

وَدَاسِ جَدِیدِ
مَطْبُوقِ اَمْرِیْ جَوَانِ
عَظَمَاءِ



حسابان ۲

پایه دوازدهم
رشته ریاضی و فیزیک

مؤلف
ندا فرهختی

فرمول لیست

فرمول گاج

۱۰+۵

نمونه
امتحانی

۷۰۰

پرسش
تشریحی

۸۰

صفحه
درسنامه



۵+

ساعت
فیلم
آموزشی
ویژه
شب
امتحان



تهران، میدان انقلاب
نیش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

پیشگفتار

ن و القلم و ما یسطرون

کتاب پیش رواز مجموعه کتاب‌های فرمول بیست می‌باشد. هدف اصلی این مجموعه کتاب ارائه آموزش‌های کامل همراه با مثال‌ها و تمرینات متنوع بر پایه کتاب درسی و در جهت تسلط و آمادگی برای امتحانات می‌باشد.

در این کتاب...

هر فصل شامل چندین درسنامه است تا تمام مطالب فصل با دقت و جزئیات آموزش داده شود و با ارائه مثال‌های لازم، مطالب عمیق‌تر تفهیم گردد. در ادامه در انتهای هر درسنامه تمام تمرینات و مثال‌های کتاب درسی شبیه‌سازی شده و با گردآوری سؤالات امتحان‌های نهایی، یک مجموعه تمرین و بانک سؤال خوب و کاملی ارائه شده است. در نهایت با حل کاملاً تشریحی تمرینات، هر آنچه که یک دانش‌پژوه برای آموزش نیاز دارد، در اختیارش قرار گرفته است.

در این کتاب برخی تمرینات تحت عنوان سوالات ستاره‌دار مشخص شده است، این گروه سؤالات همان تمرینات اولیه و حداقلی است که هر دانش‌پژوه باید با آن مواجه گردد. حجم و تنوع این دسته سؤالات به گونه‌ای طراحی شده که دانش‌پژوهانی که فرصت کمتری برای حل تمرین یا مرور فصل دارند ابتدا سراغ این دسته سؤالات بروند و سپس در مرحله بعد و در زمان مقتضی به حل بقیه تمرینات بپردازند و امکان تمرین بیشتر را داشته باشند. گروه دیگری از تمرینات، مجموعه سؤالاتی هستند که تحت عنوان سؤالات بمب شناخته می‌شوند. سؤالات بمب شامل تمریناتی است که سطح آنها یک سر و گردن بالاتر از دیگر تمرینات است و دانش‌پژوهان سخت‌کوش‌تر را به چالش می‌کشد تا با حل آنها لذت حل مسأله برایشان دوچندان شود.

در انتهای کتاب، یک سری مجموعه امتحان شامل امتحانات تألیفی و نهایی سال‌های اخیر قرار گرفته تا کار را برای مرور شب امتحان راحت‌تر کند.

خلاصه این که هر آنچه که یک دانش‌پژوه از یک کتاب آموزشی انتظار دارد، در این کتاب گنجانده شده است. بنابراین برای همراه شدن با این کتاب تردید نکنید و از داشتنش لذت ببرید.

در پایان از همه عزیزانی که بنده را در تهیه این کتاب همراهی نموده‌اند نهایت تشکر و قدردانی را دارم؛ همچنین از خانواده عزیزم که مرا صبورانه همراهی کردند، سپاسگزارم.

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سؤالات
56 min	۱۱۸	۶ تا ۲۷
52 min	۱۳۶	۲۸ تا ۴۷
30 min	۱۵۲	۴۸ تا ۶۵
95 min	۱۶۳	۶۶ تا ۹۳
55 min	۱۸۹	۹۴ تا ۱۱۶

فصل اول: تابع

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

فصل چهارم: مشتق

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

آزمون های فصلی



۲۱۰	آزمون ۱: آزمون فصل اول
۲۱۱	آزمون ۲: آزمون فصل دوم
۲۱۲	آزمون ۳: آزمون فصل سوم
۲۱۳	آزمون ۴: آزمون فصل چهارم
۲۱۴	آزمون ۵: آزمون فصل پنجم

امتحان نهایی



۲۱۵	آزمون ۶: شهریور ماه ۱۴۰۰
۲۱۶	آزمون ۷: دی ماه ۱۴۰۰
۲۱۷	آزمون ۸: خرداد ماه ۱۴۰۱
۲۱۹	آزمون ۹: شهریور ماه ۱۴۰۱
۲۲۰	آزمون ۱۰: دی ماه ۱۴۰۱
۲۲۲	آزمون ۱۱: خرداد ماه ۱۴۰۲
۲۲۳	آزمون ۱۲: شهریور ماه ۱۴۰۲
۲۲۴	آزمون ۱۳: دی ماه ۱۴۰۲
۲۲۶	آزمون ۱۴: خرداد ماه ۱۴۰۳
۲۲۷	آزمون ۱۵: مرداد ماه ۱۴۰۳
۲۲۹	پاسخ نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۱۵

بارم بندی درس حسابان ۲

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۷	۳
دوم	۶	۳
سوم	۷	۳
چهارم	-	۶
پنجم	-	۵
جمع	۲۰	۲۰

۱

بخش



درستامه

و سوالات تشریحی

فصل اول



حسابان دوازدهم

تابع یکی از اساسی‌ترین و مهم‌ترین مباحث حسابان می‌باشد و مقدمه و شروع بسیاری از مباحث مهم دیگر مثل حد و پیوستگی و مشتق است. هر جای دنیا هم که باشید وضعیت به همین شکل است و تابع و مفاهیم آن یکی از کاربردی‌ترین مباحث ریاضیات است. مثل این است که جمع و تفریق بلد نباشید. می‌توانید درک کنید که زندگی بدون جمع و تفریق چه قدر بی‌معنی است؟! ریاضیات بدون تابع هم به همین شکل است. این فصل یکی از فصل‌های مهم در حسابان می‌باشد که به صورت مستقیم و غیرمستقیم به کار می‌آید. یعنی هم می‌توان مستقیماً از خود فصل سوال مطرح کرد و هم از مطالب و نکاتی که در اینجا آموزش داده می‌شود در حل مسائل مباحث دیگر به‌کار می‌آیند. پس پیشنهاد می‌کنم که به مطالب این فصل خوب توجه کنید. در ضمن یاد گرفتن این فصل می‌تواند ۲ تا ۳ نمره در امتحان نهایی و درصد قابل توجهی در کنکور برایتان به ارمغان بیاورد.

بسته ۳

بسته ۲

بسته ۱

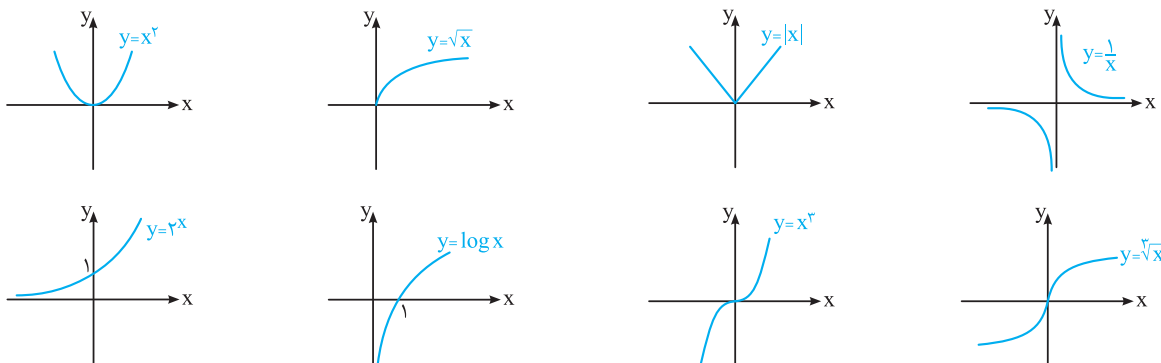
فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

تبدیل نمودار توابع
صفحه ۲ تا ۱۲ کتاب درسی

بسته اول

نمودارها در ریاضی می‌تونن در یک نیم‌نگاه اطلاعات خوبی رو از ویژگی‌های تابع بهتون بدن. مثلاً دامنه، برد، تقاطع با محورها، افزایش یا کاهش بودن تابع و فیلی چیزهای دیگه با یک نگاه کوچیک به نمودار تابع به دست میاد. پس فیلی مهمه که بتونیم رابطه خوبی با رسم نمودار توابع داشته باشیم. مادر این درسامه بهتون کمک می‌کنیم که بتونین نمودار توابع رو (البته در هر کتاب درسی تون) رسم کنید. **یادآوری** تعدادی از نمودارهای مهم و پایه‌ای را با هم مرور می‌کنیم:



اکنون می‌خواهیم با تبدیل نمودارهای بالا نمودار برخی توابع دیگر را رسم کنیم.

حالا هتماً از خودتون می‌پرسین (تبدیل نمودارها) یعنی چی؟
فُت باید بهتون بگم که وقتی شما نمودار به تابع مثل f رو داشته باشین، (حالا یا خودتون f رو رسم کرده باشین یا سؤال نمودارش رو بهتون داده باشه) با انتقال یا انعکاس اون نسبت به محورها یا حتی انقباض و انقباض نمودار f ، نمودار دیگه‌ای به دست میار که تبدیل یافته نمودار f هست.

الف انتقال نمودارها

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده باشد، انتقال های نمودار f به یکی از صورت های زیر است:

۱ انتقال عمودی: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ از روی نمودار $y = f(x)$ ؛

اگر $k > 0$ باشد، نمودار f را k واحد به بالا انتقال می دهیم. □ اگر $k < 0$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به پایین انتقال می دهیم.

۲ انتقال افقی: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ؛

اگر $k > 0$ باشد، نمودار f را k واحد به چپ منتقل می کنیم. □ اگر $k < 0$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به راست منتقل می کنیم.

☞ به توضیحات بالا به نگاهی بندها:

۱ در انتقال عمودی آنگاه $k > 0$ (مثبت) باشد، برای رسم $f(x) + k$ ، نمودار f ، k واحد به سمت بالا (y های مثبت) میره. اما در انتقال افقی آنگاه $k > 0$ باشد، برای رسم $f(x + k)$ ، نمودار f ، k واحد به سمت چپ (x های منفی) میره.

۲ در انتقال عمودی آنگاه $k < 0$ (منفی) باشد، برای رسم $f(x) + k$ ، نمودار f ، $|k|$ واحد به سمت پایین (y های منفی) میره. اما در انتقال افقی آنگاه $k < 0$ (منفی) باشد، برای رسم $f(x) + k$ ، نمودار f ، $|k|$ واحد به سمت راست (x های مثبت) میره.

مشابه تمرین صفحه ۱۱ کتاب درسی

سؤال به کمک نمودار $y = x^2$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

۳ $y = x^2 - 1$

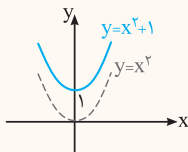
۲ $y = (x + 1)^2$

۱ $y = x^2 + 1$

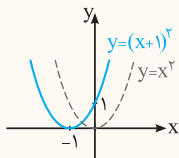
۶ $y = (x + 1)^2 - 1$

۵ $y = (x - 1)^2 + 1$

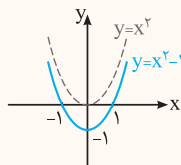
۴ $y = (x - 1)^2$



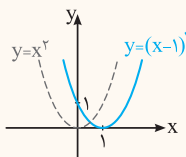
۱ پاسخ برای رسم $y = x^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به بالا انتقال می دهیم:



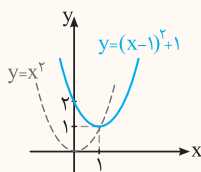
۲ برای رسم $y = (x + 1)^2$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به چپ انتقال می دهیم:



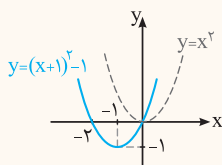
۳ برای رسم $y = x^2 - 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به پایین انتقال می دهیم:



۴ برای رسم $y = (x - 1)^2$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به راست انتقال می دهیم:



۵ برای رسم $y = (x - 1)^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می دهیم:



۶ برای رسم $y = (x + 1)^2 - 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین انتقال می دهیم:

📌 مالا می‌فوایم ببینیم آگه نمودار یه تابع رو نداشته باشیم یا حال نداشته باشیم رسمش کنیم، بطوری از روی دامنه و بردش، دامنه و برد تبدیل یافته‌اش رو پیدا کنیم.

نکته! اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[a, b]$ و $[c, d]$ باشد، آن‌گاه:

۱ دامنهٔ تابع $y = f(x+h) + k$ با حل نامعادلهٔ زیر به دست می‌آید، زیرا باید $(x+h)$ در دامنهٔ f باشد:
 $a \leq x+h \leq b \Rightarrow a-h \leq x \leq b-h$

۲ برد تابع $y = f(x+h) + k$ به صورت زیر به دست می‌آید، زیرا $f(x+h)$ در برد f قرار می‌گیرد:

$$c \leq f(x+h) \leq d \xrightarrow{+k} c+k \leq \underbrace{f(x+h)}_y + k \leq d+k \Rightarrow c+k \leq y \leq d+k$$

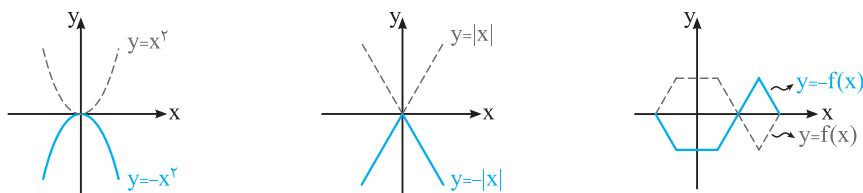
سؤال اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ برابر با $[-1, 3]$ و $(2, 5]$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x) = f(x-2) - 3$ را بیابید.

پاسخ $\Rightarrow 1 \leq x \leq 5$ $\xrightarrow{+2} -1+2 \leq x \leq 3+2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$ دامنهٔ g

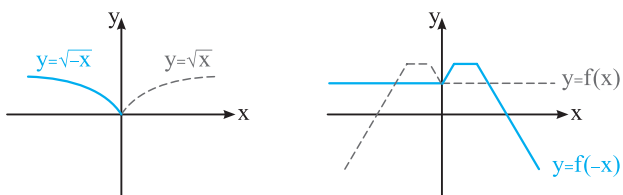
برد g : $2 < f(x-2) \leq 5 \xrightarrow{-3} -1 < \underbrace{f(x-2)}_{g(x)} - 3 \leq 2 \Rightarrow -1 < g(x) \leq 2$

ب انعکاس نمودارها

۱ برای رسم نمودار $y = -f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، کافی است y ها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



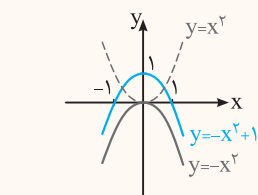
۲ برای رسم نمودار $y = f(-x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، کافی است x ها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.



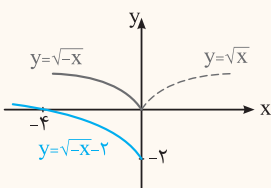
📌 یاد تون مبار وقتتی بجه بوردین نصفه یک شکل رو بچتون می‌دارن و می‌گفتن تقارن یافته‌اش رو نسبت به فط پین رسم کن و انگار که اون فط پین آینه بوده و انعکاس اون شکل رو تو آینه باید رسم می‌کردی. این‌جا هم همونه باید مثل بچگی‌ها انعکاس (تقارن) نمودار رو نسبت به محورهای مفتصات رسم کنیم.

سؤال نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

- ۱ $y = -x^2 + 1$ ۲ $y = \sqrt{-x} - 2$ ۳ $y = -\sqrt{-x+1}$ ۴ $y = -(x-1)^2 + 1$

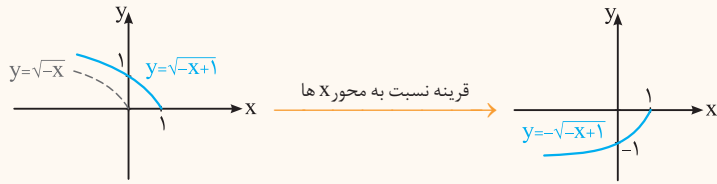


پاسخ ۱ ابتدا نمودار $y = x^2$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -x^2$ به دست آید، سپس نمودار $y = -x^2$ را ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:

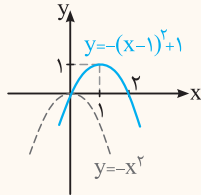


۲ ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ به دست آید. سپس نمودار $y = \sqrt{-x}$ را ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

۳ ابتدا نمودار $y = \sqrt{-x}$ را ۱ واحد به راست منتقل می‌کنیم، تا نمودار $y = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{-x+1}$ به دست آید. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



۴ نمودار $y = -x^2$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



نکته! اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[a, b]$ و $[c, d]$ باشد، آن‌گاه:

۱ دامنه تابع $y = f(-x)$ برابر با $[-b, -a]$ است:

$$a \leq -x \leq b \xrightarrow{\times(-1)} -b \leq x \leq -a$$

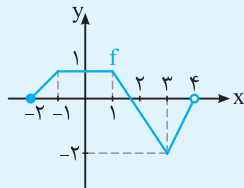
۲ برد تابع $y = -f(x)$ برابر با $[-d, -c]$ است:

$$c \leq f(x) \leq d \xrightarrow{\times(-1)} -d \leq -f(x) \leq -c$$

بازه‌های داده شده در دامنه و برد، می‌توانن باز یا نیم باز هم باشند. برای درک بهتر به مثال ببینین:

مشابه کار در کلاس صفحه ۱۰ کتاب درسی

سؤال اگر نمودار زیر مربوط به تابع f باشد، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را بیابید.



۱ $g(x) = f(-x) + 1$

۲ $k(x) = -f(x+1)$

۳ $h(x) = -f(-x+1)$

دامنه: $D_f = [-2, 4]$ ، برد: $R_f = [-2, 1]$

پاسخ

۱ $\begin{cases} D_g: -2 \leq -x < 4 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq x > -4 \Rightarrow D_g = (-4, 2] \\ R_g: -2 \leq f(-x) \leq 1 \xrightarrow{+1} -1 \leq f(-x) + 1 \leq 2 \Rightarrow R_g = [-1, 2] \end{cases}$

۲ $\begin{cases} D_k: -2 \leq x+1 < 4 \xrightarrow{+(-1)} -3 \leq x < 3 \Rightarrow D_k = [-3, 3) \\ R_k: -2 \leq f(x+1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq -f(x+1) \geq -1 \Rightarrow R_k = [-1, 2] \end{cases}$

۳ $\begin{cases} D_h: -2 \leq -x+1 < 4 \xrightarrow{+(-1)} -3 \leq -x < 3 \xrightarrow{\times(-1)} 3 \geq x > -3 \Rightarrow D_h = (-3, 3] \\ R_h: -2 \leq f(-x+1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq -f(-x+1) \geq -1 \Rightarrow 2 \geq h(x) \geq -1 \Rightarrow R_h = [-1, 2] \end{cases}$

یاد تونه تو علوم ابتدایی یاد گرفتین که هر وقت جسم رو گرم کنی منبسط می شه یعنی طولش بیش تر می شه و اگر سرد کنی منقبض می شه یعنی طولش کم تر می شه. حالا این یا هم می‌فوییم با نمودارها همین کار رو انجام بدیم یعنی در راستای محور x ها (افقی) یا در راستای محور y ها (عمودی) منبسط یا منقبض شون کنیم. حالا بگین بطوری؟ اینطوری!

پ انقباض و انبساط نمودارها

۱ انبساط و انقباض افقی

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y = f(kx)$ ، با شرط $k > 0$ طول نقاط نمودار تابع f را در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم. در این صورت:

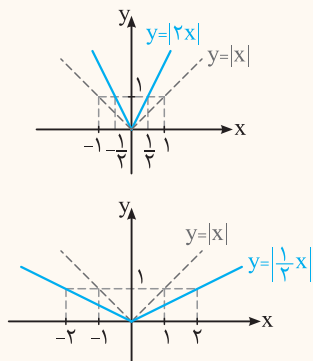
Ⓐ اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌گردد.

Ⓑ اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌گردد.

مشابه کار در کلاس صفحه ۷ کتاب درسی

سؤال به کمک نمودار $y = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱ $y = |2x|$ ۲ $y = |\frac{1}{2}x|$



پاسخ ۱ برای رسم $y = |2x|$ ، نمودار $y = |x|$ در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ منقبض می‌گردد:

۲ برای رسم $y = |\frac{1}{2}x|$ ، نمودار $y = |x|$ در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{k} = 2$ منبسط می‌گردد:

۲ انبساط و انقباض عمودی

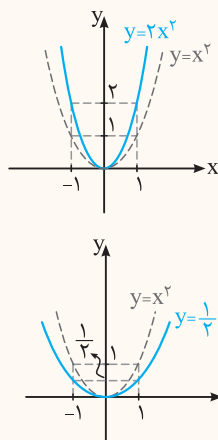
اگر نمودار تابع $y = f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y = kf(x)$ ، با شرط $k > 0$ عرض نقاط نمودار تابع f را در k ضرب می‌کنیم. در این صورت:

۱ اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k منبسط می‌گردد.

۲ اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k منقبض می‌گردد.

سؤال به کمک نمودار تابع $y = x^2$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

۱ $y = 2x^2$ ۲ $y = \frac{1}{2}x^2$



پاسخ ۱ نمودار $y = x^2$ با ضریب $k = 2$ در راستای قائم منبسط می‌گردد:

۲ نمودار $y = x^2$ با ضریب $k = \frac{1}{2}$ در راستای قائم منقبض می‌گردد:

👉 باز هم توبه فشار رو به این نکته جلب می‌کنم که:

نکته ۱ وقتی $k > 1$ ، برای رسم $(kf(x))$ ، نمودار f را با ضریب k منبسط می‌کنیم اما برای رسم $(f(kx))$ نمودار f را با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌کنیم،

یعنی برعکس هم هستند.

۲ وقتی $0 < k < 1$ ، برای رسم $(kf(x))$ ، نمودار f را با ضریب k منقبض می‌کنیم اما برای رسم $(f(kx))$ نمودار f را با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌کنیم.

👉 و باز هم برعکس هم هستند. یعنی در $y = kf(x)$ ، y ها واقعاً k برابر می‌شه اما در $y = f(kx)$ ، y ها $\frac{1}{k}$ برابر می‌شه.

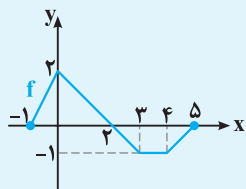
مثلاً در $y = 2f(x)$ ، y ها ۲ برابر می‌شه (انبساط عمودی با ضریب ۲) اما در $y = f(2x)$ ، y ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شه (انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$).

۲ برای رسم نمودار توابع $y = f(ax + b)$ ابتدا باید از ضریب x داخل پرانتز فاکتور بگیریم تا در ترتیب تبدیلات اشتباه نکنیم (و ابتدا با ضریب $\frac{1}{a}$ ،

انبساط یا انقباض افقی و سپس انتقال را انجام دهیم).
 $y = f(ax + b) = f(a(x + \frac{b}{a}))$

یه مثال برای نکته بالا ببینین تا بهتر درکش کنین.

سؤال اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.



مشابه مثال صفحه ۱۰ و تمرین ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی

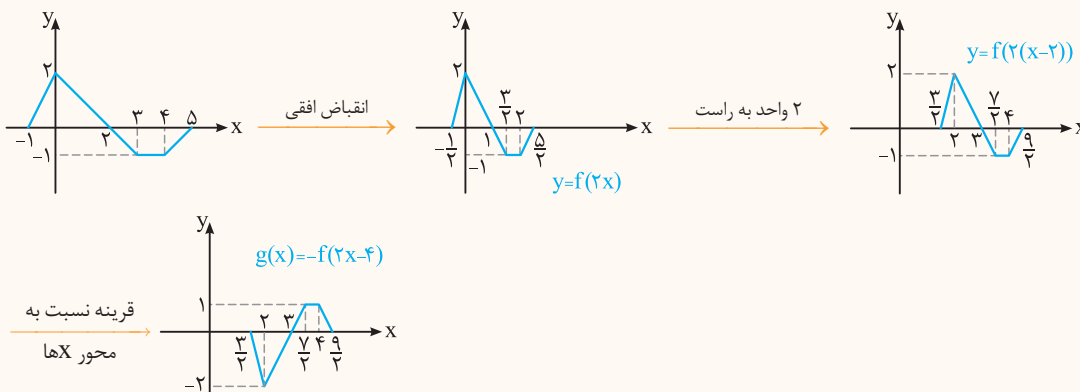
۱ $g(x) = -f(2x - 4)$

۲ $h(x) = 2f(-x + 1)$

$g(x) = -f(2(x - 2))$

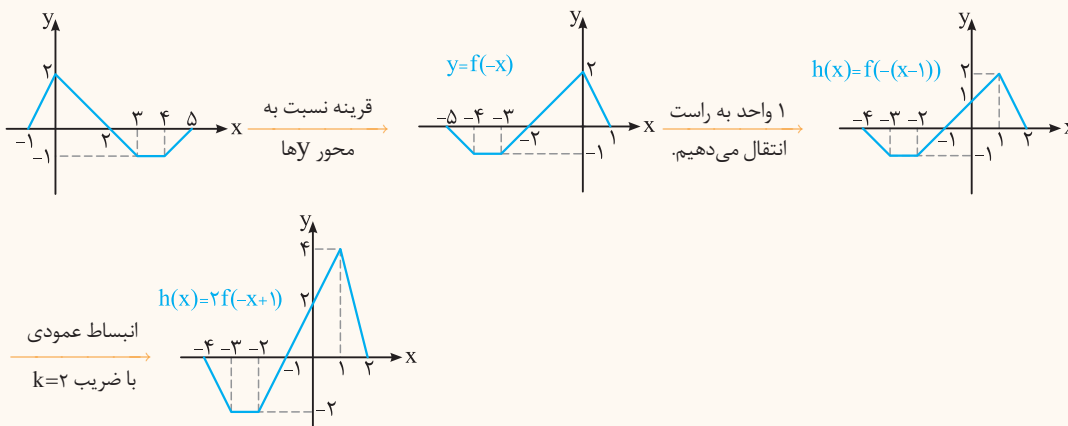
پاسخ ۱ ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم:

بنابراین نمودار تابع f را ابتدا با ضریب $\frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ منقبض و سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y = f(2(x - 2))$ به دست آید، سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار g به دست آید:



$h(x) = 2f(-(x - 1))$

۲ ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم:



نتیجه اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[m, n]$ و $[c, d]$ باشد، آن‌گاه،

$m \leq ax + b \leq n$

۱ برای محاسبه دامنه تابع $y = kf(ax + b) + h$ کافی است نامعادله مقابل را حل کنیم:

۲ برای محاسبه برد تابع $y = kf(ax + b) + h$ ، طرفین نامعادله زیر را (با توجه به علامت k) برابر کرده، سپس طرفین نامعادله حاصل را با h جمع می‌کنیم تا برد تابع y به دست آید. به طور مثال:

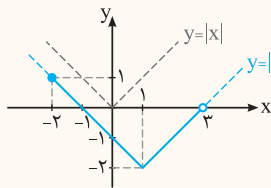
$$c \leq f(ax + b) \leq d \xrightarrow{\times k} kc \leq kf(ax + b) \leq kd \xrightarrow{+h} kc + h \leq \underbrace{kf(ax + b) + h}_y \leq kd + h$$

در واقع برای محاسبه برد باید تابع جدید رو بسازیم و بینیم بین کدوم دو عدد قرار می‌گیره!

و باز هم می‌گم که، بازه‌های داده شده برای دامنه و برد می‌تونن باز یا نیم باز هم باشن.

سؤال تابع $f(x) = |x - 1| - 2$ را در بازه $[-2, 3]$ در نظر بگیرید و دامنه و برد هر یک از توابع زیر را پیدا کنید. **مشابه تمرین صفحه ۱۲ کتاب درسی**

۱ $g(x) = -f(2x - 1) + 3$ ۲ $k(x) = 3f(2 - x) - 1$



پاسخ ۱ ابتدا با رسم نمودار f ، برد تابع f را می‌یابیم. برای رسم نمودار f نیز کافی است نمودار $y = |x|$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین انتقال دهیم:
 $\Rightarrow f_{\text{برد}} = R_f = [-2, 1]$

$R_g: -2 \leq f(2x - 1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq -f(2x - 1) \geq -1 \xrightarrow{+3} 5 \geq \underbrace{-f(2x - 1) + 3}_{g(x)} \geq 2 \Rightarrow R_g = [2, 5]$

دامنه تابع f بازه $[-2, 3]$ است، بنابراین:

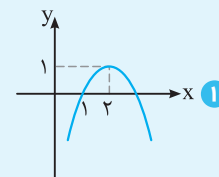
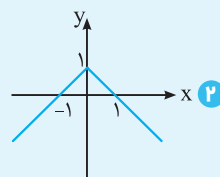
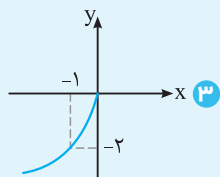
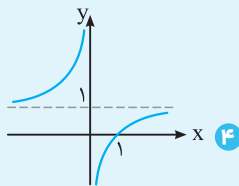
$D_g: -2 \leq (2x - 1) < 3 \xrightarrow{+1} -1 \leq 2x < 4 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} \leq x < 2 \Rightarrow D_g = [-\frac{1}{2}, 2)$

$D_k: -2 \leq 2 - x < 3 \xrightarrow{+(-2)} -4 \leq -x < 1 \xrightarrow{\times(-1)} 4 \geq x > -1 \Rightarrow D_k = (-1, 4]$

$R_k: -2 \leq f(2 - x) \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -6 \leq 3f(2 - x) \leq 3 \xrightarrow{+(-1)} -7 \leq 3f(2 - x) - 1 \leq 2 \Rightarrow R_k = [-7, 2]$

👉 حالا پند تا مثال متفاوت تر و امتحانی تر ببینین تا تجربه‌ای بشه که پرقررت تر نمودار هر تابعی که بهتون بدن رو رسم کنین.

سؤال ضابطه هر یک از توابع زیر را به کمک توابع $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^2$ ، $y = |x|$ ، $y = \frac{1}{x}$ بنویسید. **مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۲ کتاب درسی**



پاسخ ۱ با مقایسه نمودار داده شده و نمودار $y = x^2$ ، درمی‌یابیم که نمودار $y = x^2$ نسبت به محور x ها قرینه و سپس ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

$y = x^2 \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -x^2 \xrightarrow[\text{۱ واحد به بالا}]{\text{۲ واحد به راست}} y = -(x - 2)^2 + 1$

۲ با مقایسه نمودار داده شده و نمودار $y = |x|$ ، درمی‌یابیم که نمودار $y = |x|$ نسبت به محور x ها قرینه و سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

$y = |x| \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -|x| \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.}]{\text{۱ واحد به بالا}} y = -|x| + 1$

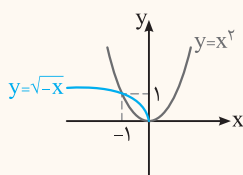
۳ نمودار $y = \sqrt{x}$ هم نسبت به محور x ها و هم محور y ها قرینه و سپس با ضرب ۲ در راستای قائم منبسط شده است:

$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{انبساط عمودی}} y = -2\sqrt{-x}$

۴ نمودار $y = \frac{1}{x}$ نسبت به محور y ها (یا محور x ها) قرینه شده و سپس ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.}]{\text{۱ واحد به بالا}} y = -\frac{1}{x} + 1$

سؤال به کمک رسم نمودار، معادله $x^2 - \sqrt{-x} = 0$ را حل کنید. **مشابه خرداد ۹۱**

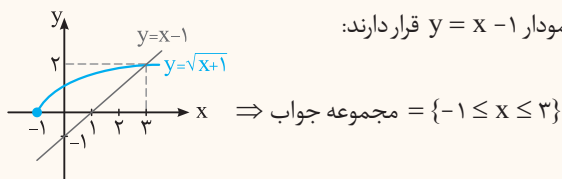


پاسخ برای حل معادله، نمودار توابع $y = \sqrt{-x}$ و $y = x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقاط تقاطع، جواب‌های معادله‌اند:

$x^2 - \sqrt{-x} = 0 \Rightarrow x^2 = \sqrt{-x}$
 \Rightarrow جواب‌های معادله $= \{0, -1\}$

مشابه شهریور ۹۴ و خرداد و دی ۹۶

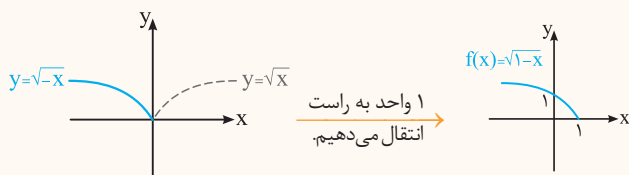
سؤال به روش هندسی، نامعادله $\sqrt{x+1} \geq x-1$ را حل کنید.



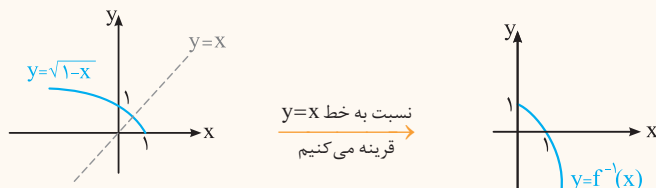
مشابه شهریور ۹۵ و ۹۲

سؤال با رسم نمودار $f(x) = \sqrt{1-x}$ وارون پذیری تابع f را بررسی کنید. در صورت وارون پذیری، نمودار تابع وارون آن را رسم کنید.

پاسخ نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ به دست آید. سپس نمودار حاصل را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $f(x) = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{1-x}$ به دست آید.



با توجه به نمودار بالا، تابع f یک به یک و وارون پذیر است و برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.



تبدیل نمودار توابع

پرسش‌های تشریحی

بسته
۱

☆ درست‌ی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

۱. برای رسم نمودار تابع $g(x) = -f(x)$ از روی نمودار تابع f ، کافی است نمودار f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرد. (خرداد ۹۷)
۲. نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = f(-x)$ ، نسبت به محور y ها قرینه‌اند. (مشابه دی ۹۹ خارج از کشور)
۳. برای رسم تابع $g(x) = |x+1| - 2$ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، نمودار f یک واحد روی محور طول‌ها به راست و ۲ واحد به پایین حرکت می‌کند. (دی ۹۶ و مشابه دی ۱۴۰۱)
۴. نقطه $(-1, 4)$ روی نمودار $y = f(x)$ با نقطه $(-1, 2)$ روی نمودار $y = 2f(x)$ متناظر است. (مشابه دی ۱۴۰۱)
۵. اگر دامنه تابع f برابر $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -3f(2x)$ بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ است. (دی ۹۵)
۶. اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. (خرداد ۹۸)

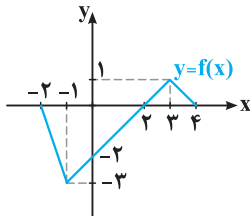
☆ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۷. اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ باشد، برد این تابع مجموعه است. (شهریور ۹۵ و مشابه شهریور ۱۴۰۲)
(۱) $[1, \sqrt{2}]$ (۲) $[0, +\infty)$
۸. در رسم نمودار $y = f(ax)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در امتداد x ها می‌شود. (شهریور ۹۵)
(۱) منبسط (۲) منقبض
۹. تابع $y = f(x)$ را با دامنه $[-2, 1]$ در نظر بگیرید. دامنه تابع $g(x) = -f(2x) + 1$ بازه است. (خرداد ۹۴ و مشابه مرداد ۱۴۰۳)
(۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-1, \frac{1}{2}]$
۱۰. در رسم نمودار $y = af(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار f در امتداد محور می‌گردد. (۱) y ها، منبسط (۲) x ها، منبسط (۳) y ها، منقبض (۴) x ها، منقبض

۱۱. اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از $y = f(x)$ نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. (شهریور ۱۴۰۰ و شهریور ۹۸ خارج از کشور)
۱۲. اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x+1)$ برابر است. (شهریور ۹۹)
۱۳. نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور است. (شهریور ۹۸ و شهریور ۹۸ خارج از کشور)
۱۴. اگر بازه $[-4, 2]$ دامنه تابع $f(2x+1)$ باشد، دامنه تابع $f(x)$ برابر است. (دی ۹۸ خارج از کشور و مشابه دی ۹۹ خارج از کشور)
- ۱۵ ☆ نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید، سپس به کمک نمودار f ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و با نمودار f مقایسه کنید. (برگرفته از تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

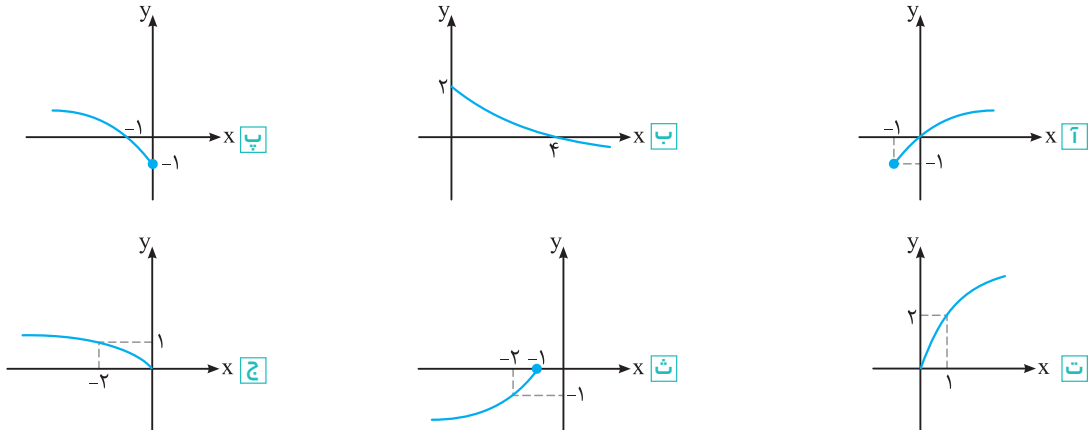
<input type="checkbox"/> آ	$y = f(-x)$	<input type="checkbox"/> ب	$y = -f(x)$	<input type="checkbox"/> پ	$y = -f(-x)$	<input type="checkbox"/> ت	$y = 2f(x)$
<input type="checkbox"/> ث	$y = \frac{1}{2}f(x)$	<input type="checkbox"/> ج	$y = f(2x)$	<input type="checkbox"/> د	$y = -2f(\frac{x}{2})$	<input type="checkbox"/> ز	$y = \frac{1}{2}f(-2x)$

- ۱۶ ☆ نمودار تابع f داده شده است، به کمک آن نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. (برگرفته از تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)



<input type="checkbox"/> آ	$y = f(-x)$	<input type="checkbox"/> ب	$y = -2f(x)$
<input type="checkbox"/> پ	$y = -f(x-1) + 1$	<input type="checkbox"/> ت	$y = f(2x-4)$
<input type="checkbox"/> ث	$y = f(2-x)$	<input type="checkbox"/> د	$y = 1 - \frac{1}{2}f(x)$

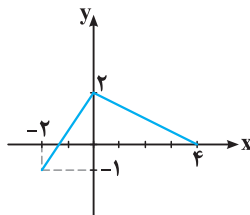
- ۱۷ ☆ نمودار هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ است. ضابطه هر یک را بنویسید. (برگرفته از تمرین ۱ صفحه ۱۱ کتاب درسی)



- ۱۸ ☆ نقطه $(-2, 1)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. در تابع $g(x) = -f(2x)$ این نقطه به چه نقطه‌ای متناظر می‌گردد؟

(شهریور ۹۶ و مشابه خرداد ۹۹ خارج از کشور)

۱۹. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار $g(x) = -f(2x)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. (دی ۹۷ و مشابه خرداد ۱۴۰۳)

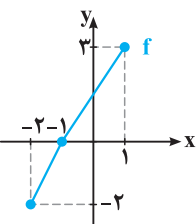


(خرداد ۹۶)

۲۰. نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل داده شده است:

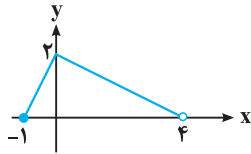
آ دامنه تابع $g(x) = f(\frac{x}{2})$ را تعیین کنید.

ب نمودار $h(x) = f(-x) + 1$ را رسم کنید.

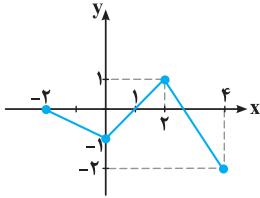




۲۱ ✨ نمودار تابع $y = -2f(-\frac{x}{3}) + 1$ به صورت مقابل است. با رسم نمودار $y = f(x)$ دامنه و برد آن را بیابید.

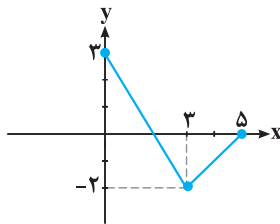


۲۲ ☆ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. با استفاده از تبدیل نمودار، نمودار تابع $y = -3f(\frac{1}{3}x) + 2$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید. (دی ۱۴۰۲)



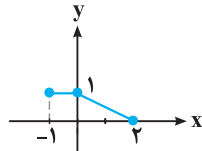
۲۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(3-x)$ را رسم کرده و دامنه آن را تعیین کنید.

(شهریور ۹۸ و دی ۹۹ خارج از کشور و مشابه دی ۹۸ خارج از کشور و شهریور ۱۴۰۲)

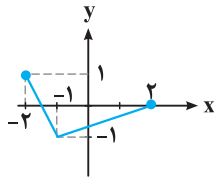


۲۴ ☆ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1) + 2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

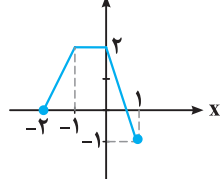
(دی ۱۴۰۰ و مشابه شهریور ۹۸ خارج از کشور و خرداد ۹۹ خارج از کشور)



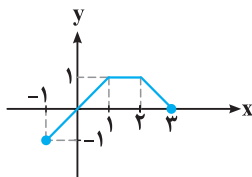
۲۵ ☆ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۰)



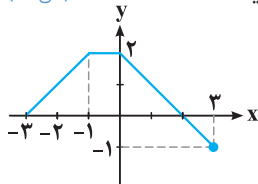
۲۶ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. (خرداد ۹۸)



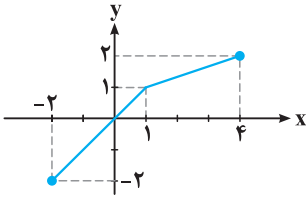
۲۷ ☆ نمودار تابع f به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x-1)$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را تعیین کنید. (دی ۹۹ و مشابه مرداد ۱۴۰۳)



۲۸ نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. (دی ۹۸)



۲۹. با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.
(خرداد ۹۹ و خرداد ۹۸ خارج از کشور)



۳۰. ☆ ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 1|$ را با دامنه $[0, 2]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + 1$ را رسم کرده و برد آن را بیابید. (شهریور ۹۳)

۳۱. ☆ ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 3|$ را در بازه $[2, 4]$ رسم کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم کنید. (دی ۹۱)

۳۲. ☆ ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کرده و سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید. (خرداد ۹۳ و مشابه شهریور ۱۱۴)

(برگرفته از کاردرکلاس صفحه‌های ۴ و ۵ کتاب درسی)

● نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

۳۳. ☆ $y = 2x^2 + 1$ ۳۴. ☆ $y = \frac{-1}{2}x^2 - 1$ ۳۵. ☆ $y = 2 - \sqrt{x - 2}$ ۳۶. $y = -2\sqrt{x + 1}$

۳۷. $y = -\sqrt{\frac{x}{2}}$ ۳۸. ☆ $y = 2\sqrt{-2x}$ ۳۹. ☆ $y = 1 + \sqrt{-x + 1}$ ۴۰. ☆ $y = 1 - 2\cos x$

۴۱. $y = 1 - \cos(2x)$ ۴۲. ☆ $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4})$ ۴۳. ☆ $y = -2^{x-2} + 1$ ۴۴. ☆ $y = -\log(x + 1)$

۴۵. ☆ به کمک رسم نمودار، تعداد ریشه‌های معادله $\sqrt{5 - x} = |x - 3|$ را بیابید. (خرداد ۹۷)

۴۶. ☆ با رسم نمودار، معادله $\sqrt{x + 1} = x - 1$ را حل کنید. (شهریور ۹۶ و شهریور ۹۲)

۴۷. معادله $|x| = \sqrt{2 + x}$ را به روش هندسی و جبری حل کنید. (دی ۹۴)

۴۸. معادله $\sqrt{x + 1} = x^2 + 2x + 1$ را به روش هندسی حل کنید.

۴۹. ☆ معادله $\sqrt{1 - x} - 1 = x^2 - 2x$ را با روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۱)

۵۰. نامعادله $x^2 \leq |x|$ را به روش هندسی حل کنید.

۵۱. ☆ نامعادله $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$ را با روش هندسی حل کنید. (شهریور ۹۰)

۵۲. نامعادله $|x| < x + 1$ را به روش هندسی حل کنید.

۵۳. ☆ با رسم نمودار، نامعادله $|x + 1| < x^2 - 1$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نمایش دهید. (دی ۹۶ و مشابه خرداد ۹۶)

۵۴. ☆ نامعادله $|x - 1| \leq 2^x$ را به روش هندسی (رسم نمودار) حل کنید.

۵۵. ☆ نامعادله $\log_{5/8} x \leq |x - 1|$ را به روش هندسی حل کنید.

۵۶. نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{x - 1}$ وارون پذیر است، سپس نمودار و ضابطه وارون آن را بنویسید. (مشابه خرداد ۹۷)

۵۷. ☆ با رسم نمودار، وارون پذیری $y = \sqrt{x + 2} - 3$ را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را بیابید. (شهریور ۹۵)

۵۸. ☆ با رسم نمودار، وارون پذیری تابع $y = \sqrt{x + 3} + 5$ را بررسی کنید و نمودار و ضابطه وارون آن را به دست آورید. (مشابه شهریور ۹۲)

۵۹. ☆ وارون پذیری تابع $f(x) = x^2 - 4$ را روی دامنه $\{x > 0\}$ بررسی کنید و ضابطه و نمودار تابع وارون را به دست آورید. (دی ۹۶)

۶۰. ثابت کنید تابع $f(x) = (x - 2)^2$ روی $x \geq 2$ وارون پذیر است. سپس ضابطه وارون آن را بیابید. (خرداد ۹۱)

۶۱. ☆ وارون پذیری تابع $g(x) = \frac{2}{x + 3}$ را با رسم شکل بررسی کنید. (شهریور ۹۶)

۶۲. ☆ به کمک رسم نمودار وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید. (خرداد ۹۴)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۶۳. نمودار تابع f را رسم کرده و به کمک آن وارون پذیری تابع را بررسی کنید. در صورت وارون پذیری، نمودار و ضابطه وارون f را تعیین کنید. (خرداد ۸۹)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^3 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۴
بخش



پاسخنامه

۱۴ | روش اول | در بازه $x \in [-4, 2]$ است، باید ببینیم $(2x+1)$ در چه بازه‌ای قرار دارد.

$$-4 \leq x \leq 2 \xrightarrow{\times 2} -8 \leq 2x \leq 4 \xrightarrow{+1} -7 \leq 2x+1 \leq 5$$

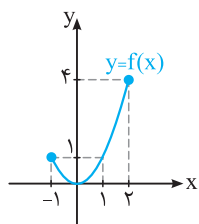
$$\Rightarrow D_f = [-7, 5]$$

روش دوم | از تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

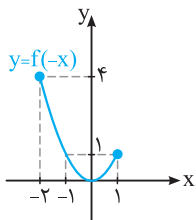
$$2x+1 = t \Rightarrow 2x = t-1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}$$

$$\begin{cases} y = f(2x+1) \Rightarrow y = f(t) \\ -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 \leq \frac{t-1}{2} \leq 2 \Rightarrow -8+1 \leq t \leq 4+1 \Rightarrow -7 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

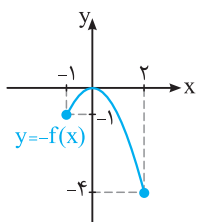
$$\Rightarrow D_f = [-7, 5]$$



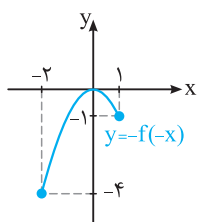
۱۵ | ابتدا نمودار $y = x^2$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم می‌کنیم:



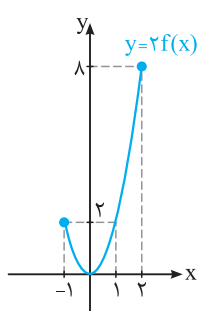
آ | برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



ب | برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



پ | برای رسم نمودار $y = -f(-x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها و y ها قرینه می‌کنیم:



ت | برای رسم نمودار $y = 2f(x)$ ، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:

۱ | درست است. برای رسم $g(x) = -f(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار f را قرینه کنیم. بنابراین نمودار f را نسبت به محور x ها (طولها) قرینه می‌کنیم.

۲ | درست است. چون x ها قرینه می‌شوند.

۳ | نادرست است. برای رسم نمودار g ، نمودار f را ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

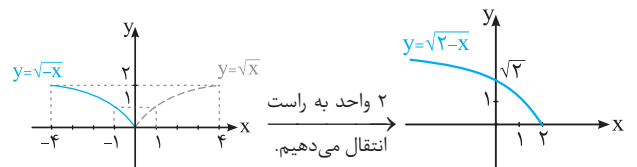
۴ | نادرست است. زیرا باید عرضها دو برابر شود و در نتیجه نقطه $(-1, 4)$ با نقطه $(-1, 8)$ متناظر است.

۵ | درست است. زیرا ورودی f یعنی $2x$ باید در بازه $[-1, 3]$ باشند، حالا ببینیم با این شرایط x ها در کدام بازه قرار می‌گیرند:

$$-1 \leq 2x \leq 3 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow D_g = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$$

۶ | نادرست است، اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض نمودار f با ضریب $\frac{1}{k}$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

۷ | با رسم نمودار تابع f داریم:



بنابراین برد تابع برابر با $[0, +\infty)$ است.

۸ | اگر $0 < a < 1$ ، برای رسم $y = f(ax)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را با ضریب $\frac{1}{a} > 1$ در راستای محور x ها منبسط کنیم.

۹ | باید $(2x)$ در دامنه تابع f قرار گیرد:

$$g(x) = -f(2x) + 1 \quad D_g: -2 \leq 2x \leq 1 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = [-1, \frac{1}{2}]$$

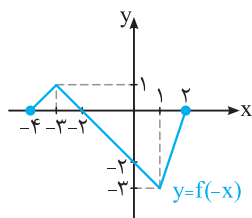
۱۰ | برای رسم $y = af(x)$ وقتی $0 < a < 1$ ، نمودار f را در راستای محور y ها منقبض می‌کنیم.

۱۱ | وقتی $k > 1$ ، نمودار $f(kx)$ از انقباض نمودار f با ضریب $\frac{1}{k}$ در راستای افقی به دست می‌آید.

۱۲ | دامنه برابر با $[0, 1]$ است، زیرا:

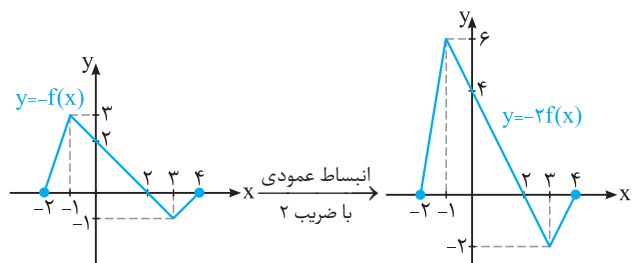
$$-2 \leq 3x+1 \leq 1 \xrightarrow{+(-1)} -3 \leq 3x \leq 0 \xrightarrow{\div 3} -1 \leq x \leq 0$$

۱۳ | y ها قرینه شده، پس نمودار $y = -f(x)$ قرینه نمودار f نسبت به محور x ها است.

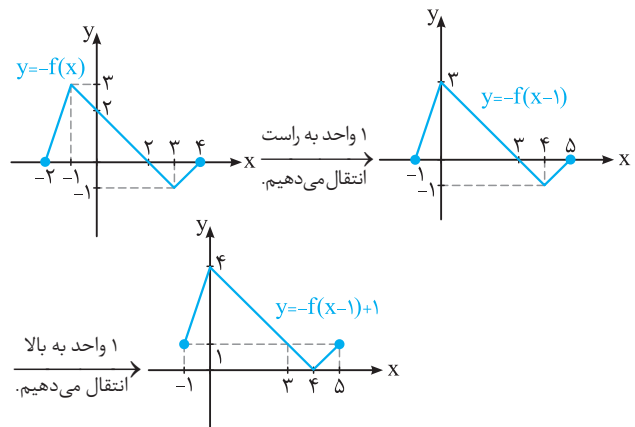


۱۶ | آ) برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، چون x ها قرینه شده، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:

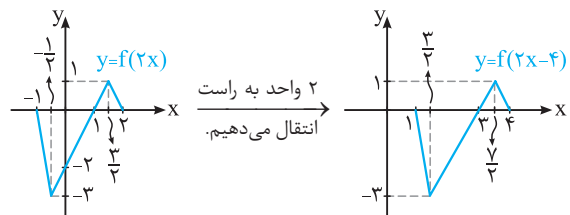
ب) برای رسم نمودار $y = -2f(x)$ ، ابتدا نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، سپس با ضریب ۲ در راستای محور y ها منبسط می‌کنیم:



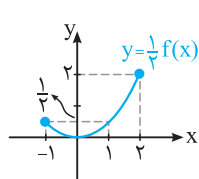
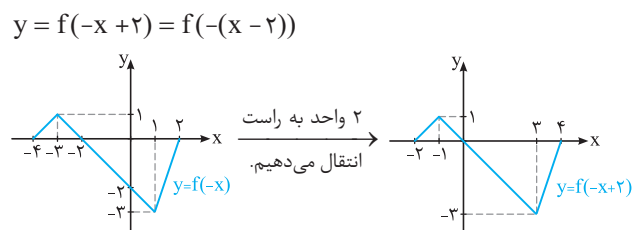
پ) نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کرده تا نمودار $y = -f(x)$ به دست آید و سپس ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = -f(x-1)$ به دست آید و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



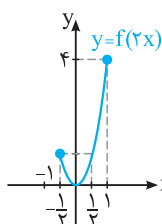
ت) $y = f(2x-4) = f(2(x-2))$ نمودار f را در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض می‌کنیم تا نمودار $y = f(2x)$ به دست آید، سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم:



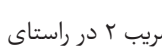
ث) نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(-x)$ به دست آید، سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم:



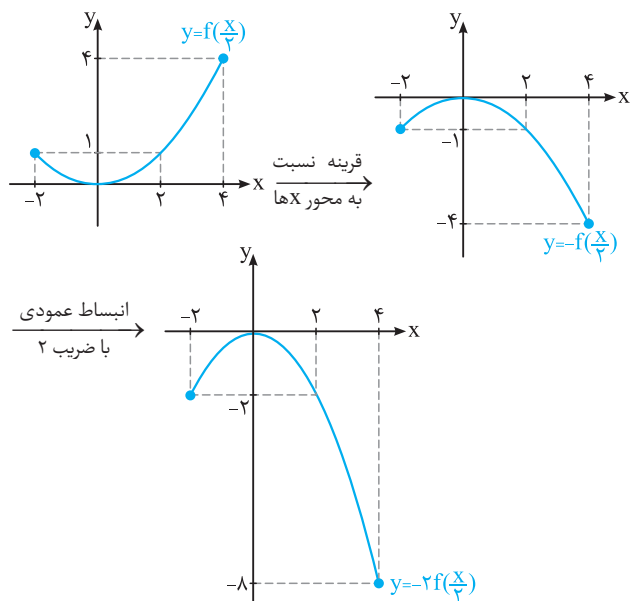
ث) برای رسم نمودار $y = \frac{1}{3}f(x)$ ، نمودار f را با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای قائم منقبض می‌کنیم:



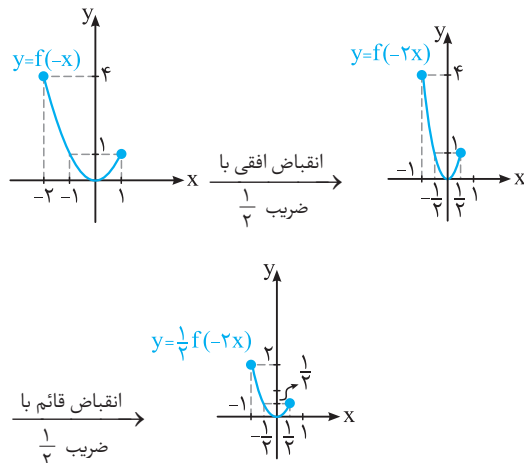
ج) برای رسم نمودار $y = f(2x)$ ، نمودار f را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم:

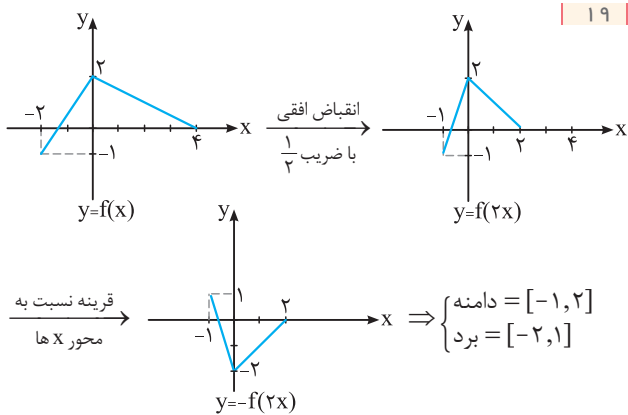


ج) برای رسم نمودار $y = -2f(\frac{x}{2})$ ، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط می‌کنیم، سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه و در نهایت با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:



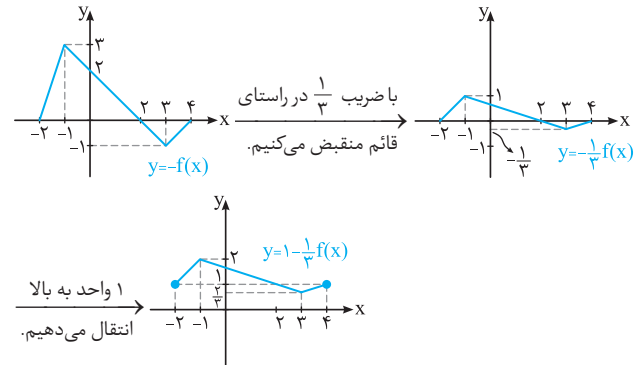
ح) برای رسم نمودار $y = \frac{1}{3}f(-2x)$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم و با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم و در نهایت با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای قائم منقبض می‌کنیم:





۱۹ |

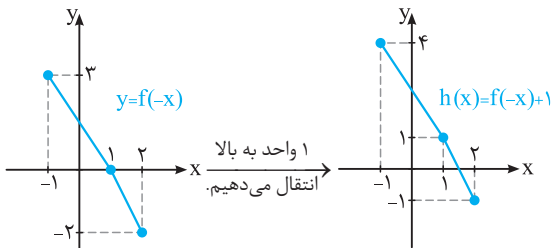
ج) نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -f(x)$ به دست آید، سپس با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای قائم (عمودی) منقبض می‌کنیم تا نمودار $y = -\frac{1}{3}f(x)$ به دست آید و در نهایت ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



۲۰ | آ) همان‌طور که از روی نمودار مشخص است، $D_f = [-2, 1]$. پس باید ورودی f در این بازه قرار گیرد:

$$-2 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \xrightarrow{\times 2} -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [-4, -2]$$

ب) برای رسم $h(x) = f(-x) + 1$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم، سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



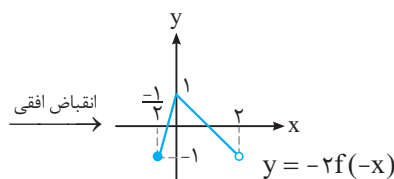
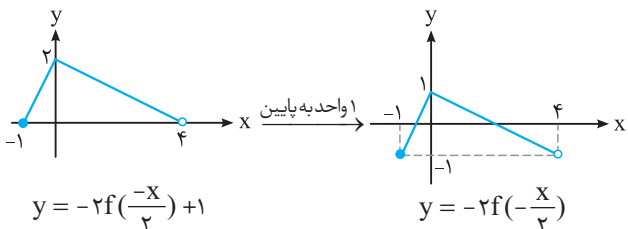
۲۱ | برای رسیدن به f از روی $y = -2f(-\frac{x}{2}) + 1$ برعکس حرکت می‌کنیم. یعنی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

$$y = -2f(-\frac{x}{2}) + 1 \xrightarrow{1 \text{ واحد به پایین}} y = -2f(-\frac{x}{2})$$

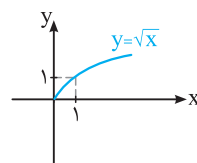
$$\xrightarrow[\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{1}{2}]{\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{1}{2}} y = -2f(-x)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ها}} y = f(-x)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ها}} y = f(x)$$



۱۷ | نمودار $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار $y = \sqrt{x}$ ، داریم:

آ) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، یک واحد به چپ و یک واحد به پایین انتقال یافته است:

$$y = \sqrt{x+1} - 1$$

ب) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نسبت به محور x ها قرینه شده و سپس دو واحد به بالا انتقال یافته است:

$$y = -\sqrt{x} + 2$$

پ) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نسبت به محور y ها قرینه شده و سپس یک واحد به پایین انتقال یافته است:

$$y = \sqrt{-x} - 1$$

ت) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، در راستای قائم با ضریب ۲ منبسط شده است:

$$y = 2\sqrt{x}$$

ث) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نسبت به محور x ها و y ها قرینه شده و سپس یک واحد به چپ انتقال یافته است:

$$y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم}]{1 \text{ واحد به چپ}} y = -\sqrt{-(x+1)} \Rightarrow y = -\sqrt{-x-1}$$

ج) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نسبت به محور y ها قرینه شده و با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط شده است:

$$y = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{ضریب } 2]{\text{انقباض افقی با}} y = \sqrt{-\frac{1}{2}x}$$

۱۸ | اگر نمودار f را با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای افقی منقبض کنیم و در نهایت نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودار g به دست می‌آید:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{ضریب } \frac{1}{3}]{\text{انقباض افقی با}} h(x) = f(3x)$$

$$\xrightarrow[\text{به محور } x \text{ها}]{\text{قرینه نسبت}} g(x) = -f(3x)$$

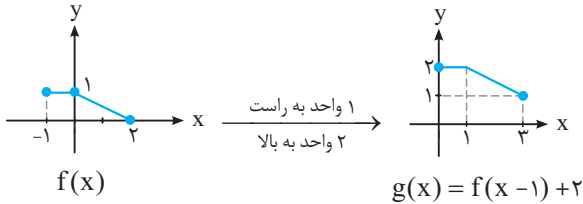
حالا همین کار را با نقطه $(-3, 1)$ می‌کنیم:

$$f(-3) = 1 \xrightarrow[\text{به محور } x \text{ها}]{\text{قرینه نسبت}} h(-\frac{3}{3}) = 1 \xrightarrow{\text{انقباض افقی}} g(-\frac{3}{3}) = -1$$

بنابراین این نقطه به نقطه $(-\frac{3}{3}, -1)$ تبدیل می‌گردد.

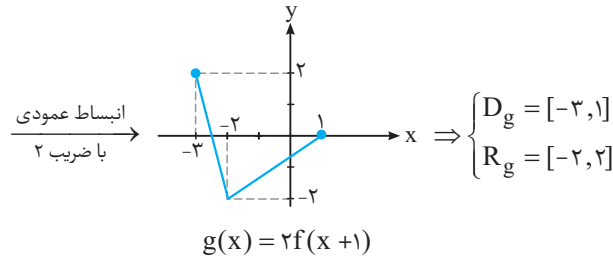
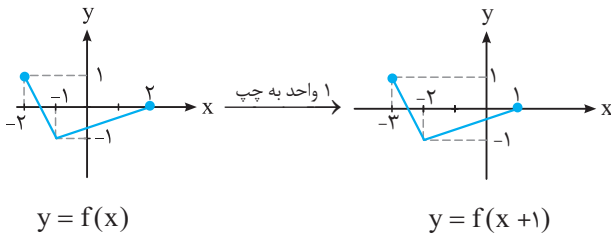
۲۴ | $y = f(x) \xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{\text{واحد به راست}} g(x) = f(x-1) + 2$

همین تبدیل‌ها را روی نمودار f اعمال می‌کنیم:

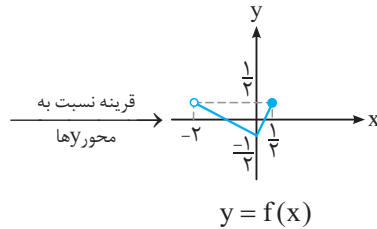
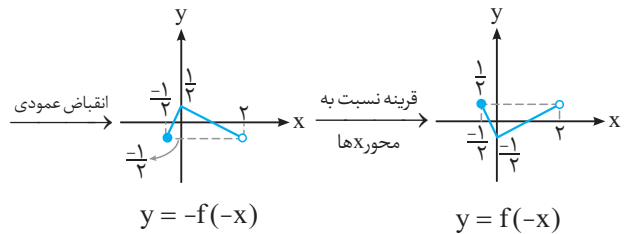
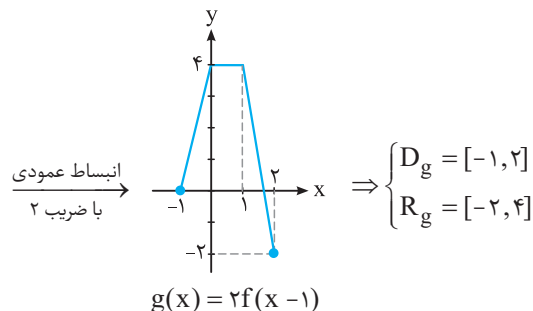
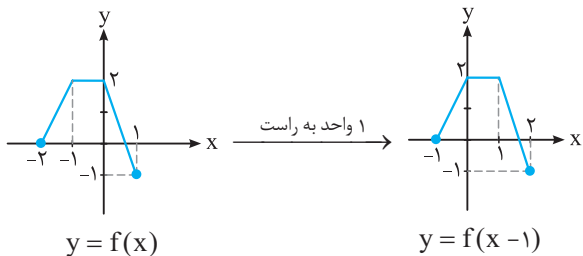


$\Rightarrow D_g = [0, 3]$

۲۵ | برای رسم $g(x) = 2f(x+1)$ ابتدا نمودار f را ۱ واحد به چپ می‌بریم تا $f(x+1)$ به دست آید، سپس y ها را دو برابر می‌کنیم یعنی در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم:



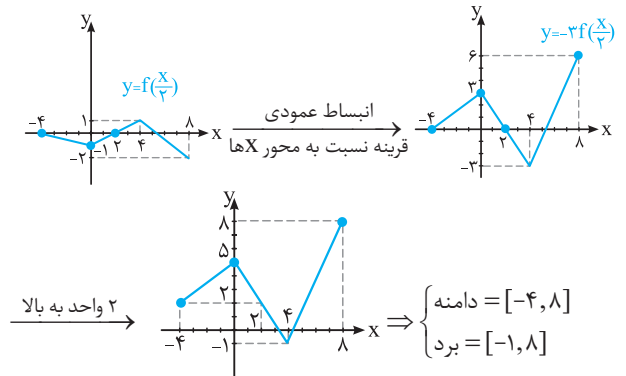
۲۶ | برای رسم $g(x) = 2f(x-1)$ ابتدا نمودار f را ۱ واحد به راست می‌بریم سپس y ها را دو برابر می‌کنیم یعنی در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم.



با توجه به نمودار به دست آمده برای f داریم:

دامنه: $D_f = (-2, \frac{1}{3}]$, برد: $R_f = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

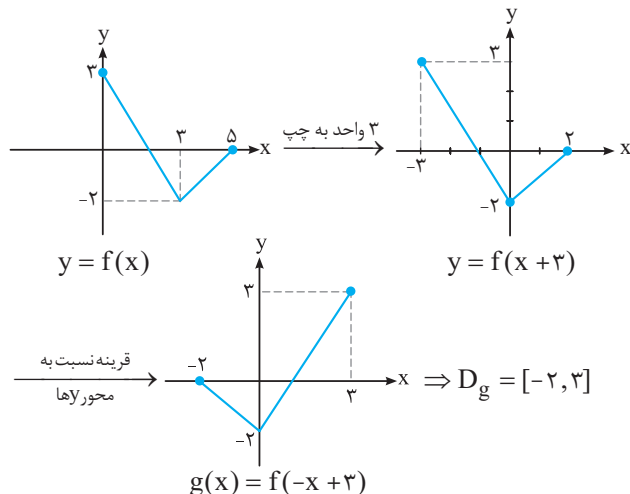
۲۲ | برای رسم $y = -3f(\frac{1}{3}x) + 2$ ، نمودار f را در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم (x ها دو برابر شده)، سپس در راستای قائم با ضریب ۳ منبسط می‌کنیم و نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و در نهایت ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

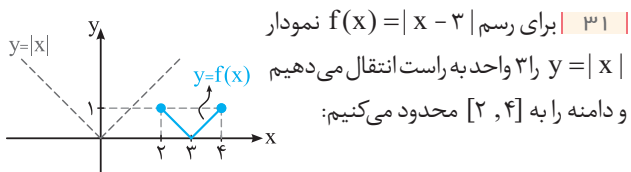
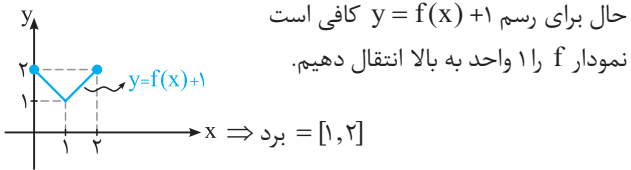
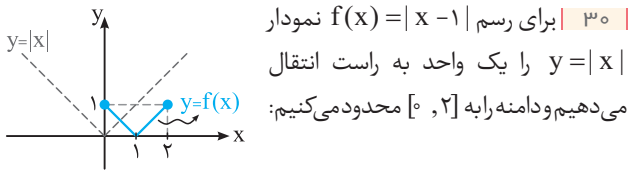


۲۳ | ابتدا ببینیم چه بلایی سر نمودار f آمده است:

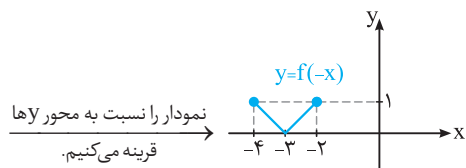
$y = f(x) \xrightarrow[\text{محور Y ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = f(-x+3) \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{\text{۳ واحد به چپ}} y = f(x+3)$

حالا همین تبدیل‌ها را روی نمودار f اعمال می‌کنیم.

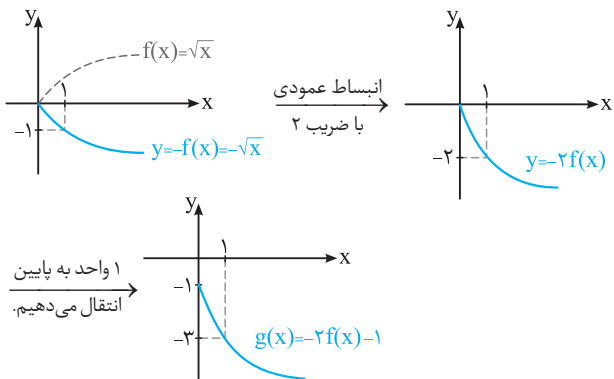




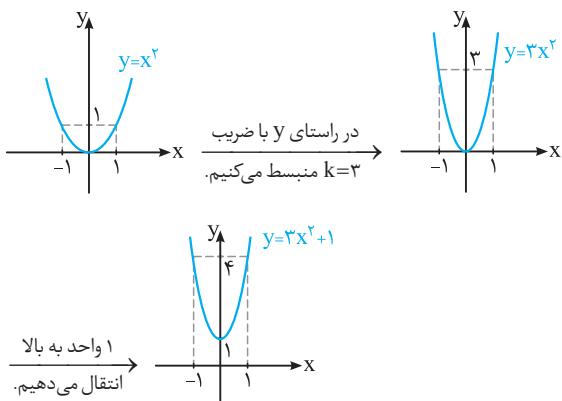
و در نهایت برای رسم $y = f(-x)$ نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



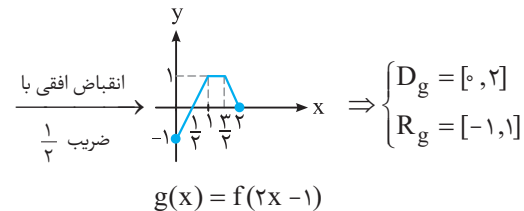
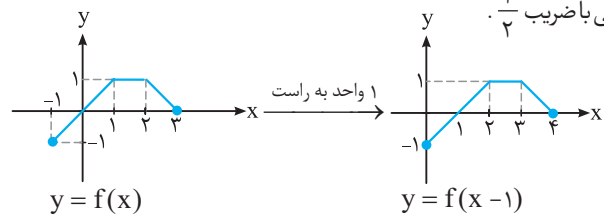
۳۲ | کافی است نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم تا نمودار $y = -\sqrt{x}$ به دست آید. سپس با ضرب 2 در راستای عمودی منبسط می‌کنیم و در نهایت 1 واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



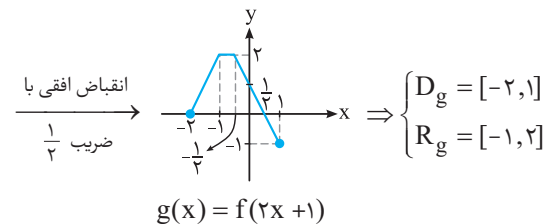
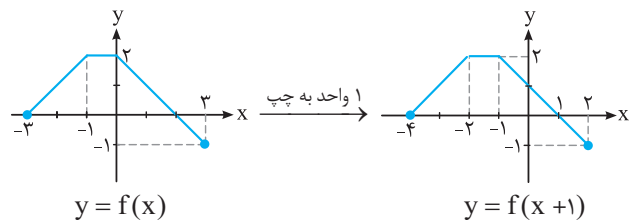
۳۳ | با استفاده از نمودار $y = x^2$ ابتدا y ها را 3 برابر می‌کنیم (انبساط عمودی) و در نهایت 1 واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



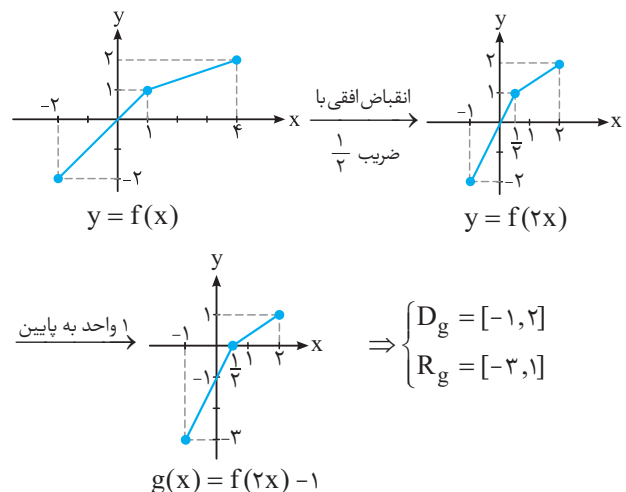
۲۷ | برای رسم $g(x) = f(2x - 1)$ ابتدا نمودار f را یک واحد به راست می‌بریم تا $f(x - 1)$ به دست آید سپس x ها را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم. یعنی انقباض افقی با ضرب $\frac{1}{2}$.



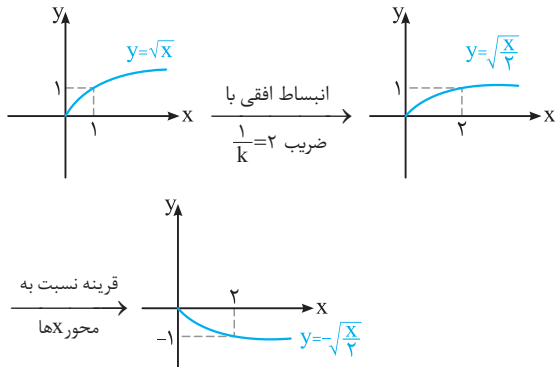
۲۸ | ابتدا نمودار f را یک واحد به چپ می‌بریم تا $f(x + 1)$ به دست آید سپس x ها را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم تا $f(2x + 1)$ به دست آید یعنی انقباض افقی با ضرب $\frac{1}{2}$.



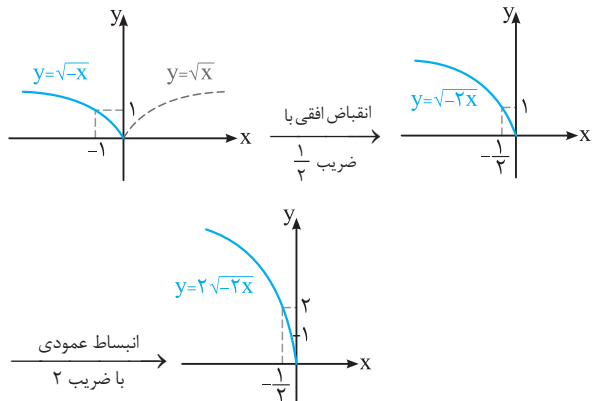
۲۹ | برای رسم $g(x) = f(2x) - 1$ ابتدا x ها را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم (انقباض افقی) و سپس نمودار را 1 واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



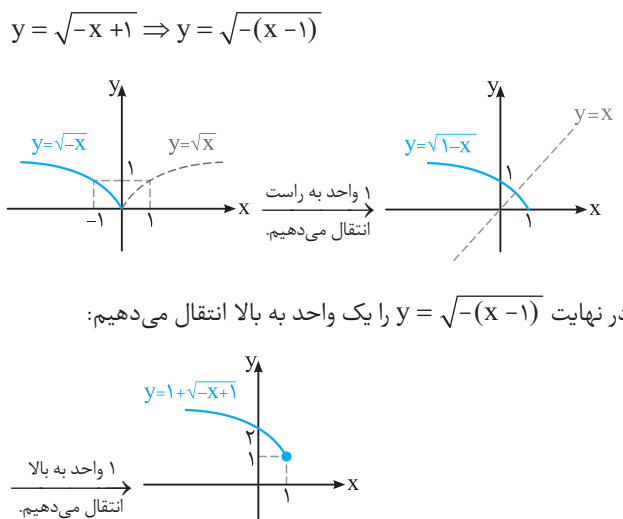
۳۷ | ابتدا در نمودار $y = \sqrt{x}$ ، x ها را ۲ برابر می‌کنیم (انبساط افقی) تا $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ به دست آید، سپس y ها را قرینه می‌کنیم یعنی تقارن نسبت به محور x ها:



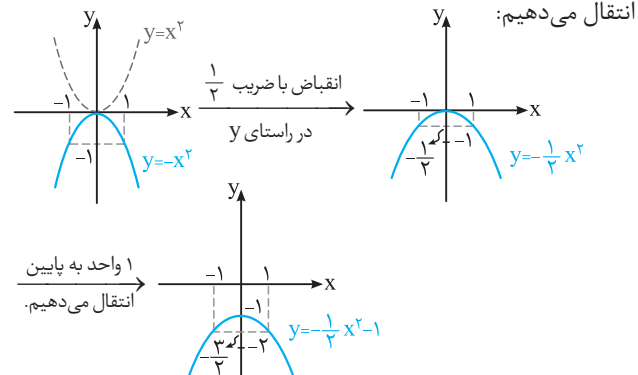
۳۸ | اول در نمودار $y = \sqrt{x}$ ، x ها را قرینه می‌کنیم (تقارن نسبت به محور y ها) بعد x ها را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم تا $y = \sqrt{-2x}$ به دست آید و در نهایت y ها را ۲ برابر می‌کنیم یعنی انبساط عمودی:



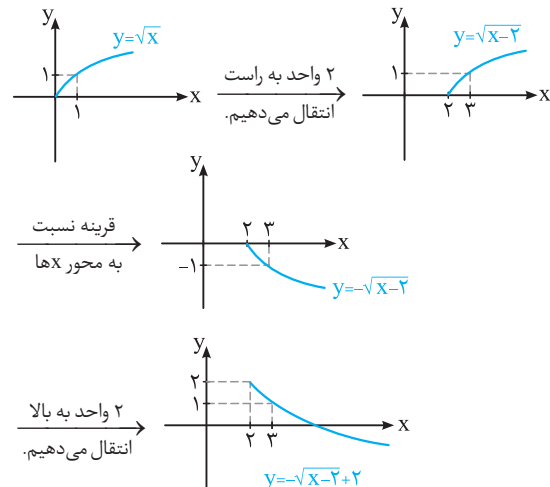
۳۹ | کافی است نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم تا x ها منفی شوند یعنی $y = \sqrt{-x}$ و سپس ۱ واحد به راست انتقال دهیم:



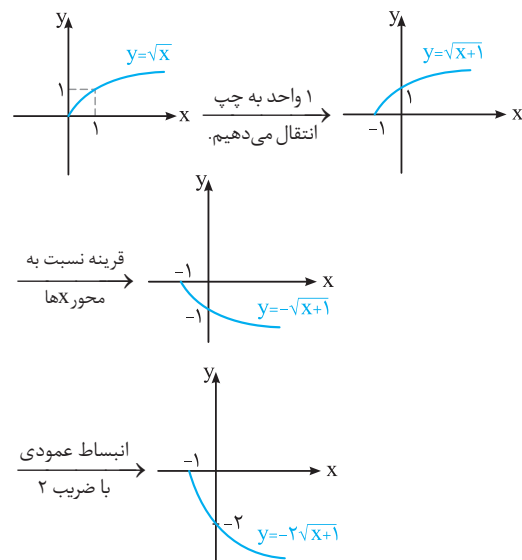
۳۴ | با استفاده از نمودار $y = x^2$ ، ابتدا y ها را منفی می‌کنیم، سپس y ها را $\frac{1}{2}$ برابر می‌کنیم (انقباض عمودی) و در نهایت ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



۳۵ | ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا $y = \sqrt{x-2}$ به دست آید سپس y ها را قرینه می‌کنیم ($y = -\sqrt{x-2}$) و در نهایت ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



۳۶ | ابتدا $y = \sqrt{x}$ را ۱ واحد به چپ می‌بریم تا $y = \sqrt{x+1}$ به دست آید. سپس y ها را قرینه و در نهایت y ها را ۲ برابر می‌کنیم:



فرمول بسیار

در این کتابچه،
«تمرین‌های» کتاب درسی
را به طور کامل پاسخ
داده‌ایم.
از آن جایی که تقریباً
بیش از نیمی از سؤالات
امتحانات نهایی مشابه
تمرینات کتاب درسی
طراحی می‌شوند مرور
مطالب این کتابچه در
شب امتحان به شما کمک
می‌کند تا با آمادگی کامل
سر جلسه امتحان
حاضر شوید.

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com

فهرست

فصل اول ۳ تابع

فصل دوم ۱۹ مثلثات

فصل سوم ۲۷ حدهای نامتناهی -
حد در بی نهایت

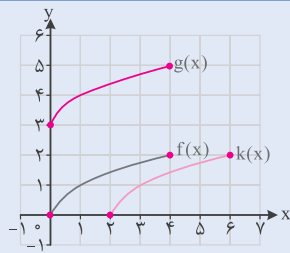
فصل چهارم ۳۹ مشتق

فصل پنجم ۶۲ کاربردهای مشتق

فصل تابع

درس ۱ | تبدیل نمودار توابع

کاردرکلاس | ص ۴ و ۵ کتاب درسی



الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه $[0, 4]$

رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

با توجه به نمودار $R_f = [0, 2]$.

ب) نمودار توابع $g(x) = f(x) + 3$ و $k(x) = f(x) - 2$

را به کمک انتقال رسم کنید.

برای رسم نمودار تابع $k(x)$ ، کافی است نمودار تابع

$f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم. برای رسم نمودار $g(x)$ ، کافی است نمودار

تابع $f(x)$ را ۳ واحد به سمت بالا منتقل کنیم.

ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

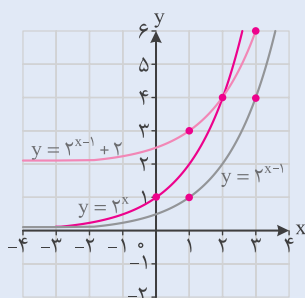
	$f(x) = \sqrt{x}$	$k(x) = f(x) - 2$	$g(x) = f(x) + 3$
دامنه	$[0, 4]$	$[2, 6]$	$[0, 4]$
برد	$[0, 2]$	$[0, 2]$	$[3, 5]$

برد تابع $k(x) = f(x) - 2$ با برد تابع $f(x)$ برابر است ولی دامنه آنها متفاوت است. در واقع

دامنه تابع $k(x)$ به صورت $[2, 6] = [0 + 2, 4 + 2]$ به دست می‌آید.

دامنه تابع $g(x) = f(x) + 3$ با دامنه تابع $f(x)$ برابر است ولی برد آنها متفاوت است. در

واقع برد تابع $g(x)$ به صورت $[3, 5] = [0 + 3, 2 + 3]$ به دست می‌آید.



۲) در زیر، نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = \log_2 x$ و

$y = \cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y = 2^{x-1} + 2$ ،

$y = \log_2(x + 2)$ و $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ را به کمک

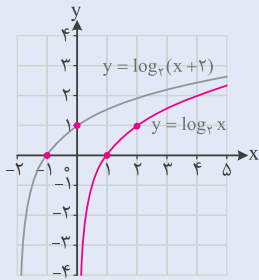
انتقال رسم کنید.

اگر $f(x) = 2^x$ ، آنگاه $f(x) - 1 = 2^{x-1}$ و $f(x) - 1 + 2 = 2^{x-1} + 2$

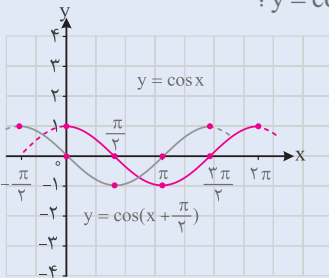
بنابراین باید نمودار تابع $y = 2^x$ را ابتدا ۱ واحد به

سمت راست و سپس ۲ واحد به سمت بالا انتقال

دهیم.



اگر $y = \log_p(x) = g(x)$ ، آنگاه $y = \log_p(x+2) = g(x+2)$ ؛
بنابراین باید نمودار $y = \log_p x$ را ۲ واحد به سمت چپ
منتقل کنیم.

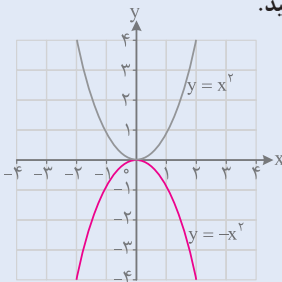


اگر $y = \cos(x) = h(x)$ ، آنگاه $y = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = h(x + \frac{\pi}{2})$ ؛
بنابراین باید نمودار تابع $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{2}$
واحد به سمت چپ منتقل کنیم.

کاردرکلاسی | ص ۷ و ۸ کتاب درسی

۱] اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.

دامنه تابع $y = kf(x)$ بازه $[a, b]$ و برد آن اگر $k > 0$ باشد، بازه $[kc, kd]$ و اگر $k < 0$ باشد، بازه $[kd, kc]$ است.



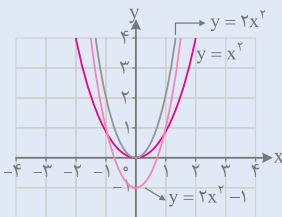
۲] نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.

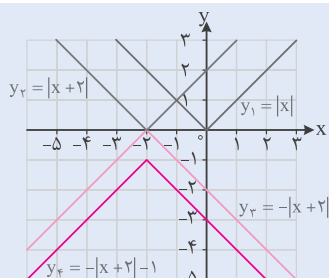
الف) $y = -x^2$

اگر $f(x) = x^2$ باشد، آنگاه $y = -x^2 = -f(x)$ بنابراین
کافی است فقط عرض نقاط در نمودار $f(x)$ را قرینه کنیم.
با این کار، نمودار نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.

ب) $y = 2x^2 - 1$

اگر $g(x) = x^2$ باشد، آنگاه $y = 2x^2 - 1 = 2g(x) - 1$ ؛
بنابراین باید ابتدا عرض نقاط نمودار تابع $g(x)$ را ۲
برابر کنیم و سپس نمودار به دست آمده را ۱ واحد به سمت
پایین انتقال دهیم.





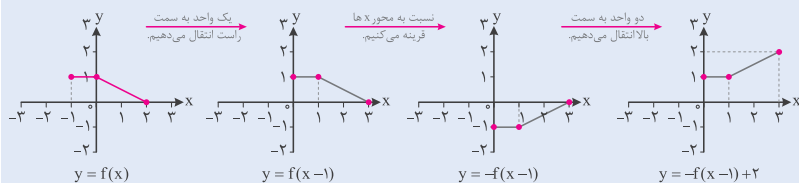
پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = |x|$ به دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.

با توجه به نمودارهای رسم‌شده و مراحل انتقال نمودار تابع $y = |x|$ متوجه می‌شویم که:

نمودار تابع $y_1 = |x|$ ابتدا ۲ واحد به سمت چپ منتقل شده است $(y_2 = |x+2|)$ ، سپس نسبت به محور x ها قرینه شده است $(y_3 = -|x+2|)$ و در نهایت ۱ واحد به سمت پایین انتقال یافته است $(y_4 = -|x+2|-1)$. بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = -|x+2|-1$ خواهد بود.

نکته نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y = -f(x-1) + 2$

را رسم کنید.

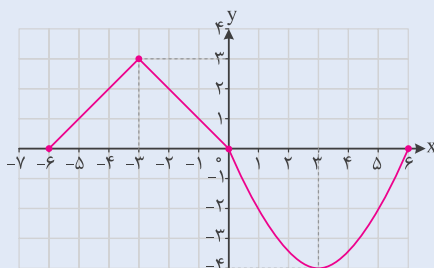


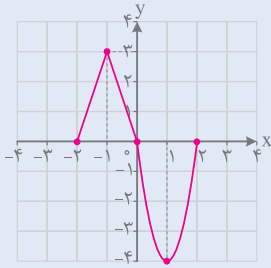
کاردکلاسی | ص ۱۰ کتاب درسی

۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = f(kx)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.

برد تابع $y = f(kx)$ بازه $[c, d]$ و دامنه تابع $y = f(kx)$ اگر $k > 0$ باشد، بازه $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ و اگر $k < 0$ باشد، بازه $[\frac{b}{k}, \frac{a}{k}]$ است.

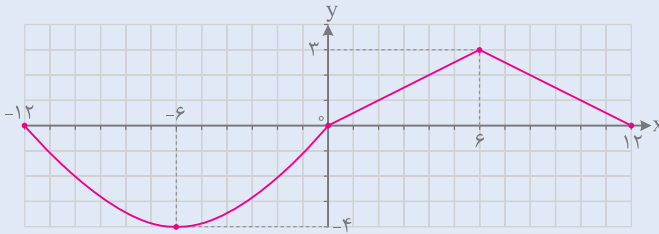
۲ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار توابع $y = f(3x)$ و $y = f(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.





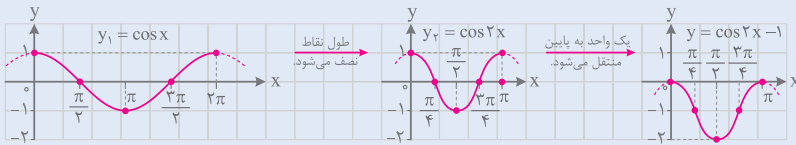
برای رسم نمودار تابع $y = f(3x)$ ، با ثابت نگه داشتن عرض نقاط، طول هر نقطه را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم.

برای رسم نمودار تابع $y = f(-\frac{x}{3})$ ، با ثابت نگه داشتن عرض نقاط، طول هر نقطه را بر عدد $(-\frac{1}{3})$ تقسیم یا در عدد (-3) ضرب می‌کنیم.

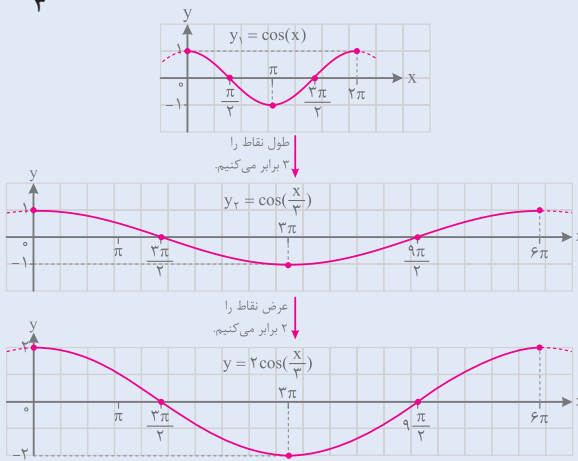


۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

الف) $y = \cos 2x - 1$



ب) $y = 2 \cos(\frac{x}{3})$



هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y = \sqrt{2+x}$

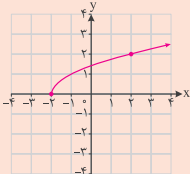
ب) $y = 2 + \sqrt{x}$

پ) $y = -2\sqrt{x}$

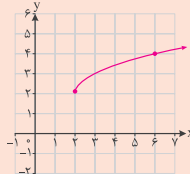
ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

ث) $y = 2 + \sqrt{x-2}$

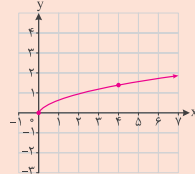
ج) $y = \sqrt{-2x}$



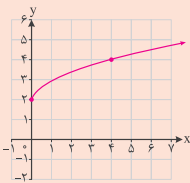
(a)



(b)



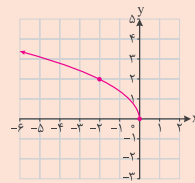
(c)



(d)



(e)

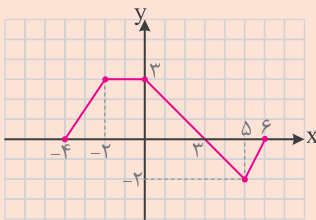


(f)

تابع	الف	ب	پ	ت	ث	ج
نمودار	a	b	d	c	b	f

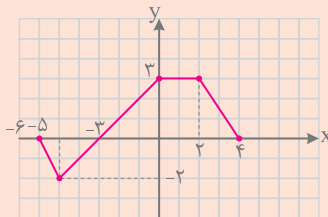
نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.

نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

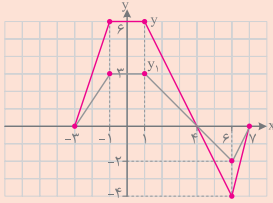


الف) $y = f(-x)$

کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

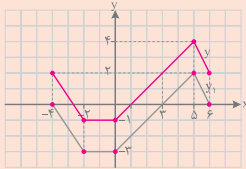


ب) $y = 2f(x-1)$



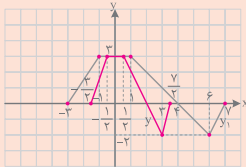
نمودار تابع f را ابتدا ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $y_1 = f(x-1)$ به دست آید، سپس در نمودار جدید، با ثابت نگه داشتن طول نقاط، عرض آنها را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار $y = 2f(x-1)$ به دست آید.

پ) $y = -f(x) + 2$



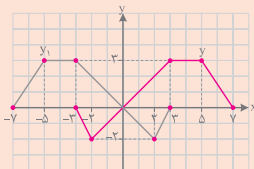
نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y_1 = -f(x)$ به دست آید و سپس نمودار جدید را ۲ واحد به سمت بالا قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -f(x) + 2$ به دست آید.

ت) $y = f(2x-1)$

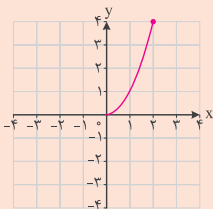


باید نمودار تابع f را ابتدا ۱ واحد به سمت راست منتقل کرده و سپس با ثابت نگه داشتن عرض نقاط، طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

ث) $y = f(3-x)$

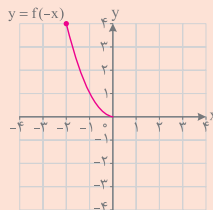


ابتدا ضابطه تابع را به صورت $y = f(-x+3)$ می‌نویسیم. بنابراین باید ابتدا نمودار تابع f را ۳ واحد به سمت چپ منتقل کنیم و سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور y قرینه کنیم.



۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

الف) $y = f(-x)$



برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم.