



آریان حیدری، میلاد منصوری، علی منصف شکری

هرکول



Hercule



کارشناس علمی: سعید عزیزی

ریاضیات تجربی

و حسابان جامع

بانگ تست + پاسخ تشریحی + درسنامه

مباحث مشترک پایه دهم، یازدهم و دوازدهم

دستیاران تألیف: امین خوانین زاده، حامد علیخانی، احسان غیاثی



مبانی مشترک
ریاضی تئوری و حسابان
حرکت

تعداد تست‌ها در:

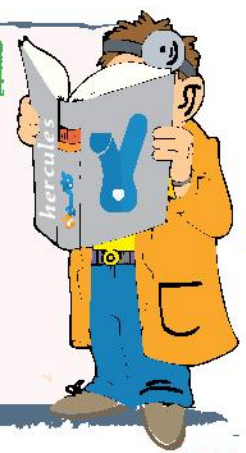
تئوری	1401	2	ریاضی	1401
تئوری	1400	5	ریاضی	1400
تئوری	1399	5	ریاضی	1399
تئوری	1398	2	ریاضی	1398
تئوری	1398	4	ریاضی	1398

chapter.1

منبع اول: تست‌های سبز
منبع دوم: تست‌های قرمز

فصل ۱:
تابع

بخش ۱: تشخیص تابع



کتابخانه

صفحه ۱: تابع

مبانی مشترک
ریاضی تئوری و حسابان تابع دو منبعی حرکت
Hercules

۱ تابع f از مجموعه A به مجموعه B تعریف شده است. کدام گزینه درست است؟

- ۱ تعداد عضوهای برد و هم دامنه، همواره با هم برابر است.
- ۲ برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم دامنه آن است.
- ۳ لزومی ندارد که تمام عضوهای مجموعه A در مؤلفه‌های اول تابع f استفاده شوند.
- ۴ تعداد اعضای برد، همواره بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای هم دامنه می‌باشد.

۲ در کدام گزینه مشخصات داده شده نمی‌تواند مربوط به یک تابع باشد؟

$\begin{cases} k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^- \\ k(x) = -x^2 \end{cases}$ ۴	$\begin{cases} g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 \end{cases}$ ۳	$\begin{cases} f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ ۲	$\begin{cases} h: (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 0] \\ h(x) = -x^2 \end{cases}$ ۱
---	--	---	---

۳ اگر رابطه $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ مربوط به یک تابع باشد. $f(3)$ کدام است؟

- ۱ ۴
- ۲ ۲
- ۳ ۴
- ۴ -۱

۴ اگر رابطه $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (m, 3)\}$ تابع نباشد. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- ۱ ۴
- ۲ ۶
- ۳ ۵
- ۴ همواره تابع است

۵ با حذف حداقل چند زوج مرتب از رابطه $f = \{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 3)\}$ می‌توان آن را به یک تابع تبدیل کرد؟

- ۱ ۱
- ۲ ۲
- ۳ ۳
- ۴ ۴

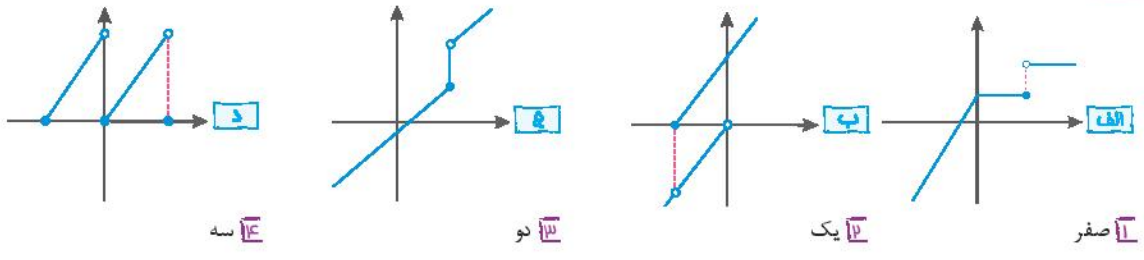
۶ اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & ; x \geq a \\ 2x + a + 2 & ; x \leq a \end{cases}$ یک تابع باشد. $f(1)$ کدام است؟

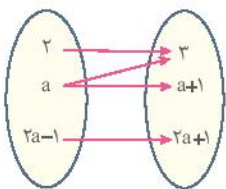
- ۱ ۳
- ۲ ۱
- ۳ ۵
- ۴ ۷

۷ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \leq 1 \\ ax + b & ; 1 \leq x \leq 2 \\ x^3 & ; x \geq 2 \end{cases}$ ضابطه یک تابع باشد. مقدار ab کدام است؟

- ۱ -۶۴
- ۲ ۶۴
- ۳ ۳۲
- ۴ -۳۲

۸ چه تعداد از نمودارهای زیر، مربوط به یک تابع است؟





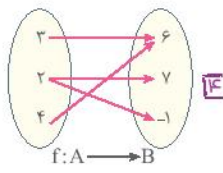
۹ اگر نمودار بی‌کافی تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- ۱۱ ۴
- ۱۲ ۵
- ۱۳ ۶
- ۱۴ ۷

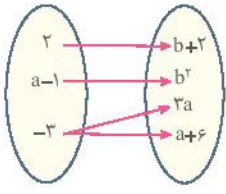
۱۰ کدام یک از گزینه‌های زیر، یک تابع را معرفی می‌کند؟

۱۱ $f = \{(4, 2), (-1, 2), (3, 5), (\sqrt{16}, 2)\}$

۱۲ رابطه‌ای که هر عدد مثبت را به ریشه‌های دوم آن نسبت می‌دهد.



۱۳ رابطه بین افراد و وزن آن‌ها در یک زمان معین.



۱۱ اگر نمودار بی‌کافی تابع باشد، آنگاه بیشترین مقدار ممکن برای ab کدام است؟

- ۱۱ ۶
- ۱۲ ۳
- ۱۳ ۱۲
- ۱۴ ۳

۱۲ کدام یک از موارد زیر معرف یک تابع بر حسب متغیر مستقل x است؟

۱۱ $y = \sqrt{x^2}$

۱۲ $\sqrt{y^2} = x$

۱۳ $x + |y| = 0$

۱۳ در کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌توان نتیجه گرفت $f(x)$ الزاماً یک تابع است؟

۱۱ $f(x^2 + 1) = x^2 + 2$

۱۲ $f(4x + 3) = 2x + 3$

۱۳ $f(|x|) = x^2 + 3$

۱۴ $f([x]) = x$

۱۴ چه تعداد از ضابطه‌های زیر، y را به عنوان تابعی از x تعریف می‌کنند؟

۱۱ $y = \begin{cases} x+1 & ; x \geq 2 \\ 3x & ; x \leq 2 \end{cases}$

۱۲ $x = \begin{cases} 2y & ; y > 1 \\ y+3 & ; y \leq 1 \end{cases}$

۱۳ $x = \sqrt{y-2} + \sqrt{2-y}$

- ۱۱ صفر
- ۱۲ یک
- ۱۳ دو
- ۱۴ سه

۱۵ در چه تعداد از روابط زیر y تابعی بر حسب متغیر مستقل x است؟

۱۱ $y^2 - 2y + 1 + x^2 = 0$

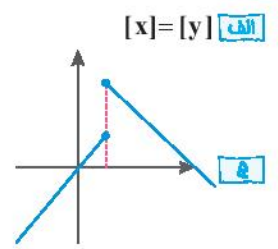
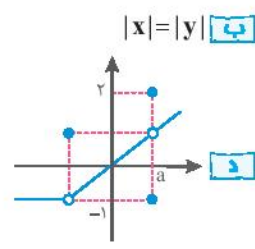
۱۲ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$

۱۳ $f(x^2) = x$

۱۴ $|y-2| + 3 - x = 0$

- ۱۱ ۱
- ۱۲ ۲
- ۱۳ ۳
- ۱۴ ۴

۱۶ از بین نمودارها و ضابطه‌های زیر، چه تعداد از آن‌ها با حذف یک نقطه تبدیل به تابع می‌شوند؟



- ۱۱ صفر
- ۱۲ یک
- ۱۳ دو
- ۱۴ سه

۱۷ اگر A مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشند، چند تابع از مجموعه A به مجموعه B می‌توان تعریف کرد؟

- ۱۱ m^n
- ۱۲ n^m
- ۱۳ $m+n$
- ۱۴ $m \times n$

محل ۱: تابع

مجله مشترک
Hercules
روایی تدریسی و همکاران با هم جمع می‌کنند



مقدار تابع در یک نقطه

۱۸ اگر $f(x) = x + \frac{1}{x}$ باشد، حاصل $f(2 + \sqrt{3}) + f(2 - \sqrt{3})$ کدام است؟

- ۸ | ۶ | $2\sqrt{3}$ | $4\sqrt{3}$

۱۹ اگر $f(x) = \begin{cases} -3x & ; x < -1 \\ x^2 - 2x & ; -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & ; x > 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(-\frac{5}{3}) + f(-\sqrt{2} + 1)$ کدام است؟

- ۶ | ۵ | ۴ | ۸

۲۰ اگر $f(3x + 2) = \sqrt{2x^2} + 1$ باشد، مقدار $f(8)$ برابر با است.

- ۱ | مربع یک عدد طبیعی
۳ | حاصل ضرب دو عدد متوالی
۲ | مجموع دو عدد فرد متوالی
۴ | مجموع دو عدد اول

۲۱ اگر $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2 + 1}$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

- ۱ | $\frac{1}{5}$ | ۲ | $\frac{1}{2}$

۲۲ اگر $f(\sqrt{x}) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، مقدار $f(2) - f(1)$ کدام است؟

- ۱۱ | ۸ | ۵ | ۱

۲۳ اگر $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x} + 2$ ، آنگاه مقدار $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۳ | $1 + \sqrt{2}$ | ۵ | $2 + \sqrt{2}$

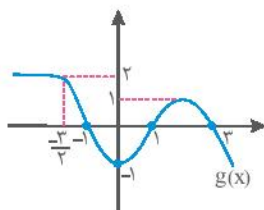
۲۴ اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ باشد، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

- ۱ | تعریف نشده
۶ | ۸ | ۱۲

۲۵ اگر $f(x) = -2x + 5 - a$ ، $g(x) = x^2 + 2x - 4$ باشد، به ازای کدام مقدار a رابطه $g(-1) = f(2)$ برقرار است؟

- ۶ | -6 | ۳ | -3

۲۶ اگر $f = \{(1, -2), (-2, 3), (2, -1), (3, 4)\}$ و نمودار تابع g مطابق شکل باشد، حاصل $\frac{f(3) + g(-4)}{f(-2) + g(3)}$ کدام است؟ ($Dg = \mathbb{R}$)



(تیری داخل -۹۰)

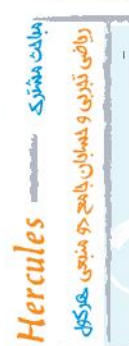
۲۷ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x + 4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

- ۶ | ۷ | ۸ | ۹

۲۸ به ازای کدام ورودی، خروجی ماشین داده شده برابر ۴ است؟

- ۱ | $\frac{13}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{9}{4}$

ورودی $\rightarrow \frac{2}{2 - \sqrt{x-1}} \rightarrow$ خروجی





ظریفینو

محل ۱: تابع

۳۹ اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{1-x^2}$ ۲ $\frac{2x}{x^2-1}$ ۳ $\frac{2x+1}{1-x^2}$ ۴ $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۳۰ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ $4x$ ۳ $2x^2$ ۴ $4x^2$

۳۱ اگر $f(\sin x) = \cos^2 x$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟ ($D_f = [-1, 1]$)

- ۱ x^2 ۲ $1-x^2$ ۳ $-x^2$ ۴ $1+x^2$

۳۲ اگر $f(\tan x) = \cos^2 x$ باشد، $f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{x^2+1}$ ۲ $\frac{x^2}{x^2+1}$ ۳ x^2+1 ۴ x^2

۳۳ اگر $f(xf(x)) = 2f(x)$ و $f(1) = 2$ باشد، مقدار $f(12)$ کدام است؟

- ۱ ۱۸ ۲ ۱۶ ۳ ۲۴ ۴ ۳۶

۳۴ اگر $f(x+2) = g(x-1) = 3 + \sqrt{x+3}$ باشد، مقدار $f(8) - g(0)$ متعلق به کدام مجموعه است؟

- ۱ N ۲ $Z-N$ ۳ $R-Q$ ۴ $Q-Z$

۳۵ اگر $f(x+1) + f(2) = 4x+6$ باشد، آنگاه مقدار $f(3)$ کدام ویژگی را دارد؟

- ۱ حاصل ضرب دو عدد متوالی ۲ مکعب کامل ۳ مربع کامل ۴ اول

۳۶ اگر $f(x+2) = f(x) + 3x+1$ باشد، حاصل $f(7) - f(3)$ کدام است؟

- ۱ ۳۲ ۲ ۲۶ ۳ ۲۵ ۴ ۲۰

۳۷ اگر $f(x) = x^2 + 3x + 1$ باشد، حاصل $f(\frac{\sqrt{5}-3}{2}) - 2f(\frac{\sqrt{6}-3}{2}) + f(\frac{\sqrt{7}-3}{2})$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ $\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + \sqrt{7}$ ۴ $\frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + \sqrt{7}}{2}$

۳۸ اگر $f(x+2) = (x+1)^2 + 2(x+1) + 3$ باشد، حاصل $f(\sqrt{5}) + f(\sqrt{6}) + f(\sqrt{7})$ کدام است؟

- ۱ ۱۸ ۲ ۲۴ ۳ ۲۹ ۴ ۳۲

۳۹ اگر $2f(x) + xf(4-x) = 3x+2$ باشد، مقدار $f(1)$ متعلق به کدام مجموعه است؟

- ۱ W ۲ $Z-N$ ۳ $R-Q$ ۴ $Q-Z$

۴۰ اگر $f(x+2) = 2x + 3f(3-x)$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $-\frac{1}{6}$

۴۱ اگر $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ و $f(2) = 3$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

- ۱ $\sqrt{3}$ ۲ ۹ ۳ $-\sqrt{3}$ ۴ ۵

۴۲ اگر $f(x) = \{(1, a), (3, 5), (5, 3a+2)\}$ باشد و $f(x) = f(b-x)$ مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸

۶۴۰ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر زاویه‌های زیر ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، ساق بزرگ‌تر از قاعده است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ طول کمان رو به زاویه π رادیان تقریباً برابر $3/14$ است.

ج) زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{36}$ رادیان زوایای یک مثلث منفرجه‌الزاویه هستند.

د) به‌طور کلی همواره $\pi = 180^\circ$ است.

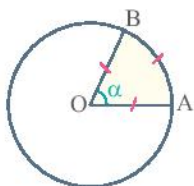
- ۱ ۲ ۳ ۴

۶۴۱ در دایره‌ای به شعاع ۹، اندازه کمان روبه‌رو به زاویه 10° ، چقدر است؟

- ۱ $\frac{\pi}{4}$ ۲ $\frac{\pi}{3}$ ۳ $\frac{\pi}{2}$ ۴ $\frac{\pi}{6}$

۶۴۲ اندازه کمان AB در دایره مقابل با شعاع دایره برابر است. اندازه زاویه \widehat{AOB} تقریباً چند درجه است؟

- ۱ 60° ۲ 57° ۳ 55° ۴ 53°

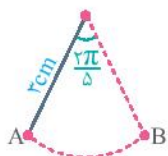


۶۴۳ طول برف‌پاک‌کن خودرویی ۳۰ سانتی‌متر است. زاویه دوران چند درجه باشد، تا انتهای تیغه برف‌پاک‌کن مسافت ۴۵ سانتی‌متر را طی کند؟

- ۱ $\frac{280}{\pi}$ ۲ $\frac{240}{\pi}$ ۳ $\frac{180}{\pi}$ ۴ $\frac{270}{\pi}$

۶۴۴ یک آونگ ساده، حرکتی رفت و برگشتی با زاویه مرکزی $\frac{2\pi}{5}$ رادیان انجام می‌دهد. اگر طول نخ آونگ ۳ cm باشد، مقدار کل مسافتی که گلوله

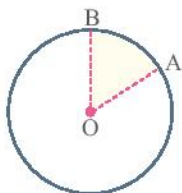
انتهای آونگ در سه بار رفت و برگشت کامل طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟



- ۱ $\frac{18\pi}{5}$ ۲ $\frac{24\pi}{5}$ ۳ 6π ۴ $\frac{26\pi}{5}$

۶۴۵ اندازه کمان AB روبه‌رو به زاویه 15° در دایره‌ای، برابر با $\frac{\pi}{6}$ است. محیط قطاع OAB کدام است؟

- ۱ $1 + \frac{\pi}{6}$ ۲ $2 + \frac{\pi}{3}$ ۳ $4 + \frac{\pi}{6}$ ۴ $6 + \frac{\pi}{3}$



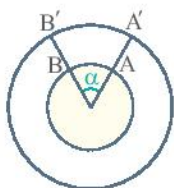
۶۴۶ کمان روبه‌رو به زاویه 15° در دایره‌ای برابر ۲ cm است. مساحت این دایره چند سانتی‌متر مربع است؟

- ۱ 144π ۲ 196π ۳ $\frac{288}{\pi}$ ۴ $\frac{576}{\pi}$

۶۴۷ اگر کمان روبه‌رو به زاویه 20° در دایره‌ای $\frac{\pi}{18}$ باشد، آنگاه کمان روبه‌رو به کدام زاویه مرکزی $\frac{2\pi}{3}$ است؟

- ۱ 120° ۲ 140° ۳ 240° ۴ 280°

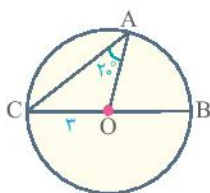
۶۴۸ در شکل مقابل شعاع دایره‌ها ۶۴۰۰ و ۶۸۰۰ است. اگر طول کمان AB برابر 1600π باشد، آنگاه اندازه زاویه α و کمان $\widehat{A'B'}$ به ترتیب کدام است؟



- ۱ 1800π , 45° ۲ 1800π , 30° ۳ 1700π , 30° ۴ 1700π , 45°

۶۴۹ در شکل مقابل O مرکز دایره است. اندازه کمان AB کدام است؟

- ۱ $\frac{2\pi}{9}$ ۲ $\frac{\pi}{3}$ ۳ $\frac{2\pi}{3}$ ۴ $\frac{\pi}{9}$



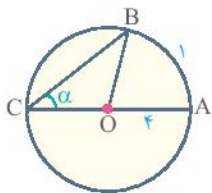
مصلحت : ۲ مشق

مجله مشترک
رئیس تدریس و مشاوران باجمع جویندگی هرکول
Hercules



صل ۲: مشكلات

مباني مشترك
رأسي تدری و لمبایان باجمع دو منتهی حرکت
Hercules



۴۵۰ در شکل مقابل شعاع دایره ۴ واحد است. اگر اندازه کمان AB برابر ۱ واحد باشد، اندازه زاویه α چند رادیان است؟

$\frac{1}{8\pi}$ [۱]
 $\frac{1}{8}$ [۲]

$\frac{1}{4\pi}$ [۱]
 $\frac{1}{4}$ [۲]

۴۵۱ شعاع‌های چرخ‌های یک تراکتور ۵۰ و ۱۲۰ سانتی‌متر است. اگر چرخ کوچک‌تر مسیری به طول 18π متر را طی کند، چرخ بزرگ‌تر چند رادیان

چرخیده است؟

15π [۲]

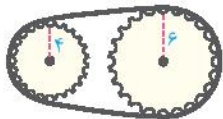
14π [۳]

$7/5\pi$ [۲]

7π [۱]

۴۵۲ دو چرخ به شعاع‌های ۴ و ۶ به وسیله تسمه‌ای مانند شکل مقابل به هم وصل شده‌اند. وقتی چرخ کوچک‌تر $\frac{15\pi}{4}$ رادیان بچرخد، چرخ بزرگ‌تر

چند رادیان می‌چرخد؟

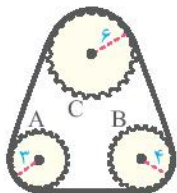


$\frac{5\pi}{2}$ [۲]
 $\frac{15\pi}{4}$ [۲]

$\frac{45\pi}{8}$ [۱]

3π [۳]

۴۵۳ سه چرخ مانند شکل مقابل به هم وصل شده‌اند، وقتی دو چرخ کوچک‌تر جمعاً ۲۸ دور می‌چرخند، چرخ بزرگ‌تر چند رادیان چرخیده است؟



6π [۱]

12π [۲]

16π [۳]

18π [۲]

۴۵۴ ساعت ۲ بعد از ظهر است. زمانی که عقربه ساعت‌شمار $\frac{\pi}{3}$ بچرخد، ساعت چند می‌شود؟

$2:12$ [۲]

$2:10$ [۳]

$2:7$ [۲]

$2:3$ [۱]

۴۵۵ رأس ساعت ۱۵:۱۲، زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند رادیان است؟

$\frac{5\pi}{12}$ [۲]

$\frac{5\pi}{24}$ [۳]

$\frac{11\pi}{24}$ [۲]

$\frac{\pi}{2}$ [۱]

۴۵۶ ساعت ۲:۰۰ است، تقریباً چه مدت طول می‌کشد تا زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار برای دومین بار برابر $\frac{\pi}{6}$ رادیان شود؟

16 دقیقه [۲]

14 دقیقه [۳]

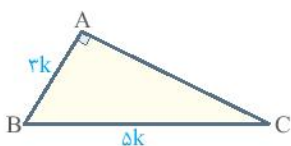
13 دقیقه [۲]

12 دقیقه [۱]



part 2

معرفی سینوس، کینوس و ...

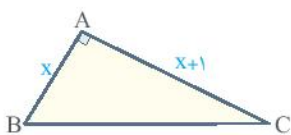


۴۵۷ در مثلث ABC مطابق شکل حاصل $\sin B + \sin C$ کدام است؟

$\frac{7}{5}$ [۲]
 $\frac{9}{5}$ [۲]

$\frac{6}{5}$ [۱]

$\frac{8}{5}$ [۳]



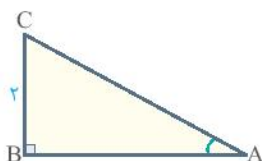
۴۵۸ در مثلث ABC مطابق شکل اگر $\tan C + \cot C = \frac{25}{12}$ باشد، حاصل $\cos B$ کدام است؟

$5/6$ [۲]

$5/8$ [۱]

$5/5$ [۲]

$5/4$ [۳]



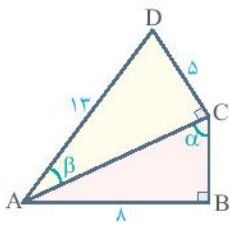
۴۵۹ در شکل مقابل حاصل $[\sin A] + [\cos C]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

۱ [۲]

صفر [۱]

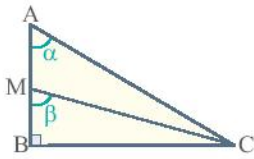
قابل محاسبه نیست. [۲]

۲ [۳]



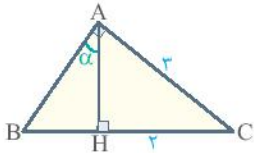
۴۴۰ در شکل مقابل اندازه $\frac{\sin \beta + 1}{\cos \alpha + 1}$ کدام است؟

$\frac{27}{5(\sqrt{5}+1)}$ <input type="checkbox"/>	$\frac{17}{\sqrt{3}+1}$ <input type="checkbox"/>
$\frac{51}{7(\sqrt{3}+1)}$ <input type="checkbox"/>	$\frac{54}{13(\sqrt{5}+3)}$ <input type="checkbox"/>



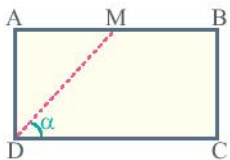
۴۴۱ در شکل زیر نقطه M وسط AB است. حاصل $\tan \alpha \cot \beta$ کدام است؟

۲ <input type="checkbox"/>	$\frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/>
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ <input type="checkbox"/>	$\sqrt{2}$ <input type="checkbox"/>



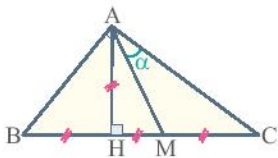
۴۴۲ در شکل زیر مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}}{6}$ <input type="checkbox"/>	$\frac{2}{5}$ <input type="checkbox"/>
$\frac{2}{5}$ <input type="checkbox"/>	$\frac{\sqrt{5}}{3}$ <input type="checkbox"/>



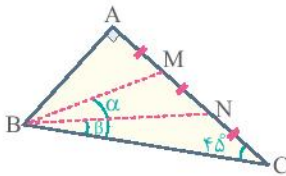
۴۴۳ در شکل زیر، مستطیلی با طول ۴ و عرض ۳ رسم شده است. اگر نقطه M وسط AB باشد، $\cos^2 \alpha$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ <input type="checkbox"/>	$\frac{3}{4}$ <input type="checkbox"/>
$\frac{3}{4}$ <input type="checkbox"/>	$\frac{4}{13}$ <input type="checkbox"/>



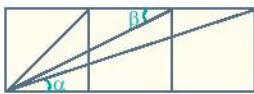
۴۴۴ در شکل مقابل اندازه $\cot(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ <input type="checkbox"/>	$\frac{4}{3}$ <input type="checkbox"/>
$\frac{2}{4}$ <input type="checkbox"/>	۲ <input type="checkbox"/>



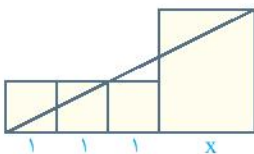
۴۴۵ در مثلث قائم الزاویه ABC مطابق شکل حاصل $\cot(\frac{\pi}{4} - \alpha) \cot(\frac{\pi}{4} + \beta)$ کدام است؟

۲ <input type="checkbox"/>	۱ <input type="checkbox"/>
$\frac{1}{6}$ <input type="checkbox"/>	$\frac{1}{3}$ <input type="checkbox"/>



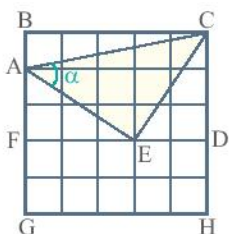
۴۴۶ در شکل زیر، اندازه ضلع هر مربع یک واحد است. مقدار $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$ کدام است؟

$2\sqrt{10}$ <input type="checkbox"/>	$2\sqrt{2}$ <input type="checkbox"/>
$\frac{1}{2\sqrt{2}}$ <input type="checkbox"/>	$\frac{\sqrt{10}}{10}$ <input type="checkbox"/>



۴۴۷ در شکل مقابل ۳ مربع به ضلع واحد و یک مربع به ضلع X داریم. مساحت مربع بزرگتر کدام است؟

۴ <input type="checkbox"/>	۲ <input type="checkbox"/>
۱۲ <input type="checkbox"/>	۹ <input type="checkbox"/>



۴۴۸ در شکل مقابل مقدار alpha کدام است؟ (مربع‌ها به ضلع واحد هستند.)

20° <input type="checkbox"/>
30° <input type="checkbox"/>
45° <input type="checkbox"/>
60° <input type="checkbox"/>



۷۸۹ در برتاب یک تاس عدد a رو شده است. با کدام احتمال $\sqrt{\sin 2a}$ تعریف شده است؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴

۷۹۰ کدام مورد درست است؟

- الف) برای هر عدد حقیقی X همواره $\cos(\cos X) > 0$
 ب) برای هر عدد حقیقی X همواره $\sin(\sin X) > 0$
 ج) فقط الف
 د) هم الف و هم ب
 ه) نه الف و نه ب

۷۹۱ اگر $\cot \alpha = \frac{-7}{24}$ و $\cos \alpha > 0$ باشد. مقدار $\cos \alpha - \sin \alpha$ کدام است؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴

۷۹۲ اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ باشد. $\sin \alpha$ کدام است؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴



مقایسه نسبت های مثلثاتی روی دایره

۷۹۳ چه تعداد از موارد داده شده درست است؟

- الف) $\cos 2 > \sin 17^\circ$
 ب) $|\cos 147^\circ| > |\sin 147^\circ|$
 ج) $\tan 5 < \sin 41^\circ$
 د) $[\cos 3] + [\sin 20^\circ] = -1$

۷۹۴ در کدام گزینه، در ناحیه رنگی $\sin x > \cos x$ است؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴

۷۹۵ اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد. انحراف معیار $\log \sin x$ و $\log \cos x$ کدام است؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴

۷۹۶ در کدام گزینه، در ناحیه رنگی $|\sin x| > |\cos x|$ است؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴

۷۹۷ در کدام گزینه در ناحیه رنگی $|\sin x| < \cos x$ است؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴

۷۹۸ چه تعداد از روابط زیر صحیح است؟ (زوایه ها بر حسب رادیان هستند.)

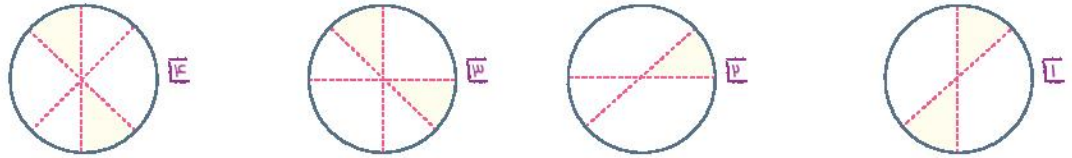
- الف) $\tan 4 > \cot 4$
 ب) $\cos 3 > \sin 3$
 ج) $|\tan 2| > |\cot 2|$
 د) $|\sin 5| > |\cos 5|$

مصلحت: ۲ مثلثات

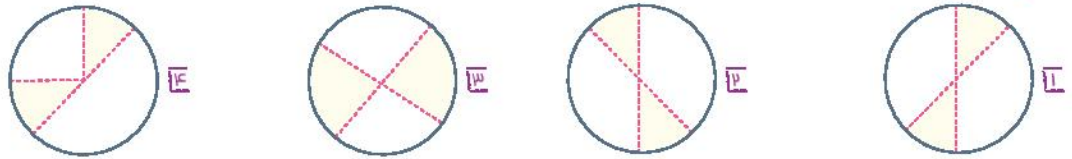
مبانی مشترک ریاضی تئوری و عملی با معانی دو جنبه حرکت

Hercules

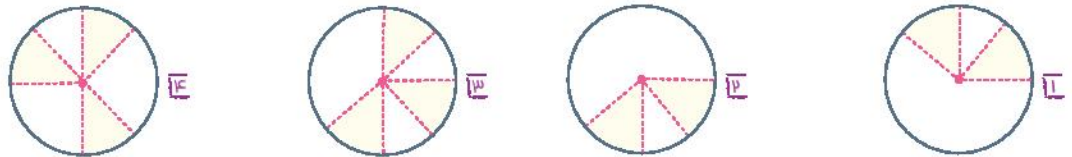
۷۹۹ در کدام گزینه هر دو نامساوی $\sin x + \cos x > 0$ و $\tan x < 0$ در ناحیه رنگ شده برقرار است؟



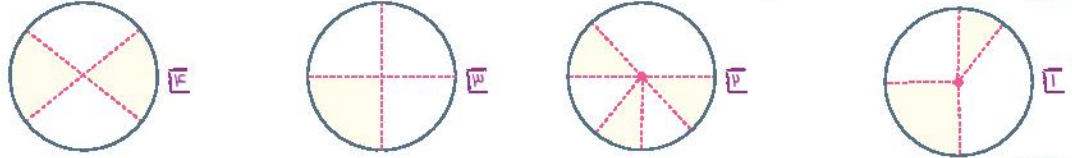
۸۰۰ در کدام ناحیه رنگ شده هر دو نامساوی $\tan x - \cot x > 0$ و $\tan x + \cot x > 0$ برقرار است؟



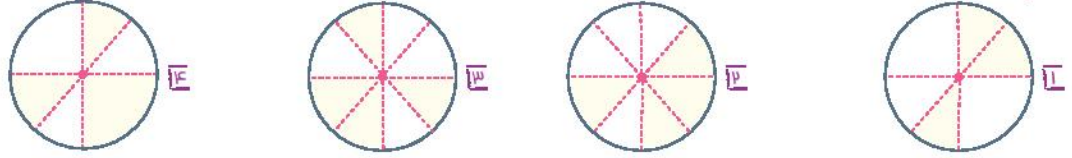
۸۰۱ در کدام گزینه، در ناحیه رنگی $\tan x > \cot x$ و $\sin x < \cos x$ است؟



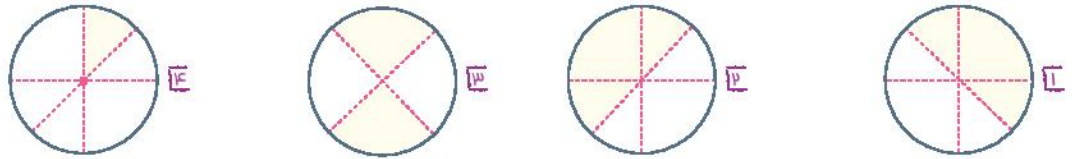
۸۰۲ در کدام گزینه در ناحیه رنگی $\tan x + \cot x > 0$ و $\sin x + \cos x < 0$ است؟



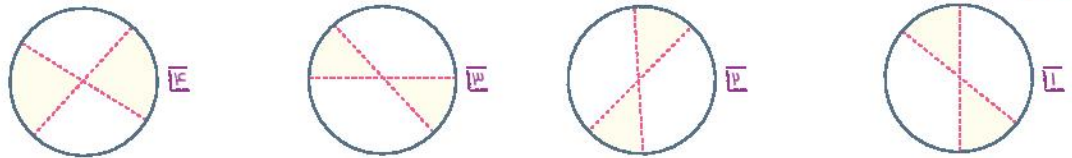
۸۰۳ در کدام گزینه در ناحیه رنگی $\tan x(\sin x - \cos x) > 0$ است؟



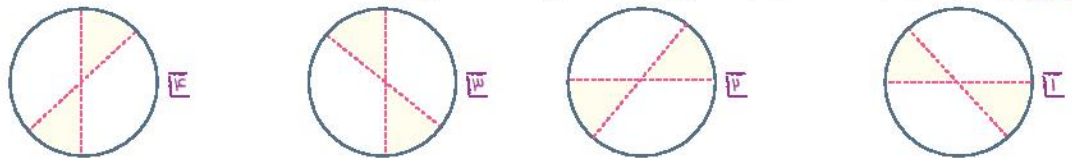
۸۰۴ اگر $\sqrt{1 + 2 \sin x \cos x} = \sin x + \cos x$ باشد، آنگاه x در کدام ناحیه مشخص شده از دایره مثلثاتی قرار دارد؟



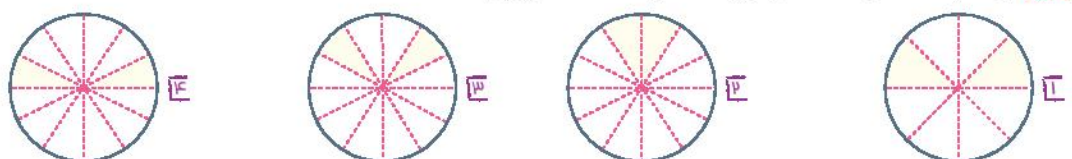
۸۰۵ در کدام گزینه، در ناحیه رنگی $|\sin x| > |\cos x|$ و $\sin 2x < 0$ است؟



۸۰۶ در کدام ناحیه رنگ شده هر دو نامساوی $\tan 2x < 0$ و $\cos 2x > 0$ برقرار است؟



۸۰۷ در کدام قسمت رنگ شده از دایره مثلثاتی $\sin 3x < 0$ برقرار است؟



۸۰۸ مقدار کدام گزینه از بقیه کوچکتر است؟ (زاویهها بر حسب رادین است)

$\cot 4$ [۴]

$\cot 2$ [۳]

$\cot 2$ [۲]

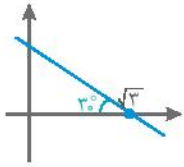
$\cot 1$ [۱]



part 8

شیب خط

۸۰۹ معادله خط مقابل کدام است؟

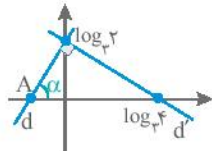


$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}$ [۴]

$y = -\sqrt{3}x + 1$ [۱]

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$ [۳]

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$ [۲]



۸۱۰ در شکل مقابل حاصل $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ کدام است؟

$\log_{16} 2$ [۲]

$\log_{32} 4$ [۱]

$\log_{16} 8$ [۳]

$\log_{32} 8$ [۴]

۸۱۱ خط گذرنده از نقاط $A(\sin 1^\circ, \cos 1^\circ)$ و $B(\cos 1^\circ, \sin 1^\circ)$ چه زاویه‌ای با جهت مثبت محور طولها می‌سازد؟

15° [۴]

135° [۳]

120° [۲]

6° [۱]

۸۱۲ عرض از مبدأ خط L که با جهت مثبت محور افقی، زاویه 6° می‌سازد، برابر با $\cot 6^\circ$ است. عرض از مبدأ خطی که بر L در نقطه تلاقی با

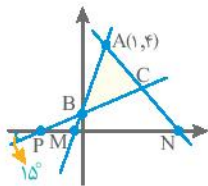
محور x ها، عمود است، کدام است؟

$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ [۴]

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ [۳]

$\frac{1}{3\sqrt{3}}$ [۲]

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ [۱]



۸۱۳ در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. مساحت مثلث کدام است؟ ($\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$)

$6 + \sqrt{3}$ [۲]

$3 + \sqrt{3}$ [۱]

$2\sqrt{3} + 3$ [۴]

$3 + 4\sqrt{3}$ [۳]

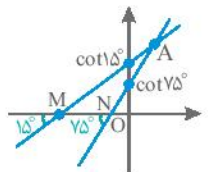
۸۱۴ نقطه تلاقی خطهای شکل مقابل کدام است؟

$(1, \sqrt{3})$ [۲]

$(2, 5)$ [۱]

$(2, 2\sqrt{3})$ [۴]

$(1, 4)$ [۳]



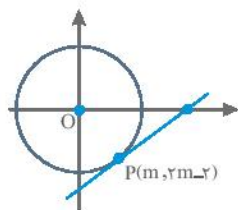
۸۱۵ معادله خطی که در نقطه $P(m, 2m-2)$ بر دایره مثلثاتی مقابل مماس است، کدام است؟

$4y - 3x = -5$ [۱]

$4x = 3y - 5$ [۲]

$4y = 3y - 5$ [۳]

$4x = 3y + 5$ [۴]



part 9

زاویهها $k\pi \pm \alpha$ و $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

۸۱۶ اگر $\cos(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sin^2(\frac{3\pi}{8} - x)$ کدام است؟

$\frac{4}{9}$ [۴]

$\frac{2}{4}$ [۳]

$\frac{4}{9}$ [۲]

$\frac{1}{9}$ [۱]

کارینه

مصلح: مشعل

Hercules
مبانی همزیج و همایان باجمع دو منتهی حرکت



بزرگترین جواب معادله $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(\pi - x)$ در بازه $[0, 2\pi]$ به کدام صورت است؟ 1095

- $\frac{31\pi}{18}$
 $\frac{25\pi}{18}$
 $\frac{15\pi}{18}$
 $\frac{7\pi}{6}$

(رئاسی فارج - 95)

مجموع جوابهای معادله مثلثاتی $1 = \sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8})$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟ 1096

- $\frac{7\pi}{4}$
 $\frac{3\pi}{2}$
 $\frac{5\pi}{4}$
 $\frac{3\pi}{4}$

معادله $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند ریشه دارد؟ 1097

- ۶
۴
۳
۲

معادله $1 = \log_{\sin x} \cos x + \frac{1}{4} \log_{\sin x} 3$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند ریشه دارد؟ 1098

- جواب ندارد
۳
۲
۱

منحنیهای $y = |\cos x|$ و $y = \cos 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند بار یکدیگر را قطع می کنند یا بر هم مماس می شوند؟ 1099

- ۴
۳
۲
۱



معادلات OPT

تعداد جوابهای معادله $7 \cos 3x - 3 \cos 2x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ 1100

- صفر
۲
۵
۶

تعداد جوابهای معادله $-2 = 3 \cos^2 x + 2 \cos^2 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ 1101

- صفر
۲
۴
۶

جوابهای عمومی معادله $3 = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ به کدام صورت است؟ 1102

- $2k\pi$
 $\frac{2k\pi}{3}$
 $\frac{k\pi}{6}$
 $\frac{k\pi}{3}$

معادله $5 = 3 \sin^2 x - 2 \sin 3x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ 1103

- ۳
۲
۱
صفر

جواب کلی معادله مثلثاتی $8 = 5 \cos 3x + 3 \cos x$ به کدام صورت است؟ 1104

- $\frac{2k\pi}{2}$
 $2k\pi$
 $k\pi$
 $\frac{2k\pi}{3}$

(تورنی فارج - 1300)

تعداد جوابهای معادله مثلثاتی $-2 = \Delta \sin^2(x) + 2 \cos(3x)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟ 1105

- ۷
۵
۲
۱



معادلات 2α

معادله $0 = \cos 2x - \cos x + 1$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟ 1106

- ۶
۴
۳
۲

۱۱۰۷ جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟

- $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$
 $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۱۰۸ اگر $\frac{2\pi}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله $a = \sin x \cos x + \cos x$ باشد، انحراف معیار تمام جواب‌های معادله در بازه $[2\pi, 3\pi]$ کدام است؟

- $\frac{\pi}{12}$
 $\frac{\pi}{6}$
 $\frac{5\pi}{6}$
 $\frac{11\pi}{6}$

۱۱۰۹ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{2} + x) \sin(\pi + x) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- $\frac{3\pi}{2}$
 $\frac{15\pi}{4}$
 2π
 π

۱۱۱۰ معادله $\log_2 \sin x + \log_2 \cos x = -2$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- ۱
 ۲
 ۳
 ۴

۱۱۱۱ اگر $x = \alpha$ یکی از ریشه‌های معادله $\sin \frac{x}{2} = \cos x$ باشد، $\tan 2\alpha$ کدام است؟ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$

- $\sqrt{3}$
 $-\sqrt{3}$
 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۱۱۲ چارک اول جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan x = \sin 2x$ در بازه $[0, 4\pi]$ کدام است؟

- π
 $\frac{7\pi}{4}$
 2π
 $\frac{7\pi}{8}$

۱۱۱۳ تعداد جواب‌های معادله $2(\sin x + \cos x) = 1 + 2 \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۲
 ۳
 ۴
 ۵

۱۱۱۴ انحراف معیار جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(\frac{12\pi}{11}) + \sin(\frac{\pi}{11} - x) \sin x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- $\frac{\pi}{11}$
 $\frac{\pi}{22}$
 $\frac{9\pi}{44}$
 $\frac{9\pi}{22}$

۱۱۱۵ یک تاس را پرتاب کرده و عدد رو شده را به جای a در معادله مثلثاتی $\sin 2x - a \sin x - \cos x + \frac{a}{4} = 0$ قرار می‌دهیم احتمال آن که انتهای

کمان‌های جواب‌های معادله فقط روی دو نقطه از دایره مثلثاتی قرار بگیرند چقدر است؟

- $\frac{1}{6}$
 $\frac{1}{3}$
 $\frac{2}{3}$
 $\frac{5}{6}$

۱۱۱۶ معادله $\tan x + \cot x = 4$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- ۲
 ۴
 ۶
 ۸

۱۱۱۷ جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $2 \tan x \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

- $k\pi - \frac{\pi}{4}$
 $k\pi + \frac{\pi}{4}$
 $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
 $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۱۱۸ معادله $|\sin 2x| = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۲
 ۴
 ۶
 ۸

۱۱۱۹ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- $\frac{5\pi}{2}$
 3π
 $\frac{7\pi}{2}$
 4π

۶ | ۳ از ضابطه بالا $f(a) = a^2 + 4a$ و از ضابطه پایین $f(a) = 3a + 2$ است، حال برای این که $f(x)$ تابع باشد، لازم است که این دو مقدار یکسان باشند:

$$a^2 + 4a = 3a + 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ یا } a = 1$$

مثلاً به ازای $a = -2$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & ; x \geq -2 \\ 2x & ; x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 1^2 + 4(1) = 5$$

البته به ازای $a = 1$ نیز باز هم به همین نتیجه می‌رسیم.

نکته تابع چند ضابطه‌ای، یک رابطه‌ی چند ضابطه‌ای مانند $f(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \geq a \\ h(x) & ; x \leq a \end{cases}$ در صورتی تابع است که:

۱) خود ضابطه‌ها یعنی $g(x)$ ، $h(x)$ تابع باشند. ۲) $g(a) = f(a) = h(a)$ باشد.

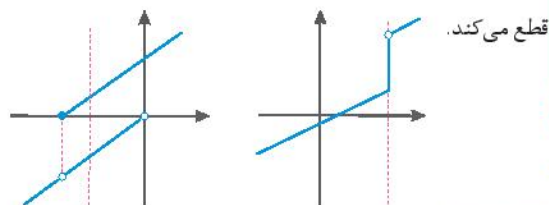
۷ | ۱ برای تابع بودن باید مقدار تابع در $x = 1$ ، $x = 2$ با هم برابر باشند، یعنی:

$$x = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$x = 2 \Rightarrow 2a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b$$

پس $8 - b + b = 0 \Rightarrow 8 = 0$ که نادرست است.

۸ | ۳ نمودار الف و د تابع هستند. اما نمودارهای ب و ج تابع نیستند، چون بعضی خط‌های موازی محور y ها نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



نکته در نمودار تابع هر قطعه عمودی دلفوله، باید آن را بعد از گذر از یک نقطه قطع کند.

۱) به ازای $m = 2$ دو زوج مرتب $(2, 1)$ ، $(2, 4)$ به وجود می‌آید که تابع بودن f را رد می‌کند، پس $m = 2$ غیر قابل قبول است.

۲) به ازای $m = -1$ هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نیستند، پس تنها به ازای $m = -1$ رابطه داده شده تابع است، بنابراین:

$$f(3) = m^2 = (-1)^2 = 1$$

۹ | ۴ همان‌طور که دیده می‌شود از a دو پیکان خارج شده که برای تابع بودن باید انتهای دو پیکان یکسان باشد. پس باید $a + 1 = 3$ باشد و این یعنی $a = 2$ با قرار دادن $a = 2$ می‌فهمیم که $f = \{(2, 2), (3, 5)\}$ پس $f(3) = 5$ خواهد بود. اگر $(a, b) \in f$ باشد، آنگاه می‌نویسیم $f(a) = b$

نکته تابع پیکانی، اگر یک رابطه به صورت نمودار پیکانی داده شود، در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان [نه بیش‌تر نه کم‌تر] خارج شود.

۱) اگر یک رابطه به صورت نمودار پیکانی داده شود، در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان [نه بیش‌تر نه کم‌تر] خارج شود.

۲) اگر گفته شود یک نمودار پیکانی تابع است ولی از یک عضو مجموعه اول دو پیکان خارج شود و به اعداد Δ و Δ وصل شود، الزاماً باید $\Delta = \Delta$ باشد.

توجه ۱: اگر از یک عضو پیکانی خارج نشود آن رابطه تابع نیست.

توجه ۲: اگر به یک یا چند عضو از مجموعه دوم پیکانی وارد نشود یا چند پیکان به یک عضو وارد شود، قلی در تابع بودن ایجاد نمی‌شود.

پاسخ‌نامه فصل اول

تایم

۱ | ۱ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته طبق تعریف تابع، اگر تابع f به صورت $f: A \rightarrow B$ تعریف شده باشد، آنگاه مجموعه A دامنه تابع و مجموعه B هم‌دامنه تابع نامیده می‌شود. در ضمن وقتی یک تابع از A به B می‌نویسیم باید تمام عضوهای مجموعه A در مؤلفه‌های اول تابع f استقرار شوند ($D_f = A$) و بر هر تابع نیز زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است بنابراین تعداد اعضای بُرد تابع همواره کوچکتر یا مساوی تعداد اعضای هم‌دامنه است. ($R_f \subseteq B$)

پس گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ نادرست می‌باشند و فقط گزینه ۲ صحیح است.

۲ | ۲ در گزینه ۲ برد تابع [یعنی سایه نمودار روی محور y ها] برابر $[0, +\infty)$ است، در صورتی که هم دامنه تابع \mathbb{R}^+ است که شامل عدد صفر نمی‌باشد، در حالی که می‌دانیم برد تابع باید زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه تابع باشد. در سایر گزینه‌ها بُرد تابع، زیرمجموعه‌ای از مجموعه هم دامنه داده شده می‌باشد.

۳ | ۱ با توجه به این که دو زوج مرتب $(3, m^2)$ ، $(3, m+2)$ مؤلفه اول یکسان دارند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشد، یعنی:

$$m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2, -1$$

۱) به ازای $m = 2$ دو زوج مرتب $(2, 1)$ ، $(2, 4)$ به وجود می‌آید که تابع بودن f را رد می‌کند، پس $m = 2$ غیر قابل قبول است.

۲) به ازای $m = -1$ هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نیستند، پس تنها به ازای $m = -1$ رابطه داده شده تابع است، بنابراین:

$$f(3) = m^2 = (-1)^2 = 1$$

نکته اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شود، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه اول یکسان نباشد. [یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز یکسان باشند.]

۴ | ۳ برای آن که رابطه داده شده تابع نباشد، باید ورودی‌های یکسان، خروجی‌های متفاوتی داشته باشند، پس اگر m یکی از مقادیر ۲ یا ۳ باشد، رابطه داده شده تابع نیست، پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر $2 + 3 = 5$ می‌باشد. توجه داشته باشید که اگر $m = 1$ باشد، زوج مرتب تکراری $(1, 3)$ به وجود می‌آید که در این حالت رابطه داده شده تابع می‌باشد.

۵ | ۳ چون در تابع هیچ دو زوج مرتبی نباید مؤلفه اول یکسان داشته باشند، پس از بین زوج مرتب‌های $(1, 2)$ ، $(1, 4)$ باید یکی را حذف کنیم و از بین زوج مرتب‌های $(2, 4)$ ، $(2, 2)$ ، $(2, 3)$ باید دو تا را حذف کنیم. بنابراین با حذف حداقل ۳ زوج مرتب رابطه فوق یک تابع خواهد شد.



۱۰ | به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

- ۱۱ | دو زوج مرتب $(۲, ۴)$, $(۳, ۴)$, $(۴, ۲)$ را داریم و تابع نمی‌باشد. $(\sqrt{۱۶}=۴)$
- ۱۲ | هر عدد مثبت دارای دو ریشه دوم قرینه است، به عنوان مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶ اعداد ۴، -۴ می‌باشند، پس تابع نیست. $(x^2=۱۶ \Rightarrow x=\pm 4)$
- ۱۳ | به ازای هر فرد در یک زمان معین یک عدد به عنوان وزن مشخص می‌شود و تابع است.
- ۱۴ | از عدد ۲ دو پیکان خارج شده، پس تابع نیست.

۱۱ | چون از -۳ دو پیکان خارج شده باید داشته باشیم:

اگر $a=۳$ باشد، خواهیم داشت:

$$3a = a + 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$f = \{(2, b+2), (2, b^2), (-3, 9)\}$ تابع $b^2 = b + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 - b - 2 = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow ab = -3, 6$$

بنابراین حداکثر مقدار ممکن برای ab عدد ۶ است.

۱۷ | به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

- ۱۱ | $y = \sqrt{x^2} \Rightarrow y = |x|$ برای X هر y فقط و فقط یک مقدار داریم. پس تابع است.
- ۱۲ | $\sqrt{y^2} = x \Rightarrow x = |y|$ به ازای X دلخواه ۱، برای y دو مقدار ± 1 به دست می‌آید و تابع نیست.
- ۱۳ | به ازای $X = -1$ داریم: $-1 + |y| = 0 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ پس برای y دو مقدار به دست می‌آید و تابع نیست.
- ۱۴ | به ازای $X = -1$ داریم: $[y] + [-1] = 0 \Rightarrow [y] - 1 = 0 \Rightarrow [y] = 1 \Rightarrow 1 \leq y < 2$ به ازای $X = -1$ برای y بی‌شمار مقدار به دست می‌آید، پس رابطه داده شده تابع نیست.

۱۳ | قبل از حل تست به نکته زیر توجه کنید:

نکته برای تشخیص تابع بودن رابطه‌هایی که به صورت فرمولی و شایبه بیان می‌شوند می‌توان از مثال نقض استفاده کرد، یعنی اگر به ازای یک X بیش از یک مقدار برای y به دست آمد، آن رابطه تابع نیست.

در واقع رابطه‌ای تابع است که بتوان y را بر حسب X و به صورت $y = f(x)$ نشان داد و منظور از $f(x)$ یک رابطه بر حسب ورودی است.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱۱ | اگر $f(4x+3) = 2x+3$ باشد، آنگاه: $4x+3 = T \Rightarrow x = \frac{T-3}{4}$

$$f(T) = 2\left(\frac{T-3}{4}\right) + 3 = \frac{T-3}{2} + 3 = \frac{T+3}{2}$$

بنابراین $f(x) = \frac{x+3}{2}$ یک تابع خطی است. ✓

نکته اگر $a \neq 0$ و $f(ax+b) = a'x+b'$ باشد، آنگاه $f(x)$ یک تابع است و به طور کلی اگر $g(x)$ یک تابع باشد و $f(ax+b) = g(x)$ آنگاه $f(x)$ هم تابع است.

- ۱۲ | اگر $f(x^2+1) = x^2+2 = x^2+1+1$ باشد، پس $f(x) = x+1$ است که می‌دانیم یک تابع است. ✓

۲ | تابع یک به یک

اگر $g(x)$ تابعی یک به یک باشد، آنگاه از $f(g(x)) = h(x)$ نتیجه می‌گیریم که $y = f(x)$ تابع است. بد نیست چند مثال معروف توابع یک به یک را هم بلد باشیم:

۱ | $g(x) = ax + b$ با شرط $a \neq 0$

۲ | $g(x) = a\sqrt{ax+b} + b$ (با شرط $aa' \neq 0$)

۳ | $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $ad-bc \neq 0$)

۴ | $g(x) = a^x$

۵ | $g(x) = \log_a x$

۶ | $a(x) = ax^{2n+1} + b$

- ۱۳ | با قرار دادن $X=1$ و $X=1/2$ می‌فهمیم که $f(1) = 1$ ، $f(1/2) = 1/2$ پس تابع نیست. *
- ۱۴ | $f(|x|) = x^2 + 3 = |x|^2 + 3 \Rightarrow f(x) = x^2 + 3$ ✓

۱۴ | ضابطه‌هایی تابع هستند که به ازای هر مقدار X تنها یک مقدار برای y بدهند. در تشخیص این که یک ضابطه تابع باشد یا نه، گاهی بهتر است از رسم کمک بگیریم یا این که به نحو خوبی عددگذاری کنیم.

الف | $\sqrt{y-2} + \sqrt{2-y} = x$ در این جا به علت وجود عبارت $\sqrt{y-2}$ باید $y \geq 2$ باشد. اما چون $\sqrt{2-y}$ هم داریم، پس باید $y \leq 2$ از این دو شرط به دست آمده می‌فهمیم که باید $y = 2$ باشد. پس:

$y=2 \Rightarrow x = \sqrt{0} + \sqrt{0} \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0, 2)$

این ضابطه فقط همین یک نقطه $(0, 2)$ است. لذا تابع است. ✓

ب | با قرار دادن $X=4$ در این رابطه به دو مقدار می‌رسیم: $y=2$ از ضابطه بالا و $y=1$ از ضابطه پایین پس هم $(4, 2)$ و هم $(4, 1)$ در این ضابطه صدق می‌کند. لذا این ضابطه یک تابع نیست. *

ج | ضابطه های بالا و پایین تابع هستند. ✓

اما باید نقطه مرزی $X=2$ را بررسی کنیم:

تابع نیست $\Rightarrow 6 \neq 3 \Rightarrow f(2) = 6$ ضابطه پایین $f(2) = 3$ ضابطه بالا

۱۵ | به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف | به ازای X دلخواه ۴ داریم: $|y-2| + 3 - 4 = 0 \Rightarrow |y-2| = 1 \Rightarrow y-2 = \pm 1 \Rightarrow y = 3, 1$

چون به ازای یک مقدار X برای y دو مقدار به دست آمد، این رابطه تابع نیست.

تذکره معمولاً رابطه‌هایی که در آن y دارای توان زوج یا قدر مطلق یا هر دو صمیم باشد، مشکوک به تابع نبودن هستند اما باز هم نیاز به بررسی دارد مثلاً رابطه $x^2 + y^2 = 0$ تابع است چون این رابطه تنها شامل یک نقطه $(0, 0)$ است.

ب | $x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t} \Rightarrow f(t) = \pm\sqrt{t} \Rightarrow f(x) = \pm\sqrt{x}$

به ازای یک X دلخواه، مثلاً $X=4$ دو مقدار ± 2 برای y به دست می‌آید و این یعنی، این رابطه تابع نیست. *

ج | $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} = -2 \Rightarrow x^2+y^2 = -2xy$

$\Rightarrow x^2+y^2+2xy = 0 \Rightarrow (x+y)^2 = 0 \Rightarrow x+y = 0 \Rightarrow y = -x$

به ازای هر X فقط و فقط یک مقدار برای y داریم و این یعنی، y تابعی بر حسب متغیر X است.

محل ۱: تابع

محل ۲: تابعی که هم تابع است و هم همزمان تابع و هم تابع

نکته اگر تابعی به صورت $f(x) = \dots$ بود برای پیدا کردن $f(u)$ در عبارت

به جای همه x ها u را قرار می‌دهیم.

۱۱ $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow f(2) = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{7}$

۱۲ $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) + \frac{1}{(x^2 - 1)}$

۱۳ $f(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(\Delta) = \Delta^2 + 2\Delta + 1$

اما به عنوان مثال اگر $f(2x+3)$ را داشته باشیم و $f(9)$ را بخواهیم باید مقداری از x را پیدا کنیم که به ازای آن $2x+3=9$ شود، یعنی $2x+3=9 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$ فال در طرف دوم هر جا x داریم به جای آن 3 می‌گذاریم.

مثال $f\left(\frac{x}{y}+1\right) = \frac{2x-1}{x} \Rightarrow f(\Delta) = ?$

$\frac{x}{y}+1 = \Delta \Rightarrow \frac{x}{y} = \Delta - 1 \Rightarrow x = (\Delta - 1)y \Rightarrow f(\Delta) = \frac{2(\Delta - 1)y - 1}{(\Delta - 1)y} = \frac{2\Delta y - 2y - 1}{\Delta y - y} = \frac{2\Delta y - 2y - 1}{\Delta y - y}$

۲۱ برای آن که از $f(x + \frac{1}{x})$ به $f(2)$ برسیم، فقط کافیست $x=1$ باشد:

$x=1 \Rightarrow f(1+1) = \frac{1}{(1)^2+1} \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}$

۲۲ با جایگذاری $x=1, x=4$ داریم:

$\begin{cases} x=4 \Rightarrow f(\sqrt{4}) = 4 + 2\sqrt{4} = 8 \Rightarrow f(2) = 8 \\ x=1 \Rightarrow f(\sqrt{1}) = 1 + 2\sqrt{1} = 3 \Rightarrow f(1) = 3 \end{cases}$

$f(2) - f(1) = 8 - 3 = 5$ بنابراین داریم:

۲۳ برای محاسبه $f(\sqrt{2})$ باید $\sqrt{x}+1 = \sqrt{2}$ باشد، پس داریم:

$\sqrt{x}+1 = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x + 2\sqrt{x} + 1 = 2 \Rightarrow x + 2\sqrt{x} = 1$

در نتیجه:

$f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x} + 2 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 1 + 2 = 3$

۲۴ ابتدا باید مقدار $f(-144)$ را به دست آوریم:

$f(-144) = \sqrt{-144 + 2|-144|} = \sqrt{-144 + 2(144)} = \sqrt{144} = 12$

حال باید $f(12)$ را محاسبه کنیم.

$f(12) = \sqrt{12 + 2|12|} = \sqrt{12 + 24} = \sqrt{36} = 6$

۲۵ اگر $f(2)$ ، $g(-1)$ را محاسبه کنیم و باهم مساوی قرار دهیم:

$\begin{cases} f(2) = -4 + 5 - a = 1 - a \\ g(-1) = 1 - 2 - 4 = -5 \end{cases} \xrightarrow{f(2)=g(-1)} 1 - a = -5 \Rightarrow a = 6$

۲۶ در تابع f داریم $f(-2) = 3$ ، $f(3) = 4$ حال نقاط $(3, 0)$ ، $(-4, 2)$

روی نمودار تابع g قرار دارند، پس:

$g(-4) = 2, g(3) = 0 \Rightarrow \frac{f(3) + g(-4)}{f(-2) + g(3)} = \frac{4 + 2}{3 + 0} = \frac{6}{3} = 2$

۱۶ با مربع کامل کردن داریم: $(y-1)^2 + x^2 = 0 \Rightarrow y=1, x=0$

این رابطه یک نقطه است، پس تابع است. ✓

بنابراین فقط موارد ۱۸ و ۱۹ تابع می‌باشند.

۱۷ بررسی موارد

الف) خیلی بیشتر از یک نقطه ایراد دارد. مثلاً $(1, 1)$ ، $(1, 1/\sqrt{5})$ ، $(1, 1/2)$ ، $(1, 1/6)$

و... همه این نقاط در $[x] = [y]$ صدق می‌کند. پس با حذف یک نقطه، این رابطه به تابع تبدیل نمی‌شود. ✗

ب) مشکل بیشتر از یک نقطه است. نقاط $(1, 1)$ ، $(1, -1)$ ، $(2, 2)$ ، $(2, -2)$ همه روی نمودار $|x| = |y|$ قرار دارند. تا همین جا به حذف حداقل دو نقطه نیاز داریم. ✗

۱۸ کیفیت یکی از آن دو نقطه توپر را حذف کنیم. [فرقی ندارد کدام یکی] بعد از آن به نمودار یک تابع می‌رسیم. ✓

۱۹ در این نمودار با حذف نقطه $A(a, -1)$ یا $B(a, 2)$ نمودار تبدیل به تابع خواهد شد. ✓

۲۰ با توجه به تعریف تابع، از هر عضو مجموعه A ، فقط و فقط یک

پیکان به سمت عضو B خارج می‌شود، به ازای هر عضو A دقیقاً n انتخاب برای خارج شدن هر پیکان وجود دارد و با توجه به اینکه مجموعه A دارای m عضو است، بنابراین طبق اصل ضرب، کل حالات برابر است با:

$n \times n \times n \times \dots \times n = n^m$

n m

نکته اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشند، تعداد

n^m تابع از A به B می‌توان تعریف کرد.

۱۸

$f(2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$

$f(2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$

بنابراین حاصل عبارت برابر ۸ است.

۱۹ باید ببینیم که هر ورودی

تابع $f(x)$ ، مقدار خروجی آن به ازای کدام ضلعه به دست می‌آید، ابتدا $f(x)$ را کمی مرتب می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} -3x & ; x < -1 \\ (x-1)^2 - 1 & ; -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

$-\frac{5}{3} < -1 \Rightarrow f(-\frac{5}{3}) = -3(-\frac{5}{3}) = 5$

$-1 < -\sqrt{2} + 1 < 1 \Rightarrow f(-\sqrt{2} + 1) = (-\sqrt{2} + 1 - 1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow f(-\frac{5}{3}) + f(-\sqrt{2} + 1) = 5 + 1 = 6$

۲۰ لازم نیست $f(x)$ را حساب کنید. فقط کافیست مقدار منسبی به

جای x عددگذاری کنید تا در $f(3x+2)$ به $f(8)$ برسیم. این مقدار مناسب $x=2$ است:

$3x+2=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(8) = \sqrt{2(2^2)} + 1 = 4 + 1 = 5 = 2 + 3$

کارینه

نصف ۱: تابع

مباحث مشترک
روایی تکراری و همپایان تابع دو منتهی هم‌خط
Hercules

۶۳۶ | ۴ | \widehat{AB} قسمتی از محیط دایره‌ای به شعاع $۶۰۰ + ۶۴۰۰$ کیلومتر است. برای به دست آوردن این قسمت از محیط از تناسب استفاده می‌کنیم:

۳۶°	$۲\pi r$
۴۵°	x

$$\Rightarrow x = \frac{۴۵^\circ \times ۲ \times \pi \times r}{۳۶^\circ} = \frac{\pi \times ۷۰۰۰}{۴} = ۱۷۵ \cdot \pi$$

در هر ساعت این ملهواره $۱ \cdot \pi$ کیلومتر را طی می‌کند، پس برای طی $۱۷۵ \cdot \pi$ کیلومتر به ۱۷۵ ساعت زمان نیاز دارد.

۶۳۷ | ۳ | مساحت قسمتی از دایره را می‌خواهیم، پس از تناسب با یک دایره کامل استفاده می‌کنیم:

۳۶°	πr^2
۶°	x

$$\Rightarrow x = \frac{۶^\circ \times \pi r^2}{۳۶^\circ} = \frac{\pi}{6} \times \frac{۳۶}{\pi} = ۶$$

۶۳۸ | ۳ | می‌دانیم عقربه ساعت‌شمار در ۱۲ ساعت ۲π رادیان دوران می‌کند، پس داریم:

۲π	۱۲
$\frac{۳\pi}{5}$	x

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{۳\pi}{5} \times ۱۲}{۲\pi} = \frac{۱۸}{5} \text{ h} \xrightarrow{\times 60} ۲۱۶ \text{ min}$$

۶۳۹ | ۳ | برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته در دایره به شعاع r طول کمان رو به زاویه مرکزی θ رادیان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L = r \cdot \theta$$

$$L = r \cdot \theta \Rightarrow ۱۵ = \frac{5}{4} \times r \Rightarrow r = ۱۲ \Rightarrow S = \pi r^2 = ۱۴۴\pi$$

۶۴۰ | ۴ | بررسی موارد

الف | زوایای زیر ساق تقریباً برابر ۵۷° هستند پس زاویه رأس مثلث مذکور برابر $۶۶^\circ = ۱۸۰^\circ - ۲(۵۷^\circ)$ است. می‌دانیم در هر مثلث ضلع روبه زاویه بزرگتر، بزرگتر از ضلع روبه زاویه کوچکتر است. پس در این مثلث قاعده از ساق‌ها بزرگتر است. *

ب | با توجه به رابطه $\theta = \frac{L}{R}$ داریم: $\pi = \frac{L}{1} \Rightarrow L = \pi = ۳/۱۴$ ✓

ج | مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه یا π رادیان است، زوایای داده شده اصلاً تشکیل مثلث نمی‌دهند زیرا:

$$\frac{۲\pi}{۳} + \frac{\pi}{۹} + \frac{۷\pi}{۳۶} = \frac{۲۴\pi + ۴\pi + ۷\pi}{۳۶} = \frac{۳۵\pi}{۳۶} \neq \pi \quad *$$

د | عدد π نسبت محیط دایره به قطر آن است که تقریباً $۳/۱۴$ می‌باشد، در

واقع π رادیان [تقریباً $۳/۱۴$ رادیان] معادل ۱۸۰ درجه است. *

۶۴۱ | ۳ | قبل از حل تست به نکته زیر توجه کنید:

نکته اندازه کمان رو به زاویه α در دایره به شعاع r برابر است با:

$$L = \frac{\alpha}{۳۶۰} (۲\pi r)$$

$$L = \frac{۱^\circ}{۳۶۰} (۲\pi \times ۹) = \frac{\pi}{۲}$$



۶۳۱ | ۲ | $۱۵^\circ = ۱۵ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۱۲}$ rad $۱۸^\circ = ۱۸ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۱۰}$ rad

نکته به طور کلی اگر D اندازه یک زاویه بر حسب درجه و R اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد آنکه همواره داریم:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

با توجه به نکته فوق می‌توان گفت برای تبدیل یک زاویه به رادیان باید آن را π در کنیم یعنی در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ ضرب کنیم و برای تبدیل یک زاویه به درجه، آن را بدون π می‌کنیم؛ یعنی در $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. [شبه استوکیومتری در شیمی]

۶۳۲ | ۱ | هر π رادیان معادل ۱۸۰° است. بنابراین به جای π رادیان معادل آن

یعنی ۱۸۰° را قرار می‌دهیم: $\frac{۲\pi}{9} \text{ rad} = (\frac{2 \times ۱۸۰}{9})^\circ = ۴۰^\circ$

۶۳۳ | ۳ | رادیان همان $۳۶^\circ = \frac{۱۸۰^\circ}{5}$ درجه است. لذا:

$$\begin{cases} x + y = ۶^\circ \\ x - y = ۳۶^\circ \end{cases} \Rightarrow x = ۴۸^\circ, y = ۱۲^\circ$$

۶۳۴ | ۳ | زوایای مثلث را $\frac{\pi}{3}$ ، A ، B در نظر بگیریم. از آن‌جا که جمع زوایای

هر مثلثی ۱۸۰° [یا π رادیان] است داریم:

$$\begin{cases} A + B + \frac{\pi}{3} = \pi \\ A - B = \frac{\pi}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \frac{۲\pi}{3} \\ A - B = \frac{\pi}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{۳\pi}{8}, B = \frac{۷\pi}{۲۴}$$

بنابراین زوایای $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{۷\pi}{۲۴}$ ، $\frac{۳\pi}{8}$ هستند که نسبت آن‌ها $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۷}{۲۴}$ ، $\frac{۳}{۸}$ است. با ضرب کردن نسبت‌ها در ۲۴ در اعداد ۹ ، ۸ ، ۷ می‌رسیم.

۶۳۵ | ۳ | در واقع قسمتی از محیط دایره را می‌خواهیم که کمائی به طول

$۱۵ = ۱۸۰ - ۲۵$ درجه از دایره جدا می‌کند. اگر محیط کل دایره (یعنی ۳۶۰°) را می‌خواستیم محیط دایره $۲\pi r$ بود، حال که محیط قسمتی از آن را می‌خواهیم از تناسب استفاده می‌کنیم:

۳۶۰°	$۲\pi r$
۱۵°	x

$$\Rightarrow x = \frac{۱۵^\circ \times ۲\pi r}{۳۶۰^\circ} = \frac{۳/۱۴ \times ۶۴۰۰}{۱۲} = ۱۶۷۵$$

نکته می‌دانیم محیط هر دایره برابر $۲\pi r$ و مساحت آن برابر πr^2 است. فال اگر

بخواهیم طول کمان α در دایره به مساحت قطاع α درجه یا زمان سپری شده بعد از α° دوران عقربه ساعت‌شمار یا دقیقه‌شمار را پیدا کنیم، می‌توانیم از یک جدول تناسب استفاده کنیم.

۳۶۰°	$۲\pi r$	۳۶۰°	πr^2	۳۶۰°	۱۲ h	۳۶۰°	۶ min
α°	x	α°	x	α°	x	α°	x

دقیقه شمار ساعت شمار مساحت قطاع طول کمان



حال برای تبدیل α به رادیان آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{45}{36} \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{8} \text{ rad}$$

نکته اندازه کمان $\frac{1}{4}$ شعاع دایره است. پس زاویه $\widehat{O} = \frac{1}{4} \text{ rad}$ و نظر به این که

$$\alpha = \frac{\widehat{O}}{r} = \frac{1}{8} \text{ rad}$$

مثلاً BCO متساوی‌الساقین است، می‌فهمیم که $\alpha = \frac{\widehat{O}}{r} = \frac{1}{8} \text{ rad}$

۴۵۱ می‌دانیم که مسافت طی شده هر دو چرخ همواره با هم مساوی است، یعنی در این مسئله چرخ بزرگتر هم 18π متر طی کرده است، بنابراین داریم:

$$L = \frac{\alpha}{36} (2\pi r) \Rightarrow 18\pi = \frac{\alpha}{36} (2\pi \times 1/2) \Rightarrow \alpha = 7/5 \times 36^\circ$$

حال برای تبدیل درجه به رادیان زاویه را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می‌کنیم:

$$\alpha = 7/5 \times 36^\circ \times \frac{\pi}{180} = 15\pi$$

۴۵۲ نسبت شعاع‌ها $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ است. پس نسبت محیط‌ها هم $\frac{3}{2}$ است. یعنی

وقتی چرخ کوچکتر $\frac{15\pi}{4}$ رادیان می‌چرخد، چرخ بزرگتر $\frac{2}{4}$ این مقدار می‌چرخد.

$$\frac{2}{4} \times \frac{15\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

یعنی:

نکته به‌طور کلی اگر دو قرقره به شعاع‌های r_A ، r_B که توسط تسمه به هم متصل شده باشند و قرقره A به اندازه θ_A رادیان و قرقره B به اندازه θ_B رادیان دور آن‌ها بگردد،

$$r_A \theta_A = r_B \theta_B$$

$$4 \times \frac{15\pi}{4} = 6 \times \theta_B \Rightarrow \theta_B = \frac{5\pi}{2}$$

نکته

۴۵۳ زاویه چرخش چرخ کوچک را θ_A و چرخ متوسط را θ_B و چرخ بزرگ را θ_C فرض می‌کنیم در این صورت داریم:

$$r_A \cdot \theta_A = r_B \cdot \theta_B \Rightarrow \begin{cases} 3\theta_A = 4\theta_B \\ \theta_A + \theta_B = 2\pi \end{cases} \Rightarrow \theta_A + \frac{3}{4}\theta_A = 2\pi \Rightarrow \theta_A = 16$$

حال رابطه را برای A و C می‌نویسیم:

$$r_A \theta_A = r_C \theta_C \Rightarrow 3 \times 16 = 6 \times \theta_C \Rightarrow \theta_C = 8$$

بنابراین چرخ بزرگ ۸ دور چرخیده و هر دو معادل با 2π رادیان است پس 16π رادیان چرخیده است.

۴۵۴ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته در هر دقیقه عقربه ساعت شمار $(\frac{1}{5})^\circ$ و عقربه دقیقه شمار 6° می‌پزد. یعنی دقیقه شمار ۱۲ برابر ساعت شمار می‌پزد.

پس وقتی ساعت شمار $\frac{\pi}{36}$ چرخیده، حتماً دقیقه شمار $6^\circ = \frac{12\pi}{36}$ چرخیده است. لذا $\frac{6}{\pi} = 10$ دقیقه زمان گذشته و ساعت $2:10$ است.

۴۵۵ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته زاویه‌ای که در هر ساعت توسط عقربه ساعت شمار طی می‌شود برابر 3° است.

$$L = \frac{\alpha}{36} (2\pi r) \Rightarrow \frac{1}{36} = \frac{\alpha}{36} (2\pi r) \Rightarrow \alpha = \frac{36^\circ}{2\pi} \xrightarrow{\pi=3/14} \alpha = 57^\circ$$

$$L = \frac{\alpha}{36} (2\pi r) \Rightarrow 45 = \frac{\alpha}{36} (2\pi \times 30) \Rightarrow \alpha = \frac{45 \times 36}{60\pi} = \frac{270}{\pi}$$

۴۵۶ ابتدا طول مسیر طی شده در یک بار پیمایش مسیر از A تا B را پیدا می‌کنیم، چون زاویه بر حسب رادیان است داریم:

$$L = r \cdot \theta = 3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$$

حال سه بار رفت و برگشت کامل یعنی ۶ بار پیمایش مسیر A تا B:

$$L' = 6L = 6 \times \frac{6\pi}{5} = \frac{36\pi}{5}$$

۴۵۷ ابتدا شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$L = \frac{\alpha}{36} (2\pi r) \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{15}{36} (2\pi r) \Rightarrow r = 2$$

حال محیط قطاع OAB برابر است با:

$$p = 2r + \widehat{AB} = 4 + \frac{\pi}{6}$$

۴۵۸ فرض کنیم شعاع دایره r باشد، در این صورت داریم:

$$L = \left(\frac{15}{36}\right) (2\pi r) = 2 \Rightarrow \frac{\pi r}{12} = 2 \Rightarrow r = \frac{24}{\pi}$$

بنابراین مساحت این دایره برابر است با:

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{24}{\pi}\right)^2 = \frac{576}{\pi}$$

۴۵۹ می‌دانیم $L = \frac{\alpha}{36} (2\pi r)$ است، بنابراین:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Rightarrow \frac{1/8}{2/3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Rightarrow \alpha_2 = 24^\circ$$

$$\text{I} \quad L = \frac{\alpha}{36} (2\pi r) \Rightarrow 1600\pi = \frac{\alpha}{36} (2\pi \times 6400) \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\text{II} \quad \widehat{A'B'} = \frac{45}{36} (2\pi \times 6400) = \frac{1}{8} (2\pi \times 6400) = 1700\pi$$

۴۶۰ مثلث OAC متساوی‌الساقین است و زاویه \widehat{AOB} زاویه خارجی این مثلث است، پس:

$$\widehat{AOB} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$$

حال طول کمان \widehat{AB} برابر است با:

$$L = \frac{\alpha}{36} (2\pi r) = \frac{40}{36} (2\pi \times 3) = \frac{2\pi}{3}$$

۴۶۱ ابتدا زاویه $\widehat{BOA} = \theta$ را پیدا می‌کنیم:

$$\widehat{AB} = \frac{\theta}{36} (2\pi r) \Rightarrow 1 = \frac{\theta}{36} (2\pi \times 4) \Rightarrow \theta = \frac{45}{\pi}$$

حال θ زاویه خارجی مثلث BCO است، پس داریم:

$$\theta = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \theta = \frac{45}{2\pi}$$

مسئله ۲: مشتقات

مبانی مشترک
رأسی تدریسی و همکاران با هم می‌خوانند
Hercules

۷۸۳

از چه خواهریه و چه

کمانهای قرینه

نسبت‌های قرینه کمان را از هم اکنون بلد باشید:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

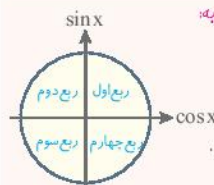
به قول معروف کسینوس منفی‌خوار (منفی را می‌خورد) بقیه سوراخ‌دار. [منفی را بیرون می‌اندازد]

۴ رادیان تقریباً معادل $228^\circ \approx 4 \times 57^\circ$ است که در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین داریم:

$$\sin(-4) = -\sin(4) = -\sin(228^\circ) > 0$$

$$\cos(-4) = \cos(4) = \cos(228^\circ) < 0$$

تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ناحیه



۱۱ سینوس بالا و پایین داره (مثل ۷ در دستگاه مختصات)

• اگر بالا باشیم [ربع اول و دوم] سینوس مثبت است.

• اگر پایین باشیم [ربع سوم و چهارم] سینوس منفی است.

۱۲ کسینوس راست و چپ داره (مثل ۷ در دستگاه مختصات)

• اگر راست باشیم [ربع اول و چهارم] کسینوس مثبت است.

• اگر چپ باشیم [ربع دوم و سوم] کسینوس منفی است.

۱۳ می‌دانیم سینوس هر دو روی کسینوس نشینند تاژانته پرید آید و برعکس کتاژانته

یعنی $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ پس برای تعیین علامت تاژانته و کتاژانته کافیسنت علامت سینوس و کسینوس را در هم ضرب کنیم. مشفص است که تاژانته و کتاژانته همواره هم‌علامت هستند.

۷۸۸ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

توجه

عبارات $\sin 2x$, $\tan x$, $\cot x$ همواره هم‌علامت هستند.

بررسی همواره

الف چون x در ربع سوم است پس $\tan x > 0$ و در نتیجه $\sin 2x > 0$.

ب چون در ربع سوم $\tan x$, $\cot x$ مثبت هستند پس مجموع آن‌ها نیز مثبت است.

ج عبارات داده شده را باز می‌کنیم:

$$\cot x + \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x = \frac{\cos(1 + \sin x)}{\sin x} = \frac{\cot x (1 + \sin x)}{\sin x} > 0$$

۷۸۹ برای آنکه $\sqrt{\sin 2a}$ تعریف شود باید $\sin 2a \geq 0$ باشد، می‌دانیم $\sin 2a$ همواره با $\tan \theta$ هم‌علامت است، پس بررسی می‌کنیم به ازای a های

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ... مقدار $\tan a$ مثبت است [دقت کنید a بر حسب رادیان است]

• $\tan a < 0$ ربع دوم $a = 2 = 2 \times 57^\circ$ $\tan a > 0$ ربع اول $a = 1 = 1 \times 57^\circ$

• $\tan a > 0$ ربع سوم $a = 4 = 4 \times 57^\circ$ $\tan a < 0$ ربع دوم $a = 3 = 3 \times 57^\circ$

• $\tan a < 0$ ربع چهارم $a = 6 = 6 \times 57^\circ$ $\tan a < 0$ ربع چهارم $a = 5 = 5 \times 57^\circ$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

در نتیجه داریم:

۷۹۰ $\sin x$ و $\cos x$ همواره بین ۱- و ۱ قرار دارند، یعنی ۱- رادیان و ۱ رادیان.

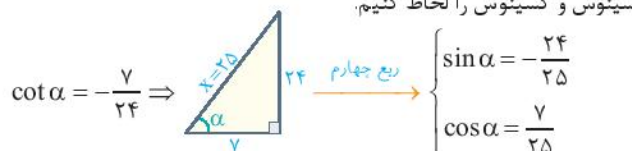
پس کمان‌های نسبت‌های مثلثاتی بیرونی همواره زاویه‌ای بین 57° و 57° است. یعنی یا در ناحیه اول و چهارم است یا ناحیه اول، بنابراین:

الف در ناحیه اول و چهارم، کسینوس همواره مثبت است.

ب در ناحیه اول سینوس مثبت و در ناحیه چهارم سینوس منفی است.

۷۹۱ برای تعیین مقدار $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ از مثلث کمکی استفاده می‌کنیم،

اما باید حواسمان باشد چون α در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد، در آخر علامت سینوس و کسینوس را لحاظ کنیم.



$$\cot \alpha = -\frac{7}{24} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{24}{25} \\ \cos \alpha = \frac{7}{25} \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{7}{25} - \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{31}{25} = 1/24$$

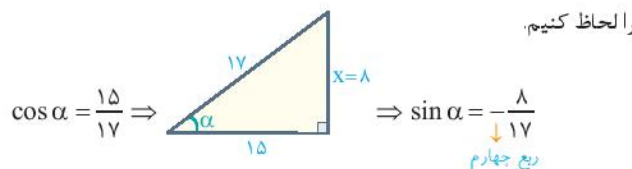
۷۹۲ از آن جایی که $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ است پس سینوس و کسینوس

مختلف‌العلامت هستند. با توجه به مثبت بودن کسینوس، پس سینوس منفی

است، در نتیجه α در ربع چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد. حال برای تعیین مقدار

سینوس می‌توان از مثلث کمکی استفاده کرد اما در آخر باید علامت سینوس

را لحاظ کنیم.



$$\cos \alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{8}{17}$$

۷۸۴

برای این که $P(\cos \theta, \sin \theta)$ و $Q(\sin \theta, \cos \theta)$ در دو ربع

مختلف باشند، باید $\sin \theta$ و $\cos \theta$ ناهم‌علامت باشند. دلیل این امر این است اگر $\sin \theta$ و $\cos \theta$ هم‌علامت باشند، آن P و Q هر دو هم‌زمان یا در ربع اول هستند یا ربع سوم. حال برای این که $\sin \theta$ و $\cos \theta$ ناهم‌علامت باشند، باید θ در ربع دوم یا چهارم باشد.

۷۸۵ چون $\sqrt{\sin x}$ داریم، پس $\sin x \geq 0$ است. حالا داریم:

$$\cos x = \sin x + \sqrt{\sin x} > 0 \Rightarrow x \text{ باید در ربع اول باشد.}$$

۷۸۶ چون $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ ، پس سینوس و کسینوس مختلف‌العلامت

هستند، یعنی α در ناحیه دوم یا چهارم است. چون $\sqrt{\sin \alpha}$ تعریف می‌شود،

پس $\sin \alpha > 0$ است، در نتیجه α در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد.

۷۸۷ چون $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ است پس سینوس و کسینوس هم‌علامت

هستند. یعنی α یا در ناحیه اول است یا در ناحیه سوم. از طرفی $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$

است، یعنی جمع دو عبارت هم‌علامت منفی شده است. پس هر دو آن‌ها منفی

بوده‌اند. با توجه به توضیحات فوق، α در ناحیه سوم قرار دارد.



موضوع: ۲ مثلث

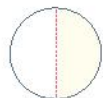
مباحث مشترک
رئالی تئوری و همکاران با هم دو منبعی همکار

Hercules

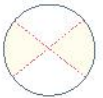
انحراف معیار دو زاویه تعاری a و b برابر است با:

$$\sigma = \frac{a-b}{4}$$

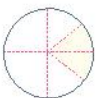
۴ | ۷۹۶ | قدر مطلق سینوس در بالا و پایین بیشتر از قدر مطلق کسینوس است.



۱ | ۷۹۷ | از $|\sin x| < |\cos x|$ می‌فهمیم $\cos x$ از یک مقدار مثبت بزرگتر است، پس خود $\cos x$ هم مثبت است.



۲ | ۷۹۷ | از طرفی چون $\cos x > 0$ پس می‌توان نل معادله $|\sin x| < |\cos x|$ را به صورت $|\sin x| < \cos x$ نوشت:



در نتیجه از اشتراک ۱ و ۲ داریم:

۲ | ۷۹۸ | ابتدا برای راحت‌تر شدن کار رادیان‌ها را به درجه تبدیل می‌کنیم:

$$2 \text{ rad} = 2 \times 57^\circ = 114^\circ \quad 3 \text{ rad} = 3 \times 57^\circ = 171^\circ$$

$$4 \text{ rad} = 4 \times 57^\circ = 228^\circ \quad 5 \text{ rad} = 5 \times 57^\circ = 285^\circ$$

حال به بررسی موارد می‌پردازیم:

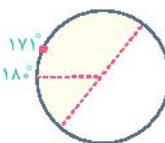


۱ | ۷۹۹ | در ناحیه‌های رنگی همواره $\tan x - \cot x > 0$

است، یعنی مقدار تفاضل از کثافت بیشتر است

$$\text{بنابراین } \tan 228^\circ > \cot 228^\circ$$

۲ | ۷۹۹ | در ناحیه‌های رنگ شده $\sin x - \cos x > 0$ است یعنی مقدار سینوس از کسینوس



بیشتر است پس $\sin 171^\circ > \cos 171^\circ$ است. البته 171°

در ناحیه دوم است، جایی که سینوس مثبت و کسینوس منفی

است پس قطعاً سینوس از کسینوس بزرگتر است. *



۳ | ۷۹۹ | در ناحیه رنگ شده $|\sin x| > |\cos x|$ است. پس

$$|\sin 285^\circ| > |\cos 285^\circ|$$

همچنین در ناحیه رنگی شکل قسمت ۴ همواره

$|\tan x| > |\cot x|$ است که 114° در ناحیه رنگی است در

$$\text{نتیجه } |\tan 114^\circ| > |\cot 114^\circ| \text{ است.}$$

۳ | ۷۹۹ | بالای نیمساز ربع ۴،۲



۴ | ۷۹۹ | ربع ۴،۲

بنابراین در گزینه ۳ همواره روابط فوق برقرار است چون زیرمجموعه ناحیه به دست آمده است.

۷۹۳ | ربع دوم

$$\cos 2 = \cos(2 \times 57^\circ) > \sin 17^\circ \Rightarrow \ominus > \oplus \quad *$$

۴ | ۷۹۳ | در $\alpha = 135^\circ$ داریم $|\sin \alpha| = |\cos \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ اما هرچه به سمت π

در دایره مثلثاتی حرکت کنیم $\cos \alpha$ به ۱- نزدیکتر و $\sin \alpha$ به صفر نزدیکتر

می‌شود، در نتیجه اندازه کسینوس (نه مقدار آن) بزرگتر و اندازه سینوس (حتی

مقدار آن) کمتر می‌شود و در نتیجه:

$$|\cos 147^\circ| > |\sin 147^\circ| \quad \checkmark$$

۵ | ۷۹۳ | رادیان تقریباً معادل $285^\circ = 5 \times 57^\circ$ است. هرچه از -45°

یا هر زاویه‌ای با همان جایگاه در دایره مثلثاتی به $-\frac{\pi}{4}$ نزدیکتر می‌شویم از مقدار $\tan \alpha$ کم می‌شود و به $-\infty$ میل می‌کند. پس $\tan \alpha < -1$ است و همواره سینوس هر زاویه‌ای از ۱- بزرگتر است.

$$\tan \alpha < \sin \alpha \quad \checkmark$$

بیشتر از ۱- کمتر از ۱-

۳ | ۷۹۳ | رادیان در ناحیه دوم مثلثاتی، جایی که کسینوس منفی است قرار دارد

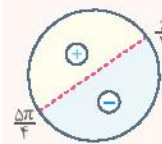
و 20° در ناحیه سوم مثلثاتی جایی که سینوس منفی است قرار دارد و در

نتیجه داریم:

$$[\cos 3^\circ] + [\sin 20^\circ] = [-\dots] + [-\dots] = -1 + (-1) = -2 \quad *$$

۴ | ۷۹۴ | برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

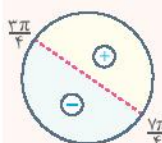
علامت فنر عبارت پرکاربرد:



۱ | ۷۹۴ | علامت $\sin x - \cos x$ را مطابق شکل روبه‌رو از روی دایره

تشخیص دهید.

• در واقع بالای نیمساز ربع ۱ و ۳ عبارت فوق مثبت است.



۲ | ۷۹۴ | علامت $\sin x + \cos x$ را مطابق شکل روبه‌رو از روی دایره

تشخیص دهید.

• در واقع بالای نیمساز ربع ۲ و ۴ عبارت فوق مثبت است.

۳ | ۷۹۴ | اگر هر دو فنر را بکشید خواهیم داشت:

۱ | ۷۹۴ | در Δ (بالا و پایین): $|\sin x| > |\cos x|$ و

همچنین $|\tan x| > |\cot x|$

۲ | ۷۹۴ | در Δ (چپ و راست): $|\cos x| > |\sin x|$ و

همچنین $|\cot x| > |\tan x|$

در این مسئله $\sin x > \cos x$ معادل است با $\sin x - \cos x > 0$ که جواب آن

گزینه ۳ است.

۱ | ۷۹۵ | چون $0 < x < \frac{\pi}{4}$ است، پس $\cos x > \sin x$ است، بنابراین

$\log \cos x > \log \sin x$ حال داریم:

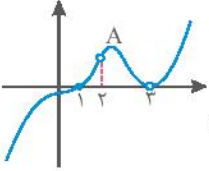
$$\sigma = \frac{\log \sin x - \log \cos x}{2} = \frac{1}{2} (\log \cos x - \log \sin x)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2} \log \cot x = \log \sqrt{\cot x}$$

۳۲۶۵ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته در رسم نمودار، تابع را نامی توانید سازه کنید ولی به آخرین مرحله که رسیدید و نمودار را رسم کردید، با توجه به دامنه تابع اولیه (که سازه نشده) نقاط تو خالی نمودار را مشخص کنید.

به راحتی می‌توان ضابطه را به صورت $y = (x-1)^3(x-3)^2$ ساده کرد و نمودار زیر را بدست آورد. اما برای نقاط تو خالی باید به ضابطه



اولیه تابع، یعنی $y = \frac{(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4}{(x^2-5x+6)^2}$ توجه کنیم و به همین خاطر $x=2, 3$ که از صورت و مخرج ساده شدند را تو خالی رسم کردیم.

نکته کلیدی که در حل این سوال مهم است، پیدا کردن نقطه A، است. که برای تشخیص جایگاه A به نکته زیر توجه کنید.

نکته در تابع $f(x) = (x-\alpha)^m(x-\beta)^n$ طول نقطه A (ماکزیم یا مینیمم) از فرمول $x_A = \frac{m\beta + n\alpha}{m+n}$ به دست می‌آید.

در این تست $x_A = \frac{3 \times 3 + 2 \times 1}{3+2} = \frac{11}{5} > 2$ به همین خاطر نقطه تو خالی در $x=2$ قبل از A است.

۳۲۶۶ اگر این تابع را ساده کنیم به تابع $y = (x-1)^4(x-3)^3$ می‌رسیم، نقاط تو خالی با توجه به ضابطه تابع قبل از ساده شدن انتخاب شده‌اند $(x=3, 4)$ و البته: $x_A = \frac{12+3}{4} = \frac{15}{4}$

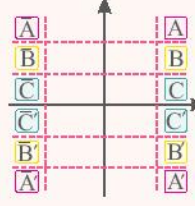
۳۲۶۷ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته اگر ریشه مخرج سازه نشود، تابع دو ویژگی مهم پیدا می‌کند.

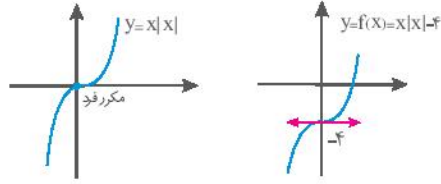
۱۱. **میاناب قلام**
 ۱۲. **فاصلیت کشسانی نمودار**
 ۱۱. میاناب قلام در حقیقت همان ریشه مخرج است که بر دو نوع است. نوع اول مربوط به ریشه‌های سازه مخرج، یا ریشه‌های مکرر مرتبه فرد، یعنی $\frac{g(x)}{(x-\alpha)^{2n+1}}$ هستند که ویژگی آن‌ها وجود شافه‌های نا هم علامت از نمودار در اطراف میاناب است.

نوع دیگری از میاناب قلام داریم که از ریشه‌های $(x-\alpha)^{2n}$ یا $|x-\alpha|$ در مخرج به وجود می‌آیند. این میاناب‌ها یا آشفشانی مانند شکل سمت چپ هستند یا باتلاقی مانند شکل سمت راست.

۱۲. **فاصلیت کشسانی نمودار** $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ به کمک اعتبار و درجه صورت [یعنی $g(x)$] و درجه مخرج [یعنی $h(x)$] مشخص می‌شود. به این صورت که دستگاه مقدمات را به ۶ نایبه در سمت راست و ۶ نایبه در سمت چپ تقسیم بندی می‌کنیم.

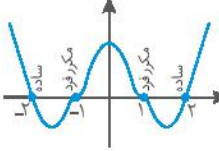


۳۲۶۹ توجه کنید $y = x|x|$ به صورت شکل سمت چپ است، حال کیفیت نمودار را ۴ واحد به پایین انتقال دهیم تا به شکل راست برسیم:

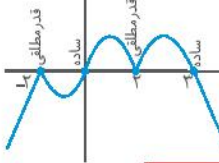


۳۲۷۰ در ابتدا ضابطه $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$f(x) = (|x|-2)(|x|-1)|x-1||x+1|$
 دقت کنید که $(|x|-1)$ دارای دو ریشه ساده $x=1$ و $x=-1$ است که در کنار عوامل $|x-1|$ و $|x+1|$ ریشه مکرر مرتبه فرد روی نمودار ایجاد می‌کنند. با توجه به این نکات و ساده بودن ریشه‌های $x = \pm 2$ و مثبت بودن اعتبار داریم:

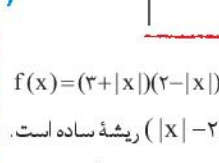


۳۲۷۱ عمل $|x|-2$ دارای دو ریشه ساده $x = \pm 2$ می‌باشد، ولی ما در این مسئله با عمل $||x|-2|$ مواجه هستیم که دو ریشه قدر مطلق $x = \pm 2$ دارد. دو ریشه ساده $x=0$ و $x=3$ اعتبار منفی داریم:



۳۲۷۲ عبارت دوم را تجزیه می‌کنیم:

$y = (x-2)(|x-4|)(|x-1|)$ پس اعتبار مثبت و ریشه‌های ساده ± 1 و ± 4 را داریم:

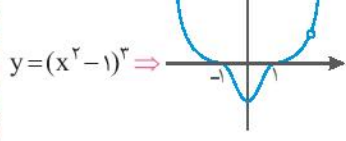


۳۲۷۳ ضابطه $f(x)$ را به صورت $f(x) = (3+|x|)(2-|x|)(3+x)(2-x)$ تجزیه می‌کنیم، $x=2$ هم برای $(x-2)$ و هم برای $(|x|-2)$ ریشه ساده است.

لذرا برای $(|x|-2)(x-2)$ ریشه $x=2$ مکرر از مرتبه ۲ است. ریشه‌های $x=3$ و $x=-2$ ساده هستند. $(|x|+3)$ هم ریشه ندارد. اعتبار نیز مثبت است.

نکته اگر $x = \alpha$ ریشه مرتبه m تابع $g(x)$ و ریشه مرتبه n تابع $h(x)$ باشد، آنگاه همین $x = \alpha$ ریشه مرتبه $m+n$ تابع $f(x) = g(x)h(x)$ است.

۳۲۷۴ عمل $(x-2)^5$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

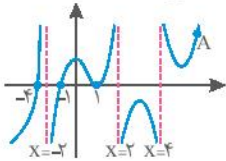


نکته اگر عامل $(x-\alpha)^n$ به طور کامل از صورت و مخرج ساده شود، در رسم نمودار آنکار که عامل $(x-\alpha)^n$ هرگز نداشتیم، فقط روی نمودار در $x = \alpha$ باید نقطه تو خالی قرار دهیم.

رسم شماتیک نمودارها

میاناب مشترک
 روشی تدریسی و همکاران با جمع جوی منتهی هر کسک
 Hercules

۱۱ اعتبار مثبت و درجهٔ صورت بیشتر از مخرج پس شروع از A



۱۲ ریشهٔ مضاعف $x = 1$

۱۳ ریشهٔ سادهٔ صورت $x = -4, -1$

۱۴ مجانب قائم معمولی $x = 2, -2, 4$

۱۵ با ساده کردن ضابطهٔ $f(x)$ داریم:

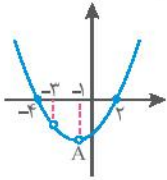
$$f(x) = \frac{(x+4)(x+1)(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)} = (x+4)(x-2)$$

۱۱ اعتبار مثبت

۱۲ ریشه ساده $x = -4, 2$

۱۳ تو خالی $x = -1, -2$

$$x_A = \frac{(-4)+2}{2} = -1$$



۱۶ با توجه به اینکه $x^2 = |x|^2$ است، با فاکتورگیری از $|x|$ در صورت

$$f(x) = \frac{|x|(|x|-4)}{(x+3)|x+2|(x-1)^5}$$

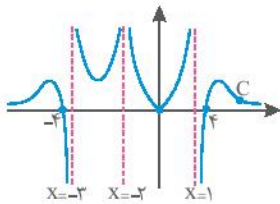
۱۱ اعتبار مثبت و درجهٔ مخرج بیشتر از صورت شروع از C

۱۲ ریشهٔ قدر مطلق $x = 0$

۱۳ ریشه‌های ساده $x = 4, -4$

۱۴ مجانب معمولی $x = -3$

۱۵ مجانب آشفشانی یا باتلاقی $x = -2$



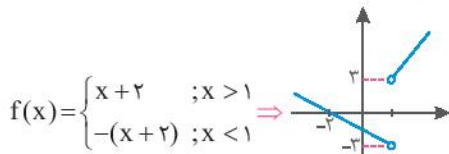
۱۱ برای حل این تست ابتدا به نکتهٔ زیر توجه کنید:

اگر $f(x)$ عاملی به صورت $\frac{x-\alpha}{|x-\alpha|}$ داشته باشد، آنگاه در $x = \alpha$ ناپیوستگی دارد. در این نوع مسائل باید $f(x)$ را طبق ریشه بازبینی کنیم.

در این تست $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 3 \\ -1 & ; x < 3 \end{cases}$ و نمودار آن شبیه به گزینهٔ ۱ است.

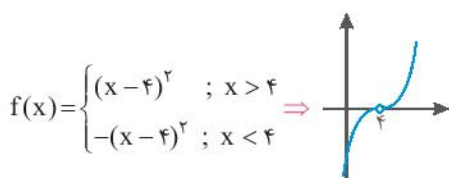
۱۲ تابع $f(x)$ عامل $\frac{x-1}{|x-1|}$ دارد و لذا باید بازبینی شود بنابراین

نمودار این تابع به صورت زیر است:



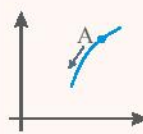
۱۳ به علت وجود $(x-4)^2$ در صورت و $|x-4|$ در مخرج، باید تابع

را بازبینی کنیم. در نتیجه نمودار این تابع به صورت زیر است:



۱۱ نشانگر A: اگر درجه صورت بیشتر از درجهٔ مخرج باشد و اعتبار مثبت باشد، شروع رسم

از A و اگر اعتبار منفی باشد از A' است.

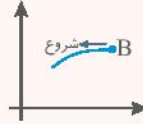


مثلاً $y = \frac{(x-1)^5(x+2)^2}{(x-2)^6}$ با توجه به اینکه درجه صورت ۸ و درجهٔ مخرج ۶ است و اعتبار مثبت است نقطهٔ شروع رسم

این نمودار از A است.

۱۲ نشانگر B: اگر درجه‌های صورت و مخرج برابر باشد و اعتبار مثبت باشد شروع

از B و اگر اعتبار منفی باشد شروع از B' است.



مثلاً در رسم تابع $y = \frac{(x-1)^2x}{(x+2)^4}$ درجهٔ صورت و مخرج هر دو ۴ است و اعتبار مثبت است پس شروع از B است.

۱۳ نشانگر C: اگر درجهٔ صورت کمتر از مخرج باشد از C

(وقتی اعتبار مثبت است) یا از C' (وقتی اعتبار منفی است)

شروع به رسم می‌کنیم. مثلاً در رسم تابع $y = \frac{x}{(x-1)^3}$ اعتبار مثبت

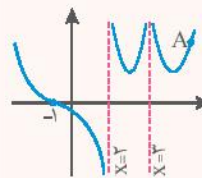
و درجهٔ مخرج بیشتر از صورت است پس شروع از C است.

مال هند مثال دقیق‌تر را با هم مرور کنیم:

$$y = \frac{(x+1)^5}{(x-2)^2(x-3)^2}$$

مثال ۱:

۱۱ اعتبار مثبت و درجهٔ صورت بیشتر از مخرج است پس شروع از A می‌باشد.



۱۲ میانب قائم آشفشانی یا باتلاقی $x = 2$

۱۳ میانب قائم معمولی $x = 3$

۱۴ ریشه مکرر یا تکرار فرد $x = -1$

توجه! وقت کنید که شروع نمودار از محور x ها دور است، پس سمت چپ هم نمودار از

محور x ها دور می‌شود. یعنی نموداری که با A یا A' شروع می‌شود، باید با A یا A' تمام

شود. همین هم برای B, C برقرار است.

$$y = \frac{(x+1)^2(1-x)}{(x+2)^2|x-2|}$$

مثال ۲:

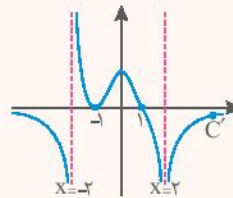
۱۱ اعتبار منفی و درجهٔ مخرج بیشتر، شروع از C'

۱۲ میانب آشفشانی یا باتلاقی $x = 2$

۱۳ ریشهٔ ساده $x = 1$

۱۴ ریشه مکرر یا تکرار زوج $x = -1$

۱۵ میانب قائم معمولی $x = -2$



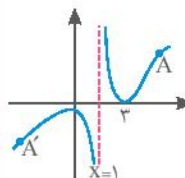
در تابع $f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-1)}$ درجهٔ صورت بیشتر است.

۱۱ اعتبار مثبت شروع از A

۱۲ ریشهٔ مضاعف $x = 3$

۱۳ مجانب معمولی $x = 1$

۱۴ تمام نمودار A' است.



۱۳ لول ضابطهٔ $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(x+4)(x+1)}{(|x-2|(x-4))}$$

کتابخانه

رسم تحلیلی نمودار

مباحث بیشتر
روایی تکراری و هم‌پایان پاسخ دو منتهی حرکت
Hercules



