خیلی سبز!

بر اساس سبک جدید امتحانات نهایی

۶۰٪ نمره پذیرش دانشگاه

ویژه ارتقاء معدل

پایه دهم

ماجرای بیست هندسه ۱

زهرا جالینوسی

درسنامه | سؤال‌های امتحانی با پاسخ تشریحی | امتحان نهایی

- درسنامه های کاملاً کاربردی و کامل با بیش از ۲۰۰ مثال هدفمند منطبق با رویکرد جدید امتحان نهایی
- بیش از ۷۰۰ نمونه سؤال امتحانی به همراه پاسخ‌های کاملاً یاددهنده
- پوشش کامل تمام مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی
- شامل سؤال های امتحانی دشوار جهت شبیه سازی سؤالات دشوار احتمالی در امتحان نهایی
- امتحان های فصل به فصل، نوبت اول و دوم و نهایی
- به همراه یک جلد ضمیمه رایگان، شامل خلاصه درس های شب امتحانی با بررسی پرتکرارترین ایده های امتحان نهایی در قالب مثال های کاربردی

Jet Questions

سؤال‌های پیشرو برای بیست گرفتن

تقدیم به

تقدیم به همسر عزیزم؛ «محمد جانم»

که وجودش انگیزه‌ای است برای ادامهٔ زندگی ...

مقدمهٔ ناشر

گپی راجع به مجموعهٔ «ماجرای بیست»

تا حالا به این فکر کردین که یه دانش‌آموز توی ۲۴ ساعت شبانه‌روز چی‌کار می‌کنه؟

- هفت هشت ساعت می‌خوابه و استراحت می‌کنه.
- حداقل هفت ساعت تو مدرسه‌ست که شیش ساعتش رو سر کلاسه و (احتمالن) داره درس گوش می‌ده.
- حدود یک ساعت تو راه خونه به مدرسه و مدرسه به خونه‌ست.
- سه چهار ساعتی هم توی خونه با کتابا و درساش مشغوله و کُشتی می‌گیره.
- چهار پنج ساعت از وقتش هم می‌ره برای غذاخوردن، حضور در آغوش گرم خانواده و کارای شخصی مهم و بازی‌گوشی (که شامل گوشی‌بازی هم می‌شه!).

خُب! با این حساب و کتابا معلوم می‌شه به دانش‌آموز، ۷۵/۶۲۵ درصد از زمان بیداریش رو با درس و مشق و کتاب و مدرسه و معلم می‌گذرونه با کلّی اتفاقات تلخ و شیرین؛ پس بی‌راه نیست که بگیم:

«ماجرای بیست» ماجرای اصلی زندگی یه دانش‌آموزه.

ما توی خیلی‌سبز این مجموعه رو آماده کردیم چون واقعن دلمون می‌خواد داستان مدرسه‌رفتن و درس‌خوندن شما و این عمری که به پاش گذاشتین، پایان خیلی خوش و شکوهمندی داشته باشه!

اگه ماجراهای جالب خودتون با درساتون رو به صورت مطلب، عکس، سلفی، خاطره، فیلم و فیلم‌نامه و ... برامون بفرستین، خیلی رو سرمون منّت گذاشتین. ما حتمن ماجراهاتون رو یه جایی (مثلن تو سایت خیلی‌سبز یا شاید هم چاپ بعدی کتاب) منتشر می‌کنیم.

ماجرای من و هندسه

یه معلم هندسه داشتیم که خیلی خوب درس می‌داد و با بچه‌ها رابطهٔ خوبی داشت؛ ولی سخت‌گیر هم بود. مثلن بچه‌هایی که تکلیفشون رو انجام نداده بودن باید ۲ برابر جریمه می‌نوشتن و اسم این جریمه رو گذاشته بود: «خشم اقلیدس»!

اما جالب‌تر از خشم اقلیدس چک‌کردن تکلیف بچه‌ها بود که توی سه مرحله انجام می‌شد:

مرحلهٔ شهود: ایشون یه وقتایی به صورت شهودی حس می‌کردن که احتمالن بچه‌ها تکلیفشون رو درست انجام ندادن و ماجرا با یک جملهٔ خوف شروع می‌شد: «امروز یه حسی بهم می‌گه باید تکلیفا رو ببینم.»

مرحلهٔ استقرا: تکلیفای دو سه نفر از بچه‌ها رو می‌دیدن و اگه شهودشون اشتباه نکرده بود، وارد فاز سوم می‌شدن.

مرحلهٔ استدلال: یکی‌دوتا از سخت‌ترین سؤالای تکلیف رو از ما به صورت کتبی امتحان می‌گرفتن و هر کی نمی‌تونست نمرهٔ کامل بگیره، به خشم اقلیدس گرفتار می‌شد ...

پیام اصلی این ماجرا (و شاید هم پیام اصلی درس هندسه) اینه که برای قضاوت‌کردن و تصمیم‌گرفتن، احساسات و شهود هرگز کافی نیست و باید استدلال کرد. وقتی دارید مسئله‌های هندسه رو اثبات می‌کنید، یادتون بیاد که هندسه فقط یه درس نیست؛ یه دیدگاه و یه روش زندگیه.

در ماجراجویی‌های هندسیتون موفق باشید.

مقدمهٔ مؤلف

«هیچ اتفاقی، اتفاقی نیست.»

یادمه سال‌های دور وقتی دانش‌آموز بودم، اکثر دوستانم با درس و کلاس هندسه مشکل داشتن و همیشه اونی که عاشق هندسه بود، من بودم. شاید به خاطر ذهن خیال‌پرداز و داستان‌سرایی که داشتم، همیشه هندسه و تجسمی که برای درکش نیاز داره، برای من جذابیتی فراتر از هر درس و کتاب دیگه‌ای داشت و این علاقه اون‌قدر ادامه پیدا کرد که الان در خدمت شما هستم با تألیف کتاب هندسهٔ دهم ماجرا ... یعنی همه‌چیز با یه عشق ساده شروع شد ...

توی کتاب ماجرای بیست هندسه دهم، سعی کردم ماجرای هر درس هندسه دهم رو یه طوری روان و ساده با هم پیش ببریم که هم دانش‌آموزان قوی و هم اون‌هایی که فکر می‌کنن یه‌کم توی این درس ضعیف‌ترن، آخر سال تحصیلی بدون این‌که خودشون بفهمن، عاشق هندسه شده باشن و نمرهٔ ۲۰ رو بغل کنن ... .

حواستون باشه، سؤال‌های با علامت سخت‌ترین سؤال‌های هر بخشن. اگه به کمتر از ۲۰ راضی نمی‌شین، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگه، برید سراغ اون‌ها.

و اما حرف آخر، می‌خوام تشکر کنم از دوستان و عزیزانی که در تألیف این کتاب مدیون لطف و زحمت اون‌ها هستم:

- آقای مهدی هاشمی، مدیر تألیف توانمند کتاب‌های ماجرای بیست که بدون کمک و راهنمایی‌های ایشون اصلاً کتابی در کار نبود.
- خانم مریم طاهری، مسئول پروژهٔ کتاب و دوست عزیزم که در تمام مراحل کار یار و یاورم بود.
- و همهٔ دوستان تألیف و تولید انتشارات خیلی‌سبز که شبانه‌روز در تلاش‌اند تا بهترین کتاب‌ها رو به دست بهترین و سخت‌کوش‌ترین بچه‌های دنیا *(شما رو می‌گم)* برسونن ...

مرداد ۱۴۰۲

زهرا جالینوس

فهرست

فصل دوم

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

۱ نسبت و تناسب در هندسه

نسبت

حاصل تقسیم عدد حقیقی a بر b که $b \neq ۰$ باشد را نسبت a به b می‌نامیم و می‌نویسیم: $\frac{a}{b}$.

مثلاً فرض کنید مطابق شکل زیر نقطهٔ M طوری روی پاره‌خط AB قرار داشته باشد که $AM = ۳ , BM = ۷$؛ به شرطی که هر دو یک واحد اندازه‌گیری داشته باشند، در این حالت می‌توانیم بگوییم که $\frac{AM}{BM} = \frac{۳}{۷}$. *حالا یعنی چی؟* یعنی نسبت پاره‌خط AM به پاره‌خط BM برابر $\frac{۳}{۷}$ است (یا نقطهٔ M پاره‌خط AB را به نسبت ۳ به ۷ تقسیم کرده است.)

تناسب

حالا اگر دو نسبت با هم مساوی باشند، یک تناسب را تشکیل می‌دهند. مثلاً $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ (b,d \neq ۰)$ یک تناسب است که به a و d وسطین و به c و b طرفین تناسب می‌گوییم.

مثلاً اگر نسبت طول (a) به عرض (b) یک مستطیل ۳ به ۲ باشد، آن‌گاه تناسب آن‌ها به صورت $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۲}$ نوشته می‌شود یا اگر زاویه‌های α، β و γ با عددهای ۳، ۴ و ۵ متناسب باشند، داریم: $\frac{\alpha}{۳} = \frac{\beta}{۴} = \frac{\gamma}{۵}$.

توجه اگر $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$، آن‌گاه همیشه می‌توانیم این‌طور در نظر بگیریم که $\begin{cases} a = mk \\ b = nk \end{cases}$. از این روش در خیلی از سؤال‌های تناسب می‌توانیم استفاده کنیم. مثلاً اگر $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{۲}{۷}$ می‌توانیم بگوییم: $\begin{cases} \alpha = ۲x \\ \beta = ۷x \end{cases}$.

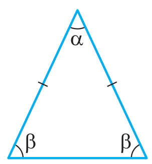
مثال **در یک مثلث متساوی‌الساقین، نسبت اندازهٔ زاویهٔ رأس به یکی از زاویه‌های ساق برابر ۴ به ۷ است. اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث را به دست آورید.**

پاسخ در شکل روبه‌رو اگر زاویهٔ رأس برابر α و زاویهٔ ساق برابر β باشد، آن‌گاه نسبت آن‌ها برابر است با: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{۴}{۷}$

یا می‌توانیم بگوییم اگر $\alpha = ۴x$ باشد، β برابر $۷x$ است. از طرفی مجموع زوایای داخلی مثلث برابر ۱۸۰° است،

پس داریم: $\hat{\alpha} + ۲\hat{\beta} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴x + ۲(۷x) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۸x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰^\circ$

پس بزرگ‌ترین زاویه برابر است با: $۷x = ۷۰^\circ$



ویژگی‌های تناسب

تناسب، چند ویژگی مهم دارد که دانستن آن‌ها به حل مسائل خیلی کمک می‌کند. جدول زیر را حتماً بلد باشید:

	ویژگی	توضیح	مثال
۱	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=cb$	طرفین‌وسطین‌کردن	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Leftrightarrow ۳\times۱۰=۶\times۵$
۲	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases}\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{cases}$	تعویض جای طرفین یا وسطین	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \begin{cases}\frac{۱۰}{۵}=\frac{۶}{۳}\\ \frac{۳}{۶}=\frac{۵}{۱۰}\end{cases}$
۳	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	می‌توانیم هر دو طرف تناسب را معکوس کنیم.	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{۶}$
۴	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$	ترکیب یا تفضیل نسبت در صورت کسرها	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{۳\pm۵}{۵}=\frac{۶\pm۱۰}{۱۰}$
۵	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d}$	ترکیب یا تفضیل نسبت در مخرج کسرها	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{۳}{۳\pm۵}=\frac{۶}{۶\pm۱۰}$
۶	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$	می‌توانیم صورت‌ها را با هم جمع (تفریق) و مخرج‌ها را هم با هم جمع (تفریق) کنیم.	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳+۶}{۵+۱۰}=\frac{۳-۶}{۵-۱۰}$

حالت کلی ویژگی ۶: طبق ویژگی شمارهٔ ۶، گفتیم که اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$، آن‌گاه: $\frac{a+c}{b+d}=k$. این ویژگی در حالت کلی برای تناسب $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\cdots=\frac{z_1}{z_2}=k$ هم برقرار است و می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\cdots=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1+c_1+\cdots+z_1}{a_2+b_2+c_2+\cdots+z_2}=k$$

مثال ویژگی ترکیب در صورت را اثبات کنید. $(\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d})$

پاسخ فرض می‌کنیم: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. حالا به دو طرف تساوی مقدار ثابت ۱ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{a}{b}+۱=\frac{c}{d}+۱ \xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک}} \frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

مثال از عبارت $\frac{۷x+۱}{۲}=\frac{x-۳}{۳}=\frac{y+۲}{۵}$، مقدار x و y را به دست آورید. *(مشابه تمرین صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)*

پاسخ ابتدا بخش اول تناسب $(\frac{۷x+۱}{۲}=\frac{x-۳}{۳})$ را طرفین‌وسطین می‌کنیم تا مقدار x را پیدا کنیم:

$$\frac{۷x+۱}{۲}=\frac{x-۳}{۳} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۳(۷x+۱)=۲(x-۳) \Rightarrow ۲۱x+۳=۲x-۶ \Rightarrow ۱۹x=-۹ \Rightarrow x=-\frac{۹}{۱۹}$$

حالا مقدار x را در بخش دوم تناسب $(\frac{x-۳}{۳}=\frac{y+۲}{۵})$ جای‌گذاری کرده و y را به دست می‌آوریم:

$$\frac{-\frac{۹}{۱۹}-۳}{۳}=\frac{y+۲}{۵} \Rightarrow \frac{-۲۲}{۱۹}=\frac{y+۲}{۵} \Rightarrow y=\frac{-۱۴۸}{۱۹}$$

مثال اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید. *(تمرین صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)*

پاسخ با استفاده از حالت کلی ویژگی (۶) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{x+y+z}{۲+۳+۶}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{x+y+z}{۱۱}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow x+y+z=\frac{۳۳}{۵}$$

میانگین (واسطهٔ) هندسی

اگر طرفین یا وسطین یک تساوی با هم برابر باشد، مثلاً $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ یا $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$، آن‌گاه b را واسطهٔ هندسی بین a و c می‌نامیم و همواره داریم: $b^۲=ac$

مثلاً ۸ واسطهٔ هندسی بین اعداد ۴ و ۱۶ است؛ زیرا: $۸^۲=۴\times۱۶$

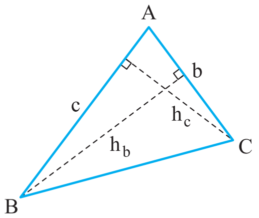
مثال اگر ۳x واسطهٔ هندسی بین $۳x-۳$ و $۳x+۱$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ از آنجا که ۳x واسطهٔ هندسی بین $۳x-۳$ و $۳x+۱$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$(۳x)^۲=(۳x+۱)(۳x-۳) \Rightarrow ۹x^۲=۹x^۲-۶x-۳ \Rightarrow ۶x=-۳ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

تناسب‌ها در مثلث

رابطهٔ نسبت دو ارتفاع یک مثلث با نسبت قاعده‌های نظیر آن‌ها



در مثلث ABC روبه‌رو، ارتفاع‌های h_b و h_c را رسم می‌کنیم و مساحت مثلث ABC را یک بار با ارتفاع h_b و قاعدهٔ b و بار دیگر با ارتفاع h_c و قاعدهٔ c می‌نویسیم. می‌دانیم مساحت مثلث در هر دو حالت برابر است، پس:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}c\times h_c=\frac{۱}{۲}b\times h_b \Rightarrow c\cdot h_c=b\cdot h_b \Rightarrow \boxed{\frac{c}{b}=\frac{h_b}{h_c}}$$

یعنی: **در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است.**

نتیجه همیشه بزرگ‌ترین ارتفاع به کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود:

$$a>b>c \Leftrightarrow h_a<h_b<h_c$$

مثال **طول اضلاع مثلثی برابر ۴، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۷}$ است و طول کوتاه‌ترین ارتفاع آن ۱ است. طول دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.**

پاسخ می‌دانیم در هر مثلث، بزرگ‌ترین ارتفاع، نظیر کوچک‌ترین ضلع است؛ یعنی در این‌جا داریم:

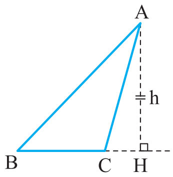
$$۴>\sqrt{۷}>\sqrt{۳} \Rightarrow ۱<h_a<h_b$$

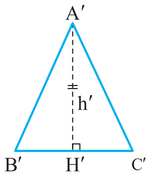
پس ضلع c برابر ۴ و ارتفاع آن $h_c=۱$ است. حالا ارتفاع وارد بر دو ضلع دیگر مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\frac{c}{b}=\frac{h_b}{h_c} \Rightarrow \frac{۴}{\sqrt{۳}}=\frac{h_b}{۱} \Rightarrow h_b=\frac{۴}{\sqrt{۳}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\frac{c}{a}=\frac{h_a}{h_c} \Rightarrow \frac{۴}{\sqrt{۷}}=\frac{h_a}{۱} \Rightarrow h_a=\frac{۴}{\sqrt{۷}}=\frac{۴\sqrt{۷}}{۷}$$

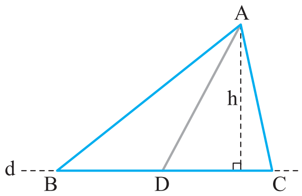
نسبت مساحت‌های دو مثلث هم‌ارتفاع





اگر دو مثلث، ارتفاع‌های برابر داشته باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر است با نسبت اندازهٔ قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها. مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$h=h' \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BC\times h}{\frac{۱}{۲}B'C'\times h'}=\frac{BC}{B'C'}$$



نتیجه در شکل روبه‌رو، اگر دو مثلث مثل ABD و ADC در رأس A مشترک باشند و قاعده‌های مقابل به رأس A یعنی BD و DC روی یک خط مثل d باشند، آن‌گاه ارتفاع این دو مثلث برابر می‌شود. در نتیجه نسبت مساحت آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌ها است، ببینید:

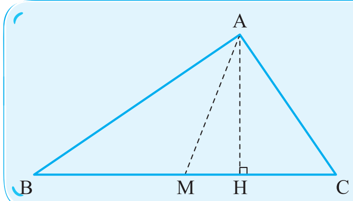
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BD\times h}{\frac{۱}{۲}DC\times h}=\frac{BD}{DC}$$

این رابطه را می‌توانیم برای مثلث‌های هم‌ارتفاع دیگر هم بنویسیم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{BD}{BC} \quad , \quad \frac{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{DC}{BC}$$

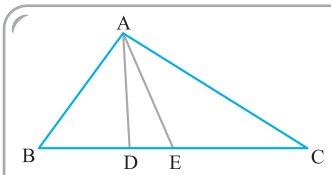
نکته

میانهٔ هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌کند. مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:



$$\text{میانه است } AM \Rightarrow BM=MC \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AMC}}}{S_{\overset{\Delta}{AMB}}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times MC}{\frac{۱}{۲}\times AH\times MB}=۱ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AMC}}=S_{\overset{\Delta}{AMB}}$$

مثال **در شکل مقابل، مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.** *(تمرین صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)*



پاسخ *تعیین نسبت $\frac{DE}{BD}$: گفته‌های صورت سؤال را به صورت ریاضی می‌نویسیم تا ببینیم چی میگه:*

$$S_{\overset{\Delta}{ACE}}=۳S_{\overset{\Delta}{ADE}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ACE}}}{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}=۳$$

چون مثلث‌های ACE و ADE در رأس A مشترک‌اند و ارتفاع‌های برابر دارند، نسبت مساحت آن‌ها با نسبت قاعده‌ها برابر است و داریم:

$$\frac{CE}{DE}=۳ \Rightarrow DE=\frac{۱}{۳}CE \quad (۱)$$

همین موضوع برای دو مثلث ACE و ABD هم برقرار است:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ACE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}=\frac{CE}{BD}=۲ \Rightarrow BD=\frac{۱}{۲}CE \quad (۲)$$

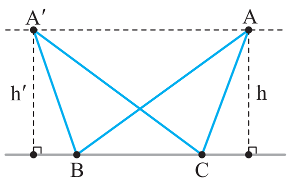
حالا نسبت‌های خواسته‌شدهٔ مسئله را به دست می‌آوریم. با تقسیم‌کردن طرفین طبق رابطه‌های (۱) و (۲) داریم: $\frac{DE}{BD}=\frac{\frac{۱}{۳}CE}{\frac{۱}{۲}CE}=\frac{۲}{۳}$

تعیین نسبت $\frac{BC}{DE}$: از آن‌جا که ضلع BC برابر $BD+DE+EC$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BC}{DE}=\frac{BD+DE+CE}{DE}=\frac{\frac{۱}{۲}CE+\frac{۱}{۳}CE+CE}{\frac{۱}{۳}CE}=\frac{\frac{۱۱}{۶}CE}{\frac{۱}{۳}CE}=\frac{۱۱}{۲}$$

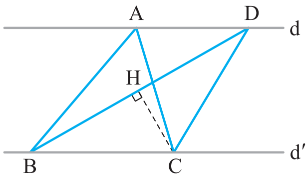
نسبت مساحت‌های دو مثلث هم‌قاعده و هم‌ارتفاع

اگر دو مثلث، قاعده‌های برابر داشته باشند و رأس سوم آن‌ها روی خطی موازی با قاعده قرار بگیرد، در این صورت، مساحت‌های این دو مثلث با هم برابرند. مثلاً به شکل زیر دقت کنید. برای دو مثلث ABC و A′BC که قاعده‌های مشترک دارند، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}BC\times h \\ S_{\overset{\triangle}{A'BC}}=\frac{۱}{۲}BC\times h' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(h=h')}]{\text{فاصلهٔ بین دو خط موازی همواره یکسان است.}} S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{A'BC}}$$

مثال **در شکل مقابل، $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC برابر ۸ است. اگر $BD=۶$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD چه‌قدر است؟** *(تمرین صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)*



پاسخ فاصلهٔ بین خطوط موازی همواره برابر است، بنابراین در شکل بالا ارتفاع دو مثلث ABC و DBC برابر است. قاعدهٔ هر دو مثلث هم BC است؛ پس مساحت مثلث‌های ABC و DBC برابر است، حالا مسئله مقدار CH را از ما می‌خواهد:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{DBC}}=۸ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{DBC}}=\frac{۱}{۲}CH\times BD \Rightarrow ۸=\frac{۱}{۲}\times CH\times ۶ \Rightarrow CH=\frac{۸}{۳}$$

درامتحان چه‌خبر؟

بریم سراغ تیپ سؤال‌هایی که معلم‌هاتون توی این درس بهش علاقه دارن.

تیپ۱ یک تناسب با مقادیر مجهول در سؤال وجود دارد و از شما می‌خواهند مقدار یک کسر شامل آن مقادیر مجهول را به دست آورید. برای حل این سؤال‌ها کافی است جدول مربوط به ویژگی‌های تناسب را خوب تمرین کرده باشید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱ و ۲/ ۷/ ۸/ ۱۰ تا ۱۳

تیپ۲ میانگین هندسی: *دیگه واضح‌تر از این سؤال نداریم. فرمول $b^۲=ac$ رو سرلوحهٔ حل این سؤال‌ها بذار، بقیه‌ش محاسباته ...*

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۳/ ۱۴ و ۱۵

تیپ۳ برای حل سؤال‌های مربوط به مساحت مثلث‌ها که قاعدهٔ برابر یا ارتفاع برابر یا ... دارند، فقط همان چندتا نکتهٔ داخل درس‌نامه کافی است. *(تنوع این سؤال‌ها زیاده ولی کافیه مثلث‌های درست رو انتخاب کنی!)*

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۴ تا ۶/ ۹/ ۱۶ تا ۲۶

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب پر کنید.

۱- اگر $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}$ آن‌گاه $\frac{a+b}{a}$ برابر .... است.

۲- $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{a+b+c}{..............}=\frac{۳}{۲}$ *(مشابه تمرین صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)*

۳- اگر b میانگین هندسی بین a و c باشد، آن‌گاه $b^۲=$ .... *(مشابه تمرین صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)*

۴- در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع با عکس نسبت .... وارد بر آن‌ها برابر است.

۵- اگر دو مثلث قاعده‌های برابر داشته باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با ....

درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را بیان کنید، برای نادرست‌ها علت بنویسید.

۶- در مثلث ABC، اگر AM میانه باشد، نسبت مساحت مثلث‌های ABM و ACM برابر یک است.

۷- اگر بدانیم $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ آن‌گاه $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a+c}{b+d}$.

۸- در یک مثلث، نسبت زاویه‌های داخلی ۱، ۲ و ۹ است. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ این مثلث برابر 10° است.

۹- در مثلث ABC، پاره‌خط‌های BH و CH' به ترتیب ارتفاع‌های وارد بر AC و AB هستند. اگر $AC=2AB$ آن‌گاه $BH=2CH'$.

به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.

۱۰- اگر $\frac{2c+1}{4}=\frac{b-3}{3}=\frac{3a}{2}$ و $3a+b+2c=11$ باشد، مقادیر a، b و c را به دست آورید. (مشابه تمرین صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)

۱۱- اگر برای اعداد غیر صفر a، b و c داشته باشیم: $\frac{b+2c}{a}=\frac{a+2b}{c}=\frac{2a+c}{b}$، آن‌گاه حاصل $\frac{(a+2b)(b+2c)(2a+c)}{abc}$ را به دست آورید.

۱۲- اگر $\frac{4}{5}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ باشد، حاصل $\frac{3a-2c+8}{3b-2d+10}$ را به دست آورید.

۱۳- پاره‌خط AB به طول ۱۵ و دو نقطهٔ C و D را روی این پاره‌خط طوری در نظر می‌گیریم که $3=\frac{BD}{AD}=\frac{AC}{CB}$ باشد. طول پاره‌خط DC را به دست آورید.

۱۴- طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ باشد. (تمرین صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)

۱۵- اگر M واسطهٔ هندسی بین دو عدد ۲، ۸ و N واسطهٔ هندسی ۹ و M باشد، واسطهٔ هندسی M و N را بیابید.

۱۶- ثابت کنید در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع برابر عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن‌هاست. (فعالیت صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی)

۱۷- ثابت کنید هرگاه ارتفاع‌های نظیر دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها به آن‌ها وارد می‌شود. (فعالیت صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی)

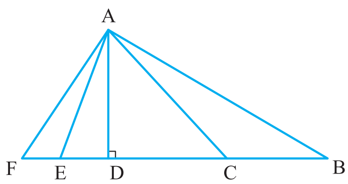
۱۸- ثابت کنید اگر در دو مثلث، یک رأس مشترک و قاعده‌های مقابل به این رأس‌ها روی یک خط باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌ها است. (کار در کلاس صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی)

۱۹- ثابت کنید اگر دو مثلث قاعدهٔ مشترک داشته باشند و رأس روبه‌روی این قاعده‌ها روی خطی موازی قاعده باشد، مساحت این دو مثلث برابر است.

۲۰- طول ارتفاع‌های یک مثلث ۱۲، ۱۵، ۳۳ و طول کوچک‌ترین ضلع آن ۱۱ است. محیط این مثلث را به دست آورید.

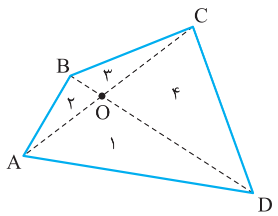
۲۱- ثابت کنید هر میانه در مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌کند. (کار در کلاس صفحهٔ ۳۲ کتاب درسی)

۲۲- در شکل زیر رأس همهٔ مثلث‌ها در A مشترک است. نسبت مساحت‌های مثلث‌های داده‌شده را بنویسید. (کار در کلاس صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی)

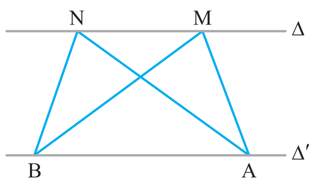


الف) $\frac{S_{\overset{\Delta}{AEF}}}{S_{\overset{\Delta}{AFC}}}$ ب) $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABF}}}$

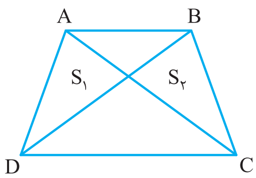
۲۳- در چهارضلعی محدب شکل مقابل، با رسم قطرها ۴ مثلث ایجاد می‌شود. ثابت کنید: $S_1.S_3=S_2.S_4$. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



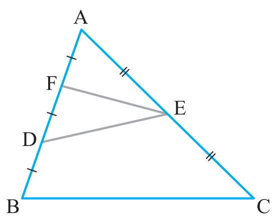
۲۴- در شکل مقابل، اگر Δ و Δ' موازی باشد و مساحت مثلث ABM برابر ۲۰ باشد و $NB=4$، فاصلهٔ A تا ضلع NB چه‌قدر است؟ (مشابه تمرین صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)



۲۵- در ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل قطرها رسم شده‌اند، ثابت کنید: $S_1=S_2$. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



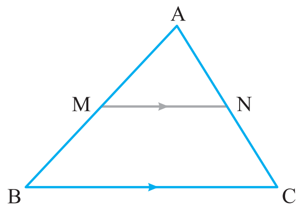
۲۶- در مثلث ABC مطابق شکل، E وسط AC و $AF=DF=BD$ است. ثابت کنید مساحت مثلث DEF، $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است.



۲ قضیهٔ تالس

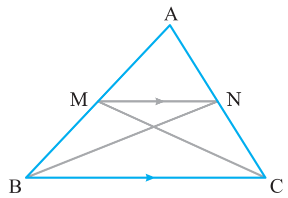
آقای تالس دانشمند و ریاضی‌دان متولد قبل از میلاد مسیح و حتی قبل از آقای فیثاغورس بوده که کلی نظریه داشته. یکی از آن‌ها، معروف به قضیهٔ تالس است. توی این درس می‌خوایم قضیهٔ تالس و هر چی مربوط به اون می‌شه رو یاد بگیریم.

قضیهٔ تالس



هرگاه در مثلثی، خطی موازی یکی از اضلاع رسم کنیم تا دو ضلع دیگر را قطع کند، آن‌گاه چهار پاره‌خطِ ایجادشده روی این دو ضلع متناسب‌اند، مثلاً در مثلث ABC مقابل داریم:

$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$



اثبات برای اثبات این قضیه: ابتدا دو خط NB و MC را رسم می‌کنیم. می‌دانیم اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده‌های آن‌ها روی یک خط باشد، نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است، پس در مثلث‌های AMN و MNC که در رأس M مشترک و هم ارتفاع‌اند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}}=\frac{AN}{NC} \quad (۱)$$

به همین ترتیب نسبت مساحت‌های مثلث‌های AMN و MNB که در رأس M مشترک و هم‌ارتفاع‌اند، برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}}=\frac{AM}{MB} \quad (۲)$$

از طرفی چون در مثلث‌های MNB و MNC، قاعدهٔ MN مشترک و فاصلهٔ B و C از قاعدهٔ MN یکسان است ($MN \parallel BC$)، پس:

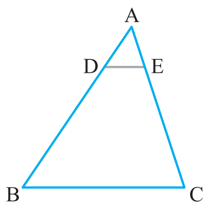
$$S_{\overset{\Delta}{MNB}}=S_{\overset{\Delta}{MNC}}$$

در نتیجه $\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}}=\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}}$ و طبق روابط (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB} \text{ (قضیهٔ تالس)}$$

مثال در شکل مقابل، $DE \parallel BC$، $AD=۱$، $DB=۳$ و $AE=۰/۸$، به کمک قضیهٔ تالس طول AC را به دست آورید.

(کار در کلاس صفحهٔ ۳۴ کتاب درسی)

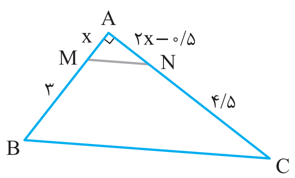


پاسخ طبق تالس اگر $DE \parallel BC$ باشد، داریم:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{۰/۸}{EC} \Rightarrow EC=۲/۴ \Rightarrow AC=AE+EC=۰/۸+۲/۴=۳/۲$$

مثال در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است. به کمک قضیهٔ تالس، مقدار x و سپس مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۳۴ کتاب درسی)



پاسخ وجود دوتا خط موازی در یک شکل باید سریع ما را به یاد قضیهٔ تالس بیندازد:

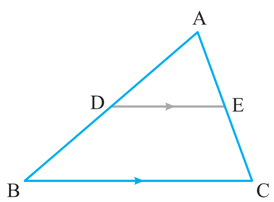
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{۲x-۰/۵}{۴/۵}=\frac{x}{۳} \Rightarrow ۶x-۱/۵=۴/۵x \Rightarrow x=۱$$

پس اضلاع AB و AC به ترتیب برابر ۴ و ۶ است و مساحت ABC برابر است با:

$$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{۴\times۶}{۲}=۱۲$$

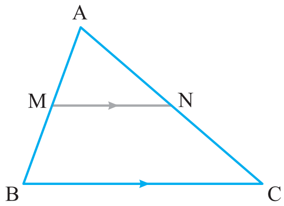
نتایج قضیهٔ تالس

به کمک ویژگی‌های تناسب، قضیهٔ تالس به شکل‌های زیر هم نوشته می‌شود که خیلی هم کاربرد دارند:



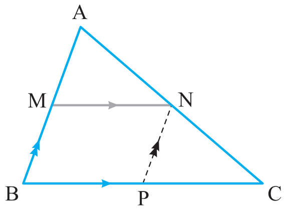
$$DE \parallel BC \Rightarrow \text{الف)}\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \text{ (جزء‌به‌کل)} \qquad \text{ب)}\ \frac{BD}{AB}=\frac{EC}{AC} \text{ (جزء‌به‌کل)}$$

تعمیم قضیهٔ تالس



اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی تشکیل می‌شود که اندازهٔ ضلع‌های آن با ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند. مثلاً در مثلث ABC مقابل، خط MN دو ضلع AB و AC را قطع کرده و با BC موازی است. نسبت اضلاع مثلث AMN و ABC را ببینید:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$



اثبات: برای اثبات این قضیه، مطابق شکل از نقطهٔ N خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در P قطع کند. چون داشتیم $MN \parallel BC$ و حالا می‌دانیم $AB \parallel NP$، در نتیجه چهارضلعی با داشتن دو ضلع روبه‌روی موازی MNPB متوازی‌الاضلاع است و اضلاع مقابل با هم برابرند: $MN = BP$ (*)

حالا یک بار در مثلث ABC و با پاره‌خط‌های موازی MN و BC و بار دیگر در مثلث ABC و با پاره‌خط‌های موازی NP و AB تالس جزءبه‌کل را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC} & (۱) \\ NP \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{BP}{BC} & (۲) \end{cases}$$

از رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

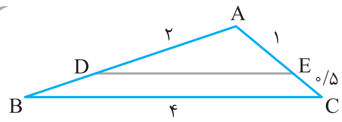
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{BP}{BC}$$

و چون طبق (*)، مقدار BP برابر MN بود، پس:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \quad \text{(تعمیم قضیهٔ تالس)}$$

توجه دقت کنید تعمیم قضیهٔ تالس معمولاً جاهایی استفاده می‌شود که طول پاره‌خط‌های موازی مدنظر سؤال باشد.

مثال در شکل مقابل: $DE \parallel BC$. طول‌های DE و AB را به دست آورید. *(تمرین صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی)*

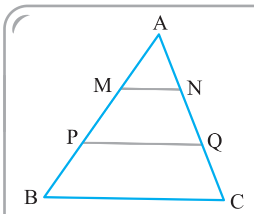


پاسخ طول پاره‌خط موازی DE را می‌خواهیم پس از تعمیم تالس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۱}{۱/۵}=\dfrac{۲}{AB} \Rightarrow AB=۳ \\ \dfrac{۱}{۱/۵}=\dfrac{DE}{۴} \Rightarrow DE=\dfrac{۸}{۳} \end{cases}$$

یکم سؤال‌ها رو سخت‌تر کنیم:

مثال در شکل مقابل، $AM = MP = PB$ و $MN \parallel PQ \parallel BC$ است. ثابت کنید: $MN + PQ = BC$.



پاسخ کافی است دو بار تعمیم قضیهٔ تالس را بنویسیم. ببینید:

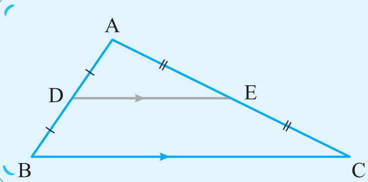
$$\overset{\Delta}{APQ}: MN \parallel PQ \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AP}=\frac{MN}{PQ} \xrightarrow[AP=۲AM]{AM=MP} \frac{۱}{۲}=\frac{MN}{PQ} \Rightarrow ۲MN = PQ \ (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \xrightarrow[AB=۳AM]{AM=MP=PB} \frac{۱}{۳}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow ۳MN = BC \ (۲)$$

حالا طبق (۱) و (۲) داریم:

$$MN + PQ = MN + ۲MN = ۳MN = BC$$

نکته در مثلث ABC مقابل، اگر از D در وسط ضلع AB پاره‌خط DE را موازی ضلع BC رسم کنیم، آن‌گاه از E وسط AC می‌گذرد و پاره‌خط DE نصف ضلع BC است:



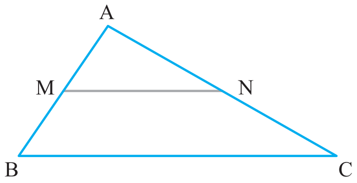
$$AD = DB, DE \parallel BC \Rightarrow AE = EC, \frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۲}$$

عکس قضیهٔ تالس

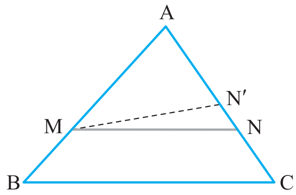
تالس یک قضیهٔ دوشرطی است و عکس آن هم همواره برقرار است، یعنی:

«اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.»

مثلاً در مثلث روبه‌رو، اگر خط MN، ضلع‌های AB و AC را قطع کند و رابطهٔ $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ برقرار باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که: $MN \parallel BC$



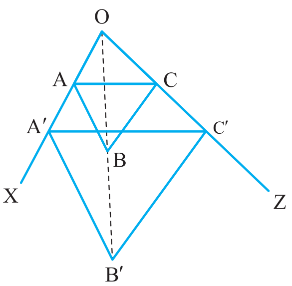
اثبات: برای اثبات این قضیه از **برهان خلف** استفاده می‌کنیم. در مثلث زیر می‌دانیم: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$.
فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد و داشته باشیم $MN \nparallel BC$.
پس می‌توانیم از نقطهٔ M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم کنیم. به طوری که N' منطبق بر N نباشد، حالا با توجه به قضیهٔ تالس داریم:



$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC}=\frac{AM}{AB}$$

از مقایسهٔ این تناسب با فرض مسئله داریم $\frac{AN'}{AC}=\frac{AN}{AC}$ پس باید: $AN=AN'$ و N بر N' منطبق باشد، پس MN' همان MN است و موازی BC است.

مثال: در شکل مقابل، می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$، با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$.
(تمرین صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی)



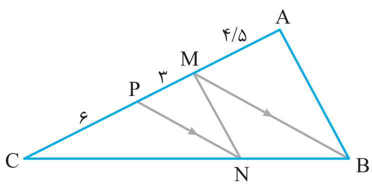
پاسخ: باید قضیهٔ تالس را برای دو جفت مثلث بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{OA'B'} \Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{OA}{AA'}=\frac{OB}{BB'} \\ \overset{\Delta}{OC'B'} \Rightarrow BC \parallel B'C' \Rightarrow \frac{OC}{CC'}=\frac{OB}{BB'} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA}{AA'}=\frac{OC}{CC'}$$

حالا طبق عکس قضیهٔ تالس در مثلث $OA'C'$ داریم:

$$\frac{OA}{AA'}=\frac{OC}{CC'} \Rightarrow AC \parallel A'C'$$

مثال: در شکل زیر $PN \parallel MB$، با توجه به اندازه‌های روی شکل ثابت کنید: $AB \parallel MN$.
(مشابه تمرین صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی)



پاسخ: اگر $MB \parallel PN$ باشد طبق تالس در مثلث CMB داریم:

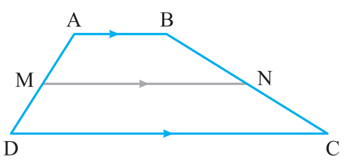
$$\frac{CN}{CB}=\frac{CP}{CM}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

از طرفی طبق اندازه‌های روی شکل می‌دانیم: $\frac{CM}{CA}=\frac{۹}{۱۳/۵}=\frac{۲}{۳}$ (۲).

پس طبق روابط (۱) و (۲): $\frac{CN}{CB}=\frac{CM}{CA}=\frac{۲}{۳}$ و با استفاده از عکس قضیهٔ تالس می‌توانیم بگوییم در مثلث ABC داریم: $MN \parallel AB$.

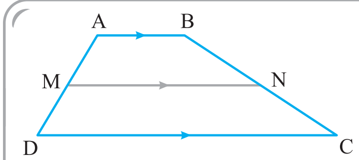
تالس در ذوزنقه

در هر ذوزنقه، اگر خطی موازی دو قاعدهٔ آن رسم شود، روی ساق‌ها، پاره‌خط‌های متناظر متناسب ایجاد می‌کند، مثلاً در ذوزنقهٔ ABCD روبه‌رو داریم:

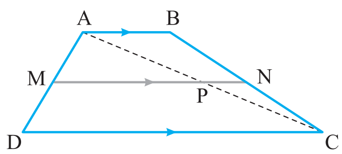


$$AB \parallel MN \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$

مثال: قضیهٔ تالس را در ذوزنقهٔ مقابل ثابت کنید.
(تمرین صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی)



پاسخ: برای اثبات قضیهٔ تالس در ذوزنقهٔ ABCD، ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم سپس در مثلث‌های ایجادشده قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:

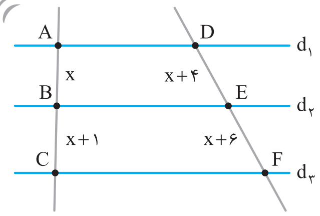


$$\overset{\Delta}{ABC}: AB \parallel PN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CN}{BN}=\frac{CP}{AP} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{BN}{CN}=\frac{AP}{CP} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ADC}: MP \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MD}=\frac{AP}{CP} \quad (۲)$$

حالا طبق (۱) و (۲) داریم: $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$

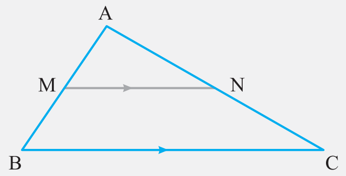
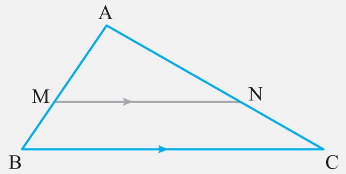
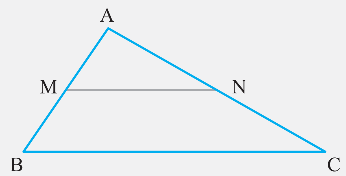
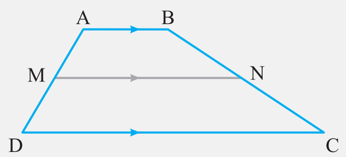
مثال در شکل روبه‌رو $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$. مقدار x را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*



پاسخ اگر $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$، پس می‌توانیم بگوییم که شکل ACFD یک ذوزنقه است، آن‌گاه طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم:

$$AD \parallel BE \parallel CF \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+4}{x+6} \Rightarrow x^2 + 6x = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow x = 4$$

جمع‌بندی *بیایید یه بار هر چی از تالس یاد گرفتیم رو مرور کنیم.*

قضیهٔ تالس		$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} 1)\ \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} & \text{(جزءبه‌جزء)} \\ 2)\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} & \text{(جزءبه‌کل)} \end{cases}$
تعمیم تالس		$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
عکس تالس		$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$
تالس در ذوزنقه		$AB \parallel MN \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

درامتحان چه‌خبر؟

بریم ببینیم از تالس چه سؤال‌هایی توی امتحان‌ها میاد:

تیپ۱ ساده‌ترین تیپ سؤال در این درس، مربوط به اثبات خود قضیه‌ها یا درستی و نادرستی فرمول‌های اصلی است. *کاری نداره!* فقط باید به درس‌نامهٔ این کتاب مسلط باشید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۲۷ تا ۳۸ و ۴۸

تیپ۲ یک مثلث با یک‌سری اضلاع معلوم و مجهول و صد البته یک یا چند خط موازی داخل آن وجود دارد که شما باید مقادیر مجهول را به دست بیاورید. گفتیم هر جا خط‌های موازی داخل مثلث دیدید به تالس یا تعمیم آن مشکوک شوید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۳۹ تا ۴۷ و ۴۹

تیپ۳ تیپ آخر سؤالات این درس هم مربوط به تالس در ذوزنقه است که هم باید اثبات آن را بلد باشید و هم بتوانید از رابطهٔ درس‌نامه سؤال‌های کمی سخت‌تر را حل کنید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۵۰ تا ۵۲

سؤال‌های امتحانی

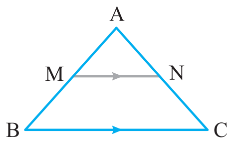
جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۲۷- اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن چهار پاره‌خط متناسب ایجاد کند، آن‌گاه با ضلع سوم .... است.

۲۸- اگر در مثلث ABC، MN را موازی BC رسم کنیم، آن‌گاه:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\overset{\text{(الف)}}{\cdots\cdots\cdots}}{AC} = \frac{MN}{\underset{\text{(ب)}}{\cdots\cdots\cdots}}$$

در شکل مقابل، پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. *(تمرین صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی)*



۲۹- $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC}$

۳۰- $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

۳۱- $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

۳۲- $\frac{AM}{BM}=\frac{MN}{BC}$

۳۳- $\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}$

۳۴- $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{CA}=\frac{MN}{BC}$

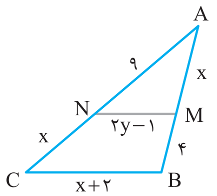
۳۵- $\frac{MB}{AB}=\frac{MN}{BC}$

۳۶- $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

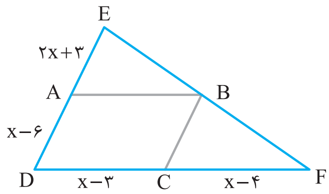
۳۷- $AM\times NC=AN\times MB$

۳۸- قضیهٔ تالس و عکس آن را بیان و اثبات کنید.

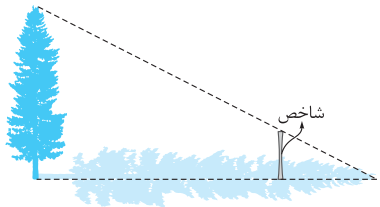
۳۹- در شکل روبه‌رو، $MN \parallel BC$، مقادیر x و y را به دست آورید. (تمرین صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی)



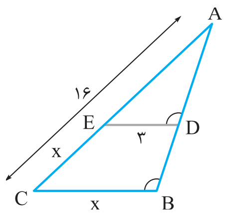
۴۰- در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. مقدار x را محاسبه کنید.



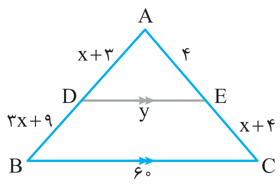
۴۱- در شکل روبه‌رو، اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چه‌قدر است؟ (تمرین صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی)



۴۲- در شکل روبه‌رو، زاویه‌های B و D برابرند. مقدار x را به دست آورید.



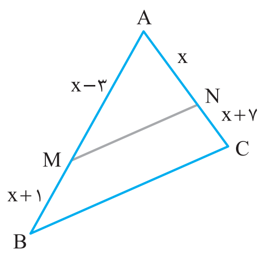
۴۳- محیط چهارضلعی DECB را بیابید. (مشابه تمرین صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی)



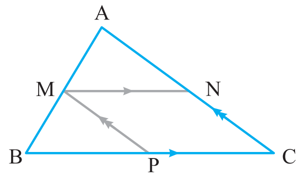
۴۴- در شکل روبه‌رو، اگر $MN \parallel BC$ باشد، آن‌گاه: (مشابه تمرین صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی)

الف) طول ضلع AC را به دست آورید.

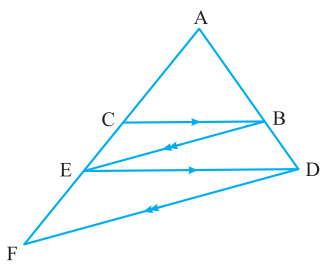
ب) اگر $MN=۱۰$ باشد، طول ضلع BC را بیابید.



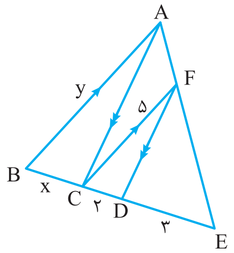
۴۵- در مثلث ABC، از نقطهٔ M روی ضلع AB دو خط موازی اضلاع BC و AC رسم شده است. ثابت کنید: $\frac{MN}{BC}+\frac{MP}{AC}=۱$. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



۴۶- در شکل مقابل می‌دانیم $DE \parallel BC$ و $DF \parallel BE$. به کمک قضیهٔ تالس ثابت کنید که AE واسطهٔ هندسی بین AC و AF است. (تمرین صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی)



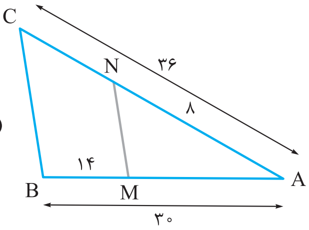
۴۷- در شکل مقابل، مقادیر x و y را به دست آورید. (مشابه تمرین صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی)



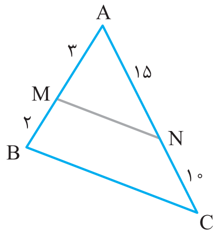
۴۸- ثابت کنید، خطی که از وسط یک ضلع از مثلث موازی ضلع دیگر رسم می‌شود، از وسط ضلع مقابل می‌گذرد و اندازهٔ آن، نصف ضلع موازی است.

۴۹- با دلیل مشخص کنید در کدام‌یک از شکل‌های زیر $MN \parallel BC$ است؟ (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

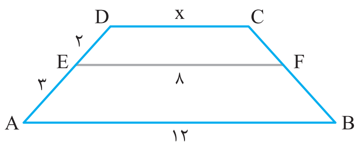
ب)



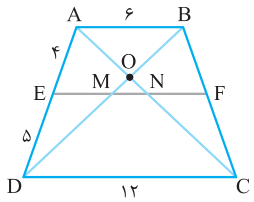
الف)



۵۰- در شکل روبه‌رو اگر $AB \parallel EF \parallel CD$ باشد، طول DC را به دست آورید.



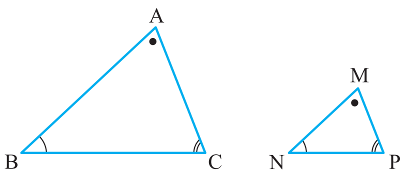
۵۱- در ذوزنقهٔ ABCD، $AB \parallel EF$ است، اندازهٔ MN را بیابید. (مشابه تمرین صفحهٔ ۳۷ کتاب درسی)



۵۲- ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی دو قاعده است و طول آن برابر میانگین طول‌های دو قاعدهٔ ذوزنقه است. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۳ تشابه مثلث‌ها

از آموخته‌های سال‌های قبل می‌دانیم دو مثلث زمانی با هم متشابه‌اند که زاویه‌های برابر و اندازهٔ ضلع‌های متناسب داشته باشند. *حالا این یعنی چی؟* یعنی اگر دو مثلث ABC و MNP متشابه باشند، همواره داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{M}, \hat{B}=\hat{N}, \hat{C}=\hat{P} \\ \dfrac{AB}{MN}=\dfrac{AC}{MP}=\dfrac{BC}{NP}=k \end{cases}$$

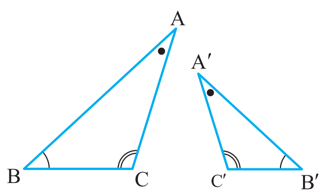
پس اگر مثلث MNP را بگیریم و اضلاع آن را k برابر کنیم یا برعکس، ABC را بگیریم و اضلاع را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم به مثلث دیگر می‌رسیم.

به k یا $\frac{1}{k}$ که همان نسبت اضلاع نظیر در مثلث‌های متشابه است، نسبت تشابه می‌گوییم.

توجه *بیایید برای نوشتن نسبت اضلاع متناسب در دو مثلث همین اول درس یه قانون بذاریم که دیگه قاطی نکنیم!*

«زاویه‌های مساوی در دو مثلث را پیدا کنید و اضلاع روبه‌رو به آن‌ها را در یک کسر قرار دهید.» *فقط حواستون باشه*، همیشه صورت کسرها متعلق به یک مثلث و مخرج‌ها متعلق به مثلث دیگر است.

مثلاً در مثلث‌های مقابل، A و A' برابرند، پس: $\frac{BC}{B'C'}$. B و B' برابرند، پس: $\frac{AC}{A'C'}$ و C و C' برابرند، پس: $\frac{AB}{A'B'}$. در نتیجه داریم:



$$\dfrac{\overset{\text{رو به } \hat{A}}{BC}}{\underset{\text{رو به } \hat{A}'}{B'C'}}=\dfrac{\overset{\text{رو به } \hat{B}}{AC}}{\underset{\text{رو به } \hat{B}'}{A'C'}}=\dfrac{\overset{\text{رو به } \hat{C}}{AB}}{\underset{\text{رو به } \hat{C}'}{A'B'}} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \text{اضلاع } \overset{\Delta}{ABC} \\ \Rightarrow \text{اضلاع } \overset{\Delta}{A'B'C'} \end{matrix}$$

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- $(\frac{7}{3})$

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\xrightarrow{\text{عکس}}\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{b+a}{a}=\frac{4+3}{3}=\frac{7}{3}$$

۲- (۱۴)

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=\frac{a+b+c}{\underbrace{2+5+7}_{14}}=\frac{3}{2}$$

۳- $b^2=ac$

۴- ارتفاع‌های

۵- نسبت ارتفاع‌های نظیر آن قاعده‌ها

۶- درست

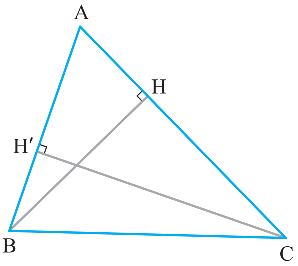
۷- درست

۸- نادرست

مجموع زوایا	کوچک‌ترین زاویه
۱۲	۱
180°	x

$$\Rightarrow x=\frac{180^\circ}{12}=15^\circ$$

۹- نادرست، نسبت ارتفاع‌ها عکس نسبت اضلاع نظیر است.



$$\frac{AC}{AB}=2\Rightarrow\frac{BH}{CH'}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BH=\frac{1}{2}CH'$$

۱۰- طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{3a}{2}=\frac{b-3}{3}=\frac{2c+1}{4}=\frac{3a+b-3+2c+1}{2+3+4}$$

$$=\frac{\overbrace{3a+b+2c}^{11}-2}{9}=\frac{9}{9}=1$$

حالا هر کسر را می‌توانیم برابر ۱ قرار دهیم:

$$\frac{3a}{2}=1\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

$$\frac{b-3}{3}=1\Rightarrow b=6$$

$$\frac{2c+1}{4}=1\Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

۱۱- طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{2a+c}{b}=\frac{a+2b}{c}=\frac{b+2c}{a}=\frac{2a+c+a+2b+b+2c}{a+b+c}$$

$$=\frac{3a+3b+3c}{a+b+c}=3$$

حالا کسر مورد نظر صورت سؤال برابر است با:

$$\frac{(a+2b)(b+2c)(2a+c)}{abc}=\frac{a+2b}{c}\times\frac{b+2c}{a}\times\frac{2a+c}{b}$$

$$=3\times3\times3=27$$

۱۲- **روش اول** اگر در یک تناسب، صورت و مخرج در عدد ثابتی ضرب شود، آن نسبت تغییر نمی‌کند؛ یعنی در این‌جا:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{3a}{3b}=\frac{4}{5}\\ \frac{c}{d}&=\frac{-2c}{-2d}=\frac{4}{5}\\ \frac{2\times4}{2\times5}&=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}\end{aligned}\right\}\xrightarrow[\text{تناسب}]{\text{طبق ویژگی‌ها}}\frac{3a-2c+8}{3b-2d+10}=\frac{4}{5}$$

روش دوم

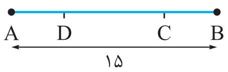
نکته

اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ باشد، هر نسبت خطی از صورت‌ها به روی **همان** نسبت خطی در مخرج‌ها برابر k است، یعنی مثلاً:

$$\frac{na+mc}{nb+md}=k$$

حالا در این سؤال هم می‌بینید که صورت و مخرج کسرهای نسبت در یک عدد خاص ضرب شده‌اند، پس داریم: $\frac{3a-2c+8}{3b-2d+10}=\frac{4}{5}$

۱۳- مطابق شکل روبه‌رو داریم:



$$\frac{AC}{CB}=3\Rightarrow AC=3BC$$

$$AC+CB=AB=15\Rightarrow BC=\frac{15}{4}$$

به همین ترتیب: $AD=\frac{15}{4}$

پس مقدار DC برابر است با:

$$AD+CB+DC=15\Rightarrow DC=15-2\times\frac{15}{4}=\frac{15}{2}$$

۱۴- اگر طول پاره‌خط را b در نظر بگیریم، داریم:

$$8,b,10\Rightarrow b^2=8\times10=80\Rightarrow b=\sqrt{80}$$

۱۵- M واسطهٔ هندسی بین ۲ و ۸ است؛ پس:

$$M^2=2\times8=16\Rightarrow M=4$$

N هم واسطهٔ هندسی بین M و ۹ است و داریم:

$$N^2=9\times M=9\times4=36\Rightarrow N=6$$

حالا اگر واسطهٔ هندسی بین M و N برابر P باشد:

$$P^2=4\times6=24\Rightarrow P=\sqrt{24}$$

۱۶- به صفحهٔ ۳۵ درس‌نامه مراجعه شود.

۱۷- به صفحهٔ ۳۵ درس‌نامه مراجعه شود.

۱۸- به صفحهٔ ۳۵ درس‌نامه مراجعه شود.

۱۹- به صفحهٔ ۳۶ درس‌نامه مراجعه شود.

۲۰- کوچک‌ترین ضلع مثلث همیشه روبه‌روی بزرگ‌ترین ارتفاع است، پس:

$$a=11\Rightarrow h_a=33$$

حالا طول دو ضلع دیگر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a} \Rightarrow \frac{۱۱}{b}=\frac{۱۲}{۳۳} \Rightarrow b=\frac{۱۲۱}{۴}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a} \Rightarrow \frac{۱۱}{c}=\frac{۱۵}{۳۳} \Rightarrow c=\frac{۱۲۱}{۵}$$

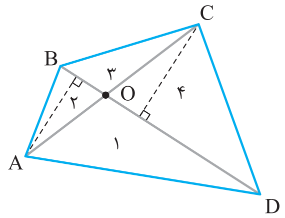
پس محیط مثلث برابر است با:

$$P=a+b+c=۱۱+\frac{۱۲۱}{۴}+\frac{۱۲۱}{۵}=۶۵/۴۵$$

۲۱- به نکتهٔ صفحهٔ ۳۵ درسنامه مراجعه شود.

۲۲- الف) $\frac{S_{\overset{\Delta}{AEF}}}{S_{\overset{\Delta}{AFC}}}=\frac{FE}{FC}$ ب) $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABF}}}=\frac{DC}{BF}$

۲۳- در چهارضلعی مقابل:



مثلث‌های BOC و DOC رأس مشترک و ارتفاع‌های یکسان دارند:

$$\frac{S_۳}{S_۴}=\frac{BO}{DO} \quad (۱)$$

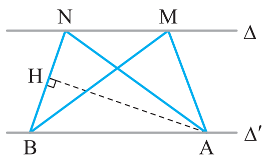
مثلث‌های ABO و ADO رأس مشترک و ارتفاع‌های یکسان دارند:

$$\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{BO}{DO} \quad (۲)$$

طبق (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{S_۳}{S_۴}=\frac{S_۲}{S_۱} \Rightarrow S_۱.S_۳=S_۲.S_۴$$

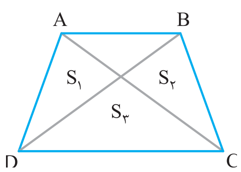
۲۴- در شکل زیر، $\Delta' \parallel \Delta$، N و M روی Δ است و قاعده‌های مثلث‌های NBA و MBA روی یک خط قرار دارند، پس مساحت این مثلث‌ها با هم برابر است و داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABN}}=S_{\overset{\Delta}{ABM}}=\frac{۱}{۲}AH\times NB=۲۰$$

$$\xrightarrow{NB=۴} AH=۱۰$$

۲۵- در ذوزنقهٔ ABCD زیر، داریم $AB \parallel CD$ پس مساحت مثلث‌های ADC و BDC برابر است، بنابراین:



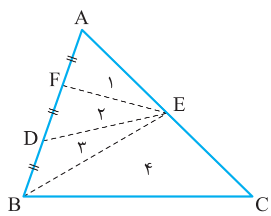
$$S_{\overset{\Delta}{ADC}}=S_{\overset{\Delta}{BDC}}$$

$$\Rightarrow S_۱+\cancel{S_۳}=S_۲+\cancel{S_۳}$$

$$\Rightarrow S_۱=S_۲$$

۲۶- در مثلث ABC زیر، از E به B وصل می‌کنیم:

در سه مثلث، (۱) (۲) و (۳) قاعده‌ها و ارتفاع برابرند. پس مساحت‌های آن با هم برابر است:



$$S_۱=S_۲=S_۳$$

$$\Rightarrow ۳S_۲=S_{\overset{\Delta}{ABE}} \quad (۱)$$

از طرفی چون AE = EC، پس: $S_{\overset{\Delta}{ABE}}=S_{\overset{\Delta}{BEC}}=\frac{۱}{۲}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$

طبق (۱) داریم: $۳S_۲=\frac{۱}{۲}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow S_۲=\frac{۱}{۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$

۲۷- موازی

۲۸- الف) AN ب) BC

۲۹- نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

۳۰- درست ۳۱- درست

۳۲- نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$$

۳۳- درست

۳۴- نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

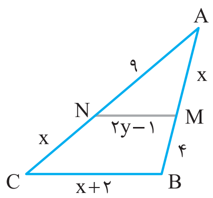
۳۵- نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$$

۳۶- درست ۳۷- درست

۳۸- به صفحهٔ ۳۸ و ۳۹ درس‌نامه مراجعه شود.

۳۹- اگر $MN \parallel BC$، آن‌گاه طبق تالس جزء‌به‌جزء در مثلث ABC روبه‌رو داریم:



$$\frac{AN}{CN}=\frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}$$

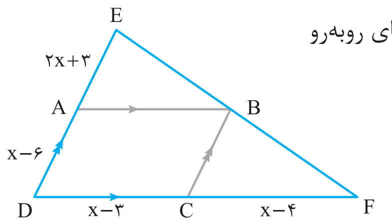
$$\Rightarrow x^۲=۳۶ \Rightarrow x=۶$$

حالا برای به دست آوردن مقدار y تالس جزء‌به‌کل می‌نویسیم:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۹}{۶+۹}=\frac{۲y-۱}{۶+۲} \Rightarrow \frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}$$

$$\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۲۴}{۵} \Rightarrow y=۲/۹$$

۴۰- در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل مقابل، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند، پس داریم:



$$AB \parallel DF \xrightarrow[\text{جزءبه‌جزء}]{\text{تالس}} \frac{۲x+۳}{x-۶}=\frac{EB}{BF} \quad (۱)$$

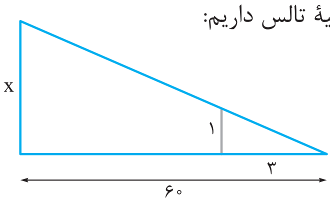
$$BC \parallel ED \xrightarrow[\text{جزءبه‌جزء}]{\text{تالس}} \frac{x-۴}{x-۳}=\frac{BF}{EB} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق (۱) و (۲)}} \frac{۲x+۳}{x-۶}=\frac{x-۳}{x-۴}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۲x^۲-۵x-۱۲=x^۲-۹x+۱۸$$

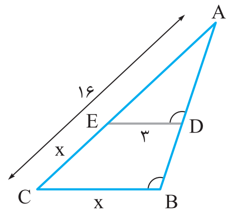
$$\Rightarrow x^۲+۴x-۳۰=۰ \Rightarrow x=\frac{-۴+\sqrt{۱۳۶}}{۲}$$

۴۱- مطابق اطلاعات مسئله، در شکل ساده‌شدهٔ زیر، شاخص و درخت موازی‌اند، پس طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{۳}{۶۰}=\frac{۱}{x} \Rightarrow x=۲۰\,m$$

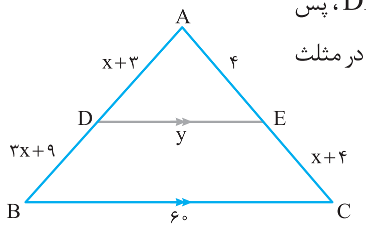
۴۲- در مثلث ABC زیر داریم: $\hat{B}=\hat{D}$ آن‌گاه طبق عکس قضیهٔ موازی مورب می‌توانیم بگوییم $ED \parallel CB$؛ بنابراین طبق قضیهٔ تعمیم قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{۱۶-x}{۱۶}=\frac{۳}{x} \Rightarrow ۱۶x-x^{۲}-۴۸=۰$$

$$x^{۲}-۱۶x+۴۸=۰ \Rightarrow x=۱۲,۴$$

۴۳- مطابق شکل، $DE \parallel BC$، پس طبق قضیهٔ تالس (جزءبه‌جزء) در مثلث ABC داریم:



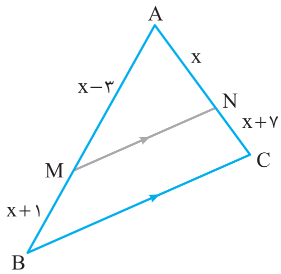
$$\frac{x+۳}{۳x+۹}=\frac{۴}{x+۴} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{۴}{x+۴} \Rightarrow x=۸$$

$$\xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{y}{۶۰}=\frac{۴}{۱۶} \Rightarrow y=۱۵$$

و محیط چهارضلعی DECB برابر است با:

$$P=۱۵+۱۲+۶۰+۳۳=۱۲۰$$

۴۴- الف) می‌دانیم $MN \parallel BC$ است، پس در مثلث ABC، از رابطهٔ تالس جزءبه‌جزء مقدار x را به دست می‌آوریم:



$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{x-۳}{x+۱}=\frac{x}{x+۷}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+x=x^{۲}+۴x-۲۱ \Rightarrow x=۷$$

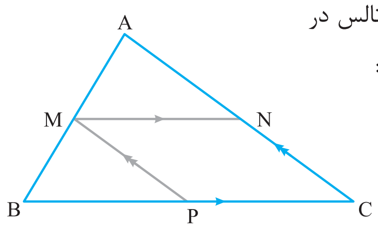
ضلع $AC=x+x+۷=۲۱$

ب) چون اندازهٔ یکی از اضلاع موازی را خواسته، از رابطهٔ تعمیم تالس استفاده می‌کنیم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{x}{x+x+۷}=\frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{BC} \Rightarrow BC=۳۰$$

۴۵- طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC مقابل داریم:



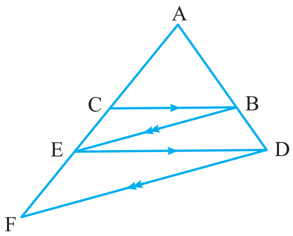
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB} \quad (۱)$$

$$MP \parallel AC \Rightarrow \frac{MP}{AC}=\frac{MB}{AB} \quad (۲)$$

حالا اگر دو طرف رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، داریم:

$$\frac{MN}{BC}+\frac{MP}{AC}=\frac{AM}{AB}+\frac{MB}{AB}=\frac{AM+MB}{AB}=\frac{AB}{AB}=۱$$

۴۶- مطابق شکل مقابل، با استفاده از قضیهٔ تالس در دو مثلث ADE و ADF داریم:



$$\overset{\Delta}{ADE}: BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD} \quad (۱)$$

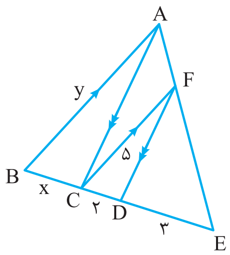
$$\overset{\Delta}{ADF}: BE \parallel FD \Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AD} \quad (۲)$$

چون طرف دوم روابط (۱) و (۲) هم با هم برابرند می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^{۲}=AC\times AF$$

یعنی AE واسطهٔ هندسی بین AC و AF است.

۴۷- چون در مثلث AEB، $AC \parallel DF$ و $CF \parallel AB$ پس EC واسطهٔ هندسی ED و EB است و داریم:



$$(EC)^{۲}=ED\times EB$$

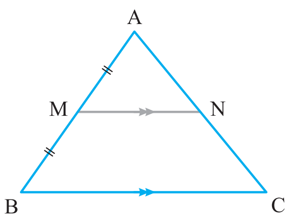
$$\Rightarrow ۵^{۲}=۳\times(۵+x) \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$

حالا طبق تعمیم قضیهٔ تالس در $\overset{\Delta}{AEB}$ داریم:

$$FC \parallel AB \Rightarrow \frac{EC}{EB}=\frac{FC}{y}$$

$$\Rightarrow y=\frac{\frac{۲۵}{۳}\times ۵}{۵}=\frac{۲۵}{۳}$$

۴۸- در مثلث ABC مقابل، M را وسط AB در نظر گرفته و از M خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در N قطع کند، آن‌گاه:

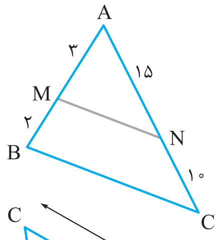


$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

$$\xrightarrow{AB=۲AM} \frac{۱}{۲}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

چون $AC=۲AN$، پس N وسط AC است و همچنین داریم $MN=\frac{۱}{۲}BC$.

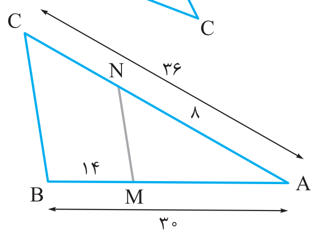
۴۹- باید طبق عکس قضیهٔ تالس نسبت ضلع‌های متناظر برابر باشد، در نتیجه:



الف)

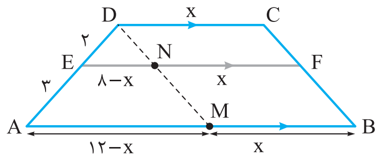
$$\frac{۳}{۲} \boxed{=} \frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow MN \parallel BC$$

ب)



$$\frac{۲}{۹} = \frac{۸}{۳۶} \boxed{\neq} \frac{۳۰-۱۴}{۳۰} = \frac{۱۶}{۳۰} = \frac{۸}{۱۵} \Rightarrow MN \nparallel BC$$

۵۰- برای حل این سؤال ابتدا از رأس D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AB را در M قطع کند، چون $DC \parallel MB$ و $DM \parallel CB$ است؛ پس DCBM متوازی‌الاضلاع است و داریم: $DC = NF = MB = x$، حالا قضیهٔ تالس را در مثلث AMD می‌نویسیم:

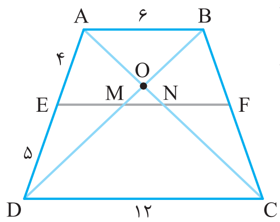


$$\overset{\Delta}{AMD}: EN \parallel AM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{۲}{۵} = \frac{۸-x}{۱۲-x}$$

$$\Rightarrow ۲۴-۲x = ۴۰-۵x \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳}$$

۵۱- می‌دانیم در هر ذوزنقه، قاعده‌ها با هم موازی‌اند، پس طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$AB \parallel EF \parallel DC$$



حالا طبق تعمیم تالس در مثلث‌های ADC و ADB داریم:

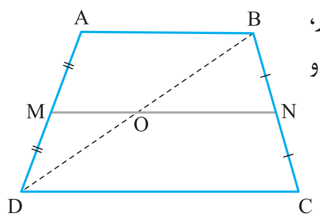
$$\overset{\Delta}{ADC}: EN \parallel DC \Rightarrow \frac{۴}{۹} = \frac{EN}{۱۲} \Rightarrow EN = \frac{۱۶}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ADB}: EM \parallel AB \Rightarrow \frac{۵}{۹} = \frac{EM}{۶} \Rightarrow EM = \frac{۱۰}{۳}$$

پس مقدار MN برابر است با:

$$MN = EN - EM = \frac{۱۶}{۳} - \frac{۱۰}{۳} = ۲$$

۵۲- در ذوزنقهٔ ABCD زیر، MN از وسط ساق‌های BC و AD می‌گذرد.



حکم: $MN \parallel AB\,,\, MN \parallel CD\,,\, MN = \frac{AB+CD}{۲}$

برای اثبات این حکم، ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم. طبق عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MN \parallel AB \parallel DC$$

از طرفی در دو مثلث ABD و BDC تعمیم تالس را می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{ABD}: MO \parallel AB \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{MO}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{AB}{۲} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{BCD}: NO \parallel CD \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{NO}{DC} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow NO = \frac{DC}{۲} \quad (۲)$$

$$(۱)+(۲) = MO + NO = MN = \frac{AB+DC}{۲}$$

۵۳- نسبت تشابه

۵۴- متشابه

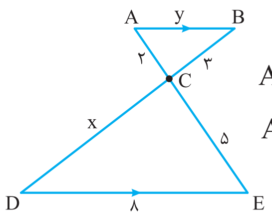
۵۵- متناسب

۵۶- به صفحهٔ ۴۴ درس‌نامه مراجعه شود.

۵۷- به صفحهٔ ۴۴ درس‌نامه مراجعه شود.

۵۸- به صفحهٔ ۴۶ درس‌نامه مراجعه شود.

۵۹- طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم:



$$AB \parallel DE, BD \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$$

$$AB \parallel DE, AE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A} = \hat{E}$$

پس دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DCE}$ به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند:

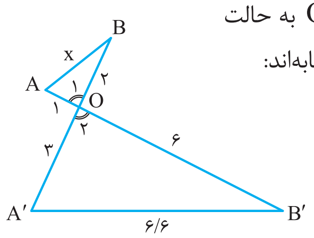
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{E}\\ \hat{B} = \hat{D}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{زاویه}]{\text{برابری دو}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DCE}$$

در نتیجه نسبت اضلاع آن‌ها متناسب است:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{x} \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۲}$$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{y}{۸} \Rightarrow y = ۳/۲$$

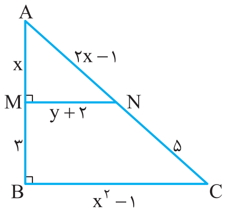
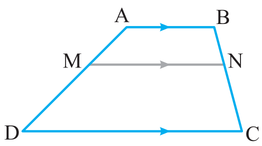
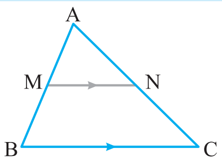
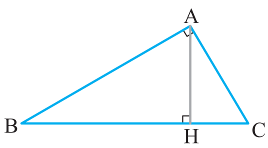
۶۰- دو مثلث OAB و $OA'B'$ به حالت تناسب دو ضلع و زاویهٔ بین متشابه‌اند:

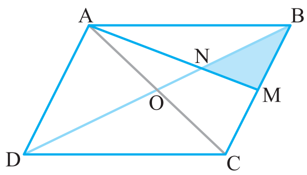
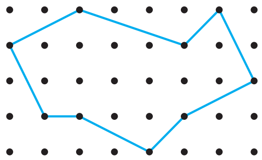
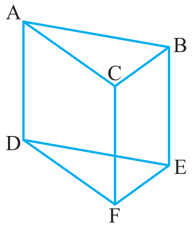
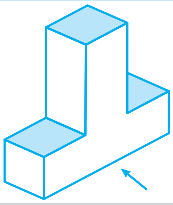


$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲\\ \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{و برابری زاویهٔ بین}]{\text{تناسب دو ضلع}} \overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{OA'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow AB = x = \frac{۶/۶}{۳} = ۲/۲$$

نمونه آزمون نیم‌سال دوم		رشته: ریاضی و فیزیک		هندسه ۱ (دهم)	
ردیف	امتحان شمارهٔ ۶	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳	Kheilisabz.com	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. الف) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب، ۳۶۰ درجه است. ب) در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با نسبت ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است. پ) اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، آن چهارضلعی مستطیل است. ت) در فضا دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارات (کلمات) مناسب کامل کنید. الف) عمودمنصف وتر یک دایره از .... دایره می‌گذرد. ب) اگر نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه $\frac{۹}{۲۵}$ باشد، در این صورت نسبت تشابه برابر با .... است. پ) واسطهٔ هندسی مثبت بین دو عدد ۳ و ۱۲ برابر با .... است. ت) شکل حاصل از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع .... می‌باشد. ث) خط راستی که اشتراک دو صفحهٔ متقاطع است، .... آن دو صفحه نامیده می‌شود.	۱/۲۵
۳	با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.	۱
۴	روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید. (با رسم شکل)	۱
۵	آیا گزارهٔ «هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، همنهشت‌اند.» درست است؟ چرا؟	۰/۵
۶	در شکل مقابل، مقادیر x و y را بیابید. 	۱/۲۵
۷	در ذوزنقهٔ زیر MN با قاعده‌ها موازی است. با رسم قطر AC، تناسب داده‌شده را ثابت کنید: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ 	۰/۷۵
۸	قضیهٔ اساسی تشابه: در شکل زیر MN موازی BC است. ثابت کنید مثلث AMN با مثلث ABC متشابه است. 	۱/۵
۹	در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر ثابت کنید دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و به کمک آن نشان دهید AH واسطهٔ هندسی بین BH و HC است. 	۱/۷۵
۱۰	طول اضلاع یک مثلث ۷، ۸ و ۱۲ سانتی‌متر بوده و طول بزرگ‌ترین ضلع مثلثی متشابه با آن ۱۶ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.	۱
۱۱	ثابت کنید در متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.	۰/۷۵
۱۲	ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر، نصف اندازهٔ وتر است.	۱/۲۵
۱۳	در یک لوزی، اندازهٔ هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.	۱/۲۵

۱۴	در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، M وسط ضلع BC بوده و پاره‌خط AM قطر BD را در نقطهٔ N قطع کرده است. نشان دهید: $S_{\overset{\triangle}{BNM}} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$ 	۱/۲۵
۱۵	با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت شکل زیر را محاسبه کنید. 	۱
۱۶	در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید. الف) دوران یک مستطیل حول طول آن. ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویهٔ قائمه.	۱/۲۵
۱۷	منشور سه‌پهلوی روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) یک خط متنافر با CF نام ببرید. ب) یک خط موازی با CF نام ببرید. پ) دو صفحهٔ موازی نام ببرید. 	۰/۷۵
۱۸	الف) سطح مقطع استوانه با صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟ تصویر مناسبی رسم کنید. ب) در شکل مقابل نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید. 	۱/۵
	جمع نمرات	۲۰

۱- الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

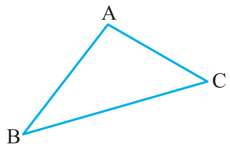
پ) نادرست (۰/۲۵) ت) نادرست (۰/۲۵)

۲- الف) مرکز (۰/۲۵) ب) $\frac{۳}{۵}$ (۰/۲۵)

پ) ۶ (۰/۲۵) ت) مستطیل (۰/۲۵)

ث) فصل مشترک (۰/۲۵)

۳-



$$\begin{cases} A > B & \text{فرض} \\ BC > AC & \text{حکم} \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

در صورتی که حکم برقرار نباشد، دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

حالت اول اگر $BC = AC$، در این صورت $\hat{A} = \hat{B}$ که خلاف فرض است. (۰/۲۵)

حالت دوم اگر $BC < AC$، در این صورت $\hat{A} < \hat{B}$ که این نیز خلاف فرض است. (۰/۲۵)

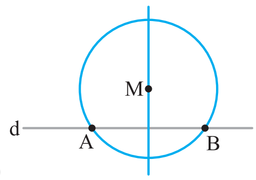
بنابراین حکم ثابت است. (۰/۲۵)

۴-

مرحله اول به مرکز نقطهٔ M، دایره‌ای به گونه‌ای رسم کنید که خط d را در دو نقطهٔ A و B قطع کند. (۰/۲۵)

مرحله دوم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید. (۰/۲۵)

مرحله سوم عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که از نقطهٔ M می‌گذرد و بر خط d عمود است. (۰/۲۵)



(۰/۲۵)

۵-

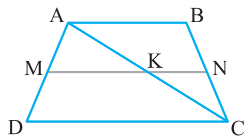
خیر. (۰/۲۵) به عنوان مثال، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع قائمهٔ ۴ و ۶ با مثلث متساوی‌الساقینی با اندازهٔ قاعدهٔ ۸ و اندازهٔ ساق ۵ دارای مساحت‌های برابرند ولی این دو مثلث با یکدیگر همنهشت نیستند. (۰/۲۵)

۶-

$$\begin{cases} MN \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow \underbrace{MN \| BC}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{x = ۳}_{(۰/۲۵)}$$

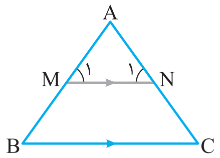
$$\underbrace{(*)\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{y = ۲}_{(۰/۲۵)}$$

۷-



$$\begin{cases} MK \| CD \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KC} \quad (۰/۲۵) \\ KN \| AB \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{BN}{NC} \quad (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \quad (۰/۲۵)$$

۸-

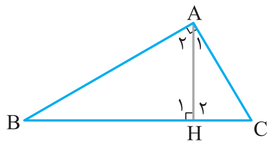


$$(*) \begin{cases} ۱)\ MN \| BC ,\ \overset{\text{مورب}}{AB} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{B} \quad (۰/۲۵) \\ ۲)\ MN \| BC ,\ \underset{\text{مورب}}{AC} \Rightarrow \hat{N}_۱ = \hat{C} \quad (۰/۲۵) \\ ۳)\ \hat{A} = \hat{A} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$(**)\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (۰/۵)$$

طبق تعریف دو مثلث متشابه، مثلث‌های AMN و ABC متشابه می‌باشند و اثبات قضیه کامل می‌شود. (۰/۲۵)

۹-



$$(*) \begin{cases} \hat{B} = \hat{A}_۱ \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ \\ \hat{C} = \hat{A}_۲ \end{cases} \quad (۰/۵) \Rightarrow \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \quad (۰/۷۵)$$

$$\Rightarrow AH^۲ = BH \times HC \quad (۰/۲۵)$$

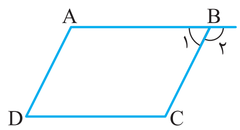
۱۰-

۱) نسبت تشابه $k = \frac{۱۲}{۱۶} = \frac{۳}{۴}$ (۰/۲۵)

۲) $\frac{P_۱}{P_۲} = \frac{۳}{۴}$ (۰/۲۵)

۳) $\frac{۲۷}{P_۲} = \frac{۳}{۴}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow P_۲ = ۳۶$ (۰/۲۵)

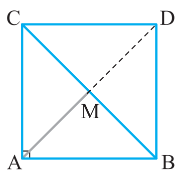
۱۱-



$$\begin{cases} AB \| CD, \overset{\text{مورب}}{BC} \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{C} \quad (۰/۲۵) \\ \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \quad (۰/۲۵)$$

۱۲-



راه حل اول:

۱- فرض کنید AM میانهٔ وارد بر وتر BC باشد، AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ D برسیم. (۰/۲۵)

۲- در چهارضلعی ABCD، از آن‌جا که قطرها یکدیگر را نصف کرده‌اند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. (۰/۲۵)

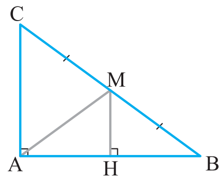
۳- متوازی‌الاضلاعی که یک زاویهٔ ۹۰ درجه دارد، مستطیل است.

(۰/۲۵)

۴- در مستطیل قطرها با هم برابرند (۰/۲۵) و لذا خواهیم داشت:

$BC = AD \Rightarrow \frac{BC}{2} = AM$ (۰/۲۵)

راه حل دوم:



از نقطهٔ M عمود MH را بر ضلع AB رسم می‌کنیم. (۰/۲۵) در این صورت داریم:

(۰/۲۵)

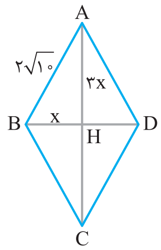
$\hat{H} = \hat{A} = 90 \Rightarrow MH \parallel AC$

$\xrightarrow{\text{بنا به قضیهٔ تالس}} \frac{BM}{MC} = \frac{BH}{AH} = 1 \Rightarrow BH = AH$ (۰/۲۵)

بنابراین نتیجه می‌گیریم M روی عمودمنصف AB است (۰/۲۵) و لذا:

$AM = BM \Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$ (۰/۲۵)

۱۳-



$\frac{BD}{AC} = \frac{1}{3}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} BH = x \\ AH = 3x \end{cases}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow AB^2 = x^2 + 9x^2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = 2$ (۰/۲۵)

$BD = 4 \, , \, AC = 12$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BD = AC = 24$ (۰/۲۵)

۱۴-

۱- نقطهٔ N محل همرسی میانه‌های AM و OB است. (۰/۲۵)

۲- از آن‌جا که میانه‌های یک مثلث همرس‌اند، میانهٔ نظیر ضلع AB نیز از N می‌گذرد. (۰/۲۵)

۳- میانه‌های یک مثلث، آن را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.

(۰/۲۵)

۴- بنابراین مساحت مثلث MNB، $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است.

(۰/۲۵)

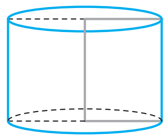
۵- از آن‌جا که مساحت مثلث ABC، $\frac{1}{2}$ مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است، بنابراین مساحت مثلث MNB، $\frac{1}{12}$ مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است. (۰/۲۵)

۱۵-

$\begin{cases} S = \frac{b}{2} - 1 + i \ (0/25) \\ b = 9, i = 13 \ (0/5) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{9}{2} - 1 + 13 = 16/5$ (۰/۲۵)

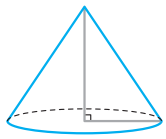
۱۶- الف) استوانه (۰/۲۵)

(۰/۲۵)



ب) مخروط (۰/۲۵)

(۰/۵)



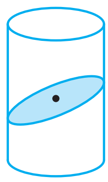
۱۷-

الف) AB یا DE (۰/۲۵)

ب) AD یا BE (۰/۲۵)

پ) DEF و ABC (۰/۲۵)

۱۸- الف) بیضی (۰/۲۵)



(۰/۵)

ب)