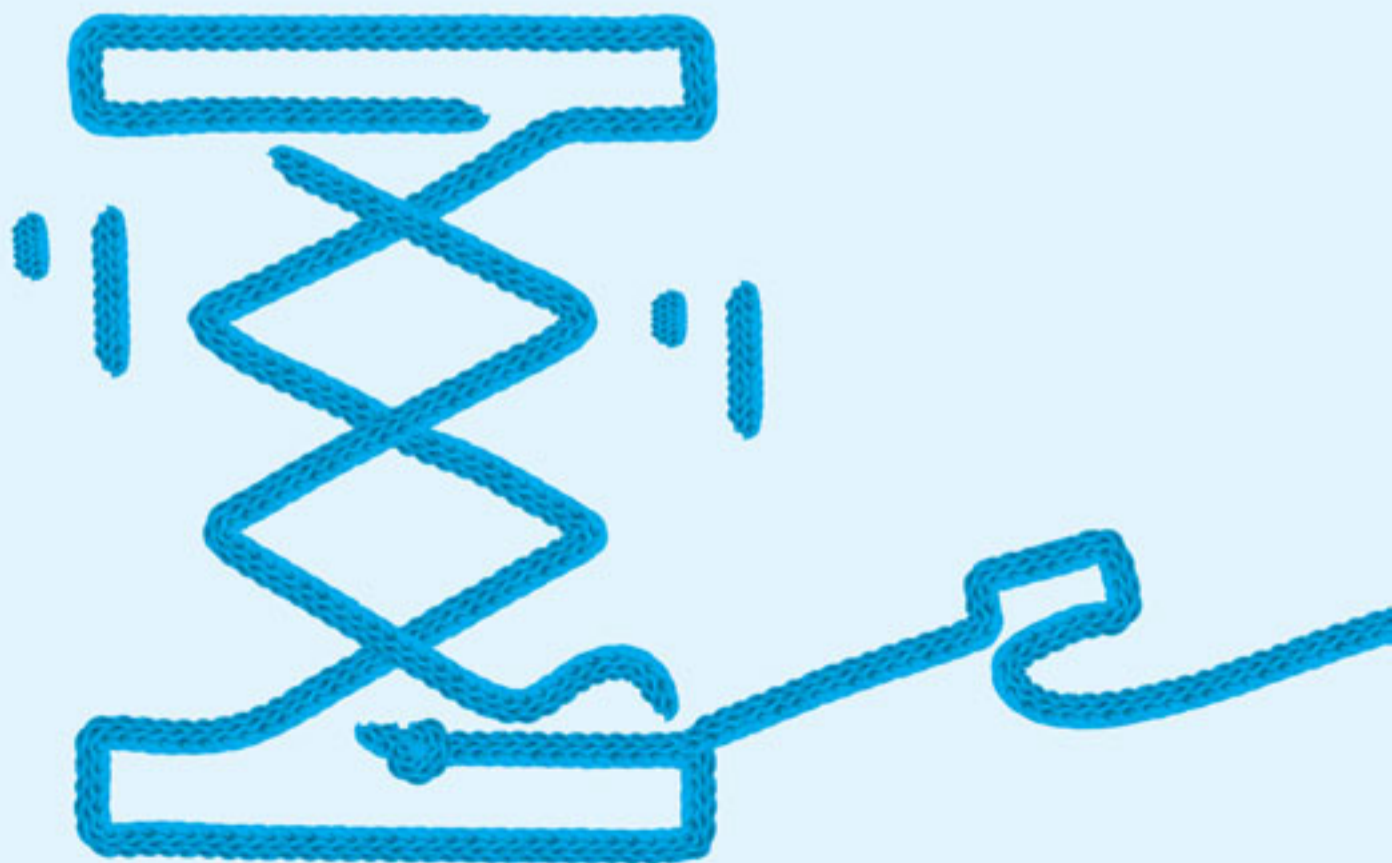


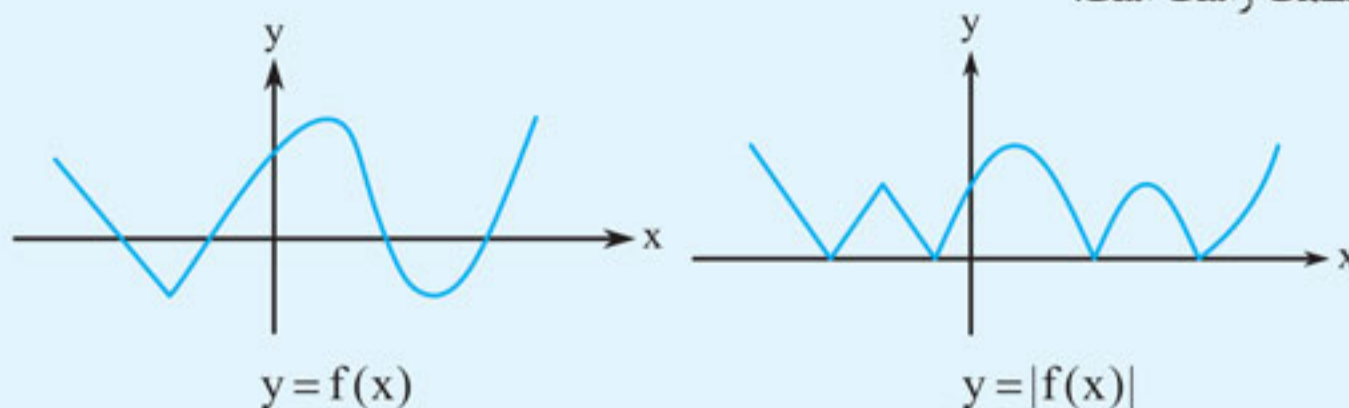
کاربرد مشتق

- تا این جا حسابی با مشتق آشنا شدیم.
- کاربردهایی از آن را (در محاسبه حد)، در یافتن معادله خط مماس و البته آهنگ تغییر لحظه‌ای توابع دیده‌ایم.
- در این فصل درباره یکنوایی، نقاط بحرانی و اکسترمم‌ها بحث می‌کنیم.
- بیشتر مشتق‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم، ساده‌اند. در کل، مباحث نسبتاً دشوار هستند، پس به چند قضیه کمی نیاز خواهیم داشت. فصل کوتاه است و سهمیه کنکوری‌اش ۲ سؤال است.
- با این که فصل سختی است و امکان طرح مسائل دشوار از آن، به سادگی وجود دارد، ولی طراحان عزیز و گرامی کنکور معمولاً مهربان برخورد می‌کنند. در هر حال، اگر خیلی بدشانس باشید، مسائلی در سطح هایپر تست خواهید دید (و در بدترین سناریو، مسائلی با نصف دشواری نیترو تست).
- مواد لازم: تعیین علامت - حل معادله - مشتق - نمودار



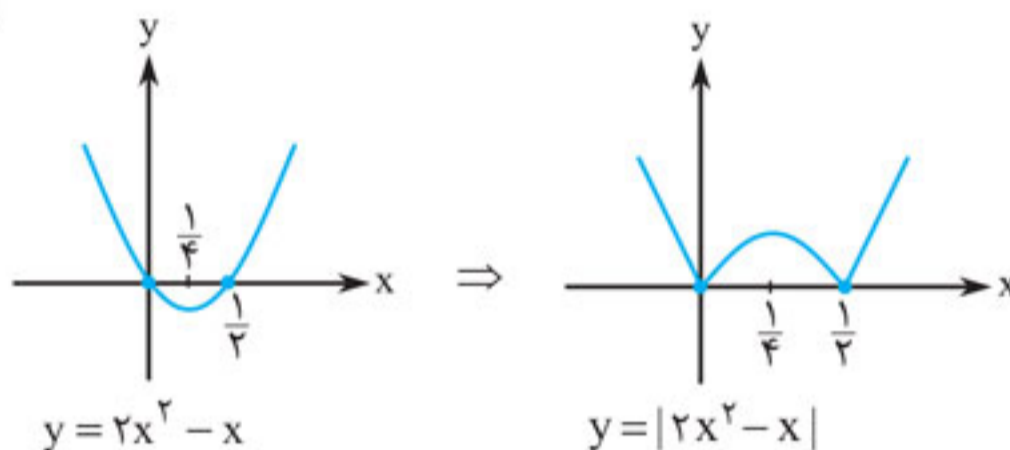


نکته اگر نمودار $y = f(x)$ شکل سمت چپ باشد، آن گاه نمودار $y = |f(x)|$ هم به صورت شکل سمت راست است:

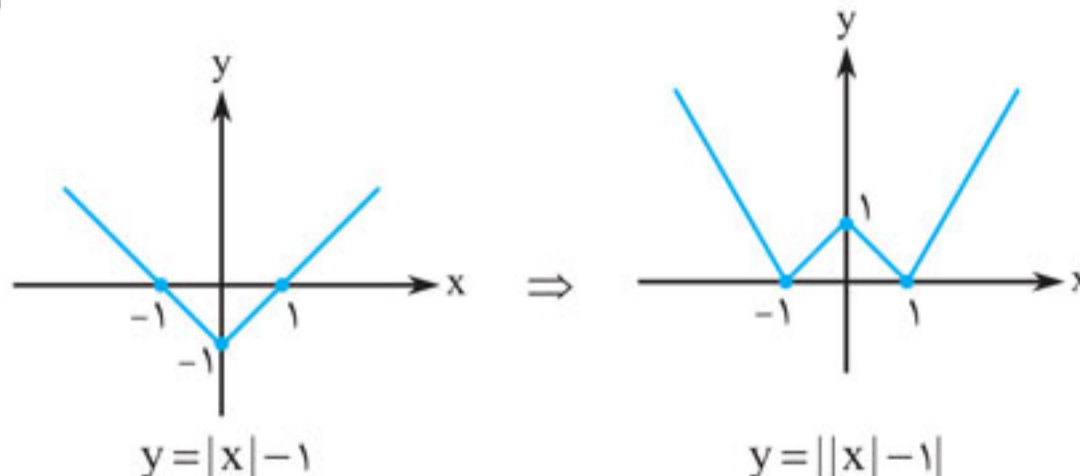


مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید:

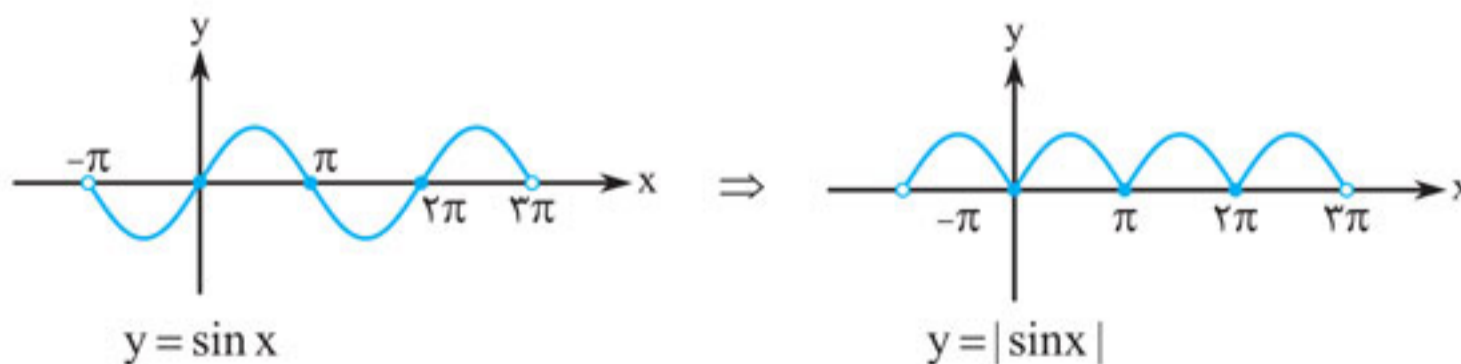
۱ $y = |2x^2 - x|$



۲ $y = ||x| - 1|$




۳ $y = |\sin x| ; x \in (-\pi, 3\pi)$




نکته اگر نمودار $y = f(x)$ را داشته باشیم، آن گاه از روی این نمودار می‌توانیم نقاطی که $f(x)$ در آن مشتق ندارد را تعیین کنیم. این نقاط عبارتند از:

۱ نقاطی که در آن‌ها پیوسته نیست. این نقاط به فرم $y = f(x)$ یا $y = f(x)$ و امثال این‌ها هستند.



۲ نقاط نوک تیز نمودار: مانند  به این نقاط، نقاط گوشه‌ای می‌گویند. (نقاط A و B)

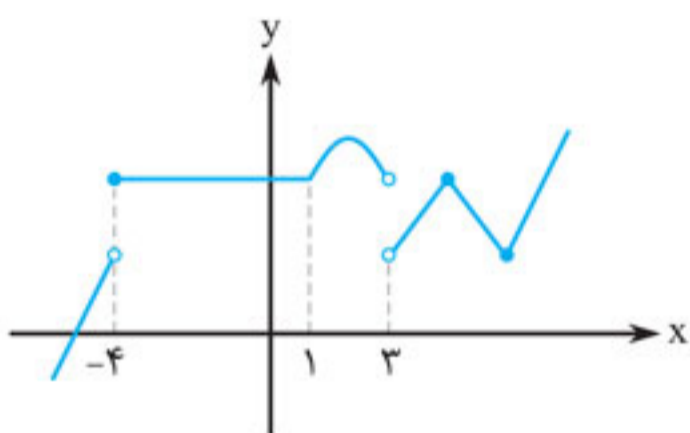
۳ نقاطی که در آن‌ها خط مماس به صورت عمودی است. این نقاط را صورت مسئله تا حد خوبی مشخص

می‌کند. این شکلی هستند:  در این حالت می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطه A، مماس قائم دارد.

■ در مثال ۱، با توجه به نمودار $y = |2x^2 - x|$ می‌فهمیم که این تابع دو نقطه گوشه‌ای دارد. لذا در دو نقطه مشتق‌ناپذیر است. تابع $f(x) = ||x| - 1|$ سه نقطه گوشه‌ای دارد و تابع $x \in (-\pi, 3\pi)$ ؛ $y = |\sin x|$ هم سه نقطه گوشه‌ای دارد.

مثال نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل است. این تابع در چند نقطه از دامنه‌اش، مشتق‌پذیر نیست؟

پاسخ تابع در $x = -4$ ناپیوسته است. در $x = 1$ نقطه گوشه‌ای دارد. دقت کنید $x = 3$ اصلاً در دامنه نیست، پس نباید بررسی شود. دو نقطه گوشه‌ای بزرگ‌تر از ۳ هم دارد. جمعاً در چهار نقطه مشتق‌ناپذیر است.



نکته تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول x_0 ، به صورت زیر است:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$2 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

هر دو تعریف بالا، معادل هستند.

مثال با توجه به نکته بالا، داریم:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(2)}{x - 2} = (f(x)g(x))'_{x=2} = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$$

$$3 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)f(x_0 + h) - x_0 f(x_0)}{h} = (xf(x))'_{x=x_0} = f(x_0) + x_0 f'(x_0)$$

■ چه مشتق‌هایی را با تعریف حد حل کنیم؟ جوابش ساده است. هر جا قدرمطلق، جزء صحیح یا تابع چندضابطه‌ای دیدیم، از تعریف حدی مشتق، مسئله را حل می‌کنیم.

مثال فرض کنید $f(x) = x^2 |x - 1|$ باشد. در این صورت $f'_+(1)$ را بیابید.

پاسخ دقت کنید $f'_+(1)$ ، یعنی مشتق راست $f(x)$ در $x = 1$ ، با تعریف حدی به صورت حد راست بیان می‌شود:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 |x - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 (x - 1)}{(x - 1)} = 1$$



در همین مثال مشتق $f'_-(1)$ را هم حساب می‌کنیم:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 |x - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2(x - 1)}{x - 1} = -1$$

از آن جا که $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ است، لذا تابع $f(x)$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست. در این مثال نقطه $x = 1$ یک نقطه گوشه‌ای است زیرا اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد ولی $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ هر دو موجود ولی نابرابر باشند، آنگاه $x = a$ نقطه گوشه‌ای است. حتی اگر یکی از مشتقات چپ یا راست وجود نداشته باشد و دیگری وجود داشته باشد، باز هم نقطه گوشه‌ای است.

نکته اگر $f(x)$ یک تابع باشد، آن گاه به $f'(x)$ مشتق اول $f(x)$ می‌گویند. به مشتق $f'(x)$ ، مشتق دوم تابع $f(x)$ می‌گویند و با $f''(x)$ نمایش می‌دهند. به مشتق $f''(x)$ ، مشتق سوم $f(x)$ می‌گویند و با $f'''(x)$ نمایش می‌دهند. مثلاً از این تعریف متوجه می‌شویم که مشتق دوم $f'(x)$ ، همان $f'''(x)$ یعنی مشتق سوم $f(x)$ است.

مثال فرض کنید $f(x) = x^3 + 2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ باشد. در این صورت $f''(4)$ را به دست آورید.

$$1) f'(x) = 3x^2 + 4x + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

پاسخ

$$2) f''(x) = 6x + 4 - \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f''(4) = 24 + 4 - \frac{3}{4}(4)^{-\frac{5}{2}} = 28 - \frac{3}{4 \times 2^5} = 28 - \frac{3}{128} = \frac{3581}{128}$$

نکته فرض کنید $f(x)$ تابعی دلخواه باشد. منظور از آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ بر بازه $[a, b]$ ، کسر زیر است:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

در بعضی از مسائل می‌گویند، آهنگ متوسط تغییر در نقطه $x = x_0$ با نمو Δx ، که باید از فرمول

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

استفاده کنیم.

مثال آهنگ متوسط تغییر توابع زیر در بازه‌های داده شده را به دست آورید.

$$1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; [4, 9] \Rightarrow \frac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{5} = \frac{-1}{30}$$

$$2) f(x) = x^2 + 8x; [-1, 2] \Rightarrow \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{20 - (-7)}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

$$3) f(x) = \frac{2x+1}{x+3}; [0, 2] \Rightarrow \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{5}{5} - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

مثال آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x = 1$ و نمو $\Delta x = 0.44$ را بیابید.

پاسخ این بار باید از فرمول دوم برویم:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1/44) - f(1)}{0.44} = \frac{\frac{2/44}{\sqrt{1/44}} - \frac{2}{\sqrt{1}}}{0.44} = \frac{2/44 - 2}{0.44} = \frac{5}{66}$$

نکته فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. آهنگ لحظه‌ای تغییر (یا آهنگ آنی تغییر) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ ، همان $f'(x_0)$ است.

مثال فرض کنید $f(x) = \sqrt{x} + x$ باشد. آهنگ آنی تغییر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = 9$ را به دست آورید.

پاسخ آهنگ لحظه‌ای یا آنی، یعنی مشتق: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$

مثال آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x}}$ در بازه $[1, 4]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در $x = \alpha$ برابر است. α را بیابید.

(مشابه تجربی خارج ۹۴)

پاسخ صورت مسئله می‌گوید:

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(\alpha) \Rightarrow \frac{\frac{9}{2} - 3}{3} = \frac{2(\sqrt{\alpha}) - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(2\alpha + 1)}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \alpha\sqrt{\alpha} = 2\alpha - 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} \alpha^3 = (2\alpha - 1)^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 \Rightarrow \alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha^3 - 1) - 4\alpha(\alpha - 1) = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1 - 4\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ یا } \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{چک}} \alpha = 1 \text{ یا } \alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

توجه بسیار مهم است که دقت کنیم طراح از ما آهنگ تغییر چه تابعی را می‌خواهد.

مثال فرض کنید $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x}$ باشد. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $x^2 f(x)$ ، در نقطه‌ای به طول ۲ را بیابید.

پاسخ دقت کنید که کسی از ما آهنگ تغییر $f(x)$ را نخواسته. سؤال آهنگ تغییر لحظه‌ای $y = x^2 f(x)$ را می‌خواهد و لذا باید از همین تابع مشتق بگیریم:

$$y = x^2 f(x) = 3x^2 + x \xrightarrow{} y' = 9x^2 + 1 \xrightarrow{x=2} y' = 9 \times 4 + 1 = 37$$

تست نقطه $M(x, y)$ روی نمودار $y = \sqrt{x+3}$ در حال حرکت است. آهنگ لحظه‌ای تغییر فاصله

نقطه M از مبدأ وقتی $x = 1$ است، برابر کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (1) \quad \frac{3}{2\sqrt{5}} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4)$$

پاسخ گزینه «۲» دقت کنید که مبدأ $O(0, 0)$ است و فاصله $M(x, y)$ از مبدأ برابر است با:

$$|MO| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|MO| = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+3})^2} = \sqrt{x^2 + x + 3} \quad \text{لذا: می‌دانیم که } y = \sqrt{x+3} \text{ است.}$$

این $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$ تابعی است که قرار است از آن مشتق بگیریم:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$



نکته اگر $f(x)$ تابعی درجه ۲ باشد، یعنی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، آن‌گاه آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ در بازه $[x_1, x_2]$ ، با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در مرکز این بازه، یعنی در $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ، برابر است. به عبارتی:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

مثال آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 12$ در بازه $[\sqrt{2} + 1, 5 - \sqrt{2}]$ را به دست آورید.

پاسخ با توجه به نکته قبل، کافی است مقدار $f'(x)$ را در مرکز بازه، یعنی در $\frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2} = 3$ حساب کنیم:

$$f'(x) = x + 3 \xrightarrow{x=3} f'(3) = 6$$

معادله خط مماس

اصل مطلب فرض کنید $y = f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. برای نوشتن معادله خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ از نقطه‌ای واقع بر آن، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ مختصات نقطه تماس را به دست می‌آوریم. معمولاً صورت مسئله طول نقطه تماس را می‌دهد:

$x = x_0$. با داشتن x_0 ، به راحتی و با قراردادن در ضابطه $y = f(x)$ می‌توانیم عرض نقطه تماس را پیدا کنیم، یعنی $y_0 = f(x_0)$. حالا نقطه تماس $A = (x_0, y_0)$ را داریم.

۲ شیب خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ در $x = x_0$ برابر با $a = f'(x_0)$ است.

۳ اگر از ما معادله خط مماس را بخواهند، چنین است:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

اما اگر از ما معادله خط عمود (یا قائم) را بخواهند، همین مراحل را می‌نویسیم ولی معادله آخر

$$y - y_0 = -\frac{1}{a}(x - x_0) \text{ است.}$$

مثال معادله خط عمود بر نمودار $y = x^3 + 2x$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر آن را بیابید.

پاسخ چون سؤال گفته نقطه واقع بر نمودار است، پس باید مانند نکته قبل عمل کنیم. اول نقطه تماس را

پیدا می‌کنیم. با داشتن $x = 1$ ، به سادگی $y = 3$ به دست می‌آید. لذا $A(1, 3)$. حالا شیب را به کمک مشتق به دست می‌آوریم:

$$y' = 3x^2 + 2 \xrightarrow{x=1} y'(1) = 5 \Rightarrow a = 5$$

حالا چون معادله خط عمود (قائم) را در نقطه $A(1, 3)$ می‌خواهیم، می‌شود:

$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{x}{5} + \frac{16}{5}$$

مثال فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، به نحوی که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 6}{x - 2} = 3$ است. معادله خط مماس بر

نمودار $y = 2x + f(x)$ ، در نقطه‌ای به طول $x = 2$ ، واقع بر این نمودار را به دست آورید.

پاسخ اولاً از $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 6}{x - 2} = 3$ نتایج جالبی به دست می‌آوریم. چون حد مخرج صفر است ولی حد کسر $+\infty$

یا $-\infty$ نیست، پس باید حد صورت هم صفر باشد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 6) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$$

۵. فرض کنید $f(x) = x^3 - 6x$ باشد. خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ در نقطه دلخواه $(x_1, f(x_1))$ نمودار $y = f(x)$ را در نقطه دیگری به مختصات (x_2, y_2) قطع می‌کند. تابع $g(x)$ به این صورت تعریف می‌شود که $g(x_1) = y_2$. ضابطه $g(x)$ کدام است؟

$$g(x) = -8x^3 + 12x \quad (1)$$

$$g(x) = 8x^3 - 12x \quad (2)$$

$$g(x) = -4x^3 + 6x \quad (3)$$

$$g(x) = 4x^3 - 6x \quad (4)$$

۶. خط $y = mx$ بر نمودارهای $y = x^2 + ax + 4$ و $y = 3x^2 + (2a+1)x + 3$ مماس است. بیشترین مقدار $m+a$ کدام است؟

$$20 \quad (1) \qquad 21 \quad (2) \qquad 22 \quad (3) \qquad 23 \quad (4)$$

۷. فرض کنید $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ باشد. خط L ، در نقطه‌ای به طول $x = 2$ بر نمودار $y = f(x)$ مماس است. خط L' موازی L و مماس بر $y = f(x)$ است. این خطها نمودار را در نقاط A, B, C, D قطع می‌کنند. مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

$$6 \quad (1) \qquad 9 \quad (2) \qquad 12 \quad (3) \qquad 15 \quad (4)$$

۸. فرض کنید $f(x) = \frac{x-1}{x^4+x-2}$ باشد و عرض از مبدأ خط مماس بر تابع $g(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$ ، در نقطه‌ای به طول $x = k$ واقع بر آن، برابر ۳ باشد. شیب این خط مماس کدام است؟

$$1 \pm \frac{6}{\sqrt{3}} \quad (1) \qquad -1 \pm \frac{6}{\sqrt{3}} \quad (2) \qquad 2 \pm \frac{12}{\sqrt{3}} \quad (3) \qquad -2 \pm \frac{12}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

۹. فرض کنید $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ باشد. نقطه $M(x, y)$ روی نمودار $y = f^{-1}(x)$ در حرکت است. آهنگ لحظه‌ای تغییر فاصله نقطه $M(x, y)$ از مبدأ مختصات، در نقطه‌ای به طول ۱ کدام است؟

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (1) \qquad \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (2) \qquad \frac{5}{2\sqrt{2}} \quad (3) \qquad \frac{7}{2\sqrt{2}} \quad (4)$$

۱۰. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 = x + 1$ باشند، آن‌گاه تابع $f(x) = |\alpha x^2 + x + \beta|(\beta x^2 + x + \alpha)$ چند نقطه مشتق‌ناپذیر دارد؟

$$0 \quad (1) \qquad 1 \quad (2) \qquad 2 \quad (3) \qquad 3 \quad (4)$$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینه «۱» طبق تعریف مشتق:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{5^2} = \frac{1}{5}$$

اما:

ولی چون $f(x)$ مشتق پذیر است، پس پیوسته نیز هست. لذا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ و این یعنی $f(2) = 6$ است. از طرفی بنا به قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{1} = f'(2) \Rightarrow f'(2) = 3$$

حالا برویم سراغ خط مماس بر تابع $y = 2x + f(x)$ در نقطه $x = 2$ واقع بر آن:

$$1) x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \times 2 + f(2) = 4 + 6 = 10 \Rightarrow A = (2, 10)$$

$$2) a = y'(2) \Rightarrow y' = 2 + f'(x) \Rightarrow y'(2) = 2 + f'(2) = 2 + 3 = 5$$

$$3) \text{ معادله خط مماس: } y - 10 = 5(x - 2) \Rightarrow y = 5x$$

■ انتظار چنین سؤال دشواری برای کنکور را داشته باشید. خوب خوب تمرینش کنید تا سر جلسه غافلگیر نشوید. حالا اگر نقطه بیرون از نمودار بود چه کنیم؟ خدا را شکر کنید که در کتاب مهروماه نکته زیر را می خوانید:

نکته فرض کنید $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد و نقطه $B(x_1, y_1)$ ، نقطه ای بیرون نمودار $y = f(x)$ باشد. برای این که معادله خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ و گذرنده از نقطه B را پیدا کنیم، ابتدا باید نقطه تماس را پیدا کنیم و بعد به کمک نکته قبل مسئله را حل کنیم. اما نقطه تماس را چه طور پیدا کنیم؟ جواب معادله زیر، همان طول نقطه تماس است:

$$1) \frac{f(x) - y_1}{x - x_1} = f'(x)$$

اگر مسئله از ما معادله خط قائم یا خط عمود را بخواهد، جواب معادله زیر، طول نقطه تماس خواهد بود:

$$2) \frac{f(x) - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{f'(x)}$$

این نکته کارتان را خیلی ساده تر می کند!

مثال معادله خط مماس بر $y = x^2 - 2x$ که از نقطه $(2, -1)$ می گذرد را بنویسید.

پاسخ از آن جا که $(2, -1)$ در ضابطه $y = x^2 - 2x$ صدق نمی کند، پس این نقطه خارج از نمودار این تابع است. چون خط مماس را می خواهیم، پس باید از معادله 1 در نکته قبل استفاده کنیم:

$$\frac{f(x) + 1}{x - 2} = f'(x) \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = (2x - 2)(x - 2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$$

پس مسئله دو جواب دارد. حالت اول $x_1 = 3$ است:

$$1) x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 9 - 6 = 3 \Rightarrow A = (3, 3)$$

$$2) a = y'(3) \xrightarrow{y'(x) = 2x - 2} a = 6 - 2 = 4$$

$$3) \text{ خط مماس: } y - 3 = 4(x - 3) \Rightarrow y = 4x - 9$$

$$1) x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow A = (1, -1)$$

حالت دوم هم $x_2 = 1$ است:

$$2) a = y'(1) \xrightarrow{y'(x) = 2x - 2} a = 2 - 2 = 0$$

$$3) \text{ خط مماس: } y + 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y = -1$$



مثال عرض از مبدأ خط گذرنده از نقطه $(-2, 1)$ و مماس بر نمودار $y = 2\sqrt{x}$ را به دست آورید.
پاسخ به وضوح $x = -2$ اصلاً در دامنه $y = 2\sqrt{x}$ نیست، لذا $(-2, 1)$ نقطه‌ای خارج از نمودار $y = 2\sqrt{x}$ است. چون دنبال خط مماس هستیم، پس باید از رابطه ۱ در نکته قبل کمک بگیریم:

$$\frac{f(x)-1}{x-(-2)} = f'(x) \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{x+2} = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Rightarrow \sqrt{x}(2\sqrt{x}-1) = x+2 \Rightarrow 2x-\sqrt{x} = x+2$$

$$\Rightarrow x-\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \text{ یا } \sqrt{x}=-1 \text{ (غ‌ق) } \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$$

لذا طول نقطه تماس $x_1 = 4$ است. پس:

$$1) y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y_1 = 2\sqrt{4} = 4 \Rightarrow A = (4, 4)$$

$$2) a = y'(4) \xrightarrow{y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}} a = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$3) \text{ عرض از مبدأ } = 2 \text{ : خط مماس } y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

■ از آزمون (۱) لذت ببرید. مشتق هم تمام شد.

آزمون تستی



۱. فرض کنید $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = 2$ از آهنگ متوسط تغییر در بازه $[1, 4]$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۸)

- (۱) $0/25$ (۲) $0/5$ (۳) $0/45$ (۴) $0/75$

۳. خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ ، در نقطه $x = 2$ مشترک‌اند. مقدار b ، کدام است؟

(تجربی خارج ۹۹)

(منظور طراح محترم این است که در نقطه به طول ۲ واقع بر هر دو نمودار، معادله خط مماس یکسان است و در واقع دو خط مماس منطبق‌اند)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴. تابع با ضابطه $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۰)

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴) -۱۲

۵. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ و دامنه $[0, 8]$ ، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

(تجربی خارج ۹۸)

- (۱) -۲ (۲) -۱/۵ (۳) -۱ (۴) -۰/۵

۶. تابع $f(x) = ||x^2 - 4| - 2|$ ، در چند نقطه مشتق ندارد؟ (با دقت رسم کنید و اصلاً عجله نکنید.) (مشابه ریاضی خارج ۹۸)

- ۸ (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴)

۷. شیب خط گذرنده از نقطه $(2, 4)$ و مماس بر نمودار تابع $y = 4\sqrt{x} - x$ ، کدام است؟

- ۱ یا ۰ (۱) ۲ یا ۰ (۲) ۴ یا ۲ (۳) ۴ یا ۱ (۴)

۸. خط مماس بر منحنی $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ، در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر آن، در همین نقطه بر $y = 2x^2 + ax + b$ هم مماس است. b کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) چنین چیزی ممکن نیست.

۹. اگر خط $y = 3x + 1$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار $y = x + f(x)$ مماس باشد، آن‌گاه حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(2x) - f'(2)}{x^3 - 1}$ ،

برابر کدام است؟ (یادتان نرود که در اکثر حدهای $\frac{0}{0}$ ، هوییتال را دارید.) (مشابه ریاضی خارج ۹۸)

- ۷ (۱) ۱۰ (۲) $\frac{20}{3}$ (۳) $\frac{40}{3}$ (۴)

۱۰. در تابع $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)$ در بازه $[2, 3]$ ، با آهنگ متوسط تغییر همین

تابع در بازه $[-1, a]$ برابر است. a کدام است؟ (درباره تابع درجه ۲، کدام نکته مهم را داشتیم؟)

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)



هایپر تست



۱. خطی که در نقطه $(1, 2)$ بر $y = 2x^2 + x - 1$ مماس است، در نقطه به طول ۳ بر $y = \frac{2x+a}{bx+1}$ مماس است. مجموعه مقادیر ممکن a کدام است؟

- ۱ (۱) $\{6, 8\}$ ۲ (۲) $\{-6, 2\}$ ۳ (۳) $\{3, -9\}$ ۴ (۴) $\{-4, -2\}$

۲. فرض کنید $f(x) = [x]|x - [x]|$ باشد. در این صورت مشتق راست $f(x)$ در $x = 1$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) وجود ندارد.

۳. خط $y = mx + 1$ در نقطه‌ای به طول $x = -2$ بر نمودار $y = mx^2 + 3x + n$ مماس است. مقدار n کدام است؟

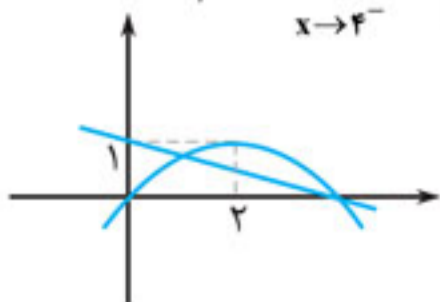
(مشابه تجربی خارج ۹۷)

- ۱ (۱) $\frac{11}{3}$ ۲ (۲) $\frac{15}{4}$ ۳ (۳) $\frac{17}{5}$ ۴ (۴) $\frac{19}{6}$

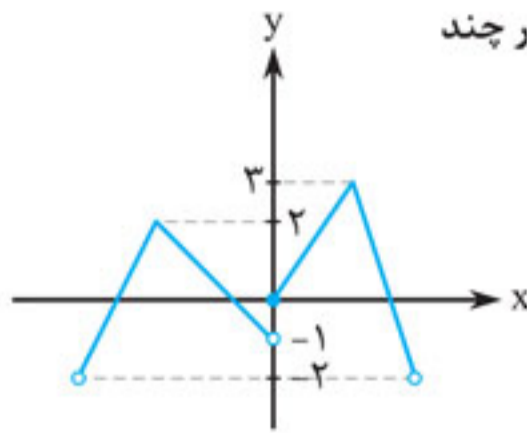
۴. به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = -3x + 2$ بر منحنی $y = \frac{x^2 + a}{x - 2}$ مماس است؟ (ریاضی ۹۵)

- ۱ (۱) -۱ ۲ (۲) صفر ۳ (۳) ۱ ۴ (۴) ۲

۵. نمودار سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x}$ ، کدام است؟



- ۱ (۱) $-\frac{3}{2}$ ۲ (۲) $-\frac{5}{4}$ ۳ (۳) $\frac{5}{4}$ ۴ (۴) $\frac{3}{2}$



۶. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو است. تابع $y = f(x) + |f(x)|$ در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۷. در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & ; x \geq 3 \\ 2-x & ; x < 3 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h^2) - f(3)}{h^2}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) ۳ یا -۱ (۴) وجود ندارد

۸. تابع $f(x) = |x^2 - (a+3)x + 3a|$ در \mathbb{R} مشتق‌پذیر است. a را بیابید.

- (۱) $a \in (1, +\infty)$ (۲) $a = 3$ (۳) $a = -3$ (۴) نشدنی

۹. نقطه $M(x, y)$ روی نمودار $y = 2\sqrt{x-1} + 3$ در حرکت است. آهنگ لحظه‌ای تغییر فاصله نقطه M از نقطه $A(2, 3)$ وقتی $x = 2$ است برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰. خط $y = ax + 2$ بر منحنی $y = x^3 + bx^2$ در نقطه‌ای به طول ۱ مماس است. این خط و این منحنی در یک نقطه دیگر هم تلاقی دارند. مجموع طول و عرض این نقطه، چند است؟ (اگر صورت مسئله را به خوبی متوجه شوید، راه حل هم ساده است)

- (۱) -۸ (۲) -۶ (۳) ۸ (۴) ۶



نیترتست



۱. از نقطه $A(1, 2)$ دو خط مماس بر سهمی $y = x^2 + x + 1$ رسم کرده‌ایم. اگر نقاط تماس B و C باشند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲. فرض کنید $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ باشد. اگر خط $y = f''(x)$ بر نمودار $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۱ مماس باشد، مقدار b کدام است؟

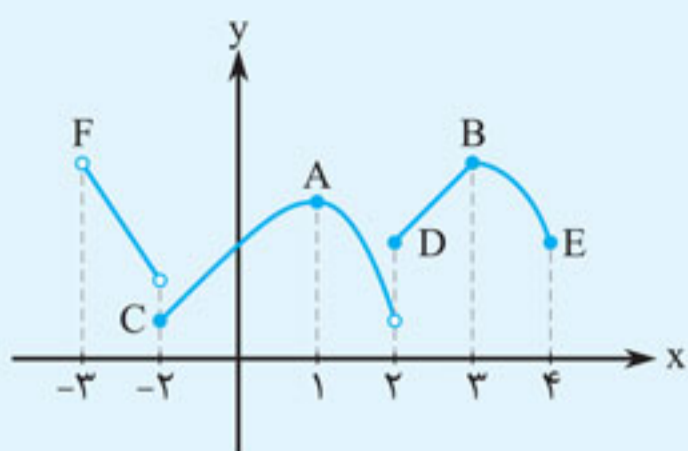
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳. اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & ; x \geq 1 \\ x^3 + x + 1 & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ در بازه $[1, 4]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{3}$ (۲) $\frac{13}{3}$ (۳) $\frac{14}{3}$ (۴) $\frac{16}{3}$

۴. فرض کنید $f(x+1) = x^3 + 2\sqrt{x+3}$ باشد. عرض از مبدأ خط مماس بر $y = f^{-1}(x) + x$ در نقطه‌ای به طول ۵ واقع بر نمودار، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$



اصل مطلب نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل را در نظر بگیرید. از روی نمودار می‌فهمیم که $f(x)$ روی بازه $(-3, -2)$ اکیداً نزولی است. روی بازه $[-2, 1]$ اکیداً صعودی و روی بازه $[1, 2]$ اکیداً نزولی است. همچنین روی بازه $[2, 3]$ اکیداً صعودی و روی $[3, 4]$ اکیداً نزولی است. قسمت اول کاربرد مشتق، تشخیص این بازه‌ها، نه از روی نمودار، بلکه از روی ضابطه $f(x)$ است. (دو نکته اول).

به نقطه A توجه کنید. این نقطه از همسایه‌های نزدیک خود بالاتر است. به چنین نقطه‌ای یک ماکزیمم نسبی می‌گوییم. یک تابع ممکن است یک، دو، هزار، بی‌شمار یا هیچ ماکزیمم نسبی داشته باشد. معمولاً برای راحتی، نقطه‌های ماکزیمم نسبی را Max_L می‌نامیم. در این مثال $Max_L = A, B$. به طریق مشابه، نقطه C هم از همسایه‌های نزدیک خود پایین‌تر است. این نقطه را مینیمم نسبی می‌گویند و با Min_L نمایش می‌دهیم. یک تابع می‌تواند هیچ، یک یا چندین Min_L داشته باشد. در این مسئله $Min_L = C$.

نقطه D با این که نقطه مشکوکی است، اما نه Max_L است و نه Min_L . زیرا D از همسایه‌های سمت چپ خود بالاتر و از همسایه‌های سمت راست خود پایین‌تر است. به هر نوع نقطه مشکوک روی نمودار (که بعداً کاملاً مشخص می‌شوند)، نقطه بحرانی می‌گویند. در این مسئله A, B, C و D نقاطی بحرانی‌اند. به علاوه، نقاط ابتدا یا انتهای نمودار، اگر در دامنه باشند، بحرانی حساب می‌شوند. لذا E هم بحرانی است، اما F بحرانی نیست.

■ **یکنوایی و ماکزیمم و مینیمم‌های نسبی:** اگر $y = f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، برای تعیین بازه‌های صعودی و نزولی تابع $f(x)$ ، کافی است از آن مشتق بگیریم و سپس $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم. در ضمن، همین جدول همه Max نسبی و Min نسبی‌ها را مشخص می‌کند.

مثال تابع $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 2$ روی چه بازه‌های صعودی و روی چه بازه‌های نزولی است؟ Max_L, Min_L آن را بیابید.

| | | |
|---------|----------------|---------|
| x | $-\frac{5}{3}$ | 1 |
| $f'(x)$ | + | - |
| $f(x)$ | Max_L | Min_L |

پاسخ ابتدا دقت کنید که $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x + 5)(x - 1)$

که باید تعیین علامت‌ش کنیم:

همان‌طور که می‌بینید، روی $f(x)$ روی $(-\infty, -\frac{5}{3}]$ اکیداً صعودی، روی

$(-\frac{5}{3}, 1)$ اکیداً نزولی و روی $(1, +\infty)$ هم اکیداً صعودی است. در

$x = -\frac{5}{3}$ ، یک قله به وجود آمده است که یعنی Max نسبی و در

$x = 1$ یک دره به وجود آمده است که یعنی Min نسبی. برای یافتن عرض این نقاط، کافی است در $f(x)$ عددگذاری کنیم:

$$1) \quad x_{Min} = 1 \Rightarrow y_{Min} = f(x_{Min}) = f(1) = 1 + 1 - 5 + 2 = -1 \Rightarrow Min_L = (1, -1)$$



دسته دوم:

$$((x-2)(x^2-x))' = 0 \Rightarrow (x^3 - 2x^2 + 2x)' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta} x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

که با جای گذاری در ضابطه $f(x)$ می توانیم عرض این نقاط را هم پیدا کنیم. کلاً این تابع چهار نقطه بحرانی داشت.

تست

نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس یک مثلث هستند.

مساحت این مثلث کدام است؟

(مشابه ریاضی ۹۲)

۸ (۴)

۶ (۳)

۴/۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ گزینه «۳»

اول نقاط بحرانی $f(x)$ را پیدا می کنیم:

$$۱) x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } -2 \Rightarrow A(1, 0), B(-2, 0)$$

$$۲) ((x-1)(x^2+x-2))' = 0 \Rightarrow (x^3 - 3x + 2)' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -1$$

$$\Rightarrow A(1, 0), C(-1, -4)$$

لذا در واقع سه نقطه بحرانی وجود دارد که عبارتند از $A(1, 0)$ ، $B(-2, 0)$ و $C(-1, -4)$. مساحت مثلث ABC هم از فرمول بندکفشی:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(0+8-0) - (0+0-4)| = 6$$

نکته هر عدد صحیح یک نقطه بحرانی برای تابع $f(x) = ax - a[x]$ است. اگر $a > 0$ (یعنی ضریب

x مثبت باشد)، این نقاط بحرانی، همه Min نسبی اند. اما اگر $a < 0$ باشد، همه این نقاط بحرانی Max نسبی اند. البته باید حواسمان به نقاط ابتدا یا انتهای بازه باشد.

مثال فرض کنید $f(x) = 3[x] - 3x : x \in [-2, 3]$ باشد. در این صورت، $f(x)$ چند نقطه بحرانی و از چه انواعی دارد؟

پاسخ اولاً $x = -2$ و $x = 3$ ، نقاط ابتدا و انتهای دامنه، نقاطی بحرانی اند. ولی اکستریم نسبی نیستند. اما برای بقیه اعداد صحیح بازه $(-2, 3)$ ، یعنی عددهای $-1, 0, 1, 2$ ، باید علامت a را پیدا کنیم. a هم علامت ضریب x است نه $[x]$ ، که در این جا -3 است. لذا این نقاط، طول ماکزیمم های نسبی این تابع اند. برای یافتن عرض نقاط، کافی است عددگذاری کنیم، که می شود: $(-1, 0)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(2, 0)$.

نکته به طور کلی اگر $(c, f(c))$ یک اکستریم نسبی باشد، حتماً نقطه ای بحرانی هم هست. اما یک نقطه

بحرانی ممکن است اکستریم نسبی نباشد. در واقع، نقاط بحرانی صرفاً نقاط مشکوک تابع برای بررسی اکستریم ها هستند و در خیلی از مواقع، اکثر آنها نقاط بی اهمیتی هستند.

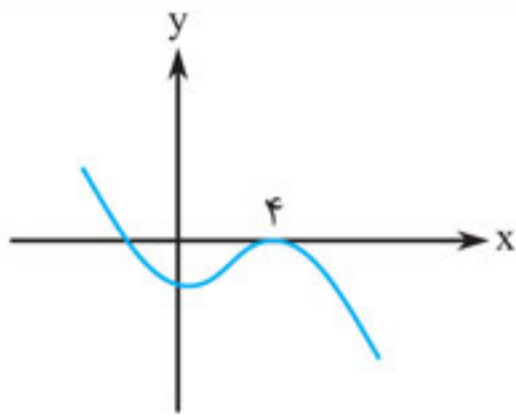


نکته قبلاً گفتیم که اگر (x_0, y_0) یک اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه $y_0 = f(x_0)$

و $f'(x_0) = 0$ است. حالا اگر $f(x)$ تابعی کسری به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ باشد، این قضیه البته که درست

است اما می‌توان از نکته خلی ساده‌تری استفاده کرد، و آن نکته این است که برای توابع کسری مشتق‌پذیر،

اگر (x_0, y_0) یک اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه: $y_0 = \frac{g(x_0)}{h(x_0)}$ و $y_0 = \frac{g'(x_0)}{h'(x_0)}$



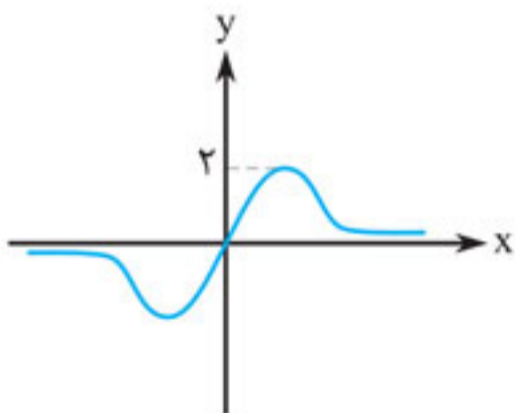
تست نمودار تابع $y = ax^3 + bx^2 - 16$ به صورت مقابل

است. مقدار $2a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ گزینه «۲» دقت کنید که از نمودار معلوم است $x = 4$ هم ریشه مضاعف تابع و هم طول ماکزیمم نسبی آن است. به عبارتی $f(4) = 0$ و طبق نکته قبل، $f'(4) = 0$ است. لذا:

$$\begin{cases} 64a + 16b - 16 = 0 \\ (3ax^2 + 2bx)_{x=4} = 48a + 8b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b - 1 = 0 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 3 \Rightarrow 2a + b = 2$$



مثال شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ است. a را بیابید.

پاسخ در مسائل نمودارها حتماً باید به $f(0)$ توجه کنیم. نمودار از مبدأ

می‌گذرد، پس $f(0) = 0$ است. $f(0) = \frac{a(0)+b}{0^2+1} = b = 0 \Rightarrow b = 0$.

حالا چون نمودار کسری است و $y = 2$ عرض نقطه Max نسبی

است پس طبق نکته قبل، داریم: $\frac{ax}{x^2+1} = \frac{a}{2x} = 2$

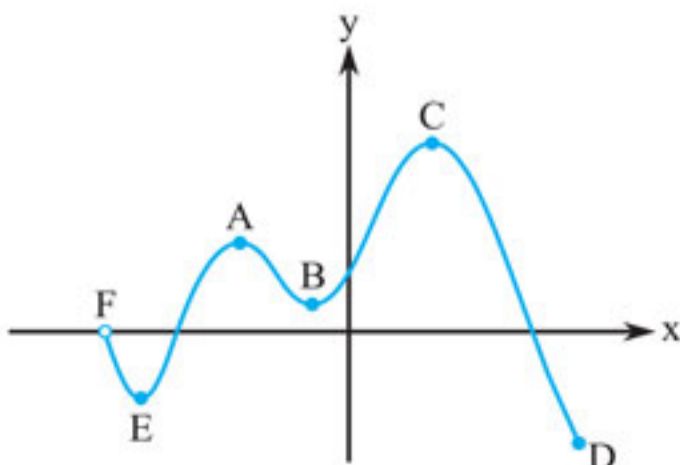
که به دستگاه زیر ختم می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2x} \\ a = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = x^2 + 1 \\ a = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ یا } x = -1 \\ a = 4x \end{cases} \xrightarrow{x > 0} \begin{cases} x = 1 \\ a = 4x = 4(1) = 4 \end{cases}$$

اکسترمم‌های مطلق

نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل را در نظر بگیرید:

می‌دانیم که C و A ماکزیمم‌های نسبی و B و E مینیمم نسبی این تابع هستند. نقطه C علاوه بر این که Max نسبی است، یعنی از همسایه‌های نزدیک به خودش بالاتر است، از همه نقاط نمودار هم بالاتر است. به چنین نقطه‌ای که از همه نقاط یک نمودار بالاتر است، Max مطلق می‌گویند.





$$2) x_{\text{Max}} = -\frac{5}{3} \Rightarrow y_{\text{Max}} = f(x_{\text{Max}}) = f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{-125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{25}{3} + 2 = \frac{229}{27}$$

$$\Rightarrow \text{Max}_L = \left(-\frac{5}{3}, \frac{229}{27}\right)$$

تست

تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x + 2$ همواره صعودی است. حدود a کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی) (مفهومی - محاسباتی)

(۱) $a < 2$ (۲) $a < 3\sqrt{2}$ (۳) $-2 < a < 3\sqrt{2}$ (۴) $-3\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$

پاسخ گزینه «۴»

این که $f(x)$ همواره صعودی است، به معنای آن است که $f'(x)$ همواره نامنفی است.

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + 3$$

و می‌دانیم یک تابع درجه ۲ به شرطی همواره نامنفی است که $\Delta \leq 0$ و ضریب x^2 هم مثبت باشد. در این جا ضریب x^2 برابر ۶ است و درباره Δ داریم:

$$\Delta = 4a^2 - 4 \times 6 \times 3 \leq 0 \Rightarrow a^2 - 18 \leq 0 \Rightarrow (a - \sqrt{18})(a + \sqrt{18}) \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{18} \leq a \leq \sqrt{18}$$

اگر تابع $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 1$ فقط روی بازه $[-2, 1]$ و زیر مجموعه‌هایش نزولی باشد، آن‌گاه $a - b$ کدام است؟

(مفهومی - تکنیکی)

(۱) ۱۵ (۲) ۹ (۳) -۹ (۴) -۱۵

پاسخ گزینه «۱» معنی صورت مسئله این است که جدول تعیین علامت $f'(x)$ چنین است:

| | | | | | |
|---------|--|----|---|---|--|
| x | | -۲ | | ۱ | |
| $f'(x)$ | | + | - | + | |

این یعنی $x_1 = -2$ و $x_2 = 1$ ریشه‌های $f'(x) = 0$ هستند. اما: چون ریشه‌ها $x_1 = -2$ و $x_2 = 1$ هستند، پس:

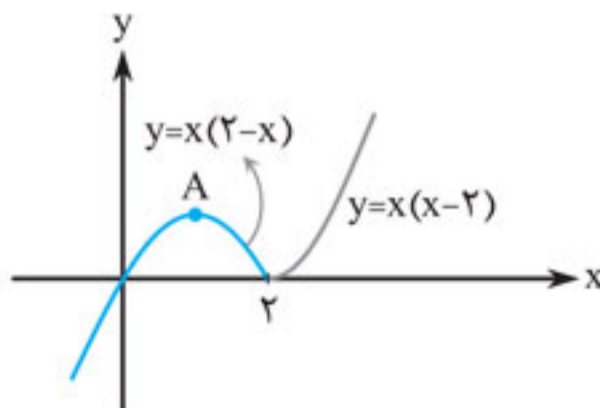
$$6x^2 + 2ax + b = 6(x-1)(x+2) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow 2a = 6, b = -12 \Rightarrow a = 3, b = -12$$

نکته

در توابع چندضابطه‌ای و قدرمطلق‌دار، بهتر است نمودار رسم کنیم.

مثال تابع $f(x) = x|x-2|$ روی چه بازه‌هایی صعودی، روی چه بازه‌هایی نزولی است، و در چه نقاطی ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد؟

پاسخ با رسم $y = x|x-2|$ شروع می‌کنیم:



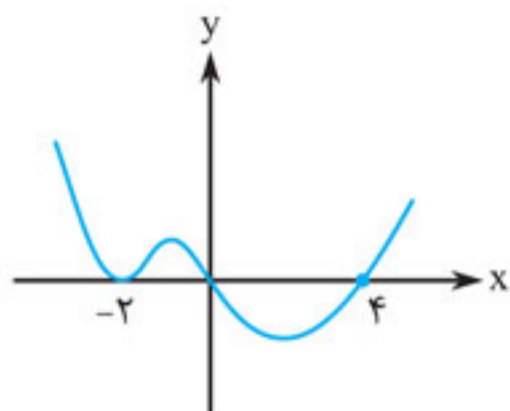
دقت کنید که نقطه A عملاً رأس سهمی ناقص $y = x(2-x)$ است. بنابراین $x_A = 1$ است. (یادآوری: در هر سهمی طول نقطه رأس، میانگین ریشه‌ها است.) لذا $y_A = f(x_A) = f(1) = 1$. این یعنی مختصات Max نسبی $(1, 1)$ است. این تابع روی بازه $(-\infty, 1]$ اکیدا صعودی، روی $[1, 2]$ اکیدا نزولی و روی $[2, \infty)$ اکیدا صعودی است.

یکی از سؤالات متداول کنکور این است که ضابطه و برد تابع $f(x)$ را، مثلاً روی بازه‌ای که نزولی است، بیابید. از روی نمودار بدیهی است که:

$$f(x) = x(2-x); R_f = [0, 1]$$



■ گاهی طراح زیادی خوش اخلاق می‌شود و نمودار $y = f'(x)$ را می‌دهد و سؤالاتی دربارهٔ یکنوایی، Max_L و Min_L تابع $y = f(x)$ می‌پرسد. کافی است به یاد بیاورید که از روی نمودار $y = f'(x)$ ، به راحتی می‌توانیم جدول تعیین علامت آن را رسم کنیم و البته از روی جدول تعیین علامت $f'(x)$ ، عین آب خوردن می‌توان یکنوایی $f(x)$ و بقیهٔ مخلفات آن را تعیین کرد.



مثال فرض کنید نمودار $y = f'(x)$ به صورت مقابل باشد. دربارهٔ یکنوایی و ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع $f(x)$ بحث کنید.

پاسخ از نمودار $y = f'(x)$ ، جدول تعیین علامت $f'(x)$ را رسم می‌کنیم.

| | | | | | |
|---------|--|----|---|---|---|
| x | | -۲ | ۰ | ۴ | |
| $f'(x)$ | | + | + | - | + |

و از روی این جدول، می‌فهمیم که:

لذا طول نقطهٔ Max_L برابر ۰ و طول نقطهٔ Min_L برابر ۴ است. تابع $f(x)$ روی $(-\infty, 0]$ اکیداً صعودی، روی $[0, 4]$ اکیداً نزولی و روی $[4, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

| | | | | | |
|---------|--|-----|----------------|----------------|---|
| x | | -۲ | ۰ | ۴ | |
| $f'(x)$ | | + | + | - | + |
| $f(x)$ | | ↑ | ↓ | ↑ | |
| | | هیچ | Max_L | Min_L | |

تبصره مهم: حق نداریم از بازه‌های یکنوایی، اجتماع بگیریم.

مثلاً در مثال قبل به هیچ وجه نمی‌توانیم بگوییم $f(x)$ در $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

نقاط اکسترمم نسبی

نکته به نقطه‌ای که Max یا Min باشد، اکسترمم می‌گوییم. اگر نقطهٔ (x_0, y_0) اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه $f(x_0) = y_0$ و $f'(x_0) = 0$ است. ولی از کجا بفهمیم که نقطهٔ (x_0, y_0) واقعاً Max نسبی است یا Min نسبی؟ این‌جاست که $f''(x)$ را نیاز داریم. اگر $f''(x_0) > 0$ باشد، آن‌گاه (x_0, y_0) یک نقطهٔ Min نسبی است. اما اگر $f''(x_0) < 0$ باشد، آن‌گاه (x_0, y_0) یک نقطهٔ Max نسبی است. توجه کنید که این قضیه دوشروطی نیست.

مثال نقطهٔ به طول ۳ واقع بر نمودار $f(x) = x^4 - 4x^3$ ، چگونه نقطه‌ای است؟

پاسخ دقت کنید که $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$ است. لذا $f'(3) = 0$ است. ولی از آن‌جا که $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ است، لذا $f''(3) = 36 > 0$ پس $x = 3$ طول یک نقطهٔ Min نسبی برای تابع $f(x)$ است. طبعاً عرض این نقطه $y_{\text{Min}} = f(x_{\text{Min}}) = f(3) = -27$ است.

تست فرض کنید $f(x) = ax^2 + (a^2 - 6)x + a$ باشد. به‌ازای کدام مقدار a ، این تابع در $x = -\frac{1}{4}$ دارای Min نسبی است؟

(مفهومی - دقت)

(۱) $a = -2$ (۲) $a = 2$ (۳) $a = 3$ (۴) نشدنی

پاسخ گزینهٔ «۳» چون $x = -\frac{1}{4}$ طول یک Min نسبی است پس، $f'(-\frac{1}{4}) = 0$ است.



یعنی: $f'(x) = 2ax + (a^2 - 6) \Rightarrow f'(-\frac{1}{2}) = -a + a^2 - 6 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2) = 0$

$a = 3$ یا $a = -2$ اگر $a = 3$ باشد، آن گاه $f(x) = 3x^2 + 3x + 3$ است. لذا

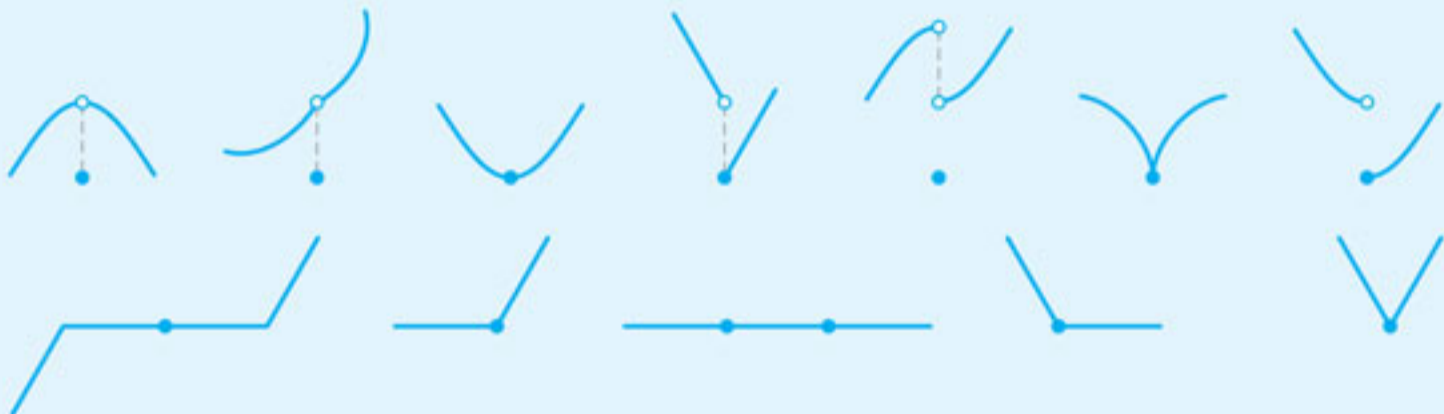
$f''(x) = 6$ و بنابراین $f''(-\frac{1}{2}) = 6 > 0$ است. این یعنی $x = -\frac{1}{2}$ طول یک Min نسبی است، همان طور که می خواهیم. پس $a = 3$ قابل قبول است.

اما اگر $a = -2$ باشد، آن گاه $f(x) = -2x^2 - 2x - 2$ است. بنابراین $f''(x) = -4$ ، به خصوص

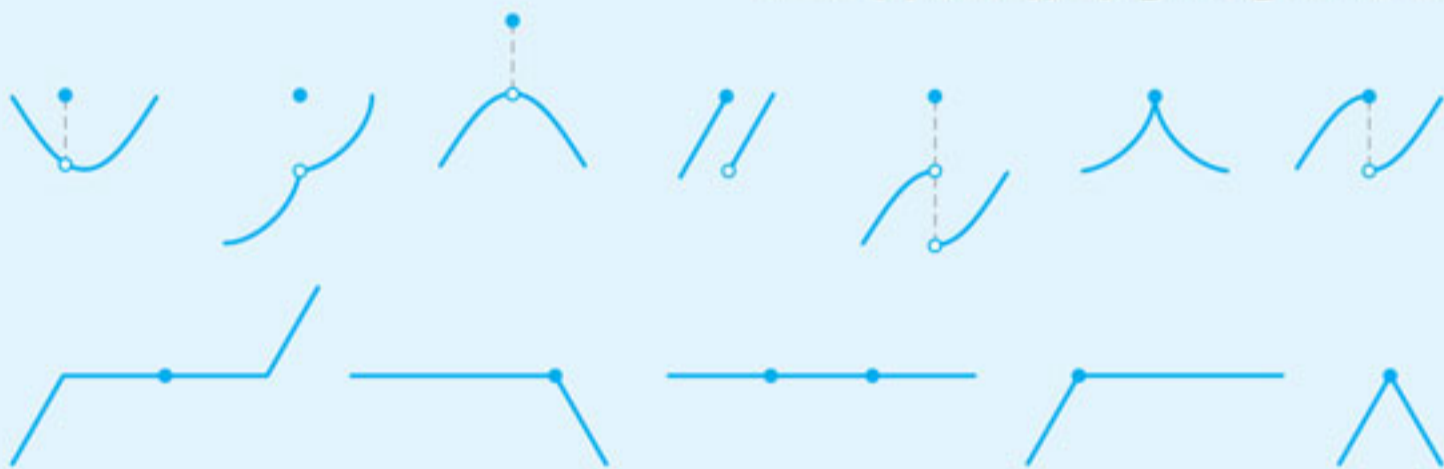
$f''(-\frac{1}{2}) = -4 < 0$ این یعنی $x = -\frac{1}{2}$ طول یک Max نسبی است. سؤال این را نمی خواهد، پس

$a = -2$ قابل قبول نیست.

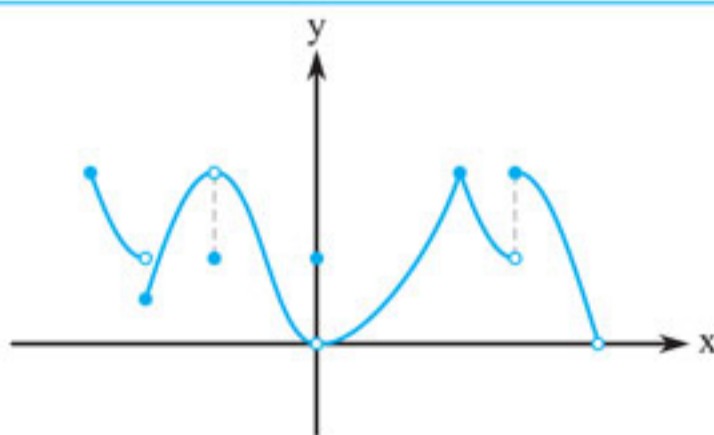
نکته در نمودارها، نقاط Min نسبی به یکی از صورت های زیر هستند:



نقاط Max نسبی به یکی از صورت های زیر هستند:



دقت کنید اکسترمم نسبی نمی تواند در ابتدا یا انتهای بازه باشد. اصلاً نسبی یعنی نقطه ای که دو طرف آن همسایه هایی نزدیک وجود دارد.



تست با توجه به نمودار $y = f(x)$ ، این تابع

به ترتیب چند Min نسبی و چند Max نسبی دارد؟

(مفهومی)

(۱) دو - دو

(۲) دو - سه

(۳) سه - دو

(۴) سه - سه

پاسخ گزینه «۲» این تابع دو Min نسبی و سه Max نسبی دارد. این نقاط را می توانید با کمی دقت پیدا کنید.



نکته می‌گوییم نقطه $(c, f(c))$ برای تابع $y = f(x)$ یک نقطه بحرانی است، اگر یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

- ۱ $f'(c)$ اصلاً موجود نباشد (نقاط مرزی چندضابطه‌ای‌ها و ریشه‌های ساده قدرمطلق، کاندیدهای اصلی این وضعیت هستند که باید بررسی شوند).
- ۲ $f'(c) = 0$ باشد.

از این جا نتیجه می‌شود که اگر دامنه $f(x)$ بازه‌ای بسته باشد (که معمولاً هست)، آن‌گاه نقاط ابتدا و انتهای بازه، بحرانی محسوب می‌شوند، زیرا در این نقاط مشتق وجود ندارد.

(محاسباتی)

تست تابع $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- ۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

پاسخ گزینه «۳» اول دامنه $f(x)$ را حساب می‌کنیم: $4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4 - x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 4]$ همین جا معلوم می‌شود که $x = 0$ و $x = 4$ دو تا از نقاط بحرانی‌اند. برای یافتن بقیه نقاط بحرانی، مشتق می‌گیریم:

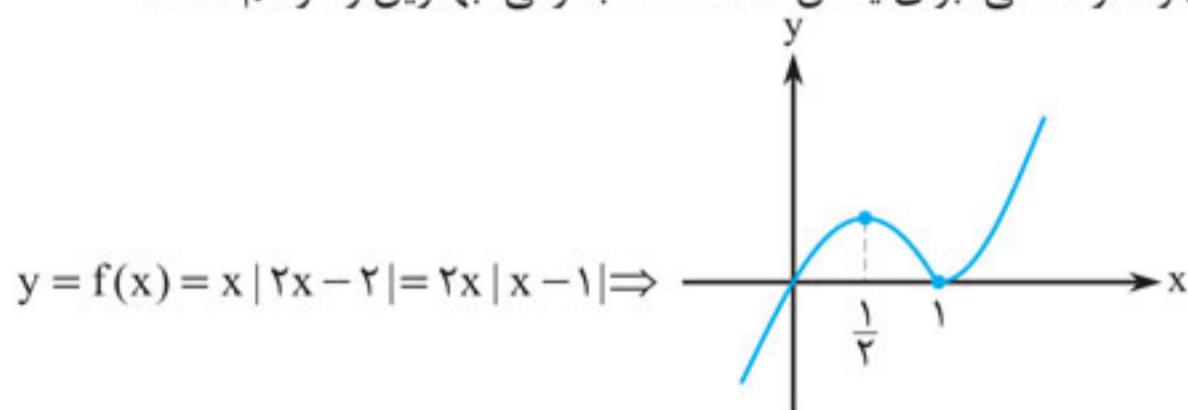
$$f'(x) = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{2 \in [0, 4]} x = 2 \quad \checkmark$$

لذا این تابع سه نقطه بحرانی دارد که عبارت‌اند از:

$$A(0, f(0)) = (0, 0) \quad \text{و} \quad B(4, f(4)) = (4, 0) \quad \text{و} \quad C(2, f(2)) = (2, 2)$$

مثال تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x) = x|2x - 2|$ را پیدا کنید.

پاسخ در توابع چندضابطه‌ای و قدرمطلق، برای یافتن تعداد نقاط بحرانی، بهترین راه رسم است.



این تابع دو نقطه بحرانی دارد. یکی Min_L و یکی Max_L . البته که $x_{Min} = 1$ ، $x_{Max} = \frac{1}{2}$. دقت کنید که روی نمودار همه نقاط Max و Min نسبی و همه نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق ناپذیر است (فصل قبل)، بحرانی هستند.

نکته نقاط بحرانی تابع $y = h(x)|g(x)|$ (با دامنه \mathbb{R}) دو دسته هستند که به راحتی می‌توان مختصات آن‌ها را

به دست آورد:

- ۱ جواب‌های معادله $g(x) = 0$
- ۲ جواب‌های معادله $(h(x)g(x))' = 0$ یا نقاطی که در آن‌ها $h(x)g(x)$ مشتق ناپذیر است.

مثال نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x - 2)|x^2 - x|$ را به دست آورید.

پاسخ **دسته اول:** عبارت‌اند از جواب‌های معادله $x^2 - x = 0$. یعنی $x \in \{0, 1\}$. بنابراین $(0, 0)$ و $(1, 0)$ را از این دسته پیدا کردیم.



آزمون تستی



۱. در تابع با ضابطه $f(x) = x|x-4|$ ، فاصله دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

(یادتان هست که این تابع را باید رسم کنید.)

(تجرب ۹۸) $\sqrt{5}$ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴)

۲. بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

(تجرب ۹۸) $8\sqrt{2}$ (۱) $8\sqrt{3}$ (۲) 16 (۳) 18 (۴)

۳. در تابع با ضابطه $f(x) = x|x|-2x$ ، فاصله دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟ (بهتر است نمودار تابع را ...)

(تجرب خارج ۹۸) $2\sqrt{2}$ (۱) 3 (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) 4 (۴)

۴. فاصله نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{4x-x^2}$ ، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟ (تجرب ۹۹)

1 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

۵. مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$ ، کدام است؟

$-1 + \sqrt{5}$ (۱) $1 + \sqrt{5}$ (۲) $-1 + \sqrt{3}$ (۳) $1 + \sqrt{3}$ (۴)

۶. کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟ (تجرب خارج ۹۹)

4 (۱) $4/5$ (۲) 5 (۳) $3\sqrt{2}$ (۴)

۷. کوتاه‌ترین فاصلهٔ سهمی $y^2 = 4x$ از نقطه $M(3, 0)$ ، کدام است؟ (تجرب خارج ۱۴۰۰)

$\sqrt{2}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) 3 (۴)

۸. اگر $[-2, 1]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx$ روی آن نزولی است، آن‌گاه $2a + 2b$ کدام است؟

-18 (۱) 18 (۲) -27 (۳) 27 (۴)

۹. برد تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{14-2x}$ ، برابر است با

$[\sqrt{5}, \sqrt{15}]$ (۱) $[\sqrt{10}, \sqrt{15}]$ (۲) $[-\sqrt{5}, \sqrt{10}]$ (۳) $[0, \sqrt{10}]$ (۴)

۱۰. ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+5}$ ، برابر کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴)

۱۱. تابع $f(x) = 8x - 4[2x]$ با دامنه $[-2, 1]$ چند اکسترمم نسبی و از چه نوعی دارد؟

(۱) ۷ تا مینیمم نسبی (۲) ۷ تا ماکزیمم نسبی (۳) ۵ تا مینیمم نسبی (۴) ۵ تا ماکزیمم نسبی



دقت کنید که نقطه D ، از همه نقاط نمودار پایین تر است. به چنین نقطه‌ای Min مطلق می‌گویند. همان طور که می‌بینید، نقطه D انتهای نمودار است و از سمت راست همسایه‌ای ندارد، لذا یک Min نسبی نیست. در واقع، هیچ لزومی ندارد که یک Max یا Min مطلق، یک Max یا Min نسبی باشد و برعکس. روش پیدا کردن اکسترمم‌های مطلق، از اکسترمم‌های نسبی هم راحت تر است. توجه کنید یک تابع می‌تواند هیچ، یک، دو یا ... بی‌شمار اکسترمم مطلق داشته باشد. مثلاً تابع $y = \tan x$ اکسترمم مطلق ندارد (به نمودار آن توجه کنید)، اما نمودار $y = \sin x$ نشان می‌دهد که این تابع بی‌شمار Max مطلق (در نقاط $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 1)$) و بی‌شمار Min مطلق (در نقاط $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, -1)$) دارد و جالب است که همه این نقاط، اکسترمم نسبی هم هستند. اما درباره اکسترمم مطلق یک نکته جالب داریم که در واقع، قضیه‌ای از یک ریاضی‌دان بزرگ به نام وایرشراس است.

نکته اگر $f(x)$ تابعی پیوسته باشد که دامنه آن به صورت بازه بسته $[a, b]$ باشد، آن گاه $f(x)$ حتماً هم Max مطلق دارد و هم Min مطلق. برای پیدا کردن این Max مطلق و Min مطلق، کافی است نقاط بحرانی $f(x)$ را پیدا کنیم و همه را در ضابطه تابع $f(x)$ عددگذاری کنیم. کوچک‌ترین عددی که به دست می‌آوریم همان Min مطلق و بزرگ‌ترین عددی که به دست می‌آوریم Max مطلق است. از همین رو، در بعضی مسائل به جای Max مطلق می‌گویند بیشترین مقدار تابع یا به جای Min مطلق می‌گویند کمترین مقدار تابع. جالب است که به کمک این قضیه، برد توابع پیوسته به راحتی قابل محاسبه است: $R_f = [y_{\text{Min}}, y_{\text{Max}}]$.

مثال کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1; x \in [0, 2]$ را به دست آورید.

پاسخ باید نقاط بحرانی را به دست آوریم. همین اول کار دوتا شون معلوم شدند: $x = 0$ و $x = 2$. از طرفی:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -1 \xrightarrow{-1 \notin [0, 2]} x = 1$$

لذا سه نقطه بحرانی داریم که طول آن‌ها $0, 1, 2$ و 0 است. این نقاط را در ضابطه تابع $f(x)$ عددگذاری می‌کنیم:

$$1) x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$2) x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$3) x = 2 \Rightarrow f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$$

لذا کمترین مقدار این تابع -1 و بیشترین مقدار آن 3 است. برد تابع هم بازه $[-1, 3]$ است.

تست فرض کنید $f(x) = x - 2\sqrt{x} - 1; x \in [0, \frac{25}{4}]$ باشد. در این صورت، بیشترین فاصله نقطه‌ای

(محاسباتی - دقت)

روی نمودار $y = f(x)$ از محور x ها کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

پاسخ گزینه «۴» دقت کنید $x = 0$ و $x = \frac{25}{4}$ دو نقطه بحرانی $f(x)$ هستند و:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین $f(x)$ سه نقطه بحرانی به طول‌های $1, \frac{25}{4}$ و 0 دارد. لذا:

$$1) x = 0 \Rightarrow f(0) = -1$$



$$۲) x=1 \Rightarrow f(1) = 1 - 2\sqrt{1} - 1 = -2$$

$$۳) x = \frac{25}{4} \Rightarrow f\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{25}{4} - 2\sqrt{\frac{25}{4}} - 1 = \frac{1}{4}$$

■ حالا خوب دقت کنید! جواب مسئله $\frac{1}{4}$ نیست، زیرا ما بیشترین مقدار $f(x)$ را نمی‌خواهیم. ما بیشترین فاصله $f(x)$ از محور x ها را می‌خواهیم که برابر ۲ است. زیرا نقطه $(1, -2)$ ، در واقع ۲ واحد پایین‌تر از محور x ها است. این مسئله، یکی از شایع‌ترین بی‌دقتی‌های این فصل است.

بهینه‌سازی

■ بیشترین استفاده اکسترمم‌های مطلق در مسائل بهینه‌سازی است. در این مسائل، ابتدا باید صورت مسئله را مدل‌سازی کنیم. یعنی مسئله را بر حسب یک تابع با دامنه مشخص بیان کنیم و سپس به کمک نقاط بحرانی مسئله را حل کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال فرض کنید محیط مستطیلی ۱۲ باشد.

الف) مساحت مستطیل را بر حسب تابعی از طول آن بیان کنید.

ب) بیشترین مقدار ممکن برای مساحت این مستطیل را بیابید.

پاسخ الف) فرض کنیم طول مستطیل x و عرض مستطیل y باشد. در این صورت، فرض مسئله می‌گوید $2(x+y) = 12$. این یعنی $y = 6 - x$ است. حالا دقت کنید که اگر S مساحت مستطیل باشد، آن‌گاه:

$$S = xy = x(6-x) \Rightarrow S(x) = 6x - x^2; 0 < x < 6$$

دقت کنید که چون $x, y > 0$ ، لذا $x > 0$ و $6 - x > 0$ ، که یعنی $0 < x < 6$.

ب) بیشترین مقدار یعنی ماکسیمم مطلق. پس باید نقاط بحرانی را پیدا کنیم. در این مسئله، 0 و 6 اصلاً در بازه نیستند، لذا کاری به آن‌ها نداریم و می‌رویم سراغ مشتق:

$$S'(x) = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{3 \in (0,6)} x = 3 \quad \checkmark$$

$$\text{Max } S = f(3) = 6 \times 3 - 9 = 9$$

در نتیجه:

دقت کنید که اگر $x = 3$ باشد، آن‌گاه $y = 3$ است. لذا این مستطیل خاص که بیشترین مساحت را دارد، در واقع یک مربع است.

تست

نقطه A در ناحیه اول، روی خط $2x + y = 12$ قرار دارد. از این نقطه بر هر دو محور، عمودهایی رسم می‌کنیم تا یک مستطیل ایجاد شود. حداکثر مساحت این مستطیل چه قدر است؟ (مفهومی-محاسباتی)

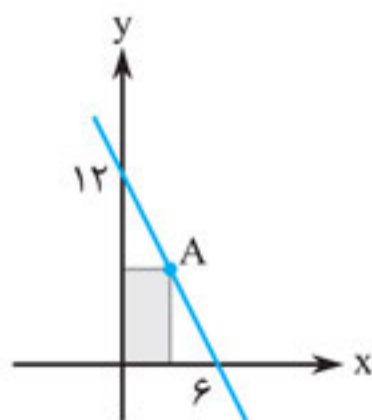
۲۰(۴)

۱۸(۳)

۱۵(۲)

۱۲(۱)

پاسخ گزینه «۳»



از آن‌جا که نقطه $A(x, y)$ روی خط $2x + y = 12$ و در ناحیه اول قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کند:

$$2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x$$

از آن‌جا که در ربع اول $x > 0$ و $y > 0$ است، داریم:

$$x > 0, 12 - 2x > 0 \Rightarrow 0 < x < 6$$



در ضمن، مساحت مستطیل رنگی برابر با xy است. یعنی:

$$S = xy = x(12 - 2x) \Rightarrow f(x) = 12x - 2x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12 - 4x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \text{Max}S = f(3) = 18$$

بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است، محصور نمود، چند متر مربع است؟ (ریاض ۹۱)

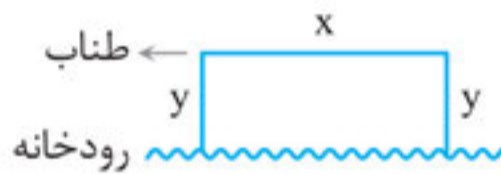
۹۸۸ (۴)

۹۷۸ (۳)

۹۶۸ (۲)

۹۵۸ (۱)

پاسخ گزینه «۲»

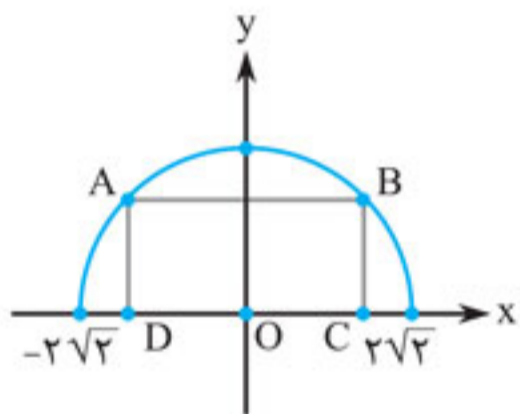


فرض کنیم طول مستطیل x و عرض آن y باشد. دقت کنید که یک ضلع این زمین رودخانه است و بنابراین طول طناب مساوی با مجموع سه ضلع دیگر است، نه کل محیط.

$$2y + x = 88 \Rightarrow y = \frac{88 - x}{2}$$

$$S = xy = \frac{x(88 - x)}{2} = \frac{88x - x^2}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{88x - x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = 44 - x = 0$$

$$\Rightarrow x = 44 \Rightarrow \text{Max}S = f(44) = 968$$



مثال با توجه به نمودار تابع $y = \frac{3}{2}\sqrt{8 - x^2}$ ، بیشترین مساحت از

بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن‌ها منطبق بر محور طول‌ها و دو رأس آن بر منحنی $y = \frac{3}{2}\sqrt{8 - x^2}$ قرار گیرند، چند متر مربع است؟

پاسخ بدیهی است که به‌خاطر دامنه باید $8 - x^2 \geq 0$ باشد که یعنی $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$. دقت کنید که مساحت مستطیل $ABCD$

برابر با $AB \times BC$ است.

تمرکز ما، طبق معمول روی نقطه‌ای است که در ربع اول قرار دارد، یعنی نقطه B . دقت کنید که $BC = y_B$ است، اما $AB \neq x_B$. در واقع:

لذا مساحت مستطیل $ABCD$ برابر است با: $S(x) = 2x_B y_B = 2x \times \frac{3}{2}\sqrt{8 - x^2} = 3x\sqrt{8 - x^2}$

$$\Rightarrow S'(x) = 3\sqrt{8 - x^2} + 3x(-2x) \times \frac{1}{2\sqrt{8 - x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{8 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{8 - x^2}} \Rightarrow 8 - x^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \xrightarrow{\text{در ربع اول } x} x = 2 \Rightarrow \text{Max}S = f(2) = 3 \times 2\sqrt{8 - 4} = 12$$

نکته اگر $m > 0$ باشد و $ax + by = m$ ، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $x^n + y^n$ زمانی رخ می‌دهد که

$$\frac{x^{n-1}}{a} = \frac{y^{n-1}}{b}$$



مثال اگر $3x + 4y = 15$ باشد، کم‌ترین مقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ را به دست آورید.

پاسخ ما کم‌ترین مقدار $x^2 + y^2$ را به دست می‌آوریم و از آن جذر می‌گیریم. طبق نکته قبل، داریم:

$$\frac{x'}{3} = \frac{y'}{4} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

اما فرض مسئله $3x + 4y = 15$ است. لذا:

$$3x + 4\left(\frac{4}{3}x\right) = 15 \Rightarrow \frac{25}{3}x = 15 \Rightarrow x = \frac{9}{5} \Rightarrow \text{Min}(x^2 + y^2) = \left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} \times \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25} + \frac{144}{25} = 9$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ برابر $\sqrt{9} = 3$ است.

طراح می‌تواند از کاربرد مشتق در قالب هر نوع مسئله‌ای استفاده کند، حتی هندسه.

مثال بیشترین مساحت ممکن یک مثلث قائم الزاویه به طول وتر ۸ را بیابید.

پاسخ فرض می‌کنیم x و y طول اضلاع قائمه این مثلث باشند. داریم:

$$x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$$

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{64 - x^2}$$

و مساحت مثلث قائم الزاویه هم می‌شود:

پس باید ماکزیمم تابع $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{64 - x^2}$ را پیدا کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{64 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{64 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{64 - 2x^2}{\sqrt{64 - x^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 64 \Rightarrow x = 4\sqrt{2} \Rightarrow \text{Max } f(x) = f(4\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{32} = 2 \times 8 = 16$$

تست

قرینه نقطه A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطه A ، بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با خط نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط AA' ، کدام است؟

(تجرب ۱۴۰۰)

$$\sqrt{2} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{8} \quad (4)$$

پاسخ گزینه «۳»

نگارش این سؤال کمی اذیت می‌کند و باید رمزگشایی کنیم. قسمت تقاطع ساده است: $x^2 = x \Rightarrow x = 0$ یا 1 . پس $0 < x < 1$ است. مختصات نقطه A به صورت (x, x^2) است زیرا روی $y = x^2$ قرار دارد. در ضمن از فصل ۴ (صفحه ۹۶) می‌دانیم که قرینه A نسبت به $y = x$ می‌شود: $A'(x^2, x)$. حالا داریم:

$$|AA'| = \sqrt{(x^2 - x)^2 + (x - x^2)^2} = \sqrt{2}|x - x^2| \xrightarrow{0 < x < 1} |AA'| = \sqrt{2}(x - x^2)$$

حالا دیگر تابعی که باید ماکزیمم آن را بیابیم معلوم شد:

$$f(x) = \sqrt{2}(x - x^2) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2}(1 - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Max } f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

خوش به حالتان! کاربرد مشتق هم تمام شد. چند فصل دیگر با هم خداحافظی می‌کنیم.



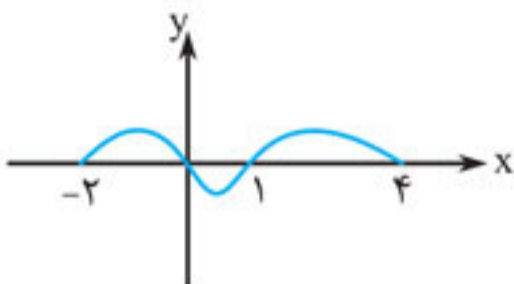
۱. می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و درباز بسازیم که گنجایش آن ۱۰ لیتر است. مساحت قاعده آن چه قدر باشد تا کم‌ترین مقدار فلز را برای ساختن استوانه مصرف کنیم؟ (برگرفته از کتاب درسی)

(۱) $\sqrt{50\pi}$ (۲) $\sqrt[3]{100\pi}$ (۳) $\sqrt{50\pi}$ (۴) $\sqrt{100\pi}$

۲. برد تابع $f(x) = \frac{|x|+1}{x^2+3}$ کدام است؟

(۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, 1]$ (۳) $(0, \frac{1}{3}]$ (۴) $(0, \frac{1}{3})$

۳. نمودار $y = f'(x)$ به صورت زیر است. تعداد و نوع اکسترمم‌های نسبی تابع $y = -3f(4-2x) + 1$ روی بازه



$[0, 3]$ ، برابر کدام است؟

- (۱) ۲ ماکزیمم - ۱ مینیمم
(۲) ۱ ماکزیمم - ۱ مینیمم
(۳) ۲ ماکزیمم - ۲ مینیمم
(۴) ۱ ماکزیمم - ۲ مینیمم

۴. چنانچه $b > 0$ باشد و اگر $[-2, 1]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $f(x) = \frac{ax+1}{3x^2+b}$ در آن اکیداً صعودی است، آن‌گاه $b + \frac{1}{a}$ برابر کدام است؟ (حتماً پاسخ‌نامه را بخوانید.)

(۱) $\frac{13}{2}$ (۲) ۸ (۳) $\frac{17}{8}$ (۴) $\frac{5}{8}$

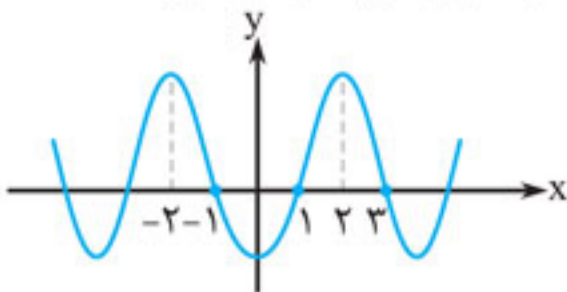
۵. فرض کنید $f(x) = x^3 - 2x$ باشد. اگر خط $y = x + k$ و نمودار $y = f(x)$ در سه نقطه تلاقی داشته باشند، حدود k کدام است؟

(۱) $k \in (-1, 1)$ (۲) $k \in (-2, 2)$ (۳) $k \in \mathbb{R} - [-1, 1]$ (۴) $k > 2$

۶. فرض کنید $f(x) = x^2 - 4x; x \in [-2, +\infty)$ باشد. اگر نمودار $y = f(x)$ و $y = f(x+a)$ ، فقط یک نقطه تلاقی داشته باشند، حدود عدد a کدام است؟

(۱) $a > 2$ (۲) $|a| > 2$ (۳) $2 < a < 4$ (۴) $2 < |a| \leq 4$

۷. نمودار $y = f(x+1)$ به صورت زیر است. تابع $f(x+|x|)$ چند اکسترمم نسبی و از چه نوعی، دارد؟



- (۱) ۳ مینیمم - ۲ ماکزیمم
(۲) ۳ مینیمم - ۳ ماکزیمم
(۳) ۲ مینیمم - ۲ ماکزیمم
(۴) بی‌شمار مینیمم - بی‌شمار ماکزیمم

۸. فرض کنید $f(x+1) = x^3 - 3x + 1$ باشد. اگر (α, β) مختصات نقطه مینیمم نسبی تابع $f(x-1)$ باشد،

آن‌گاه عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار $y = \beta x + f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ واقع بر آن، کدام است؟

(۱) -۲۴ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۱۱



۱۲. قرینه نقطه A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ را در دامنه $[0, 1]$ ، نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم صفحه مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره خط AA' ، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

- (۱) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ (۲) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$ (۳) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

۱۳. به‌ازای کدام مقادیر a ، تابع $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ، دارای ماکسیمم نسبی است؟ (ریاضی ۸۹)

- (۱) $|a| > 2$ (۲) $a < 0$ (۳) $a > 0$ (۴) هیچ مقدار a

۱۴. می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث، کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

- (۱) ۷۵۰ (۲) ۱۲۵۰ (۳) ۱۵۰۰ (۴) ۲۵۰۰

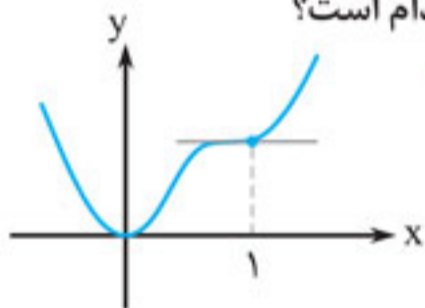
۱۵. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط است، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

- (۱) 32π (۲) 64π (۳) $\frac{256\pi}{3}$ (۴) $\frac{512\pi}{3}$

۱۶. تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} |x^2-4|$ ، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

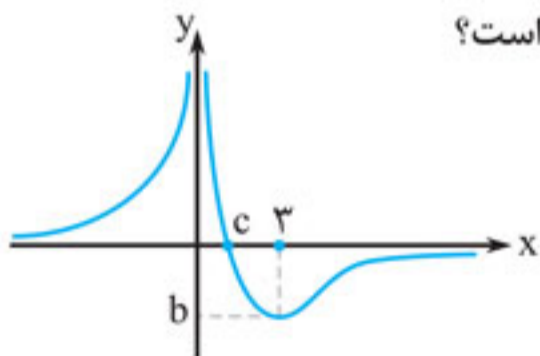
۱۷. شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ است. $3a + 2b + c$ کدام است؟ (مشابه ریاضی ۹۸)



(مشابه ریاضی ۹۸)

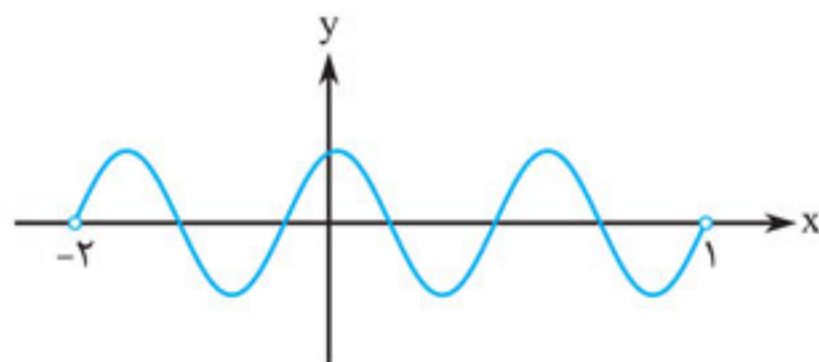
- (۱) -۸
(۲) -۱۲
(۳) -۱۰
(۴) -۱۴

۱۸. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+2}{x^2}$ است. مقدار $ab - c^{-1}$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{1}{9}$
(۲) $\frac{4}{9}$
(۳) $-\frac{10}{27}$
(۴) $-\frac{4}{9}$

۱۹. نمودار $y = f'(x)$ به‌صورت زیر است. تعداد و نوع اکسترمم‌های نسبی تابع $y = 3f(x) + 2$ روی بازه $[-2, 1]$ ، برابر کدام است؟ (فرض کنید $D_f = [-2, 1]$)



- (۱) ۲ تا ماکزیمم نسبی - ۲ تا مینیمم نسبی
(۲) ۳ تا ماکزیمم نسبی - ۲ تا مینیمم نسبی
(۳) ۲ تا ماکزیمم نسبی - ۲ تا مینیمم نسبی
(۴) ۳ تا ماکزیمم نسبی - ۳ تا مینیمم نسبی



۱۸. گزینه «۳»

طول نقطه Min نسبی در تابع کسری $f(x) = \frac{ax+2}{x^2}$ برابر ۳ است. لذا داریم:

$$\frac{ax+2}{x^2} = \frac{a}{2x} \xrightarrow{x=3} \frac{3a+2}{9} = \frac{a}{6} \Rightarrow 6a+4=3a \Rightarrow a = -\frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{-\frac{4}{3}x+2}{x^2}$$

بدیهی است که $f(c) = 0$ و $f(3) = b$ است. لذا:

$$\begin{cases} f(c) = \frac{-\frac{4}{3}c+2}{c^2} = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}c+2=0 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \\ f(3) = b \Rightarrow \frac{-\frac{4}{3}(3)+2}{9} = -\frac{2}{9} = b \end{cases} \Rightarrow ab - c^{-1} = \frac{-10}{27}$$

۱۹. گزینه «۲»

دقت کنید که نمودار $y = 3f(x) + 2$ همان نمودار $y = f(x)$ است که ۳ برابر در جهت محور y ها منبسط شده و سپس ۲ واحد به بالا انتقال یافته است. لذا عرض اکسترم‌های آن ۳ برابر می‌شود و بعد هم ۲ واحد بزرگ می‌شوند. اما نه تعداد، نه نوع و نه حتی طول این اکسترم‌ها، با اکسترم‌های تابع $f(x)$ فرقی ندارد. از آنجا که نمودار $y = f'(x)$ را داریم، به راحتی می‌توانیم جدول تعیین علامت $y = f'(x)$ را رسم کنیم و از روی آن تعداد و نوع اکسترم‌های $y = f(x)$ را تعیین کنیم:

| | | | | | | | |
|---------|----|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| x | -2 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | 1 |
| $f'(x)$ | + | ○ | - | ○ | + | ○ | - |
| $f(x)$ | | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ |
| | | Max | Min | Max | Min | Max | |

لذا تابع $f(x)$ دارای ۲ تا Min نسبی و ۳ تا Max نسبی است. تابع $y = 3f(x) + 2$ هم همین‌طور.

■ حالا نوبت آزمون موضوعی شماره ۳ است. کمی سطح این آزمون بالاتر از کنکور است. می‌خواهیم با خیال راحت شما را به جلسه آزمون بدرقه کنیم.



۹. کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = |(2 + \sqrt{3})^{x+2} + (2 - \sqrt{3})^x|$ برابر کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟



- الف) اگر $f(x)$ تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه اکستریم نسبی ندارد.
 ب) اگر تابع $f(x)$ بی‌شمار نقطه بحرانی داشته باشد، حتماً تابعی ثابت است.
 پ) اگر تابع پیوسته $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه اکستریم نسبی ندارد. ($f(x)$ در \mathbb{R} پیوسته)

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه



نیتر تست

۱. ناحیه محصور بین نمودار تابع $f(x) = |x - 2| + 1$ و خط گذرنده از نقطه $(3, 3)$ یک مثلث است. حداقل مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) ۴

۲. حدود a کدام باشد تا تابع $f(x) = ax + |x^2 - 1|$ دارای مینیمم نسبی باشد ولی فاقد ماکزیمم نسبی باشد؟

- (۱) $|a| \leq 2$ (۲) $|a| < 2$ (۳) $|a| \geq 2$ (۴) $|a| > 2$

۳. نقطه $A = (a, a + 1)$ ، مینیمم نسبی تابع $f(x) = x^3 - (a + 2)x + b$ است. مختصات ماکزیمم نسبی این تابع کدام است؟

- (۱) $(-\frac{2}{3}, 0)$ یا $(-1, 6)$ (۲) فقط $(-1, 6)$ (۳) فقط $(-\frac{2}{3}, 0)$ (۴) $(-1, 0)$ یا $(-\frac{2}{3}, 6)$

۴. بیشترین محیط مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر منحنی $y = \sqrt{32 - 4x}$ در ربع اول واقع است، کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

۵. به ازای چند مقدار k ، خط $y = k$ نمودار تابع $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$ را دقیقاً در ۳ نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۶. اگر تابع $f(x) = \frac{4x + a}{x^2 + 1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ اکستریم نسبی داشته باشد، آن‌گاه معادله خط گذرنده از نقاط اکستریم نسبی تابع کدام است؟

- (۱) $y = 2x - 3$ (۲) $y = 3x - 2$ (۳) $y = 4x - 3$ (۴) $y = 3x - 4$

۷. کمترین مقدار a ، برای این‌که تابع $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt{x - a}$ در دامنه‌اش صعودی باشد، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

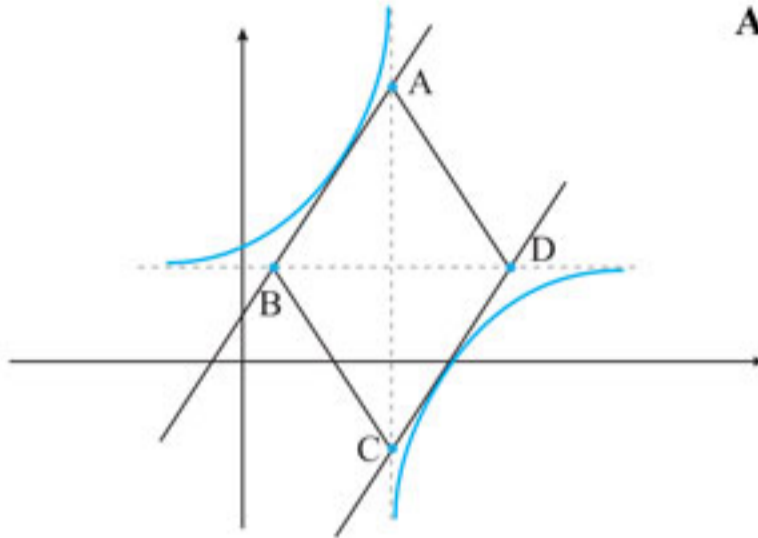
۸. اگر $\sqrt{x + y} + \sqrt{xy} = \sqrt{2} + 1$ باشد، آن‌گاه کمترین مقدار $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2} + 2$



۹. فرض کنید $f(x) = (x+a)|x^2 + ax + 1|$ باشد. به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع $f(x)$ تنها ۳ نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) $-2 < a < 2$ (۲) $-2 < a \leq 2$ (۳) $-2 \leq a < 2$ (۴) نشدنی



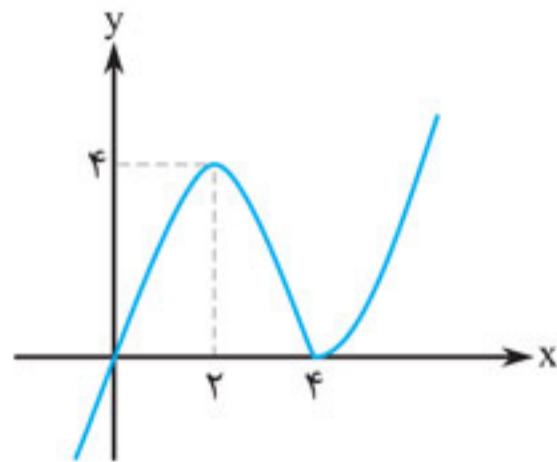
۱۰. نمودار $y = \frac{2x-8}{x-3}$ به صورت مقابل است. اگر $AB \parallel CD$

باشد، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

- (۱) ۱۴
(۲) ۱۶
(۳) ۱۸
(۴) ۲۰

پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه «۴»



نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل است:

نقطه Max نسبی $(2, 4)$ و نقطه Min نسبی $(4, 0)$ است. فاصله دو نقطه از هم برابر است با:

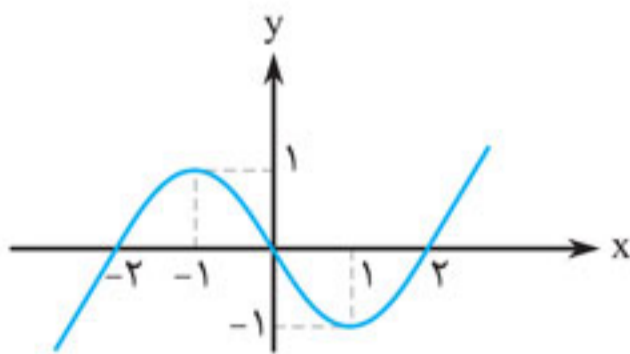
$$\sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۲. گزینه «۳»

$$S = xy = x\sqrt{12-x} \Rightarrow f(x) = x\sqrt{12-x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{12-x} + x \times \left(\frac{-1}{2\sqrt{12-x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{12-x} = \frac{x}{2\sqrt{12-x}} \Rightarrow 2(12-x) = x \Rightarrow x = 8 \Rightarrow \text{Max} S = f(8) = 8\sqrt{4} = 16$$

۳. گزینه «۱»



بهتر است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

لذا $\text{Max}_L = (-1, 1)$ و $\text{Min}_L = (1, -1)$ و در نتیجه فاصله

دو نقطه می‌شود:

$$\sqrt{(1-(-1))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۴. گزینه «۱»

$$f'(x) = 1 + \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = -1 \Rightarrow (x-2) = \sqrt{4x-x^2}$$



$$\xrightarrow{x \geq 2} x^2 - 4x + 4 = 4x - x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow[x \geq 2]{(*)} x = 2 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = f(2 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

دقت کنید از (*) می‌دانیم که $x^2 - 4x = -2$ است و عددگذاری نقطه $x = 2 + 2\sqrt{2}$ را به همین نحو انجام دادیم که این‌طور سریع داخل رادیکال ۲ به دست آمد.

معادله نیمساز ناحیه اول $y = x > 0$ است. یعنی $x > 0$; $y - x = 0$ ، پس با استفاده از فرمول فاصله نقطه از خط، داریم:

$$\frac{|(2 + 2\sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

۵. گزینه «۱»

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-4x-1)}{(x^2+1)^2}$$

تعیین علامت \rightarrow

| | | | |
|---------|----------------|----------------|---|
| x | $2 - \sqrt{5}$ | $2 + \sqrt{5}$ | |
| $f'(x)$ | - | + | - |
| $f(x)$ | Min | Max | |

$\Rightarrow x_{\text{Max}} = 2 + \sqrt{5}$

$$\Rightarrow y_{\text{Max}} = f(x_{\text{Max}}) = f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1}$$

$$= \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}} = \frac{(10 + 6\sqrt{5})(10 - 4\sqrt{5})}{100 - 16 \times 5} = \frac{20(\sqrt{5} - 1)}{20} = \sqrt{5} - 1$$

۶. گزینه «۱»

فرض کنید B نقطه‌ای روی نمودار $y = \sqrt{2x+7}$ باشد. پس مختصات B به صورت $B = (x, \sqrt{2x+7})$ است. این یعنی فاصله از A تا B برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f(4) = \sqrt{16-32+32} = 4$$

۷. گزینه «۳»

فرض کنید نقطه $N = (x_0, y_0)$ روی منحنی $y^2 = 4x$ قرار داشته باشد. تا همین جا می‌فهمیم که $y_0^2 = 4x_0$. فاصله این نقطه از $M(3, 0)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_0-3)^2 + (y_0-0)^2} &= \sqrt{(x_0-3)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0-3)^2 + 4x_0} = \sqrt{x_0^2 - 6x_0 + 9 + 4x_0} \\ &= \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 9} \end{aligned}$$



لذا تابع مورد نظر $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$ است که باید مینیمم آن را حساب کنیم:

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+9}} = 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{Min}f(x) = f(1) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

نکته با مربع کامل کردن، حتی بدون مشتق هم می‌توانستیم این سؤال را حل کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 2x + 1 + 8)} = \sqrt{\underbrace{(x-1)^2}_{\text{نامنفی}} + 8} \geq \sqrt{0+8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{Min}f(x) = 2\sqrt{2}$$

۸. گزینه «۳»

صورت مسئله می‌گوید جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت $\begin{array}{c|ccc} x & -2 & 1 & \\ \hline f'(x) & + & - & + \end{array}$ است. لذا -2 و 1 جواب‌های معادله $f'(x) = 0$ هستند.

$$f'(x) = 9x^2 + 2ax + b = 9(x-1)(x+2) \Rightarrow 9x^2 + 2ax + b = 9x^2 + 9x - 18 \\ \Rightarrow 2a = 9, b = -18 \Rightarrow 2a + 2b = -27$$

۹. گزینه «۱»

اول باید دامنه $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{14-2x}$ را حساب کنیم که $[2, 7]$ است. فعلاً $x=2$ و $x=7$ نقاط بحرانی‌اند. به کمک مشتق داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{2}{2\sqrt{14-2x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{14-2x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{14-2x} = 2\sqrt{x-2} \Rightarrow 14-2x = 4(x-2) \Rightarrow 6x = 22 \Rightarrow x = \frac{11}{3} \xrightarrow{\text{چک}} x = \frac{11}{3} \checkmark$$

برای پیدا کردن برد $f(x)$ ، کافی است نقاط بحرانی را عددگذاری کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(2) = \sqrt{10} \\ 2) f(7) = \sqrt{5} \\ 3) f\left(\frac{11}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{20}{3}} = 3\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{15} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Min}f(x) = \sqrt{5}, \text{Max}f(x) = \sqrt{15} \\ \Rightarrow R_f = [\sqrt{5}, \sqrt{15}]$$

۱۰. گزینه «۳»

دامنه تابع $f(x)$ برابر با \mathbb{R} است. لذا بازه بسته نداریم که بخواهیم ابتدا و انتهای آن را به عنوان نقاط بحرانی در $f(x)$ عددگذاری کنیم. در این مواقع، فقط مشتق و حد در بی‌نهایت می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 4x + 5) - (x-2)(2x-4)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x^2 - 4x + 5)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ یا } 3 \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{2}, f(3) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Max}f(x) = \frac{1}{2}$$



۱۱. گزینه «۳»

دقت کنید که $f(x) = 4(2x - [2x])$. از این جا می‌فهمیم که نقاط به صورت $\frac{n}{2}$ ، مینیمم‌های این تابع هستند ($a > 0$ است).

۵ نقطه Min نسبی دارد. $\xrightarrow[\text{اکسترم نسبی نیستند}]{\text{ابتدا و انتهای بازه}}$ $[-2, 1] \Rightarrow -2, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

۱۲. گزینه «۲»

فرض کنید $A(x_0, y_0)$ نقطه‌ای روی منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ باشد. از این جا می‌فهمیم که $y_0 = \sqrt[3]{-x_0}$. قرینه این نقطه نسبت به $y = -x$ ، همان $A'(-y_0, x_0)$ است (فصل ۴ صفحه ۹۷ را ببینید). بنابراین:

$$|AA'| = \sqrt{(x_0 + y_0)^2 + (y_0 + x_0)^2} = \sqrt{2(x_0 + y_0)^2}$$

$$= \sqrt{2}|x_0 + y_0| = \sqrt{2}|x_0 + \sqrt[3]{-x_0}| = \sqrt{2}|x_0 - \sqrt[3]{x_0}| \xrightarrow{x_0 \in [0, 1]} g(x_0) = (\sqrt[3]{x_0} - x_0)\sqrt{2}$$

بنابراین باید ماکزیمم $g(x)$ را به دست آوریم:

$$g'(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1\right) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{27}}$$

بنابراین:

$$\text{Max}g(x) = g\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{27}}} - \frac{1}{\sqrt{27}}\right)\sqrt{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

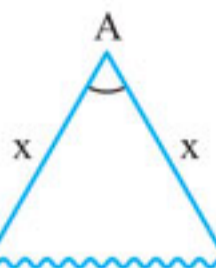
۱۳. گزینه «۴»

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - a}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3} \Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right) = 2 + \frac{2a}{\frac{a}{2}} = 4 > 0$$

لذا $f(x)$ فقط یک اکسترمم دارد: $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$. این اکسترمم هم از نوع Min نسبی است، زیرا $f''\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right) > 0$ پس همین اکسترمم هم، ماکزیمم نسبی نیست. تازه اگر $a = 0$ باشد، همین یک اکسترمم را هم ندارد.

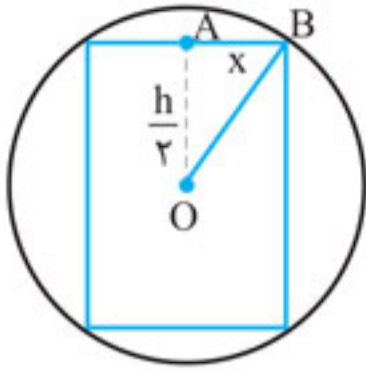
۱۴. گزینه «۲»



قاعده که رودخانه است $2x = 100$ بنابراین $x = 50$ و از مثلثات می‌دانیم که:

$$S = \frac{1}{2}x^2 \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 50^2 \times \sin \hat{A} = 1250 \sin \hat{A} \leq 1250 \times 1$$

که این بیشترین مساحت زمانی رخ می‌دهد که $\hat{A} = 90^\circ$ باشد.



۱۵. گزینه «۲»

شعاع قاعده استوانه را x و ارتفاع آن را h می‌نامیم:
در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + (x)^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{h^2}{4} + x^2 = 32 \Rightarrow h = 2\sqrt{32 - x^2}$$

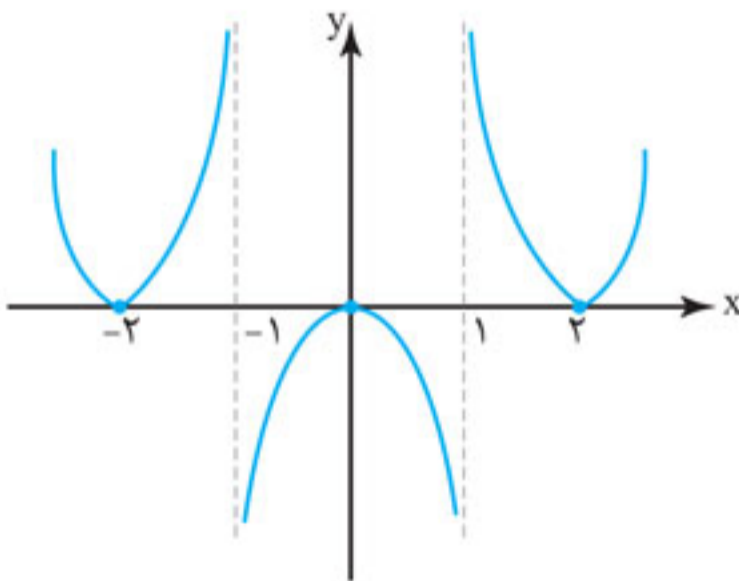
بنابراین مساحت جانبی استوانه می‌شود: $S_{\text{جانبی}} = 2\pi x h = 2\pi x \times 2\sqrt{32 - x^2} = 4\pi x \sqrt{32 - x^2}$

لذا تابعی که باید ماکزیمم آن را بیابیم $f(x) = 4\pi x \sqrt{32 - x^2}$ است:

$$f'(x) = 4\pi\sqrt{32 - x^2} - \frac{8\pi x^2}{2\sqrt{32 - x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi(32 - x^2) - 4\pi x^2}{\sqrt{32 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 4\pi \times 32 = 8\pi x^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S_{\text{max}} = f(4) = 64\pi$$

نکته فرض کنید شعاع کره‌ای r باشد. آن‌گاه شعاع بزرگ‌ترین استوانه که مساحت جانبی آن بیشترین مقدار ممکن باشد، برابر با $\frac{r}{\sqrt{2}}$ است.



۱۶. گزینه «۲»

هر جا تابع قدرمطلق می‌بینیم، بهترین کار رسم است. برای دیدن آموزش رسم این موارد QR-code کتاب را اسکن کنید یا وارد سایت مهروماه، صفحه مربوط به کتاب جمع‌بندی ریاضی تجربی شوید. نمودار این تابع چنین است:

همان‌طور که می‌بینید این تابع دو مینیمم و یک ماکزیمم نسبی دارد. یعنی سه تا اکسترمم نسبی دارد.

۱۷. گزینه «۲»

اولاً $f(x)$ در مبدأ Min نسبی دارد. این یعنی $f'(0) = 0$ و $f''(0) > 0$:

$$f'(x) = 12x^2 + 3ax + 2bx + c \Rightarrow f'(0) = c = 0$$

از طرفی خط مماس بر $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۱، موازی محور x ‌ها است. یعنی شیب آن صفر است. به عبارتی $f'(1) = 0$:

$$12 + 3a + 2b = 0 \Rightarrow 3a + 2b = -12$$

بنابراین $3a + 2b + c = -12$ است.