ۱

۴ ۲

۶ ۳

۸ ۴

**پاسخ:** آن سه عدد زوج را  $X$ ،  $X+2$  و  $X+4$  در نظر می‌گیریم. طبق فرض، جمع این سه عدد برابر ۴۲ است پس داریم:

$$X + X + 2 + X + 4 = 42 \Rightarrow 3X + 6 = 42 \Rightarrow 3X = 42 - 6 \Rightarrow 3X = 36 \Rightarrow X = \frac{36}{3} = 12 \Rightarrow \text{عدد کوچک‌تر } 12$$

ببخشید، مگه نگفته اعداد متوالین؟ الآن نباید اونهارو به صورت  $X$ ،  $X+1$ ،  $X+2$  فرض کنیم؟



بله گفته، اما گفته زوج متوالین! یعنی فاصله اون‌ها از هم دوتا دوتا است. اگه در متن سؤال، می‌گفت سه عدد طبیعی متوالی، حرف شما



درست بود. ضمناً توجه کن که اگه گفته بشه سه عدد فرد متوالی، باز هم اونهارو به شکل  $X$ ،  $X+2$  و  $X+4$  در نظر می‌گرفتیم.

**یادداشت:**

## حل معادله درجه اول - صدق کردن جواب معادله در خود معادله

۵۸. واجب مقدار  $x$  از تساوی  $2x(x-1) + 3 = (x+1)^2 + (x+2)^2$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{1}{4}$       ۲  $\frac{1}{2}$       ۳  $-\frac{1}{2}$       ۴  $\frac{1}{4}$

۵۹. تسلسل معادله  $x(x^2 - 2) = x(x^2 + x + 1)(x - 1)$  دارای چند جواب است؟

- ۱ صفر      ۲ یک      ۳ دو      ۴ سه

۶۰. واجب اگر  $x = 2$  جواب معادله  $mx + m - 1 = 1 + \frac{x}{2}$  باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{3}$       ۲  $-1$       ۳  $1$       ۴  $-\frac{1}{3}$

۶۱. واجب نصف جواب معادله  $\frac{2x-1}{5} - \frac{1-2x}{4} = 3$  کدام است؟

- ۱  $\frac{36}{69}$       ۲  $\frac{18}{69}$       ۳  $\frac{69}{18}$       ۴  $\frac{69}{36}$

## کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی

۶۲. واجب عرض یک مستطیل، نصف طول آن است. اگر محیط مستطیل ۱۵ واحد باشد، اختلاف طول و عرض آن چند واحد است؟

- ۱  $5$       ۲  $5/5$       ۳  $2$       ۴  $2/5$

۶۳. واجب اضلاع یک مثلث به صورت  $x-1$ ،  $2x$  و  $x+4$  می‌باشند. اگر محیط این مثلث ۳۵ باشد، طول بزرگ‌ترین ضلع آن کدام است؟

- ۱  $12$       ۲  $13$       ۳  $15$       ۴  $16$

۶۴. تسلسل طول اضلاع یک مثلث، سه عدد زوج متوالی می‌باشند. اگر محیط این مثلث ۲۴ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

- ۱  $6$       ۲  $12$       ۳  $48$       ۴  $24$

۶۵. IQ اندازه زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۷ و ۱۱ و ۱۸ می‌باشد. نوع مثلث کدام است؟

- ۱ متساوی‌الساقین      ۲ قائم‌الزاویه      ۳ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین      ۴ نامشخص

۶۶. IQ اگر مساحت قسمت رنگی ۸ واحد مربع باشد، شعاع دایره کدام است؟

- ۱  $\frac{4}{2-\pi}$       ۲  $\frac{4}{\sqrt{4-\pi}}$       ۳  $\frac{2}{2-\pi}$       ۴  $\frac{2}{\sqrt{4-\pi}}$

۶۷. تسلسل نقطه  $A(2m-1, m+3)$  روی خط  $y = -2x + 1$  قرار دارد. نقطه  $A$  در کدام ربع مختصاتی قرار دارد؟

- ۱ اول      ۲ دوم      ۳ سوم      ۴ چهارم

۶۸. واجب نگین ۸ سال بزرگ‌تر از دو خواهر دو قلویی است. اگر مجموع سن هر سه دختر ۳۲ سال باشد، نگین چند سال دارد؟

- ۱  $12$       ۲  $18$       ۳  $16$       ۴  $20$

۶۹. تسلسل وقتی سیامک به دنیا آمد، پدرش ۳۰ ساله بود. اگر ۵ سال دیگر سن پدر سیامک سه برابر سن سیامک باشد، سیامک چند سال دارد؟

- ۱  $25$       ۲  $5$       ۳  $10$       ۴  $15$

۷۰. واجب محیط یک مربع از  $\frac{3}{4}$  ضلع آن مربع، به اندازه  $6/5$  واحد بیشتر است. مساحت مربع چند واحد مربع است؟

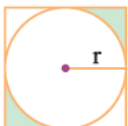
- ۱  $10$       ۲  $4$       ۳  $6$       ۴  $5$

۷۱. واجب در یک کارخانه، حقوق یک مهندس دو برابر یک تکنسین و  $\frac{2}{3}$  مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ تکنسین دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت، ماهیانه ۱۸۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک تکنسین چقدر است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

- ۱ ۴ میلیون تومان      ۲ ۵ میلیون تومان      ۳  $6/5$  میلیون تومان      ۴  $7/5$  میلیون تومان

۷۲. واجب ۵ سال دیگر مجموع سن رضا و مجید ۳۰ سال خواهد شد. اگر سال گذشته سن رضا دو برابر سن مجید بوده باشد، اختلاف سن آن‌ها کدام است؟

- ۱  $7$       ۲  $4$       ۳  $6$       ۴  $5$



**تسلط ۷۳.** نیکا تعدادی شکلات داشت که ثلث آن را به مادرش و نیمی از بقیه را به پدرش داد. اگر برای نیکا ۶ شکلات باقی مانده باشد، تعداد شکلات‌های اولیه نیکا چند تا بوده است؟

- ۱) ۱۲      ۲) ۱۵      ۳) ۱۸      ۴) ۲۰

**واجب ۷۴.** سارا از اول ماه شروع به دویدن کرده به طوری که هر روز ۲ برابر روز قبل دویده است. اگر سارا در روز هشتم ۱۹۲ دقیقه دویده باشد در این ۸ روز، مجموعاً چند دقیقه دویده است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۱) ۳۸۲/۵      ۲) ۳۸۳      ۳) ۳۸۳/۵      ۴) ۳۸۴

**تسلط ۷۵.** سه شریک از یک پروژه ۹۰ میلیون تومان سود کسب می‌کنند. اگر سرمایه نفر اول سه برابر نفر دوم و سرمایه نفر دوم نصف نفر سوم بوده باشد، بیشترین سود مربوط به نفر چندم است و چقدر است؟

- ۱) اول - ۳۰      ۲) سوم - ۳۰      ۳) سوم - ۴۵      ۴) اول - ۴۵

**واجب ۷۶.** قیمت هر دفتر ۴ برابر قیمت هر مداد و قیمت هر مداد  $\frac{5}{3}$  قیمت هر پاکن است. اگر مجموع بهای ۴ دفتر، ۳ مداد و ۵ پاکن ۵۵ هزار تومان باشد، قیمت هر مداد چند تومان است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۱) ۱۵۰۰      ۲) ۳۰۰۰      ۳) ۲۵۰۰      ۴) ۲۰۰۰

**تسلط ۷۷.** قیمت یک کالا از ۳۰۰۰ تومان به ۱۸۰۰ تومان رسیده است قیمت آن چند درصد کاهش یافته است؟

- ۱) ۶۰٪      ۲) ۵۰٪      ۳) ۳۰٪      ۴) ۴۰٪

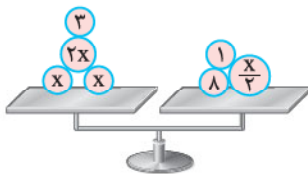
**تسلط ۷۸.** نیمی از پسر عمویش کیان، سه سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو، ۴۰ باشد پسر عموی کوچک‌تر چند سال دارد؟

(کاردرکلاس کتاب درسی)

- ۱) ۴      ۲) ۵      ۳) ۷      ۴) ۸

(مشابه فعالیت کتاب درسی)

**واجب ۷۹.** اگر در ترازوی مقابل، تعادل برقرار باشد، مقدار  $x$  کدام است؟



- ۱)  $\frac{13}{7}$       ۲)  $\frac{12}{7}$       ۳) ۱۲      ۴)  $\frac{13}{4}$

**تسلط ۸۰.** علی در مسیری درحال پیاده‌روی بود که گروهی از دوستانش را دید از آن‌ها پرسید «شما چند نفر هستید؟ یکی از آن‌ها پاسخ داد: ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم». تعداد دوستان علی چند نفر بوده است؟

(کاردرکلاس کتاب درسی)

- ۱) ۳۶      ۲) ۳۸      ۳) ۴۰      ۴) ۴۲

**تسلط ۸۱.** ۱۴ برابر عددی از ۸ برابر آن، ۴۵ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

- ۱) ۷      ۲)  $\frac{7}{5}$       ۳) ۸      ۴)  $\frac{8}{5}$

**واجب ۸۲.** اگر از سه برابر عددی ۴ واحد کم شود، سپس به حاصل، نصف همان عدد اضافه گردد، عدد به‌دست آمده برابر با ۱۰ می‌گردد. آن عدد کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۱۲      ۳) ۴      ۴) ۱۴

**واجب ۸۳.** با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز کدام است؟

(تمرین کتاب درسی)

- ۱) ۱۱۸      ۲) ۱۱۰      ۳) ۱۲۴      ۴) ۱۲۸

**تسلط ۸۴.** ۵۵ درصد از ثلث عددی، ۷ واحد از  $\frac{5}{12}$  آن عدد کم‌تر است. آن عدد کدام است؟

- ۱) ۳۰      ۲) ۳۵      ۳) ۲۰      ۴) ۲۵

**تسلط ۸۵.** برای بافت یک قالی به ابعاد  $2\frac{1}{8} \times 2\frac{1}{8}$  متر به تعداد ۵,۸۵۰,۰۰۰ گره استفاده شده است. اگر یک قالبیافت برای بافت این قالی ۹۰۰ روز زمان بگذارد، او به طور متوسط هر روز چند گره زده است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۱) ۴۵۰۰      ۲) ۶۰۰۰      ۳) ۶۵۰۰      ۴) ۷۰۰

**واجب ۸۶.** مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی برابر ۵۱ است. یکان عدد وسطی کدام است؟

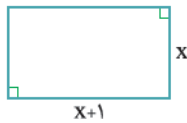
- ۱) ۳      ۲) ۵      ۳) ۷      ۴) ۹

**تسلط ۸۷.** مجموع چهار عدد فرد متوالی برابر ۵۶ می‌باشد. حاصل ضرب بزرگ‌ترین آن‌ها در کوچک‌ترین آن‌ها کدام است؟

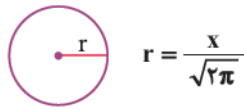
- ۱) ۱۷۸      ۲) ۱۸۷      ۳) ۷۸۱      ۴) ۸۷۱

**آمادگی برای کنکورهای سخت و آزمون‌های آزمایشی موسسات**

**تسلیه ۸۸.** در شکل مقابل، مجموع مساحت مستطیل و ۲ برابر مساحت دایره از مساحت مربع، یک واحد بیش تر است. محیط مستطیل کدام است؟



۴ ۶



۳ ۵



۲ ۴

۱ ۳

**تسلیه ۸۹.** با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار شکر، کارخانه‌ای از روز شنبه شروع به کار کرده و هر روز تولیدش را ۳ برابر کرده است. در پایان روز

پنجشنبه، مجموع تولید شکر این هفته برابر با ۷۲۸ تن شده است. مقدار شکر تولیدی در روز چهارشنبه چند تن بوده است؟

۴ ۱۱۰

۳ ۳۸

۲ ۱۶۲

۱ ۵۴

**تسلیه ۹۰.** اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه طبیعی عدد ۸ ریشه معادله  $\frac{x-k}{k} + \frac{3x+4}{2} = 1$  باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

 ۴  $-\frac{3}{4}$ 

 ۳  $-\frac{2}{3}$ 

 ۲  $-\frac{1}{5}$ 

 ۱  $-\frac{2}{5}$ 

**تسلیه ۹۱.** در یک شرکت، حقوق یک مهندس ۲ برابر یک کارمند ساده و  $\frac{3}{4}$  مدیر بخش خود است. قسمت تولید این شرکت دارای ۲ مهندس، ۱۴ کارمند

ساده و ۲ مدیر بخش است. اگر مدیر عامل شرکت ماهانه برای این قسمت مبلغ ۴۹۰ میلیون تومان در نظر گرفته باشد اختلاف حقوق یک مهندس و یک مدیر چقدر است؟

۴ ۲۱ میلیون تومان

۳ ۱۴ میلیون تومان

۲ ۱۸ میلیون تومان

۱ ۱۰ میلیون تومان

**تسلیه ۹۲.** اگر ریشه معادله  $5x - 6 = (x-1)^2 - (x+3)^2$  را  $\alpha$  بنامیم، حاصل  $|\alpha - \frac{4}{3}|$  کدام است؟

۴ ۹

 ۳  $\frac{8}{5}$ 

 ۲  $\frac{7}{5}$ 

۱ ۶

**تسلیه ۹۳.** ۶ سال دیگر، مجموع سن امیر و رضا برابر ۷۰ سال خواهد شد. اگر سال گذشته، سن امیر ۲ برابر سن رضا بوده باشد، اختلاف سن فعلی آن‌ها

چقدر است؟

 ۴  $\frac{20}{3}$  سال

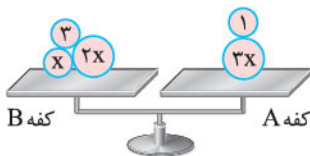
 ۳  $\frac{20}{11}$  سال

 ۲  $\frac{19}{6}$  سال

 ۱  $\frac{18}{6}$  سال

**تسلیه ۹۴.** در شکل مقابل، اگر نصف وزنه‌های کفه A را به کفه B اضافه کنیم و سپس از کفه B، ۳ کیلوگرم کم کنیم، تعادل کفه‌ها برقرار می‌شود. (روبه‌روی

هم قرار می‌گیرند) مقدار خمس مربع  $x$  کدام است؟


 ۲  $\frac{1}{25}$ 

 ۱  $\frac{1}{5}$ 

 ۴  $\frac{1}{85}$ 

 ۳  $\frac{1}{45}$ 

**تسلیه ۹۵.** سن پدر امیر، دو برابر سن امیر و سن خواهر امیر نصف سن امیر است. اگر مادر امیر ۸ سال از پدرش کوچک‌تر باشد ۱۰ سال دیگر، مجموع سن

همه اعضای این خانواده برابر ۱۲۰ سال می‌شود. سن کوچک‌ترین عضو خانواده هم‌اکنون تقریباً چقدر است؟

۴ ۱۱

۳ ۸

۲ ۷

۱ ۵

**تسلیه ۹۶.** چند تا از معادلات زیر، معادله درجه اول محسوب می‌شوند؟

$$\sqrt{x} - 3x = 2 \quad \text{پ}$$

$$\frac{x-5}{6} - 2x = 1 \quad \text{ب}$$

$$2x^2 - 3x = 4 \quad \text{ا}$$

$$5x^3 - x = 0 \quad \text{ج}$$

$$x(x+1) = 4x + x^2 \quad \text{ث}$$

$$\frac{1-x^2}{1+x} = 3 \quad \text{ت}$$

۴ ۱

۳ ۲

۲ ۳

۱ ۴

**تسلیه ۹۷.** مجموعه سه عدد طبیعی فرد متوالی برابر ۱۲۳ می‌باشد. یکان عدد وسطی کدام است؟

۴ ۵

۳ ۳

۲ ۱

۱ ۲



۳

پاسخ‌های تشریحی

**یادآوری اتحادها، تجزیه و عبارت‌های گویا**

فصل ۰

۲ ۱

حاصل تک تک عبارات  $(1 + \sqrt{2})^2$  و  $(\sqrt{2} - 1)^2$  را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورده و جواب‌هایشان را از هم کم می‌کنیم:

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 1^2 + 2(1)(\sqrt{2}) + \sqrt{2}^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2} - 1)^2 = \sqrt{2}^2 - 2(\sqrt{2})(1) + 1^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{جواب نهایی} = (3 + 2\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2})$$

$$= \cancel{3} + 2\sqrt{2} - \cancel{3} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

۱۴ ۲

بنا به اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\left(\frac{x}{3} - 4\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{3}\right)(4) + 4^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{8}{3}x + 16$$

$$\Rightarrow A = -\frac{8}{3}x$$

این جمله خواسته شده

۳ ۳

$$\begin{cases} (x + 3y^2)^2 = x^2 + 6xy^2 + 9y^4 \\ (x - 3y^2)^2 = x^2 - 6xy^2 + 9y^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت مطلوب} = x^2 + 6xy^2 + 9y^4 - x^2 + 6xy^2 - 9y^4 = 12xy^2$$

$$\frac{\text{طبق فرض}}{xy^2 = \frac{4}{3}} 12\left(\frac{4}{3}\right) = 16$$

۱ ۴

پرانتهای اول و آخر، تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند پس آن‌ها را کنار هم می‌نویسیم:

$$A = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) = (\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2)(x + y)$$

$$= \underbrace{(x - y)(x + y)}_{\text{مزدوج}} = x^2 - y^2 \xrightarrow[y = \sqrt{5}}{x = \sqrt{2}}$$

$$A = \sqrt{2}^2 - \sqrt{5}^2 = 2 - 5 = -3$$

۱ ۵

$$A = \text{مساحت مربع} = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$B = \text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{2}$$

$$= \frac{(2x)^2 - 1^2}{2} = \frac{4x^2 - 1}{2}$$

$$A + 2B = x^2 - 2x + 1 + \cancel{4x^2} - 1$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 1 = 5x^2 - 2x$$

۱۴ ۶

$$2x + \frac{5}{x} = 9 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (2x + \frac{5}{x})^2 = 81$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 2(2x)\left(\frac{5}{x}\right) + \frac{25}{x^2} = 81$$

$$\Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} = 81 - 20 \Rightarrow 4x^2 + \frac{25}{x^2} = 61$$

۳ ۷

$$\left(\Delta x - \frac{3}{2x}\right)^2 = 4 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(\Delta x - \frac{3}{2x}\right)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)\left(\frac{3}{2x}\right) + \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 15 + \frac{9}{4x^2} = 16$$

$$\xrightarrow{\text{راست ببر}} 25x^2 + \frac{9}{4x^2} = 15 + 16 \Rightarrow 25x^2 + \frac{9}{4x^2} = 31$$

۴ ۸

$$\left(3x + \frac{1}{2x}\right)^2 = 5 \xrightarrow{\text{طرفین رو به توان ۲ برسون}} \left(3x + \frac{1}{2x}\right)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow (3x)^2 + 2(3x)\left(\frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 3 + \frac{1}{4x^2} = 25 \Rightarrow 9x^2 + \frac{1}{4x^2} = 25 - 3 = 22$$

۱ ۹

$$\underbrace{1 - x^{16}}_{\text{تجزیه با مزدوج جذر}} = \underbrace{(1 - x^8)}_{\text{دوباره تجزیه با مزدوج}} (1 + x^8) = \underbrace{(1 - x^4)}_{\text{باز هم تجزیه با مزدوج}} (1 + x^4)(1 + x^4)$$

$$= \underbrace{(1 - x^2)}_{\text{باز هم مزدوج}} (1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^4)$$

$$= (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^4)$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری در رابطه داده شده}} \frac{(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^4)}{A}$$

$$= \frac{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^4)}{A} \Rightarrow \frac{1 - x}{A} = 1 \Rightarrow A = 1 - x$$

۱ ۱۰

اعداد ۳۰ و ۴۰ هر دو بر ۱۰ بخش پذیرند، ضمناً بین  $X^3$  و  $X$  از  $x$  فاکتور می‌گیریم و بین  $Y^2$  و  $Y^4$  از  $Y^2$  فاکتور می‌گیریم پس در کل از  $10xy^2$  فاکتور می‌گیریم:

$$40x^3y^2 - 30xy^4 = 10xy^2(4x^2 - 3y^2)$$

عامل  $(4x^2 - 3y^2)$  در گزینه (۱) دیده می‌شود، پس دو جمله‌ای داده شده بر آن بخش پذیر است.

۲ ۱۱

از عبارت  $x(x^2 - 6)^2$  فاکتور می‌گیریم:

$$2x(x^2 - 6)^2 - x^2(x^2 - 6)^2 = x(x^2 - 6)^2(2(x^2 - 6) - x^2)$$

$$= x(x^2 - 6)^2(2x^2 - 12 - x^2) = x(x^2 - 6)^2(x^2 - 12)$$

۲ ۱۲

$$16x^3y + 40x^2y^2 + 25xy^3 \xrightarrow{\text{فاکتور از } xy} xy(16x^2 + 40xy + 25y^2)$$

$$= xy(4x + 5y)^2$$

۴ ۱۳

$$x^6y^2 - x^2y^6 \xrightarrow{\text{فاکتور از } x^2y^2} x^2y^2(x^4 - y^4)$$

$$= x^2y^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = x^2y^2(x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$$

بنابراین در تجزیه به دست آمده، عامل  $(x + y)^2$  وجود ندارد.

۲۰ ۱۴

$$x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy = 0$$

از دو طرف  $\rightarrow x - 2y = 0$  تجزیه با اتحاد مزدوج  
 جذر بگیر.

$$x^2 - 4y^2 \xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}} (x - 2y)(x + 2y) = 0$$

۲۱ ۱

$$2x^2 + 2x - 4x \xrightarrow{\text{فاکتور از } (2x)} 2x(x^2 + x - 2) = 2x(x+2)(x-1)$$

تجزیه با جمله مشترک

بنابراین در بین گزینه‌ها تنها بر  $(x+1)$  بخش پذیر نیست.

۲۲ ۲

روش اول:

$$4x^3 - 6x^2 + 2x \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} (4x^2 - 6x + 2) = x(2x-1)(2x-2)$$

$$= 2x(2x-1)(x-1)$$

توضیح حل بالا: در عبارت  $4x^2 - 6x + 2$  ضریب  $x^2$  یعنی عدد ۴ مربع کامل است پس از  $4x^2$  جذر می‌گیریم که برابر می‌شود با  $(2x)$  حالا جمله  $6x$  را طوری نوشتیم که در آن  $2x$  ایجاد شود یعنی به شکل  $2(2x)$  نوشتیم و در نهایت از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه استفاده کردیم.

استاد نمیشد اولش از  $2x$  فاکتور بگیریم!



چرا میشد، اون وقت باید به شکل زیر عمل می‌کردیم:

$$4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1)$$

در داخل پرانتز حالا ضریب  $x$ ، مربع کامل نیست پس از روش گفته شده در درسنامه برای تجزیه آن استفاده می‌کنیم یعنی ابتدا ۲ رو در جمله آخر (عدد ۱) ضرب می‌کنیم:

$$2x^2 - 3x + 1 \xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (x-2)(x-1)$$

حالا در یکی از پرانتزها، عدد ثابت رو بر ۲ تقسیم و در پرانتز دیگه،  $x$  رو در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$(x - \frac{2}{2})(2x - 1) = (x-1)(2x-1)$$

پس کل عبارت داده شده در متن سؤال به شکل  $2x(x-1)(2x-1)$  تجزیه خواهد شد. بنابراین بر  $(2x-1)$  بخش پذیر است.

**روش دوم: فلق زراندوز** می‌توانیم عبارت‌های موجود در گزینه‌ها را مساوی صفر قرار دهیم و مقدار  $x$  را به دست آوریم. این مقدار  $x$  را در چند جمله‌ای متن سؤال قرار می‌دهیم، اگر حاصل صفر شود چند جمله‌ای ما بر آن عبارت بخش پذیر است.

گزینه (۱):  $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

در چند جمله‌ای متن سؤال قرار می‌دهیم  $\rightarrow 4(-\frac{1}{2})^2 - 6(-\frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{2}) \neq 0$

گزینه (۲):  $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

در چند جمله‌ای متن سؤال قرار می‌دهیم  $\rightarrow 4(\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2}) = 0$

پس حاصل چند جمله‌ای داده شده به ازای  $x = \frac{1}{2}$  برابر صفر شد. لذا گزینه (۲) درست است.

۱۴ ۳

بین دو جمله، علامت تفریق وجود دارد پس قطعاً باید از اتحاد مزدوج برای تجزیه آن استفاده کنیم:

$$x^4 - 256 = (x^2 - 16)(x^2 + 16) = (x^2 - 4)(x^2 + 4)(x^2 + 16)$$

تجزیه دوباره تجزیه با مزدوج با مزدوج  
 جذر جذر جذر جذر  
 $x^4$   $16$   $x^2$   $4$   
 باز هم تجزیه با مزدوج

$$= (x-2)(x+2)(x^2+4)(x^2+16)$$

۱۵ ۳

$$d^2 - c^2 = 77 \Rightarrow (d-c)(d+c) = 77$$

تجزیه با مزدوج

$$\Rightarrow d+c = \frac{77}{7} = 11 \Rightarrow c^2 + d^2 + 2cd = (c+d)^2 = 11^2 = 121$$

تجزیه با اتحاد اول

دقت دارید که چون  $c-d = -7$  است لذا  $d-c = 7$  خواهد بود.

۱۶ ۳

$x^4$  رامی‌توانیم به شکل  $(x^2)^2$  در نظر بگیریم پس در عبارت  $(x^2)^2 - 2x^2 + 1$  جمله مشترک  $x^2$  است حالا به کمک اتحاد جمله مشترک، دنبال دو عدد می‌گردیم که ضربشان  $+1$  و جمعشان  $-2$  شود، این دو عدد  $(-1)$  و  $(-1)$  هستند:

$$(x^2)^2 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)(x^2 - 1)$$

تجزیه با مزدوج تجزیه با مزدوج

$$= (x-1)(x+1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)^2$$

البته به کمک اتحاد دوم هم می‌توانستیم عبارت را تجزیه کنیم.

۱۷ ۳

در درسنامه گفتیم که اگر  $\Delta = 0$  باشد، می‌توانیم عبارت را به شکل توان دوم مجموع دو جمله (یا تفاضل دو جمله) بنویسیم:

$$5x^2 + mx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4(5)(1) = 0 \Rightarrow m^2 = 20 \Rightarrow m = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$$

ولی جواب  $2\sqrt{5}$  در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۸ ۱

$$4x^2 - y^2 = 12 \xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}} (2x-y)(2x+y) = 12$$

$$\xrightarrow{2x-y=6} 6(2x+y) = 12 \Rightarrow 2x+y = \frac{12}{6} = 2$$

حالا یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$4x = 8 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{2x-y=6} 2(2) - y = 6 \Rightarrow y = 4 - 6 = -2$$

بنابراین  $x+y = 2 + (-2) = 0$  می‌باشد.

۱۹ ۲

$$a^2 - 4b^2 + 15 \Rightarrow a^2 - 4b^2 = 15 \xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}} (a-2b)(a+2b) = 15$$

$$\xrightarrow{a-2b=5} 5(a+2b) = 15 \Rightarrow a+2b = \frac{15}{5} = 3$$

حالا از دو رابطه موجود، مقادیر  $a$  و  $b$  را می‌یابیم:

$$\begin{cases} a - 2b = 5 \\ a + 2b = 3 \end{cases}$$

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \xrightarrow{a-2b=5} 4 - 2b = 5 \Rightarrow 2b = 4 - 5 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 - 2b = 4^2 - 2(-\frac{1}{2}) = 16 + 1 = 17$$

۲۳ ۴

$$x^4 - 3x^2 - 4 = \underbrace{(x^2)^2 - 3x^2 - 4}_{\text{تجزیه با جمله مشترک}} = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$$

$$= (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$$

 بنابراین بر  $(x + 1)$  بخش پذیر نیست.

۲۴ ۳

$$\underbrace{(x^2 - 12)^2 - (4x)^2}_{\text{تجزیه به کمک اتحاد مزدوج}} = (x^2 - 12 - 4x)(x^2 - 12 + 4x)$$

$$= \underbrace{(x^2 - 4x - 12)}_{\text{تجزیه با جمله مشترک}}(x^2 + 4x - 12) = (x - 6)(x + 2)(x + 6)(x - 2)$$

 از بین گزینه‌ها فقط عبارت  $(x + 3)$  در تجزیه شده عبارت مشاهده نمی‌شود.

۲۵ ۳

عبارت  $16x^4$  مربع کامل است و جذر آن برابر می‌شود با  $4x^2$ ، پس باید از دل جمله  $24x^2$  عبارت  $4x^2$  را بکشیم بیرون. پس  $24x^2$  را به شکل  $6(4x^2)$  می‌نویسیم و از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه این سه جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$16x^4 + 24x^2 - 7 = (4x^2)^2 + 6(4x^2) - 7 = \underbrace{(4x^2 - 1)}_{\text{تجزیه با مزدوج}}(4x^2 + 7)$$

$$= (2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 7)$$

۲۶ ۱

$$a(a - 2)(a - 3) - 4a + 8 = a(a - 2)(a - 3) - 4(a - 2)$$

$$\underbrace{(a - 2)}_{\text{فاکتور از (a-2)}}(a - 2)(a - 3) - 4(a - 2) = (a - 2)(a^2 - 3a - 4)$$

$$= (a - 2)(a + 1)(a - 4)$$

 بنابراین در تجزیه عبارت، عامل  $(a - 1)$  وجود ندارد.

۲۷ ۳

$$a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36 = a(a - 3)(a - 4) - 12(a - 3)$$

$$\underbrace{(a - 3)}_{\text{فاکتور از (a-3)}}(a - 3)(a - 4) - 12(a - 3) = (a - 3)(a^2 - 4a - 12)$$

$$= (a - 3)(a + 2)(a - 6)$$

 بنابراین در تجزیه عبارت، عامل  $(a - 2)$  وجود ندارد.

۲۸ ۴

عبارت  $(x^2 + x)$  دو بار تکرار شده، پس جمله مشترک خواهد بود. پس  $x^2 + x$  را در هر دو پرانتز قرار می‌دهیم حال به دنبال دو عدد هستیم که ضربشان  $-2$  و جمعشان  $-1$  شود که عبارتند از  $-2$  و  $+1$ :

$$(x^2 + x)^2 - 1(x^2 + x) - 2 = ((x^2 + x) + 1)((x^2 + x) - 2)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2) = (x^2 + x + 1)(x + 2)(x - 1)$$

 بنابراین تنها بر  $(x + 2)$  بخش پذیر است.

۲۹ ۴

**روش اول:**

$$(x^2 - 4x + 2)^2 + 2(x^2 - 4x + 2) + 2$$

$$\underbrace{(x^2 - 4x + 2)^2 + 2(x^2 - 4x + 2) + 2}_{\text{تجزیه با جمله مشترک}} = (x^2 - 4x + 2 + 1)((x^2 - 4x + 2) + 1)$$

$$= (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 3)(x - 2)^2$$

تجزیه با اتحاد دوم تجزیه با جمله مشترک

 بنابراین بر  $(x + 1)$  بخش پذیر نیست.

**روش دوم:** اگر طبق روش تستی گفته شده (قلق زاندوزی) عمل کنیم، متوجه می‌شویم که مقدار عبارت متن سؤال به ازای  $x = -1$  صفر نمی‌شود ( $-1$  ریشه گزینه ۴) است) ولی مقدار آن به ازای  $x = 1$ ،  $x = 2$ ، و  $x = 3$  همگی برابر صفر است. پس عبارت داده شده فقط بر  $(x + 1)$  بخش پذیر نیست.

۳۰ ۴

$$(x^2 - 6x - 4)^2 - 144 = \underbrace{(x^2 - 6x - 4)^2 - 12^2}_{\text{تجزیه با مزدوج}} = (x^2 - 6x - 4 + 12)(x^2 - 6x - 4 - 12)$$

$$= (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x - 16) = (x - 4)(x - 2)(x - 8)(x + 2)$$

 تجزیه با جمله مشترک  
تجزیه با جمله مشترک

 بنابراین در تجزیه عبارت، عامل  $(x + 4)$  وجود ندارد.

۳۱ ۴

**روش اول:**

$$\underbrace{2x^3 - x^2 - 8x + 4}_{\text{فاکتور از (-4)}} \underbrace{= x^2(2x - 1) - 4(2x - 1)}_{\text{فاکتور از (2x-1)}}$$

$$= (2x - 1)(x^2 - 4) = (2x - 1)(x - 2)(x + 2)$$

تجزیه با مزدوج

 بنابراین بر  $(2x + 1)$  بخش پذیر نیست.

**روش دوم:** اگر به روش تستی عمل کنیم متوجه می‌شویم که ریشه گزینه ۴) یعنی  $x = \frac{-1}{3}$  عبارت داده شده در متن سؤال را به صفر تبدیل نمی‌کند، پس این عبارت بر  $(2x + 1)$  بخش پذیر نیست. ولی چند جمله‌ای متن سؤال به ازای  $x = 2$ ،  $x = \frac{1}{3}$ ، و  $x = -2$  برابر صفر می‌شود؛ پس این عبارت بر تمام عبارت‌های  $x - 2$ ،  $x - 1$ ،  $2x - 1$  و  $x + 2$  بخش پذیر است.

۳۲ ۱

$$a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab = a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab$$

$$= \underbrace{(a^2 + 4b^2 + 4ab)}_{\text{مربع دو جمله‌ای}} + 2(a + 2b) = \underbrace{(a + 2b)^2}_{3} + 2(a + 2b)$$

$$= 9 + 6 = 15$$

۳۳ ۲

$$\underbrace{x^2 - (x - 1)(x^2 - x + 3) - x}_{\text{فاکتور از x}} = x(x - 1) - (x - 1)(x^2 - x + 3)$$

$$= -(x - 1)(x^2 - x + 3 - x) = -(x - 1)(x^2 - 2x + 3)$$

**تذکره:** عبارت  $(x^2 - 2x + 3)$  قابل تجزیه نیست چون دلتای آن، منفی می‌شود.

۴۱ ۴

**روش اول:** در صورت کسر از  $2(x^2 - 4)^2$  فاکتور می‌گیریم:

$$\text{عبارت} = \frac{\cancel{2}(x^2 - 4)^2(-3x + (x^2 - 4))}{\cancel{2}(x^2 - 4)^2(x + 1)} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$$

تجزیه با جمله مشترک

$$= \frac{(x - 4)(x + 1)}{(x + 1)} = x - 4$$

**روش دوم (عددگذاری):** می‌توانیم به جای  $x$  ها یک عدد دلخواه مثل  $x = 0$  قرار دهیم:

$$x = 0 \rightarrow \frac{\text{صفر}}{2(-4)^2(1)} = \frac{\cancel{2}(-64)}{\cancel{2}(16)} = -4$$

حالا در گزینه‌ها هم به جای  $x$  ها عدد صفر را قرار می‌دهیم فقط حاصل گزینه «۴» برابر  $-4$  می‌شود.

۴۲ ۱

ابتدا صورت و مخرج را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{\text{فاکتور } ab^2}{ab^2 + a^2b + 2ab} = \frac{\text{تجزیه با اتحاد اول}}{ab(b^2 + a^2 + 2ab)} = \frac{(a + b)^2}{(a - b)(a + b)}$$

$$= \frac{a + b}{a - b} \frac{a = \sqrt{2} + 1}{b = \sqrt{2} - 1} \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

فاکتور از منفی

۴۳ ۳

**روش اول:**

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} - \frac{5x + 3}{x + 1} = \frac{x(x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} - \frac{5x + 3}{x + 1}$$

$$= \frac{x(x + 3) - (x + 2)(5x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{x^2 + 3x - (5x^2 + 3x + 10x + 6)}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$= \frac{x^2 + 3x - 5x^2 - 13x - 6}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{-4x^2 - 10x - 6}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$= \frac{-((2x)^2 + 5(2x) + 6)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{-2(2x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{-2(2x + 3)}{x + 2}$$

**روش دوم:**

**فلق زرانحوز** در تست‌های مربوط به ساده کردن عبارت‌های گویا یا اعمال جبری روی عبارت‌های گویا می‌توانیم به جای تجزیه عبارت‌ها، از عددگذاری استفاده کنیم. یعنی به متغیر، عددی دلخواه را نسبت می‌دهیم به شرطی که مخرج هیچ کسری صفر نشود، سپس همان عددی را که به متغیر دادیم در گزینه‌ها نیز به جای متغیرها قرار می‌دهیم و گزینه درست را انتخاب می‌کنیم. همان‌طور که گفتیم می‌توانیم از روش عددگذاری هم استفاده کنیم. مثلاً به  $x$  عدد ۱ را نسبت می‌دهیم:

$$\text{عبارت اصلی} = \frac{1^2 + 3(1)}{1^2 + 3(1) + 2} - \frac{5(1) + 3}{1 + 1} = \frac{4}{6} - \frac{8}{2} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3}$$

۳۴ ۱

$$\begin{cases} 12x^2 - 12x - 9 = 3(4x^2 - 4x - 3) = 3((2x)^2 - 2(2x) - 3) \\ = 3(2x + 1)(2x - 3) \\ 16x^2 + 16x + 4 = 4(4x^2 + 4x + 1) = 4(2x + 1)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  م.م.ب. =  $(2x + 1)$

۳۵ ۴

ابتدا دو عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 + x - 2) = x^2(x - 1)(x + 2) \\ x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  م.م.ک. =  $x^2(x - 1)^2(x + 2)$

۳۶ ۲

$$\begin{cases} \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2} = (x^2 - 2)(x^2 + 2) \\ \text{تجزیه با مزدوج} \\ x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 2) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2) \\ \text{تجزیه با جمله مشترک} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  م.م.ب. =  $(x^2 + 2)$

۳۷ ۴

ابتدا عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3) \\ 3x - 9 = 3(x - 3) \end{cases}$$

$\Rightarrow A = \text{م.م.ک.} = 3x(x - 3)(x + 3)$  و  $B = \text{م.م.ب.} = (x - 3)$

$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3x(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)} = 3x(x + 3) \Rightarrow \frac{A}{B} = 3x^2 + 9x$

۳۸ ۴

گزینه‌های (۱) و (۳) عبارت گویا نیستند. چون  $x$  در آن‌ها داخل قدرمطلق یا زیر رادیکال است. گزینه (۲) به ازای  $x = 0$  (ریشه مخرج) تعریف نمی‌شود. در گزینه (۴) مخرج کسرها مساوی صفر قرار می‌دهیم:

همواره تعریف شده است.  $\Rightarrow$  جواب ندارد  $\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

۳۹ ۱

$x = -1$  ریشه مخرج است:

$$x(2x - m) = 0 \xrightarrow{x=-1} -1(2(-1) - m) = 0 \Rightarrow -(-2 - m) = 0$$

$\Rightarrow 2 + m = 0 \Rightarrow m = -2$

$$\frac{mx^2 + x - 2}{x(2x - m)} = \frac{-2x^2 + x - 2}{x(2x - (-2))} = \frac{-2x^2 + x - 2}{x(2x + 2)}$$

$\xrightarrow{x=1} \frac{-2 + 1 - 2}{1(2 + 2)} = \frac{-3}{4}$

۴۰ ۳

گفته شده  $x = -1$  عبارت را تعریف نشده می‌کند یعنی باید مخرج را مساوی صفر قرار داده و به جای  $x$  آن عدد  $-1$  را قرار دهیم:

$$x + b = 0 \xrightarrow{x=-1} -1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

ضمناً عبارت گویا به ازای  $x = 1$  برابر  $-\frac{1}{4}$  می‌شود پس همه جا عدد (۱) را به جای  $x$  ها قرار می‌دهیم و حاصل کسرها مساوی با  $-\frac{1}{4}$  می‌گذاریم:

$$\frac{x + a}{x + b} = \frac{x + a}{x + 1} \xrightarrow{x=1} -\frac{1}{2} = \frac{1 + a}{1 + 1}$$

$\Rightarrow \frac{1 + a}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 + a = -1 \Rightarrow a = -1 - 1 = -2$

۴۹

$$\begin{aligned} \text{عبارت} &= \frac{(2x+1)^2}{x(2x+1)} \div \left( \frac{x^2 - 2x - x^2 - 1}{x} \right) \\ &= \frac{2x+1}{x} \div \left( \frac{-(2x+1)}{x} \right) = \frac{2x+1}{x} \times \frac{x}{-(2x+1)} = -1 \end{aligned}$$

۵۰

$$\begin{aligned} \left( 2x+1 - \frac{3}{x} \right) \div \left( 2 + \frac{1}{x+1} \right) &= \frac{x(2x+1) - 3}{x} \div \frac{2(x+1) + 1}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + x - 3}{x} \times \frac{x+1}{2x+2+1} = \frac{2x^2 + x - 3}{x} \times \frac{x+1}{2x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(2x+3)(x-1)}{x} \times \frac{x+1}{2x+3} &= \frac{(2x+3)(x-1)(x+1)}{x(2x+3)} = \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

**تذکره** در مرحله آخر، از خاصیت زیر در کسر استفاده کرده ایم:

$$\frac{A \pm B}{C} = \frac{A}{C} \pm \frac{B}{C}$$

۵۱

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{3x}{x^2-4} \right) \times \left( 1 - \frac{1}{x-1} \right) &= \frac{x^2-4+3x}{x^2-4} \times \frac{x-1-1}{x-1} \\ &= \frac{x^2+3x-4}{(x-2)(x+2)} \times \frac{x-2}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-1)} = \frac{x+4}{x+2} \end{aligned}$$

۵۲

$$\begin{aligned} \left( x + \frac{2}{x-3} \right) \left( 1 - \frac{1}{x-2} \right) &= \frac{x(x-3)+2}{x-3} \times \frac{x-2-1}{x-2} \\ &= \frac{x^2-3x+2}{x-3} \times \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-2)(x-1)(x-3)}{(x-3)(x-2)} = x-1 \end{aligned}$$

۵۳

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{6}{x+2} \right) \left( \frac{5x-2}{x-4} + x \right) &= \frac{x+2-6}{x+2} \times \frac{5x-2+x(x-4)}{x-4} \\ &= \frac{x-4}{x+2} \times \frac{5x-2+x^2-4x}{x-4} = \frac{x-4}{x+2} \times \frac{x^2+x-2}{x-4} \\ &= \frac{(x-4)(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-4)} = x-1 \end{aligned}$$

۵۴

$$\begin{aligned} \left( x - \frac{x+6}{x-4} \right) \left( \frac{x^2+9}{x+1} - 5 \right) &= \frac{x(x-4) - (x+6)}{x-4} \left( \frac{x^2+9-5(x+1)}{x+1} \right) \\ &= \frac{x^2-4x-x-6}{x-4} \times \frac{x^2+9-5x-5}{x+1} = \frac{x^2-5x-6}{x-4} \times \frac{x^2-5x+4}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)(x-6)}{x-4} \times \frac{(x-1)(x-4)}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)(x-6)(x-1)(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \overset{\text{ضرب می کنیم}}{(x-6)(x-1)} = x^2-7x+6 \end{aligned}$$

حال در گزینه هانیز به جای  $x$  ها عدد ۱ را می گذاریم. جواب باید  $-\frac{10}{3}$  شود، فقط جواب عبارت گزینه (۳) برابر  $-\frac{10}{3}$  می شود (بقیه گزینه ها رو خودتون امتحان کنید).

$$\text{گزینه (۳): } \frac{-2(2x+3)}{x+2} = \frac{-2(2(1)+3)}{1+2} = \frac{-10}{3}$$

استاد آگه حاصل دو تا گزینه برابر  $-\frac{10}{3}$  شد چی؟

اون وقت عددی که به  $x$  دادی رو عوض کن مثلاً  $x$  رو ۲ یا ۳

فرض کن قطعاً مشکل حل می شه. در تمام سوالات بعدی، همیشه از روش عددگذاری هم استفاده کرد.



۴۴

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x-2}{x^2-1}$$

$$\frac{x(x+1)+3(x-1)-4x+2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+x+3x-3-4x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 1$$

۴۵

$$\text{عبارت} = \frac{2a}{(a-2b)(a+2b)} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a-2b}$$

$$= \frac{2a+a-2b-(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)} - \frac{2a-4b}{(a-2b)(a+2b)}$$

$$= \frac{2(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{2}{a+2b}$$

۴۶

$$\text{عبارت} = \frac{x(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$= \frac{x(2x-1) + (x-1)(2x-1) - (2x+1)(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$= \frac{4x^2-4x+1-4x^2-4x-1}{4x^2-1} = \frac{-8x}{4x^2-1} \Rightarrow P(x) = -8x$$

۴۷

$$\text{عبارت} = \frac{x(x^2+3x+2)}{x(x+1)(x^2-4)} - \frac{2}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x(x+2)(x+1)}{x(x+1)(x-2)(x+2)} - \frac{2}{x(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x(x-2)} = \frac{1}{x}$$

۴۸

$$\text{عبارت} = \frac{x+2}{(x+2)(x-1)} - \frac{2x}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

۶۱ ۴

تمام جملات را در ۲۰ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها حذف شوند:

$$20 \left( \frac{2x-1}{5} - \frac{1-2x}{4} = 3 \right) \Rightarrow 4(2x-1) - 5(1-2x) = 60$$

$$\Rightarrow 8x - 4 - 5 + 10x = 60$$

$$\Rightarrow 18x = 60 + 4 + 5 \Rightarrow 18x = 69 \Rightarrow x = \frac{69}{18}$$

$$\Rightarrow \text{نصف جواب} = \left( \frac{18}{2} \right) = \frac{69}{2 \times 18} = \frac{69}{36}$$

۶۲ ۴

طول و عرض مستطیل را به ترتیب  $x$  و  $y$  در نظر می‌گیریم، بنابراین عرض مستطیل برابر با  $y = \frac{x}{2}$  است و داریم:

$$\text{محیط} = 2(x+y) = 2\left(x + \frac{x}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2}x = 3x$$

$$\xrightarrow{\text{محیط}=15} 3x = 15 \Rightarrow \text{طول } x = \frac{15}{3} = 5$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

طول - عرض =  $5 - 2.5 = 2.5$

۶۳ ۳

$$\text{محیط} = (x+4) + x + (2x-1) = 35 \Rightarrow 4x + 3 = 35$$

$$\Rightarrow 4x = 35 - 3 \Rightarrow 4x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{4} = 8$$

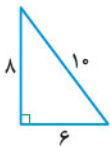
$$\text{اضلاع مثلث} = \frac{2(8)}{15}, 8, \frac{8+4}{12} \Rightarrow \text{بزرگ‌ترین ضلع} = 8$$

۶۴ ۴

اضلاع مثلث:  $x, x+2, x+4$

$$\text{محیط} = x + x + 2 + x + 4 = 24 \Rightarrow 3x + 6 = 24$$

$$\Rightarrow 3x = 24 - 6 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$$



مثلث قائم‌الزاویه است.  $10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow$  اضلاع مثلث:  $6, 8, 10$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{6 \times 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

من نفهمیدم چرا گفتین مثلث، قائم‌الزاویه است؟



کلاً اگر  $x, y, z$  سه ضلع یه مثلث دلخواه باشن و  $r$

بزرگ‌ترین ضلع باشه اون وقت اگه رابطه فیثاغورث یعنی  $r^2 = x^2 + y^2$  برقرار باشه می‌فهمیم که مثلث، قائم‌الزاویه است ضمناً اگه این مثلث، قائم‌الزاویه باشه مساحتش برابر با  $\frac{x \times y}{2}$  خواهد بود.

۶۵ ۲

زوایای مثلث را  $7x, 11x$  و  $18x$  در نظر می‌گیریم. (پهن گفته شده زوایا متناسب با اعداد ۷ و ۱۱ و ۱۸ هستند نه مساوی با اونها) از آن‌جا که مجموع زوایای داخلی مثلث برابر  $180^\circ$  است، داریم:

$$7x + 11x + 18x = 180^\circ \Rightarrow 36x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{36} = 5^\circ$$

مثلث قائم‌الزاویه است.  $\Rightarrow$  اندازه زوایا:  $\underbrace{7(5)}_{35^\circ}, \underbrace{11(5)}_{55^\circ}, \underbrace{18(5)}_{90^\circ}$

اما چون زاویه‌های برابری وجود ندارد، لذا متساوی‌الساقین نیست.

۵۵ ۲

$$\left(2 + \frac{x^2}{x-4}\right) \div \left(1 + \frac{8}{x-4}\right) = \frac{2(x-4) + x^2}{x-4} \div \frac{x-4+8}{x-4}$$

$$= \frac{2x-8+x^2}{x-4} \div \frac{x+4}{x-4} = \frac{x^2+2x-8}{x-4} \times \frac{x-4}{x+4}$$

$$= \frac{(x-2)(x+4)(x-4)}{(x-4)(x+4)} = x-2$$

۵۶ ۲

$$\left(1 - \frac{2}{x^2+x^2}\right) \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2+x^2-2}{x^2+x^2} \times \frac{x^2-1+2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{(x^2+2)(x^2-1)(x^2+1)}{x^2(x^2+1)(x^2-1)} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2+2}{x^2} - \frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2+2-2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

۵۷ ۱

$$\text{عبارت} = \frac{(2x-3)^2}{2(2x-3)} \div \frac{2x-4x+3}{x}$$

$$= \frac{2x-3}{2} \times \frac{x}{-2x+3} = \frac{2x-3}{2} \times \frac{x}{-(2x-3)} = -\frac{x}{2}$$

فصل ۱ معادله درجه دوم

۵۸ ۱

روش اول: ابتدا معادله را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 = 2x(x-1) + 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 2x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x + 5 = 2x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 2x^2 + 2x = 3 - 5 \Rightarrow 8x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

روش دوم:

نکته تستی در این‌گونه سؤالات می‌توانیم اعداد گزینه‌ها را به جای  $x$  های معادله قرار دهیم؛ اگر به ازای یک عدد مشخص، دو طرف معادله با هم برابر شدند، می‌گوییم آن عدد، ریشه معادله است.

اعداد گزینه‌ها را به جای  $x$  های معادله قرار می‌دهیم، فقط به ازای  $x = -\frac{1}{4}$  دو طرف معادله با هم مساوی می‌شوند؛ پس جواب معادله  $-\frac{1}{4}$  است.

۵۹ ۲

برانتزها رو در هم ضرب کن

$$(x-1)(x^2+x+1) = x(x^2-2)$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 2x \Rightarrow x^3 - 1 = x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow x^3 - x^3 + 2x = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۶۰ ۳

جواب معادله در معادله صدق می‌کند یعنی به جای  $x$  ها ۲ را قرار می‌دهیم:

$$mx + m - 1 = 1 + \frac{x}{2} \xrightarrow{x=2} 2m + m - 1 = 1 + \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow 3m - 1 = 2 \Rightarrow 3m = 2 + 1 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{3} = 1$$

۶۶

اگر شعاع دایره را  $r$  در نظر بگیریم، ضلع مربع برابر با قطر دایره یعنی  $2r$  است و داریم:

$$\begin{aligned} \text{نصف مساحت بین مربع و دایره} &= \text{مساحت رنگی} \\ \frac{1}{2}((2r)^2 - \pi r^2) &= 8 \\ \frac{1}{2}(4r^2 - \pi r^2) &= 8 \xrightarrow{\times 2} (4r^2 - \pi r^2) = 16 \\ \Rightarrow (4 - \pi)r^2 = 16 &\Rightarrow r^2 = \frac{16}{4 - \pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{16}{4 - \pi}} = \frac{4}{\sqrt{4 - \pi}} \end{aligned}$$

۶۷

مختصات نقطه در معادله خط صدق می‌کند، یعنی طول و عرض نقطه  $A$  را به جای  $x$  و  $y$  قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} y = -2x + 1 \xrightarrow{A(x, y)} m + 3 &= -2(2m - 1) + 1 \\ \Rightarrow m + 3 &= -4m + 2 + 1 \Rightarrow m + 4m = 3 - 3 \\ \Rightarrow 5m &= 0 \Rightarrow m = \frac{0}{5} = 0 \end{aligned}$$

$$A(2m - 1, m + 3) \xrightarrow{m=0} A(-1, 3) \text{ ربع دوم}$$

۶۸

اگر سن نگین را  $x$  در نظر بگیریم، سن خواهرهای دوقلو  $(x - 8)$  و  $(x - 8)$  می‌باشد و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} x + (x - 8) + (x - 8) &= 32 \Rightarrow 3x - 16 = 32 \\ \Rightarrow 3x &= 32 + 16 \Rightarrow 3x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{3} = 16 \end{aligned}$$

استاد من مشکلم اینه که نمیدونم چی رو  $x$  بگیرم؟ الان شما سن نگین رو  $x$  گرفتین، حالا نمیشد سن خواهرهاش رو  $x$  بگیریم؟

بین مهم نیست کدوم رو  $x$  بگیریم، الان اگه سن خواهرهای

دوقلوی نگین رو  $x$  فرض کنیم سن نگین میشه  $x + 8$  و معادله زیر رو حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x + x + x + 8 &= 32 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8 \end{aligned}$$

پس سن نگین برابر میشه با:  $x + 8 = 8 + 8 = 16$   
پس دیدی، جوابهای نهایی یکسان شدن.

۶۹

اگر سیامک  $x$  سال سن داشته باشد، پدرش  $x + 30$  سال دارد و داریم:

$$\begin{aligned} \text{سن پدر} + \text{سن سیامک} &= 2(x + 5) \Rightarrow x + 35 = 2x + 10 \\ \Rightarrow x - 2x &= 10 - 35 \Rightarrow -x = -25 \Rightarrow x = \frac{-25}{-1} = 25 \end{aligned}$$

۷۰

اگر ضلع مربع را  $x$  فرض کنیم، محیط آن برابر  $4x$  و مساحتش  $x^2$  است، با توجه به اطلاعات سؤال یک معادله مناسب تشکیل می‌دهیم تا  $x$  به دست آید:

$$\begin{aligned} 4x = \frac{3}{4}x + 6\frac{1}{5} \xrightarrow{\times 4} 16x &= 3x + 26 \Rightarrow 13x = 26 \Rightarrow x = 2 \\ \text{پس مساحت مربع برابر است با:} & x^2 = 2^2 = 4 \end{aligned}$$

۷۱

حقوق تکنسین خواسته شده پس آن را  $x$  می‌گیریم با توجه به اطلاعات سؤال، می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} y &= 2x \\ \text{حقوق مهندس} &= 2 \times \text{حقوق تکنسین} \\ \text{حقوق مدیر بخش} &= \frac{2}{3}x \\ \text{حقوق مهندس} &= \frac{2}{3}Z \\ \text{طرفین وسطین کن} &= \frac{Z}{3} \\ \text{خط بزن} & \Rightarrow Z = 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 185 &= 122(\text{تکنسین}) + 8(\text{مهندس}) + 3(\text{مدیر}): \text{طبق فرض} \\ \Rightarrow 3Z + 8y + 12x &= 185 \Rightarrow 3(3x) + 8(2x) + 12x = 185 \\ \Rightarrow 9x + 16x + 12x &= 185 \Rightarrow 37x = 185 \Rightarrow x = \frac{185}{37} = 5 \end{aligned}$$

(میلیون تومان)

۷۲

سن کنونی رضا  $x$ ، سن کنونی مجید  $y$   
 $(x + 5) + (y + 5) = 30 \Rightarrow x + y + 10 = 30$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + y &= 20 \quad (1) \\ \text{سال گذشته} & \Rightarrow (x - 1) = 2(y - 1) \Rightarrow x - 1 = 2y - 2 \Rightarrow x = 2y - 2 + 1 \\ \Rightarrow x &= 2y - 1 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{در رابطه (۱) به جای } x & \text{ بنابر } 2y - 1 \\ \Rightarrow 3y &= 20 + 1 \\ \Rightarrow 3y &= 21 \Rightarrow y = \frac{21}{3} = 7 \xrightarrow{\text{رابطه ۲}} x = 2(7) - 1 = 13 \\ \Rightarrow x - y &= 13 - 7 = 6 \end{aligned}$$

۷۳

تعداد کل شکلات‌های نیکا را  $x$  در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{aligned} \text{نصف باقی‌مانده (پدر)} + \text{ثلث (مادر)} &= x \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3}) + 6 &= x \\ \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}x) + 6 &= x \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{1}{3}x + 6 = x \\ \Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x - x &= -6 \Rightarrow \frac{2}{3}x - x = -6 \\ \text{ضرب تمام جملات در } 3 & \Rightarrow 2x - 3x = -18 \Rightarrow -x = -18 \Rightarrow x = 18 \end{aligned}$$

۷۴

اگر زمان دویدن در روز اول را  $x$  بنامیم، داریم:

$$\begin{aligned} x \quad 2x \quad 4x \quad 8x \quad 16x \quad 32x \quad 64x \quad 128x \\ \downarrow \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\ \text{روز اول} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{روز هشتم} \\ 128x = 192 \Rightarrow x = \frac{192}{128} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ دقیقه} \\ \text{مجموع کل} &= x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x + 64x + 128x \\ &= 255x = 255(1\frac{1}{2}) = 382\frac{1}{2} \text{ دقیقه} \end{aligned}$$

۱ ۸۰

اگر تعداد دوستان علی را  $X$  فرض کنیم خواهیم داشت:

- $X \rightarrow$  ما
- $\oplus \rightarrow$  و
- $X \rightarrow$  ما
- $\oplus \rightarrow$  و
- $\frac{X}{2} \rightarrow$  نصف ما
- $\oplus \rightarrow$  و

نوشتن معادله  $\rightarrow X + X + \frac{X}{2} + \frac{X}{4} + 1 = 100$

- $\frac{X}{2} = \frac{X}{4}$  → نصفهای از نصف ما
- $+1$  → گر تو هم باماشوی
- $100 =$  جمع کل → جملگی ۱۰۰ می شویم

همه جملات رو در ۴ ضرب کن  $\rightarrow 4X + 4X + 2X + X + 4 = 400$

$11X = 400 - 4 \Rightarrow 11X = 396 \Rightarrow X = \frac{396}{11} = 36$

۲ ۸۱

آن عدد را  $X$  در نظر می‌گیریم، و معادله مربوطه را تشکیل می‌دهیم:

$14X = 8X + 45 \Rightarrow 14X - 8X = 45 \Rightarrow 6X = 45$

$\Rightarrow X = \frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7.5$

۳ ۸۲

$(3X - 4) + \frac{X}{2} = 10 \Rightarrow 3X + \frac{X}{2} = 10 + 4$

ضرب جملات در ۲  $\rightarrow 6X + X = 28 \Rightarrow 7X = 28 \Rightarrow X = \frac{28}{7} = 4$

۳ ۸۳

مقدار تولید روز شنبه را  $X$  در نظر می‌گیریم، پس کارخانه در روز یکشنبه  $2X$ ، دوشنبه  $4X$ ، سه‌شنبه  $8X$  و چهارشنبه  $16X$  تولید داشته است، طبق فرض داریم:

$16X = 64$  (هزار تن)  $\Rightarrow$  تولید روز چهارشنبه

$\Rightarrow X = \frac{64}{16} = 4$  (هزار تن)

چهارشنبه  $\uparrow$  سه‌شنبه  $\uparrow$  دوشنبه  $\uparrow$  یکشنبه  $\uparrow$  شنبه  $\uparrow$

مجموع تولید در ۵ روز  $= X + 2X + 4X + 8X + 16X$

$= 31X = 31(4) = 124$  (هزار تن)

۱ ۸۴

آن عدد را  $X$  در نظر گرفته و به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$\frac{11}{20} \left( \frac{X}{3} \right) = \frac{5}{12} X - 7 \Rightarrow \frac{11}{60} X - \frac{5}{12} X = -7$

ضرب جملات در ۶۰  $\rightarrow 11X - 25X = -420 \Rightarrow -14X = -420 \Rightarrow X = \frac{420}{14} = 30$

۳ ۸۵

بهتر است این مساله را با یک تناسب حل کنیم. اگر قالی باف در هر روز  $X$  گره

زده باشد، خواهیم داشت:

۹۰۰	۵,۸۵۰,۰۰۰
۱	$X$

$900 \cdot X = 1 \cdot 5,850,000 \Rightarrow X = \frac{5,850,000}{900} = 6500$

۱۴ ۷۵

سرمایه نفر سوم را  $X$  در نظر می‌گیریم، در نتیجه:

$\Rightarrow$  سرمایه نفر دوم  $= \frac{1}{2} X$

سرمایه نفر اول  $= 3 \left( \frac{1}{2} X \right) = \frac{3}{2} X$

مجموع سود این ۳ نفر ۹۰ میلیون تومان است، پس داریم:

۹۰ میلیون تومان  $X + \frac{1}{2} X + \frac{3}{2} X = 90$

ضرب جملات در ۲  $\rightarrow 2X + X + 3X = 180 \Rightarrow 6X = 180 \Rightarrow X = \frac{180}{6} = 30$

سرمایه نفر اول  $= \frac{3}{2} \times 30 = 45$  میلیون تومان

۳ ۷۶

قیمت مداد را  $X$  در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

(۱)  $4X =$  قیمت دفتر  $\Rightarrow$  قیمت مداد  $\times 4 =$  قیمت دفتر

(۲)  $\frac{3}{5} X =$  قیمت پاک‌کن  $\Rightarrow$  قیمت پاک‌کن  $\times \frac{5}{3} =$  قیمت مداد

$55000 =$  قیمت ۵ پاک‌کن + قیمت ۳ مداد + قیمت ۴ دفتر

$\xrightarrow{(2),(1)} 4(4X) + 3X + 5\left(\frac{3}{5}\right)X = 55000$

$\Rightarrow 16X + 3X + 3X = 55000 \Rightarrow 22X = 55000 \Rightarrow X = \frac{55000}{22}$

$\Rightarrow X = \frac{5000}{2} = 2500$

۱۴ ۷۷

با یک تناسب ساده، مسائل درصد را حل می‌کنیم:

	قیمت	درصد	
جدید $\rightarrow$	۳۰۰۰	۱۰۰	$\Rightarrow X = \frac{1800 \times 100}{3000} = 60\%$
قدیم $\rightarrow$	۱۸۰۰	$X$	

درصد کاهش  $= 100 - 60 = 40\%$

۲ ۷۸

$Y = X + 3$ : سن نیما  $\Rightarrow$  سن کیان

$X \cdot Y = 40 \Rightarrow X(X+3) = 40 \Rightarrow X^2 + 3X = 40$

با جمله مشترک تجزیه کن  $\rightarrow X^2 + 3X - 40 = 0$  (۴۰ رو ببر چپ)

$(X+8)(X-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X+8=0 \Rightarrow X=-8 \text{ ✗} \\ X-5=0 \Rightarrow X=5 \text{ ✓} \end{cases}$

۲ ۷۹

تعداد برقرار است پس وزن دو کفه ترازو با هم مساوی هستند:

$X + X + 2X + 3 = 8 + \frac{X}{2} + 1$   $\Rightarrow$  وزن سمت راست = وزن سمت چپ

$\Rightarrow 4X + 3 = 9 + \frac{X}{2} \xrightarrow{\times 2} 8X + 6 = 18 + X$

$\Rightarrow 7X = 12 \Rightarrow X = \frac{12}{7}$