

درس‌نامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کامل تشریحی

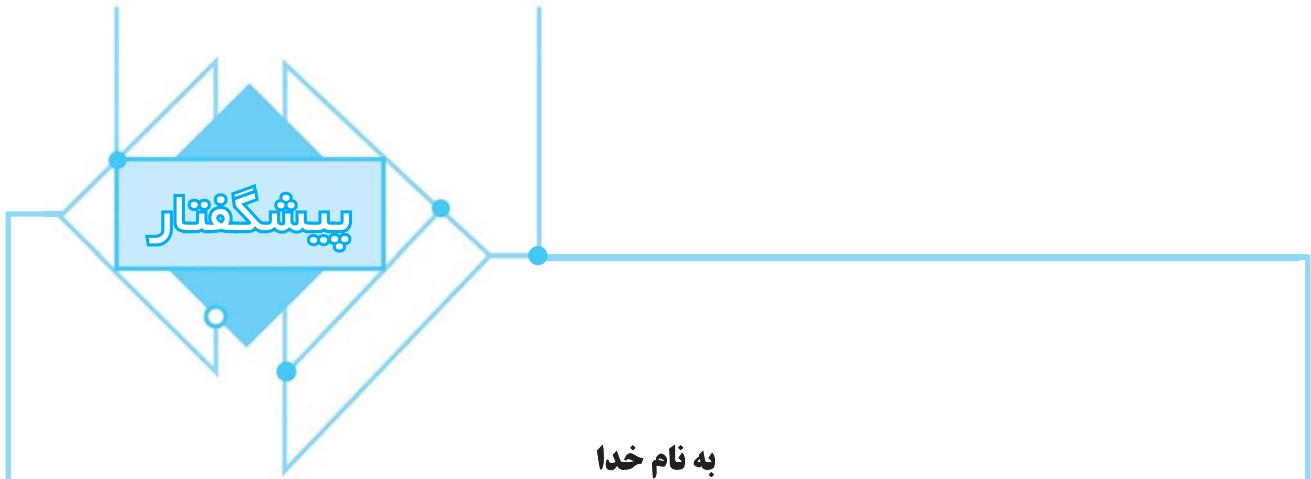
حسابان ۲ (دوازدهم)

ویراست سوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی



گو
نترالگو



به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای کتاب درسی حسابان ۲ پایه دوازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی و کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند.

هر فصل کتاب به چند درس و هر درس به چند بخش تقسیم شده است. در ابتدای هر بخش، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف نیاز دارید به دست خواهید آورد.

در این ویراست ساختار کتاب و محتوای آن تغییرات زیادی کرده است:

- درس‌نامه‌ها کامل‌تر شده‌اند؛

- تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه شده است؛

- هرجا که لازم بوده است، پاسخ‌ها بازنویسی و راه حل‌های جدید اضافه شده‌اند.

هر درس کتاب به چند بخش جدید تقسیم شده است که موضوع و حجم مطالب آن متناسب با تدریس یک جلسه تدریس معلم در کلاس است. پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر بخش هم در انتهای آن بخش آمده است تا دسترسی به آن‌ها ساده‌تر باشد. همچنین پرسش‌های هر بخش را به سه سطح تقسیم کرده‌ایم: در سطح اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شوند. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در سطح دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های سطح اول است و حل آن‌ها به تمام دانش‌آموزان توصیه می‌شود. در سطح سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌ها سطح دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت کوش توصیه می‌شود. این پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

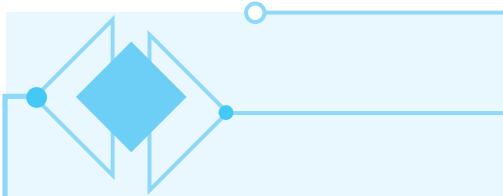
در انتهای هر درس، سوالات کنکورهای سراسری متناسب با آن درس را آورده‌ایم و در انتهای هر فصل، سه آزمون‌هایی از

مباحث آن فصل قرار داده‌ایم تا بتوانید با حل آن‌ها میزان تسلط خود بر مطالب فصل را محک بزنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس و دکتر ابوالفضل علی‌یمانی برای ویراستاری علمی، خانم فاطمه احمدی برای صفحه‌آرایی کتاب و خانم سنتین مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

	فهرست
◆	
◆ فصل اول: تابع	
درس دوم: معادلات مثلثاتی بخش اول: تانژانت مجموع دو زاویه ۱۰۰ بخش دوم: معادلات مثلثاتی ۱۱۰ سؤالات کنکور سراسری ۱۲۹ آزمون‌های فصل ۱۳۳	درس اول: تبدیل نمودار توابع ۲ سؤالات کنکور سراسری ۳۲
◆ فصل سوم: حد‌های نامتناهی – حد در بی‌نهایت	
◆ فصل سوم: حد‌های نامتناهی	
درس اول: حد‌های نامتناهی بخش اول: حد نامتناهی ۱۳۶ بخش دوم: مجانب قائم ۱۵۰ سؤالات کنکور سراسری ۱۶۱	درس اول: حد در بی‌نهایت ۶۸ سؤالات کنکور سراسری ۶۶ آزمون‌های فصل ۶۱
◆ فصل دوم: مثلثات	
◆ درس اول: تناوب و تانژانت	
درس اول: تناوب و تانژانت بخش اول: تابع متناوب ۷۲ بخش دوم: نمودار تابع سینوس و کسینوس ۷۸ بخش سوم: تابع تانژانت ۹۰ سؤالات کنکور سراسری ۹۷	



۲۸۸ بخش سوم: اکسٹرمم‌های نسبی

۳۰۲ بخش چهارم: اکسٹرمم‌های مطلق

۳۰۹ بخش پنجم: بهینه‌سازی

۳۱۸ سؤالات کنکور سراسری

درس دوم: جهت تغیر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

۳۲۲ بخش اول: جهت تغیر

۳۲۹ بخش دوم: نقطه عطف

۳۳۷ سؤالات کنکور سراسری

درس سوم: رسم نمودار تابع

۳۳۹ بخش اول: نمودار توابع درجه سوم و هموگرافیک

۳۴۷ بخش دوم: نمودارشناسی

۳۶۰ بخش سوم: رسم نمودار تابع مشتق

۳۶۴ سؤالات کنکور سراسری

۳۶۶ آزمون‌های فصل

فصل ششم: پاسخ‌های تشریحی

۳۷۰ پاسخ‌های تشریحی

فصل هفتم: پاسخنامه کلیدی

۵۸۲ پاسخنامه کلیدی

۵۸۸ پاسخنامه کلیدی آزمون‌ها

فصل چهارم: مشتق

۱۹۰ درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

۱۹۶ سؤالات کنکور سراسری

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

۱۹۷ بخش اول: مشتق چپ، مشتق راست و مشتق نامتناهی

۲۰۷ بخش دوم: تابع مشتق و قواعد مشتق‌گیری

۲۲۱ بخش سوم: مشتق تابع مرکب

۲۳۳ بخش چهارم: مشتق پذیری

۲۴۲ بخش پنجم: خط مماس بر نمودار تابع

۲۵۱ بخش ششم: مشتق دوم

۲۵۶ بخش هفتم: قاعدة هوپیتال

۲۵۹ سؤالات کنکور سراسری

درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

۲۶۹ سؤالات کنکور سراسری

۲۷۰ آزمون‌های فصل

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

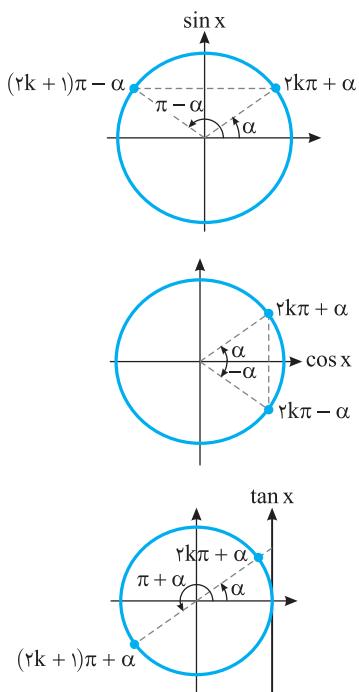
درس اول: اکسٹرمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۲۷۴ بخش اول: ارتباط مشتق و یکنواهی تابع

۲۸۳ بخش دوم: نقاط بحرانی

درس دوم / بخش دوم: معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی ساده



فرض کنید α زاویه‌ای حاده باشد. معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = \pi - \alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[0, 2\pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k , $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$. پس $x = 2k\pi + \alpha$ نیز جواب است. همین طور $x = 2k\pi + \pi - \alpha$, یعنی $x = (2k+1)\pi - \alpha$ نیز برای هر عدد صحیح k جواب این معادله است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

اکنون معادله مثلثاتی $\cos x = \cos \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = -\alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[-\pi, \pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k , $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$. پس $x = 2k\pi - \alpha$ و $x = 2k\pi + \alpha$ نیز جواب معادله مورد نظر هستند. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

اکنون معادله $\tan x = \tan \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = \pi + \alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[0, 2\pi]$ ندارد. البته، چون اگر k عددی صحیح باشد، $\tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha$. پس $x = k\pi + \alpha$ نیز جواب معادله مورد نظر است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

نکته

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت مقابل هستند:

$$x = 2k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت مقابل هستند:

$$x = k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت مقابل هستند:

$$1) \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال:

$$2) \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \tan x = \tan \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \delta x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$-\frac{k\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

$$\frac{2k\pi}{5}, \frac{(2k+1)\pi}{5}$$

$$\frac{k\pi}{3}, \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

$$k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{4}$$

تست

توجه کنید که راه حل

$$\sin x = \sin \delta x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \delta x \\ x = (2k+1)\pi - \delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k+1}{6}\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4k\pi}{3}, \frac{4k\pi}{5} \quad (۳)$$

جواب‌های کلی معادله $\cos 4x = \cos x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\cos 4x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2k\pi \quad (۱)$$

معادله راحل می‌کنیم:

تست
□ ■ □ □

راه حل

$$\tan 3x = \tan 2x \Rightarrow 3x = k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi \quad (۴)$$

$$3(۳) \quad (۲)$$

معادله $\tan 3x = \tan 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$2(۲) \quad (۱)$$

توجه کنید که

تست
□ ■ □ □

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $x = 0, x = \pi$ و $x = 2\pi$.

راه حل

$$\tan 3x = \tan 2x \Rightarrow 3x = k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi$$

. بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $x = 0, x = \pi$ و $x = 2\pi$.

نکته

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

(۱) به ازای $k = 0$ جواب را به دست می‌آوریم و اگر در بازه مورد نظر بود، آن را قبول می‌کنیم.

(۲) به ازای $k = 1, k = 2, \dots$ جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار داشته باشند.

(۳) به ازای $k = -1, k = -2, \dots$ جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار داشته باشند.

معادله $\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sin x = 0$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

$$4(۴) \quad (۳)$$

$$3(۳) \quad (۲)$$

$$1(۱)$$

تست
□ ■ □ □

راه حل

معادله را به صورت $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x \Rightarrow \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{غ.ق.ق.}), \quad x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$

(غ.ق.ق.)

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم

پس معادله دو جواب در این بازه دارد.

نکته

گاهی ممکن است چند مجموعه جواب‌های کلی برای معادله مثلثاتی به دست بیاید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه دیگری باشد.

جواب‌های کلی معادله $\cos 3x = \cos x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$4k\pi \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (۲)$$

$$k\pi \quad (۱)$$

توجه کنید که

تست
□ ■ □ □

راه حل

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مجموعه جواب $x = \frac{k\pi}{2}$ شامل مجموعه جواب $k\pi$ نیز هست. پس جواب‌های معادله به صورت $k \in \mathbb{Z}$ هستند.

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توان با استفاده از روابط میان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم یا مکمل به معادله‌های ساده مثلثاتی تبدیل کرد.

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

معادله $\cos 4x + \cos x = 0$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

تست ۶

راه حل

معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب های واقع در بازه $[0, \pi]$ را بیابیم، می توانیم به ازای مقادیر مختلف k جواب ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱	۲
$\frac{(2k+1)\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	π
$\frac{(2k-1)\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$	π

$x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{\pi}{3}$

$$x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{\pi}{3}$$

با توجه به مشترک بودن $x = \pi$ در این جواب ها، معادله در بازه $[0, \pi]$ چهار جواب دارد:

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

معادله $\cos 4x + \sin x = 0$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

تست ۷

راه حل

معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = (4k+1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow x = (4k-1)\frac{\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب های واقع در بازه $[0, \pi]$ را بیابیم، می توانیم به ازای مقادیر مختلف k جواب ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱
$\frac{(4k+1)\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

k	۱	۲
$\frac{(4k-1)\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10}$

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد.

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

معادله $\tan 3x = \cot 5x$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

تست ۸

راه حل

ابتدا نسبت مثلثاتی کتانی را به تانژانت تبدیل می کنیم و سپس معادله را حل می کنیم:

$$\tan 3x = \cot 5x \Rightarrow \tan 3x = \tan \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) \Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) \Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{16}$$

برای پیدا کردن تعداد جواب ها در بازه $[0, \pi]$ به شکل زیر عمل می کنیم:

$$-\frac{(2k+1)\pi}{16} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 2k+1 \leq 16 \Rightarrow -1 \leq 2k \leq 15 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{15}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$$

بنابراین معادله مورد نظر در بازه $[0, \pi]$ هشت جواب دارد.۱) برای حل معادله $\sin x = m$ که $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه α را طوری پیدا کنیم که $\sin \alpha = m$ ، سپس معادله $\sin x = \sin \alpha$ را حل کنیم.۲) برای حل معادله $\cos x = m$ که $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه α را طوری پیدا کنیم که $\cos \alpha = m$ ، سپس معادله $\cos x = \cos \alpha$ را حل کنیم.

نکته

(۱) کدام است $\sqrt{2} \sin 2x - 1 = 0$ کلی معادله.

تست ۹

راه حل

 $k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۲) $k\pi + \frac{5\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۱)

$$\sqrt{2} \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

معادله را به صورت مقابل می نویسیم:

بنابراین جواب های کلی معادله به صورت مقابل هستند: $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$, $2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$.



نکته

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در بازه $[a, b]$ می‌توانیم پس از پیدا کردن جواب‌های کلی x , نامعادله $a \leq x \leq b$ را حل کنیم و مقادیر k را پیدا کنیم. در مورد بازه‌های دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

تست ۱۰

راه حل

$$\text{معادله } \cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ چند جواب در بازه } [-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \text{ دارد.}$$

۶ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

ابتدا جواب‌های کلی معادله مورد نظر را به دست می‌آوریم. توجه کنید که $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌ها عبارت‌اند از

اکنون از این جواب‌ها، آن‌هایی را پیدا می‌کنیم که در بازه $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ هستند. توجه کنید که

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -2\pi \leq 2k\pi \leq 2\pi \Rightarrow -1 \leq k \leq 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $-\frac{\pi}{2} - 2\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$. همچنین،

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{11\pi}{2} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{11}{2} \leq k \leq \frac{1}{6} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -1, 0$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $-\frac{5\pi}{2} - 2\pi, -\frac{7\pi}{6}$. بنابراین معادله مورد نظر در بازه $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ پنج جواب دارد.

تست ۱۱

راه حل

اختلاف جواب‌های معادله $\tan^2(\pi x + \frac{\pi}{8}) = -1$ در بازه $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ چقدر است؟

۱ (۴)

۱ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱)

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan^2(\pi x + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan(\pi x + \frac{\pi}{8}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pm \frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$\pi x + \frac{\pi}{8} = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x + \frac{1}{8} = k \pm \frac{1}{6} \Rightarrow x = k + \frac{1}{24}, \quad x = k - \frac{7}{24}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

به ازای $k = 0$ جواب‌های واقع در بازه $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ به دست می‌آیند که $-\frac{7}{24}$ و $\frac{1}{24}$ هستند و اختلاف آنها برابر $\frac{1}{3}$ است.

نکته

معادله‌های $\cos x = m$ و $\sin x = m$ به ازای m هایی که در بازه $[-1, 1]$ نیستند، جواب ندارند.

تست ۱۲

راه حل

به ازای چه مقادیری از k معادله $\cos x + 3k = 1$ جواب دارد؟

$$-\frac{1}{3} \leq k \leq 1 \quad (۴)$$

$$-1 \leq k \leq \frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$-1 \leq k \leq 1 \quad (۲)$$

$$0 \leq k \leq \frac{4}{3} \quad (۱)$$

$$\text{Tوجه کنید که در نتیجه } \cos x + 3k = 1 \text{ و } \cos x = \frac{1-3k}{2} \text{ و چون } -1 \leq \cos x \leq 1, \text{ پس}$$

$$-1 \leq \frac{1-3k}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 1-3k \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -3k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 1$$

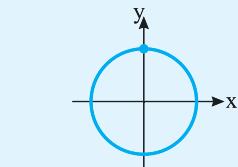
معادلات مثلثاتی خاص

در برخی معادلات مثلثاتی، جواب‌های کلی را می‌توان به صورت یک دسته جواب نوشت. مثلاً معادله مثلثاتی $\sin x = 1$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که

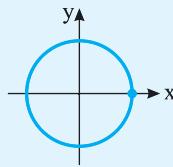
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های کلی این معادله به صورت $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ هستند. جواب‌های کلی معادلات خاص را در نکته زیر آورده‌ایم.

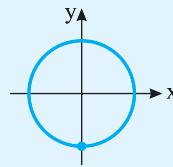
معادلات مثلثاتی خاص



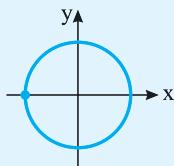
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



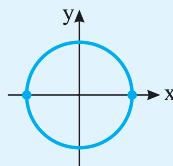
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



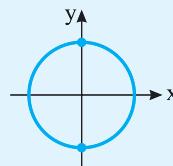
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

۱۳) جواب‌های کلی معادله $\sin x \cos 2x = 0$ کدام است؟

۵) $k\pi, k\pi - \frac{\pi}{4}$

۶) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2k\pi$

۷) $k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}$

۸) $k\pi, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

توجه کنید که

تست

۱۴) تست

نمودار تابع $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟

۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۲

$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

جایی که نمودار محور x را قطع می‌کند، $y = 0$.

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ عبارت‌اند از

۱۵) معادله $\cos x + \sin 4x = 2$ در بازه $[0^\circ, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) صفر

توجه کنید که همواره $1 \leq \cos x \leq 1$ و $\cos x + \sin 4x = 2$. بنابراین $\cos x + \sin 4x \leq 2$. درنتیجه، اگر $\cos x + \sin 4x = 2$ بود، آنگاه $\cos x = 1$ و $\sin 4x = 1$.

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in [0^\circ, \pi]} x = 0^\circ$

اکنون توجه کنید که

$$\sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \xrightarrow{x \in [0^\circ, \pi]} x = \frac{\pi}{8}, x = \frac{5\pi}{8}$$

چون دو معادله جواب مشترک ندارند، پس معادله اصلی جواب ندارد.

تست

۱۶) تست

نکته

گاهی می‌توان چند مجموعه جواب کلی معادله مثلثاتی را به صورت یک مجموعه جواب کلی نوشت.

مثال: مجموعه جواب‌های معادله $\sin \frac{x}{2} (\cos x + 1) = 0$ به صورت زیر است:

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

چون مضارب زوج π و مضارب فرد π جواب‌های این معادله هستند، مجموعه جواب‌های این معادله را می‌توان به صورت مضارب صحیح π نوشت.
که می‌شود $x = k\pi$.

تسنیه ۱۶

جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

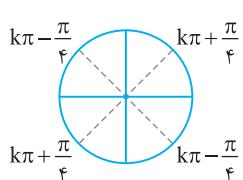
$$(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$2 \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۱), \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۲)$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۳), \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۴)$$



اگر چه توجه کنید که اجتماع جواب‌های (۱) و (۴) را می‌توان به صورت $k\pi + \frac{\pi}{4}$ نوشت. همین طور، اجتماع

جواب‌های (۲) و (۳) به صورت $k\pi - \frac{\pi}{4}$ است. بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر به صورت $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ است که

می‌توان با توجه به شکل روبرو آنها را به صورت $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ نوشت ($k \in \mathbb{Z}$).

راه حل دوم: چون $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ نوشت، که مجموعه جواب‌های آن به صورت زیر است:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

تسنیه ۱۷

جواب‌های کلی معادله $\cos^3 x - \cos x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (۲)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$k\pi \quad (۴)$$

$$\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین

بنابراین

توجه کنید که اجتماع دو جواب آخر را می‌توان به صورت $k\pi$ نوشت.

بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر عبارت اند از

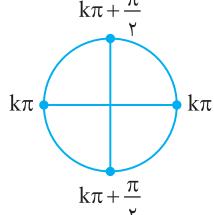
که با توجه به شکل روبرو می‌توان آنها را به صورت $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ نوشت.

راه حل دوم: معادله مورد نظر را می‌توان به شکل مقابل نوشت.

$$\cos x(\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\cos x \sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین

که مشابه راه حل اول می‌توان مجموعه جواب‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ نوشت.



نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توانیم با استفاده از اتحادها به معادله‌های سادهٔ مثلثاتی تبدیل و حل کنیم.

تست



جواب‌های کلی معادله $\tan x - \sqrt{3} \cot x = 0$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۳)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

معادله را برحسب $\tan x$ می‌نویسیم:

$$\tan x - \sqrt{3} \cot x = 0 \Rightarrow \tan x - \frac{\sqrt{3}}{\tan x} = 0$$

$$\frac{\tan^2 x - 3}{\tan x} = 0 \Rightarrow \tan^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 3$$

$$\tan x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

تست



معادله $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$5 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$4 \quad (۱)$$

توجه کنید که

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0^\circ, 2\pi]} x = 0^\circ, 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0^\circ, 2\pi]} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{array} \right.$$

معادله مورد نظر چهار جواب در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ دارد.

تست



جواب‌های کلی معادله $\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$2k\pi - \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (۳)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (۲)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

راهنمای حل

ابتدا توجه کنید که $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ، در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - \sin^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow (\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \sin x = \frac{3}{2}$$

(غ.ق.ق.)

از طرف دیگر،

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

تست



جواب‌های کلی معادله $\sin 6x = 2 \sin 3x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (۱)$$

راهنمای حل

ابتدا توجه کنید که $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$2 \sin 3x \cos 3x = 2 \sin 3x \Rightarrow 2 \sin 3x (\cos 3x - 1) = 0$$

بنابراین

$$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \cos 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

توجه کنید که $\frac{2k\pi}{3}$ مضارب زوج $\frac{\pi}{3}$ و همه مضارب صحیح $\frac{\pi}{3}$ هستند. بنابراین مجموعه جواب‌های کلی معادله مورد نظر $\frac{k\pi}{3}$ است ($k \in \mathbb{Z}$).



تست ۲۲

جواب‌های کلی معادله $\cos 2x = 1 + \sin x$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$k\pi, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$1 - 2\sin^2 x = 1 + \sin x \Rightarrow \sin x(1 + 2\sin x) = 0$$

ابتدا توجه کنید که $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$. بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 + 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

در نتیجه

تست ۲۳

معادله $\sin^4 x - \sin x = \cos^4 x$ در بازه $[-\pi, 0]$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin x \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \Rightarrow -\cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin(-x)$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3} = \frac{2k-1}{3}\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, 0]$ عبارت اند از $x = -\frac{5\pi}{6}$ و $x = -\frac{\pi}{6}$. بنابراین معادله در بازه $[-\pi, 0]$ دو جواب دارد.

تست ۲۴

جواب‌های کلی معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{4} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow -2(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow \cos 4x = -1$$

$$4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت مقابله هستند:

تست ۲۵

تعداد جواب‌های معادله $\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x = -\frac{1}{2}$ در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ چند تاست؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

با استفاده از دستور سینوس تفاضل دو زاویه می‌توان معادله مورد نظر را به صورت زیر نوشت:

$$\sin(5x - 2x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 3x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

جواب‌های کلی این معادله به صورت زیر است:

$$3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

اگرچه جواب‌های واقع در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{17}{6} \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$-\frac{\pi}{6} < (2k+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{5}{6} < k < \frac{13}{6} \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

بنابراین معادله مورد نظر در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ شش جواب دارد.

تست ۲۶ جواب‌های کلی معادله $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴)

۲) $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$ (۳)

۳) $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$ (۲)

۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۱)

اگر از دستورهای سینوس مجموع و تفاضل دو زاویه استفاده کنیم، معلوم می‌شود که

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

تست ۲۷ مجموع جواب‌های معادله $\sin x+\cos x=1$ که در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

۱) 5π (۴)

۲) 4π (۳)

۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۲)

۴) 2π (۱)

راه حل اول اگر طرفین معادله را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت مقابل هستند:

در نتیجه جواب‌های واقع در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ عبارت‌اند از 0° و 2π و $\frac{\pi}{2}$ که مجموع آنها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

راه حل دوم طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت مقابل می‌نویسیم:

بنابراین جواب‌هایی که در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ قرار دارند، به صورت مقابل هستند:

توجه کنید که جواب‌های π و $\frac{3\pi}{2}$ قابل قبول نیستند، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کنند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دورسانده‌ایم،

تولید شده‌اند. بنابراین مجموع جواب‌هایی که در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ قرار دارند برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

راه حل سوم با استفاده از اتحادهای $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ و $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x=1-\cos x \Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})=0$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ قرار دارند، به صورت مقابل هستند:

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

تست ۲۸ معادله $\sin 3x \cos 2x - \sin x \cos 4x = \cos 3x \cos 2x + \sin 4x \cos x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) 4 (۴)

۲) 3 (۳)

۳) 2 (۲)

۴) 1 (۱)

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x = -\sin x \cos 4x - \sin 4x \cos x \Rightarrow \cos(3x+2x) = -\sin(x+4x) \Rightarrow \cos 5x = -\sin 5x$$

$$\tan 5x = -1 \Rightarrow 5x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} - \frac{\pi}{20}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

برای پیدا کردن جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, \pi]$ می‌توانیم بنویسیم:

بنابراین معادله مورد نظر در بازه $[-\pi, \pi]$ ده جواب دارد.



تست ۲۹

معادله $\tan 3x - \tan 5x = 1 + \tan 3x \tan 5x$ چند جواب در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

اگر دو طرف معادله داده شده را بر سمت راست آن تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{\tan 3x - \tan 5x}{1 + \tan 3x \tan 5x} = 1 \Rightarrow \tan(3x - 5x) = 1 \Rightarrow \tan(-2x) = 1 \Rightarrow -\tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4})$$

بنابراین $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ، پس $2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{47}{12} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$$

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ دارد.

راه حل

تک ته

تعداد جواب‌های برخی معادلات مثلثاتی را می‌توانیم به کمک رسم نمودار پیدا کنیم.

تست ۳۰

تعداد جواب‌های معادله $(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۵ (۴)

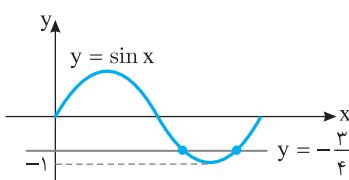
۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

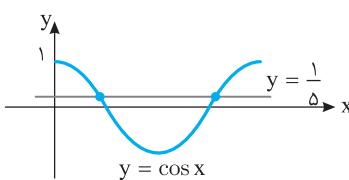
توجه کنید که راه حل

$$(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{4} \\ \cos x = \frac{1}{5} \end{cases}$$



از طرف دیگر، جواب‌های معادله $\sin x = -\frac{3}{4}$ طول نقطه‌های برخوردهای نمودار تابع

و خط $y = -\frac{3}{4}$ هستند. بنابراین از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که معادله $\sin x = -\frac{3}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.



به همین ترتیب، از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که معادله $\cos x = \frac{1}{5}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد. بنابراین معادله مورد نظر در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.

تست ۳۱

معادله $9 - 13 \sin x = 6 \cos 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

راه حل

به کمک اتحاد $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ معادله را بر حسب $\sin x$ می‌نویسیم:

$$9 - 13 \sin x = 6(1 - 2 \sin^2 x) \Rightarrow 12 \sin^2 x - 13 \sin x + 3 = 0.$$

اگر فرض کنیم $t = \sin x$ ، به دست می‌آید:

$$12t^2 - 13t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{24} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4} = \sin x \\ t = \frac{1}{3} = \sin x \end{cases}$$

معادلات $\sin x = \frac{3}{4}$ و $\sin x = \frac{1}{3}$ هر کدام در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارند. پس معادله مورد نظر در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.

معادلات مثلثاتی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

کتاب درسی

$$8k\pi + 3\pi \text{ یا } 8k\pi + \pi \quad (4)$$

$$8k\pi + 3\pi \text{ یا } 8k\pi - \pi \quad (3)$$

- ۵۵۶ جواب‌های کلی معادله $\sqrt{2} \sin \frac{x}{4} - 1 = 0$ کدام‌اند؟

$$8k\pi - \pi \text{ یا } 8k\pi + \pi \quad (1)$$

کتاب درسی

$$2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$2k\pi + \frac{4\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

کتاب درسی

$$k\pi \pm \frac{\pi}{\lambda} \quad (4)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \quad (1)$$

کتاب درسی

- ۵۵۷ جواب‌های کلی معادله $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ کدام است؟

$$\frac{8\pi}{9} \quad (4)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{13\pi}{9} \quad (2)$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad (1)$$

کتاب درسی

- ۵۵۸ مجموع جواب‌های معادله $2 \cos 3x - 1 = 0$ که در بازه $(0, \pi)$ قرار دارند، چقدر است؟

$$3\pi \quad (4)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (3)$$

$$2\pi \quad (2)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (1)$$

- ۵۶۱ جواب‌های کلی معادله $\tan(x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0$ کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

- ۵۶۲ جواب‌های کلی معادله $\sqrt{3} \tan(x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$ کدام است؟

$$k\pi + \frac{5\pi}{12} \quad (4)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{12} \quad (3)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{12} \quad (2)$$

$$k\pi - \frac{5\pi}{12} \quad (1)$$

- ۵۶۳ نمودار تابع $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

- ۵۶۴ نمودار تابع $f(x) = \sin 3x$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

- ۵۶۵ نمودار تابع $f(x) = -2 \cos 4x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

- ۵۶۶ جواب‌های کلی معادله $2 \sin(x + \frac{i\pi}{18}, k \in \mathbb{Z})$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{18}$ است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

$$\{3, 10\} \quad (4)$$

$$\{1, 10\} \quad (3)$$

$$\{3, 8\} \quad (2)$$

$$\{1, 4\} \quad (1)$$

- ۵۶۷ جواب‌های کلی معادله $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{24}$ به صورت $\cos(x + \frac{\pi}{\lambda}) = \sqrt{1/2}$ است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

$$\{-3, 3\} \quad (4)$$

$$\{3, -7\} \quad (3)$$

$$\{1, -7\} \quad (2)$$

$$\{1, -3\} \quad (1)$$

- ۵۶۸ جواب‌های کلی معادله $2 \cos^2(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) - 1 = 0$ کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (1)$$



-۵۶۹ جواب‌های کلی معادله $x = \frac{k\pi}{5} + \frac{i\pi}{3}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای i کدام است؟ ($i < 5, k \in \mathbb{Z}$)

۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

-۵۷۰ جواب‌های کلی معادله $\tan^3 x - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi \pm \pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi \pm \pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi - \pi}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi + \pi}{6} \quad (۱)$$

-۵۷۱ مجموع جواب‌های معادله $\tan^3(\pi x - \frac{\pi}{\lambda}) - 1 = 0$ در بازه $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ کدام است؟

۱ (۴)

۱ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱)

-۵۷۲ جواب‌های کلی معادله $\sin 5x = \sin 3x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi + \pi}{4} \text{ یا } 2k\pi \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi + \pi}{4} \text{ یا } k\pi \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{4} \text{ یا } 2k\pi \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{4} \text{ یا } k\pi \quad (۱)$$

-۵۷۳ جواب‌های کلی معادله $\cos 3x = \cos 2x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi \pm \pi}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi \pm \pi}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{2k\pi}{5} \quad (۱)$$

-۵۷۴ معادله $\sin(x - \frac{\pi}{3}) - \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, \pi)$ دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

-۵۷۵ معادله $\cos 2x - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, \pi)$ دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

-۵۷۶ معادله $\tan(x - \frac{\pi}{6}) - \tan 2x = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, \pi)$ دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۵۷۷ مجموع جواب‌های معادله $\tan 3x = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$$\frac{9\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{20\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{5\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{13\pi}{3} \quad (۱)$$

-۵۷۸ معادله $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{2x}{3} = 0$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۵۷۹ جواب‌های کلی معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = -\sin 2x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi + 7\pi}{22} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi - 7\pi}{22} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi - 7\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi + 7\pi}{2} \quad (۱)$$

-۵۸۰ معادله $\tan 2x = \cot x$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

-۵۸۱ معادله $\cos 2x (\sin 2x + 1) = 0$ در بازه $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ چند جواب متمایز دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ صفر

-۵۸۲ جواب‌های کلی معادله $\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi}{4} \quad (۴)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi + \pi}{2} \quad (۱)$$

-۵۸۳ مجموع جواب‌های معادله $2 \sin^2 x = \sin x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$$\frac{11\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{7\pi}{6} \quad (۳)$$

$$2\pi \quad (۲)$$

$$\pi \quad (۱)$$

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

کتاب درسی-۵۸۴ معادله $2 \cos^3 x - \cos x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

کتاب درسی-۵۸۵ جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 2x - 5 \sin 2x + 3 = 0$ کدام است؟

$$\frac{5\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{7\pi}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{3\pi}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad (۱)$$

-۵۸۶ بزرگ‌ترین جواب معادله $2 \cos^3 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$8 \quad (۴)$$

$$6 \quad (۳)$$

$$4 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۱)$$

-۵۸۷ معادله $\tan^2 x - (\sqrt{3}+1) \tan x + \sqrt{3} = 0$ چند جواب دارد؟

$$(0 < n < 6, k, n \in \mathbb{Z})$$

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

-۵۸۸ جواب‌های کلی معادله $n \tan^2 x - 4\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ به صورت $x = k\pi + \frac{n\pi}{6}$ هستند. چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

-۵۹۰ معادله $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$ چند جواب متمایز در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

-۵۹۱ معادله $(3 \cos x + 1)(5 \cos x - 4) = 0$ چند جواب در بازه $[0, \frac{3\pi}{2}]$ دارد؟

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

-۵۹۲ معادله $\sin x = m \cos x$ چند جواب در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ دارد؟۴) بستگی به مقدار m دارد.

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

-۵۹۳ معادله $2 \sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 0$ چند جواب متمایز در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ دارد؟

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

-۵۹۴ مجموع جواب‌های معادله $\sin 4x = \sqrt{2} \sin 2x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$$\frac{23\pi}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{20\pi}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{15\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{13\pi}{8} \quad (۱)$$

-۵۹۵ کدام گزینه جواب معادله $\sin^2(x + \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ نیست؟

$$\frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$-\frac{2\pi}{3} \quad (۱)$$

-۵۹۶ جواب‌های کلی معادله $\cos 2x - \sin 2x + 2 \sin^2 x = 0$ به کدام صورت است؟

$$\frac{k\pi - \frac{\pi}{4}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2} \quad (۳)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

-۵۹۷ معادله $\cos 2x = \cos^2 x$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

-۵۹۸ مجموع جواب‌های معادله $\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(3\pi - x)$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

$$\frac{7\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\pi \quad (۲)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۱)$$



-۵۹۹ معادله $\tan x = \frac{1}{\cos x}$ در بازه $(-\pi, \pi)$ چند جواب دارد؟

۴) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۶۰۰ جواب‌های کلی معادله $\frac{\cos(2x+\frac{\pi}{4})}{\sin 2x} = 1$ کدام است؟

 $k\pi + \frac{\pi}{16}$ (۴) $\frac{k\pi \pm \pi}{16}$ (۳) $\frac{k\pi \pm \pi}{16}$ (۲) $\frac{k\pi + \pi}{16}$ (۱)

-۶۰۱ معادله $\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos 2x} = 1$ در بازه $(-\pi, \pi)$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۶۰۲ جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x = \lambda \cos x + \gamma$ کدام است؟

 $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۱)

-۶۰۳ تعداد جواب‌های متمایز معادله $(-\frac{\pi}{2}, -\sqrt{2}) \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۶۰۴ معادله $\tan \gamma x \cot x - 1 = 0$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

-۶۰۵ جواب‌های کلی معادله $\tan x + \cot x = 2$ کدام است؟

 $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{4}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۱)

-۶۰۶ جواب‌های کلی معادله $\tan(\frac{\pi}{4}+x) + \cot(\frac{\pi}{4}-x) = 2\sqrt{3}$ کدام است؟

 $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{24}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{12}$ (۱)

-۶۰۷ مجموع جواب‌های معادله $3 \tan x - 3 \cot x = 2\sqrt{3}$ در بازه $[0, 2\pi)$ کدام است؟

 $\frac{14\pi}{3}$ (۴) $\frac{29\pi}{6}$ (۳) $\frac{25\pi}{6}$ (۲) $\frac{13\pi}{3}$ (۱)

-۶۰۸ جواب‌های کلی معادله $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ هستند. مجموع مقادیر i کدام است؟

{1, 2, 3} (۴)

{0, 2} (۳)

{1, 2} (۲)

{0, 1} (۱)

-۶۰۹ معادله $3 \sin^2 x + \cos^2 x - (\sqrt{2}-1) \sin x - (\sqrt{2}+1) = 0$ چند جواب متمایز در بازه $[0, 2\pi)$ دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

-۶۱۰ مجموع جواب‌های معادله $4 \sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sin x} = 2+2\sqrt{3}$ در بازه $[0, 2\pi)$ کدام است؟

 3π (۴) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) 2π (۱)

-۶۱۱ معادله $\cos^3 x - 2 \cos^2 x - 3 \cos x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب متمایز دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۶۱۲ جواب‌های کلی معادله $3 \tan^3 x - 1 \cdot \tan^2 x + 3 = 0$ کدام است؟

 $\frac{k\pi \pm \pi}{6}$ (۴) $\frac{k\pi \pm \pi}{3}$ (۳) $\frac{k\pi \pm \pi}{12}$ (۲) $\frac{k\pi \pm \pi}{6}$ (۱)

-۶۱۳ معادله $(5 \sin x - 3)(5 \cos x - 4) = 0$ چند جواب متمایز در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

-۶۱۴ معادله $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin 2x} = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

-۶۱۵ معادله $\tan 2x = \sin 4x$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

-۶۱۶ جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x + \tan^2 x = 2$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

 $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{4}$ (۱)

-۶۱۷ معادله $(\cos 3x + \sin 2x)^2 = 1 + \sin 2x$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

-۶۱۸ معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب در بازه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۶۱۹ معادله $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ چند جواب متمایز در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۶۲۰ معادله $\cos^2 2x + \cos^2 6x = 1$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

-۶۲۱ مجموع جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{16}{3}$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

 $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) 2π (۲) π (۱)

-۶۲۲ مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x - \sqrt{2} \cos x = 0$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

 $\frac{9\pi}{4}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$ (۳) 2π (۲) π (۱)

-۶۲۳ جواب‌های کلی معادله $\cos x(\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}) = \sin x(\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5})$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

 $k\pi + \frac{\pi}{10}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{10}$ (۳) $k\pi - \frac{2\pi}{10}$ (۲) $k\pi + \frac{2\pi}{10}$ (۱)

-۶۲۴ مجموع جواب‌های معادله $1 + 2 \sin 2x \cos 3x = 2 \sin 3x \cos 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

 $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$ (۳) $\frac{5\pi}{3}$ (۲) π (۱)

-۶۲۵ مجموع جواب‌های متمایز معادله $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

 2π (۴) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۱)

-۶۲۶ مجموع جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{6}) - \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin 2x$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

 4π (۴) 3π (۳) 2π (۲) π (۱)

-۶۲۷ معادله $\sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{\lambda})$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

-۶۲۸ جواب‌های کلی معادله $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \cos^2 x$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

 $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{k\pi + \pi}{2}$ (۱)



- ۶۲۹ معادله $\tan 2x - \tan x = \frac{\sin x}{\cos 2x}$ در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ چند جواب متمایز دارد؟
- ۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)
- ۶۳۰ معادله $\tan x \tan 3x = 1$ چند جواب در بازه $(0^\circ, \pi)$ دارد؟
- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۶۳۱ معادله $\tan 2x \tan 4x = 1$ چند جواب در بازه $(0^\circ, \frac{\pi}{2})$ دارد؟
- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۶۳۲ معادله $\tan x \tan 2x = -1$ در بازه $(0^\circ, 2\pi)$ چند جواب دارد؟
- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۶۳۳ جواب‌های کلی معادله $\cot 2x - \tan 2x = 2 \cot x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{k\pi}{3}$ (۱)
- ۶۳۴ مجموع جواب‌های معادله $\cot x - \tan x = 1 + \cot 2x$ در بازه $(0^\circ, 2\pi)$ کدام است؟
- $\frac{7\pi}{2}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) 2π (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۱)
- ۶۳۵ مجموع جواب‌های معادله $\sin x - \sin^3 x = \cos x - \cos^3 x$ در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ کدام است؟
- $\frac{13\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{2}$ (۳) 5π (۲) $\frac{9\pi}{2}$ (۱)
- ۶۳۶ مجموع جواب‌های متمایز معادله $\tan 2x + 2 \sin x = 0$ در بازه $(0^\circ, 2\pi)$ کدام است؟
- ۵\pi (۴) ۴\pi (۳) ۳\pi (۲) ۲\pi (۱)
- ۶۳۷ چند جواب معادله $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1$ در بازه $[0^\circ, 2\pi]$ قرار دارند؟
- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۶۳۸ جواب‌های کلی معادله $\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2}$ کدام است? ($k \in \mathbb{Z}$)
- $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{4}$ (۱)
- ۶۳۹ مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x - 3 = 0$ در بازه $(0^\circ, \pi)$ کدام است؟
- $\frac{7\pi}{2}$ (۴) ۳\pi (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۲) ۲\pi (۱)
- ۶۴۰ جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x - 3 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۱)
- ۶۴۱ معادله $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$ در بازه $(0^\circ, \pi)$ چند جواب متمایز دارد؟
- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)
- ۶۴۲ مجموع جواب‌های معادله $\tan 2x = 3 \tan x$ در بازه $(0^\circ, 2\pi)$ کدام است؟
- ۷\pi (۴) ۶\pi (۳) ۵\pi (۲) ۴\pi (۱)
- ۶۴۳ جواب‌های کلی معادله $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan 3x$ کدام است? ($k \in \mathbb{Z}$)
- $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۱)
- ۶۴۴ مجموع جواب‌های معادله $\tan(x + \frac{\pi}{12}) = \tan x + \tan \frac{\pi}{12}$ در بازه $[0^\circ, \pi]$ کدام است؟
- $\frac{11\pi}{12}$ (۴) $\frac{23\pi}{12}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) $\frac{23\pi}{21}$ (۱)

۵۶۰ معادله را به صورت $\sin 2x = \frac{1}{2}$ می‌نویسیم.

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0^\circ, 2\pi^\circ)$ را معین می‌کنیم.

k	۰	۱	۲
$x = k\pi + \frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\pi + \frac{\pi}{12}$	$2\pi + \frac{\pi}{12}$

k	۰	۱	۲
$x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\pi + \frac{5\pi}{12}$	$2\pi + \frac{5\pi}{12}$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله که در بازه $(0^\circ, 2\pi^\circ)$ قرار دارند، برابر است با

$$\frac{\pi}{12} + \pi + \frac{\pi}{12} + \pi + \frac{5\pi}{12} = 3\pi$$

۵۶۱ معادله را به صورت $\tan(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۵۶۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$x + \frac{\pi}{4} = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{5\pi}{12}$$

۵۶۳ اگر نمودار تابع f محور طول‌ها در نقطه x قطع کند، پس

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(3k+1)\pi}{6}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ را بدست می‌آوریم

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{(3k+1)\pi}{6} < \pi \Rightarrow -3 < 3k+1 < 6 \Rightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{5}{3}$$

بنابراین به ازای $k = -1, 0, 1$ ، $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ مقدار برای x به دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌هاست.

۵۶۴ در نقاطی که $\sin 3x = 1$ ، نمودار تابع f حداقل مقدار خود را دارد. پس

$$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (\frac{4k+1}{3})\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	-۱	۰	۱	۲
$x = (\frac{4k+1}{3})\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$

بنابراین نمودار تابع f بار به حداقل مقدار خود می‌رسد. برای پیدا کردن نقاطی که

نمودار تابع در آنها حداقل می‌شود، می‌توانیم به شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi \leq (4k+1)\frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Rightarrow -6 \leq 4k+1 \leq 12 \Rightarrow -7 \leq 4k \leq 11$$

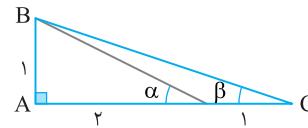
$$-\frac{7}{4} \leq k \leq \frac{11}{4} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

۵۵۵ ابتدا توجه کنید که $\tan \beta = \frac{1}{3}$ و $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. بنابراین

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1$$

از طرفی، چون $\tan \alpha, \tan \beta < 1$ و تابع تابع ناچیانت روی بازه $(0^\circ, \frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی

است، پس $\alpha + \beta < 90^\circ$. در نتیجه $\alpha + \beta < 90^\circ$. بنابراین $\alpha + \beta = 45^\circ$.



۵۵۶ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

پس جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \lambda k\pi + \pi$$

$$\frac{x}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \lambda k\pi + 3\pi$$

۵۵۷ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{3})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

۵۵۸ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2} \cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند.

۵۵۹ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi \pm \pi}{3} = \frac{(6k \pm 1)\pi}{9}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0^\circ, \pi)$ را معین می‌کنیم

k	۰	۱	۲
$x = (\frac{6k+1}{3})\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{9}$

(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x = (\frac{6k-1}{3})\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$

(غ.ق.ق.)

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازه $(0^\circ, \pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \frac{13\pi}{9}$$

۱) ۵۷۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan^2(\pi x - \frac{\pi}{\lambda}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan(\pi x - \frac{\pi}{\lambda}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pm \frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$\pi x - \frac{\pi}{\lambda} = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{1}{\lambda} = k \pm \frac{1}{6} \Rightarrow x = k + \frac{1}{24}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

به ازای $k = 0$ جواب‌های واقع در بازه $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ به دست می‌آیند که $\frac{1}{24}$ و $-\frac{1}{24}$ هستند و مجموع آنها برابر $\frac{1}{4}$ است.

جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$5x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$5x = 2k\pi + \pi - 3x \Rightarrow x = \frac{k\pi + \pi}{4}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱) ۵۷۳ جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند

$$3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi, \quad 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$$

جواب‌های به صورت $\frac{2k\pi}{5}$ شامل جواب‌های به صورت $2k\pi$ هم هستند. (مثلاً اگر

$k=5$ قرار دهید $x=5$ آن‌گاه جواب 2π به دست می‌آید که از قرار دادن 1

در $2k\pi$ حاصل می‌شود) پس جواب‌های کلی معادله به صورت $\frac{2k\pi}{5}$ هستند.

۲) ۵۷۴ معادله را به صورت $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند: $(k \in \mathbb{Z})$

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2k\pi = -\frac{7\pi}{12} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{13\pi}{24}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(-2\pi, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم

k	۰	۱	۲	-۱	-۲	-۳
x	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{37\pi}{24}$	$\frac{61\pi}{24}$	$-\frac{11\pi}{24}$	$-\frac{35\pi}{24}$	$-\frac{59\pi}{24}$

(غ.ق.ق.)

پس معادله چهار جواب در بازه فوق دارد.

۳) ۵۷۵ معادله را به صورت $\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم. بنابراین

جواب‌ها به صورت زیر هستند: $(k \in \mathbb{Z})$

$$2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{(8k+1)\pi}{4}$$

$$2x = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3} = \frac{(8k-1)\pi}{12}$$

اکنون مقادیر مختلف و صحیح را به k می‌دهیم و مقدار x را حساب می‌کنیم

k	۰	۱	-۱
$x = \frac{(8k+1)\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{4}$

(غ.ق.ق.)

اکنون مقادیر $k=0, 1, -1$ را در معادله قرار می‌دهیم.

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
$x = \frac{(8k-1)\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{17\pi}{12}$

(غ.ق.ق.)

بنابراین معادله در بازه $(-\pi, \pi)$ چهار جواب دارد.

۳) ۵۶۵ در نقاطی که $\cos 4x = 1$ ، تابع f به حداقل مقدار خود می‌رسد، پس

$$4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	-۱	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین نمودار تابع ۵ بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۳) ۵۶۶ معادله را به صورت $\sin(x + \frac{7\pi}{36}) = \sin(\frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$x + \frac{7\pi}{36} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{18}$$

$$x + \frac{7\pi}{36} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{17\pi}{18}$$

پس 1 می‌تواند برابر 1 یا 10 باشد.

۲) ۵۶۷ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\cos(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{24}$$

$$x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{7\pi}{24}$$

بنابراین 1 می‌تواند مقادیر 1 و 7 را داشته باشد.

۱) ۵۶۸ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^2(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

پس مضارب زوج و مضارب فرد $\frac{\pi}{3}$ جواب‌های معادله هستند. در نتیجه جواب

کلی معادله را می‌توان به صورت $\frac{k\pi}{3}$ نوشت ($k \in \mathbb{Z}$).

۳) ۵۶۹ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin^2(\delta x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(\delta x - \frac{\pi}{3}) = \pm \frac{1}{2} = \sin(\pm \frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت زیر است:

$$\delta x - \frac{\pi}{3} = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\delta x = k\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{5} + \frac{3\pi}{10}$$

$$\delta x = k\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{30}$$

بنابراین 1 می‌تواند مقادیر 3 و 1 را داشته باشد که مجموع آنها برابر 4 است.

۳) ۵۷۰ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3 \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ و $x = k\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند.



معادله را به صورت زیر می‌نویسیم (۳) ۵۸۰

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

پس جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های معادله را در بازه $(0, 2\pi)$ معین می‌کنیم:

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$

(غ.ق.ق.)

بنابراین معادله شش جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد. توجه کنید که می‌توانیم به روش

زیر نیز عمل کنیم:

$$0 < (2k+1)\frac{\pi}{2} < 2\pi \Rightarrow 0 < 2k+1 < 4 \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{اگر } 2x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{آن‌گاه } \cos 2x = 0 \quad (۲) ۵۸۱$$

که فقط $x = \pi + \frac{\pi}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ قرار می‌گیرد.

$$\text{اگر } x = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad \text{در نتیجه } \sin 2x = -1$$

از این جواب‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ قرار نمی‌گیرند.

بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ فقط یک جواب دارد.

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم (۲) ۵۸۲

$$\sin 2x (\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \quad \text{یا} \quad \cos 2x = 1$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

جواب‌های معادله دوم جزء جواب‌های معادله اول هستند، بنابراین جواب‌های

معادله اصلی $x = \frac{k\pi}{2}$ است.

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم (۲) ۵۸۳

$$2 \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \quad \text{یا} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازه $(0, 2\pi)$ عبارت‌اند از π , $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ که مجموع آنها برابر 2π است.

جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آید: (۲) ۵۸۴

$$2 \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0, \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون جواب‌های معادله را در بازه $(0, 2\pi)$ می‌خواهیم، پس این جواب‌ها به صورت زیر هستند:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

بنابراین معادله شش جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

معادله را به صورت $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = \tan 2x$ می‌نویسیم و (۲) ۵۷۶

جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$2x = k\pi + x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازه $(-\pi, \pi)$ را به دست می‌آوریم. به دو روش می‌توان این کار را انجام داد.

راه حل اول

k	۰	۱	۲	-۱
x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{4}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

راه حل دوم

$$-\pi < k\pi - \frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow -\frac{5\pi}{4} < k\pi < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} < k < \frac{7}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1\}$$

بنابراین معادله در بازه $(-\pi, \pi)$ دو جواب دارد.

جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$3x = k\pi + x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

دققت کنید که $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ غیرقابل قبول هستند، زیرا در دامنه تعریف عبارت‌های معادله

قرار ندارند. بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه $(0, 2\pi)$ برابر است با $\frac{4\pi}{3}$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم (۱) ۵۷۸

$$\sin \frac{x}{2} = \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{2x}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{2x}{3} \Rightarrow x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 12k\pi - 3\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را مشخص می‌کنیم. واضح است که

هیچ‌یک از جواب‌های به صورت $x = 12k\pi - 3\pi$ در بازه $(0, 2\pi)$ قرار ندارد.

پس جواب‌های به صورت $x = \frac{(-12k+3)\pi}{7}$ را بررسی می‌کنیم

k	۰	۱	-۱
x	$\frac{3\pi}{7}$	$-\frac{9\pi}{7}$	$\frac{15\pi}{7}$

(غ.ق.ق.) (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.

ابتدا معادله را به صورت $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$ می‌نویسیم.

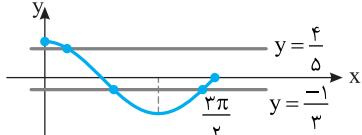
پس جواب کلی معادله به صورت زیر است

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow 2k\pi = -\frac{11\pi}{18}$$

$$2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{72}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۳ ۵۹۱ با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ و خطوط $y = \frac{4}{5}$ و $y = -\frac{1}{3}$

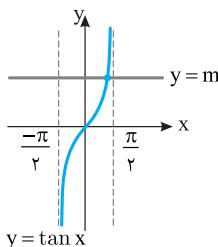
معادله $\cos x = -\frac{1}{3}$ در بازه $[0, \frac{3\pi}{2}]$ یک جواب دارد و معادله $\cos x = \frac{4}{5}$ این بازه دو جواب دارد. پس معادله مورد نظر مسئله در بازه فوق ۳ جواب دارد.



۱ ۵۹۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin x = m \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = m \Rightarrow \tan x = m$$

با توجه به نمودار زیر، به ازای هر مقدار m ، معادله دقیقاً یک جواب دارد.

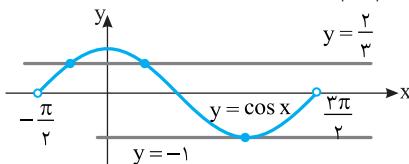


۳ ۵۹۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2(1-\cos^3 x) - \cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow 3\cos^3 x + \cos x - 2 = 0$$

$$(\cos x + 1)(3\cos x - 2) = 0 \Rightarrow \cos x = -1, \cos x = \frac{2}{3}$$

با توجه به نمودار زیر معادله $\cos x = -1$ یک جواب و معادله $\cos x = \frac{2}{3}$ دو جواب در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ دارد. پس معادله اصلی ۳ جواب در بازه مورد نظر دارد.



۳ ۵۹۴ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2\sin 2x \cos 2x = \sqrt{2} \sin 2x \Rightarrow 2\sin 2x(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$. پس مجموع جواب‌های واقع در این بازه برابر است با $\frac{20\pi}{8} = \frac{5\pi}{2}$.

۳ ۵۹۵ با توجه به اتحاد $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ معادله به

صورت زیر ساده می‌شود

$$-\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است

$$2x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین $\frac{2\pi}{3}$ جواب این معادله نیست.

۲ ۵۸۵ اگر فرض کنیم $t = \sin 2x$ ، آن‌گاه معادله به صورت $2t^2 - 5t + 3 = 0$ درمی‌آید و از حل این معادله درجه دوم نتیجه می‌شود $t = 1$ و $t = \frac{3}{2}$. بنابراین

$$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = \frac{3}{2} \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

۴ ۵۸۶ ابتدا توجه کنید که

$$2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow (2\cos 2x + 1)(\cos 2x + 1) = 0$$

بنابراین

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$.

که بزرگ‌ترین جواب واقع در این بازه $\frac{5\pi}{3}$ است.

۲ ۵۸۷ اگر فرض کنیم $t = \tan x$ ، معادله زیر به دست می‌آید که

$$t^2 - (\sqrt{3} + 1)t + \sqrt{3} = 0$$

مجموع ضرایب آن صفر است:

بنابراین

$$t = 1 = \tan x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad t = \sqrt{3} = \tan x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

۲ ۵۸۸ اگر فرض کنیم $t = \tan x$ ، آن‌گاه معادله به صورت

$$3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$$
 درمی‌آید. از حل این معادله درجه دوم نتیجه می‌شود

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{یا} \quad t = \sqrt{3}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{2\pi}{6}$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت $x = k\pi + \frac{n\pi}{6}$ هستند که در آن k هر عدد

صحیح دلخواه و n برابر ۱ یا ۲ است.

۳ ۵۸۹ با توجه به $\sin(\pi + x) = -\sin x$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \Rightarrow (\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = 2 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2$$

بنابراین جواب‌های نتیجه می‌شوند $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$.

۳ ۵۹۰ ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

اگر فرض کنیم $t = \sin x$ ، معادله به صورت $2t^2 - 3t + 1 = 0$ درمی‌آید. از حل

این معادله نتیجه می‌شود $t = 1$ و $t = \frac{1}{2}$. بنابراین

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \quad \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

توجه کنید که فقط جواب‌های واقع در بازه $(0, \pi)$ رامعنی کردۀ این معادله آنهاست.