

راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

فیلم آموزشی

گام

اول

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Code های صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

درسنامه آموزشی

گام

دوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. کلیه نکات کنکوری و راهکارهای میان‌بر و تستی مورد نیاز آورده شده است.
۴. تمام تیپ‌های مهم و کنکوری و نیز تمام مطالب کتاب درسی، اعم از فعالیت‌ها، تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها و ... در مثال‌های درسنامه پوشش داده شده است.
۵. در هر جا که لازم بوده است، مباحث شاگرد و معلم به زبان محاوره‌ای آورده شده است.

پرسش‌های تشریحی

گام

سوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. تمام تمرین‌ها، مثال‌ها و حتی متن کتاب درسی و نیز سؤالات امتحانات نهایی سال‌های قبل که با مباحث کنونی انطباق دارند، پوشش داده شده است.
۴. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گام

چهارم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تمام تمرین‌ها، مثال‌ها و حتی متن کتاب درسی به صورت تست آورده شده است.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی بوده و تمامی نکات درسی دوباره در پاسخ تست‌ها گنجانده شده است.
۷. تست‌های واجب با علامت **★** و تست‌های دشوار با علامت **★** مشخص شده است.

به جای آن که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

درسنامه آموزشی

فصل اول: آمار و احتمال

- قسمت اول: اصول شمارش ۱۰
- قسمت دوم: تبدیل - ترکیب ۱۳
- قسمت سوم: احتمال (۱) ۱۵
- قسمت چهارم: احتمال (۲) ۲۲
- قسمت پنجم: چرخه آمار در حل مسائل ۲۵

فصل دوم: الگوهای خطی

- قسمت اول: مدل سازی و دنباله ۳۱
- قسمت دوم: دنباله های حسابی (عددی) ۳۶

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

- قسمت اول: دنباله هندسی ۴۶
- قسمت دوم: ریشه n ام و توان های گویا ۵۴
- قسمت سوم: تابع نمایی ۶۱

FILM

فصل اول: آمار و احتمال

- جلسه اول: اصول شمارش - تبدیل - ترکیب 140 min
- جلسه دوم: احتمال (۱) و (۲) 106 min
- جلسه سوم: چرخه آمار در حل مسائل 60 min

فصل دوم: الگوهای خطی

- جلسه چهارم: مدل سازی و دنباله 115 min
- جلسه پنجم: دنباله های حسابی (عددی) 112 min

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

- جلسه ششم: دنباله هندسی 55 min
- جلسه هفتم: ریشه n ام و توان های گویا 43 min
- جلسه هشتم: تابع نمایی 32 min

پرسش‌های تشریحی

فصل اول: آمار و احتمال

- قسمت اول: اصول شمارش ۱۶۱
- قسمت دوم: تبدیل - ترکیب ۱۶۳
- قسمت سوم: احتمال (۱) ۱۶۴
- قسمت چهارم: احتمال (۲) ۱۶۹
- قسمت پنجم: چرخه آمار در حل مسائل ۱۶۹

فصل دوم: الگوهای خطی

- قسمت اول: مدل سازی و دنباله ۱۹۵
- قسمت دوم: دنباله‌های حسابی (عددی) ۱۹۸

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

- قسمت اول: دنباله هندسی ۲۰۶
- قسمت دوم: ریشه n ام و توان‌های گویا ۲۰۹
- قسمت سوم: تابع نمایی ۲۱۱

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول: آمار و احتمال

- قسمت اول: اصول شمارش ۶۵
- قسمت دوم: تبدیل - ترکیب ۶۸
- قسمت سوم: احتمال (۱) ۶۹
- قسمت چهارم: احتمال (۲) ۷۵
- قسمت پنجم: چرخه آمار در حل مسائل ۷۷

فصل دوم: الگوهای خطی

- قسمت اول: مدل سازی و دنباله ۱۰۳
- قسمت دوم: دنباله‌های حسابی (عددی) ۱۰۷

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

- قسمت اول: دنباله هندسی ۱۲۶
- قسمت دوم: ریشه n ام و توان‌های گویا ۱۳۱
- قسمت سوم: تابع نمایی ۱۳۵

فصل ۱

قسمت اول

اصول شمارش

اصل ضرب و اصل جمع

مفاهیم اولیه این بخش مربوط می‌شود به دو اصل مهم به نام‌های اصل جمع و اصل ضرب که با آن‌ها آشنا می‌شوید.

اصل جمع: اگر فقط یک کار (یک عمل) را بتوان به k یا m یا ... یا n حالت مختلف انجام داد، آن‌گاه تعداد کل حالت‌های انجام آن کار برابر است با:

$$k + m + \dots + n$$

حرف «یا» در سؤالات، نشان‌دهنده اصل جمع است. مثلاً فرض کنید محسن برای رفتن از منزل به دانشکده بتواند از یکی از ۵ خط تاکسی یا یکی از ۳ خط مترو یا یکی از ۸ خط اتوبوس استفاده کند، تعداد کل حالت‌هایی که محسن می‌تواند به دانشکده برود برابر است با:

$$16 = 8 + 3 + 5 = \text{تعداد حالت‌ها}$$

اتوبوس
مترو
تاکسی

در این مثال، محسن نمی‌توانست هم‌زمان از هر سه وسیله نقلیه استفاده کند و برای رفتن به دانشکده فقط باید یکی از وسایل نقلیه را انتخاب کند، به همین علت از اصل جمع استفاده کرده‌ایم.

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم، هر کدام از این m طریق به n روش مختلف انجام‌پذیر باشند در کل، آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است (اصل ضرب قابل تعمیم به بیش‌تر از ۲ مرحله نیز می‌باشد).

تست شکل زیر، مسیرهای دوطرفه بین شهرهای A, B, C, D را نمایش می‌دهد. فردی می‌خواهد از شهر A به شهر D برود و برگردد به طوری که در مسیر برگشت از راه‌هایی که رفته استفاده نکند. او به چند حالت می‌تواند این کار را انجام دهد؟



۱۴۴ (۲)

۱۲۰ (۱)

۹۴ (۴)

۸۰ (۳)

پاسخ: در مسیر رفت او باید ابتدا به B ، سپس به C و در نهایت به D برود. چون باید این کارها را پشت سر هم انجام دهد از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. در مسیر برگشت از راه‌های بین هر دو شهر یکی را حذف می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \text{تعداد حالت‌های مسیر رفت} &= 2 \times 3 \times 4 = 24 \\ \text{تعداد حالت‌های مسیر برگشت} &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های رفت و برگشت} = 24 \times 6 = 144 \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

نکته در آزمون‌های چندگزینه‌ای اگر پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی باشد، تعداد کل حالت‌های پاسخ‌گویی طبق اصل ضرب برابر است با:

تعداد سؤالات (تعداد گزینه‌ها)

ولی اگر پاسخ‌گویی به سؤالات الزامی نباشد، تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

تعداد سؤالات (+۱ تعداد گزینه‌ها)

تست به یک آزمون ۲ گزینه‌ای که شامل ۳۰ سؤال است به چند حالت مختلف می‌توان جواب داد؟ (فرض کنید باید به همه سؤالات جواب بدهیم).

۱۵^۲ (۴)

۲۱۵ (۳)

۳۰^۲ (۲)

۳^{۳۰} (۱)

گزینه (۱) درست است. $\Rightarrow 2^{30} = \text{تعداد سؤالات} = \text{تعداد حالت‌های جواب دادن به آزمون}$

پاسخ:

تست یک کارخانه خودروسازی، در خودروهای خود از ۲ نوع گیربکس، ۳ نوع موتور با حجم‌های مختلف و ۵ رنگ مختلف استفاده می‌کند. چند نوع خودرو با ویژگی‌های بالا تولید خواهد شد؟

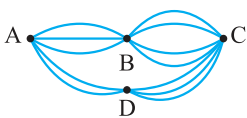
۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: باید از اصل ضرب استفاده کنیم چون می‌توانیم به طور هم‌زمان از تمام موارد مطرح‌شده برای تولید خودرو استفاده کنیم: $\Rightarrow 2 \times 3 \times 5 = 30 = \text{تعداد انواع خودروها}$ گزینه (۲) صحیح است.



نکته گاهی اوقات در یک مسئله، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می‌کنیم. به شکل مقابل توجه کنید، فرض کنید شخصی می‌خواهد از شهر A به C سفر کند. او دو مسیر کلی را می‌تواند انتخاب کند مسیر $(A \rightarrow B \rightarrow C)$ یا مسیر $(A \rightarrow D \rightarrow C)$. این حرف «یا» اصل جمع را نشان می‌دهد. حالا فرد هر مسیری را که انتخاب کند باید حالت‌های مختلف بین دو شهر را در هم ضرب کنیم:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \text{ مسیر } = 3 \times 4 = 12$$

$$A \rightarrow D \rightarrow C \text{ مسیر } = 2 \times 3 = 6 \xrightarrow{\text{اصل جمع}} C \text{ به } A \text{ تعداد کل حالت‌های مسیر رفت از } A \text{ به } C = 12 + 6 = 18$$

دیدید که در این مثال، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده شد.

نماد فاکتوریل: اگر n عددی طبیعی باشد، $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ یعنی برای یافتن فاکتوریل یک عدد طبیعی باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود ضرب کنیم، به عنوان مثال می‌توان گفت:

$$1! = 1, 2! = 2 \times 1 = 2, 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24, 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

توجه قرارداد می‌کنیم که $0! = 1$

تذکره گاهی اوقات لازم نیست فاکتوریل یک عدد را تا 1 باز کنیم. در این‌گونه موارد کافی است هر جا که متوقف می‌شویم علامت فاکتوریل بگذاریم.

معمولاً در کسرهای این اتفاق می‌افتد. یعنی لازم نیست تمام عددهایی را که فاکتوریل دارند تا 1 باز کنیم مثلاً در کسر $\frac{10!}{8!}$ کافی است 10 را تا 8 باز کنیم:

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

$$\text{مثال دیگر: } \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

در چند مورد زیر، حاصل، اشتباه محاسبه شده است؟

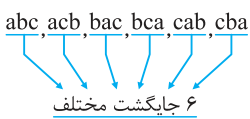
$\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = n+2$ (ت)	$5! - 3! = 2!$ (پ)	$\frac{6!}{2! \times 4!} = 15$ (ب)	$5! \times 3! = 15!$ (آ)
۱ (۴)	۲ (۳)	۳ (۲)	۴ (۱)

پاسخ: قسمت‌های (آ) و (پ) اشتباه محاسبه شده‌اند. چون نمی‌توانیم عددها را با علامت فاکتوریل در هم ضرب کنیم یا از هم کم کنیم. بلکه باید حاصل $5!$ و $3!$ را در هم ضرب کنیم، هم‌چنین باید حاصل $5!$ را منهای حاصل $3!$ کنیم:

$$5! \times 3! = 120 \times 6 = 720 \Rightarrow \text{برابر نیست. } 5! - 3! = 120 - 6 = 114 \Rightarrow \text{برابر نیست. } 2! \text{ با } 114$$

$$\frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = 15, \quad \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = n+2 \Rightarrow \text{گزینه (۳) درست است.}$$

جایگشت



مفهوم جایگشت: جایگشت یعنی نحوه قرار گرفتن در کنار هم، یعنی افراد، اشیا و ... به صورت‌های مختلف می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. به هر یک از حالت‌های ممکن برای قرار گرفتن n شیء متمایز در کنار هم، یک جایگشت از آن شیء می‌گوییم. به عنوان مثال می‌خواهیم جایگشت‌های حروف a, b, c را بنویسیم، یعنی می‌خواهیم تمام کلماتی را که با این حروف می‌توان ساخت، بنویسیم؛ این کلمات عبارتند از:

نکته تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$. مثلاً تعداد جایگشت‌های مختلف که با حروف کلمه «NASER» می‌توان ساخت برابر است با:

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

و یا تعداد جایگشت‌هایی که با ارقام $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ می‌توان ساخت برابر است با:

هم‌چنین ۴ دوست به نام‌های مریم، زهرا، فریماه و نازنین به $4!$ حالت یعنی به ۲۴ حالت مختلف می‌توانند کنار هم در یک صف قرار گیرند.

تست تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را بر تعداد جایگشت‌های $(n-2)$ شیء متمایز دیگر تقسیم کرده‌ایم، حاصل برابر ۲ شده است. مقدار n کدام است؟

۳ (۴)	۴ (۳)	۱ (۲)	۲ (۱)
-------	-------	-------	-------

پاسخ:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 2 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 2 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 & \text{(قق)} \\ n = -1 & \text{(غقق)} \end{cases}$$

توجه کنید که n فقط باید عدد طبیعی باشد. بنابراین گزینه (۱) درست است.

نکته معمولاً بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و ... از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم. در این مسائل اگر شرایط خاصی مثل زوج یا فرد بودن عدد مطرح باشد ابتدا اولین خانه سمت راست را پُر کنیم و سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ برویم و خانه‌ها را از چپ به راست پُر کنیم. (البته تشخیص این‌که از کدام خانه پُر کردن را شروع کنیم زیاد دشوار نیست).

تست با ارقام ۰، ۱، ۴، ۷، ۸، چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۹۶ (۱) ۸۶ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۱۸ (۴)

پاسخ: در متن سوال در مورد زوج یا فرد بودن و یا شرط دیگری صحبت نشده، (فقط می‌خواهیم عددهای ۵ رقمی بسازیم) پس خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم، فقط دقت کنید پس از پُر کردن هر خانه، باید یکی از ارقام استفاده‌شده را به دلخواه حذف کنیم زیرا در متن سؤال گفته شده تکرار مجاز نیست. ضمناً دقت کنید که هیچ عددی با صفر شروع نمی‌شود. پس از پُر کردن هر خانه، در خانه بعدی باید به دلخواه یکی از ارقامی را که استفاده شده خط بزیم:

گزینه (۱) درست است. $\Rightarrow 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ = تعداد عددهای مطلوب \Rightarrow

تست با ارقام ۰، ۶، ۷، ۸، ۹، چند عدد ۴ رقمی فرد می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۲۴ (۱) ۲۸ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴)

پاسخ: می‌دانیم در اعداد فرد، یکان حتماً باید رقمی فرد باشد، لذا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گزینه (۳) درست است. $\Rightarrow 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ = تعداد عددها \Rightarrow

نکته اگر صفر جزء ارقام داده شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد، باید دو حالت جداگانه تشکیل دهیم یکی وقتی که یکان صفر باشد و دیگری وقتی که یکان صفر نباشد. پس از یافتن تعداد حالت‌های هر قسمت، جواب‌ها را طبق اصل جمع با هم جمع می‌کنیم.

تست با ارقام ۰، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، چند عدد ۳ رقمی زوج می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۴۹ (۱) ۸۰ (۲) ۶۳ (۳) ۵۲ (۴)

پاسخ: صفر جزء رقم‌ها است و باید عدد زوج بسازیم، ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز است. پس دو حالت جداگانه در نظر می‌گیریم:

گزینه (۴) درست است. $\Rightarrow 20 + 32 = 52$ = تعداد کل اعداد مطلوب \Rightarrow

تذکر مهم اگر در همین تست گفته می‌شد تکرار ارقام مجاز است، دیگر هیچ رقمی را خط نمی‌زدیم و ضمناً با یک حالت مسئله را حل می‌کردیم (به شکل مقابل توجه کنید).

$\Rightarrow 5 \times 6 \times 3 = 90$ = جواب \Rightarrow

نکته در بعضی سؤالات گفته می‌شود اشیا یا افراد خاصی همواره باید کنار هم قرار بگیرند. در این‌گونه سؤالات آن اشیا یا افراد را یک شیء فرض می‌کنیم، یعنی آن‌ها را داخل یک بسته قرار می‌دهیم. سپس تعداد اشیا بیرون بسته و تعداد خود بسته‌ها را شمرده و جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم و آن را در جایگشت تعداد اشیا داخل بسته ضرب می‌کنیم. مثلاً می‌خواهیم با حروف کلمه «RAMSIN» کلماتی بسازیم که در آن‌ها حروف M و S همواره کنار هم باشند: $M \cdot S, R, A, I, N \Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب $= 5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$

تست با حروف «ق»، «ب»، «ن»، «ح» و «و» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت که حروف نقطه‌دار در آن‌ها همیشه کنار هم باشند؟

۲۸ (۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴)

پاسخ: گزینه (۴) درست است. $\Rightarrow 3! \times 3! = 6 \times 6 = 36$ = تعداد کلمات مطلوب \Rightarrow و، ح، ق، ب، ن

قسمت دوم

فصل

۱

تبدیل - ترکیب

تبدیل

فرض کنید n شیء متمایز موجود است و می‌خواهیم r شیء از آن‌ها را طوری انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم، مهم باشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $P(n, r)$ نشان داده و به صورت روبه‌رو محاسبه می‌کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

از بین ۷ نفر شرکت‌کننده در مسابقه دو میدانی، به چند حالت می‌توان به ۳ نفر اول جایزه داد؟

۳۰۰ (۴) ۲۱۰ (۳) ۱۸۰ (۲) ۲۶۰ (۱)

پاسخ: در مسابقات، ترتیب انتخاب افراد برنده مهم است؛ لذا از فرمول تبدیل استفاده می‌کنیم:

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

نفر سوم ← ۷
نفر دوم ← ۶
نفر اول ← ۵

البته باز هم می‌توانستیم از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم:

گزینه (۳) درست است. $\Rightarrow 7 \times 6 \times 5 = 210 =$ تعداد حالت‌ها \Rightarrow

تست

شرکتی با ۳۰ نوع گزینش، برای استخدام یک فروشنده و یک کارمند اداری روبه‌رو شده است. داوطلبان این مشاغل چند نفر بوده‌اند؟

۶۰ (۴) ۱۲ (۳) ۳۰ (۲) ۶ (۱)

پاسخ: تعداد افراد را n فرض می‌کنیم. پس باید از بین n نفر، ۲ نفر را انتخاب کنیم:

$$P(n, 2) = 30 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 30 \Rightarrow \underbrace{n^2 - n - 30}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow (n-6)(n+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=6 & (\text{قق}) \\ n=-5 & (\text{غقق}) \end{cases} \Rightarrow \text{گزینه (۱) درست است.}$$

البته بدون حل معادله $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$ هم می‌توانستید سؤال را حل کنید یعنی از اعداد گزینه‌ها استفاده کنید و آن‌ها را تک‌تک در معادله قرار دهید فقط اگر $n=6$ باشد، به یک تساوی درست می‌رسید:

$$\frac{6!}{4!} = 30 \Rightarrow 30 = 30$$

ترکیب

فرض کنید n شیء متمایز موجود است و می‌خواهیم r شیء را از بین آن‌ها انتخاب کنیم، به شرطی که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم مهم نباشد، در

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

این صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده و خواهیم داشت:

به چند حالت می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۸ کتاب، برای هدیه دادن انتخاب کنیم؟

۱۴۸ (۴) ۱۲۰ (۳) ۵۶ (۲) ۴۲ (۱)

پاسخ: در این سؤال جابه‌جایی کتاب‌های انتخاب‌شده، مهم نیست، پس از فرمول ترکیب بهره می‌گیریم:

$$\text{گزینه (۲) درست است.} \Rightarrow 56 = \frac{8!}{(8-3)! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1}$$

تست

تست

با ۶ نقطه متمایز روی محیط یک دایره، چند مثلث می توان ساخت؟

- ۲۰ (۱) ۲۸ (۲) ۳۲ (۳) ۳۸ (۴)

پاسخ: هر ۳ نقطه روی محیط دایره، یک مثلث ایجاد می کنند. از طرفی می دانیم مثلث ABC با ACB یا BCA و امثال آن فرقی ندارد (مثلث را هر طور که نام گذاری کنیم، مهم نیست)، پس از فرمول ترکیب استفاده می کنیم:

$$\text{گزینه (۱) درست است.} \Rightarrow \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 20$$

نکته تعداد زیرمجموعه های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ می باشد. دقت دارید که در مجموعه ها جابه جایی اعضا مهم نیست، به همین دلیل از ترکیب استفاده می کنیم.

تست

تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی مجموعه {a, b, c, d, e, f} کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۲۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴)

پاسخ: مجموعه داده شده، ۶ عضو دارد که می خواهیم ۴ تای آن ها را انتخاب کنیم:

$$\text{گزینه (۴) درست است.} \Rightarrow \binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = 15$$

انتخاب اجباری: اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم، به طوری که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند، تعداد حالت های انجام این کار برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می باشد؛ زیرا k شیء قبلاً انتخاب شده اند، پس باید k را هم از r و هم از n کم کنیم.

تست

تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی مجموعه {a, b, c, d, e, f, g, h} به طوری که همه آن ها شامل f باشند، کدام است؟

- ۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴)

پاسخ: حرف f حتماً باید انتخاب شود، پس باید ۴ عضو دیگر را از بین اعضای {a, b, c, d, e, g, h}، یعنی از بین ۷ عضو انتخاب کنیم:

$$\text{گزینه (۳) درست است.} \Rightarrow \binom{8-1}{5-1} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

چند فرمول تستی برای حل مسائل ترکیب: گاهی اوقات نیازی نیست از فرمول ترکیب به شکل $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ به طور کامل استفاده کنیم. بدون اثبات از فرمول های زیر استفاده می کنیم تا سرعت حل کردن مسائل ترکیب را بالا ببریم:

۱) $\binom{n}{n} = 1$ مثال $\binom{8}{8} = 1$, $\binom{12}{12} = 1$ $\Rightarrow \binom{n}{n} = 1$ دو عدد بالا و پایین مساوی باشند.

۲) $\binom{n}{0} = 1$ مثال $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{30}{0} = 1$ $\Rightarrow \binom{n}{0} = 1$ عدد پایینی صفر باشد.

۳) $\binom{n}{1} = n$ مثال $\binom{7}{1} = 7$, $\binom{35}{1} = 35$ $\Rightarrow \binom{n}{1} = n$ عدد پایینی ۱ باشد.

۴) $\binom{n}{n-1} = n$ مثال $\binom{6}{5} = 6$, $\binom{15}{14} = 15$ $\Rightarrow \binom{n}{n-1} = n$ اختلاف دو عدد ۱ باشد.

تست

به چند طریق می توان از بین ۳ استاد و ۴ دانشجو، سه نفر را انتخاب کرد به طوری که حداقل ۲ نفرشان استاد باشند؟

- ۱۳ (۱) ۱۴ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴)

پاسخ: حداقل ۲ استاد، یعنی ۲ استاد یا بیش تر. لذا خواهیم نوشت:

گزینه (۱) درست است. $\Rightarrow \binom{3}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{3}{3} = 3 \times 4 + 1 = 13$

فصل ۱ آمار و احتمال

◀ قسمت اول: اصول شمارش ▶

اصل جمع و اصل ضرب

۱. ☆ فرض کنید یک دانشجو می‌خواهد ۱ درس عمومی از بین ۳ درس عمومی ارائه‌شده و ۱ درس اختصاصی از بین ۴ درس اختصاصی ارائه‌شده انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند ۱ درس عمومی و ۱ درس اختصاصی انتخاب کند؟

- ۱۵ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴)

۲. ☆ به چند طریق می‌توانیم فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس از بین ۵ خودکار بنفش، آبی، قرمز، سبز و مشکی و ۸ مداد با رنگ‌های متمایز و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های مختلف انتخاب کنیم؟

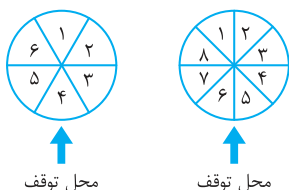
- ۱۲۰ (۱) ۱۶ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۲ (۴)

۳. ☆ اگر شخصی بتواند غذای خود را از بین ۴ نوع سوپ، ۳ نوع ساندویچ، ۵ نوع دسر و ۴ نوع نوشیدنی است انتخاب کند، نفر بعدی چند نوع غذا می‌تواند داشته باشد؟ (هر شخص باید از هر نوع غذا دقیقاً یکی را انتخاب کند.)

- ۲۸۰ (۱) ۲۴۰ (۲) ۴۸ (۳) ۷۲ (۴)

۴. ☆ یک تاس و ۳ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تاس عدد اول آمده، کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۴۸ (۲) ۲۴ (۳) ۸۴ (۴)



۵. ☆ هر دو دایره شکل مقابل را با هم به چرخش درمی‌آوریم. پس از توقف، دایره‌ها به چند حالت می‌توانند بایستند به طوری که دایره سمت چپ روی اعداد زوج و دایره سمت راست روی اعداد مربع کامل بایستند؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۴) ۸ (۳)

۶. ☆ یک دانش‌آموز در کنکور سراسری رشته انسانی، به ۲۸۰ سؤال موجود در دفترچه‌ها به چند طریق می‌تواند پاسخ دهد؟ (پاسخ‌گویی به همه سؤالات الزامی نیست.)

- ۴۲۸۰ (۱) ۲۸۰ (۲) ۵۲۸۰ (۳) ۲۸۰ (۴)

۷. ☆ کلیدهایی با شکل‌های متفاوت، طوری طراحی می‌شوند که برای هر قسمت از آن‌ها الگوهای مختلفی وجود دارد. کلیدهای پراید ۶ قسمت دارند. اگر از ۴ الگو برای هر قسمت استفاده شود، چند طرح مختلف برای کلیدها وجود دارد؟

- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۸. ☆ تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به یک آزمون ۳ سؤالی که هر سؤال ۲ گزینه دارد، چند برابر تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به یک آزمون ۳ سؤالی ۴ گزینه‌ای است؟ (پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی است.)

- ۱ (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۸ (۴)

۹. ☆ مدیرعامل یک شرکت، کارمندان را به دو گروه فعال و ضعیف تقسیم‌بندی کرده است. ۱۲ نفر ضعیف و ۸ نفر فعال هستند. او به چند طریق می‌تواند فقط یک نفر را از یکی از گروه‌ها اخراج کند؟

- ۹۶ (۱) ۲۰ (۲) ۳۲ (۳) ۴۸ (۴)

۱۰. ☆ در تست قبلی اگر مدیرعامل بخواهد از هر گروه یک نفر را اخراج کند، به چند حالت می‌تواند این کار را انجام دهد؟

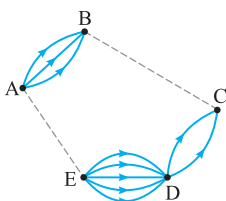
- ۹۶ (۱) ۳۰ (۲) ۲۰ (۳) ۴۸ (۴)

۱۱. ☆ تعداد راه‌های یک طرفه از شهر B به C و از شهر A به E به ترتیب چندتا باشند تا بتوان به ۲۹

طریق مختلف از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ (مسیرها یک‌طرفه هستند.)

- ۲، ۳ (۱) ۵، ۴ (۲)

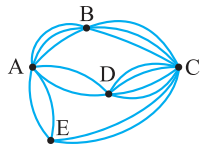
- ۴، ۳ (۳) ۵، ۶ (۴)



۱۲ ☆ یک کارخانه تولید خودرو، خودروهایی در ۷ رنگ، ۳ حجم موتور، ۲ نوع گیربکس و ۲ نوع مختلف داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب خواهد داشت؟

- ۱۴ (۱) ۸۴ (۲) ۲۸ (۳) ۱۲۰ (۴)

۱۳ ☆ در شکل مقابل مسیرهای بین شهرها همگی دوطرفه هستند. به چند حالت می‌توان از شهر A به شهر C رفت و برگشت؟ (در برگشت، از مسیر رفت استفاده نکنیم و از همان شهر قبلی بگذریم.)



- ۱۲۸ (۱) ۱۶۸ (۲) ۹۰ (۳) ۲۱۸ (۴)

۱۴ در تست قبلی به چند حالت می‌توان از شهر D و بدون عبور از شهر B، به شهر E مسافرت کرد؟ (فقط مسیر رفت)

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴)

فاکتوریل

۱۵ ☆ در کدام گزینه، با یک تساوی درست مواجه هستیم؟

- (۱) $5! = (2! + 1!) + 0!$ (۲) $(n+r)! = n! + r!$ (۳) $2\sqrt{3} = \sqrt{4! - 3!} \times \sqrt{3! - 2!}$ (۴) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n^2 + n$

۱۶ رابطه نادرس، کدام است؟

- (۱) $5! = 4! \times 5$ (۲) $5! = 4 \times 5!$ (۳) $5! = 3! \times 4 \times 5$ (۴) $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

۱۷ ☆ اگر $\frac{(x+2)!}{(x+1)!} = 4$ باشد، آن‌گاه حاصل $2x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۸ ☆ معادله $(x^2 - 4)! = 1$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹ مقدار n در عبارت $\frac{(n!)^2}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{2}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

جایگشت افراد، اشیاء، حروف و ارقام

۲۰ ☆ با حروف کلمه «DANESH» چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف S در هر رمز باشد؟ (سراسری-۹۷)

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۲۵۰ (۳) ۲۶۰ (۴) ۲۷۰

۲۱ فرد به نام‌های A، B، C و D می‌خواهند به ترتیب در یک همایش سخنرانی کنند. به چند حالت امکان پذیر است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۴۸

۲۲ به چند طریق برای ۵ نفر شامل افراد X و Y می‌توان برنامه سخنرانی نوشت به طوری که فرد X قبل از فرد Y سخنرانی کند؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۵۰

۲۳ ☆ به چند طریق ۱۰ نفر می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار گیرند به طوری که ۳ نفر به خصوص، همیشه کنار هم باشند؟

- (۱) ۷! (۲) ۸! (۳) $8! \times 3!$ (۴) $7! \times 3!$

۲۴ به چند طریق می‌توان ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب عربی متمایز را در یک قفسه چید به طوری که کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند؟

- (۱) ۳۵۰ (۲) ۱۴۴ (۳) ۲۸۸ (۴) ۲۲۵

۲۵ ☆ به چند طریق ۵ نفر می‌توانند برای سوار شدن به اتوبوس در یک صف قرار گیرند به طوری که دو نفر از آن‌ها از این‌که در کنار هم باشند، خودداری کنند؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۷۲ (۳) ۱۱۶ (۴) ۱۲۰

۲۶ ۴ سرباز و ۲ فرمانده، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند به طوری که ۲ فرمانده کنار هم نباشند؟

- (۱) ۷۲۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۵۸۰

۲۷ ☆ با استفاده از حروف کلمه «گلستان» چند کلمه ۴ حرفی و با حروف متمایز می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

- (۱) ۹۶ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۴۰

۲۸ ☆ با حروف کلمه «تمساح» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «ت» شروع و به «ح» ختم شوند؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۶

۲۹ ☆ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «DAMDARAN» به شرط آن‌که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟ (سراسری-۸۴)

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۳۶۰

۳۰ با جایگشت حروف کلمه «ASSIST» چند کلمه متمایز می‌توان ساخت به طوری که با «S» شروع و به «S» هم ختم شوند؟

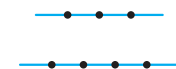
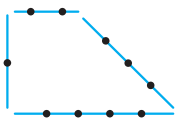
- (۱) ۶۴ (۲) ۱۲۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

- ۳۱★ حروف کلمه « ASISST » را به چند طریق می توان بدون توجه به مفهوم کنار هم قرار داد به طوری که حروف « S » یک در میان باشند؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲
- ۳۲★ به کمک حروف A, B, C, D, E, F چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت به طوری که شامل حرف D نباشد و حرف F در وسط باشد؟ (تکرار غیرمجاز است).
 (۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۲
- ۳۳★ به چند طریق می توان حروف کلمه « MOHSEN » را کنار هم قرار داد به طوری که حروف M و N ابتدا و انتها قرار نگیرند؟
 (۱) ۴۸۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۱۱۶ (۴) ۶۷۲
- ۳۴★ با حروف کلمه « EXPORT » چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به طوری که دو حرف « O » و « P » همواره کنار هم و در وسط واقع باشند؟ (بدون تکرار حروف)
 (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴) ۷۲
- ۳۵★ چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیرصفر است؟ (سراسری- ۸۸)
 (۱) ۲۵۶ (۲) ۵۱۲ (۳) ۶۲۵ (۴) ۱۰۲۴
- ۳۶★ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که رقم دهگان آن، عددی اول باشد؟
 (۱) ۱۹۶ (۲) ۲۲۴ (۳) ۲۵۶ (۴) ۳۳۶
- ۳۷★ عدد ۳۸۵۲۹۴ چند جایگشت دارد به طوری که ارقام فرد همواره کنار هم باشند؟
 (۱) ۹۶ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۴۴
- ۳۸★ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
 (۱) ۶۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۸۰۰
- ۳۹★ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد چهار رقمی و فرد بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟
 (۱) ۴۶ (۲) ۸۴ (۳) ۹۲ (۴) ۹۶
- ۴۰★ چند عدد پنج رقمی زوج با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ می توان نوشت؟ (با تکرار ارقام)
 (۱) ۳۴۲۰ (۲) ۳۲۴۰ (۳) ۳۸۰۰ (۴) ۳۶۰۰
- ۴۱★ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۵۰۰۰۰۰ می توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)
 (۱) ۳۰۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۳۸۰ (۴) ۲۸۰
- ۴۲★ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می توان نوشت؟ (با تکرار ارقام)
 (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۳۰۰
- ۴۳★ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۳ رقمی کوچک تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۴ (۴) ۷
- ۴۴★ چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است).
 (۱) ۹۰۰ (۲) ۱۸۰۰ (۳) ۵۰۴ (۴) ۴۴۸
- ۴۵★ چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ با ارقام مختلف می توان نوشت؟
 (۱) ۲۰۰۰ (۲) ۵۰۴ (۳) ۸۱۰ (۴) ۹۵۲
- ۴۶★ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۳ رقمی مضرب ۱۰ و بزرگ تر از ۴۰۰ می توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)
 (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۶
- ۴۷★ با تمام ارقام فرد طبیعی یک رقمی، چند عدد ۵ رقمی مضرب ۵ و بزرگ تر از ۷۰۰۰۰۰ می توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)
 (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۱۸ (۴) ۴۸
- ۴۸★ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)
 (۱) ۵۴ (۲) ۳۲ (۳) ۴۸ (۴) ۴۲
- ۴۹★ چند عدد پنج رقمی زوج با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ می توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)
 (۱) ۱۸۶ (۲) ۲۵۰ (۳) ۳۱۲ (۴) ۴۱۸
- ۵۰★ قفلی دارای یک رمز ۳ رقمی است. اگر رمز را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ۲ ثانیه طول بکشد به طور تقریبی حداکثر چند دقیقه طول می کشد تا قفل باز شود؟
 (۱) ۲۵ (۲) ۲۴ (۳) ۳۳ (۴) ۳۰
- ۵۱★ چند عدد چهار رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ می توان ساخت به طوری که ارقام ۵ و ۶ در آن ها به کار رفته و در کنار هم باشند؟ (بدون تکرار ارقام)
 (۱) ۳۶ (۲) ۱۲ (۳) ۷۲ (۴) ۲۴
- ۵۲★ با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۳ رقمی بزرگ تر از ۳۳۰ بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟
 (۱) ۶۰ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴) ۳۲

قسمت دوم: تبدیل - ترکیب

انتخاب اشیاء و افراد

- ۵۳☆ به چند طریق می توان ۶ عدد اسباب بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟
 (۱) ۵۴ (۲) ۶۰ (۳) ۷۲ (۴) ۹۰ (سراسری - ۹۳)
- ۵۴☆ از مخلوط کردن دوبه دوی رنگ های سبز، قرمز، سفید و آبی چند رنگ جدید ساخته می شود؟
 (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴ (سراسری - ۸۰)
- ۵۵☆ از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه به چند طریق می توان ۳ نفر را طوری انتخاب کرد که همواره یک فرد مورد نظر بین آن ۳ نفر باشد؟
 (۱) ۴۵ (۲) ۵۵ (۳) ۶۶ (۴) ۷۲ (سراسری - ۸۰)
- ۵۶ به چند طریق می توان ۶ کارمند جدید را در اتاق های ۳ نفره، ۲ نفره و ۱ نفره جای داد؟
 (۱) ۴۵ (۲) ۵۴ (۳) ۶۰ (۴) ۷۲ (سراسری خارج از کشور - ۹۳)
- ۵۷☆ از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دسته ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می توان انتخاب کرد؟
 (۱) ۲۴۱۰ (۲) ۲۴۲۰ (۳) ۲۵۲۰ (۴) ۲۵۴۰ (سراسری - ۸۱)
- ۵۸ می خواهیم از بین ۵ دانش آموز کلاس دهم، ۷ دانش آموز کلاس یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس دوازدهم، ۳ نفر را برای رفتن به مسابقات انتخاب کنیم. به طوری که آن ها از پایه های مختلف باشند، به چند حالت امکان انجام این کار وجود دارد؟
 (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۶۰
- ۵۹ در یک دوره بازی فوتبال بین ۸ تیم، بازی ها به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره، چند بازی انجام خواهد شد؟
 (۱) ۵۶ (۲) ۲۸ (۳) ۳۸ (۴) ۴۶
- ۶۰☆ روی محیط یک دایره، ۱۰ نقطه وجود دارد. چه تعداد مثلث با این نقاط می توان تشکیل داد؟
 (۱) ۶۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۸۰
- ۶۱☆ می خواهیم از بین ۴ کودک، ۵ نوجوان و ۷ جوان، یک گروه سرود ۵ نفره تشکیل دهیم. به چند حالت می توانیم این کار را انجام دهیم، به شرط آن که حداقل ۳ نفر از آن ها نوجوان باشند؟
 (۱) ۱۰۸ (۲) ۱۲۰ (۳) ۷۰۶ (۴) ۶۰۶
- ۶۲ در جعبه ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد، به چند طریق می توان ۳ مهره از این جعبه خارج کرد؟
 (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۱۰
- ۶۳ به چند طریق می توان شاگردان یک کلاس ۱۲ نفره را به دسته های ۴ تایی برای عضویت در سه گروه ریاضی، فیزیک و شیمی تقسیم کرد؟
 (۱) ۴۹۵ (۲) $2! \times \binom{12}{4} \times \binom{8}{4}$ (۳) ۱۱۸۸۰ (۴) $\binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4}$
- ۶۴ مقدار کدام عبارت زیر، با $n!$ برابر است؟
 (۱) $C(n,0)$ (۲) $C(n,1)$ (۳) $P(n,n-1)$ (۴) $P(n,0)$
- ۶۵☆ در رابطه $\binom{x}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$ مقدار x کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۶۶☆ اگر $P(n,2) - C(n,2) = 36$ باشد، حاصل $C(n,6)$ کدام است؟
 (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۶ (۴) ۱۰۸
- ۶۷ مقدار $\frac{P(n,r)}{P(n+1,r+1)}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{n+1}$ (۲) $\frac{r}{n}$ (۳) $\frac{1}{(n+1)!}$ (۴) $\frac{r+1}{n+1}$
- ۶۸ به چند طریق می توان از بین ۸ سؤال یک امتحان، به ۵ سؤال پاسخ داد، به شرط آن که پاسخ به ۲ سؤال اول، اجباری باشد؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۴۲ (۴) ۸۰
- ۶۹☆ از بین ۵ کارمند حسابدار و ۳ کارمند تحویل دار، به چند طریق می توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد، به طوری که رئیس گروه حسابدار باشد؟
 (۱) ۸۵ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۱۰



۷۰★ به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد، به طوری که حداکثر ۳ زن انتخاب شوند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۵۰ (۴) ۷۴

۷۱★ در کیسه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان از این کیسه، ۳ مهره انتخاب کرد، به طوری که لااقل ۲ مهره آبی باشد؟

- (۱) ۱۰۵ (۲) ۴۲ (۳) ۳۰ (۴) ۲۲

۷۲ با ۱۰ نقطه شکل مقابل، چند چهارضلعی می‌توان ساخت، به طوری که از هر خط شکل، فقط یک نقطه انتخاب شود؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۱۲ (۴) ۳۶

۷۳★ با ۷ نقطه داده شده در شکل مقابل، چند مثلث می‌توان ساخت؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۴

۷۴★ به چند طریق می‌توان ۲ عدد از میان اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب کرد، به طوری که مجموع آن‌ها فرد باشد؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۰ (۳) $\binom{20}{2}$ (۴) $\binom{10}{2}$

۷۵★ به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد، به طوری که حداقل ۳ زن انتخاب شود؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۵ (۴) ۸۵

۷۶★ از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه‌ای باشند را انتخاب کرد؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۶۴۰ (۴) ۴۸۰

مسائل مربوط به تعداد زیرمجموعه‌ها

۷۷★ مجموعه $A = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$ مفروض است. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی A می‌باشد؟

- (۱) ۰/۷۵ (۲) ۱ (۳) ۱/۲۵ (۴) ۲

۷۸ مجموعه $A = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ مفروض است. مجموعه A چند زیرمجموعه ۴ عضوی و شامل عدد ۹ دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۷۹★ چند تا از زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ فاقد عضوهای b و e هستند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۸۰★ چند تا از زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ حتماً شامل اعضای ۷ و ۶ هستند؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۸۱★ یک مجموعه n عضوی، ۵۵ زیرمجموعه $(n-2)$ عضوی دارد. n کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

قسمت سوم: احتمال (I)

پیشامدهای قطعی و تصادفی - فضای نمونه

۸۲ دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد عضوهای فضای نمونه کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۸۳★ تاسی را پرتاب می‌کنیم. در کدام پیشامد زیر، تعداد اعضا از بقیه کم‌تر است؟

- (۱) عدد رو شده زوج و اول باشد.
 (۲) عدد رو شده زوج یا اول باشد.
 (۳) عدد رو شده زوج باشد، ولی اول نباشد.
 (۴) عدد رو شده اول باشد، ولی زوج نباشد.

۸۴★ هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت به تصادف خارج می‌کنیم. پیشامد A که در آن، عدد روی کارت مضرب ۶ باشد، چند عضو دارد؟ (تکرار ارقام غیرمجاز است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

روش دوم: اعداد گزینه‌ها را به جای n ها قرار می‌دهیم تا دو طرف معادله، با هم مساوی شوند. مثلاً گزینه (۱) نادرست است، چون با فرض $n = 1$ خواهیم داشت:

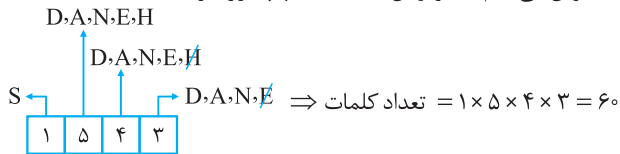
$$\frac{(1!)^2}{(1+1)!(1-1)!} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ولی اگر $n = 2$ را در معادله قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{(2!)^2}{(2+1)!(2-1)!} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{4}{3 \times 2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

۲۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

ابتدا فرض می‌کنیم S در اولین خانه سمت چپ قرار گیرد:

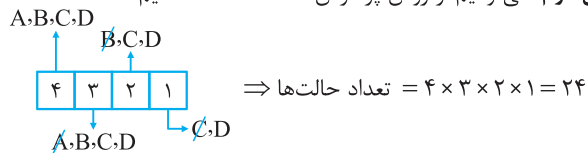


ولی S می‌تواند در خانه‌های دیگر هم قرار گیرد، یعنی S می‌تواند در هر یک از ۴ خانه قرار گیرد لذا: تعداد کل کلمات مطلوب $= 60 \times 4 = 240$

۲۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

روش اول: ترتیب انتخاب افراد مهم است. پس از فرمول $n!$ استفاده می‌کنیم: تعداد حالت‌ها $= n! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

روش دوم: می‌توانیم از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم:



۲۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

در نیمی از کل حالت‌های سخنرانی، فرد X قبل از فرد Y سخنرانی می‌کند، پس خواهیم نوشت: تعداد حالت‌های مطلوب $= \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$

۲۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

نکته: در مسائلی که می‌خواهیم یک سری اشیاء همواره کنار هم باشند، آن اشیاء را داخل یک کادر قرار می‌دهیم. سپس تعداد اشیاء بیرون کادر را به علاوه یک کرده و با علامت فاکتوریل می‌نویسیم. بعد از آن، اشیاء داخل کادر را با فاکتوریل می‌نویسیم. حال، دو عدد حاصل را در هم ضرب می‌کنیم.

اگر این ۳ نفر را a, b, c و بنامیم خواهیم داشت:

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = 8! \times 3!$$

۱ شیء

۲۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

کتاب‌های ریاضی را R_1, R_2, R_3, R_4 و کتاب‌های عربی را با A_1, A_2, A_3 و نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های عربی هم کنار هم باشند، لذا به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$A_1, A_2, A_3, R_1, R_2, R_3, R_4 \Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = 2! \times 3! \times 4!$$

۱ شیء

۱ شیء

$$= 2 \times 6 \times 24 = 288$$

۱۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

می‌خواهیم از B عبور نکنیم پس فقط دو مسیر کلی به صورت زیر وجود دارد:

$$D \rightarrow C \rightarrow E \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مسیر} = 4 \times 2 = 8$$

$$D \rightarrow A \rightarrow E \Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مسیر} = 2 \times 2 = 4$$

$$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} \text{تعداد کل حالت‌ها} = 8 + 4 = 12$$

۱۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$(1) \text{ گزینه } (0! + 1! + 2!) = (1 + 1 + 2)! = 4! = 24 \neq 5$$

$$(2) \text{ گزینه } (n+r)! = (n+r)(n+r-1)(n+r-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \neq n! + r!$$

$$(3) \text{ گزینه } \sqrt{3! - 2!} \times \sqrt{4! - 3!} = \sqrt{6 - 2} \times \sqrt{24 - 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{18}$$

$$= 2 \times \sqrt{9 \times 2} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \neq 2\sqrt{3}$$

$$(4) \text{ گزینه } \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n^2 + n$$

۱۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

فقط رابطه $5! = 4 \times 5!$ نادرست است، زیرا: $5! = 5 \times 4!$

یعنی بعد از این که عدد ۵ را یک مرحله باز می‌کنیم و به ۴ می‌رسیم باید جلوی ۴، فاکتوریل بگذاریم.

۱۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$(x+2)$ بزرگ‌تر از $(x+1)$ است. پس صورت کسر را باز می‌کنیم تا به

مخرج برسیم:

$$\frac{(x+2)!}{(x+1)!} = 4 \Rightarrow \frac{(x+2)(x+1)!}{(x+1)!} = 4 \Rightarrow x+2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 4 - 2 = 2$$

$$2 \times 2 = 4$$

پس حاصل $2x$ برابر است با:

۱۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

می‌دانیم $1! = 1$ و $0! = 1$ ، پس، از معادله $(x^2 - 4)! = 1$ نتیجه می‌گیریم که:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 2$$

$$x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm \sqrt{5}$$

پس معادله مورد نظر، دارای ۴ جواب است.

۱۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

روش اول: $(n!)^2$ را می‌توان به شکل $n! \times n!$ نوشت. لذا داریم:

یک مرحله باز می‌کنیم

$$\frac{n! \times n!}{(n+1)! \times (n-1)!} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{n! \times n(n-1)!}{(n+1)n!(n-1)!} = \frac{2}{3}$$

یک مرحله باز می‌کنیم

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3n = 2n + 2 \Rightarrow 3n - 2n = 2 \Rightarrow n = 2$$

نکته: در معادلاتی که فاکتوریل وجود دارد بهتر است از اعداد موجود در گزینه‌ها استفاده کنیم. عددی جواب است که معادله را به یک تساوی درست تبدیل کند.



آمار و احتمال

۱

فصل

قسمت اول: اصول شمارش

۱. اگر برای مسافرت به یکی از شهرهای مشهد، شیراز یا اهواز بتوان از وسیله نقلیه سواری، اتوبوس یا هواپیما استفاده کرد، آن‌گاه:
 - آ) تعداد راه‌های ممکن را برای انتخاب شهر و وسیله نقلیه پیدا کنید.
 - ب) نمودار درختی مربوط به انتخاب‌ها را رسم کنید.
 ۲. اگر از تهران به کرج ۳ راه، از کرج به زنجان ۴ راه و از زنجان به تبریز ۲ راه وجود داشته باشد، به چند طریق می‌توان از تهران و با عبور از کرج و زنجان، به تبریز رفت و برگشت؟
 - ب) به چند طریق می‌توان از تهران به تبریز رفت و برگشت به شرط آن‌که در هیچ‌کدام از مسیرها، راه‌های رفت و برگشت یکی نباشند؟
 ۳.
 - آ) با توجه به نمودار مقابل، به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر B برویم؟
 - ب) به چند طریق می‌توانیم با گذشتن از شهر C از A به B برویم؟
 - پ) به چند طریق می‌توانیم بدون گذشتن از شهر C از A به B برویم؟
-
۴. فردی می‌خواهد بداند به چند طریق با دو پیراهن به رنگ‌های «آبی - قرمز» و با سه شلوار به رنگ‌های «قهوه‌ای - مشکی - سرمه‌ای» می‌تواند لباس بپوشد. نمودار درختی حالت‌های مختلف انتخاب او را رسم کنید.
 ۵. شخصی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و ۲ جفت کفش دارد. به چند شکل متفاوت می‌تواند هر سه آن‌ها را با هم بپوشد؟ (فرداد ۸۹)
 ۶. به چند طریق می‌توان به ۲ سؤال ۳ گزینه‌ای پاسخ داد به طوری‌که هیچ سؤالی بی‌پاسخ نماند؟ (فرداد ۹۳)
 ۷. به چند طریق می‌توان به یک آزمون دوگزینه‌ای که شامل ۲۰ سؤال است پاسخ داد به طوری‌که:
 - آ) پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی باشد.
 - ب) پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی نباشد.
 ۸. روی یک میز غذا ۲ نوع سوپ، ۴ نوع پلو و ۳ نوع سالاد وجود دارد. به چند روش می‌توان یک وعده غذایی که شامل یک نوع سوپ، یک نوع پلو و یک نوع سالاد باشد، انتخاب کنیم؟ (فرداد ۹۴)
 ۹. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(پ) $\frac{7!}{3! \times 5!}$	(ب) $\frac{12!}{10!}$	(آ) $5! - 4!$
(فرداد ۹۰ و مشابه فرداد ۸۹)	(ث) $\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!}$	(ت) $\frac{3! + 5!}{6!}$
(ح) $\frac{10!}{6! \times 7!}$	(چ) $4! + 2!$	(ج) $3! + 2! + 1! + 0!$
 ۱۰. درستی یا نادرستی تساوی $8! = 4! + 3! + 1!$ را بررسی کنید. (فرداد ۹۲)
 ۱۱. اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ باشد، مقدار n را به دست آورید. (فرداد ۸۹)
 ۱۲. با اعداد ۱، ۴، ۹ و ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت، به طوری‌که:
 - آ) تکرار ارقام مجاز باشد.
 - ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.
 ۱۳. به چند راه مختلف ۸ نفر می‌توانند برای تهیه بلیط سینما در یک صف بایستند؟
 ۱۴. تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «کتاب» را بنویسید. (فرداد ۸۹)

۱۵. به چند طریق می توان کتاب های ریاضی، عربی، جغرافیا و تاریخ را کنار هم قرار داد؟ (فرداد ۹۰)
۱۶. با حروف الفبای فارسی چند کلمه سه حرفی بدون توجه به معنا می توان نوشت به طوری که:
(آ) تکرار حروف مجاز باشد. (ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد.
۱۷. با حروف کلمه «سعادت» به چند راه مختلف می توان کلمات سه حرفی نوشت به طوری که:
(آ) تکرار حروف مجاز باشد. (ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد.
۱۸. با حروف کلمه «تهران» چند کلمه سه حرفی و بدون تکرار حروف می توان ساخت که با حرف نقطه دار شروع شود؟
۱۹. با حروف کلمه «مِهستان» و بدون تکرار حروف:
(آ) چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت؟
(ب) چند کلمه سه حرفی می توان نوشت که با حرف «س» شروع و به «ن» ختم شود؟
۲۰. با حروف کلمه «TRIANGLE» و بدون تکرار حروف:
(آ) چند کلمه پنج حرفی می توان نوشت؟
(ب) چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت که با «T» شروع شود؟
(پ) چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت که با «T» شروع و به «E» ختم شود؟
۲۱. با ارقام ۰، ۱، ۵، ۹ و ۴ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت به طوری که:
(آ) تکرار مجاز باشد. (ب) تکرار غیرمجاز باشد.
۲۲. با ارقام ۲، ۳، ۴، ۶ و ۸ و بدون تکرار ارقام:
(آ) چند عدد پنج رقمی می توان نوشت؟
(ب) چند عدد چهار رقمی می توان نوشت که با ۲ شروع شود؟
(ت) چند عدد سه رقمی می توان نوشت که با ۳ شروع و به ۸ ختم شود؟
۲۳. دو رقم اول سمت چپ یک عدد پنج رقمی، مشخص است. چند راه ممکن برای ساختن آن عدد پنج رقمی وجود دارد؟ (ارقام می توانند تکراری باشند.)
۲۴. با ارقام ۳، ۷، ۵، ۶ و ۸ به چند طریق می توان یک عدد سه رقمی بدون تکرار ساخت، به طوری که:
(آ) آن عدد زوج باشد. (ب) رقم یکان آن عدد اول باشد.
۲۵. با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶ و ۷: (با تکرار ارقام)
(آ) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟
(ب) چند عدد دورقمی فرد می توان نوشت؟
۲۶. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۳۰۰ چند عدد سه رقمی بزرگ تر از ۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
۲۷. با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴ و ۷ چند عدد چهار رقمی بزرگ تر یا مساوی ۲۰۰۰ می توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)
۲۸. با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که:
(آ) عدد مضرب ۵ بوده و تکرار مجاز باشد. (ب) عدد زوج باشد و تکرار مجاز باشد.
۲۹. با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که:
(آ) عدد مضرب ۵ باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. (ب) عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.
۳۰. با ارقام ۵، ۶، ۸ و ۷ چند عدد:
(آ) سه رقمی بدون تکرار می توان نوشت؟
(ب) چهار رقمی زوج بدون تکرار می توان نوشت؟
۳۱. با ارقام ۳، ۵، ۸ و ۷ به چند طریق می توان یک عدد سه رقمی ساخت به طوری که:
(آ) آن عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. (ب) رقم یکان آن ۷ باشد و تکرار ارقام مجاز باشد.
۳۲. چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت که رقم دهگان آن ها، عددی اول باشد؟
۳۳. پلاک اتومبیل سواری سری «ب» در تهران به صورت

تهران
***ب**

 می باشد که هر ستاره نمایشگر یک عدد غیرصفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

۳۴. یک اداره برای شماره کارت پرسنلی کارمندان خود از یک کد سه رقمی و ۲ حرف فارسی به شکل مقابل استفاده می‌کند، با این شرط که اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد. تعداد راه‌های ممکن برای شماره کارت‌های مختلف پرسنلی را پیدا کنید به شرطی که:

(مشابه تمرین صفحه ۱۰۸ کتاب درسی)

عدد عدد حرف حرف عدد

(آ) تکرار حروف و ارقام مجاز باشد.

(ب) تکرار حروف و ارقام مجاز نباشد.

۳۵. مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۲۰ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۲ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند:

(آ) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۰ نفر مشورت بگیرد؟

(ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشاوره بگیرد به شرط آن‌که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۳۶. کدام یک از تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

(آ) $9! = 9!^2$ (ب) $4! \times 3! = 4!$

۳۷. کدام یک از تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

(آ) $2! = \frac{8!}{4!}$ (ب) $9! \times 10 = 10!$

۳۸. با ارقام ۱، ۲، ۵، ۶ و ۸ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که رقم صدگان آن ۶ باشد.

۳۹. با ارقام ۲، ۷، ۵، ۳ و ۸: چند عدد سه رقمی با تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

(ب) چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که یکان آن ۲ باشد؟

۴۰. با حروف کلمه «روستا» و بدون تکرار، چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت؟ (بامعنی یا بی‌معنی)

۴۱. به چند راه مختلف، ۶ نفر دوست می‌توانند در یک ردیف کنار هم بایستند؟

قسمت دوم: تبدیل ترکیب

۴۲. به چند طریق، از بین ۸ دوندۀ یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می‌توانند مشخص شوند، به طوری که هیچ دو نفری هم‌زمان به خط پایان نرسند؟

۴۳. با حروف کلمه «ولایت» چند ترتیب چهار حرفی مختلف می‌توان ساخت؟ (بی‌معنی و با معنی)

۴۴. به چند طریق می‌توان از بین ۹ فیلم مطرح در جشنواره، ۳ فیلم را به عنوان فیلم اول، دوم و سوم انتخاب نمود؟

۴۵. حسین ۶ کتاب مختلف دارد. به چند طریق می‌تواند ۴ کتاب از آن‌ها را در یک قفسه کنار هم بچیند؟

۴۶. به چند طریق می‌توان از بین ۶ بازیکن ذخیره یک تیم فوتبال، ۳ نفر را به ترتیب برای پست‌های حمله، هافبک و دفاع وارد زمین کرد؟

۴۷. ۴ نفر به چند طریق می‌توانند روی ۶ صندلی قرار گیرند، اگر روی هر صندلی حداکثر یک نفر بتواند بنشیند؟

۴۸. تعداد جایگشت‌های (تبدیل‌های) ۲ حرفی از حروف کلمه «گلستان» را به دست آورید.

۴۹. از یک گروه ۱۳ نفری دانش‌آموزی، به چند طریق می‌توان ۴ نفر را برای فعالیت‌های فوق برنامه مدرسه انتخاب کرد، به طوری که یک نفر مسئول گروه سرود، یک نفر مسئول گروه دانش، یک نفر مجری برنامه‌ها و یک نفر مسئول مسابقات علمی شود؟

۵۰. (آ) در تساوی روبه‌رو مقدار n را به دست آورید.

(ب) حاصل $P(n+1, 3)$ را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

۵۱. درستی روابط زیر را بررسی کنید.

(آ) $P(n, (n-1)) = n!$ (ب) $\frac{P(n, n)}{n!} = P(n, 0)$
 (پ) $P(n+2, 4) = P(n, 3)$ (ت) $P(n, 5) = 18P(n-2, 4)$

۵۲. در یک پرواز داخلی، ۴ صندلی خالی در هواپیما موجود است و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. به چند طریق می‌توان از بین آن‌ها ۴ نفر را انتخاب کرد، به طوری‌که:
 (آ) ترتیب انتخاب این افراد مهم باشد؟
 (ب) ترتیب انتخاب افراد از روی فهرست مهم نباشد؟
۵۳. بستنی فروشی ۱۰ طعم بستنی دارد. اگر یک بستنی قیفی با ۳ طعم مختلف بخواهیم و ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف مهم نباشد، چند انتخاب می‌توانیم داشته باشیم؟ اگر ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف مهم باشد، چند انتخاب خواهیم داشت؟ (مشابه فرداد ۸۹)
۵۴. به چند طریق می‌توان از بین ۸ کتاب مختلف، ۵ کتاب را برای مطالعه انتخاب کرد؟ (شهریور ۸۹ و مشابه دی ۸۹)
۵۵. چگونه می‌توان از بین ۸ مهره سفید و ۶ مهره آبی، ۳ مهره انتخاب کرد، به طوری‌که:
 (آ) هر سه مهره سفید باشند. (ب) هر سه مهره هم‌رنگ باشند. (پ) دو مهره سفید و یک مهره آبی باشد.
۵۶. ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سفید متمایز داریم. به چند طریق می‌توان سه توپ با رنگ‌های متفاوت انتخاب کرد؟
۵۷. ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سفید متمایز داریم. به چند طریق می‌توان سه توپ هم‌رنگ انتخاب کرد؟
۵۸. به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ لامپ که ۴ تای آن‌ها معیوب است، ۳ لامپ را انتخاب کرد، به طوری‌که:
 (آ) هر سه لامپ معیوب باشند. (ب) دو تا سالم و یکی معیوب باشند. (پ) فرقی بین سالم و معیوب نباشد.
۵۹. از ۱۲ نفر اعضای یک تیم والیبال، ۷ نفر جوان و ۵ نفر نوجوان هستند. به چند طریق می‌توان ۶ نفر از بین آن‌ها انتخاب کرد، به طوری‌که:
 (آ) ۴ نفر جوان و ۲ نفر نوجوان باشند. (ب) محدودیتی در جوان و نوجوان بودن نداشته باشیم.
۶۰. از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر را طوری انتخاب کرد که همواره یک فرد مورد نظر، بین آن سه نفر باشد؟
۶۱. دانش‌آموزی باید از بین ۱۰ سؤال امتحانی به ۸ سؤال پاسخ دهد. اگر پاسخ دادن به ۳ سؤال اول اجباری باشد، به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد؟
۶۲. شش نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. مشخص کنید با این نقاط چند مثلث متفاوت می‌توان ساخت؟
۶۳. با ۶ نقطه روی محیط یک دایره چند وتر می‌توان رسم کرد؟
۶۴. یک مجموعه ۵ عضوی چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟
۶۵. مقدار x را از تساوی‌های زیر به دست آورید.
 (آ) $2x + C(5,2) = P(5,3)$
 (ب) $x \times P(5,2) = C(n, n)$
۶۶. مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد که همگی شامل اعداد ۶ و ۵ باشند؟
۶۷. مقدار n را از تساوی $P(n,1) = 6$ به دست آورید. (فرداد ۹۶)
۶۸. از میان ۵ ریاضیدان، ۳ فیزیکدان و ۴ شیمی‌دان به چند طریق می‌توانیم یک کمیته ۳ نفره علمی تشکیل دهیم؟ (فرداد ۹۶)
۶۹. درستی تساوی روبه‌رو را نشان دهید؛ $P(n, n-1) = P(n, n)$ (فرداد ۹۴)
۷۰. درستی تساوی روبه‌رو را نشان دهید؛ $P(6,2) = 6C(5,1)$ (فرداد ۹۳)
۷۱. درستی تساوی روبه‌رو را نشان دهید؛ $C(n, n) = C(n, 0)$ (فرداد ۹۲)
۷۲. از فهرست نام ۱۲ دانش‌آموز ۴ نام را برای بازدید از موزه به قید قرعه انتخاب می‌کنیم. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این ۴ نفر را به دست آورید. (فرداد ۹۵)

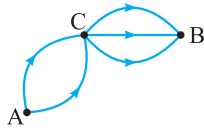
قسمت سوم: احتمال (۱)

۷۳. پدیده‌های قطعی و پدیده‌های تصادفی را تعریف کرده، برای هر کدام یک مثال بیاورید.
۷۴. فضای نمونه را تعریف کرده، برای آن ۲ مثال ذکر کنید.

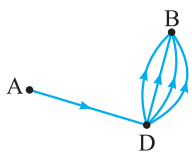


آمار و احتمال

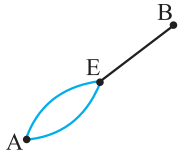
پاسخ فصل ۱



مسیر (۱)، مطابق شکل مقابل می‌توانیم ابتدا از شهر A به C و سپس از C به B برویم. ملاحظه می‌شود که از C به A سه مسیر مختلف و از A به B دو مسیر وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به $2 \times 3 = 6$ طریق انجام می‌گیرد.



مسیر (۲)، ممکن است ابتدا از A به D و سپس از D به B برویم. ملاحظه می‌شود که از D به A فقط یک مسیر و از A به B چهار مسیر وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به $1 \times 4 = 4$ طریق انجام می‌گیرد.



در مسیر (۳) نیز خواهیم داشت: $2 \times 1 = 2$

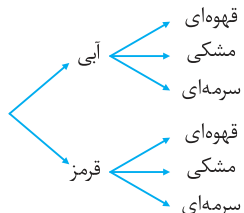
چون برای رفتن از شهر A به شهر B فقط می‌توانیم یکی از ۳ حالت (۱)، (۲) یا (۳) را در نظر بگیریم (به کلمه «یا» در ابتدای پاسخ توجه کنید که نشان‌دهنده اصل جمع است). لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

- $6 + 4 + 2 = 12$ = تعداد کل حالت‌ها برای رفتن از A به B
- (ب) می‌خواهیم حتماً از شهر C عبور کنیم پس فقط مسیر $A \rightarrow C \rightarrow B$ را خواهیم داشت: $2 \times 3 = 6$ = تعداد حالت‌ها
- (پ) می‌خواهیم از شهر C عبور نکنیم پس دو مسیر $A \rightarrow E \rightarrow B$ و $A \rightarrow D \rightarrow B$ را خواهیم داشت:
- $A \rightarrow E \rightarrow B$: تعداد حالت‌ها: $2 \times 1 = 2$
- $A \rightarrow D \rightarrow B$: تعداد حالت‌ها: $1 \times 4 = 4$
- $\Rightarrow 2 + 4 = 6$ = تعداد کل حالت‌ها

۴

این فرد برای انتخاب پیراهن به ۲ طریق و برای انتخاب شلوار به ۳ طریق می‌تواند عمل کند، لذا طبق اصل ضرب کلاً به $2 \times 3 = 6$ طریق می‌تواند لباس بپوشد.

شلوار پیراهن



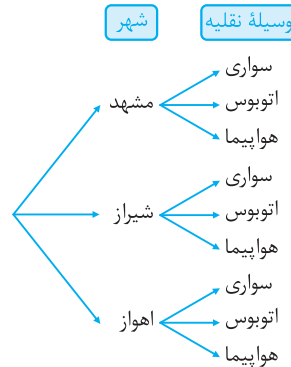
۵

طبق اصل شمارش تعداد انتخاب‌های مختلف را در هم ضرب می‌کنیم: $4 \times 3 \times 2 = 24$

۱

(آ) طبق اطلاعات مسئله برای انتخاب شهر ۳ گزینه وجود دارد (مشهد، شیراز یا اهواز) و برای انتخاب وسیله نقلیه نیز ۳ گزینه موجود است (سواری، اتوبوس یا هواپیما) بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب‌های این دو عمل در هم ضرب می‌شوند:

$3 \times 3 = 9$ = تعداد راه‌های ممکن برای سفر (ب) می‌توانیم، با یک تقسیم‌بندی مناسب (نمودار درختی) حالت‌های مختلف انتخاب را نمایش دهیم:

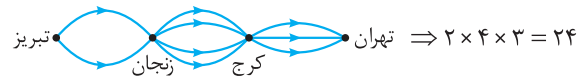


۲

(آ) تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز:



تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از تبریز به تهران:



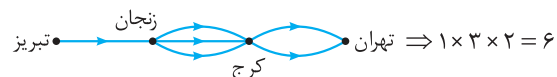
طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

$24 \times 24 = 576$

(ب) مسیره‌های رفتن از تهران به تبریز دقیقاً مانند قسمت «ا» می‌باشد:

$3 \times 4 \times 2 = 24$ = تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز چون گفته شده مسیره‌های رفت و برگشت نباید تکراری باشند، پس مسیره‌های که در رفت از آن‌ها استفاده کردیم، در برگشت حذف می‌شوند:

تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از تبریز به تهران:



حال، طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

\times (تعداد حالات مسیر رفت) = تعداد کل راه‌های انتخابی

$24 \times 6 = 144$ = (تعداد حالات مسیر برگشت)

۳

(آ) برای رفتن از A به B سه مسیر کلی وجود دارد:

- (۱) مسیر $A \rightarrow C \rightarrow B$ یا
- (۲) مسیر $A \rightarrow D \rightarrow B$ یا
- (۳) مسیر $A \rightarrow E \rightarrow B$

$$\frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲! \times ۷!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{(۲ \times ۱) \times ۷ \times ۶!} = \frac{۸}{۲} = ۴ \quad \text{ث}$$

$$۰! + ۱! + ۲! + ۳! = ۱ + ۱ + \underbrace{(۲ \times ۱)}_۲ + \underbrace{(۳ \times ۲ \times ۱)}_۶ = ۱۰ \quad \text{ج}$$

$$۴! + ۲! = (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) + (۲ \times ۱) = ۲۴ + ۲ = ۲۶ \quad \text{چ}$$

$$\frac{۱۰!}{۶! \times ۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۶! \times ۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۶!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۱۰ \times ۹ \times ۸} = ۱ \quad \text{ح}$$

۱۰

$$\begin{cases} ۱! + ۳! + ۴! = ۱ + ۶ + ۲۴ = ۳۱ \\ ۸! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۴۰۳۲۰ \end{cases}$$

پس رابطه داده شده، نادرست است.

۱۱

روش اول:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1) \times n \times (n-1)!} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n)} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم.}} (n+1)(n) = 6$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (n+3)(n-2) = 0$$

چون n باید عددی طبیعی باشد، پس جواب $n = -3$ غیر قابل قبول است. روش دوم: در معادله $(n+1)(n) = 6$ به جای حل این معادله درجه دوم به روش دلتا می‌توان گفت که چون $(n+1)$ و n دو عدد متوالی (پشت سر هم) هستند، پس عدد ۶ را نیز به صورت دو عدد متوالی می‌نویسیم:

$$(n+1) \times n = 3 \times 2 \Rightarrow n = 2$$

۱۲

آ) چون عدد مورد نظر سه رقمی است سه جای خالی می‌کشیم. طبق صورت مسئله چهار عدد به ما داده شده و تکرار ارقام نیز مجاز است، پس هر جای خالی (خانه) به چهار طریق می‌تواند پر شود که بنابه اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب در یکدیگر ضرب می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{۴} & \boxed{۴} & \boxed{۴} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{حالت} & \text{حالت} & \text{حالت} \end{array} \Rightarrow ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$$

تعداد اعداد مطلوب: ۶۴

تذکره فلش‌های روی مربع‌ها، ترتیب پر شدن خانه‌ها را نشان می‌دهند. ب) ابتدا سه خانه می‌کشیم. رقم سمت چپ (صدگان) به چهار طریق مختلف می‌تواند پر شود. چون تکرار ارقام مجاز نیست رقم دهگان (خانه وسط) می‌تواند به سه طریق پر شود، زیرا از رقمی که در خانه اول استفاده کردیم دیگر نمی‌توانیم در خانه وسطی استفاده نماییم. در نهایت در خانه سمت راست (رقم یکان) فقط می‌توانیم از دو رقم استفاده کنیم پس خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{۴} & \boxed{۳} & \boxed{۲} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{حالت} & \text{حالت} & \text{حالت} \end{array} \Rightarrow ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$$

تعداد اعداد مطلوب: ۲۴

۶

۲ سؤال وجود دارد که برای هر کدام از آن‌ها ۳ گزینه (۳ حالت) وجود دارد. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت: $۳ \times ۳ = ۹$ = تعداد حالت‌های پاسخگویی به سؤالات

۷

در این‌گونه مسائل که یک کار مشابه را به دفعات زیاد تکرار می‌کنیم راه کوتاه‌تری برای پیدا کردن تعداد حالت‌ها وجود دارد؟

پاسخ: بله که وجود دارد ... به تذکره زیر توجه کنید:

تذکره اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(k=۱, ۲, ۳, \dots)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله با هم برابر و مساوی n باشد آن‌گاه تعداد کل انتخاب‌های ممکن برابر با n^k است.

آ) پاسخ دادن به این ۲۰ سؤال، شامل ۲۰ تصمیم‌گیری است که هر تصمیم‌گیری به ۲ طریق انجام می‌شود. یعنی جواب دادن به سؤال ۱ دو حالت دارد، جواب دادن به سؤال ۲ نیز دو حالت دارد، و ... و جواب دادن به سؤال ۲۰ نیز دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$۲^{۲۰} = \underbrace{۲ \times ۲ \times \dots \times ۲}_{۲۰ \text{ بار}} = ۲^{۲۰}$$

ب) چون پاسخگویی به سؤالات الزامی نیست. پس برای هر سؤال ۳ انتخاب داریم، یعنی به عنوان مثال برای جواب دادن به سؤال اول می‌توانیم گزینه «الف» و یا «ب» را انتخاب کنیم و یا می‌توانیم اصلاً به سؤال پاسخ ندهیم. پس تعداد راه‌های ممکن برای جواب دادن عبارت است از:

$$۳^{۲۰} = \underbrace{۳ \times ۳ \times \dots \times ۳}_{۲۰ \text{ بار}} = ۳^{۲۰}$$

۸

یک فرد می‌تواند هر سه کار را با هم انجام دهد. یعنی هم می‌تواند سوپ، هم پلو و هم سالاد را انتخاب کند. پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

$$۲۴ = ۳ \times ۴ \times ۲ = \text{تعداد حالت‌ها}$$

۹

آ) $۹۶ = ۲۴ - ۱۲۰ = (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) - (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۴! - ۵!$ **تذکره** از حل قسمت «آ» این مسئله نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی:

$$\begin{cases} a! + b! \neq (a+b)! \\ a! - b! \neq (a-b)! \end{cases}$$

به عنوان مثال نمی‌توان گفت که حاصل $۳! + ۴!$ برابر $(۳+۴)!$ یعنی ۷! است، زیرا اگر حاصل این دو عبارت را جداگانه محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} ۳! + ۴! &= (۳ \times ۲ \times ۱) + (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۶ + ۲۴ = ۳۰ \\ ۷! &= ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۵۰۴۰ \end{aligned} \right\} \Rightarrow ۳! + ۴! \neq ۷!$$

$$\frac{۱۲!}{۱۰!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰!}{۱۰!} = ۱۲ \times ۱۱ = ۱۳۲ \quad \text{ب)}$$

$$\frac{۷!}{۳! \times ۵!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵!}{(۳ \times ۲ \times ۱) \times ۵!} = \frac{۷ \times ۶}{۶} = ۷ \quad \text{پ)}$$

$$\frac{۳! + ۵!}{۶!} = \frac{(۳ \times ۲ \times ۱) + (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱)}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۶ + ۱۲۰}{۷۲۰} = \frac{۱۲۶}{۷۲۰} = \frac{۷}{۴۰} \quad \text{ت)}$$