مقدمه ناشر

می‌خواستم یه مقدمهٔ بلندبالا بنویسم راجع به «آمار و احتمال و گسسته و اهمیت آن در زندگی امروز...!!» می‌خواستم بگم:
توو این دوره زمونه تا دکمهٔ کنترل تلویزیون رو می‌زنی، چندتا آدم می‌بینی نشستن دور هم دارن آمار می‌دن و براساس آماراشون، پیش‌بینی می‌کنن و احتمال می‌دن که فلان می‌شه و بهمان می‌شه. روزنامه، اینستاگرام، تلگرام، صفحات مجازی و ... پر از آمار و احتمال‌های رنگارنگه. دیگه همه یادگرفتن چندتا عدد بدن و نمودار بکشن و بعد بگن فقط منم که راست می‌گم، اصلاً من خوبم!
توو همین فکرا بودم که مقدمهٔ مؤلفا رسید به دستم. دیدم اووَه چه دل پری دارن مؤلفامون! جا نذاشتن چار کلوم هم ما با شما اختلاط کنیم. برای همین با شعر قیصر امین‌پور مقدمه رو ناتموم می‌ذارم و حرفام رو می‌ذارم برا یه وقت خوب که بشینیم دور هم چای و بیسکوئیت بخوریم و گپ بزنیم:

ما در عصر احتمال به سر می‌بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش‌بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیاید
در عصر قاطعیت تردید
عصر جدید
عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال، یقینی نیست
اما من
بی نام تو
حتی
یک لحظه احتمال ندارم.

خیلی‌خیلی ممنونم از مؤلفای دوست‌داشتنی این کتاب عطا صادقی و مصطفی دیداری و هم‌چنین کیوان صارمی که برای بهترشدن این کتاب خیلی زحمت کشید و همین‌طور، مسئول پروژه‌های این کتاب از قدیم تا الان، خانم هدی ملک‌پور، خانم ملیکا مهری، خانم ریحانه محمدی‌نژاد، خانم یگانه فلاحی و ویراستارای خوبمون و همکارای پرتوان در تولید؛ دم همتون گرم.

مقدمه مؤلفان

... خطوط را رها خواهم کرد / و هم‌چنین شمارش اعداد را رها خواهم کرد
و از میان شکل‌های هندسی محدود / به پهنه‌های حسی وسعت پناه خواهم برد...

۱ شاید برای شما عجیب باشد چرا یک مؤلف کتاب‌های ریاضی و معلم ریاضیات گسسته ـ که یکی از مباحث آن نظریهٔ اعداد است ـ مقدمهٔ کتابش را با شعری از فروغ فرخزاد شروع کند که در آن آمده «شمارش اعداد را رها خواهم کرد» دلیل آن ساده است، به خاطر آن‌که ریاضیات، که از قضا خیلی هم دوستش دارم، همهٔ زندگی من نیست، بلکه بخشی از آن است. کل این کتاب هم در مورد ریاضی است، بنابراین این یک مقدمه را دیگر نمی‌خواهم دربارهٔ ریاضی حرف بزنم.

۲ کنکور در جای خودش مهم است. در سرنوشت شما تا حدی تأثیر دارد و اگر دانشگاه خوبی بروید و رشته‌ای که دوست دارید بخوانید ـ البته اگه واقعن بدانید چه چیزی را دوست دارید ـ احتمالن در زندگی‌تان آدم موفق‌تری خواهید شد. اما کنکور و دانشگاه همه چیز نیست و چیزهای خیلی‌خیلی مهم‌تری هم وجود دارد. همیشه سعی کرده‌ام توی کلاس‌هایم، اگر فرصتی پیش بیاید، به‌جز درس از چیزهای دیگری هم حرف بزنم، فیلم‌ها و کتاب‌های خوبی که تازگی دیده‌ام و خوانده‌ام را به بچه‌ها معرفی کنم. تماشای تئاترهای خوبی که رفته‌ام و هنوز روی صحنه است را به آن‌ها پیشنهاد کنم و ...

کنکور تمام می‌شود و می‌رود و من حتی اگر معلم خوبی باشم، در زمینهٔ کنکور فقط برای یک سال می‌توانم به دانش‌آموزهایم کمک کنم، اما بعضی نوشته‌ها، نقاشی‌ها و طرح‌ها، موسیقی‌ها، نمایش‌ها، شعرها، فیلم‌ها و کتاب‌ها ممکن است در کل زندگی یک نفر اثرگذار باشد. من خودم بخشی بزرگ از زندگیم را مدیون خوانده‌ها، دیده‌ها و شنیده‌هایم هستم. به نظرم بسیار مهم است که آدم چند بعدی باشد در زندگی‌اش و فقط در یک شاخه پیش نرود، که بداند دنبال چه چیزی می‌گردد و رؤیاهایش را فراموش نکند.

۳ محمد یعقوبی که به نظر من یکی از بهترین نمایش‌نامه‌نویس‌های معاصر است و بیشتر کارهایش را دوست دارم، نمایش‌نامه‌ای دارد به نام «ماه در آب» که در بخشی از آن یکی از شخصیت‌های نمایش می‌گوید: «مادرم یادداشت اون روزش رو با یه سؤال شروع کرده. کیه که حتی یه بار آرزو نکرده باشه، کاش می‌تونست همه چیز رو بذاره بره و یه زندگی دیگه رو شروع کنه؟

یادداشت‌های مادرم رو می‌خونم و می‌بینم من هم مثل پدرم اهل خداحافظی‌ام. اولین خداحافظی با مادرم بود. بعد با پسری که می‌گفت عاشقمه خداحافظی کردم، بعد با کشوری که توش به دنیا اومدم، بعد خداحافظی با پدرم. خاله آلما می‌گه: آدم‌ها دو دسته‌ن، آدم‌هایی که می‌مونن، آدم‌هایی که می‌رن. دایی آروین هم می‌گه: آدم‌ها دو دسته‌ن، آدم‌هایی که به رؤیاشون خیانت می‌کنن، آدم‌هایی که دنبال رؤیاشون می‌رن. مادرم آی‌سودا هم می‌گفت: آدم‌ها دو دسته‌ن، آدم‌هایی که به ماه بالای سرشون خیره شدن و آدم‌هایی که به ماه توی آب».

یادم است وقتی داشتم برای اولین بار این نمایش را توی سالن سایهٔ تئاتر شهر می‌دیدم، شنیدن این جمله که: «آدم‌ها دو دسته‌ن، آدم‌هایی که به رؤیاشون خیانت می‌کنن، آدم‌هایی که دنبال رؤیاشون می‌رن.» تکانم داد. همهٔ ما به‌خصوص وقتی جوان‌تر هستیم حتمن آرزوهایی داریم و رؤیاهایی در سرمان می‌پرورانیم، اما واقعن چند درصد از ما دنبال آرزوهای‌مان می‌رویم و چند درصد، آن‌قدر غرق در جریان روزمرهٔ زندگی می‌شویم که آرام آرام رویاهای‌مان را فراموش می‌کنیم و به قول میلان کوندرا حل می‌شویم در این سبکی تحمل‌ناپذیر هستی؟

من فکر می‌کنم خیلی مهم است که ما هر چند وقت یک‌بار چک کنیم مسیری که برای زندگی انتخاب کرده‌ایم، در راستای رسیدن به رؤیاهایمان هستند یا نه. ما آدم‌ها نباید به کم قانع شویم. باید تلاش کنیم به چیزی که می‌خواهیم برسیم، چرا که به قول برناردشاو: «اگر چیزهایی که دوست داریم به دست نیاوریم، مجبوریم چیزهایی که به دست آورده‌ایم، دوست داشته باشیم.» ما حق نداریم به رؤیاهایمان خیانت کنیم، اگر این کار را بکنیم، در واقع به هویتمان خیانت کرده‌ایم. شاید شما دوست داشته باشید نویسندهٔ موفقی شوید، باید سخت کار کنید و هدفتان را گم نکنید وگرنه می‌بینید چندین سال گذشته و تبدیل به مهندس یا کارمندی شده‌اید که از زندگی‌اش راضی نیست، یا بچه به بغل دارید توی آشپزخانه قرمه‌سبزی درست می‌کنید!

۴ چند شب پیش رفته بودم توی بالکن تا به گلدان‌ها آب بدهم، دیدم که اوه این وقت تابستان چه بادی دارد می‌آید و نگران شدم نکند درخت‌ها بشکند. بعد توی ذهنم آمد: «در کوچه باد می‌آید.» و ناخودآگاه ادامه‌اش: «این ابتدای ویرانی است» و فکرکردم این شاید واقعن هم ابتدای ویرانی باشد. این شرایط را می‌گویم. وضع نابه‌سامان مملکت و گران‌شدن روزبه‌روز همه چیز، کم آبی، کاهش مدام ارزش پول ملی، فقیرشدن عدهٔ بیشتری از مردم و مشکلات ناشی از کرونا. بعد، نشستم با خودم فکرکردم: «خب می‌خوای چی‌کار کنی الان؟» چیزی که می‌دانم این است که هنوز نمی‌خواهم مملکت و خانواده‌ام را رها کنم و بروم خارج از کشور. البته این یک انتخاب شخصی است، فضیلتی برای آن قائل نیستم و به کسی هم چنین توصیه‌ای نمی‌کنم. چون ممکن است اوضاع خیلی بدتر شود، وضع اقتصادی مردم و خودم بدتر و بدتر شود، برق بیشتر برود، آب جیره‌بندی شود و بدتر از همه، جنگ شود. به بقیه کاری ندارم، اما خودم هنوز هم تصمیم دارم سختی‌ها را تاب بیاورم و سعی کنم درست‌ترین رفتار را داشته باشم. تنها کاری که در این شرایط از دست من برمی‌آید این است که مسئولانه‌تر از قبل زندگی کنم. چه در زندگی شخصی و چه در رفتارم به عنوان یک شهروند جامعه. مثلن در این کمبودها حواسم بیشتر به مصرف درست آب و برق باشد ، حرص نزنم، سعی کنم بهتر از قبل درس بدهم و رفتار درست‌تری با شاگردهایم و آدم‌هایی که با آن‌ها در ارتباطم داشته باشم، انرژی بیش‌تری‌بگذارم تا کیفیت کتاب‌هایی که می‌نویسم بالاتر برود و به درد آدم‌های بیش‌تری بخورد، به منفعت خود تنهایم فکر نکنم و خودم را بخشی از جامعه ببینم. این مملکت روزهای سخت کم نداشته است، تا آن‌جایی که من یادم می‌آید و به چشم دیده‌ام ما روزهای سخت جنگ و همهٔ مشکلات دههٔ شصت را پشت سر گذاشتیم و زنده ماندیم. ماها ممکن است ناراحت باشیم، دل‌گیر باشیم، فحش بدیم، حتی وطنمان را ترک کنیم، اما شک ندارم در وجود تک‌تکمان یک بخشی عاشق این آب و خاک است. این‌جا وطنمان است، دوستش داریم و دلمان برایش می‌تپد. چه‌طور بی‌خیالش شویم؟

۵ در چاپ جدید این کتاب تلاش کرده‌ام همه چیز در بهترین حالت خودش باشد. درس‌نامه‌ها حسابی مفصل و کامل شده است و با خواندنش هیچ نکته‌ای برایتان ناگفته باقی نمی‌ماند. تست‌ها با دقت طبقه‌بندی شده‌اند و تلاش کرده‌ام در آن‌ها همهٔ ایده‌های ممکن پوشش داده شوند. به آخر هر درس یک آزمون اضافه شده تا بعد از زدن تست‌های درس بفهمید وضعیتتان چه‌طور است و درس را یادگرفته‌اید یا نه و پاسخ‌ها هم واقعن تشریحی است و خیلی از تست‌ها به دو روش پاسخ داده شده است. در پایان این مقدمه دوست دارم از همهٔ کسانی که در نوشتن این کتاب به من کمک کرده‌اند، تشکر کنم. ممنونم از آقای دیداری که در تألیف این کتاب به من کمک کرد، متشکرم از رسول محسنی‌منش که نظراتش در مورد کتاب بسیار به درد من خورد. تشکر می‌کنم از دکتر کمیل

نصری، مهندس نوید شاهی، مهندس رضا سبزمیدانی، خانم‌ها ملک‌پور و مهری و همهٔ همکاران انتشارات خیلی سبز و تشکر می‌کنم از ویراستارهای کتاب که نظرات خوبشان به ما کمک کرد. از شما دانش‌آموزان و همکاران عزیزی که این کتاب را می‌خوانید نیز می‌خواهم حتمن نظرها، پیشنهادات و انتقادات خود را دربارهٔ این کتاب از طریق ایمیل یا هر روش دیگری که خودتان صلاح می‌دانید به ما برسانید. عمیقن بر این باورم هر کتابی، هر چه‌قدر هم خوب باشد، باز می‌تواند بهتر شود. خیلی خوش‌حال می‌شوم بتوانم از نظرات شما در چاپ‌های بعدی این کتاب استفاده کنم. خب! حرف‌هایی که می‌خواستم بزنم را زدم. حالا دوست دارم همان‌طور که این نوشته را با بخشی از یکی از شعرهای فروغ فرخزاد آغاز کردم، آن را با بخشی از شعر دیگری از همین شاعر بلندمرتبه به پایان برسانم:

من از زمانی / که قلب خود را گم کرده‌است، می‌ترسم / من از تصور بیگانگی این همه دست / و از تجسم بیگانگی این همه صورت می‌ترسم …

من مثل دانش‌آموزی که / درس هندسه‌اش را دیوانه‌وار دوست دارد، تنها هستم / و فکر می‌کنم که باغچه را می‌شود به بیمارستان برد / من فکر می‌کنم …

من فکر می‌کنم … / من فکر می‌کنم … / و قلب باغچه در زیر آفتاب ورم کرده است / و ذهن باغچه دارد آرام آرام / از خاطرات سبز تهی می‌شود.

عطا صادقی
ata.sadeghi@gmail.com

«پل اردوش» ریاضی‌دان نابغهٔ مجارستانی (*۲۰ سال پیش مرحوم شده*) است که در ترکیبیات (*همین گسسته خودمون*) کارهای زیادی انجام داده است. کل زندگی‌اش یک چمدان بوده و از طریق سخنرانی‌هایی که در دانشگاه‌های مختلف انجام می‌داده، گذران زندگی می‌کرده است. بیش از ۱۵۰۰ مقاله (*ان شا… رفتی دانشگاه می‌فهمی یه مقاله دادن یعنی چی!*) نوشته است، آن هم چه مقاله‌هایی! برخی از آن‌ها، اصلن شاخه‌ای در ریاضی باز کرده است (*مثلاً مدلی برای اثبات برخی از قضیه‌ها، معروف به روش‌های احتمالاتی ارائه کرده است که سکه می‌اندازید و قضیه اثبات می‌شود!*) بعد از فوت او کتابی چاپ شد به نام «اثبات» که داستان جالبی دارد. اردوش معتقد بود کتابی مقدس، در عالم بالا وجود دارد که در آن اثبات‌های خارق‌العاده قضیه‌های ریاضی، نوشته شده است. هر زمان خودش از این‌جور اثبات‌های خفن، ارائه می‌داد می‌گفت: این اثبات از «کتاب» است. بعد از فوتش، بسیاری از این‌جور اثبات‌های او، در این کتاب گردآوری شده است. حتی این‌قدر برایش احترام قائل هستند که در ریاضی عددی داریم به نام عدد اردوش. مثلاً اگر کسی با اردوش مقاله داده باشد عدد اردوش او برابر یک است (*مثلاً دکتر مهدی بهزاد خودمون که پدر علم گراف ایرانه عدد اردوشش یکه*). کسی که با فردی که با اردوش مقاله دارد، مقاله داشته باشد، عدد اردوشش می‌شود دو و همین‌جوری! این خودش یک رزومه برای ریاضی‌دانان محسوب می‌شود. اردوش حدس‌های حل‌نشدهٔ زیادی دارد که اتفاقاً در کتابی به نام «حدس‌های اردوش» جمع‌آوری شده است. یکی از حدس‌های او در مورد عدد تقاطع گراف (*کم‌ترین تعداد برخورد یال‌ها در رسم گراف*) بود. همین چند سال پیش، یک ریاضی‌دان دانمارکی به اسم «توماسون» درستی آن حدس را ثابت کرد آن هم در دو خط! بعد از آن، خودش گفته بود: *«فقط دوس داشتم اردوش زنده بود، این اثبات رو می‌دید.»* خلاصه حرف در مورد اردوش و کارهایش زیاد است.

غرضم از این همه تعریف و تمجید از اردوش، این بود که به این‌جا برسم. اول این‌که: دیدید دست روی دست زیاد است! اردوش با آن همه عظمت، هم ممکن است چیزی به ذهنش نرسد، ولی به فکر فرد دیگری مثل شما برسد. بچه‌ها هر کدام از شماها مثل یک عدد اول هستید. دیدید اعداد اول، شخصیت منحصربه‌فردی دارند یعنی با ضرب اعداد دیگر ساخته نمی‌شوند. واقعاً ایده‌هایی درون فکر هر کدام از شما، وجود دارد که درون ذهن من که سهل است به عقل جن هم نمی‌رسد! این را اول باور کنید بعد آن را بارور کنید، خواهید دید که چه درهایی باز می‌شود!

اما نکتهٔ دوم: استاد راهنمای ارشد بنده (*دکتر حاج ابوالحسن که واقعاً علاقه و سوادم در گسسته رو مدیون ایشون هستم*) می‌گفت: برای شمایی که می‌خواهید در گرایش ترکیبیات کار کنید یک ترسی همیشه وجود دارد، این‌که یک بچه ممکن است سؤالی از شما بپرسد و نتوانید پاسخ دهید! بچه‌ها ذات این درس، معماگونه است. اصلاً سرآغاز برخی از مباحث گسسته، مثل گراف، همین معماها بوده‌اند. ذات این درس دیریاب است، یعنی طول می‌کشد تا توی مغزتان بنشیند، ولی امان از وقتی که بنشیند خوب هم بنشیند، می‌بینید که خیلی از تست‌ها به سادگی و در زمان کوتاهی حل می‌شوند، مخصوصاً این‌که محاسبات آن‌چنانی در این درس (مثل حسابان) نداریم. مطالب درس گسسته، کاملاً برای شما جدید است، پس صبور باشید تا مفاهیم به صورت آهسته و پیوسته در ذهن شما بنشیند نه این‌که با حل‌نشدن چند تست دچار یأس فلسفی بشوید.

خوب است یک چند کلمه‌ای هم، در مورد این کتابی که دستتان است بگوییم:

۱ کلاً سؤال‌های کنکور را می‌توانیم در سه شاخهٔ حسابان و ریاضی پایه (حدود ۱۹ سؤال)، هندسه (حدود ۱۰ تا ۱۱ سؤال) و گسسته (حدود ۱۰ تا ۱۱ سؤال) دسته‌بندی کنیم. خیالتان راحت باشد، هر چیزی که در شاخهٔ گسسته، نیاز دارید این‌جا جمع کرده‌ایم، یعنی دو فصل پایانی ریاضی دهم به علاوهٔ کل آمار و احتمال (*می‌شوند پایه*) و خب گسسته (*می‌شود دوازدهم*)! در تغییر نسل کتاب‌های درسی، بیشتر سؤال‌های کنکور از تمرین‌های کتاب درسی مطرح می‌شوند، پس واو به واو کتاب‌های درسی را بررسی کردیم، مثال‌ها، تمرین‌ها را تبدیل به تست کرده‌ایم، تازه کنکورهای سال‌های قبل (*که در چهارچوب کتاب‌های جدید بوده*) را هم آورده‌ایم، پس دیگر چاره‌ای جز صد زدن آن ۱۰ سؤال کذایی ندارید! قطعاً طراحان کنکور، خارج از کتاب درسی سؤالی را نخواهند داد، پس ما هم این اصل را رعایت کرده‌ایم یعنی همهٔ تست‌ها در چهارچوب کتاب درسی و خط کنکور طراحی شده‌اند.

۲ در هر قسمت، اول درس‌نامه را بخوانید. تمام تست‌های آموزشی را (بدون زمان) حل کنید و نکته‌های مهم را خلاصه‌نویسی کنید. این کارها چند فایدهٔ بزرگ دارند. باعث می‌شود ذهن شما از آشفتگی درآمده، دارای چهارچوب و ساختار منظمی در آن مبحث بشود، هم‌چنین به تست‌ها راحت‌تر می‌توانید پاسخ دهید. با پاسخ‌نامه هم ارتباط بهتری می‌توانید برقرار کنید. درس‌نامه‌ها اصلاً حالت خلاصه و نکته‌ای ندارند، بلکه مثل یک کلاس کنکور، همهٔ مباحثی که لازم (*دقت کردی لازم برای کنکور، نه هر چیزی*) است را باز کرده‌ایم.

۳ حالا نوبت به حل تست‌ها می‌رسد. تست‌ها با وسواس زیاد و از ساده به مشکل در هر موضوع اصلی و فرعی قرار داده شده‌اند. اگر چند تست اول برایتان ساده بود جوگیر نشوید، اگر در آخری‌ها هم به مشکل برخوردید، عزا نگیرید! حواستان باشد برای تسلط روی همهٔ مفاهیم کتاب، حل یک بارهٔ تست‌ها کافی نیست، بلکه تست‌ها باید حداقل دو بار، حل شوند. پس بار اول تست‌ها را بدون زمان حل کنید. اگر تستی، حل نشد هیچ اشکالی ندارد. چرا؟ چون یک پاسخ‌نامهٔ نسبتاً مفصل را برای همین نوشته‌ایم. فقط یک چیزی! پاسخ هر سؤالی را حتما ببینید، ولی خواهشاً سریع به پاسخ‌نامه مراجعه نکنید! اول کمی با تست کلنجار بروید! سعی کنید بین آموزش‌های درس‌نامه یا جزوهٔ معلم محترم و هر تست ارتباط برقرار کنید. هر مقدار از راه‌حل را که می‌توانید بروید جلو، بعد اگر حل نشد جواب را ببینید. اگر این کار را بکنید، ارتباط ذهن با آن مطلب برقرار شده، بعد می‌بینید که پاسخ چه‌قدر خوب و راحت می‌رود درون حافظهٔ بلندمدتتان! تازه لذت «*آهان فهمیدم*» را هم خواهید چشید.

فکر نمی‌کنم دیگر حرفی جز تشکر مانده باشد! تشکر از آقای دکتر نصری و مهندس سبزمیدانی به خاطر اعتماد دوباره، تشکر از دوست خوبم مهندس صادقی برای یک همکاری خوب، تشکر از سرکار خانم مهری که زحمت کارهای واقعاً زیاد اجرایی بر دوش ایشان بود، تشکر از ویراستاران محترم، دوستان تولید و از بچه‌های خوب دبیرستان نیک‌اندیشان (مخصوصاً آرین مجیدی‌نیا) که کتاب را با حوصله خواندند و خلاصه تشکر از همهٔ کسانی که بدون کمک آن‌ها، این کتاب به دست شما نمی‌رسید. امیدوارم بخوانید و حالش را ببرید. حق نگه‌دارتان.

دوستدار شما دیداری

فهرست

درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

این درس از سه قسمت تشکیل شده است. در بخش اول با مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن و ویژگی‌های آن آشنا می‌شویم؛ در قسمت دوم دربارهٔ ب.م.م و ک.م.م صحبت می‌کنیم و بالأخره به قضیهٔ تقسیم و افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک آن می‌پردازیم.

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

- عادکردن
  - مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن
  - ویژگی‌های رابطهٔ عادکردن
  - مضرب و مقسوم‌علیه
  - معادله‌های عادکردن
  - اعداد اول
  - باقی‌ماندهٔ مربع عدد فرد در تقسیم بر ۸
- ب.م.م و ک.م.م
  - مفهوم بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک
  - مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک
  - ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م
  - متباین‌سازی
- قضیهٔ تقسیم و کاربردها
  - قضیهٔ تقسیم
  - پیداکردن باقی‌مانده و خارج قسمت
  - افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

خب! حالا وقتش است برویم سراغ این درس و ببینیم چه خبر است؟

مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن تساوی ۱۵ = ۵ × ۳ را در نظر بگیرید. عدد ۱۵، از سه دستهٔ ۵تایی تشکیل شده است. جور دیگری نیز می‌توانیم بگوییم که در تقسیم عدد ۱۵ بر ۵، خارج قسمت برابر ۳ می‌شود و باقی‌مانده صفر است. به همین خاطر، می‌توانیم از یک طرف بگوییم که ۱۵ بر ۵ بخش‌پذیر است و از طرف دیگر بگوییم که عدد ۵، عدد ۱۵ را می‌شمارد؛ چون می‌توان ۱۵ را با دسته‌های ۵تایی شمرد. (*۳ دستهٔ پنج‌تاییِ سیب می‌شود، ۱۵ سیب و سپس باقی نمی‌ماند*)

این شمارش یا عادکردن را در ریاضی با علامت «|» نشان می‌دهند و می‌نویسند: ۱۵ | ۵

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر می‌گویند هرگاه عدد صحیحی مثل q وجود داشته باشد، به‌طوری که: $a = bq$

در این صورت می‌گویند b عاد می‌کند a را یا b می‌شمارد a را و می‌نویسند: $b \mid a$

از رابطهٔ $a = bq$ دو نتیجه می‌توان گرفت:

$a = bq \Leftrightarrow$ { a بر b بخش‌پذیر است. / b می‌شمارد a را (b عاد می‌کند a را) }

(*خیلی چیز ساده‌ایه! مثلاً وقتی می‌گیم ۶ بر ۲ بخش‌پذیره یعنی ۲ عاد می‌کند ۶ رو، یعنی* ۶ | ۲)

نکته:

۱ تبدیل عادکردن به تساوی خیلی‌خیلی مهم است و زیاد استفاده می‌شود: $a = bq \Leftrightarrow b \mid a$

۲ منظور از عدد در بخش نظریهٔ اعداد، عدد صحیح است، بخش‌پذیری توی عددهای گنگ، کسری و ... تعریف نمی‌شود.

قانون ۹۰ درجه

اگر در تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطهٔ عادکردن مثل ۶۳ | ۲۱، دچار اشکال شدید، می‌توانید آن را **نود درجه به خلاف عقربه‌های ساعت** بچرخانید تا به یک کسر تبدیل شود:

$$۲۱ \mid ۶۳ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف}} \frac{۶۳}{۲۱} = ۳$$

حالا اگر مثل این‌جا، حاصل عددی صحیح شد، رابطهٔ عادکردن، یک رابطهٔ درست بوده و در غیر این صورت، درست نیست.

مثال: رابطه‌های $۲^۸ \mid ۲^۵$ و $۷ \mid -۱$ را در نظر بگیرید.

همان‌طور که گفتیم، برای این‌که بفهمیم این رابطه‌ها درست‌اند یا نه آن‌ها را تبدیل به کسر می‌کنیم:

$$۲^۸ \mid ۲^۵ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۲^۵}{۲^۸} = \frac{۱}{۲^۳} \quad ✗$$

رابطه درست نیست، زیرا $\frac{۱}{۲^۳}$ یا $\frac{۱}{۸}$ عددی صحیح نیست. جور دیگر هم می‌توانستیم بگوییم. $۲^۸$ ضربدر هیچ عدد صحیحی، برابر $۲^۵$ نمی‌شود.

$$-۱ \mid ۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۷}{-۱} = -۷ \quad ✓$$

رابطه درست است، زیرا ۷− عددی صحیح است؛

تست: کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست **نیست**؟

۱) $۷ \mid -۶۳$ ۲) $۱۳ \mid ۹۱$ ۳) $۳^۵ \mid ۳^۷$ ۴) $۴^۴ \mid ۲^۷$

پاسخ ۴: اگر $a = bq$ باشد، آن‌گاه $b \mid a$. هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ درست است. $-۶۳ = ۷ \times (-۹) \Rightarrow ۷ \mid -۶۳$

۲ درست است. $۹۱ = ۷ \times ۱۳ \Rightarrow ۱۳ \mid ۹۱$

۳ درست است. $۳^۷ = ۳^۵ \times ۳^۲ \Rightarrow ۳^۵ \mid ۳^۷$

اما ۴ درست نیست. توجه کنید که $۴^۴ = (۲^۲)^۴ = ۲^۸$ بنابراین رابطهٔ $۲^۸ \mid ۲^۷$ نادرست است و برعکس آن یعنی $۲^۷ \mid ۲^۸$ درست است، زیرا:

$$۲^۸ = ۲ \times ۲^۷ \Rightarrow ۲^۷ \mid ۲^۸$$

البته با نکته‌ای که گفتیم هم می‌توانید نادرستی ۴ را بررسی کنید. عبارت $۴^۴ \mid ۲^۷$ را به یک کسر تبدیل می‌کنیم:

$$۴^۴ \mid ۲^۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۲^۷}{۴^۴} = \frac{۲^۷}{۲^۸} = \frac{۱}{۲}$$ عددی صحیح نیست.

پس رابطه برقرار نیست.

تست: کوچک‌ترین مقدار n برای آن‌که رابطهٔ $n! \mid ۴۵۵$ برقرار باشد، چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

پاسخ ۱: عدد ۴۵۵ را تجزیه می‌کنیم: $۴۵۵ = ۵ \times ۷ \times ۱۳$

قرار است رابطهٔ $n! \mid ۴۵۵$ برقرار باشد، یعنی باید کوچک‌ترین مقدار n را پیدا کنیم به شرط آن‌که کسر $\frac{n!}{۴۵۵} = \frac{n!}{۵ \times ۷ \times ۱۳}$ برابر عددی صحیح شود. مشخص است که اگر بخواهیم !n هر سه عامل ۵، ۷ و ۱۳ را داشته باشد کوچک‌ترین مقدار n برابر ۱۳ است. $۴ = ۳ + ۱ =$ مجموع ارقام ۱۳

سه ویژگی ساده و ابتدایی از بخش‌پذیری

۱ همهٔ عددها یا عبارت‌های جبری بر خودشان و بر قرینه‌شان بخش‌پذیرند:

$a|a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{a}=۱$ ✓

$a|-a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{-a}{a}=-۱$ ✓

۲ همهٔ عددها بر ۱ و ۱− بخش‌پذیرند. به بیان دیگر ۱ و ۱− همهٔ عددها را عاد می‌کنند:

$\pm۱|a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{\pm۱}=\pm a$ ✓

۳ صفر بر همهٔ عددها بخش‌پذیر است اما هیچ عدد مخالف صفری بر صفر بخش‌پذیر نیست:

$a|۰ \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{۰}{a}=۰$ ✓

$۰|a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{۰}$ ✗

حواستون باشه طبق قرارداد صفر بر خودش بخش‌پذیر است. به بیان دیگر **تنها عددی** که بر صفر بخش‌پذیر است، خود صفر است.
صفر خودش را می‌شمارد. $۰|۰ \Leftrightarrow ۰=۰\times q$

(یعنی اگه یه‌جا دیدین صفر یه چیزی رو می‌شماره، اون چیز صفره): $(۰|\square \Rightarrow \square=۰)$

تست: به ازای چند عدد صحیح مانند x، رابطهٔ $۰|x^۴-۴x^۲+۳$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ۳: گفتیم که عدد صفر، هیچ عددی را نمی‌شمارد به‌جز خودش؛ بنابراین اگر بخواهیم رابطهٔ بالا برقرار باشد، باید:

$$x^۴-۴x^۲+۳=۰$$

$$x^۴-۴x^۲+۳=۰ \Rightarrow (x^۲-۱)(x^۲-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm۱ \\ x^۲-۳=۰ \Rightarrow x^۲=۳ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

چون x باید عددی صحیح باشد پس $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ غیرقابل‌قبول هستند و در نتیجه ۳ پاسخ سؤال است.

$a|\square \Rightarrow ?$

وقتی که a عددی را می‌شمارد چه نتایجی می‌توان گرفت؟

۱ $a|۱ \Rightarrow a=\pm۱$ *(اگر عددی ۱ یا ۱− رو می‌شمره واضحه فقط می‌تونه ۱ یا ۱− باشه.)*

۲ $a|p \Rightarrow a=\pm۱,\pm p$ (p عدد اول است.) *(برای مثال اگر ۷ | a، a فقط می‌تونه ۱، ۱−، ۷ و ۷− باشه.)*

۳ $a|k \Rightarrow$ a می‌تواند هر کدام از مقسوم‌علیه‌های k باشد.

توان عدد اول p در تجزیهٔ n!

⚠ این بخش در کتاب درسی نیست، اما از آن‌جایی که از آن در کنکور سراسری ۱۴۰۰ سؤال آمده، بهتر است آن را بلد باشید.

توان عدد اول p در تجزیهٔ n! برابر است با:

$$[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^۲}]+[\frac{n}{p^۳}]+\cdots$$

برای مثال اگر بخواهیم بدانیم در تجزیهٔ ۴۱! توان عدد ۲ چند است داریم.

$$[\frac{۴۱}{۲}]+[\frac{۴۱}{۴}]+[\frac{۴۱}{۸}]+[\frac{۴۱}{۱۶}]+[\frac{۴۱}{۳۲}]+\underbrace{[\frac{۴۱}{۶۴}]+\cdots}_{\text{از این‌جا به‌بعد صفر می‌شود}}$$

$$=۲۰+۱۰+۵+۲+۱=۳۸$$

برای این کار می‌توان n را به طور متوالی به p تقسیم کرد و سپس خارج قسمت‌ها را با هم جمع کرد. برای مثال:

$$\begin{array}{l} ۴۱ \;\underline{|\,۲} \\ \quad ۲۱ \;\underline{|\,۲} \\ \qquad ۱۰ \;\underline{|\,۲} \\ \qquad\quad ۵ \;\underline{|\,۲} \\ \qquad\qquad ۲ \;\underline{|\,۱} \\ \qquad\qquad\quad ۱ \end{array} \Rightarrow ۲۱+۱۰+۵+۲+۱=۳۸$$

تست: اگر $\frac{۵۰!}{۲^x\times۳^y}$ عددی صحیح باشد، بیشترین مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۶۹ ۲) ۷۰ ۳) ۷۱ ۴) ۷۳

پاسخ ۱: با توجه به رابطهٔ داده‌شده توان عددهای ۲ و ۳ را در تجزیهٔ !۵۰ پیدا می‌کنیم.

$$[\frac{50}{2}]+[\frac{50}{4}]+[\frac{50}{8}]+[\frac{50}{16}]+[\frac{50}{32}]=25+12+6+3+1=47$$

$$[\frac{50}{3}]+[\frac{50}{9}]+[\frac{50}{27}]=16+5+1=22$$

بنابراین اگر بخواهیم $\frac{50!}{2^x \times 3^y}$ عددی صحیح باشد. x حداکثر برابر ۴۷ و y حداکثر برابر ۲۲ است. بنابراین بیشترین مقدار $x+y$ برابر است با:

$47+22=69$

مضرب و مقسوم‌علیه

این دو رابطه را نگاه کنید:

الف $6|x$ **ب** $x|12$

الف اگر همان‌طور که گفتیم رابطهٔ (الف) را به یک کسر تبدیل کنیم، به صورت $\frac{x}{6}$ درمی‌آید. حالا به نظر شما این کسر به ازای چه مقادیری از x تبدیل به یک عدد صحیح می‌شود؟ مشخص است که به ازای ±6، ±12، ±18 و ... . خب! حالا این‌ها چه عددهایی هستند؟ بله! مضارب ۶.

ب اما اگر رابطهٔ $x|12$ را به یک کسر تبدیل کنیم، می‌شود $\frac{12}{x}$. خب حالا به ازای چه مقادیری از x این کسر تبدیل به یک عدد صحیح می‌شود؟ عددهای $\pm12, \pm6, \pm4, \pm3, \pm2, \pm1$. همان‌طور که می‌بینید این عددها همان مقسوم‌علیه‌های ۱۲ هستند.

نکته: یادتان باشد:

$a|x \Rightarrow$ x مضرب a است.

$x|a \Rightarrow$ x مقسوم‌علیه a است.

تست: **به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطهٔ $5|x$ و $x|90$ برقرار است؟**

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

پاسخ ۴: بهترین روش برای پاسخ‌دادن به این مدل سؤال‌ها این است که رابطهٔ اول را به تساوی تبدیل کنیم و در رابطهٔ دوم قرار دهیم:

$5|x \Rightarrow x=5q$

$x|90 \Rightarrow 5q|90 \Rightarrow q|18$

حالاباید مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸ را پیدا کنیم: $1,2,3,6,9,18$:مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸

از رابطهٔ $a|b$ چه نتایجی می‌توان گرفت؟

فرض کنید که یک رابطهٔ عادکردن مثل $a|b$ داریم. می‌خواهیم ببینیم چه کارهایی را مجازیم روی آن انجام دهیم. سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توانیم در هر عدد صحیحی، ضرب کنیم. اما سمت چپ آن را نمی‌توانیم؛ به عنوان مثال، رابطهٔ $12|36$ را در نظر بگیرید. این رابطه، یک رابطهٔ درست است؛ زیرا کسر $\frac{36}{12}$ برابر عددی صحیح است. حالا وقتی می‌دانیم این کسر عددی صحیح است؛ اگر آن را در هر عدد صحیح دیگری ضرب کنیم حاصل، باز هم عددی صحیح می‌شود. **(یعنی سمت راست هر رابطهٔ عادکردن رو می‌شه تو هر عدد صحیحی ضرب کرد.)**

مثلاً $5\times\frac{36}{12}$ نیز عددی صحیح است؛ یعنی می‌توان نتیجه گرفت: $12|36 \Rightarrow 12|36\times5$

نکته: در حالت کلی:

$a|b \Rightarrow a|mb$

اما مشخص است که سمت چپ رابطهٔ عادکردن را نمی‌توان در هر عددی ضرب کرد؛ مثلاً همین رابطهٔ $12|36$ را در نظر بگیرید، اگر سمت چپ رابطه را در ۵ ضرب کنیم، می‌شود $60|36$ که رابطه‌ای نادرست است.

حالا دوباره همین رابطهٔ $12|36$ را در نظر بگیرید، کسر معادل با آن برابر $\frac{36}{12}$ است. می‌دانیم وقتی عدد ۳۶ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، بدیهی است که بر هر کدام از عددهای ۶، ۴، ۳، ۲ و ۱ یعنی بر هر کدام از مقسوم‌علیه‌های ۱۲ نیز بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر، از رابطهٔ $12|36$ هر یک از رابطه‌های مقابل قابل نتیجه‌گیری است:

$$12|36 \Rightarrow \begin{cases} \pm6|36 \\ \pm4|36 \\ \pm3|36 \\ \pm2|36 \\ \pm1|36 \end{cases}$$

به عبارت دیگر، سمت چپ رابطهٔ $a|b$ را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. در نتیجه می‌توان گفت: $ac|b \Rightarrow a|b \wedge c|b$

نکته: به طور خلاصه این نکات یادتان باشد:

	نکته	توضیح	مثال
۱	$a\|b \Rightarrow ma\|mb$	طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$5\|15 \xrightarrow{\text{طرفین}\times4} 20\|60$
۲	$a\|b \Rightarrow a\|mb$	سمت راست یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$6\|12 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times3} 6\|36$

	نکته	توضیح	مثال
۳	$a\mid b \Rightarrow$ هر یک از مقسوم‌علیه‌های a $\mid b$	سمت چپ یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان به هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد سمت چپ تقسیم کرد.	$۶\mid ۱۸ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div ۲} ۳\mid ۱۸ \\ \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div ۳} ۲\mid ۱۸ \end{cases}$
۴	$ab\mid c \Rightarrow \begin{cases} a\mid c \\ b\mid c \end{cases}$	در واقع همان نکتهٔ قبلی است. وقتی حاصل‌ضرب دو یا چند عدد، عددی را می‌شمارد، هر کدام از آن اعداد را نیز عاد می‌کند.	$۳\times ۵\mid ۴۵ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div ۳} ۵\mid ۴۵ \\ \xrightarrow{\text{سمت چپ} \div ۵} ۳\mid ۴۵ \end{cases}$
۵	$a\mid b \Rightarrow a^n\mid b^n$	طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان به توان رساند.	$۲\mid ۴ \xrightarrow{\text{به توان } ۴} ۲^۴\mid ۴^۴\ (۱۶\mid ۲۵۶)$
۶	$a^n\mid b^n \Rightarrow a\mid b$	از طرفین یک رابطهٔ عادکردن می‌شود ریشه گرفت به شرط آن‌که بعد از ریشه‌گرفتن هر دو عبارت عددی صحیح باشد.	$۲۷\mid ۲۱۶ \Rightarrow ۳^۳\mid ۶^۳ \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{ریشهٔ سوم}} ۳\mid ۶$ $۸\mid ۱۶ \Rightarrow ۲^۳\mid ۲^۴$ $\xrightarrow[\text{عدد سمت چپ صحیح نمی‌شود.}]{\text{نمی‌توان ریشهٔ چهارم گرفت چون}} \sqrt[۴]{۸}\nmid ۲$
۷	$a\mid b \Rightarrow \lvert a\rvert \leq \lvert b\rvert ,\ b\neq ۰$	در یک رابطهٔ عادکردن اگر عدد سمت راست صفر نباشد حتماً قدرمطلق سمت چپ کوچک‌تر و یا مساوی از قدرمطلق عدد سمت راست است.	$۴\mid ۱۲ \Rightarrow ۴\leq ۱۲$ $۶\mid -۱۸ \Rightarrow ۶\leq \lvert -۱۸\rvert$

مثال: بررسی کنید کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست و کدام غلط است؟

الف) $a\mid b \Rightarrow a\mid ۳b$
ب) $a\mid b \Rightarrow ۳a\mid b$
پ) $a\mid b^۲ \Rightarrow a\mid ۳b^۳$
ت) $a^۲\mid b \Rightarrow a\mid b$
ث) $۲a\mid b \Rightarrow a\mid ۳b$
ج) $a^۲\mid b^۵ \Rightarrow a^۳\mid b^۴$

پاسخ: نکتهٔ مهم در پاسخ‌گویی به این سؤالات در این است که بدانیم اگر $a\mid b$ سمت راست رابطه را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد و سمت چپ رابطه را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. *(یعنی فرمولیش کنید که راست رو می‌شه گنده کرد و چپ رو می‌شه کوچیک کرد و رابطه درست باقی بمونه.)*

الف درست است، چون راست را بزرگ کردیم: $a\mid b \xrightarrow{\text{سمت راست} \times ۳} a\mid ۳b$ ✓

ب چپ رو الکی نمی‌شود بزرگ کرد. بنابراین این رابطه درست نیست. برای مثال اگر $a=۳$ و $b=۹$ باشد:
$۳\mid ۹ \Rightarrow ۳\times ۲\nmid ۹$

پ درست است چون سمت راست را بزرگ کردیم: $a\mid b^۲ \xrightarrow{\text{سمت راست} \times ۳b} a\mid ۳b^۳$

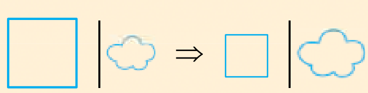
ت درست است چون سمت چپ را کوچک کردیم: $a^۲\mid b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر } a} a\mid b$

ث درست است. همزمان دو کار را انجام دادیم. هم سمت راست را بزرگ کردیم هم سمت چپ را کوچک:
$۲a\mid b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر } ۲} a\mid b \xrightarrow{\text{سمت راست} \times ۳} a\mid ۳b$

ج این خیلی غلط است، چون دوتا کار اشتباه انجام دادیم. هم سمت راست را کوچک کردیم و هم سمت چپ را بزرگ. برای مثال اگر $a=۴$ و $b=۲$ باشد رابطهٔ $a^۲\mid b^۵$ درست است، زیرا: $۴^۲\mid ۲^۵ \Rightarrow ۱۶\mid ۳۲$ درست

اما رابطهٔ $a^۳\mid b^۴$ نادرست است، زیرا: $۴^۳=۶۴ ,\ ۲^۴=۱۶ \Rightarrow ۱۶\nmid ۶۴$

نکته: در یک رابطهٔ عادکردن، سمت چپ را می‌توان کوچک و سمت راست را بزرگ کرد.



حالا که این رابطه‌ها را تعریف کردیم به تست زیر پاسخ دهید.

تست: از رابطهٔ $۲a^۲\mid b^۳$ کدام نتیجه‌گیری ممکن است درست نباشد؟

۱) $a^۲\mid b^۳$
۲) $۲a^۲\mid ۵b^۳$
۳) $a^۲\mid b^۴$
۴) $a\mid b$

پاسخ:۴ ۱ درست است؛ زیرا گفتیم که می‌توان سمت چپ رابطه را بر مقسوم‌علیه‌هایش تقسیم کرد و این‌جا نیز همین اتفاق افتاده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a^2 \mid b^3$$

۲ درست است؛ زیرا سمت راست رابطه را می‌توان در هر عددی ضرب کرد.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۵}} 2a^2 \mid 5b^3$$

۳ نیز درست است؛ زیرا هر دو اتفاق با هم رخ داده، یعنی هم‌زمان، سمت چپ رابطه، بر عددی تقسیم شده و سمت راست در عددی ضرب شده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست} \times b} a^2 \mid b^4$$

اما دلیلی ندارد که ۴ حتماً درست باشد؛ به عنوان مثال اگر $b = 2^4$ و $a = 2^5$ باشد، داریم:

$$2a^2 \mid b^3 \Rightarrow 2\times(2^5)^2 \mid (2^4)^3 \Rightarrow 2^{11} \mid 2^{12} \checkmark$$

اما $2^4 \nmid 2^5$.

به تست بعد نگاه کنید. برای حل‌کردن این مدل تست‌ها به‌جز روش تشریحی یک تکنیک هم وجود دارد که خوب است آن را بلد باشید:

تست: از رابطهٔ $a^5 \mid b^9$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $a^{10} \mid b^{17}$ ۲) $a^7 \mid b^{12}$ ۳) $a^8 \mid b^{15}$ ۴) $a^9 \mid b^{16}$

پاسخ:۳ یک راه ساده برای جواب دادن به این مدل تست‌ها این است که یک کاری کنیم که دو طرف رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال با هم برابر شوند. یعنی a و b را عددهای توان‌داری فرض کنیم که وقتی به توان ۵ و ۹ می‌رسند طرفین رابطهٔ عادکردن صورت سؤال مساوی هم شود. برای این کار یک پایهٔ فرضی مثل x را در نظر بگیرید و توان b را به پایهٔ a بدهید و توان a را به پایهٔ b. یعنی چی؟ یعنی این‌که مثلاً در این سؤال a و b را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم: $a = x^9 \;,\; b = x^5$

چون اگر به ازای این a وb صورت سؤال را بازنویسی کنیم خواهیم داشت: $a^5 \mid b^9 \Rightarrow x^{45} \mid x^{45}$

و می‌بینید که طرفین رابطه برابر می‌شود.

خوبی این کار این است که حالا اگر گزینه‌ها را به ازای این مقادیر a و b بررسی کنیم، معلوم می‌شود کدام رابطه درست است و کدام نه. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $a^{10} \mid b^{17} \Rightarrow (x^9)^{10} \mid (x^5)^{17} \Rightarrow x^{90} \mid x^{85}$ ×

۲ $a^7 \mid b^{12} \Rightarrow (x^9)^7 \mid (x^5)^{12} \Rightarrow x^{63} \mid x^{60}$ ×

۳ $a^8 \mid b^{15} \Rightarrow (x^9)^8 \mid (x^5)^{15} \Rightarrow x^{72} \mid x^{75}$ ✓

۴ $a^9 \mid b^{16} \Rightarrow (x^9)^9 \mid (x^5)^{16} \Rightarrow x^{81} \mid x^{80}$ ×

درستی ۳ را به روش تشریحی به صورت مقابل می‌توان ثابت کرد:

$$a^5 \mid b^9 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۵ می‌رسانیم}} a^{25} \mid b^{45} \xrightarrow{\text{سمت چپ را بر a تقسیم می‌کنیم}} a^{24} \mid b^{45} \xrightarrow{\text{از طرفین ریشهٔ سوم می‌گیریم}} a^8 \mid b^{15}$$

که خب کار ساده‌ای نیست و تازه ردکردن بقیهٔ گزینه‌ها کار سخت‌تری است!

این موضوع را این‌جوری هم می‌توان توضیح داد:

نکته: از رابطهٔ $a^m \mid b^n$ زمانی می‌توان رابطهٔ $a^{m'} \mid b^{n'}$ را نتیجه گرفت که: $nm' \le mn'$

(اینو این‌جوری هم می‌شه گفت. درکش آسون‌تره: $(a^m \mid b^n \Rightarrow a^{m'} \mid b^{n'}$ دور × دور ≤ نزدیک × نزدیک$)$

چند ویژگی مهم دیگر از رابطهٔ عادکردن

این رابطه‌ها را خوب نگاه کنید و یاد بگیرید. چون کمی جلوتر از همهٔ آن‌ها در حل معادله‌های عادکردنی و سایر سؤال‌ها استفاده می‌کنیم.

۱ اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن‌گاه عدد a عدد c را می‌شمارد:

$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

(برای مثال: $4 \mid 8 \,,\, 8 \mid 24 \Rightarrow 4 \mid 24$)

۲ هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب آن دو عدد را نیز می‌شمارد:

$$a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid b+c \\ a \mid b-c \\ a \mid bc \end{cases}$$

(برای مثال: $\begin{matrix} 3 \mid 6 \\ 3 \mid 15 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 \mid 15+6 \Rightarrow 3 \mid 21 \\ 3 \mid 15-6 \Rightarrow 3 \mid 9 \\ 3 \mid 15\times 6 \Rightarrow 3 \mid 90 \end{cases}$)

۳ تعمیم نکتهٔ قبل: اگر عددی دو عدد را بشمارد مجموع یا تفاضل هر مضرب یکی و هر مضربی از دیگری را می‌شمارد:

$$a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid mb+nc \\ a \mid mb-nc \end{cases}$$

(برای مثال: $\begin{matrix} 5 \mid 10 \\ 5 \mid 15 \end{matrix} \xrightarrow{m=4,\,n=3} \begin{matrix} 5 \mid 4\times 10 + 3\times 15 \Rightarrow 5 \mid 85 \\ 5 \mid 4\times 10 - 3\times 15 \Rightarrow 5 \mid -5 \end{matrix}$)

۴ اگر دو رابطهٔ عادکردن مختلف داشته باشیم، می‌توانیم سمت چپ و راست دو رابطه را در هم ضرب کرد و به رابطه‌ای جدید رسید:

$$a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$$

(برای مثال: $7 \mid 35 \,,\, 2 \mid 4 \Rightarrow 7\times 2 \mid 35\times 4 \Rightarrow 14 \mid 140$)

۵ حواستان باشد طرفین رابطهٔ عادکردن را نمی‌توان با عددی جمع کرد یا از عددی کم کرد.

$a|b \Rightarrow a+c|b+c$ ✗

$a|b \Rightarrow a-c|b-c$ ✗

(برای مثال رابطهٔ $10|5$ رو در نظر بگیرید؛ اگر طرفین را با یک جمع کنیم به رابطهٔ $11|6$ می‌رسیم که نادرست است و اگر از طرفین یکی کم کنیم به رابطهٔ $9|4$ می‌رسیم که باز هم غلط است.)

تست: به ازای چند عدد صحیح مانند a، دو عدد $8m+3$ و $11m+4$ همواره بر a بخش‌پذیرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشتر از ۴

پاسخ۲: اگر دو عدد $8m+3$ و $11m+4$ بر a بخش‌پذیر باشند، یعنی: $a|8m+3 \ , \ a|11m+4$

دیدیم که سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد. به خاطر این‌که ضریب m یکسان شود، سمت راست رابطهٔ اول را در ۱۱ و سمت راست رابطهٔ دوم را در ۸ ضرب می‌کنیم، بعد سمت راست‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$a|8m+3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۱۱}} a|88m+33$

$a|11m+4 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۸}} a|88m+32$

حالا از ویژگی $\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|b-c$ استفاده می‌کنیم و سمت راست دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$\begin{matrix} a|88m+33 \\ a|88m+32 \end{matrix} \xrightarrow{-} a|1 \Rightarrow a=\pm 1$

پس به ازای ۲ عدد صحیح a، رابطه برقرار است.

نکته: در این نوع سؤال‌ها برای سرعت در کار می‌توانیم از دترمینان ماتریس ضرایب نیز استفاده کنیم. به این صورت که ضرایب را به صورت یک ماتریس 2×2 می‌نویسیم و عبارت سمت چپ دترمینان این ماتریس را می‌شمارد. برای مثال در این سؤال:

$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{دترمینان} = 8\times 4-11\times 3=-1 \Rightarrow a|-1 \Rightarrow a=\pm 1$

این مدل سؤال‌ها که برای حل‌کردنشان باید سمت راست رابطهٔ عادکردن را در عددی ضرب کنیم، سؤال‌های شایعی است و اصولاً یادتان باشد این یک روشی است که می‌توانیم متغیر را از سمت راست رابطهٔ عادکردن حذف کنیم. حالا به یک مدل دیگر از این سؤال‌ها نگاه کنید:

تست: اگر $5|4k+1$ و $3|5k-1$، کدام گزینه درست است؟

۱) $15|5k^2+k+1$ ۲) $15|5k^2-k+1$ ۳) $15|5k^2+k-1$ ۴) $15|5k^2-k-1$

پاسخ۳: می‌دانیم که اگر $a|b$ و $c|d$، آن‌گاه $ac|bd$؛ بنابراین:

$\begin{matrix} 5|4k+1 \\ 3|5k-1 \end{matrix} \Rightarrow 15|(4k+1)(5k-1) \Rightarrow 15|20k^2+k-1$

از طرفی می‌دانیم، اگر $a|b \ , \ a|c \Rightarrow a|b-c$، پس داریم:

$\begin{matrix} 15|20k^2+k-1 \\ 15|15k^2 \ \text{(بدیهی است.)} \end{matrix} \xrightarrow{-} 15|5k^2+k-1$

بنابراین ۳ درست است.

یک تیپ سؤال خاص

یک مدل سؤال‌هایی در مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی آمده است که الان می‌خواهیم روش پاسخ‌گویی به آن‌ها را با هم مرور کنیم. به سؤال زیر نگاه کنید:

اگر $7|4k+3$، ثابت کنید: $49|12k^2+25k+12$ (مشابه این سؤال در کتاب درسی آمده است.)

همان‌طور که در سؤال‌های قبل دیدید، معمولاً سمت چپ رابطه‌های عادکردن یا تغییر نمی‌کند یا کوچک‌تر می‌شود، اما در این مدل سؤال‌ها، سمت چپ رابطه بزرگ‌تر می‌شود. برای جواب‌دادن به این نوع سؤال‌ها بهتر است رابطهٔ داده‌شده را تجزیه کنیم و حواستان باشد که معمولاً یکی از عوامل تجزیه همان عبارت فرضی سؤال است.

برای مثال در این سؤال داریم: $12k^2+25k+12=(4k+3)(3k+4)$

حالا باید سعی کنیم با استفاده از فرض، آن یکی جمله را بسازیم (یعنی از $7|4k+3$ ثابت کنیم $7|3k+4$) و بعد دو جمله را در هم ضرب کنیم:

$\begin{matrix} 7|4k+3 \\ 7|3k+4 \end{matrix} \xrightarrow{\otimes} 49|12k^2+25k+12$

$\begin{matrix} 7|4k+3 \\ 7|7k+7 \end{matrix} \xrightarrow{\ominus} 7|3k+4$

به یک مثال دیگر نگاه کنید:

مثال: ثابت کنید اگر $5|4k+1$، آن‌گاه: $25|36k^2+13k+1$

پاسخ: همانند سؤال قبل سعی می‌کنیم عبارت $36k^2+13k+1$ را تجزیه کنیم. با این احتمال که یکی از عوامل تجزیه $4k+1$ است. یعنی باید بررسی کنیم با فرض $36k^2+13k+1=(4k+1)(?)$، پرانتز دیگر چیست؟ با کمی دقت می‌توان فهمید $36k^2+13k+1=(4k+1)(9k+1)$. حالا باید ثابت کنیم $5|9k+1$

یعنی از $5|4k+1$ باید ثابت کنیم $5|9k+1$. این هم کار ساده‌ای است.

$\begin{matrix} 5|4k+1 \\ 5|5k \end{matrix} \xrightarrow{\oplus} 5|9k+1$

حالا دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم و حکم ثابت می‌شود:

$\begin{matrix} 5|4k+1 \\ 5|9k+1 \end{matrix} \xrightarrow{\otimes} 25|36k^2+13k+1$

معادله‌های عادکردنی رابطهٔ $x-2 \mid 5x+1$ را در نظر بگیرید. اسم چنین رابطه‌ای را می‌توانیم بگذاریم یک معادلهٔ عادکردنی چون به جای تساوی در معادله‌های معمول رابطهٔ عادکردن داریم. راه تشریحی حل‌کردن این معادله‌ها این است که متغیر را از عبارت سمت راست حذف کنیم. روش کار هم به صورت زیر است: می‌دانیم هر عبارتی خودش را عاد می‌کند. بنابراین عبارت سمت چپ هم خودش را عاد می‌کند. در این نوع معادله‌ها همیشه اول این رابطه را می‌نویسیم و بعد سمت راست آن را در عددی مناسب (با توجه به صورت سؤال) ضرب می‌کنیم:

$$x-2 \mid x-2 \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times 5} x-2 \mid 5x-10$$

(برای این سمت راست را در ۵ ضرب کردیم که در رابطهٔ صورت سؤال ضریب x در عبارت سمت راست رابطهٔ عادکردن ۵ئه.)

$$\begin{matrix} x-2 \mid 5x-10 \\ x-2 \mid 5x+1 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} x-2 \mid 11 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \Rightarrow x=1 \\ x-2=11 \Rightarrow x=13 \\ x-2=-11 \Rightarrow x=-9 \end{cases}$$

روش تستی **اما راه تستی برای پاسخگویی سریع‌تر این سؤال‌ها این است که ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم:**

و بقیهٔ پاسخ شبیه بالاست.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow 5x+1=11 \Rightarrow x-2 \mid 11$$

تست: مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار x که در رابطهٔ $x-3 \mid 2x^3+5$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ ۱: از روش تستی استفاده می‌کنیم. ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow 2x^3+5=59 \Rightarrow x-3 \mid 59$$

چون بزرگ‌ترین مقدار x را می‌خواهیم $x-3$ را برابر ۵۹ فرض می‌کنیم:

$$x-3=59 \Rightarrow x=62 \Rightarrow \text{مجموع ارقام}=6+2=8$$

توجه کنید در بعضی از سؤال‌ها عبارت سمت چپ ریشهٔ صحیح ندارد؛ در این مدل سؤال‌ها ریشهٔ کسری را پیدا کرده، در عبارت راست قرار می‌دهیم بعد عبارت سمت راست را ساده می‌کنیم تا به یک کسر برسیم. عبارت سمت چپ صورت آن کسر را می‌شمارد.

به سؤال زیر نگاه کنید:

تست: چند نقطه روی منحنی به معادلهٔ $3xy=x^2+2y+1$ وجود دارد که هر دو مولفهٔ x و y در آن عددهایی صحیح باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ ۳: اول این رابطه را تبدیل به یک کسر می‌کنیم:

$$3xy-2y=x^2+1 \Rightarrow y(3x-2)=x^2+1 \Rightarrow y=\frac{x^2+1}{3x-2}$$

اگر قرار باشد y عدد صحیح باشد، باید مخرج کسر صورت را بشمارد. (یعنی $3x-2 \mid x^2+1$)

حالا از نکته‌ای که گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \Rightarrow x^2+1=\frac{4}{9}+1=\frac{13}{9}$$

گفتیم عبارت سمت چپ صورت این کسر را می‌شمارد. داریم:

$$3x-2 \mid 13 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2=13 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y=\frac{25+1}{15-2}=2 \\ 3x-2=-13 \quad \times \\ 3x-2=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=\frac{1+1}{3-2}=2 \\ 3x-2=-1 \quad \times \end{cases}$$

بنابراین به ازای دو مقدار صحیح رابطه برقرار است.

بعضی از معادله‌های عادکردنی هم با روش‌های معمول حل نمی‌شوند و باید از روش‌های خلاقانهٔ دیگری برای پاسخگویی به آن‌ها استفاده کرد. در برخی از این معادله‌ها رشد عبارت سمت چپ از عبارت سمت راست بیشتر است. به سؤال زیر نگاه کنید:

تست: به ازای چند عدد صحیح مانند a، رابطهٔ $3a+1 \mid a^4+1$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشتر از ۳

پاسخ ۳: می‌دانیم: $a \mid b \ ,\ b\neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$

بنابراین با توجه به این‌که $3a+1 \mid a^4+1$، باید $|a^4+1|$ کوچک‌تر یا مساوی $|3a+1|$ باشد. با توجه به این‌که رشد a^4+1، سریع‌تر از رشد $3a+1$ است؛ بنابراین: این اتفاق به ازای aهای کوچک، ممکن است برقرار باشد. حالا جستوجو می‌کنیم:

$a=0 \Rightarrow 1 \mid 1$ ✓

$a=1 \Rightarrow 2 \mid 4$ ✓

$a=2 \Rightarrow 17 \mid 7$ ×

$a=-1 \Rightarrow 2 \mid -2$ ✓

$a=-2 \Rightarrow 17 \mid -5$ ×

روشن است که به ازای $a \geq 2$ هم، عبارت سمت چپ، بزرگ‌تر از عبارت سمت راست است. اعداد منفی را نیز باید بررسی کنیم:

به ازای $a \leq -2$ هم، دیگر رابطه برقرار نیست؛ بنابراین فقط به ازای عددهای ۰، ۱ و ۱− رابطه برقرار است.

باقی‌ماندهٔ مربع عدد فرد تقسیم به ۸ فرض کنید x یک عدد فرد باشد. در این صورت می‌توان آن را به صورت $x = ۲k + ۱$ نوشت. حالا اگر مربع این عدد را به دست آوریم، داریم:

$$x^۲ = (۲k+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۴\underbrace{k(k+۱)}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد متوالی، زوج است.}} + ۱ = ۴(۲q) + ۱ = ۸q + ۱$$

نکته: مربع هر عدد فرد را به صورت $۸q+۱$ می‌توان نوشت.

مثال: اگر a عددی زوج باشد، باقی‌ماندهٔ $(a+۱)^۲ + (a+۷)^۲$ بر ۸ چند است؟

پاسخ: چون a زوج است، پس $a+۱$ و $a+۷$ هر دو عددهایی فرد و در نتیجه $(a+۱)^۲ + (a+۷)^۲$ مربع‌های عددهای فردند. بنابراین:

$$(a+۱)^۲ + (a+۷)^۲ = ۸q + ۱ + ۸q' + ۱ = ۸\underbrace{(q+q')}_{q''} + ۲$$

پس باقی‌ماندهٔ عبارت در تقسیم بر ۸ برابر ۲ است.

سه رابطهٔ مهم از بخش‌پذیری

به این سه رابطه نگاه کنید:

$a^n - b^n$ همیشه بر $a-b$ بخش‌پذیر است: $a-b \mid a^n - b^n$

$a^n + b^n$ زمانی بر $a+b$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد: $a+b \mid a^n + b^n$ n باید فرد باشد

$a^n - b^n$ زمانی بر $a+b$ بخش‌پذیر است که n زوج باشد: $a+b \mid a^n - b^n$ n باید زوج باشد

(یعنی حواستون باشه $a^n - b^n$ همیشه بر $a-b$ بخش‌پذیره اما اگر n زوج باشه بر $a+b$ هم بخش‌پذیره)

تعمیم‌یافتهٔ رابطهٔ اول هم به صورت زیر است:

وقتی $\frac{n}{m}$ عددی صحیح باشد: $a^m - b^m \mid a^n - b^n$

⚠ این رابطه‌ها را بهتر است در بخش همنهشتی می‌دیدید اما از آن‌جا که در خیلی از آزمون‌ها از این رابطه‌ها قبل از همنهشتی سؤال می‌آید، ما هم تصمیم گرفتیم این‌جا بیاوریمشان!

مثال: ثابت کنید $۲^{۵۵} + ۳^{۳۳}$ بر ۵۹ بخش‌پذیر است.

پاسخ: ببینید، در تمام رابطه‌هایی که در بالا دیدید توان‌ها یکسان است، بنابراین ما هم باید کاری کنیم که توان‌ها برابر شوند. داریم:

$$۲^{۵۵} + ۳^{۳۳} = (۲^۵)^{۱۱} + (۳^۳)^{۱۱} = ۳۲^{۱۱} + ۲۷^{۱۱}$$

خب حالا که توان‌ها یکسان شد و از طرف دیگر توان فرد است. از این نکته که اگر n فرد باشد $a^n + b^n$ بر $a+b$ بخش‌پذیر است، استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$۳۲ + ۲۷ \mid ۳۲^{۱۱} + ۲۷^{۱۱} \Rightarrow ۵۹ \mid ۳۲^{۱۱} + ۲۷^{۱۱}$$

پس $۲^{۵۵} + ۳^{۳۳}$ بر ۵۹ بخش‌پذیر است.

تست: عدد $۵^{۳۰} - ۲^{۶۰}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۱ ۳) ۶۱ ۴) ۶۳

پاسخ۲: خب دوباره توان‌ها را برابر می‌کنیم:

$$۵^{۳۰} - ۲^{۶۰} = (۵^۳)^{۱۰} - (۲^۶)^{۱۰} = ۱۲۵^{۱۰} - ۶۴^{۱۰}$$

دیدیم که اگر n زوج باشد $a^n - b^n$ هم بر $a-b$ بخش‌پذیر است هم بر $a+b$.

بنابراین $۱۲۵^{۱۰} - ۶۴^{۱۰}$ هم بر $۱۲۵ - ۶۴ = ۶۱$ بخش‌پذیر است هم بر $۱۲۵ + ۶۴ = ۱۸۹$.

حالا اگر ۱۸۹ را تجزیه کنیم داریم: $۱۸۹ = ۳^۳ \times ۷$ که بر ۲۷ و ۶۳ بخش‌پذیر است. بنابراین عدد $۵^{۳۰} - ۲^{۶۰}$ فقط بر ۳۱ بخش‌پذیر نیست.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند و می‌نویسیم $(a,b) = d$)، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) $d \mid a \,,\, d \mid b$ *(یعنی d مقسوم‌علیه هر دوتا باشه.)*

ب) $\forall m > ۰ ; m \mid a \,,\, m \mid b \Rightarrow m \le d$ *(مقسوم‌علیه‌های دیگهٔ a و b مثل m از d کوچک‌تر باشه.)*

تعریف: دو عدد a و b را نسبت به هم اول می‌گوییم، هرگاه: $(a,b) = ۱$ یا به بیان دیگر، دو عدد، عامل مشترک بزرگ‌تر از ۱ نداشته باشند.

تست: اگر d هر دو عدد ۷۲ و ۶۰ را بشمارد، .... مقدار مختلفِ طبیعی، به جای d می‌توان قرار داد که بزرگ‌ترین آن‌ها .... است.

۱) ۶ ـ ۱۲ ۲) ۶ ـ ۶ ۳) ۴ ـ ۱۲ ۴) ۴ ـ ۶

پاسخ ۱: مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی هر دو عدد را می‌نویسیم:

مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۷۲ $= \{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۹,۱۲,۱۸,۲۴,۳۶,۷۲\}$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۶۰ $= \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۱۰,۱۲,۱۵,۲۰,۳۰,۶۰\}$

بنابراین تعداد شمارنده‌های طبیعی مشترک آن‌ها برابر است با: $\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$

همان‌طور که می‌بینید، دو عدد ۷۲ و ۶۰ دارای ۶ شمارندهٔ طبیعی مشترک‌اند که بزرگ‌ترین آن‌ها عدد ۱۲ است. پس ۱ درست است.

نکته: راه بهتر برای پیداکردن ب.م.م دو یا چند عدد (به جای نوشتن همهٔ مقسوم‌علیه‌های آن)، این است که عددها را تجزیه کرده، فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم. به عنوان مثال برای تست بالا داریم:

$$\begin{cases} ۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲ \\ ۶۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵ \end{cases} \Rightarrow (۷۲,۶۰) = ۲^۲ \times ۳ = ۱۲$$

تست: حاصل عبارت $((۱۸۰,۱۲۰),(۷۲,۴۸))$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۶۰

پاسخ ۱: **روش ۱** اول عددها را تجزیه می‌کنیم، بعد با توجه به رابطهٔ ب.م.م عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر می‌گیریم:

$$(۱۸۰,۱۲۰) = (۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵, ۲^۳ \times ۳ \times ۵) = ۲^۲ \times ۳ \times ۵ = ۶۰ \quad , \quad (۷۲,۴۸) = (۲^۳ \times ۳^۲, ۲^۴ \times ۳) = ۲^۳ \times ۳ = ۲۴$$

$$\Rightarrow (۲۴,۶۰) = (۲^۳ \times ۳, ۲^۲ \times ۳ \times ۵) = ۲^۲ \times ۳ = ۱۲$$

روش ۲ چون ب.م.م همهٔ عددها خواسته شده، می‌توانستیم از همان اول همهٔ عددها را تجزیه کنیم و بین همهٔ آن‌ها فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر بگیریم:

$$۱۲۰ = ۲^۳ \times ۳ \times ۵ \qquad ۱۸۰ = ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵ \qquad ۴۸ = ۲^۴ \times ۳ \qquad ۷۲ = ۲^۳ \times ۳^۲$$

$$\xrightarrow{\text{عوامل مشترک با توان کوچک‌تر}} ۲^۲ \times ۳ = ۱۲$$

ب.م.م و تعداد شمارنده‌ها یک سری سؤال مفهومی از ب.م.م وجود دارد که به درک ما از این مفهوم کمک می‌کند. برای مثال فرض کنید n عددی طبیعی است که به ازای آن رابطهٔ $(n,۶۰) = ۶$ برقرار است. می‌خواهیم بررسی کنیم n چه جور عددی است و تعداد عامل‌های ۲، ۳، ۵، ۷ و ... در این عدد به چه صورت است.

اول عددها را تجزیه می‌کنیم، داریم: $(n, ۲^۲ \times ۳ \times ۵) = ۲ \times ۳$

شمارندهٔ ۲: n دقیقاً یک عامل ۲ دارد. می‌دانیم برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر انتخاب می‌کنیم. چون ۲ در ب.م.م وجود دارد پس n باید حتماً یک عامل ۲ داشته باشد، اما اگر n بیشتر از یک عامل ۲ داشته باشد با توجه به این‌که در تجزیهٔ عدد ۶۰ نیز دو عامل ۲ وجود دارد، بنابراین توان ۲ در ب.م.م، دو خواهد بود و چون در ب.م.م توان ۲ یک است پس n فقط یک عامل ۲ می‌تواند داشته باشد.

شمارندهٔ ۳: n دست‌کم یک عامل ۳ دارد، چون ۳ در ب.م.م آمده است. اما با توجه به این‌که در تجزیهٔ عدد ۶۰ نیز فقط یک عامل ۳ وجود دارد بنابراین n می‌تواند بیشتر از یک عامل ۳ هم داشته باشد. *(چون تو ب.م.م عوامل مشترک رو با توان کوچیک‌تر در نظر می‌گیریم.)*

شمارندهٔ ۵: n عامل یا شمارندهٔ ۵ ندارد چون ۵ در ب.م.م نیامده است.

شمارنده‌های ۷، ۱۱ و ...: چون در تجزیهٔ ۶۰، عوامل ۷، ۱۱ و ... وجود ندارد، بنابراین در مورد این‌که n چندتا شمارنده از هر کدام از این عددها دارد نیز نمی‌توانیم اظهار نظر کنیم.

مثال: اگر $(n,۴۵) = ۱۵$ باشد، حاصل $(n^۲,۶۷۵)$ چند است؟

پاسخ: اول عددها را تجزیه می‌کنیم: $(n, ۳^۲ \times ۵) = ۳ \times ۵$

n دقیقاً یک عامل ۳ دارد. *(چون اگه بیشتر داشت تو ب.م.م $۳^۲$ می‌اومد)*

همچنین n دست‌کم یک عامل ۵ دارد. *(چون اگه بیشتر هم داشت با توجه به این‌که ۴۵ فقط یک عامل ۳ داره تو ب.م.م‌شون باز هم ۵ می‌اومد.)*

بنابراین فرم کلی n به صورت $n = ۳ \times ۵^{\alpha} \times \underbrace{\cdots}_{\text{این قسمت عوامل ۳ و ۵ ندارد}}$ است که $\alpha \geq ۱$ است.

حالا حاصل $(n^۲,۶۷۵)$ را پیدا می‌کنیم: $(n^۲,۶۷۵) = (۳^۲ \times ۵^{۲\alpha} \times \cdots, ۳^۳ \times ۵^۲) = ۳^۲ \times ۵^۲ = ۲۲۵$

حالا سعی کنید به تست زیر جواب دهید.

تست: اگر $(n,۱۲) = ۶$ باشد، فرم کلی n برحسب متغیر $k \in \mathbb{Z}$، به کدام صورت است؟

۱) $۶k$ ۲) $۶k+۳$ ۳) $۱۲k$ ۴) $۱۲k+۶$

پاسخ ۴: با توجه به این‌که $(n,۲^۲ \times ۳) = ۲ \times ۳$، می‌توان فهمید که n دقیقاً یک عامل ۲ و دست‌کم یک عامل ۳ دارد. بنابراین n بر ۶ بخش‌پذیر است. اما اگر بنویسیم $n = ۶q$ و q زوج باشد، n بیشتر از یک عامل ۲ خواهد داشت. پس q حتماً باید فرد باشد. بنابراین:

$$q = ۲k+۱ \Rightarrow n = ۶(۲k+۱) = ۱۲k+۶$$

گاهی‌اوقات می‌خواهیم ب.م.م دو عبارت را پیدا کنیم. در این صورت از این ویژگی ب.م.م استفاده می‌کنیم که d یعنی ب.م.م دو عدد هر دو عدد را می‌شمارد:

$$(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$$

و سپس سعی می‌کنیم متغیر را حذف کنیم. به سؤال زیر توجه کنید:

تست: به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $n+۳$ و $۵n+۴$ برابر ۱ نیست؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ۲: می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد، $d \mid b$ و $d \mid a$.

فرض می‌کنیم $(۵n+۴,n+۳)=d$ است. داریم:

$$\begin{cases} d \mid n+۳ \xrightarrow{\times ۵} d \mid ۵n+۱۵ \\ d \mid ۵n+۴ \end{cases} \xrightarrow{(-)} d \mid ۱۱ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۱۱$$

اگر بخواهیم ب.م.م دو عدد، ۱ نباشد، باید عددها بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند.

$$n+۳=۱۱k \Rightarrow n=۱۱k-۳$$

n عددی طبیعی و دورقمی است. بنابراین:

$$۱۰ \le ۱۱k-۳ \le ۹۹ \Rightarrow ۱۳ \le ۱۱k \le ۱۰۲ \Rightarrow ۲ \le k \le ۹$$

پس به ازای $۸ = ۱ + ۲ - ۹$ عدد دورقمی، ب.م.م دو عدد برابر ۱۱ است.

نکته: یک نکتهٔ خارج از کتاب که لازم است بدانید:

برای پیداکردن تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد کافی است عدد را به عوامل اول تجزیه کرده، سپس توان‌ها را با یک جمع کرده، در هم ضرب کنیم.

(برای مثال تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۶۰۰ برابر است با:

$$(۶۰۰=۲^۳\times۳\times۵^۲ \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی} = (۳+۱)(۱+۱)(۲+۱)=۲۴$$

به طور کلی اگر $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی n برابر است با: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$

از همین نکته در کنکور ۱۴۰۰ دو سؤال آمده است.

تست: اگر $x=۲^\alpha\times۵^\beta$ و تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۵۰x برابر ۳۵ و تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی $\frac{x}{۵۰}$ برابر ۵ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح x چندتا است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۶

پاسخ۴: می‌دانیم $x=۲^\alpha\times۵^\beta$ است. در این صورت:

$$۵۰x=۲\times۵^۲\times۲^\alpha\times۵^\beta=۲^{\alpha+1}\times۵^{\beta+2} \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } ۵۰x = (\alpha+۲)(\beta+۳)=۳۵ \quad (I)$$

$$\frac{x}{۵۰}=\frac{۲^\alpha\times۵^\beta}{۲\times۵^۲}=۲^{\alpha-1}\times۵^{\beta-2} \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } \frac{x}{۵۰} = \alpha(\beta-۱)=۵ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۵,\beta-۱=۱ \checkmark \\ \alpha=۱,\beta-۱=۵ \times \end{cases}$$

(حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۵ شده پس یکی ۱ و دیگری ۵ است.)

در رابطهٔ(I) صدق نمی‌کند. بنابراین:

$$x=۲^۵\times۵^۲ \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } x = ۶\times۳=۱۸$$

و با توجه به این‌که تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح x خواسته‌شده و به ازای هر مقسوم‌علیه مثبت یک مقسوم‌علیه منفی هم داریم (قرینه‌اش) بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح x برابر است با: $۱۸\times۲=۳۶$

کوچک‌ترین مضرب مشترک عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) $a \mid c , b \mid c$ *(یعنی c مضرب هر دو عدد a و b باشه)*

ب) $\forall m>۰; a \mid m , b \mid m \Rightarrow c \le m$ *(اگر m، مضرب دیگه‌ای از a و b باشه، c از اون کوچک‌تر باشه)*

نکته: برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد هر دو عدد را تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. به عنوان مثال ک.م.م دو عدد ۳۶ و ۱۲۰ را از این روش به دست می‌آوریم: $[۳۶,۱۲۰]=[۲^۲\times۳^۲,۲^۳\times۳\times۵]=۲^۳\times۳^۲\times۵=۳۶۰$

تست: حاصل عبارت $([۷۲,۴۸],۱۲۰)$ کدام است؟ *(برگرفته از کتاب درسی)*

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۶۰

پاسخ۲: برای به دست آوردن $[۷۲,۴۸]$ عددها را تجزیه می‌کنیم و عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم:

$$[۷۲,۴۸]=[۲^۳\times۳^۲,۲^۴\times۳]=۲^۴\times۳^۲=۱۴۴$$

حالا ب.م.م دو عدد ۱۲۰ و ۱۴۴ را به دست می‌آوریم:

$$(۱۴۴,۱۲۰)=(۲^۴\times۳^۲,۲^۳\times۳\times۵)=۲^۳\times۳=۲۴$$

(دقت کنید برای به دست آوردن ب.م.م فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر می‌گیریم.)

تست: به ازای چند عدد طبیعی مانند x رابطهٔ $[x,۶]=۱۲$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشتر از ۴

پاسخ۲: اگر عددها را تجزیه کنیم، داریم: $[x,۲\times۳]=۲^۲\times۳$

خب گفتیم برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد باید چه‌کار کنیم؟ عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب کنیم. حالا این رابطه را دوباره نگاه کنید:

$[x,۲\times۳]=۲^۲\times۳$

اول بررسی می‌کنیم x چندتا عامل ۲ دارد. اگر x عامل ۲ نداشت یا فقط یک عامل ۲ داشت، با توجه به این‌که در ک.م.م عوامل مشترک با توان بزرگ‌تر می‌آید و چون در تجزیهٔ عدد ۶ هم فقط یک عامل ۲ وجود دارد آن وقت تعداد عوامل ۲ در ک.م.م دو عدد هم یکی می‌شد. *(برای مثال فکر کنید $x=۲$ باشه، اون‌وقت ک.م.م این‌جوری می‌شد: $[۲,۶]=[۲,۲\times۳]=۲\times۳$)*

بنابراین چون الان در ک.م.م توان ۲ برابر ۲ است، پس x باید حتماً دو عامل ۲ داشته باشد.

در مورد تعداد عوامل ۳ در تجزیهٔ x هم دقت کنید چون در ک.م.م فقط یک عامل ۳ هست. پس x یا عامل ۳ ندارد یا فقط یک عامل ۳ دارد. *(چون اگر بیشتر داشت اون‌وقت توک.م.م هم تعداد ۳ها بیشتر می‌شد!)* همچنین در تجزیهٔ x هیچ عامل دیگری به‌جز ۲ و ۳ وجود ندارد. *(چون اگر داشت توک.م.م‌شون هم می‌اومد.)* بنابراین x دو حالت دارد:

$x=۲^۲=۴$ و $x=۲^۲\times۳=۱۲$

ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م

این چند ویژگی را حتماً یادتان باشد:

۱) اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $a\,|\,b$، ب.م.م آن‌ها برابر $|a|$ *(کوچیکه)* و ک.م.م‌شون برابر $|b|$ *(بزرگه)* می‌شود.

$$a\,|\,b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a|\\ [a,b]=|b|\end{cases}$$

۲) علامت در ب.م.م و ک.م.م تأثیری ندارد. مثلاً $۲=(۲,۶)=(-۲,۶)$ می‌شود یا $۳۰=[۱۰,۱۵]=[-۱۰,-۱۵]$، پس اگر عددی منفی بود، اصلاً منفی را حذف کنید و بعد ب.م.م و ک.م.م را محاسبه کنید.

۳) از عامل مشترک دو عدد، می‌توانیم فاکتور بگیریم، یعنی $(ka,kb)=|k|(a,b)$؛ مثلاً $(۱۲,۱۸)=۶(۲,۳)=۶\times۱=۶$ یا $[۱۲,۱۸]=۶\times[۲,۳]=۶\times۶=۳۶$.

۴) اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند (یعنی $(a,b)=۱$)، ک.م.م برابر ضرب آن‌ها می‌شود، یعنی $[a,b]=|ab|$. مثلاً $[۲,۳]=۶$ یا $[۳,۷]=۲۱$ یا ...

۵) اگر p عددی اول باشد و $p\nmid a$ آن‌گاه $(p,a)=۱$.

۶) حاصل‌ضرب ب.م.م و ک.م.م دو عدد با قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد برابر است: $(a,b)[a,b]=|ab|$

۷) اگر هر مضربی از یکی از اعداد را به دیگری اضافه یا از آن کم کنیم، ب.م.م تغییری نمی‌کند: $(a,b)=d \Rightarrow (a,b\pm ka)=d$

تست: حاصل $([۴a^۲,۸a^۳],(۲a,۲۴a^۲))$ کدام است؟

۱) $۸|a^۳|$ ۲) $۲a$ ۳) $۲|a|$ ۴) $۴a^۲$

پاسخ۳: با توجه به ویژگی‌های گفته‌شده داریم:

$۴a^۲\,|\,۸a^۳ \Rightarrow [۴a^۲,۸a^۳]=|۸a^۳|=۸|a^۳|$

$۲a\,|\,۲۴a^۲ \Rightarrow (۲a,۲۴a^۲)=|۲a|=۲|a|$

$۲|a|\,|\,۸|a^۳| \Rightarrow (۲|a|,۸|a^۳|)=۲|a|$

تست: کدام گزینه نادرست است؟

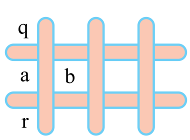
۱) $(n,n+۱)=۱$ ۲) $[n,n+۱]=n^۲+n$ ۳) $(۲n+۱,۲n+۳)=۲$ ۴) $(۲n,۲n+۲)=۲$

پاسخ۳: ۱ می‌گوید که دو عدد متوالی نسبت به هم اول‌اند، این همیشه درست است. زیرا اگر $(n,n+۱)=d$ بگیریم، نتیجه می‌شود: $d\,|\,n$ و $d\,|\,n+۱$ و حالا اگر سمت راستشان را از هم کم کنیم $d\,|\,۱$ و $d=۱$ نتیجه می‌شود. حالا با توجه به ویژگی ۴ که گفتیم، ۲ هم درست می‌شود. اما ۳ را $(۲n+۱, ۲n+۳)=d$ می‌گیریم، پس $d\,|\,۲n+۳$ و $d\,|\,۲n+۱$، با کم‌کردن سمت راست عبارت‌ها از هم داریم $d\,|\,۲$ و در نتیجه $d=۲$ یا $d=۱$ می‌تواند باشد، اما $۲n+۱$ و $۲n+۳$ هر دو عدد فرد هستند، پس $d=۲$ نمی‌تواند باشد، یعنی $d=۱$ باید باشد. پس فهمیدیم که ب.م.م دو عدد فرد متوالی هم همیشه برابر ۱ می‌شود. اگر همین‌جوری ۴ را هم برویم $d=۱$ یا $d=۲$ نتیجه می‌شود، ولی چون هر دو عدد زوج هستند، پس هر دو به ۲ بخش‌پذیرند؛ این یعنی ب.م.م دو عدد زوج متوالی همیشه برابر ۲ می‌شود.

روش نردبانی

ویژگی شمارهٔ ۷ را دیدید. از این نکته می‌توان برای پیداکردن ب.م.م دو عدد استفاده کرد. ببینید! گاهی وقت‌ها که می‌خواهیم ب.م.م دو عدد را پیدا کنیم عددها خوب تجزیه نمی‌شوند و پیداکردن ب.م.م از راه تجزیه سخت است. در این‌جور مواقع می‌توانیم از یک روش دیگری استفاده کنیم که به آن می‌گوییم روش نردبانی.

(این روش توی کتاب نیست ولی دونستنش خیلی به درد بخور و کمک‌کننده است.)



در این روش یک جدول سه‌سطری می‌کشیم. (مثل یک نردبانی که روی زمین افتاده)

سطر اول مربوط به خارج قسمت‌ها، سطر وسط مربوط به عددها و سطر پایین مربوط به باقی‌مانده‌هاست:

عددها را به هم تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت را در بالا و باقی‌مانده را در پایین می‌نویسیم. اگر باقی‌مانده صفر شد آخرین عددی که نوشتیم ب.م.م است. اما اگر باقی‌مانده صفر نشد، باقی‌مانده را می‌بریم در ردیف وسط و الگوریتم را آن‌قدر تکرار می‌کنیم که باقی‌مانده صفر شود.

برای بهتر فهمیدن این روش، مثال زیر را ببینید:

مثال: بزرگ‌ترین عامل مشترک دو عدد ۳۴۱ و ۴۰۳ را به دست آورید.

پاسخ: *(این سؤال خیلی شبیه یکی از سؤال‌های کنکور سراسریه!)*

q	۱	۵	۲
۴۰۳	۳۴۱	۶۲	ب.م.م
r	۶۲	۳۱	۰

گام اول: دو عدد را به هم تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت را در جدول می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r|l} ۴۰۳ & ۳۴۱ \\ ۳۴۱ & ۱ \\ \hline ۶۲ & \end{array}$$

گام دوم: چون باقی‌مانده صفر نشده آن را در جدول اعداد قرار می‌دهیم. (سطر دوم)

گام سوم: حالا ۳۴۱ را بر ۶۲ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده و خارج قسمت را پیدا کرده، در جدول قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{r|l} ۳۴۱ & ۶۲ \\ ۳۱۰ & ۵ \\ \hline ۳۱ & \end{array}$$

گام چهارم: چون باقی‌مانده صفر نشد ۳۱ را به سطر دوم می‌بریم.

گام پنجم: ۶۲ را بر ۳۱ تقسیم می‌کنیم. باقی‌مانده صفر می‌شود. پس عدد آخر یعنی ۳۱ ب.م.م دو عدد است.

اعداد اول عدد طبیعی بزرگ‌تر از یکِ p را عددی اول می‌گویند هرگاه بر هیچ عدد طبیعی دیگری به‌جز خودش و ۱ بخش‌پذیر نباشد. برای مثال ۱۳ یک عدد اول است چون در اعداد طبیعی فقط بر خودش و ۱۳ بخش‌پذیر است اما ۹ یک عدد اول نیست چون به‌جز خودش و ۱ بر ۳ نیز بخش‌پذیر است.

نکته: هرگاه حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی a و b برابر یک عدد اول مانند p شود، یکی از آن‌ها ۱ و دیگری p است:

$$ab=p \Rightarrow \begin{cases} a=۱, b=p \\ a=p, b=۱ \end{cases}$$

تست: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a^{۲}=b^{۲}+۱۷$ در این صورت $۲a+b$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

پاسخ ۲: از نکته‌ای که در بالا گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$a^{۲}=b^{۲}+۱۷ \Rightarrow a^{۲}-b^{۲}=۱۷ \Rightarrow \underbrace{(a-b)(a+b)=۱۷}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد برابر عددی اول شده است.}} \Rightarrow \begin{cases} a-b=۱ \\ a+b=۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۹ \\ b=۸ \end{cases} \Rightarrow ۲a+b=۲۶$$

نکته: دربارهٔ اعداد اول و اول‌بودن دو عدد نسبت به هم، موارد زیر را بلد باشید:

۱ اگر p عددی اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$ آن‌گاه $(p,a)=۱$.

(یعنی مثلاً وقتی ۲۰ ∤ ۳، می‌شه نتیجه گرفت: ۱ = (۳ ,۲۰))

۲ هیچ عدد اولی بزرگ‌تر از $n!+۱$ و کوچک‌تر مساوی $n!+n$ وجود ندارد.

(برای مثال هیچ‌کدوم از عددهای بزرگ‌تر از ۱ + !۱۰۰ و کوچک‌تر مساوی ۱۰۰ + !۱۰۰ اول نیستن مثلاً عدد ۴۳ + !۱۰۰ را در نظر بگیرین. این عدد بر ۴۳ بخش‌پذیره، چون که تو تجزیه !۱۰۰ عامل ۴۳ وجود داره:

$$۱۰۰!+۴۳=\underbrace{۱۰۰\times۹۹\times\cdots\times۴۳\times\cdots\times۱}_{\text{از ۴۳ می‌توان فاکتور گرفت.}}+۴۳)$$

۳ هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد. یعنی آن را می‌توان به صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ نوشت.

(چون ۶k، ۶k + ۲ و ۶k + ۴ زوجه و نمی‌تونه اول باشه. ۶k + ۳ هم مضرب ۳ئه و نمی‌تونه اول باشه. پس فقط ۶k + ۱ و ۶k + ۵ می‌مونه که ممکنه اول باشه.)

۴ مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۲۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. یعنی آن را می‌توان به صورت $p^{۲}=۲۴k+۱$ نوشت.

(این نکته خارج از کتابه ولی دونستنش ضرر نداره.)

۵ دوتا عدد پشت سر هم نسبت به هم اول‌اند.

اثباتش خیلی ساده است:

$$(n,n+۱)=d \Rightarrow \begin{array}{l} d\mid n \\ d\mid n+۱ \end{array} \xrightarrow{\ominus} d\mid ۱ \Rightarrow d=۱$$

۶ دو عدد فرد پشت سر هم، نسبت به هم اول‌اند.

اینم اثباتش ساده است:

$$(۲n+۱,۲n+۳)=d \Rightarrow \begin{array}{l} d\mid ۲n+۳ \\ d\mid ۲n+۱ \end{array} \xrightarrow{\ominus} d\mid ۲ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } d=۲$$

اما چون عددها فردن نمی‌تونن بر ۲ بخش‌پذیر باشن.)

۷ اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند: $(p,q)=۱$.

(این هم اثباتش آسونه و چون تمرین کتابه خوبه اثباتش رو ببینید. فرض کنید ب.م.م‌شون d باشه.)

$$(p,q)=d \Rightarrow \begin{cases} d\mid p \Rightarrow d=۱ \text{ یا } p \\ d\mid q \Rightarrow d=۱ \text{ یا } q \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} d=۱$$

تنها عددی که تو هر دو رابطه صدق می‌کنه عدد ۱ هستش.)

مثال: اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چند مقدار n ممکن است عددی اول باشد:

الف) $3n^2+5n+2$ ب) n^6+8

پاسخ: الف یکی از راه‌های پاسخ‌دادن به این نوع سؤال‌ها تفکیک روی فرد و زوج بودن عدد است. برای مثال:

اگر n زوج‌باشد $\Rightarrow \begin{cases} 3n^2 & \text{زوج} \\ 5n & \text{زوج} \\ 2 & \text{زوج} \end{cases} \Rightarrow 3n^2+5n+2=$ زوج + زوج + زوج = زوج

اگر n فرد باشد $\Rightarrow \begin{cases} 3n^2 & \text{فرد} \\ 5n & \text{فرد} \\ 2 & \text{زوج} \end{cases} \Rightarrow$ زوج = زوج + فرد + فرد

یعنی حاصل این عبارت هیچ‌وقت اول نمی‌شود.

ب وقتی یک عبارت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب چند عبارت غیر از یک تجزیه کرد آن عبارت دیگر نمی‌تواند اول باشد:

$n^6+8 \Rightarrow (n^2)^3+2^3=(n^2+2)(n^4-2n^2+4)$

(ضرب دو عبارت بزرگ‌تر از یکه پس اول نمی‌شه هیچ‌وقت.)

تست: اگر p عددی اول باشد، به ازای چند مقدار p عبارت p^2+8 عددی اول است؟

۱) هیچ مقدار ۲) یک مقدار ۳) دو مقدار ۴) بیشتر از دو مقدار

پاسخ ۲: گفتیم که مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $24k+1$ نوشت.

داریم:

$p=2 \Rightarrow p^2+8=12$ اول نیست.

$p=3 \Rightarrow p^2+8=17$ اول است.

$p>3 \Rightarrow p^2+8=24k+1+8=24k+9=3(8k+3)$ مضرب ۳ است پس اول نیست.

متباین‌سازی

⚠ مباحث مربوط به متباین‌سازی در کتاب درسی نیامده است اما از آن‌جا که از این مبحث در کنکور سراسری سال ۹۹ دو سؤال آمده، بنابراین پیشنهاد می‌کنیم آن را یاد بگیرید.

می‌دانیم اگر دو عدد داشته باشیم و آن‌ها را بر ب.م.م‌شان تقسیم کنیم حاصل‌های به دست آمده نسبت به هم اول می‌شوند.

(برای مثال: $(\frac{18}{6},\frac{12}{6})=(3,2)=1 \Leftarrow (18,12)=6$)

حاصل تقسیم عددهای a و b بر ب.م.م‌شان یعنی d را a' و b' می‌نامیم. داریم:

$(a,b)=d \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1, \frac{a}{d}=a', \frac{b}{d}=b'$

نکته: این سه رابطه را خوب یادتان بماند:

۱ $a=a'd$ ۲ $b=b'd$ ۳ $(a',b')=1$

اما این رابطه‌ها به چه دردی می‌خورند؟ در بعضی سؤال‌ها یک رابطه‌هایی براساس ب.م.م دو عدد، ک.م.م دو عدد، ضرب دو عدد، جمع دو عدد و … داده می‌شود و اطلاعاتی در مورد عددها خواسته می‌شود. کاری که ما در این سؤال‌ها انجام می‌دهیم این است که همهٔ رابطه‌ها را برحسب a'، b' و d می‌نویسیم و معمولاً با استفاده از این‌که $(a',b')=1$ است، سؤال حل می‌شود.

نکته: خوب است بدانید:

۱ $(a,b)=d$ ۲ $a+b=a'd+b'd=d(a'+b')$

۳ $ab=(a'd)(b'd)=a'b'd^2$ ۴ $[a,b]=[a'd,b'd]=d[a',b']=a'b'd$

برای درک بهتر این نکات و آشنایی با این سؤال‌ها به دو سؤال زیر دقت کنید!

تست: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=7$ و $[a,b]=315$ باشد، $a+b$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۲: همان‌طور که گفتیم دو رابطه را برحسب a'، b' و d می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)=7 \Rightarrow d=7 \\ [a,b]=315 \Rightarrow a'b'd=315\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با جای‌گذاری}} a'b'=45$$

حالا حالت‌هایی که ضرب $a'b'$ برابر ۴۵ می‌شود پیدا می‌کنیم. دقت کنید که a' و b' نسبت به هم اول‌اند.

a'	۱	۳	۵
b'	۴۵	۱۵	۹
	✓	غ‌ق‌ق	✓

چون $(۳,۱۵) = ۳$، پس حالت دوم قابل قبول نیست. بنابراین a' و b' دو حالت دارند، پس دو مقدار برای $a+b$ وجود دارد:

$$\begin{cases} a' = ۱ \\ b' = ۴۵ \end{cases} \Rightarrow a+b = d(a'+b') = ۷\times ۴۶ = ۳۲۲$$

پس $a+b$ می‌تواند دو مقدار مختلف داشته باشد.

$$\begin{cases} a' = ۵ \\ b' = ۹ \end{cases} \Rightarrow a+b = d(a'+b') = ۷\times ۱۴ = ۹۸$$

تست: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b) = ۱۳$ و $a+b = ۱۳۰$ باشد، حداکثر مقدار ab کدام است؟

۱) ۱۵۲۱ ۲) ۳۵۴۹ ۳) ۲۷۰۴ ۴) ۴۲۲۵

پاسخ۲: دو رابطه را برحسب a'، b' و d می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) = ۱۳ \Rightarrow d = ۱۳ \\ a+b = ۱۳۰ \Rightarrow d(a'+b') = ۱۳۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با جای‌گذاری}} a'+b' = ۱۰$$

حالت‌هایی که مجموع دو عدد برابر ۱۰ می‌شود را می‌نویسیم و فقط حالت‌هایی را قبول می‌کنیم که $(a',b') = ۱$ باشد:

$a'+b' = ۱۰$

۱	۹	✓	
۲	۸	✗	غیر قابل قبول $(a',b') = ۲$
۳	۷	✓	
۴	۶	✗	غیر قابل قبول $(a',b') = ۲$
۵	۵	✗	غیر قابل قبول $(a',b') = ۵$

حالا می‌خواهیم ab ماکزیمم شود. می‌دانیم:

$$ab = a'b'd^۲ = ۱۶۹a'b'$$

سپس باید حالتی را در نظر بگیریم که $a'b'$ حداکثر شود:

$$\begin{cases} a' = ۱ \\ b' = ۹ \end{cases} \Rightarrow ab = ۹\times ۱۶۹ = ۱۵۲۱$$

$$\begin{cases} a' = ۳ \\ b' = ۷ \end{cases} \Rightarrow ab = ۲۱\times ۱۶۹ = ۳۵۴۹ \checkmark$$

قضیهٔ تقسیم و کاربردها

از سال‌های گذشته یادتان هست که در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، رابطهٔ مقابل برقرار است:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline & q \\ r & \end{array} \quad a = bq+r \quad , \quad ۰ \le r < b$$

که در آن به a مقسوم، به b مقسوم‌علیه، به q خارج قسمت و به r باقی‌مانده می‌گویند. یعنی در تقسیم a بر b، اعداد منحصربه‌فرد q و r وجود دارند که $a = bq+r$ می‌شود. به شرط باقی‌مانده (یعنی $۰ \le r < b$) هم حتماً توجه کنید، در برخی از تست‌ها به آن نیاز پیدا خواهید کرد.

تست: در تقسیم عددی بر ۱۹، باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد. اگر این عدد دورقمی باشد، حداکثر مقدار آن برابر چند است؟

۱) ۹۷ ۲) ۹۸ ۳) ۹۵ ۴) ۹۴

پاسخ۴: عدد را a می‌نامیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & ۱۹ \\ \hline & q \\ r & \end{array} \Rightarrow a = ۱۹q+r, ۰ \le r < ۱۹$$

با توجه به این‌که باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را دارد، $r = ۱۸$ است. یعنی:

$$a = ۱۹q+۱۸$$

حالا می‌خواهیم a بزرگ‌ترین عدد دورقمی باشد، بنابراین:

$$a = ۱۹q+۱۸ < ۱۰۰ \Rightarrow ۱۹q < ۸۲ \Rightarrow q < ۴/۳$$

$$\Rightarrow q_{max} = ۴ \Rightarrow a = ۴\times ۱۹+۱۸ = ۹۴$$

تست: اگر باقی‌ماندهٔ دو عدد a و b بر ۱۱ به ترتیب برابر ۷ و ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ $۲a-۳b$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ۳:

$$\begin{array}{l|l} a & ۱۱ \\ \hline & q \\ ۷ & \end{array} \Rightarrow a = ۱۱q+۷ \xrightarrow{\times ۲} ۲a = ۲۲q+۱۴$$

$$\begin{array}{l|l} b & ۱۱ \\ \hline & q' \\ ۳ & \end{array} \Rightarrow b = ۱۱q'+۳ \xrightarrow{\times ۳} ۳b = ۳۳q'+۹$$

$$\xrightarrow{(-)} ۲a-۳b = ۲۲q-۳۳q'+۵ = ۱۱(\underbrace{۲q-۳q'}_{q''})+۵$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a-۳b$ بر ۱۱ برابر ۵ است.

حواستون باشه در خیلی از این مدل سؤال‌ها می‌شود یک‌راست باقی‌مانده را جایگزین کرد و پاسخ را به دست آورد:

برای مثال در سؤال قبل:

$$\begin{cases} a = ۷ \\ b = ۳ \end{cases} \Rightarrow ۲a - ۳b = ۱۴ - ۹ = ۵$$

(فقط دقت کنید، که این کار رو وقتی مجازید انجام بدید که باقی‌مانده را به همون عدد بخواد. مثل همین سؤال که باقی‌ماندهٔ a و b رو به ۱۱ داده و باقی‌ماندهٔ $۲a - ۳b$ رو هم بر همون ۱۱ می‌خواد.)

تست: اگر باقی‌ماندهٔ a و b بر ۱۹ به ترتیب برابر ۲ و ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ $a^۲ + ۳ab + ۵$ بر ۱۹ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱۸

پاسخ ۱: از نکته‌ای که گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = ۲ \\ b = ۵ \end{cases} \Rightarrow a^۲ + ۳ab + ۵ = ۴ + ۳۰ + ۵ = ۳۹$$

و باقی‌ماندهٔ ۳۹ بر ۱۹ برابر ۱ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد منفی بر یک عدد طبیعی

برای پیداکردن باقی‌مانده در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b وقتی a منفی باشد، دو کار می‌توان کرد.

۱ اول خارج قسمت را از فرمول $q = [\frac{a}{b}]$ به دست می‌آوریم سپس r را از رابطهٔ $r = a - bq$ پیدا می‌کنیم.

۲ باقی‌ماندهٔ $|a|$ را بر b به دست می‌آوریم و آن را r' می‌نامیم؛ باقی‌ماندهٔ a بر b برابر است با: $r = b - r'$

برای مثال باقی‌ماندهٔ ۲۳− بر ۷ را از دو روش پیدا می‌کنیم:

۱ $q = \left[\frac{-۲۳}{۷}\right] = -۴ \Rightarrow r = -۲۳ - (۷)(-۴) = ۵$

۲ $\begin{array}{r|l} ۲۳ & ۷ \\ \hline ۲۱ & ۳ \\ \hline ۲ & \end{array} \Rightarrow r' = ۲ \Rightarrow r = ۷ - ۲ = ۵$

حواستون باشه که این فرمولِ $q = \left[\frac{a}{b}\right]$ برای پیداکردن خارج قسمت تقسیم a بر b در کل خیلی چیز به درد بخوری است و در خیلی از سؤال‌ها می‌شود از آن استفاده کرد.

مثال: اگر $a = ۱۲k + ۷$ باشد، خارج قسمت $۵a + ۱۳$ بر ۱۵ را برحسب k به دست آورید:

پاسخ:

$$a = ۱۲k + ۷ \Rightarrow ۵a = ۶۰k + ۳۵ \Rightarrow ۵a + ۱۳ = ۶۰k + ۴۸$$

حالا خارج قسمت این عبارت را بر ۱۵ به دست می‌آوریم:

$$q = \left[\frac{۵a + ۱۳}{۱۵}\right] = \left[\frac{۶۰k + ۴۸}{۱۵}\right] = [۴k + ۳/۲] = ۴k + ۳$$

تست: اگر باقی‌مانده و خارج قسمت a بر ۱۴ به ترتیب برابر ۵ و q باشد، باقی‌ماندهٔ $۳a - ۴۹$ بر ۲۱ برابر .... و خارج قسمت آن برحسب q برابر است با ....

۱) $۲q - ۱$ ،۱۳ ۲) $۲q - ۱$ ،۸ ۳) $۲q - ۲$ ،۱۳ ۴) $۲q - ۲$ ،۸

پاسخ ۴: با توجه به رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$\begin{array}{r|l} a & ۱۴ \\ \hline & q \\ \hline ۵ & \end{array} \Rightarrow a = ۱۴q + ۵ \Rightarrow ۳a = ۴۲q + ۱۵ \Rightarrow ۳a - ۴۹ = ۴۲q - ۳۴$$

گفتیم برای پیداکردن خارج قسمت از رابطهٔ $q = \left[\frac{a}{b}\right]$ استفاده می‌کنیم:

$$q = \left[\frac{۴۲q - ۳۴}{۲۱}\right] = [۲q - ۱/۶] = ۲q - ۲$$

برای پیداکردن باقی‌مانده نیز باید باقی‌ماندهٔ $۴۲q - ۳۴$ را بر ۲۱ پیدا کنیم؛ $۴۲q$ که بر ۲۱ بخش‌پذیر است. کافی است باقی‌ماندهٔ ۳۴− را بر ۲۱ تقسیم کنیم، با توجه به چیزی که گفتیم اول باقی‌ماندهٔ ۳۴ را بر ۲۱ به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l} ۳۴ & ۲۱ \\ \hline ۲۱ & ۱ \\ \hline ۱۳ & \end{array} \Rightarrow r' = ۱۳ \Rightarrow r = ۲۱ - ۱۳ = ۸$$

تست: اگر $a = ۱۲q + ۵$ باشد، خارج قسمت تقسیم $۸a - ۷۳$ بر ۱۶ کدام است؟

۱) $۸q - ۲$ ۲) $۸q - ۳$ ۳) $۶q - ۲$ ۴) $۶q - ۳$

پاسخ ۴:

$$a = ۱۲q + ۵ \Rightarrow ۸a = ۹۶q + ۴۰ \Rightarrow ۸a - ۷۳ = ۹۶q - ۳۳$$

می‌خواهیم خارج قسمت $۹۶q - ۳۳$ را بر ۱۶ به دست آوریم. می‌دانیم در تقسیم عدد A بر ۱۶ اگر $A = ۱۶q + r$ و $۰ \leq r < ۱۶$ باشد، به q خارج قسمت می‌گوییم.

پس باید $۹۶q - ۳۳$ را به صورت مجموع یک مضرب ۱۶ و یک عدد بین صفر تا ۱۵ بنویسیم. داریم:

$$۸a - ۷۳ = ۹۶q - ۳۳ = ۹۶q - ۴۸ + ۱۵ = ۱۶(۶q - ۳) + ۱۵$$

بنابراین خارج قسمت این تقسیم برابر است با: $6q-3$

البته یک جور دیگر نیز می‌شود به سؤال پاسخ داد. اول به نکتهٔ زیر توجه کنید:

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت برابر است با: $q=[\frac{a}{b}]$

بنابراین در تقسیم $96q-33$ بر ۱۶، خارج قسمت برابر است با: $[\frac{96q-33}{16}]=[6q-2/06]=[6q]+[-2/06]=6q-3$

حواستون باشه در رابطهٔ تقسیم یعنی $a=bq+r$ شرط باقی‌مانده یعنی $0\le r<b$ بسیار شرط مهمی است و سؤال‌های زیادی با استفاده از همین شرط جواب داده می‌شوند.

تست: چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۳۰۰ وجود دارد که در تقسیم به ۳۶ باقی‌ماندهٔ آن دوسوم خارج قسمتش باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ ۱: عدد را a می‌نامیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & 36 \\ \hline \frac{2}{3}q & q \end{array} \Rightarrow a=36q+\frac{2}{3}q, 0\le\frac{2}{3}q<36$$

دقت کنید که q حتماً باید مضرب ۳ باشد وگرنه باقی‌مانده کسری می‌شود که امکان‌پذیر نیست. با توجه به شرط سؤال، حدود q را پیدا می‌کنیم:

$$0\le\frac{2}{3}q<36 \Rightarrow 0\le q<54 \quad (I)$$

از طرفی a باید یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، بنابراین: $36q+\frac{2}{3}q>300 \Rightarrow \frac{110q}{3}>300 \Rightarrow q>8/1 \quad (II)$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) داریم: $9\le q<54$ و چون q مضرب ۳ است، می‌توان نوشت: $9\le q<54 \Rightarrow 9\le 3k<54 \Rightarrow 3\le k<18$

پس به ازای $k\in\{3,4,\dots,17\}$ رابطه برقرار است. تعداد اعضای این مجموعه برابر است با: $17-3+1=15$

نکته: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر n بخش‌پذیر باشند، باقی‌مانده نیز همواره مضرب n است.

تست: اگر a در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشد، باقی‌ماندهٔ $a+1$ در تقسیم بر ۱۵ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۵

پاسخ ۳: a در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد، بنابراین $a=6k+2$؛ حالا باید باقی‌ماندهٔ $a+1$ را بر ۱۵ به دست آوریم:

$$a+1=6k+3 \Rightarrow \begin{array}{l|l} 6k+3 & 15 \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow 6k+3=15q+r$$

با توجه به این‌که $6k+3$ و ۱۵ هر دو مضرب ۳ هستند پس r نیز باید مضرب ۳ باشد، یعنی $r=3r'$. از طرفی چون $0\le r<b$ است، پس:

$$0\le 3r'<15 \Rightarrow 0\le r'<5 \Rightarrow r'=0,1,2,3,4$$

پس باقی‌مانده ۵ حالت می‌تواند داشته باشد.

یک مدل از سؤال‌های الگوریتم تقسیم وجود دارد که نمونه‌اش در تمرین‌های کتاب درسی نیز آمده است و به این صورت است که باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد را بر دو عدد مختلف به شما می‌دهند و باقی‌ماندهٔ آن را بر عدد دیگری *(که معمولاً حاصل‌ضرب اون دوتا عدده)* می‌خواهد. به یک نمونه از این سؤال‌ها توجه کنید.

تست: اگر باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به عددهای ۸ و ۹ به ترتیب برابر ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۷۲ کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۱ ۳) ۶۹ ۴) ۷۱

پاسخ ۲: با توجه به فرمول قضیهٔ تقسیم، داریم:

$$\begin{cases} a=8q+5 \xrightarrow{\times 9} 9a=72q+45 \\ a=9q'+7 \xrightarrow{\times 8} 8a=72q'+56 \end{cases}$$

اگر این دوتا را از هم کم کنیم $a=72q''-11$ به دست می‌آید. باقی‌مانده، ۱۱- نمی‌تواند باشد، چون باقی‌مانده منفی نیست، پس باید یک دستهٔ ۷۲تایی باز کنیم تا باقی‌مانده مثبت بشود، پس باقی‌مانده برابر $-11+72=61$ می‌شود. در واقع انگار این کار را کردیم:

$$a=72q''-72+72-11=72(q''-1)+72-11=72(q''-1)+61$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک تقسیم می‌دانیم در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده ممکن است ۱ یا صفر بشود، پس عددها یا فردند و یا زوج؛ از این‌جا مجموعه عددهای صحیح را می‌توانیم به دو دسته افراز کنیم؛ عددهای فرد که آن را به صورت $2k+1$ نشان می‌دهیم و عددهای زوج که آن را با $2k$ نمایش می‌دهیم.

$\mathbb{Z}$	
$2k+1$	$2k$

به همین ترتیب در تقسیم به ۳، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به سه دسته افراز می‌شود:

۱ $3k$: عددهای مضرب ۳

۲ $3k+1$: عددهایی که در تقسیم به ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند.

۳ $3k+2$: عددهایی که در تقسیم به ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.

$\mathbb{Z}$		
$3k+2$	$3k+1$	$3k$

بنابراین به راحتی می‌شود فهمید از هر سه عدد متوالی حتماً یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، یکی بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد و یکی بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲. (*مثلاً ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ رو در نظر بگیرین: ۲۰ بر ۳ باقی‌مانده‌اش ۲ می‌شه، ۲۱ به ۳ بخش‌پذیره و ۲۲ به ۳ باقی‌مانده‌اش ۱ می‌شه*)

و به همین ترتیب در تقسیم به m، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به m دسته افراز می‌شود.

$mk+(m-1)$	...	$mk+2$	$mk+1$	mk
عددهایی که در تقسیم به m، باقی‌مانده‌ای برابر $m-1$ دارند.	...	عددهایی که در تقسیم به m، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.	عددهایی که در تقسیم به m، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند.	عددهای مضرب m

تست: اگر P یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد که در تقسیم به ۶، باقی‌مانده‌اش برابر ۱ نباشد، باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۶ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ۴: می‌دانیم در تقسیم به ۶، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۶ مجموعه می‌توانیم افراز کنیم. پس:

$6k+1$

$6k$ ⟵ مضرب ۶ است ⟵ اول نیست

$6k+3$ ⟵ مضرب ۳ است ⟵ اول نیست

$6k+2$ ⟵ زوج است ⟵ اول نیست

$6k+5$

$6k+4$ ⟵ زوج است ⟵ اول نیست

همان‌طور که دیدید، تنها عددهایی به فرم $6k+1$ و $6k+5$ می‌توانند اول باشند که با توجه به این‌که سؤال گفته‌شده، باقی‌ماندهٔ عدد در تقسیم به ۶، برابر ۱ نیست، بنابراین باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۶، برابر ۵ به دست می‌آید.

البته در قسمت درس‌نامهٔ اعداد اول این نکته را بیان کرده بودیم که هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد.

تست: اگر عدد صحیحی نه زوج باشد و نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۱۲ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ۴: می‌دانیم در تقسیم به ۱۲ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۱۲ مجموعهٔ زیر افراز می‌شود. بررسی می‌کنیم چندتای آن‌ها نه زوجاند و نه مضرب ۳.

مضرب ۳	$12k+9$	زوج	$12k+6$	مضرب ۳	$12k+3$	زوج	$12k$
زوج	$12k+10$	✓	$12k+7$	زوج	$12k+4$	✓	$12k+1$
✓	$12k+11$	زوج	$12k+8$	✓	$12k+5$	زوج	$12k+2$

پس باقی‌ماندهٔ عدد در تقسیم به ۱۲ فقط می‌تواند برابر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد.

در مورد پیداکردن باقی‌ماندهٔ مربع عددهای کامل به عددهای مختلف نیز می‌توان از افراز استفاده کرد. البته جلوتر می‌بینیم که با استفاده از همنهشتی این سؤال‌ها را راحت‌تر می‌توان پاسخ گفت. اما بد نیست این‌جا هم کمی ماجرا را بررسی کنیم:

مثال: ثابت کنید مربع هر عدد صحیح در تقسیم به ۵، یا باقی‌مانده‌ای برابر صفر دارد یا باقی‌مانده‌ای برابر ۱ و یا باقی‌مانده‌ای برابر ۴.

پاسخ: در تقسیم به ۵ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۵ مجموعه افراز می‌شود. در هر پنج حالت مربع عدد را بررسی می‌کنیم:

$5k \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

$5k+1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2+10k+1$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$5k+2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2+20k+4$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد.

$5k+3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2+30k+9$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد. (*چون باقی‌ماندهٔ ۹ به ۵ برابر چهاره*)

بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. (چون باقی‌ماندهٔ ۱۶ به ۵ برابر یکه)

$$5k+4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25k^2+40k+16$$

پس هر عدد مربع کامل در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر صفر یا ۱ یا ۴ دارد.

البته برای راحتی کار فقط می‌توان خود باقی‌مانده‌ها را به توان ۲ رساند.

$5k \Rightarrow 0$ | $5k+1 \Rightarrow 1^2=1$

$5k+2 \Rightarrow 2^2=4$ | $5k+3 \Rightarrow 3^2=9$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد.

$5k+4 \Rightarrow 4^2=16$ بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

تست: عددی صحیح بر ۷ بخش‌پذیر نیست. باقی‌ماندهٔ مربع آن بر ۷ چند حالت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ۳: مثل مثال قبل عمل می‌کنیم و فقط باقی‌مانده‌ها را به توان ۲ می‌رسانیم. چون عدد بر ۷ بخش‌پذیر نیست حالت $7k$ را نمی‌نویسیم.

$7k+1 \Rightarrow 1$ | $7k+2 \Rightarrow 4$

$7k+3 \Rightarrow 9$ باقی‌مانده ۹ بر ۷ برابر ۲ است. | $7k+4 \Rightarrow 16$ باقی‌مانده ۱۶ بر ۷ برابر ۲ است.

$7k+5 \Rightarrow 25$ باقی‌مانده ۲۵ بر ۷ برابر ۴ است. | $7k+6 \Rightarrow 36$ باقی‌مانده ۳۶ بر ۷ برابر ۱ است.

پس باقی‌ماندهٔ مربع عدد بر ۷ فقط می‌تواند برابر ۱ یا ۲ یا ۴ باشد. یعنی سه حالت دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ویژگی‌های بخش‌پذیری

سؤال‌های آغازین این بخش اگرچه ممکن است ساده به نظر برسند اما سؤال‌های مفهومی هستند و یادگرفتنشان ضروری است.

۶۹- اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند، کدام گزینه درست نیست؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ ۲) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|bc$

۳) $a|bc \Rightarrow a|c \vee a|b$ ۴) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$

۷۰- چندتا از رابطه‌های زیر درست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

الف) $a|b+c \Rightarrow a|b \vee a|c$ ب) $bc|a \Rightarrow b|a \wedge c|a$ پ) $a|b \Rightarrow a+c|b+c$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۱- اگر $a-b|a$، آن‌گاه: (ق.م)

۱) $a|a-b$ ۲) $b|a-b$ ۳) $a|b$ ۴) $a-b|b$

۷۲- اگر $a+b|a+c$ و $a+b|2c$، کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a+b|a-c$ ۲) $a+b|2b+c$ ۳) $a+b|2a$ ۴) $a+b|2b$

۷۳- از رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $b|a+c$ ۲) $c|a-b$ ۳) $a-b|c^2$ ۴) $b+c|a^2$

۷۴- به ازای چند عدد صحیح، هر دو رابطهٔ $n^2|6n-5$ و $6n-5|n^2$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) چنین nای وجود ندارد.

۷۵- به ازای چند مقدار x هر دو رابطهٔ $x^3-3x^2+2x \mid 0$ و $2x+1|2^x+1$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۷۶- عدد $43!$ بر کدام‌یک از عددهای زیر، بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

۷۷- رقم یکان $(26!+\cdots+4!+2!)(25!+\cdots+5!+3!+1!)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۸

۷۸- عدد $20!+12$ بر چند عدد طبیعی یک‌رقمی بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۷۹- برای هر عدد طبیعی n داریم $n!=2^{a_1}\times3^{a_2}\times5^{a_3}\times\cdots$. مقدار $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ به ازای $n=20$، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۲۸ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

برای پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها بر نیست به بخش «مضرب و مقسوم‌علیه» در درس‌نامه نگاه کنید.

۸۰- اگر $۱۲ | x$ و $y | ۱۲$، کدام گزینه درست نیست؟

۱) $x | ۲y$ ۲) $۴ | y$ ۳) $x | ۲۴$ ۴) $۲x | y$

۸۱- به ازای چند عدد صحیح مانند x، هر دو رابطهٔ $x | ۸۴$ و $۴ | x$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۸۲- از رابطه‌های $a | ۲$ و $ab = ۶۰$، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $a = ۲$ ۲) $a | ۳۰$ ۳) $b = ۳۰$ ۴) $b | ۳۰$

۸۳- اگر a و b دو عدد طبیعی و دو رابطهٔ $a | b$ و $b | ۲a$ هر دو درست باشند، در این صورت:

۱) همواره $a = b$ ۲) $a = b$ یا $a = ۲b$ ۳) $a = b$ یا $۲a = b$ ۴) $a = ۲b$ یا $b = ۲a$

۸۴- اگر $x \in \{۱,۲,...,۲۰\}$ باشد به ازای چند مقدار x رابطهٔ $x^۲ - ۱$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۵- چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ بوده، مربع آن مضرب ۱۸ باشد؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۸۶- تعداد اعداد پنج‌رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ $(\sqrt{۱۰} \cong ۳/۱۶)$ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۳۸

۸۷- تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ $(\sqrt[۳]{۱۰} \cong ۲/۱)$ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

برای پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها به نکتهٔ $\square \Rightarrow \square$ | $\square$ دقت کنید.

۸۸- اگر $۳y | ۲x^۲$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $۲x^۲ | y$ ۲) $x^۲ | ۳y$ ۳) $x | ۳y$ ۴) $x^۲ | ۶y^۲$

۸۹- به ازای چند مقدار صحیح a، رابطهٔ $a^۲b^۲ | a^۲ + b^۲$ درست است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۹۰- اگر $b^۲ | a^۳$ کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟

۱) $a | b$ ۲) $a^۵ | b^۴$ ۳) $a^۶ | b^۵$ ۴) $a^۲ | b$

۹۱- اگر از رابطهٔ $x^۳ | y^m$ بتوانیم نتیجه بگیریم $x^۵ | y^{۳m-۵}$، کم‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۹۲- اگر a، b و c سه عدد صحیح باشند به طوری که $a^۲ | b^۳$ و $b^۵ | c^۷$، چندتا از رابطه‌های $a^۵ | b^۷$، $b^۲ | c^۳$ و $a | c^۲$ همواره درست است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

توجه کنید در خیلی از سؤال‌های عادکردن تلاش ما بر آن است که سمت راست را از متغیر تبدیل به یک عدد کنیم!

این مدل سؤال‌ها که باید یک متغیر را حذف کنید از سؤال‌های پرتکرار در آزمون‌ها به حساب می‌آیند.

۹۳- اگر $a > ۱$، $a | ۷k + ۴$ و $a | ۸k + ۳$ در این صورت: (برگرفته از کتاب درسی)

۱) a عددی اول است. ۲) a مربع کامل است. ۳) a مضرب ۵ است. ۴) a مضرب ۷ است.

۹۴- اگر هر دو کسر $\frac{۵b+۲}{a+۱}$ و $\frac{۶b+۵}{a+۱}$ عددهایی صحیح باشند، a چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۵- اگر از دو رابطهٔ $a | ۷m + x$ و $a | ۶m + ۵$ بتوان نتیجه گرفت که $a = \pm۱$ است، x کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۹۶- اگر دو عدد $m + ۱$ و $m^۲ - ۲$ همواره بر a بخش‌پذیر باشد، a چند مقدار صحیح مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۹۷- اگر هر دو رابطهٔ $x | ۵y - ۱$ و $x^۲ | ۱۷y - ۲$ برقرار باشد، x برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۹۸- اگر $۳a + ۴b | ۱۰a + ۳b$ آن‌گاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر بر $۳a + ۴b$ بخش‌پذیر است؟

۱) $۳۱a$ ۲) $۴۹a$ ۳) $a + ۲b$ ۴) $b - ۲a$

۹۹- اگر $a | b + ۱$ و $a | c + ۲$، کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره بر a بخش‌پذیر است؟

۱) $bc - ۱$ ۲) $bc - ۲$ ۳) $bc + ۱$ ۴) $bc + ۲$

۱۰۰- اگر $۷ \mid ۵k-۱$ و $۵ \mid ۴k+۳$، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $۳۵ \mid ۲۰k^۲-۱۱k+۳$ ۲) $۳۵ \mid ۲۰k^۲-۱۱k-۳$
۳) $۳۵ \mid ۱۵k^۲-۱۱k+۳$ ۴) $۳۵ \mid ۱۵k^۲-۱۱k-۳$

۱۰۱- اگر $۵ \mid ۲n+۱$، عبارت $۱۴n^۲+۱۹n+۶$ همواره بر کدام عدد زیر، بخش‌پذیر است؟ $(n \in \mathbb{Z})$ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۵ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۱۰۲- اگر $۳ \mid a+۲b$ و $۹ \mid a^۲-۵ab+kb^۲$ آن‌گاه k کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۰۳- اگر $x^۳-۳x^۲-۴x$ مضرب ۱۱ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی x کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۰۴- به ازای چند مقدار a از مجموعهٔ $\{۳n : n \in \mathbb{N}\}$ رابطهٔ $a \mid k^۲+۱$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۱۰۵- اگر $۷ \mid ۲a+۳b+k$ و $۷ \mid a+۵b-۲$، کم‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۶- اگر $۱۱ \mid ۲a+۵b$ و b مضرب ۱۱ نباشد. آن‌گاه به ازای چند عدد طبیعی $k \leq ۵۰$ رابطهٔ $۱۱ \mid ۳a+kb$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

معادله‌های عادکردنی

۱۰۷- به ازای چند مقدار طبیعی n رابطهٔ $n+۲ \mid ۵n+۳$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۱۰۸- بزرگ‌ترین مقدار x که به ازای آن رابطهٔ $۳x+۲ \mid ۵x+۷$ برقرار است، کدام‌یک از عددهای زیر را می‌شمارد؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۰۹- چند نقطه روی منحنی $yx+۳=۲(x+y)$ وجود دارد که هر دو مؤلفهٔ آن، عددهایی طبیعی باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۱۰- به ازای چند مقدار m، عبارت $۹m+۲$ بر $۵m+۳$ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشتر از ۴

۱۱۱- به ازای چند مقدار طبیعی مانند n، رابطهٔ $۲n+۱ \mid ۴n^۲+۵n+۴$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۱۲- نقاط (a,b) روی منحنی $y=\frac{۳x-۱}{x+۲}$ قرار دارند. اگر $a,b \in \mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی این منحنی قرار دارد؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۳- به ازای چند عدد صحیح مانند x، حاصل کسر $\frac{x+۱}{x^۳+۱}$ عددی صحیح است؟ (مثل کنکور)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشتر از ۳

۱۱۴- به ازای چند عدد صحیح n رابطهٔ $n+۵ \mid n^۲+۳$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱۵- به ازای چند عدد سه‌رقمی طبیعی، مانند n، رابطهٔ $۲^n \mid n^۲$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۶- به ازای چند عدد طبیعی، رابطهٔ $\binom{n}{۲} \mid n^۲$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

باقی‌ماندهٔ مربع کامل بر ۸

۱۱۷- باقی‌ماندهٔ a بر ۴، برابر ۳ است باقی‌ماندهٔ $a^۲$ بر ۸ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۱۸- اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به طوری که $a=۴k+۳$ و $b=۶k'+۱$، باقی‌ماندهٔ $a^۲+b^۲+۵$ بر ۸ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۷

۱۱۹- کدام‌یک از عددهای زیر، مربع کامل است؟

۱) ۵۳۳۵۹ ۲) ۵۳۳۶۱ ۳) ۵۳۳۶۳ ۴) ۵۳۳۶۵

۱۲۰- دو عدد متوالی را به توان ۳ رسانده و از هم کم می‌کنیم، سپس حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم. باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۸ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۳
۳) ۵ ۴) بستگی به اعداد ممکن است هر سه گزینه درست باشد.

۱۲۱- اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند، به طوری که $abc = 3^{97}$ باشد، باقی‌ماندهٔ $a^2 + 2b^2 + 3c^2$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۲۲- اگر a عددی زوج و $b \mid 3a+1$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^3 + b^4 + 2$ در تقسیم به ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۳- اگر x زوج باشد، باقی‌ماندهٔ x^2 بر ۸ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۴- اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که $a^4 - b^4 - 2a^2 + 2b^2$ همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

۱۲۵- اگر $a+3 \mid b+4$ و b عددی صحیح و فرد باشد، باقی‌ماندهٔ $a^2 + 2a + b^2 + 3$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

بخش‌پذیری به کمک اتحادها

۱۲۶- عدد $4\times 2^{10} - 9\times 3^4$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟ (کنکورهای دیگر ـ ۱۴۰۰)

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۳۷

۱۲۷- کدام‌یک از گزینه‌های زیر به ازای هر عدد صحیح مانند n برقرار است؟

۱) $n^2+2 \mid n^4+4$ ۲) $n^2+2 \mid n^4+8$ ۳) $n^2+2 \mid n^2+1$ ۴) $n^2+2 \mid n^6+8$

۱۲۸- عدد $3^{39} + 7^{26}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

۱۲۹- عدد $2^{42} - 3^{18}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۵ ۲) ۳۱ ۳) ۶۱ ۴) ۱۰۱

۱۳۰- به ازای کدام مقدار n رابطهٔ $25 \mid 7^n+1$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳۱- به ازای کدام مقدار n عبارت $5^n - 2^n$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۸۲ ۲) ۸۳ ۳) ۸۴ ۴) ۸۵

۱۳۲- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۶۰ مانند n رابطهٔ $28 \mid 3^n+1$ برقرار است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

ب.م.م

۱۳۳- مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۴۴ و ۱۸۰ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۳۴- اگر $a \mid b$ و عددهای a و b هر دو عددهای منفی باشند، حاصل (a,b) و $(a,0)$ به ترتیب کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $-a, -a$ ۲) $a, -a$ ۳) $-a, -b$ ۴) $a, -b$

۱۳۵- اگر $d = (663, 187)$ باشد، $2d+1$ بر کدام بخش‌پذیر است؟

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

۱۳۶- اگر $(3m, 9m^2) = 12$ باشد:

۱) $m = 4$ ۲) m هر کدام از مضارب ۴ می‌تواند باشد.
۳) $m = 6$ ۴) m هرعددی به فرم $4k+2$ می‌تواند باشد.

۱۳۷- اگر $(a^2, b^2) - (5a, 5b) = 14$ باشد، بزرگ‌ترین شمارندهٔ دو عدد a و b کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۱۳۸- کدام گزینه درست نیست؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $(m, m+1) = 1$ ۲) $(4m+1, 4m+3) = 1$ ۳) $(5m+1, 5m+3) = 1$ ۴) $(6m+3, 6m+5) = 1$

۱۳۹- اگر $(a,b) = 36$ باشد، به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطهٔ $x \mid a$ و $x \mid b$ برقرار است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۴۰- اگر a زوج و b فرد باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $(a,b) = 1$ ۲) $(a, b+1) = 2$ ۳) $(a, 7) = 1$ ۴) $(a-b, 2) = 1$

۱۴۱- اگر $(a,۱۲)=۱$ و a عددی طبیعی یک‌رقمی باشد، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۲- اگر $d=(۴n+۱,۱۸)$ باشد؛ d چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۴۳- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n، اعداد $n-۳$ و ۱۳ نسبت به هم اول نیستند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹۲ ۴) ۹۳

۱۴۴- در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $d=(۳n+۵\,,\,۳n^۲-۲n+۶)$ و $d\neq ۱$ باشد، عدد d کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

۱۴۵- حاصل $(۱۸!-۱۹!,۲۰!)$ کدام است؟

۱) $۱۸!$ ۲) $۲\times۱۸!$ ۳) $۱۹!$ ۴) $۲\times۱۹!$

۱۴۶- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n رابطهٔ $(n,۲۴)=۱۲$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴۷- اگر $(۶a,۱۰b)=۴۴$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $(a,b)=۱۱$ ۲) a مضرب ۵ نیست. ۳) b بر ۶۶ بخش‌پذیر است. ۴) $a+b$ مضرب ۴۴ است.

۱۴۸- a و b نسبت به هم اول‌اند. اگر $c\,|\,a-b$ آن‌گاه (c,a) کدام است؟

۱) ۱ ۲) $|a|$ ۳) $|b|$ ۴) $|c|$

۱۴۹- به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n، دو عدد به صورت $۲۵n+۹$ و $۱۱n+۴$ نسبت به هم اول‌اند؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۱۵۰- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $۱۲n+۷$ و $۵n-۲$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) ۵۹ ۲) ۶۷ ۳) ۸۳ ۴) ۸۹

۱۵۱- به ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $۷n+۵$ و $۱۱n+۲$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟ (ریاضی ۹۱)

۱) هیچ عدد ۲) یک عدد ۳) دو عدد ۴) بی‌شمار عدد

۱۵۲- برای چند عدد n از مجموعهٔ $\{۴۱,۴۲,\dots,۱۰۰\}$ حاصل $(n+۲,۷n+۱)$ برابر ۱ نمی‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۵۳- به ازای مقادیر مختلف $a>۳$ بزرگ‌ترین مقدار بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۱۵a+۳$ و $۱۵a-۱۲$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) ۱۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۵۴- اگر دو عدد $۳k-۱$ و $k^۲+۲k+۴$ نسبت به هم اول نباشند، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان برابر کدام است؟ (مثل کنکور)

۱) ۳۱ ۲) ۴۱ ۳) ۴۳ ۴) ۵۳

۱۵۵- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۳۰ مانند n رابطهٔ $(n,۱۰)=۲$ برقرار است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۵۶- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=۲^m\times۵^n$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت صحیح $\frac{x}{۴۰}$، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۶۴۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۱۲۸۰

۱۵۷- اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح $x=۶^m\times۱۰^n$، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم‌علیه‌های $۱۵x$ کم‌تر باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ممکن برای x، کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۱۲۹۶ ۲) ۲۳۰۴ ۳) ۶۴۰۰ ۴) ۸۷۰۴

۱۵۸- دو عدد $A=۲^۳\times۳^۴\times۵^۳\times۷^۲$ و $B=۲^۵\times۳^۲\times۵^p\times۱۱$ دارای ۲۳ مقسوم‌علیه مشترک و مثبت و غیریک هستند. تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

۱۵۹- a و b نسبت به هم اول‌اند. ب.م.م دو عدد $۸a+۵b$ و $۵a+۳b$ کدام است؟

۱) فقط ۱ ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۱ یا ۵ ۴) ۱ یا ۷

ک.م.م

۱۶۰- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N}:۶\,|\,x\,,\,۸\,|\,x\}$ چه مجموع ارقامی دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۶۱- اگر $[a,b]=a$ باشد، حاصل (a,b) کدام است؟ (a و b دو عدد طبیعی‌اند.) (برگرفته از کتاب درسی)

۱) a ۲) b ۳) ۱ ۴) ab

۱۶۲- حاصل $[1,112] + (341,403)]$ چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۶۳- با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[(627,429),154]$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۴۶۲ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

۱۶۴- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که به هر سه عدد ۱۵، ۲۱ و ۳۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۶۵- به ازای چند عدد صحیح n، ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۸ و n^2-1 برابر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۶۶- حاصل $([a^3,a^7],a^4)$ کدام است؟ $(a \in \mathbb{N})$

۱) a^3 ۲) a^4 ۳) a^5 ۴) a^7

۱۶۷- حاصل $([3a,12a^2],(4a,8a))$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) a ۲) $|a|$ ۳) $3|a|$ ۴) $4|a|$

۱۶۸- اگر داشته باشیم $3x \mid y$ حاصل $([x,y],(3,y))$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $|x|$ ۳) $|y|$ ۴) $3|y|$

۱۶۹- a و b دو عدد طبیعی هستند. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $((a,b),[a,b])=(a,b)$ ۲) $[a,(a,b)]=(a,b)$ ۳) $(b,(a,b))=(a,b)$ ۴) $(a,[a,b])=a$

۱۷۰- اگر $ab \mid c$ و $c^2 \mid d$، آن‌گاه حاصل $[(a,c),[b^2,d]]$ کدام است؟ (a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند.)

۱) a ۲) b^2 ۳) d ۴) ad

۱۷۱- اگر $(m,6)=3$ حاصل $[5m^2,90]$ کدام است؟

۱) $5m^2$ ۲) $10m^2$ ۳) $30m^2$ ۴) $90m^2$

۱۷۲- به ازای چند عدد طبیعی m رابطهٔ $[m,120]=600$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۷۳- اگر a عددی فرد و طبیعی باشد، حاصل $[((a+1)^4,8),(a-1)(a+1)]$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) a^2-1 ۳) $(a+1)^4$ ۴) $4a+4$

متباین‌سازی

۱۷۴- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=5$ و $ab=500$ باشد، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۵

۱۷۵- اگر $(a,b)=7$ باشد، حاصل $(\frac{a^2}{7},[a,b])$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $|a|$ ۳) $|b|$ ۴) $7|a|$

۱۷۶- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۷ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها برابر ۴۲۰ است. مجموع دوعدد کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟ (سراسری ۹۰)

۱) ۱۳۳ ۲) ۲۲۴ ۳) ۱۶۱ ۴) ۱۱۹

۱۷۷- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=8$ و $a+b=104$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار برای $[a,b]$ کدام است؟ (ق.م)

۱) ۳۵۲ ۲) ۳۴۴ ۳) ۳۳۶ ۴) ۳۲۰

۱۷۸- اگر $[a,b]=(a,b)+1$ حاصل a^2+b^2 کدام است؟ (سراسری ۸۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۷۹- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b) \neq 1$ و $5[a,b]=9(a,b)+11$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟ (ق.م)

۱) ۵۰ ۲) ۱۶۵ ۳) ۳۳ ۴) ۶۶

۱۸۰- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد، کدام است؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

۱۸۱- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $2a+b=245$ و $[a,b]=1001$ مجموع ارقام عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

اعداد اول

۱۸۲- چندتا از عددهای $7+10!$، $13+20!$ و $93+30!$ اول‌اند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۳- مجموع سه عدد اول برابر ۲۰۰ است حاصل‌ضرب این ۳ عدد:

۱) اول است.　۲) زوج است.　۳) بر ۳ بخش‌پذیر است.　۴) مربع کامل است.

۱۸۴- در یک تقسیم، مقسوم، مقسوم‌علیه، باقی‌مانده و خارج قسمت، همگی اعداد اول متمایزند. در این صورت:

۱) باقی‌مانده حتماً برابر ۲ است.　۲) مقسوم‌علیه حتماً برابر ۲ است.

۳) باقی‌مانده یا خارج قسمت برابر ۲ است.　۴) مقسوم‌علیه یا خارج قسمت برابر ۲ است.

۱۸۵- اگر P یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، P^2 را به کدام صورت نمی‌توان نوشت؟

۱) $8k+1$　۲) $12k+1$　۳) $16k+1$　۴) $24k+1$

۱۸۶- اگر p و q دو عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشند باقی‌ماندهٔ p^2+q بر ۶، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۱۸۷- اگر P عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، کدام‌یک از عددهای زیر می‌توانند عددی اول باشند؟

۱) P^2+1　۲) P^2+2　۳) P^2+4　۴) P^2+5

۱۸۸- اگر p یک عدد اول فرد باشد به طوری که p^2+32 مربع کامل باشد، p^2+2 بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۳　۲) ۱۵　۳) ۱۷　۴) ۱۹

۱۸۹- به ازای چند عدد اول p عدد $5p-1$ مکعب کامل می‌شود؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۱۹۰- اگر p عددی اول و $p \mid 12a$ و $(a,p)=1$ باشد، آن‌گاه p چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۱۹۱- a عددی طبیعی و P عددی اول است که $\frac{P+a}{P-a}=18$. عبارت aP برابر با کدام است؟

۱) ۳۲۳　۲) ۳۸۰　۳) ۲۵۵　۴) ۳۴۲

۱۹۲- اگر p عددی اول باشد به طوری که $(a,p^4)=p^3$ و $(b^2,p^3)=p^2$ باشد حاصل (ab,p^6) کدام است؟

۱) p^2　۲) p^3　۳) p^4　۴) p^6

۱۹۳- چندتا از عددهای $2^{17}+1$، $6^{17}-1$ و $2^{22}-1$ اول است؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۱۹۴- اگر p یک عدد اول باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر به ازای هیچ مقداری از p عدد اول نمی‌شود و همواره مرکب است؟

۱) $3p+1$　۲) 4^p+1　۳) p^2+2　۴) $2^{2p}-1$

۱۹۵- به حاصل‌ضرب همهٔ عددهای اول دورقمی یک واحد اضافه می‌کنیم عدد جدید اول .... و .... شمارندهٔ دورقمی اول دارد.

۱) است ـ صفر　۲) نیست ـ صفر　۳) است ـ دست‌کم یک　۴) نیست ـ دست‌کم یک

۱۹۶- به ازای چند مقدار $n \in \mathbb{N}$ هر سه عدد n، $n+4$ و $n+8$ اول‌اند؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۱۹۷- سمت راست عدد $30! \times 125^6$ چند صفر وجود دارد؟

۱) ۲۴　۲) ۲۵　۳) ۲۶　۴) ۲۷

۱۹۸- اگر P بزرگ‌ترین عدد اولی باشد که در رابطهٔ $P \mid 25!$ صدق کند، کوچک‌ترین مقدار n برای آن‌که رابطهٔ $P^2 \mid n!$ برقرار باشد، چند است؟

۱) ۴۶　۲) ۵۰　۳) ۳۶۱　۴) ۵۲۹

۱۹۹- اگر r,q,p سه عدد اول متمایز باشند به طوری که $p<q<r$ و $p^2+q^2+r^2=150$ باشد، $r+q-p$ کدام است؟

۱) ۱۰　۲) ۱۲　۳) ۱۴　۴) نمی‌توان تعیین کرد.

الگوریتم تقسیم

۲۰۰- در تقسیم چند عدد سه‌رقمی بر ۲۱، باقی‌مانده برابر ۱۵ می‌شود؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۳۹　۲) ۴۰　۳) ۴۱　۴) ۴۲

۲۰۱- باقی‌ماندهٔ عدد ۱۰۷− در تقسیم به ۱۳ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۳　۳) ۳−　۴) ۱۰

۲۰۲- فرض کنید مجموع خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۵، عدد ۵ باشد. کدام عدد زیر بر ۱۴ بخش‌پذیر است؟

۱) $a-5$　۲) $a-3$　۳) $a+3$　۴) $a+5$

۲۰۳- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر ۱۱ به ترتیب برابر ۵ و ۹ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a-2b$ بر ۱۱ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۳　۲) ۵　۳) ۷　۴) ۹

۲۰۴- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۱۴ برابر ۱ و b بر ۲۱ برابر ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $2a+3b$ بر ۷ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۰۵- اگر عدد x در تقسیم به ۲۰، باقی‌مانده‌ای برابر ۷ داشته باشد، باقی‌ماندهٔ $7x+1$ بر ۱۴ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۰۶- اگر باقی‌ماندهٔ m بر ۲۴ برابر ۷ و باقی‌ماندهٔ n بر ۲۰ برابر ۱۷ باشد، باقی‌ماندهٔ $5m-3n$ بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۰۷- اگر n در تقسیم بر ۶، باقی‌مانده‌ای برابر ۴ و در تقسیم بر ۷، باقی‌مانده‌ای برابر ۶ داشته باشد، باقی‌ماندهٔ آن بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶ (برگرفته از کتاب درسی)

۲۰۸- چند عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد که باقی‌ماندهٔ آن بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۵ و ۷ باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۲۰۹- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۶ برابر ۲ و بر ۸ برابر ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $5a+3$ بر ۱۲ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۱

۲۱۰- اگر باقی‌ماندهٔ a بر دو عدد ۱۳ و ۷ به ترتیب برابر ۷ و ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۹۱ کدام است؟ (مثل کنکور)

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۲۱۱- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۶۶ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۲۹ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

تا این‌جا سؤال‌های مربوط به باقی‌مانده را دیدید. از این‌جا به بعد خارج قسمت هم وارد می‌شود.

۲۱۲- خارج قسمت تقسیم $10!-37$ بر ۳۰ کدام است؟

۱) $9!-1$ ۲) $8!-2$ ۳) $3\times8!-1$ ۴) $3\times8!-2$

۲۱۳- مقسوم و خارج قسمت یک تقسیم برابر ۲۴۶ و ۱۸ است. مقسوم‌علیه چند مقدار می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار

۲۱۴- در یک تقسیم اگر ۵۳ واحد به مقسوم اضافه کنیم، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و از باقی‌مانده ۲ واحد کم می‌شود. مقسوم‌علیه این تقسیم کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۲۱۵- در تقسیم عددی بر ۱۷ باقی‌مانده برابر ۱۳ شده است. اگر ۶۱ واحد به مقسوم اضافه کنیم خارج قسمت .... واحد اضافه شده و باقی‌مانده برابر .... می‌شود.

۱) ۳ـ۶ ۲) ۳ـ۱۶ ۳) ۴ـ۶ ۴) ۴ـ۱۶

۲۱۶- چند عدد طبیعی دورقمی وجود دارد که در تقسیم بر عدد b باقی‌مانده‌ای برابر ۴۳ داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) چنین عددی وجود ندارد

۲۱۷- در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کند؟ (ق.م)

۱) سه واحد کم می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود. ۲) سه واحد اضافه می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.

۳) سه واحد اضافه می‌شود ـ تغییر نمی‌کند. ۴) سه واحد کم می‌شود ـ دو واحد اضافه می‌شود.

توجه کنید که در خیلی از سؤال‌های الگوریتم تقسیم، چیزی که در نهایت باعث حل سؤال می‌شود رابطهٔ $0 \le r < b$ است.

۲۱۸- اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a > 9$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقی‌ماندهٔ آن باشد، احتمال این‌که عدد $a-9$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{13}{22}$ ۲) $\frac{6}{11}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{11}$ (ریاضی ۱۴۰۰)

۲۱۹- مجموع باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۳ برابر ۱۷ است. احتمال این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم $a-8$ بر ۳۶، برابر ۲۱ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{6}{13}$ ۲) $\frac{5}{13}$ ۳) $\frac{4}{13}$ ۴) $\frac{3}{13}$ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۲۲۰- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی‌مانده توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟ (ق.م)

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۲۱- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کم‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ (ق.م)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۲۲- در تقسیم عدد ۹۱ بر عدد b، باقی‌مانده، مربع خارج قسمت است. مقسوم‌علیه چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار

۲۲۳- اگر a بزرگ‌ترین و b کوچک‌ترین عدد طبیعی باشند که باقی‌ماندهٔ آن‌ها در تقسیم به ۱۰۱ دو برابر مربع خارج قسمت آن‌ها باشد، مجموع ارقام $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۲۲۴- اگر در تقسیم عدد صحیح a بر b باقی‌مانده برابر $b-1$ باشد و $a-1$ بر b بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر b کدام است؟ $(b>1)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بستگی به a دارد.

۲۲۵- اگر باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به ۱۱ سه واحد کم‌تر از باقی‌ماندهٔ $-a$ در تقسیم به ۱۱ باشد، باقی‌ماندهٔ $3a+7$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۲۶- دو عدد طبیعی ۱۰۰ و ۲۴۰ را بر b تقسیم کرده‌ایم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۸ و ۱۰ شده است. عدد b چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۷- باقی‌ماندهٔ a بر ۳ برابر ۱ و بر ۳۹ برابر r^2 است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

۲۲۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر دو عدد طبیعی b و $b+1$ به ترتیب برابر ۱۱ و ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b^2+b کدام می‌تواند باشد؟

(آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۸۸ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۱۰

۲۲۹- در تقسیم عددی بر ۲۳، اگر x واحد به مقسوم اضافه کنیم، به خارج قسمت، ۳ واحد اضافه شده، باقی‌مانده $\frac{1}{3}$ می‌شود. کم‌ترین مقدار x کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۵ ۳) ۵۶ ۴) ۵۷

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

۲۳۰- باقی‌ماندهٔ عدد فرد a در تقسیم به ۶، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۲۳۱- اگر a فرد و بر ۳ بخش‌پذیر باشد، فرم کلی آن به کدام صورت است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $3k$ ۲) $9k+3$ ۳) $9k+6$ ۴) $6k+3$

۲۳۲- اگر سه مجموعهٔ $A=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=2k\}$ ، $B=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=4k+1\}$ و C، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز کنند، فرم کلی اعضای مجموعهٔ C به کدام صورت است؟

۱) $4k+3$ ۲) $3k+1$ ۳) $2k$ ۴) $6k+1$ (برگرفته از کتاب درسی)

۲۳۳- اگر رابطهٔ $a \mid n^3-n$ برقرار باشد، a برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۴۸ ۲) ۴۹ ۳) ۵۰ ۴) ۵۱

۲۳۴- یک عدد صحیح فرد را در عدد قبلی و بعدی‌اش ضرب می‌کنیم؛ عدد به دست آمده بر بزرگ‌ترین عددی که همواره بخش‌پذیر است، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸ (برگرفته از کتاب درسی)

۲۳۵- دو عدد فرد متوالی را به توان ۳ رسانده و از هم کم می‌کنیم، باقی‌ماندهٔ عدد حاصل بر ۸ و ۱۲ به ترتیب برابر .... و .... است.

۱) ۱ـ۲ ۲) ۱ـ۴ ۳) ۲ـ۲ ۴) ۲ـ۴ (برگرفته از کتاب درسی)

۲۳۶- باقی‌ماندهٔ مجموع مربعات دو عدد صحیح در تقسیم بر ۴ برابر کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۲۳۷- اگر k حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد، باقی‌ماندهٔ $4k+1$ در تقسیم به ۱۶ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۸- به یک عدد مربع کامل یک واحد اضافه می‌کنیم، باقی‌ماندهٔ عدد حاصل بر ۵، برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۳۹- اگر باقی‌ماندهٔ عدد a در تقسیم به ۷ فرد باشد، باقی‌ماندهٔ a^2 بر ۷ برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴۰- اگر باقی‌ماندهٔ عددی در تقسیم بر ۴، برابر ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ آن بر ۸ کدام است؟

۱) همواره ۳ ۲) ۳ یا ۵ ۳) ۳ یا ۷ ۴) ۵ یا ۷

۲۴۱- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۲۴ برابر ۱۵ باشد، باقی‌ماندهٔ $\frac{a}{3}$ بر ۱۶ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۳ یا ۱۱ ۴) ۵ یا ۱۳

۲۴۲- به ازای کدام مقدار m می‌توان ثابت کرد که همواره یکی از عددهای a یا $a+4$ یا $a+m$ بر ۳ بخش‌پذیر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۴۳- اگر $21 \mid a+5$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a-2$ بر ۱۴، چند عضو از مجموعهٔ $\{0,1,2,\dots,13\}$ می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴۴- اگر a در تقسیم بر ۲۵، باقی‌مانده‌ای برابر ۷ داشته باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+3$ بر ۱۵ برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۴۵- از رابطهٔ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a \mid bc$ ۲) $b \mid ad$ ۳) $c \mid ab$ ۴) $d \mid abc$

۲۴۶- از دو رابطهٔ $a \mid ۶$ و $۱۲ \mid b$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a \mid ۲b$ ۲) $۲a \mid b$ ۳) $۳ \mid a+b$ ۴) $۱۲ \mid ab$

۲۴۷- اگر $a \neq ۱$ عددی طبیعی باشد که هر دو عدد $۹k+۷$ و $۷k+۶$ را عاد کند، کم‌ترین مقدار طبیعی k، برای برقراری این روابط کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ (برگرفته از کتاب درسی)

۲۴۸- به ازای چند عدد طبیعی n، رابطهٔ $n+۱ \mid n^۵+۳n^۲-n+۶$ درست است؟

۱) هیچ مقدار ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

۲۴۹- اگر $a^۲ \mid ۲a+b$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) $a \mid b$ ۲) $a \mid b^۲$ ۳) $a^۲ \mid b$ ۴) $a \mid a+b$

۲۵۰- دو عدد $a+۵$ و $b-۳$ هر دو بر ۷ بخش‌پذیرند. باقی‌ماندهٔ $ab+۱$ بر ۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۵۱- اگر $۱۲۸ \mid a^۳$ و $۱۲۰ \mid b^۲$، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۸ ۳) ۶۴ ۴) ۶۸

۲۵۲- به ازای کدام مقادیر m و n، هر دو رابطهٔ $۳^m \mid ۳^n$ و $۵^{n+۳} \mid ۵^{۲m}$ درست است؟

۱) $m=۴, n=۶$ ۲) $m=۵, n=۷$ ۳) $m=۴, n=۸$ ۴) $m=۵, n=۸$

۲۵۳- اگر $a>۱$، $a \mid ۹k+۴$ و $a \mid ۵k+m$، به ازای کدام مقدار m، ثابت می‌شود که a عددی اول است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۵۴- به ازای چند مقدار طبیعی n، رابطهٔ $(n+۱)! \mid n^۳$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۲۵۵- اگر عدد a فقط دو مقسوم‌علیه طبیعی داشته باشد و $a \nmid ۲۲۵$، در این صورت $(a,۱۵)$ کدام است؟

۱) همواره ۱ ۲) ۱ یا ۳ ۳) ۱ یا ۵ ۴) ۳ یا ۵

۲۵۶- اگر $(a,b)=d>۱$, $d \mid a^۲-b+۷$، آن‌گاه $a+b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۵ ۳) ۸۶ ۴) ۸۷

۲۵۷- اگر باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم a بر ۱۹ به ترتیب برابر ۷ و q باشد، باقی‌مانده و خارج قسمت $a+۴۹$ بر ۱۹ به ترتیب برابر .... و .... است.

۱) صفر ـ $q+۱$ ۲) ۱۸ ـ $q+۱$ ۳) صفر ـ $q+۲$ ۴) ۱۸ ـ $q+۲$

۲۵۸- اگر ب.م.م دو عدد $n-۳$ و $۵n+۲$ عددی مخالف ۱ باشد، مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی n کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۲۵۹- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b باقی‌مانده برابر ۳۶ و خارج قسمت، عددی طبیعی و مضرب ۵ است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵ (مثل کنکور)

۲۶۰- در تقسیم عدد a بر ۸، باقی‌مانده برابر جذر خارج قسمت است. رقم یکان بزرگ‌ترین مقدار مقسوم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۶۱- اگر در تقسیم عددهای طبیعی a و $۲a+۱۰۰$ بر عددهای طبیعی b و $۲b$ باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۱۰ و ۴ باشد، کم‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۱ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

۲۶۲- در یک تقسیم، مقسوم از ۵ برابر مقسوم‌علیه ۲ واحد بیشتر و باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد. اگر مقسوم‌علیه بزرگ‌تر از ۱ باشد، خارج قسمت تقسیم کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۶۳- عدد a زوج است ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست، باقی‌ماندهٔ آن بر ۶ کدام است؟

۱) همواره ۲ ۲) صفر یا ۲ ۳) ۲ یا ۴ ۴) صفر یا ۳

۲۶۴- اگر یکی از عددهای a، $a+۵$، $a+۱۰$ و b همواره بر ۴ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ $b-a$ بر ۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳