

مجموعه کتاب‌های میکرو قرن جدید



ریاضی تجربی جامع میکرو

ویژه رشته علوم تجربی. کنکور

پایه دهم، یازدهم، دوازدهم

INI
The International
Neuroscience Institute
Hannover



۳۵۰۰ تست جدید و متنوع برای ۱۰۰ زدن کنکور

مؤلف:
محمدحسین صابری

+ خلاصه درس‌های کاربردی و مفید

مجموعه کتاب‌های فرمول بیست ویژه ارتقا و ترمیم معدل نهایی



دکتر آی کیو
DRIQ.com
کلاس آنلاین



گاج مارکت
gajmarket.com
فروشگاه آنلاین



گاجینو
gajino.com
آموزش آنلاین



مقدمهٔ مولف

تقدیم به روح پدرم

با آن که خیلی حد و مشق نمی‌دانست

ولی با ورق زدن چاپ اول این کتاب،

چشمانش برق می‌زد ...

«مهم‌ترین کشف روان‌شناسی در قرن اخیر، کشف خودپنداری و اهمیت به آن بوده است.» (دکتر ماکسول مالتز)

خودپنداری و تصویری که از خود در ذهن مجسم می‌کنیم، راهنمای اصلی عملکرد ما در طول زندگی می‌باشد. مغز انسان مانند یک تابع عمل می‌کند، شما در تابع، هر چیزی را که به عنوان ورودی وارد کنید بنابر عملگرهایی که روی ورودی اتفاق می‌افتد، خروجی‌ای بر همان مبنا و داده‌های اولیه به شما می‌دهد؛ بنابراین ورودی ذهن ما هم باید فکرها و ایده‌های مثبت باشد تا بتوانیم با عملگرهایی مانند صبر، امید، دانش و پشتکار آینده‌ای روشن را برای خود متصور شویم و به آن دست پیدا کنیم.

اول حرفامون دوست داشتیم اینو بهتون بگم که مطمئن باشید توی زندگیتون به اون چیزی که شب و روز بهش فکر می‌کنید می‌رسید، البته که چاشنی تلاش و پشتکار باید توی این مسیر خیلی پررنگ باشه.

چرا میکرو؟

میکرو ریاضیات تجربی جامع کتابی است برای یادگیری هر چه عمیق‌تر و مفهومی‌تر و منبعی است برای تمامی دانش‌آموزان و داوطلبان کنکور تجربی. مفهومی‌تر و سخت‌تر شدن کنکورهای اخیر، من و تیم تألیف گاج را به این امر وا داشت تا کتابی تألیف کنیم که تست‌های آن از استانداردهای کنکور سراسری تبعیت کرده باشد. این کتاب شامل ۱۸ فصل است که با توجه به اهمیت مطالب آن، هر فصل به بخش‌هایی تقسیم شده است که یادگیری را برای شما آسان‌تر و سریع‌تر می‌کند.

ویژگی‌های میکرو

در ابتدای هر فصل، بخشی تحت عنوان خلاصهٔ درسنامه و نکات فصل وجود دارد. این بخش دربرگیرندهٔ درسنامه‌های موجز و کاربردی است که نه تنها منبع جامع و شاملی برای حل غالب تست‌های کنکوری می‌باشد، بلکه پاسخ‌گوی نیاز دانش‌آموزان در زمان جمع‌بندی و امتحانات نهایی نیز می‌باشد. این کتاب شامل تست‌های کنکورهای سراسری چند سال اخیر، سؤالات با کیفیت آزمون‌های گاج، تست‌های شبیه‌سازی شده با کنکورهای سال‌های گذشته، تست‌های برگرفته شده از تمارین و فعالیت‌های کتاب درسی و تست‌های تألیفی هدفدار می‌باشد. چیدمان تست‌ها در این کتاب کاملاً تیپ‌بندی شده و طبق قاعده و اصول معین، دسته‌بندی شده‌اند. همچنین در بخش پاسخ‌نامه، تست‌ها دارای روش‌های حل گوناگون می‌باشند که به بررسی گزینه‌ها از جوانب مختلف پرداخته است. راستی این را هم بگویم که در آخر هر فصل تست‌های یک گام فراتر آمده است که قول می‌دهم هر سطح از دانش‌آموز را به چالش بکشد.

دیگه چی؟

هر کتابی ممکن است ایرادات و اشکالاتی داشته باشد، هر چند سعی ما بر این بوده که میزان خطاها را به حداقل مقدار ممکن برسانیم. من و تیم تألیف گاج پذیرای نظرات و انتقادات ارزشمند و سازنده شما عزیزان در جهت بهبود کیفی این کتاب هستیم. در نهایت قدردان زحمات همه عزیزانی هستیم که در راستای بهبود این اثر ما را یاری نموده‌اند:

تشکر و قدردانی

در آرزای اساتید برجسته کشور، آقایان افشین ملاک پور، علی مقدم نیا، مجید رفعتی، معین کرمی، امیر هوشنگ انصاری، آر ش عمید، امید شیرینی نژاد و حامد حسین خانی کمال تشکر را دارم که اگر کمک‌های این عزیزان نبود، آیکو در جایگاه فعلی خود قرار نداشت.

محمد حسین صابری



mohamadhoseinsaberi



فهرست مطالب

فصل ۴: مشتق

۱۰۳	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۱۰۸	مفهوم هندسی مشتق	۲۸
۱۰۹	تعریف مشتق	۲۹
۱۱۰	مشتق‌گیری	۳۰
۱۱۴	قاعده زنجیری در مشتق‌گیری	۳۱
۱۱۷	مشتق‌پذیری	۳۲
۱۱۹	نقاط مشتق‌ناپذیر	۳۳
۱۲۱	رسم نمودار توابع f و f' از روی هم	۳۴
۱۲۴	مشتق‌پذیری روی بازه و دامنه تابع مشتق	۳۵
۱۲۵	خط مماس بر منحنی	۳۶
۱۲۷	مشتق مرتبه دوم	۳۷
۱۲۷	آهنگ تغییر	۳۸
۱۳۰	یک‌گام‌فراتر	*

فصل ۵: کاربرد مشتق

۱۳۲	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۱۳۴	یکنوایی	۳۹
۱۳۷	نقاط بحرانی	۴۰
۱۳۹	اکسترم‌های نسبی	۴۱
۱۴۲	اکسترم‌های مطلق	۴۲
۱۴۵	بهینه‌سازی	۴۳
۱۴۸	یک‌گام‌فراتر	*

فصل ۶: مجموعه‌ها

۱۴۹	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۱۵۱	مفاهیم اولیه مجموعه	۴۴
۱۵۲	بازه‌ها	۴۵
۱۵۳	مجموعه مرجع، متمم مجموعه و جبر مجموعه‌ها	۴۶
۱۵۴	تعداد اعضای دو مجموعه	۴۷
۱۵۶	یک‌گام‌فراتر	*

فصل ۱: تابع

۸	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۱۳	مفهوم تابع	۱
۱۴	دامنه	۲
۱۷	برد	۳
۱۸	تساوی دو تابع	۴
۱۹	مقداردهی به تابع	۵
۲۰	نوشتن ضابطه تابع	۶
۲۰	انتقال	۷
۲۵	توابع خاص	۸
۲۷	یکنوایی	۹
۲۹	اعمال جبری روی توابع	۱۰
۳۱	ترکیب توابع	۱۱
۳۵	تابع یک به یک	۱۲
۳۶	تابع وارون	۱۳
۴۳	یک‌گام‌فراتر	*

فصل ۲: مثلثات

۴۵	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۵۰	مفاهیم اولیه مثلثات	۱۴
۵۳	دایره مثلثاتی	۱۵
۵۴	مثلثات وابسته به رادیان	۱۶
۵۷	اتحادها و روابط مثلثاتی	۱۷
۶۳	دوره تناوب و نمودار سینوس و کسینوس	۱۸
۶۸	تانژانت	۱۹
۶۹	معادلات مثلثاتی	۲۰
۷۳	یک‌گام‌فراتر	*

فصل ۳: حد و پیوستگی

۷۵	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۷۹	تقسیم	۲۱
۸۰	همسایگی	۲۲
۸۰	فرایندهای حدی	۲۳
۸۴	ابهام صفر صفر	۲۴
۹۰	حد بی‌نهایت	۲۵
۹۳	حد در بی‌نهایت	۲۶
۹۷	پیوستگی	۲۷
۱۰۱	یک‌گام‌فراتر	*

فصل ۱۱: معادله و تابع درجه دوم

۲۱۵	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۲۱۸	معادله درجه دوم	۶۹
۲۱۸	Δ و ارتباطش با تعداد ریشه‌ها	۷۰
۲۱۹	P و S در معادله درجه دوم	۷۱
۲۱۹	علامت ریشه‌ها	۷۲
۲۲۱	تشکیل معادله درجه دوم به کمک P و S	۷۳
۲۲۲	حل معادلات درجه سه به بالا	۷۴
۲۲۲	حل معادله به کمک تغییر متغیر	۷۵
۲۲۳	مفاهیم اولیه سهمی	۷۶
۲۲۵	Δ و تأثیر آن بر نمودار سهمی	۷۷
۲۲۶	شرایط عبور سهمی از نواحی مختلف	۷۸
۲۲۶	برخورد خط (یا سهمی) با سهمی	۷۹
۲۲۷	بهینه‌سازی در تابع درجه دوم	۸۰
۲۲۸	یک گام فراتر	*

فصل ۱۲: معادلات گویا، ...

۲۲۹	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۲۳۱	معادلات گویا (کسری)	۸۱
۲۳۳	معادلات رادیکالی (گنگ)	۸۲
۲۳۶	تعیین علامت	۸۳
۲۳۷	نامعادله	۸۴
۲۴۰	یک گام فراتر	*

فصل ۱۳: قدر مطلق و ...

۲۴۱	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۲۴۳	ویژگی‌های قدر مطلق	۸۵
۲۴۳	معادلات قدر مطلق	۸۶
۲۴۴	نامعادلات قدر مطلق	۸۷
۲۴۴	رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق	۸۸
۲۴۶	ویژگی‌های جزء صحیح	۸۹
۲۴۷	معادلات شامل جزء صحیح	۹۰
۲۴۸	رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح	۹۱
۲۴۹	یک گام فراتر	*

فصل ۷: شمارش بدون شمردن

۱۵۷	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۱۵۸	اصل جمع و اصل ضرب	۴۸
۱۶۰	جایگشت	۴۹
۱۶۲	اصل متمم	۵۰
۱۶۳	انتخاب	۵۱
۱۶۵	زیرمجموعه	۵۲
۱۶۶	یک گام فراتر	*

فصل ۸: احتمال

۱۶۷	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۱۶۹	فضای نمونه‌ای و پیشامدها	۵۳
۱۷۱	احتمال مقدماتی	۵۴
۱۷۵	قوانین احتمال	۵۵
۱۷۷	احتمال شرطی	۵۶
۱۷۹	پیشامدهای مستقل	۵۷
۱۸۱	احتمال کل	۵۸
۱۸۴	یک گام فراتر	*

فصل ۹: الگو و دنباله

۱۸۵	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۱۸۷	الگو	۵۹
۱۹۲	دنباله حسابی	۶۰
۱۹۵	دنباله هندسی	۶۱
۱۹۸	ترکیب دنباله‌های حسابی و هندسی	۶۲
۲۰۰	یک گام فراتر	*

فصل ۱۰: ریشه و توان

۲۰۱	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۲۰۲	ریشه nام	۶۳
۲۰۴	ویژگی‌های توان و رادیکال	۶۴
۲۰۶	اتحادها	۶۵
۲۱۰	تجزیه	۶۶
۲۱۱	ساده کردن عبارت‌های گویا	۶۷
۲۱۲	گویا کردن مخرج کسرها	۶۸
۲۱۴	یک گام فراتر	*

فصل ۱۷: هندسه دوازدهم

۲۹۸	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۳۰۳	تفکر تجسمی	۱۲۰
۳۰۷	بیضی	۱۲۱
۳۱۰	دایره	۱۲۲
۳۱۴	یک گام فراتر	*

فصل ۱۸: آمار

۳۱۶	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۳۱۹	تعاریف اولیه آمار	۱۲۳
۳۲۰	معیارهای گرایش به مرکز	۱۲۴
۳۲۲	معیارهای گرایش به پراکندگی	۱۲۵
۳۲۶	یک گام فراتر	*

پاسخ نامه تشریحی

۳۲۷	فصل اول	*
۳۸۵	فصل دوم	*
۴۳۴	فصل سوم	*
۴۸۱	فصل چهارم	*
۵۲۳	فصل پنجم	*
۵۶۰	فصل ششم	*
۵۷۰	فصل هفتم	*
۵۸۵	فصل هشتم	*
۶۱۲	فصل نهم	*
۶۳۵	فصل دهم	*
۶۵۸	فصل یازدهم	*
۶۸۳	فصل دوازدهم	*
۷۰۳	فصل سیزدهم	*
۷۱۸	فصل چهاردهم	*
۷۴۲	فصل پانزدهم	*
۷۵۹	فصل شانزدهم	*
۷۸۷	فصل هفدهم	*
۸۱۱	فصل هجدهم	*

فصل ۱۴: توابع نمایی و ...

۲۵۰	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۲۵۲	تابع نمایی و ویژگی های آن	۹۲
۲۵۳	نمودار توابع نمایی	۹۳
۲۵۵	معادلات نمایی	۹۴
۲۵۵	نامعادلات نمایی	۹۵
۲۵۶	مفهوم لگاریتم	۹۶
۲۵۶	دامنه توابع لگاریتمی	۹۷
۲۵۷	قوانین لگاریتم	۹۸
۲۶۰	نمودار توابع لگاریتمی و نتایج آن	۹۹
۲۶۱	معادلات لگاریتمی	۱۰۰
۲۶۳	تکنیک لگاریتم گیری	۱۰۱
۲۶۴	نامعادلات لگاریتمی	۱۰۲
۲۶۴	کاربرد تابع نمایی	۱۰۳
۲۶۵	کاربرد تابع لگاریتمی	۱۰۴
۲۶۵	یک گام فراتر	*

فصل ۱۵: هندسه تحلیلی

۲۶۶	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۲۶۸	مفاهیم اولیه نقطه و خط	۱۰۵
۲۶۹	ویژگی های خطوط موازی یا عمود بر هم	۱۰۶
۲۷۰	فاصله دو نقطه	۱۰۷
۲۷۱	مختصات وسط پاره خط	۱۰۸
۲۷۲	فاصله نقطه از خط	۱۰۹
۲۷۳	پیدا کردن مساحت با داشتن رئوس	۱۱۰
۲۷۳	فاصله دو خط موازی	۱۱۱
۲۷۴	یک گام فراتر	*

فصل ۱۶: هندسه یازدهم (پایه)

۲۷۵	خلاصه درسنامه و نکات فصل	*
۲۷۹	ترسیم های هندسی	۱۱۲
۲۸۲	نسبت و تناسب	۱۱۳
۲۸۲	استدلال ها	۱۱۴
۲۸۳	تالس	۱۱۵
۲۸۷	تالس در ذوزنقه	۱۱۶
۲۸۹	تشابه	۱۱۷
۲۹۲	تشابه و مساحت	۱۱۸
۲۹۴	روابط طولی در مثلث قائم الزاویه	۱۱۹
۲۹۶	یک گام فراتر	*

فصل اول

تابع

۱

CHAPTER 1

تابع



یک ماشین است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد. ورودی‌های مجاز را دامنه (D) و خروجی‌های آن را برد (R) می‌نامیم. تشخیص تابع از دیدگاه‌های مختلف را در جدول زیر ببینید:

تابع	دامنه	برد	تشخیص
نمودار پیکانی از A به B	A	زیرمجموعه‌ای از B	از هر عضو A دقیقاً یک فلش به عضوی از B برود.
زوج مرتب	مجموعه مؤلفه‌های اول	مجموعه مؤلفه‌های دوم	نباید مؤلفه‌های اول برابر باشند.
نمودار مختصاتی	تصویر نمودار روی محور x ها	تصویر نمودار روی محور y ها	هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
ضابطه	x های مجاز	y های مجاز	هر رابطه به شکل $y = f(x)$ تابع است.

تذکر: معمولاً رابطه‌هایی که در آن‌ها y دارای توان زوج، قدرمطلق، جزء صحیح و یا دارای ضریب متغیر است، تابع نیستند.

دامنه



دامنه همه توابع کنکوری برابر \mathbb{R} است به جز توابع گفته شده در جدول زیر.

تابع	دامنه
کسری	{ریشه‌های مخرج} - \mathbb{R}
رادیکالی با فرجه زوج	زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می‌دهیم.
لگاریتمی	در تابع $y = \log_x u$ ، بین سه شرط $u > 0$ ، $x > 0$ و $x \neq 1$ اشتراک می‌گیریم.

تذکر: قبل از محاسبه دامنه تابع، هیچ وقت ضابطه تابع را ساده نکنید.

برد



بهترین روش برای پیدا کردن برد توابع، رسم نمودار آن‌ها است. این روش معمولاً برای توابع **پراکتی**، **چندضابطه‌ای** و **قدرمطلق** استفاده می‌شود. در جدول زیر، برد بعضی از توابع خاص آمده است. آن‌ها را بلد باشید:

برده	ضابطه	برده	ضابطه
$R = \{0, -1\}$	$y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	① $a > 0$; $R = [\frac{-\Delta}{4a}, +\infty)$ ② $a < 0$; $R = (-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$	$y = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$
① $x > 0$; $R = [2, +\infty)$ ② $x < 0$; $R = (-\infty, -2]$	$y = x + \frac{1}{x}$	$R = [-1, 1]$	$y = \sin x$, $y = \cos x$
$R = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$	$y = \frac{ax+b}{cx+d}$; $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$	$R = [0, 1)$	$y = x - [x]$

تساوی دو تابع

دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را مساوی می‌گوییم هر وقت اولاً دامنه‌هایشان با هم برابر باشند و ثانیاً ضابطه‌هایشان هم یکی باشند. در این صورت نمودار دو تابع f و g برهم منطبق است. برای جلوگیری از افتادن در دام‌های تستی بخش تساوی دو تابع، حواستان به گذاشتن قدرمطلق بعد از خارج کردن عبارت از زیر رادیکال با فرجه زوج باشد.

انتقال و تبدیلات

این جا می‌خواهیم از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودارهای جدیدی را رسم کنیم. برای این کار ۶ حالت اصلی زیر را ببینید:

انتقال و تبدیلات	نحوه رسم	دامنه و برد
$y = f(x) + k$	<ol style="list-style-type: none"> $f(x) : k > 0$ را به اندازه k واحد بالا می‌بریم. $f(x) : k < 0$ را به اندازه k واحد پایین می‌بریم. 	دامنه ثابت ولی برد k واحد جابه‌جا می‌شود.
$y = f(x + k)$	<ol style="list-style-type: none"> $f(x) : k > 0$ را به اندازه k واحد چپ می‌بریم. $f(x) : k < 0$ را به اندازه k واحد راست می‌بریم. 	برد ثابت ولی دامنه k واحد جابه‌جا می‌شود.
$y = kf(x)$	عرض تابع k برابر می‌شود.	دامنه ثابت ولی برد k برابر می‌شود.
$y = f(kx)$	طول تابع $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.	برد ثابت ولی دامنه $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.
$y = -f(x)$	قرینه $f(x)$ نسبت به محور x ها	دامنه ثابت ولی برد تغییر می‌کند.
$y = f(-x)$	قرینه $f(x)$ نسبت به محور y ها	برد ثابت ولی دامنه تغییر می‌کند.

■ **تقدم روی انتقال و تبدیلات:** برای رسم تابع $y = af(bx + c) + d$ از روی $f(x)$ تقدم به صورت زیر است:

$$d \quad 4 \quad a \quad 3 \quad b \quad 2 \quad c \quad 1$$

یعنی اینکه از روی $f(x)$ به ترتیب $f(x + c)$ ، $f(bx + c)$ ، $af(bx + c)$ و در آخر $af(bx + c) + d$ را رسم می‌کنیم.

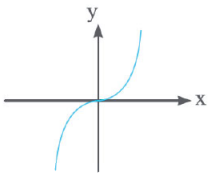
رسم نمودار $f(x)$ و $f(|x|)$

ابتدا $f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس بخشی از $f(x)$ که زیر محور x ها است را قرینه کرده و به بالای این محور منتقل می‌کنیم.	$y = f(x) $
ابتدا $f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس سمت چپ محور y ها را پاک کرده و قرینه بخشی که سمت راست محور y ها است را در سمت چپ هم می‌کشیم.	$y = f(x)$

توابع خاص

نوبتی هم که باشد، نوبت توابع ثابت، همانی و خطی است. برای یادگرفتن آن‌ها جدول زیر را به خاطر بسپارید:

تابع	تابع ثابت	تابع همانی	تابع خطی
ضابطه	$y = c$	$y = x$	$y = ax + b ; a \neq 0$
تعریف	به ازای هر ورودی، جوابش c می‌شود.	هر ورودی‌ای که می‌گیرد، خروجی‌اش همان می‌شود.	در ضابطه تابع خطی، a شیب و b عرض از مبدأ است.
نمودار	«خط افقی» 	«نیمساز ناحیه اول و سوم» 	

تابع درجه سوم


ضابطه این تابع به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) است. ساده ترین حالت این تابع $y = x^3$ است که نمودار آن به صورت مقابل می باشد (شبه لوله) و همچنین داریم:

$$\text{دامنه} = \mathbb{R} \quad , \quad \text{برد} = \mathbb{R}$$

تذکر: توابع درجه سوم پرکاربرد زیرا ببینید:

$$y = (x \pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1 \quad , \quad y = (x \pm 2)^3 = x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8$$

تابع هموگرافیک

هر تابع به فرم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با دو شرط $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$ را هموگرافیک می نامیم. دامنه و برد این تابع به صورت زیر است:

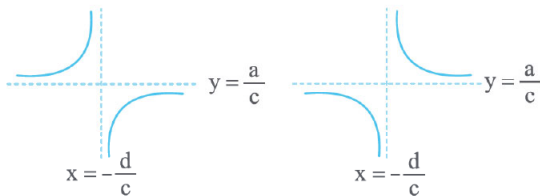
$$D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \quad , \quad R = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

تذکر: در توابع به فرم هموگرافیک:

۱) اگر $c = 0$ باشد، تابع خطی می شود. ۲) اگر $ad - bc = 0$ باشد، تابع ثابت می شود.

$$ad - bc > 0$$

$$ad - bc < 0$$


نمودار تابع هموگرافیک
یکتوایی

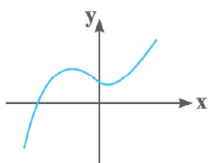
حالت های مختلف یکتوایی را از روی جدول زیر یاد بگیرید:

مثال	تعریف ریاضی	تعریف فارسی	وضعیت
	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	با افزایش x ، مقدار تابع هم زیاد می شود.	اکیداً صعودی
	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	با افزایش x ، مقدار تابع یا ثابت می ماند یا زیاد می شود.	صعودی
	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	با افزایش x ، مقدار تابع کم می شود.	اکیداً نزولی
	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	با افزایش x ، مقدار تابع یا ثابت می ماند یا کم می شود.	نزولی

تذکر: ۱) توابعی که نه صعودی و نه نزولی باشند را غیریکتوایی می نامیم. مانند شکل مقابل:

۲) تنها تابع دنیا که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت می باشد.

۳) بهترین روش برای بررسی یکتوایی توابع، رسم آنها است.

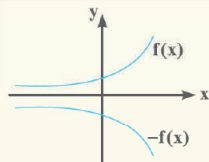


یکنوایی توابع معروف



یکنوایی توابع خطی، درجه دوم و هموگرافیک از جمله مطالب مهم در کنکور است که دانستن آن برای همه الزامی است.

تابع	وضعیت یکنوایی
تابع خطی $y = ax + b$	<p>۱ اگر $a > 0$ باشد، تابع اکیداً صعودی است.</p> <p>۲ اگر $a < 0$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.</p> <p>۳ اگر $a = 0$ باشد، تابع ثابت است. (هم صعودی و هم نزولی)</p>
تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c; a \neq 0$	<p>۱ اگر $a > 0$ باشد، تابع در بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و در بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.</p> <p>۲ اگر $a < 0$ باشد، تابع در بازه $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و در بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.</p> <p>توجه داشته باشید این تابع در کل غیریکنوا است.</p>
تابع هموگرافیک $y = \frac{ax + b}{cx + d}$	<p>۱ اگر $ad - bc > 0$ باشد، تابع دو شاخه اکیداً صعودی دارد ولی در کل غیریکنوا است.</p> <p>۲ اگر $ad - bc < 0$ باشد، تابع دو شاخه اکیداً نزولی دارد ولی در کل غیریکنوا است.</p>



نکته: ۱ اگر $f(x)$ اکیداً صعودی باشد، $-f(x)$ اکیداً نزولی است و برعکس. این هم شکلش:

۲ جمع دو تابع صعودی، تابعی صعودی و همچنین جمع دو تابع نزولی تابعی نزولی است.

اعمال جبری روی توابع



اگر بخواهیم دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را با هم جمع، ضرب و ... کنیم، اولین کار این است که اشتراک دامنه‌شان را به دست آوریم، سپس عمل جبری خواسته شده را روی y هایشان انجام دهیم.

تذکره: برای محاسبه دامنه توابع کسری، علاوه بر اشتراک گرفتن بین دامنه تابع‌های صورت و مخرج کسر، باید حواسمان باشد که مخرج کسر صفر نشود. به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

ترکیب توابع



منظور از تابع مرکب $f(g(x))$ ، تابعی است که در آن خروجی‌های $g(x)$ ، ورودی $f(x)$ شوند. به زبان ساده‌تر داستان به این صورت است که در تابع $f(g(x))$ ابتدا x وارد تابع g می‌شود و سپس $g(x)$ ساخته شده را به جای x در تابع f قرار می‌دهیم. در نهایت $f(g(x))$ به دست می‌آید.

نکته: گاهی اوقات تابع مرکب $(f \circ g)(x)$ و یکی از توابع $f(x)$ یا $g(x)$ داده می‌شوند و تابع دیگر خواسته می‌شود. در این تست‌ها دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱ f و $f \circ g$ معلوم باشند: در این حالت که تابع بیرونی یعنی $f(x)$ داده شده است، در ضابطه این تابع به جای x ، $g(x)$ قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید. در نهایت دو ضابطه $f(g(x))$ را با هم برابر قرار می‌دهیم تا ضابطه $g(x)$ به دست آید. (جای‌گذاری)

۲ $f \circ g$ و g معلوم باشند: در این صورت که تابع درونی یعنی $g(x)$ داده شده است، از تغییر متغیر $t = g(x)$ کمک می‌گیریم و x را بر حسب t پیدا می‌کنیم و در ضابطه $(f \circ g)(x)$ قرار می‌دهیم. (تغییر متغیر)

دامنه تابع مرکب



$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

دامنه تابع $y = (f \circ g)(x)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

البته برای محاسبه دامنه تابع $(f \circ g)(x)$ می‌توانیم تابع $g(x)$ را به جای x در تابع $f(x)$ قرار دهیم تا ضابطه $f(g(x))$ به دست آید و سپس دامنه این تابع را از روی ضابطه‌اش محاسبه کنیم. (فقط توجه داشته باشید در این حالت ساده‌سازی انجام ندهید.)

تابع یک به یک


تابع $y = f(x)$ یک به یک است هرگاه ورودی های مختلف، خروجی هاییشان یکسان نشوند. تشخیص تابع یک به یک را در سه حالت زیر بلد باشید:

دیدگاه	وضعیت یک به یکی	مثال
زوج مرتب	برای یک به یکی تابع زوج مرتبی، نباید مؤلفه های دوم برابر باشند.	$f = \{(1, 2), (2, 2)\}$ غیر یک به یک
نمودار	هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.	 غیر یک به یک
ضابطه	۱ رسم نمودار تابع ۲ هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک است.	$f(x) = x + [x]$ x اکیداً صعودی و $[x]$ صعودی است، پس مجموعه شان اکیداً صعودی و در نتیجه یک به یک می باشد.

تابع وارون (تابع معکوس)


اگر $f(x)$ یک به یک باشد، وارون پذیر است. وارون تابع $f(x)$ را با نماد $f^{-1}(x)$ نمایش می دهیم. حواستان باشد که $f^{-1}(x)$ هیچ ربطی به $\frac{1}{f(x)}$ ندارد. برای رسیدن به وارون تابع $f(x)$ ، جای ورودی و خروجی $f(x)$ را با هم عوض می کنیم؛ یعنی:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

پیدا کردن تابع معکوس را در سه حالت زوج مرتب، نمودار و ضابطه بلد باشید:

دیدگاه	تابع وارون (معکوس)	مثال
زوج مرتب	برای پیدا کردن تابع معکوس جای مؤلفه های اول و دوم تابع را با هم عوض می کنیم.	$f = \{(1, 4), (2, 3)\} \Leftrightarrow f^{-1} = \{(4, 1), (3, 2)\}$
نمودار	نمودار دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه اند.	
ضابطه	ابتدا x را تنها می کنیم و سپس جای x و y را با هم عوض می کنیم.	$y = 2x + 1$ $\Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y^{-1} = \frac{x-1}{2}$

نکته: موارد زیر را در مورد تابع وارون بدانید.

$$R_f = D_{f^{-1}}, \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

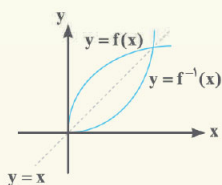
۱ دامنه $f(x)$ ، برد $f^{-1}(x)$ و برد $f(x)$ ، دامنه $f^{-1}(x)$ است:

۲ اگر $f(x)$ اکیداً صعودی باشد، $f^{-1}(x)$ هم اکیداً صعودی است و اگر $f(x)$ اکیداً نزولی باشد، $f^{-1}(x)$ هم اکیداً نزولی است.

۳ اگر $f(x)$ اکیداً صعودی باشد و تابع $f^{-1}(x)$ را قطع کند، نقطه تقاطع حتماً روی خط $y = x$ است.

پس به جای حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ می توانیم معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.

۴ ترکیب هر تابع با وارونش، تابع همانی می شود.



$$(f \circ f^{-1})(x) = x; \quad x \in D_{f^{-1}} = R_f, \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x; \quad x \in D_f = R_{f^{-1}}$$

۵ برای دو تابع وارون پذیر $f(x)$ و $g(x)$ داریم:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل
۱

اهلاً و سهلاً. مرحباً بگم. هذا تابع

مفهوم تابع

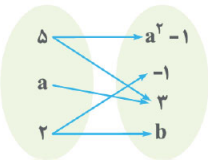
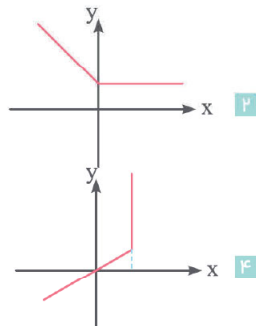


(برگرفته از کتاب درسی)

x	۲	$\sqrt{3}$	۳
y	۱	۲	۱

۴ رابطه بین مادر و فرزندان

(برگرفته از کتاب درسی)

۴ هیچ مقدار m

۶ اگر R رابطه‌ای باشد که به هر عدد طبیعی کمتر از ۵ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت دهد، حداقل چند زوج مرتب از R حذف کنیم تا این رابطه به یک تابع تبدیل شود؟

۴ ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴

۷ حداقل چند نقطه از رابطه $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$ حذف کنیم تا این رابطه یک تابع باشد؟

۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۶ ۴

(تجربی داخل ۱۴۰۲)

۸ حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{y^2}{y^2 - 1}\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴

۹ $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x \leq 2 \\ 1 & \text{اگر } x = 2 \\ a \sin(x - 2) + b & x \geq 2 \end{cases}$ ضابطه یک تابع باشد، $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۴ ۱ -۸ ۲ ۴ ۳ ۸ ۴

۱۰ اگر $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & |x - 1| \geq 1 \\ g(x) & |x - 1| < 1 \end{cases}$ یک تابع باشد، $g(x)$ برابر با کدام یک از گزینه‌ها می‌تواند باشد؟

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1 & x \geq 1 \\ x^2 + 2 & x \leq 1 \end{cases} \quad \text{۴}$$

$$y^3 = \sqrt{x} - 1 \quad \text{۳}$$

$$y^2 - 1 = \sin x \quad \text{۲}$$

$$|y| = |x| \quad \text{۱}$$

کدام یک از گزینه‌های زیر نمایش جبری یک تابع است؟

۱۱

کدام گزینه یک تابع را نمایش می‌دهد؟

۱۲

$$(y-1)^2 + |x-1| = 0 \quad \text{۲}$$

$$y^2 - xy + 3 = 0 \quad \text{۱}$$

$$y^4 - xy^3 = 0 \quad \text{۴}$$

$$\cos y = x \quad \text{۳}$$

دامنه



دامنه یکی از مفاهیم خیلی مهم توی فصل تابع هست. راستی اینم بگیم که توی خیلی از فصل‌های دیگه هم استفاده می‌شه. تا همشو یاد نگرفتین نرید فصل بعدیا!

دامنهٔ مقدماتی



(برگرفته از کتاب درسی)

 اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، دامنهٔ آن‌ها در چند نقطهٔ صحیح مشترک‌اند؟

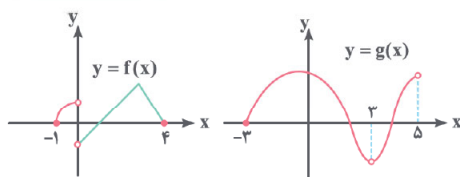
۱۳

۳ ۱

۴ ۲

۵ ۳

۶ ۴


 دامنهٔ تابع $f = \{(a^2 - 3a, a+1), (-3, 1), (-2, 3)\}$ دو عضوی است. a چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱۴

۱ صفر

۲ ۱

۳ ۲

۴ ۳

 تعداد اعضای دامنه و برد یک تابع به ترتیب $17 - 2n$ و $n + 1$ می‌باشد. n چند مقدار طبیعی می‌تواند داشته باشد؟

۱۵

۳ ۱

۴ ۲

۵ ۳

۶ ۴

دامنهٔ توابع کسری


 دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$ کدام است؟

۱۶

 $\mathbb{R} - \{0, 3\}$ ۱
 $\mathbb{R} - \{1, -1\}$ ۲
 $\mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$ ۳
 $\mathbb{R} - \{0, 1, -1, 3\}$ ۴

(برگرفته از کتاب درسی)

 دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-4)(5x^2-26x+5)}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱۷

۱ ۱

۲ ۲

۳ ۳

۴ ۴

 اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{x+2}{2x^2-ax-b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ باشد، $2a+b$ کدام است؟

۱۸

۲ ۱

۱۲ ۲

۱۰ ۳

۲۲ ۴

 دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{b}{ax^2+12x+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-3\}$ است. $a+b$ کدام است؟

۱۹

۱۰ ۱

-۱۰ ۲

۲۰ ۳

-۲۰ ۴

 اگر دامنهٔ توابع $f(x) = \frac{3x-1}{2x^2-x-m}$ و $g(x) = \frac{1}{|x|+2}$ با هم برابر باشند، کدام گزینه صحیح است؟

۲۰

 $m = \frac{1}{8}$ ۱
 $m = \frac{-1}{8}$ ۲
 $m < \frac{1}{8}$ ۳
 $m < -\frac{1}{8}$ ۴
 دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{2x}{(x-1)(x^2+mx+1)}$ برابر با $\mathbb{R} - \{1\}$ است. حدود m کدام است؟

۲۱

 $-3 < m < 1$ ۱
 $-1 < m < 3$ ۲
 $-2 < m < 2$ ۳
 $-2 \leq m < 2$ ۴
 اگر دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2+3mx+m+6}$ به صورت $\mathbb{R} - \{\alpha, \frac{1}{\alpha}\}$ باشد، $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ کدام است؟

۲۲

-۴ ۱

۴ ۲

-۶ ۳

۶ ۴

دامنه توابع رادیکالی

۲۳ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ به صورت $[a, b]$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

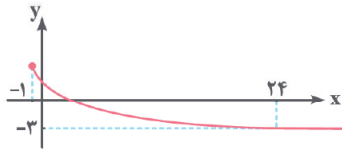
۲۴ دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۲۵ شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ است. طول از مبدأ نمودار تابع کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵

(برگرفته از کتاب درسی)



(تجربی خارج ۹۶)

۲۶ اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{x}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۲۷ دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x}}{\sqrt{5-x} - 1}$ به صورت $[a, b] - \{c\}$ است. مقدار $a+b+c$ کدام می‌باشد؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۹

۲۸ دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}}$ به صورت $[a, b]$ است. $b-a$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵

(تجربی داخل ۹۲)

۲۹ اگر $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ ، دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۳۰ اگر $f(x+1) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ باشد، دامنه $f(x-1)$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۳۱ اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-x^2+ax+b}$ ، بازه $[-1, 2]$ باشد و بدانیم دامنه تابع $g(x) = \frac{5x}{2x^2-cx+d}$ به صورت $\mathbb{R} - \{a, b\}$ می‌باشد، $d-ac$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۳۲ اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-x^2+ax+b}$ به صورت $D_f = \{1\}$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۳۳ بدایزای چند مقدار صحیح از m ، دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2}}{|x|-m}$ برابر با \mathbb{R} است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۸ | ۹

۳۴ دامنه تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+2x+4}} & x < 0 \\ \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+3x+2} & x \geq 0 \end{cases}$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

دامنه توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

دو تا ابزار خوب (قدرمطلق و برکت) برای سخت شدن تست‌ها ...

۳۵ دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|-3}$ به صورت $\mathbb{R} - \{a, b\}$ است. $a+b$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۳۶ دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{|2x-1|-3}}$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

۳۷ اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+3|}$ ، دامنه تابع $f(-x+1)$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

- ۳۸ دامنه تابع $y = \sqrt{|x+1|} + |x-3| - 6$ کدام است؟
- ۱ $\mathbb{R} - (-2, 4)$ ۲ $\mathbb{R} - [-2, 4]$ ۳ $[-2, 4]$ ۴ $(-2, 4)$
- ۳۹ تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2|x+3| + 6}$ در بازه (a, b) تعریف نشده است. $a + b$ کدام است؟
- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴
- ۴۰ اگر دامنه دو تابع $f(x) = \sqrt{4x - x^2} - 3$ و $g(x) = \sqrt{b - |x+a|}$ برابر باشند. ab کدام است؟ ($b > 0$)
- ۱ -۲ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ -۳
- ۴۱ دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{[3x-1]}$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است.)
- ۱ $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ ۲ $\mathbb{R} - (0, 1)$ ۳ $\mathbb{R} - [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ۴ $\mathbb{R} - [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
- ۴۲ دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{|x-3|}{1-|x|}}$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است.)
- ۱ $(1, 3)$ ۲ $(2, 4)$ ۳ $[2, 3]$ ۴ $(1, 4)$

دامنه توابع لگاریتمی

دامنه توابع لگاریتمی جدیداً خیلی خیلی توی کنکور میاد. البته واسه حلش معمولاً گزینه بازی هم خیلی جوابه...

- ۴۳ دامنه تابع $y = \log_{x-1}(9-x^2)$ شامل چند عدد صحیح است؟
- ۱ ۶ ۲ ۴ ۳ ۲ ۴ صفر
- ریاضی داخل ۹۵
- ۴۴ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ به کدام صورت است؟
- ۱ $[-2, 0) \cup (3, 5]$ ۲ $(-2, 0] \cup (3, 5)$ ۳ $[-2, 3)$ ۴ $(0, 5]$
- تجربی دی ۱۴۰۱
- ۴۵ دامنه $f(x) = \frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$ شامل چند عدد صحیح است؟
- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳
- تجربی داخل ۱۴۰۰
- ۴۶ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\log_4(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ کدام است؟
- ۱ $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ ۲ $(-1, 2)$ ۳ $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ۴ $(-2, 1)$
- تجربی خارج ۱۴۰۰
- ۴۷ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log_4(|x^2 - 2|x - x|)$ کدام است؟
- ۱ $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$ ۲ $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ ۳ $[-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ ۴ $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

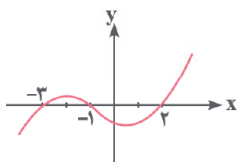
دامنه توابع مثلثاتی

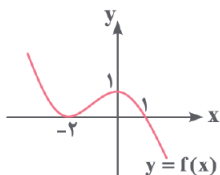
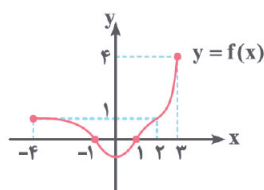
- ۴۸ کدام عدد در دامنه تابع $y = -\frac{1}{\sqrt{x}} \cot(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}})$ قرار ندارد؟
- ۱ $\frac{9\pi}{4}$ ۲ $-\frac{2\pi}{3}$ ۳ $\frac{9\pi}{2}$ ۴ $\frac{\pi}{2}$
- ۴۹ دامنه تابع $f(x) = \tan(\frac{\pi + \pi x}{4})$ در بازه $(-5, 5)$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟
- ۱ ۷ ۲ ۵ ۳ ۶ ۴ ۴
- ۵۰ دامنه تابع $y = \sqrt{1 - \sqrt{|\sin x|}}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- ۱ $\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{4}\}$ ۲ $\mathbb{R} - \{2k\pi + \frac{\pi}{4}\}$ ۳ $\mathbb{R} - \{2k\pi - \frac{\pi}{4}\}$ ۴ \mathbb{R}
- ۵۱ دامنه تابع $y = \cos(\sqrt{1-|x|})$ به صورت $(-\infty, a)$ است. بیشترین مقدار a کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است.)
- ۱ ۱ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ ۲ ۴ $\frac{5}{2}$

دامنه از روی نمودار

۵۲ شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $f(x)$ است. دامنه تابع غیرنقطه‌ای $y = \sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟

- ۱ $[-3, 2]$
 ۲ $[-1, +\infty)$
 ۳ $(-\infty, -1]$
 ۴ $\mathbb{R} - (-3, 2)$





۵۳ شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\frac{\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۴ ۱
۵ ۲
۶ ۳
۷ ۴

۵۴ نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = \sqrt{x-f(x-1)}$ کدام است؟

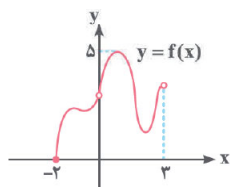
- ۱ $(-\infty, -2]$
۲ $(-\infty, -1]$
۳ $[1, +\infty)$
۴ $[2, +\infty)$

برد



برد تابع از روی نمودار

(برگرفته از کتاب درسی)



(برگرفته از کتاب درسی)

۵۵ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. $D_f \cap \mathbb{R}_f$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

- ۲ ۱
۳ ۲
۴ ۳
۵ ۴

۵۶ برد تابع $y = |1 - \sqrt{x}|$ کدام است؟

- ۱ $[1, +\infty)$ ۲ $[0, 1]$ ۳ $[0, +\infty)$ ۴ $(0, 1]$

۵۷ اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 - 2x$ به صورت $\mathbb{R} - \{a, b\}$ باشد، برد تابع $\{-b, -1, +\infty\}$ است. $a + b$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۵ ۳ ۱۲ ۴ ۱۵

۵۸ برد تابع $f(x) = \frac{1}{|x| + |x-1|}$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- ۱ $[1, 3]$ ۲ $[\frac{1}{3}, 1]$ ۳ $[1, +\infty)$ ۴ $[0, 1]$

۵۹ برد تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ |x+2| & x \leq 0 \end{cases}$ کدام است؟

- ۱ $\mathbb{R} - \{0\}$ ۲ $\mathbb{R} - \{1\}$ ۳ $\mathbb{R} - \{1, 0\}$ ۴ \mathbb{R}

۶۰ برد تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ a - \sqrt{x+9} & x \geq 0 \end{cases}$ برابر با \mathbb{R} می‌باشد. کمترین مقدار صحیح a کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

برد تابع بدون رسم نمودار

۶۱ اگر برد تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ برابر $\mathbb{R}_f = \{0, 2, \frac{5}{4}\}$ باشد، کدام یک از نقاط زیر در دامنه تابع f قرار ندارد؟

- ۱ ۵ ۲ ۴ ۳ -۲ ۴ -۱

۶۲ اگر برد تابع خطی $y = \frac{-x}{4} + 3$ بازه $(0, 3]$ باشد، دامنه آن شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ ۷ ۲ ۶ ۳ ۴ ۴ ۵

۶۳ برد تابع $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ به صورت $\mathbb{R} - \{a\}$ است. a^2 کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ $\sqrt{2}$ ۳ ۲ ۴ ۴

۶۴ برد تابع $y = \frac{-2}{-1-x^3}$ کدام است؟

- ۱ $(0, 1]$ ۲ $(0, 2]$ ۳ $[-1, 0)$ ۴ $(-2, -1]$

۶۵ برد تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 1}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

۶۶ برد تابع $y = [\frac{x}{4} + 1] + [3 - \frac{x}{4}]$ به صورت $\{\alpha, \beta\}$ است. مقدار $\alpha\beta$ کداه است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است.)

- ۱ ۶ ۲ ۹ ۳ ۱۰ ۴ ۱۲

- ۶۷ برد تابع $f(x) = \sqrt{1 + 4x - 8\left[\frac{x}{y}\right]}$ کدام است؟
 ۱ (۱, ۳) ۲ (۱, ۳) ۳ (۱, ۳) ۴ [۱, ۳]
- ۶۸ برد دو تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 4x + (3a-4)$ با هم برابر است. برد تابع $y = a \sin x + 3$ کدام است؟
 ۱ [۳, ۷] ۲ [-۱, ۷] ۳ [۱, ۳] ۴ [۴, ۷]
- ۶۹ برد تابع $f(x) = \log_2 x + \log_x 16 + 1$ با دامنه $x > 1$ به صورت $[a, +\infty)$ است. مقدار $f(a-3)$ کدام است؟
 ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸
- ۷۰ برد تابع $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ به صورت $[a, +\infty)$ است. حداقل مقدار a کدام است؟
 ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳
- ۷۱ برد تابع $f(x) = 2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x$ کدام است؟
 ۱ [-۲, ۳] ۲ [-۳, ۲] ۳ [-۲, ۳] ۴ [-۳, ۳]
- ۷۲ فرض کنید بازه $[a, b]$ برد تابع $f(x) = 3 - \sqrt{5 \sin^2(x) - 1}$ باشد. مقدار $a + b$ کدام است؟
 ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{3}{4}$ ۴ $\frac{5}{4}$
- ۷۳ برد تابع $y = |\cos^2 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 4|$ شامل چند عضو است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)
 ۱ ۷ ۲ ۸ ۳ ۹ ۴ ۱۰
- ۷۴ برد تابع $y = \frac{2 \sin x - 1}{1 + \sqrt{1 - \cos^2 x}}$ کدام است؟ ($x \in (0, \pi)$)
 ۱ $[-\frac{1}{2}, 1)$ ۲ $(1, +\infty)$ ۳ $(-1, \frac{1}{2})$ ۴ $(0, 1)$

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

تساوی دو تابع

- ۷۵ اگر توابع $f = \{(1, a), (2, a+b), (c, 2)\}$ و $g = \{(1, 0), (2, 2), (3, -1)\}$ مساوی باشند. $a + b + c$ کدام است؟
 ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴
- ۷۶ در کدام گزینه دو تابع با هم برابر هستند؟
 ۱ $f(x) = (\sqrt{x})^2$ و $g(x) = (\sqrt{x})^2$
 ۲ $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ و $g(x) = \sqrt{x-1} \sqrt{x+1}$
 ۳ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{1+x} \sqrt{1-x}$
 ۴ $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ و $g(x) = x + 3$
- ۷۷ کدام دو تابع داده شده با هم مساوی نیستند؟
 ۱ $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$ و $g(x) = x - 1$
 ۲ $f(x) = \frac{x^3 - 1}{|x| + 1}$ و $g(x) = |x| - 1$
 ۳ $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ و $g(x) = 1$
 ۴ $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $g(x) = x - 2$
- ۷۸ کدام دو تابع با هم برابرند؟
 ۱ $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$
 ۲ $f(x) = \sqrt{-x^3}$ و $g(x) = x\sqrt{-x}$
 ۳ $f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$
 ۴ $f(x) = x|x+1|$ و $g(x) = |x|(x+1)$
- ۷۹ در کدام گزینه توابع f و g با هم برابر نیستند؟
 ۱ $f(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 3}\right]$ و $g(x) = 0$
 ۲ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ و $g(x) = \frac{x}{|x|}$
 ۳ $f(x) = \log \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{4} \log x$
 ۴ $f(x) = \tan x \cdot \cot x$ و $g(x) = 1$
- ۸۰ کدام یک از توابع زیر، با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟
 ۱ $y = \log(x-2) - \log x$
 ۲ $y = \log \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$
 ۳ $y = \frac{1}{4} \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$
 ۴ $y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$
- ۸۱ نمودار دو تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & x \neq 2 \\ 3k & x = 2 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ بر هم منطبق هستند. $a + b + k$ کدام است؟
 ۱ ۴ ۲ ۶ ۳ ۸ ۴ ۱۰

(تجربی خارج ۹۷)

۸۲ اگر $f(x) = \frac{5}{x+2}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم برابر باشند، $a+d$ کدام است؟

۹ ۴

۸ ۳

۷ ۲

۶ ۱

مقداردهی به تابع



رسیدیم به بحث شیرین مقداردهی به تابع. آسونه! ولی تست‌های ابتکاری هم زیاد داریم توش.

(برگرفته از کتاب درسی)

۸۳ اگر $f(x) = \begin{cases} x-2 & x > 2 \\ x^2+x & -1 < x < 2 \\ 4x+2 & x < -1 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(-\sqrt{2}+1) + f(3\sqrt{2}-2)$ کدام است؟

۳۰ ۴

صفر ۳

۸ ۲

۶۰ ۱

۸۴ در تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \geq a \\ -x+9 & x \leq a \end{cases}$ مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

۲۶ ۴

۲۳ ۳

۱۳ ۲

۱۰ ۱

۸۵ اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x) + 1 - 2f(x)$ کدام است؟

$\frac{2x-1}{x^2-1}$ ۴

$\frac{2x+1}{1-x^2}$ ۳

$\frac{2x}{x^2-1}$ ۲

$\frac{1}{1-x^2}$ ۱

۸۶ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد، حاصل $f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2}))$ کدام است؟

۴۰ ۴

۴ ۳

۴(√۲-۱) ۲

۴(۱-√۲) ۱

۸۷ اگر $f(1-2x) = \begin{cases} \sqrt{x}+2 & x \leq 0 \\ \sqrt{4x} & x > 0 \end{cases}$ باشد، $f(3) + f(-1)$ کدام است؟

۵ ۴

۴ ۳

۳ ۲

۲ ۱

۸۸ در تابع $f(x) = \begin{cases} -x-1 & x \geq 0 \\ x+2 & x < 0 \end{cases}$ اگر $f(f(\sqrt{a})) = -3$ باشد، $f(a)$ کدام است؟

-۱۷ ۴

۱۷ ۳

-۱۶ ۲

۱۶ ۱

۸۹ اگر $f(x) = \frac{x^2-6x+13}{x^2-6x+1}$ باشد، مقدار $f(3+\sqrt{5})$ کدام است؟

۲ ۴

-۲ ۳

۳ ۲

-۳ ۱

۹۰ اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ باشد، حاصل $f(\sqrt[3]{3}+1)$ کدام است؟

۹ ۴

۸ ۳

۷ ۲

۶ ۱

۹۱ اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ باشد، $f(1 + \sqrt{2})$ چند برابر $2 + \sqrt{2}$ است؟

۵ ۴

۴ ۳

۳ ۲

۲ ۱

۹۲ اگر $f(2x) = -f(5) - 2x + 3$ باشد، مقدار $f(-2)$ کدام است؟

۴ ۴

۶ ۳

-۱ ۲

-۳ ۱

۹۳ اگر $f(-x) - xf(x) = |2x| + 1$ باشد، $f(-3)$ کدام است؟

-۲/۸ ۴

۱/۴ ۳

۲/۸ ۲

-۱/۴ ۱

۹۴ با فرض $f(x+1) = 3^x$ ، حاصل $4f(x) + f(x+1)$ کدام است؟

$6f(x)$ ۴

$4f(x)$ ۳

$2f(x)$ ۲

$f(x)$ ۱

۹۵ اگر برای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $f(x) + f(1) = \frac{1}{x^2} - 3$ ، آنگاه $f(\cos x)$ کدام است؟

$\tan^2 x - 1$ ۴

$-\tan^2 x - 1$ ۳

$\tan^2 x + 1$ ۲

$-\tan^2 x + 1$ ۱

۹۶ اگر $f(x) = |\frac{1}{x} - 1|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟

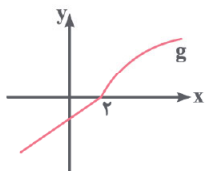
۱ ۱

۲ ۲

۳ ۳

۴ ۴

(ریاضی دی ۱۴۰۱)



نوشتن ضابطه تابع



اینم چند تا تست از نوشتن ضابطه تابع. توی فصل کاربرد مشتق (بهینه‌سازی) از این مطالب خیلی استفاده می‌کنیم.

(برگرفته از کتاب درسی)

۹۷ در یک مستطیل، طول آن از ۲ برابر عرض آن یک واحد کمتر است. مساحت مستطیل کدام است؟ (x طول مستطیل است.)

۴ $\frac{x(x+1)}{4}$

۳ $\frac{x(x-1)}{4}$

۲ $\frac{x(x+1)}{2}$

۱ $\frac{x(x-1)}{2}$

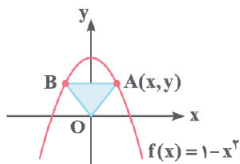
۹۸ شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = 1 - x^2$ است. مساحت مثلث OAB برحسب طول نقطه A کدام است؟

۱ $x^2 + x$

۲ $x^2 + x$

۳ $x - x^2$

۴ $x - x^2$



۹۹ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر به صورت تابعی

از r کدام است؟

۴ $\frac{2}{3}\pi r^3 + 15\pi r^2$

۳ $\frac{4}{3}\pi r^3 + 3\pi r^2$

۲ $\frac{4}{3}\pi r^3 + 3\pi r^2$

۱ $\frac{2}{3}\pi r^3 + 3\pi r^2$

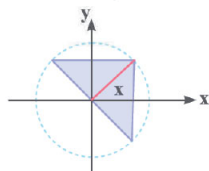
۱۰۰ مساحت ناحیه رنگی در دایره مثلثاتی مقابل تابعی از x است. ضابطه این تابع کدام است؟

۲ $\cos 2x$

۱ $\sin 2x$

۴ $2\cos x$

۳ $2\sin x$



انتقال

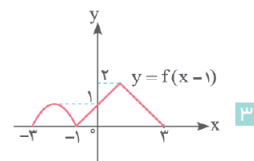
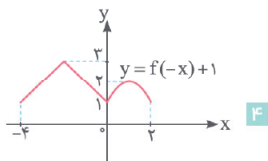
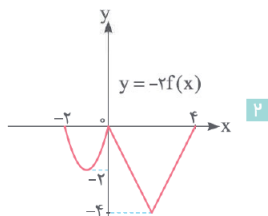
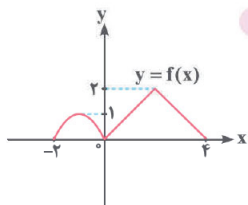


انتقال تنها بخش تابع هست که هم تو سال دهم، هم یازدهم و هم دوازدهم اومده! پس مهمه دیگه. نه مهم نیست. خیلی خیلی ... مهمه.

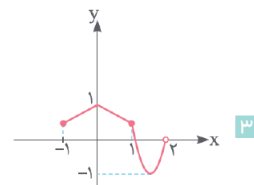
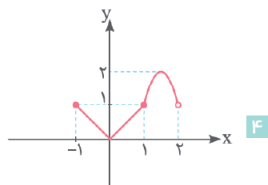
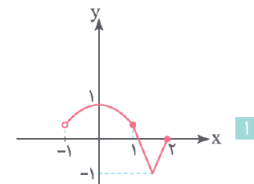
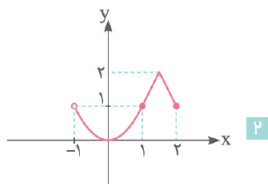
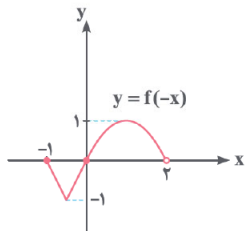
انتقال نمودار توابع



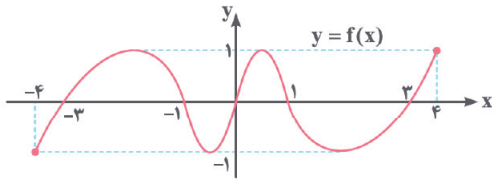
۱۰۱ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، کدام نمودار درست رسم نشده است؟



۱۰۲ نمودار تابع $y = f(-x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -f(x-1) + 1$ کدام است؟

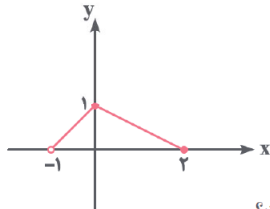


۱۰۳ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = -f\left(\frac{x}{4} + 1\right)$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟



- ۱ ۴
۲ ۸
۳ ۵
۴ ۱۰

۱۰۴ نمودار تابع $y = f(x-2)$ به صورت مقابل است، دامنه تابع $y = 2f(1-x)$ کدام است؟



- ۱ $[-4, -1]$
۲ $[-4, 1]$
۳ $[1, 4]$
۴ $[1, 4]$

۱۰۵ اگر نقطه $A(3, -1)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، نقطه متناظر با A روی نمودار تابع $y = 3f(2x+1) + 5$ کدام است؟

- ۱ $(3, 2)$ ۲ $(7, 2)$ ۳ $(1, 2)$ ۴ $(1, -8)$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۶ دامنه تابع $y = \frac{-f(x)}{4}$ به صورت $[0, 4]$ است. دامنه تابع $y = -f\left(\frac{-x}{4}\right)$ کدام است؟

- ۱ $[-8, 0]$ ۲ $[-8, 0]$ ۳ $[0, 8]$ ۴ $[0, 8]$

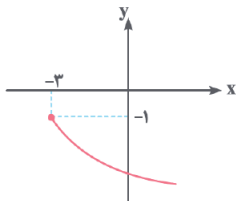
(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۷ اگر برد تابع $y = f(x-1)$ به صورت $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = -3f(2-x) + 1$ کدام است؟

- ۱ $(-1, 5)$ ۲ $[-1, 5]$ ۳ $(-5, 1)$ ۴ $[-5, 1]$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۸ نمودار تابع زیر، از قرینه یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه این تابع کدام است؟



- ۱ $y = \sqrt{-x+3} - 1$
۲ $y = -\sqrt{x+3} - 1$
۳ $y = -\sqrt{x-3} + 1$
۴ $y = -\sqrt{x-3} - 1$

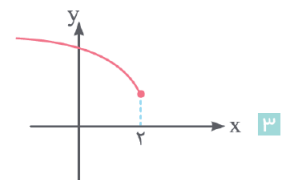
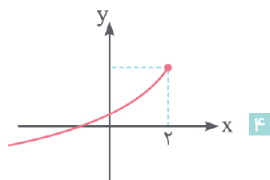
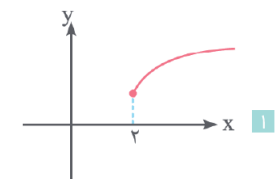
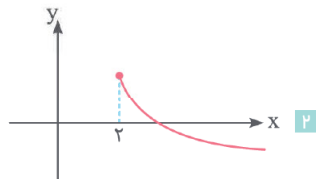
۱۰۹ قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را 4 واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟

(ریاضی داخل ۹۹)

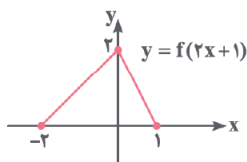
- ۱ $x = 1$ ۲ $x = 1/5$ ۳ $x = 2$ ۴ $x = 2/5$

(برگرفته از کتاب درسی)

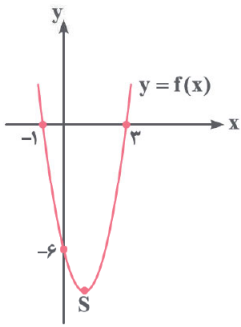
۱۱۰ نمودار تابع $y = 2 - \sqrt{-x+2}$ کدام است؟



۱۱۱ اگر نمودار تابع $y = f(2x+1)$ به صورت زیر باشد، مساحت محدود به نمودار تابع $y = f(x)$ و محور طول‌ها کدام است؟



- ۱ ۴
۲ ۶
۳ ۹
۴ ۱۲



۱۱۲ نمودار تابع درجه دوم $f(x)$ به صورت مقابل است. مختصات رأس سهمی $y = 2f(x-1) + 2$ کدام است؟

۱ $(-2, 14)$

۲ $(-2, -14)$

۳ $(2, -14)$

۴ $(2, 14)$

۱۱۳ اگر $x = 2$ محور تقارن $y = f(x+5)$ باشد، محور تقارن $y = f(5-x)$ کدام است؟

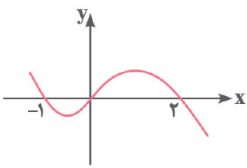
۱ $x = 5$

۲ $x = -5$

۳ $x = 2$

۴ $x = -2$

(تجربی خارج ۱۴۰۲)



۱۱۴ شکل زیر، نمودار $f(x-2)$ را نمایش می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱ ۴

۲ ۲

۳ صفر

۴ بیش از ۴

۱۱۵ اگر $f(x) = 1 - (\frac{1}{x})^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱ $[-1, 1]$

۲ $(-\infty, 0)$

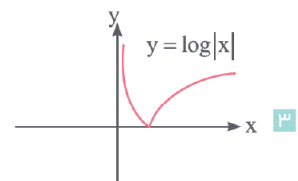
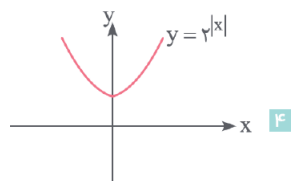
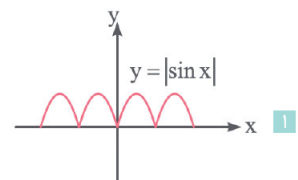
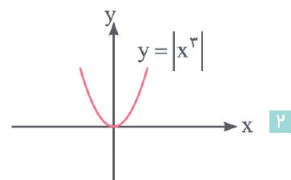
۳ $(-\infty, +\infty)$

۴ $(0, +\infty)$

نمودار و قدر مطلق

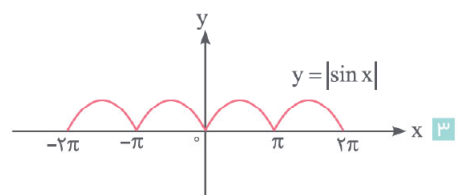
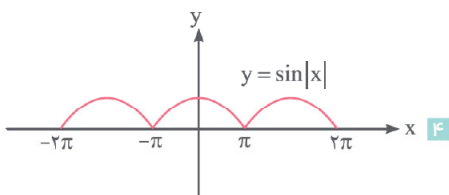
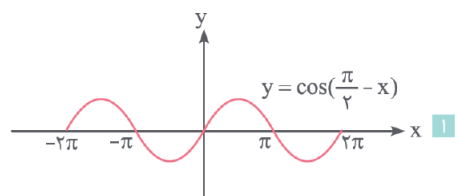
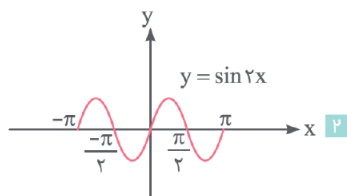
از اینجا به بعد نمودار را رنگ و بوی قدر مطلق به خودش میگیره!

۱۱۶ نمودار کدام تابع درست رسم نشده است؟

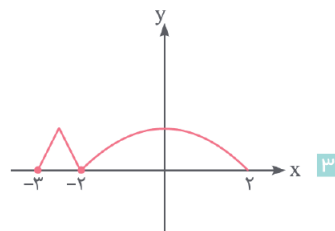
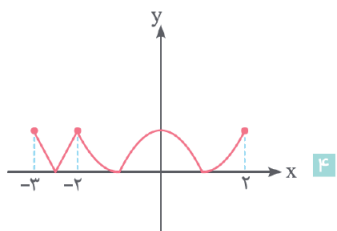
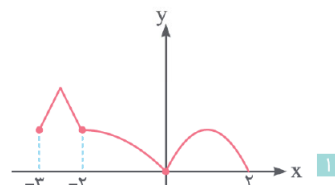
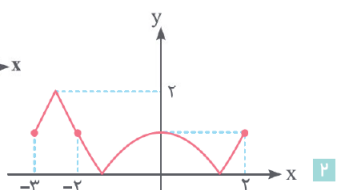
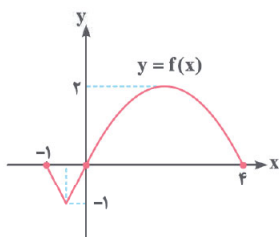


(برگرفته از کتاب درسی)

۱۱۷ کدام نمودار به درستی رسم نشده است؟



۱۱۸ اگر نمودار $f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار $y = |f(x+2) - 1|$ کدام است؟



۱۱۹ کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = |-x^2 + 1| + 4$ کدام است؟

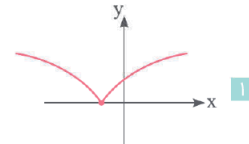
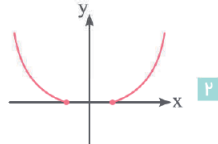
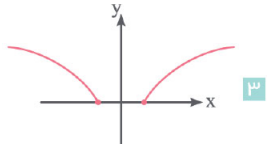
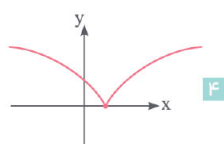
۵ ۴

۴ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۱۲۰ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{-2+|2x|}$ کدام است؟



۱۲۱ نمودار تابع $y = \sqrt{x^2 - 2|x| + 1}$ و خط $y = \frac{1}{4}$ در چند نقطه متقاطع اند؟

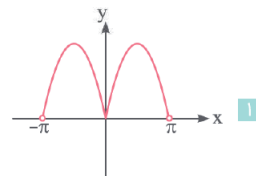
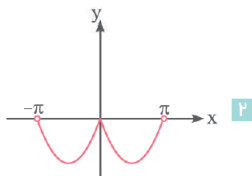
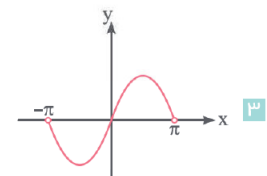
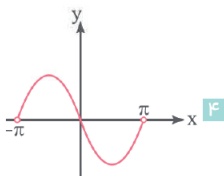
۴ ۴

۳ ۳

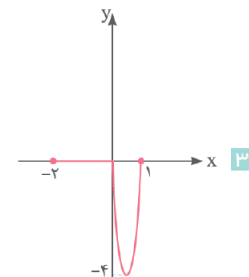
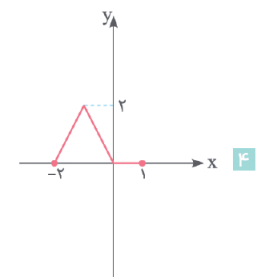
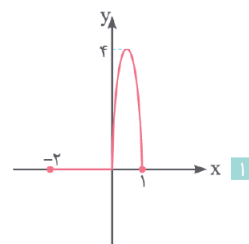
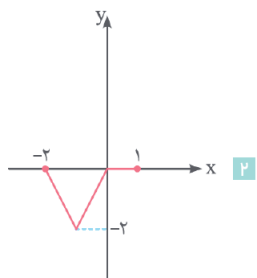
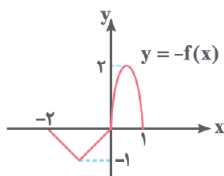
۲ ۲

۱ صفر

۱۲۲ نمودار تابع $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ در فاصله $(-\pi, \pi)$ کدام است؟



۱۲۳ نمودار تابع $y = -f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(x) - |f(x)|$ کدام است؟



انتقال از روی ضابطه

یک تیر و حشتمک مهم و پر تکرار. خودتون ببینید توی سال‌های اخیر چقدر توی کنکور اومدن فقط.

- ۱۳۴ در تابع $y = f(x)$ ، طول نقاط روی نمودار را $\frac{1}{4}$ برابر کرده و ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. ضابطه تابع جدید کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)
- ۱ $y = f(2x + 2)$ ۲ $y = f(\frac{x}{4} + 4)$ ۳ $y = f(2x + 4)$ ۴ $y = f(\frac{x}{4} + 2)$
- ۱۳۵ نموداری پس از انتقال به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس دو واحد به سمت بالا، با ضابطه $g(x) = (x - 2)^2$ مشخص شده است. ضابطه قبل از انتقال کدام است؟
- ۱ $f(x) = (x - 1)^2$ ۲ $f(x) = x^2 - 2x - 1$ ۳ $f(x) = x^2 - 6x + 11$ ۴ $f(x) = (x - 3)^2$
- ۱۳۶ نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را سه واحد به طرف x های مثبت و سپس دو واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ (تجربی داخل ۹۸)
- ۱ $(3, 4)$ ۲ $(2, 5)$ ۳ $(3, 5)$ ۴ $(2, 6)$
- ۱۳۷ قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y رسم کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟
- ۱ -2 ۲ 0.5 ۳ 1 ۴ 1.5
- ۱۳۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$ ؛ $(x > 1)$ ، مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)
- ۱ $4\sqrt{5}$ ۲ $6\sqrt{2}$ ۳ $5\sqrt{2}$ ۴ $2\sqrt{5}$
- ۱۳۹ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰)
- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{10}}{2}$
- ۱۴۰ ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x - 1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)
- ۱ $0, 2$ ۲ $-1, 1$ ۳ $-1, 2$ ۴ $-2, 1$
- ۱۴۱ تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ 2x+4 & x < -1 \end{cases}$ را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. تابع حاصل خط $3y = x + 2$ را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. مختصات نقطه M وسط پاره خط AB کدام است؟
- ۱ $(5/4, 4/7)$ ۲ $(2/95, 1/65)$ ۳ $(1/65, 2/95)$ ۴ $(4/7, 5/4)$
- ۱۴۲ تابع $y = 2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس ۲ واحد در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۱۴۰)
- ۱ $-\frac{5}{4}$ ۲ $-\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{5}{4}$ ۴ $\frac{7}{4}$
- ۱۴۳ نمودار تابع $y = |\frac{1}{4}x| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟ (تجربی داخل ۹۳)
- ۱ $-3/5$ ۲ -3 ۳ $-2/5$ ۴ -2
- ۱۴۴ نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور x ها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{1}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{4}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a) = 3$ کدام است؟ (تجربی دی ۱۴۰)
- ۱ $2 + \sqrt{2}$ ۲ 2 ۳ $2 - \sqrt{2}$ ۴ $\sqrt{2}$
- ۱۴۵ قرینه تابع $y = 3^x$ نسبت به نقطه $A(1, -1)$ را ۱ واحد به سمت بالا و دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. اگر تابع حاصل را $g(x)$ بنامیم، $g(-1)$ کدام است؟
- ۱ 2 ۲ -2 ۳ -3 ۴ 3

توابع خاص



تابع ثابت



۱۳۶ اگر $f = \{(2, 4m-1), (4, 4m^2), (3, \frac{n}{m})\}$ یک تابع ثابت باشد، Δn کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۳۷ کدام یک از توابع زیر، نمایش یک تابع ثابت نیست؟ ($x \neq 0$)

- ۱ $y = [\frac{x^2}{x^2+1}]$ ۲ $y = [\frac{2x}{\sqrt{x^3}}]$ ۳ $y = [\frac{x}{x+1}]$ ۴ $y = [\frac{1}{1+\sqrt{x}}]$

۱۳۸ اگر $f(x) = (ax+2)(b-x) - 7x^2$ ضابطه یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟

- ۱ $\{-\frac{7}{2}\}$ ۲ $\{\frac{7}{2}\}$ ۳ $\{-\frac{4}{7}\}$ ۴ $\{\frac{4}{7}\}$

۱۳۹ برد تابع $f(x) = (2a-b)x + b$ مجموعه تک عضوی $\{6-a\}$ می باشد. ab کدام است؟ ($D_f = \mathbb{R}$)

- ۱ ۲ ۳ ۴

تابع همانی



۱۴۰ اگر $f = \{(b^2 - 5b + 1, b - a^3), (a^2 - 4a + 2b, -4 + 2b)\}$ یک تابع همانی باشد، b کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۴۱ f تابعی همانی و g تابعی ثابت است. اگر $\frac{f(3) + g(f(1))}{g(f(4)) - 1} = 2$ باشد، حاصل $\frac{f(5)}{g(2)}$ کدام است؟ ($D_f = D_g = \mathbb{R}$)

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۴۲ اگر f تابع ثابت و g تابعی همانی باشد و داشته باشیم: $f(5) = g(m+3) + 1 - m$ ، حاصل $g(f(m)+1)$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۱۴۳ اگر $f(x) = \frac{a-2x^2}{bx - \frac{1}{x}}$ ضابطه یک تابع همانی باشد، $a-b$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

تابع خطی



۱۴۴ نمودار تابع خطی f از دو نقطه $(2, 5)$ و $(-3, 0)$ می گذرد. حاصل $f(2) + f(1)$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۴۵ نمودار تابع f به صورت زیر است، مقدار $f(f(5))$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

- ۱ ۲ ۳ ۴

- ۱ ۲ ۳ ۴

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۴۶ با توجه به شکل مقابل، اگر f یک تابع خطی باشد، $f(a)$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

- ۱ ۲ ۳ ۴

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۴۷ توابع خطی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[-2, 1]$ مفروض هستند. مجموع مقادیر ممکن برای این توابع به ازای $x = \frac{1}{3}$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۴۸ اگر f تابعی خطی باشد به طوری که $f(1) = -2$ و $f(f(1)) = -5$ ، تفاضل طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۴۹ اگر $f(x) = ax^2 + (x+1)(1-3x) + b$ یک تابع خطی گذرنده از مبدأ مختصات باشد، $a+b$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

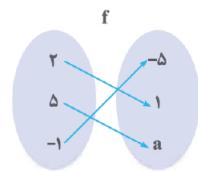
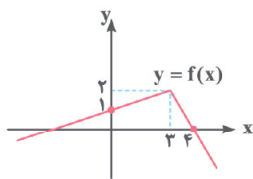
- ۱ ۲ ۳ ۴

- ۱ ۲ ۳ ۴

(برگرفته از کتاب درسی)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(برگرفته از کتاب درسی)



۱۵۰ به ازای کدام مقدار k مساحت مثلثی که خط $(k+1)y = 3kx - (k+16)$ با محورهای مختصات می‌سازد برابر با ۹ است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۱۵۱ اگر f تابعی خطی و $y = f(x+4) + f(x-2)$ تابع همانی باشد، $f(3)$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

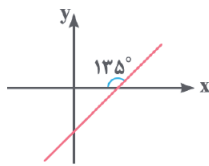
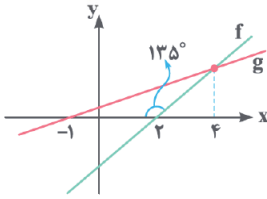
۱۵۲ نمودار دو تابع خطی f و g به صورت مقابل است. کدام یک از توابع زیر، یک تابع ثابت است؟

- ۱ $g(x) + \Delta x$
۲ $g(x) - \Delta x$
۳ $g(\Delta x) - 2x$
۴ $g(\Delta x) + 2x$

۱۵۳ نمودار تابع خطی $f(x) = (a+b+1)x^2 + bx + a$ به صورت زیر است. مساحت محدود به

نمودار این تابع و محورهای مختصات کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴



تابع درجه ۳

تابع درجه سوم و نمودارش جزء مباحث مورد علاقه طراحان است. راستش ما هم خیلی دوستش داریم. هر چی مدله به درد بخوره رو براتون آوردیم.

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۵۴ نمودار تابع $f(x) = (1-x)^3 - 2$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

- ۱ اول ۲ دوم ۳ سوم ۴ چهارم

۱۵۵ نمودار $y = x^3$ را به کمک انتقال به نمودار $y = x^3 - 6x^2 + 12x + h$ منطبق می‌کنیم. در این صورت نقطه‌ای به طول $x = 1$ در نمودار اولیه به کدام نقطه در نمودار ثانویه تبدیل می‌شود؟

- ۱ $(-3, -9)$ ۲ $(-3, -9)$ ۳ $(3, -9)$ ۴ $(3, 9)$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۵۶ نمودار تابع $y = (x-1)^3$ در بازه $(a, +\infty)$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^3 - 2x + 1$ است. حداقل مقدار a کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۵۷ نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- ۱ اول ۲ دوم ۳ سوم ۴ چهارم

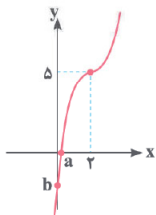
۱۵۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر از h ، تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x + h$ از ربع دوم عبور نمی‌کند؟

- ۱ $h \leq 0$ ۲ $h \geq 0$ ۳ $h \leq 8$ ۴ $h \geq 8$

۱۵۹ نمودار تابع $f(x) = x^3$ را ابتدا ۲ واحد به سمت راست و سپس ۸ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست بیاید. اگر نمودار تابع g روی

بازه (a, b) بالاتر از نمودار f باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۱ $3/5$ ۲ ۳ ۳/۵ ۴ ۲

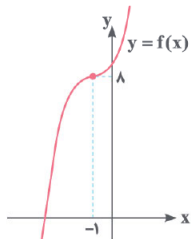


۱۶۰ نمودار تابع $y = (x-\alpha)^3 + \beta$ به صورت مقابل است. $a + b$ کدام است؟

- ۱ $-5 + \sqrt[3]{5}$
۲ $-1 + \sqrt[3]{-5}$
۳ $-5 + \sqrt{5}$
۴ $-1 - \sqrt{5}$

۱۶۱ نمودار روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = (x-a)(x^2 + 2b + c)$ است. حاصل $a - 2b - c$ کدام است؟

- ۱ -5
۲ -6
۳ -7
۴ صفر



۱۶۲ نمودار تابع $y = -x^3 + (a-1)x^2 + 2 - a$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کرده و سپس دو واحد پایین می‌آوریم. اگر تابع ایجادشده را $f(x)$ بنامیم و

بدانیم مجموع ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ برابر با -4 است، a کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۲ ۵

با توجه به حضور دو زوج مرتب $(a, b^2 + 9)$ و $(a, 6b)$ و تابع بودن رابطه، می‌توان نوشت: $b^2 + 9 = 6b \Rightarrow b^2 - 6b + 9 = 0 \Rightarrow (b - 3)^2 = 0 \Rightarrow b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$

از طرفی با توجه به دو زوج مرتب $(a - b, 2b - a)$ و $(a - b, 2a)$ مقدار a را پیدا می‌کنیم. داریم: $2b - a = 2a \Rightarrow 2b = 3a \xrightarrow{b=3} 6 = 3a \Rightarrow a = 2$

در آخر واسطه حسابی دو عدد a و b برابر با $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ می‌باشد.

تذکر

واسطه حسابی بین ۲ عدد a و b همان میانگین آن‌ها است.

۱ ۶

عددهای طبیعی کمتر از ۵، همان اعداد ۱ تا ۴ هستند. حالا رابطه R را به صورت زوج مرتب می‌نویسیم. داریم:

$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

برای اینکه این رابطه به یک تابع تبدیل شود، باید از زوج مرتب‌های $(2,2)$ و $(2,1)$ حداقل یکی، از زوج مرتب‌های $(3,3)$ و $(3,1)$ هم حداقل یکی و از زوج مرتب‌های $(4,4)$ ، $(4,2)$ و $(4,1)$ حداقل دو تا را حذف کنیم. پس حداقل باید ۴ زوج مرتب را حذف کنیم که این رابطه به یک تابع تبدیل شود.

۲ ۷

به دنبال عددهای صحیح x و y هستیم که در رابطه $|x| + |y| = 2$ صدق کند. این رابطه به صورت مجموعه زوج مرتب‌های زیر نوشته می‌شود:

$$f = \{(2,0), (0,2), (1,1), (1,-1), (0,-2), (-1,-1), (-1,1), (-2,0)\}$$

برای اینکه رابطه f تابع باشد، نباید در زوج مرتب‌ها مولفه اول تکراری داشته باشیم. پس از بین زوج مرتب‌های $(1,-1)$ و $(-1,-1)$ حداقل یکی، از بین زوج مرتب‌های $(0,2)$ و $(0,-2)$ حداقل یکی و در آخر از بین زوج مرتب‌های $(1,-1)$ و $(-1,-1)$ هم باید حداقل یک عضو را حذف کنیم. یعنی حداقل باید سه تا از زوج مرتب‌ها را حذف کنیم تا رابطه، تابع شود.

۲ ۸

با توجه به تساوی $x = \frac{y^2}{y^2 - 1}$ ، برای این‌که x عددی صحیح باشد باید $y^2 - 1$ مقسوم‌علیه y^2 باشد. پس داریم:

$$y = 0 \Rightarrow x = -72, \quad y = \pm 2 \Rightarrow x = 24$$

$$y = \pm 3 \Rightarrow x = 9, \quad y = \pm 5 \Rightarrow x = 3$$

در نتیجه $f = \{(-72,0), (24,2), (24,-2), (9,3), (9,-3), (3,5), (3,-5)\}$ است که با حذف حداقل ۳ زوج مرتب تابع خواهد شد.

۱ ۹

با توجه به اینکه $x = 2$ در دامنه هر سه ضابطه قرار دارد، پس مقدار تابع به ازای $x = 2$ در هر سه ضابطه باید با هم برابر باشد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$a(2)^2 + 2b = 1 = a \sin(2 - 2) + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 1 & (1) \\ a \sin(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

حالا جای‌گذاری $b = 1$ در رابطه (۱)، $a = -\frac{1}{4}$ و در نتیجه $\frac{b}{a} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$ می‌شود.

پاسخنامه تشریحی فصل اول

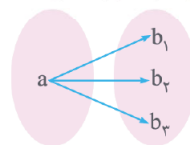
۴ ۱

نکته

یک رابطه زمانی تابع است که به ازای هر x ، فقط یک y داشته باشد.

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

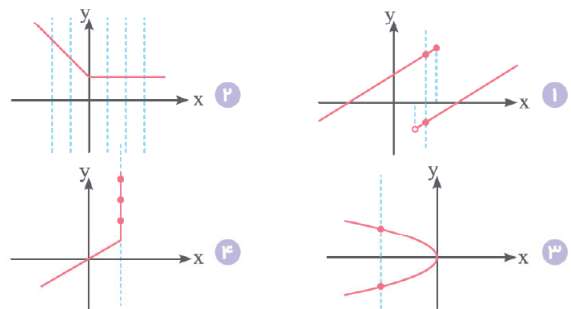
- ۱ مؤلفه‌های اول متمایزند، پس این رابطه نمایش‌دهنده یک تابع است. ✗
- ۲ این رابطه به‌ازای هر x ، دقیقاً یک y می‌دهد، پس تابع است. ✗
- ۳ از هر عضو دقیقاً یک پیکان خارج شده است، پس یک تابع را نمایش می‌دهد. ✗
- ۴ اگر بخواهیم برای مادری که سه فرزند به نام‌های b_1 ، b_2 و b_3 دارد یک نمودار ون بکشیم، این نمودار به صورت مقابل است:



به وضوح این رابطه تابع نیست. ✓

۲ ۲

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید در گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» خطی موازی با محور عرض‌ها، نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. پس پاسخ تست گزینه «۲» است.

۳ ۳

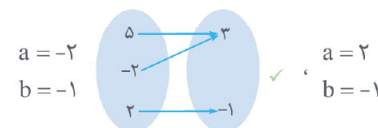
با توجه به تابع بودن رابطه و این‌که از هر یک از اعداد ۲ و ۵ دو پیکان خارج شده است، پس خروجی‌هایشان باید با هم برابر باشند، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x = 2: -1 = b \Rightarrow b = -1, \quad x = 5: a^2 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad a = -2$$

حالا به‌ازای دو مقدار به‌دست آمده برای a ، باید بررسی کنیم که کدام یک شرط تابع بودن را برقرار می‌کند. دو حالت زیر را ببینید:

حالت دوم:



حالت اول:

خلاصه این‌که برای تابع بودن، باید $a = -2$ و $b = -1$ باشند. در نتیجه $ab = (-2)(-1) = 2$ است.

۲ ۴

برای تابع بودن باید مولفه‌های دوم دو زوج مرتب $(3, m^2)$ و $(3, m+2)$ هم برابر باشد، تا به ازای x های یکسان، y های یکسان داشته باشند، پس داریم:

$$m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \xrightarrow{b=a+c} m = 2, \quad m = -1$$

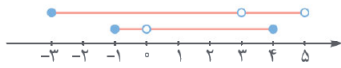
حالا مقادیر به‌دست آمده برای m را در رابطه داده شده جای‌گذاری می‌کنیم: $m = 2: \{(3,4), (2,1), (-2,2), (3,4), (2,4)\}$ ✗

$$m = -1: \{(3,1), (2,1), (-2,-1), (3,1), (-1,4)\}$$
 ✓

پس تنها مقدار قابل قبول برای m ، عدد -1 است.

۲ ۱۳

دامنه توابع f و g به ترتیب $D_f = [-1, 4] - \{0\}$ و $D_g = [-3, 5] - \{3\}$ است که اشتراک این دو دامنه برابر است با:



اعداد صحیح این اشتراک $-1, 1, 2, 3, 4$ هستند که تعدادشان ۴ تا است.

۲ ۱۴

با توجه به اینکه دامنه تابع f دو عضوی است، پس $a^2 - 3a$ یا برابر با -3 است یا -2 . پس داریم: $a^2 - 3a = -3 \Rightarrow a^2 - 3a + 3 = 0$; $\Delta = -3 < 0$

$$a^2 - 3a = -2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} a=1, a=2$$

حالا باید بررسی کنیم که به ازای مقادیر به دست آمده برای a ، f تابع هست یا خیر. ببینید:

$$a=1: f = \{(-2, 2), (-3, 1), (-2, 3)\} \quad \times$$

$$a=2: f = \{(-2, 3), (-3, 1), (-2, 3)\} \quad \checkmark$$

پس a فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

۳ ۱۵

نکته!

تعداد اعضای دامنه یک تابع همواره بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای برد است.

با توجه به نکته بالا می‌توان نوشت:

$$17 - 2n \geq n + 1 \Rightarrow 3n \leq 16 \Rightarrow n \leq \frac{16}{3} \quad (1)$$

از طرفی تعداد اعضای دامنه و برد باید عدد طبیعی باشند در نتیجه می‌توان نوشت:

$$17 - 2n > 0 \Rightarrow 2n < 17 \Rightarrow n < \frac{17}{2} \quad (2)$$

$$n + 1 > 0 \Rightarrow n > -1 \quad (3)$$

پس مجموعه مقادیر قابل قبول برای n اشتراک سه مجموعه جواب $(1), (2), (3)$ یعنی $-1 < n \leq \frac{16}{3}$ است که به وضوح شامل ۵ عدد طبیعی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ می‌باشد.

۴ ۱۶

مخرج هیچ یک از کسرها نباید صفر شود. پس داریم:

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3, \quad x \neq 0$$

$$x - \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1, x \neq -1$$

پس دامنه تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R} - \{0, -1, 1, 3\}$ است.

۳ ۱۷

دامنه توابع کسری به صورت $\mathbb{R} - \{\text{مخرج‌های مخرج}\}$ است، پس باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم:

$$(x^2 - 4)(5x^2 - 26x + 5) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$5x^2 - 26x + 5 = 0; \Delta = (-26)^2 - 4(5)(5) = 576$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{26+24}{10} = 5 \\ x = \frac{26-24}{10} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

در نتیجه دامنه تابع، شامل سه عدد صحیح $2, -2, 5$ و $\frac{1}{5}$ (توجه داریم که

$\frac{1}{5}$ صحیح نیست.)

تذکره!

قبل از محاسبه دامنه، اجازه ساده‌سازی تابع را نداریم.

۲ ۱۰

ابتدا هر یک از نامعادلات $|x-1| \geq 1$ و $|x-1| \leq 1$ را حل می‌کنیم. پس داریم:

$$|x-1| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 2 \\ \text{یا} \\ x-1 \leq -1 \Rightarrow x \leq 0 \end{cases}$$

$$|x-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \xrightarrow{+1} 0 \leq x \leq 2$$

در نتیجه $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \\ g(x) & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ می‌باشد. از طرفی $x = 0$ و $x = 2$ در محدوده‌های داده شده برای هر یک از ضابطه‌ها مشترک هستند و چون f تابع است، باید به‌ازای این دو نقطه مقدار تابع در هر یک از ضابطه‌ها عدد یکسان شود. پس می‌توان نوشت:

$$x=0: g(0) = 0^3 - 0 = 0, \quad x=2: g(2) = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$$

در نتیجه گزینه‌ای درست است که مقدار آن به‌ازای $x=0$ برابر با صفر و به‌ازای $x=2$ برابر ۶ شود که این اتفاق فقط در گزینه «۲» رخ می‌دهد. (حله)

۳ ۱۱

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) به‌ازای $x=1$ برای رابطه $|y|=|x|$ ، دو مقدار $y = \pm 1$ به دست می‌آید، پس $|y|=|x|$ تابع نیست. ببینید:

$$x=1 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y = \pm 1$$

۲) به‌ازای $x=0$ دو مقدار $y = \pm 1$ به دست می‌آید، پس $y^2 - 1 = \sin x$ تابع نیست. ببینید:

$$x=0 \Rightarrow y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

۳) این رابطه نمایش یک تابع است. ببینید:

$$y^3 = \sqrt{x} - 1 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} y = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$$

۴) به‌ازای $x=1$ مقدار تابع از ضابطه بالایی برابر با ۲ و از ضابطه پایینی برابر

$$3 \text{ است. (موافقی؟) پس رابطه } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1 & x \geq 1 \\ x^2 + 2 & x \leq 1 \end{cases} \text{ تابع نیست.}$$

۲ ۱۲

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) با جای‌گذاری $x=4$ داریم:

$$y^2 - 2y + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} y = 1, y = 3 \quad \times$$

به‌ازای یک مقدار از x ، دو مقدار برای y به دست آوردیم، پس تابع نیست.

۲) جمع دو عبارت نامنفی صفر شده است، پس باید تک‌تک عبارات صفر شوند:

$$(y-1)^2 = 0 \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1, |x-1|=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad \checkmark$$

پس فقط نقطه $\{(1,1)\}$ باعث برقراری رابطه بالا می‌شود که به وضوح مشخص‌کننده یک تابع است.

۳) با جای‌گذاری $x=0$ داریم:

$$\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \quad \times$$

به‌ازای یک مقدار از x ، بی‌شمار مقدار متمایز برای y به دست آوردیم، پس تابع نیست.

۴) با جای‌گذاری $x=1$ داریم:

$$y^f - y^3 = 0 \Rightarrow y^3(y-1) = 0 \Rightarrow y = 0, y = 1 \quad \times$$

به‌ازای یک مقدار از x ، دو مقدار متمایز برای y به دست آوردیم، پس رابطه، تابع نیست.

۲۱ ۴

می‌دانیم دامنهٔ تابع کسری به صورت {ریشه‌های مخرج} - \mathbb{R} است. طبق فرض مسئله دامنهٔ تابع کسری داده شده $\{1, 3\} - \mathbb{R}$ است. در نتیجه مخرج کسر فقط باید یک ریشه داشته باشد ($x = 1$)، پس داریم:

$$(x-1)(x^2+mx+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2+mx+1=0 \end{cases}$$

در نتیجه معادلهٔ درجه دوم $x^2+mx+1=0$ یا باید ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف $x=1$ داشته باشد. پس داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4(1)(1) < 0 \Rightarrow m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 2 \quad \checkmark \text{ حالت اول}$$

$$\Delta = 0, \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow \frac{-m}{2} = 1 \Rightarrow m = -2 \quad \checkmark \text{ حالت دوم}$$

در نهایت مجموعه مقادیر قابل قبول برای m ، $-2 < m < 2$ است.

۲۲ ۴

نکته

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، جمع و ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$P = \frac{c}{a} = \text{ضرب ریشه‌ها} \quad S = -\frac{b}{a} = \text{جمع ریشه‌ها}$$

دامنهٔ تابع کسری به صورت {ریشه‌های مخرج} - \mathbb{R} است، پس α و $\frac{1}{\alpha}$ ریشه‌های مخرج هستند، یعنی ریشه‌های مخرج، دو عدد معکوس هم هستند، پس معادله درجه دوم $2x^2 + 3mx + m + 6 = 0$ دو ریشه معکوس هم دارد و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+6}{2} = 1 \Rightarrow m+6=2 \Rightarrow m=-4$$

در نتیجه $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ که در واقع همان مجموع ریشه‌های معادلهٔ $S = -\frac{3m}{2} = \frac{-3(-4)}{2} = \frac{12}{2} = 6$ برابر با ۶ است، برابر با $2x^2 + 3mx + m + 6 = 0$ می‌باشد.

۲۳ ۱

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج یعنی $x(1-x)^3$ باید نامنفی باشد. پس به کمک جدول تعیین علامت داریم:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$(1-x)^3$	+	+	0	-
$x(1-x)^3$	-	0	+	-

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow [a, b] = [0, 1]$

در نتیجه $b - a = 1 - 0 = 1$ است.

۲۴ ۱

روش اول: با توجه به این‌که دو عبارت $\frac{x-1}{x-3}$ و $\frac{2-x}{x}$ زیر رادیکال قرار گرفته‌اند باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند، پس داریم:

$$\frac{x-1}{x-3} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq 1 \text{ یا } x > 3$$

$$\frac{2-x}{x} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < x \leq 2$$

دامنهٔ تابع اشتراک دو محدوده به دست آمده یعنی بازهٔ $(0, 1]$ است.

تذکر

در محاسبهٔ دامنهٔ توابع، در صورتی که گزینه‌ها به صورت بازه باشند، استفاده از گزینه‌ها روش سریع و خوبی است.

۱۸ ۳

روش اول: می‌دانیم دامنهٔ تابع کسری {ریشه‌های مخرج} - \mathbb{R} است، پس وقتی دامنهٔ تابع $f(x)$ ، $\{1, 3\} - \mathbb{R}$ است، حتماً $x=1$ و $x=3$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow 2(1)^2 - a(1) - b = 0 \Rightarrow a+b=2 \xrightarrow{x(-1)} \\ x=3 \Rightarrow 2(3)^2 - a(3) - b = 0 \Rightarrow 3a+b=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a-b=-2 \\ 3a+b=18 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a=16 \Rightarrow a=8 \xrightarrow{a+b=2} b=-6$$

در نهایت $2a+b=2(8)-6=10$ است.

نکته

اگر $x=x_0$ ریشهٔ عبارت $P(x)=0$ باشد، در این صورت $P(x)$ حتماً شامل $(x-x_0)$ می‌باشد.

روش دوم: $x=1$ و $x=3$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، پس با توجه به اینکه ضریب x^2 برابر ۲ است، مخرج را می‌توانیم به صورت $2(x-1)(x-3)$ بنویسیم، پس داریم:

$$2(x-1)(x-3) = 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 8x + 6$$

در آخر با مقایسهٔ این عبارت با مخرج کسر، یعنی $2x^2 - ax - b$ به‌وضوح $a=8$ و $b=-6$ و در نتیجه $2a+b=16-6=10$ است.

۱۹ ۳

روش اول: با توجه به این‌که دامنهٔ f به صورت $\mathbb{R} - \{-3\}$ است، یعنی $x=-3$ ریشهٔ مضاعف عبارت درجه دوم مخرج یعنی $ax^2 + 12x + b$ است، پس این عبارت به صورت $(x+3)^2$ یا ضربی از آن نوشته می‌شود:

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ax^2+12x+b} 2(x^2+6x+9) = ax^2+12x+b$$

$$\Rightarrow 2x^2+12x+18 = ax^2+12x+b \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=18 \end{cases}$$

پس $a+b=20$ است.

روش دوم: مخرج کسر ریشهٔ مضاعف $x=-3$ دارد. پس اولاً دلتای مخرج مساوی صفر است و ثانیاً ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2 + 12x + b = 0$ برابر -3 است، پس داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (12)^2 - 4(a)(b) = 0 \Rightarrow 144 = 4ab$$

$$x = \frac{-b}{2a} = -3 \Rightarrow \frac{12}{2a} = 3 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$$

حالا با جای‌گذاری $a=2$ در تساوی $144 = 4ab$ ، مقدار b برابر ۱۸ می‌شود. در نتیجه $a+b=20$ است.

۲۰ ۴

ابتدا دامنهٔ تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|x| + 2 = 0 \Rightarrow |x| = -2 \quad \times$$

با توجه به این‌که در تابع g ، مخرج کسر ریشه ندارد، پس دامنهٔ آن برابر با \mathbb{R} است. از طرفی طبق فرض مسئله دامنهٔ دو تابع f و g با هم برابر است، در نتیجه دامنهٔ تابع $f(x)$ هم باید \mathbb{R} باشد. یعنی مخرج کسر f نباید ریشه داشته باشد، پس داریم:

$$2x^2 - x - m = 0; \Delta < 0 \Rightarrow (-1)^2 - 4(2)(-m) < 0 \Rightarrow 1 + 8m < 0$$

$$\Rightarrow 8m < -1 \Rightarrow m < -\frac{1}{8}$$

دامنه تابع برابر اشتراک محدوده‌های به دست آمده برای x است که برابر $[3, 5]$ می‌باشد. در نهایت خواسته مسئله $2 = 3 - a = b - a$ است.

۲۹ ۴

روش اول: با جای‌گذاری $3 - x$ به جای x در تابع $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ضابطه $f(3 - x)$ را تعیین می‌کنیم و سپس برای محاسبه دامنه، زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$f(3 - x) = \sqrt{2(3 - x) - (3 - x)^2}$$

$$= \sqrt{6 - 2x - (x^2 - 6x + 9)} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

تعیین علامت $\rightarrow 1 \leq x \leq 3$

نکته!

اگر $D_{f(x)} = [m, n]$ برای محاسبه دامنه تابع $y = f(ax + b)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:
محدوده x را پیدا می‌کنیم $m \leq ax + b \leq n$

روش دوم: ابتدا دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ را تعیین می‌کنیم:

$$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0$$

$$\Rightarrow x(x - 2) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 2$$

حالا برای محاسبه دامنه $f(3 - x)$ باید عبارت $3 - x$ در بازه $[0, 2]$ قرار بگیرد؟ (حله؟) پس می‌توان نوشت:

$$0 \leq 3 - x \leq 2 \xrightarrow{-3} -3 \leq -x \leq -1 \xrightarrow{\times(-1)} 1 \leq x \leq 3$$

۳۰ ۳

با جای‌گذاری $x - 2$ به جای x در ضابطه $f(x + 1) = \frac{2x}{\sqrt{x - 1}}$ ضابطه $f(x - 2 + 1)$ به دست می‌آید: (حله؟)

$$f(x - 2 + 1) = \frac{2(x - 2)}{\sqrt{(x - 2) - 1}} = \frac{2x - 4}{\sqrt{x - 3}}$$

همگی بلدیم که دامنه این تابع بازه $(3, +\infty)$ است.

۳۱ ۳

در تابع $f(x)$ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد: x_1 و x_2 ریشه‌های عبارت زیر رادیکال هستند.

$$-x^2 + ax + b \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - ax - b \leq 0 \Rightarrow x_1 \leq x \leq x_2$$

از طرفی طبق فرض مسئله $-1 \leq x \leq 2$ است، در نتیجه -1 و 2 ریشه‌های معادله $-x^2 + ax + b = 0$ هستند. پس داریم:

$$x = -1: -(-1)^2 + a(-1) + b = 0 \Rightarrow b - a = 1 \quad (1)$$

$$x = 2: -4 + 2a + b = 0 \Rightarrow b + 2a = 4 \quad (2)$$

از حل دستگاه شامل معادلات (1) و (2) $a = 1, b = 2$ به دست می‌آید. از طرفی دامنه تابع g به صورت $\mathbb{R} - \{a, b\} = \mathbb{R} - \{1, 2\}$ است، یعنی 1 و 2 ریشه‌های مخرج هستند، پس می‌توان نوشت:

$$x = 1: 2 - c + d = 0 \Rightarrow c - d = 2 \quad (3)$$

$$x = 2: 8 - 2c + d = 0 \Rightarrow 2c - d = 8 \quad (4)$$

از حل دستگاه شامل معادلات (3) و (4) $c = 6, d = 4$ به دست می‌آید، در نتیجه پاسخ تست برابر است با:

روش دوم: به کمک گزینه‌بازی می‌توان نوشت:

$$x = 2: f(2) = \sqrt{\frac{2-1}{2-3}} + \sqrt{\frac{2-2}{2}} = \sqrt{-1} + \sqrt{0} = \sqrt{-1} \quad \times$$

(رد گزینه‌های «۲» و «۳»)

$$x = 1: f(1) = \sqrt{\frac{1-1}{1-3}} + \sqrt{\frac{2-1}{1}} = \sqrt{0} + \sqrt{1} = 1 \quad \checkmark$$

(رد گزینه «۴»)

۲۵ ۲

مطابق شکل، دامنه تابع $x \geq -1$ است. پس با توجه به ضابطه تابع داریم:

$$x + b \geq 0 \Rightarrow x \geq -b \xrightarrow{x \geq -1} -b = -1 \Rightarrow b = 1$$

از طرفی نقطه $(24, -3)$ روی نمودار تابع قرار دارد. پس این نقطه، درون تبع صدق می‌کند، می‌توان نوشت:

$$(24, -3) \in f \Rightarrow f(24) = -3 \Rightarrow a - \sqrt{24 + b} = -3$$

$$\xrightarrow{b=1} a - \sqrt{25} = -3 \Rightarrow a - 5 = -3 \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه ضابطه f به صورت $f(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$ است و برای محاسبه طول از مبدأ، به جای y یا همان f ، صفر می‌گذاریم. ببینید:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{x + 1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x + 1} = 2 \xrightarrow{\text{توان دو}} x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

۲۶ ۴

روش اول: برای محاسبه دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{x}} + \sqrt{2x - x^2}$ تنها باید نامعادله $\frac{2}{x^2} - \frac{9}{x} \geq 0$ را حل کنیم (چرا؟)، پس داریم:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \xrightarrow{\begin{matrix} x \neq 0 \\ 2x^2 > 0 \end{matrix}} 4 - 9x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{4}{9} \geq x^2$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \xrightarrow{x \neq 0} x \in [-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$$

روش دوم: به کمک گزینه‌بازی، با فرض $x = 2$ داریم:

$$x = 2: \sqrt{\frac{2}{4} - \frac{9}{2}} + \sqrt{4 - 4} \quad \times$$

منفی

پس $x = 2$ غیر قابل قبول است و گزینه‌های «۱» و «۳» نادرست هستند، زیرا $x = 2$ را دارند و از طرفی با توجه به ضابطه تابع، $x \neq 0$ است، زیرا صفر ریشه مخرج است، پس گزینه «۲» هم رد می‌شود و پاسخ گزینه «۴» است.

۲۷ ۲

برای محاسبه دامنه تابع $f(x)$ ، ابتدا سراغ رادیکال‌ها می‌رویم و عبارت زیر آن‌ها را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم، پس داریم:

$$\sqrt{x}: x \geq 0 \quad (1), \quad \sqrt{3 - \sqrt{x}}: 3 - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 3 \geq \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} 9 \geq x \quad (2), \quad \sqrt{5 - x}: 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \quad (3)$$

همچنین حواستان باشد که مخرج نباید صفر شود، پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{5 - x} - 1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{5 - x} \neq 1 \xrightarrow{\text{توان دو}} 5 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 4 \quad (4)$$

در نهایت با اشتراک‌گیری از چهار محدوده به دست آمده، دامنه تابع $f(x)$ به صورت $[4, 5] - \{4\}$ می‌شود و در نهایت طبق فرض مسئله $a, b = 5$ و $c = 4$ می‌باشد، پس $a + b + c = 0 + 5 + 4 = 9$ می‌شود.

۲۸ ۱

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال یا فرجه زوج باید نامنفی باشد. پس برای محاسبه دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\sqrt{x - 1} - \sqrt{5 - x}}$ باید $0 \leq x - 1$ و $5 - x \geq 0$ و $\sqrt{x - 1} - \sqrt{5 - x} \geq 0$ باشند و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1, \quad 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\sqrt{x - 1} - \sqrt{5 - x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x - 1} \geq \sqrt{5 - x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} x - 1 \geq 5 - x \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$$

۳۶ ۴

روش اول: عبارت $|2x-1|-3 > 0$ زیر رادیکال و در مخرج کسر قرار دارد، پس باید $|2x-1|-3 > 0$ باشد و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$|2x-1|-3 > 0 \Rightarrow |2x-1| > 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1 > 3 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \\ \text{یا} \\ 2x-1 < -3 \Rightarrow 2x < -2 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

پس دامنه تابع $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ یا $\mathbb{R} - [-1, 2]$ است.

روش دوم: به کمک گزینه‌بازی داریم:

رد گزینه «۱» $x = -4: f(-4) = \frac{-3}{\sqrt{6}}$ ✓

رد گزینه «۲» $x = 4: f(4) = \frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$ ✓

رد گزینه «۳» $x = 2: f(2) = \frac{3}{\sqrt{3-3}} = \frac{3}{0}$ ✗

۳۷ ۴

روش اول: ضابطه $f(-x+1)$ به صورت زیر است:

$$f(-x+1) = \sqrt{-x+1} + |-x+1+3| = \sqrt{-x+1} + |-x+4|$$

برای تعیین دامنه تابع $f(-x+1)$ ، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$-x+1 + |-x+4| \geq 0 \xrightarrow{-|x+4|=|x-4|} |x-4| - x + 1 \geq 0$$

برای حل نامعادله $|x-4| - x + 1 \geq 0$ از حالت‌بندی استفاده می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

حالت اول: $x \leq 4 \xrightarrow{|x-4|=-(x-4)} -(x-4) - x + 1 \geq 0$

$$\Rightarrow -2x + 5 \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

حالت دوم: $x > 4 \xrightarrow{|x-4|=x-4} x - 4 - x + 1 \geq 0$

$$\Rightarrow -3 \geq 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

پس مجموعه جواب مسئله به صورت زیر است:

$$\underbrace{\{x \leq 4 \cap x \leq \frac{5}{2}\}}_{x \leq \frac{5}{2}} \cup \underbrace{\{x > 4 \cap \emptyset\}}_{\emptyset} = x \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow D_{f(-x+1)} = \{x \mid x \leq \frac{5}{2}\} = (-\infty, \frac{5}{2}]$$

روش دوم: ضابطه تابع $f(-x+1)$ به صورت $f(-x+1) = \sqrt{-x+1} + |-x+4|$ است، به کمک گزینه بازی می‌توان نوشت:

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{-(0)+1} + |-(0)+4| = \sqrt{5} \quad \checkmark$$

$$x = -3 \Rightarrow \sqrt{-(-3)+1} + |(-3)+4| = \sqrt{11} \quad \checkmark$$

گزینه‌های «۲» و «۳»، $x = 0$ را ندارند، پس حذف می‌شوند. از طرفی $x = -3$ نیز باید درون دامنه باشد، پس گزینه «۱» هم حذف می‌شود و پاسخ تست، گزینه «۴» است.

۳۸ ۱

روش اول: می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد، یعنی:

$$|x+1| + |x-3| - 6 \geq 0 \Rightarrow |x+1| + |x-3| \geq 6$$

با توجه به اینکه $x = -1$ و $x = 3$ ریشه‌های قدرمطلق هستند، می‌توان نوشت:

حالت اول: $x < -1: -(x+1) - (x-3) \geq 6 \Rightarrow -x-1-x+3 \geq 6$

$$\Rightarrow x \leq -2 \xrightarrow{\cap(x < -1)} x \leq -2 \quad (1)$$

حالت دوم: $-1 \leq x \leq 3: (x+1) - (x-3) \geq 6$

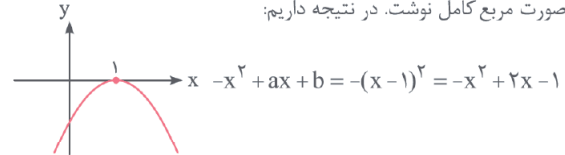
$$\Rightarrow x+1-x+3 \geq 6 \Rightarrow 4 \geq 6 \quad \times$$

۳۲ ۴

برای محاسبه دامنه تابع $f(x)$ باید نامعادله $-x^2 + ax + b \geq 0$ را حل کنیم. از طرفی پس از حل این نامعادله طبق فرض مسئله، تنها جواب قابل قبول $x = 1$ است. (حله؟)

در واقع تنها شکل قابل قبول برای سهمی $y = -x^2 + ax + b$ به صورت زیر است:

همان‌طور که می‌بینید این تابع در $x = 1$ بر محور x ها مماس است و این یعنی معادله $-x^2 + ax + b = 0$ ریشه مضاعف $x = 1$ دارد، پس می‌توان آن را به صورت مربع کامل نوشت. در نتیجه داریم:



از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم که $a = 2$ و $b = -1$ و در نتیجه $a - b = 2 - (-1) = 3$ است.

۳۳ ۴

عبارت زیر رادیکال باید همواره نامنفی باشد ($\Delta \leq 0, a > 0$) و همچنین مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد. پس داریم:

$$2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 \xrightarrow{\Delta \leq 0} (m+1)^2 - 4(2)(\frac{1}{4}m + 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 \leq 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m-5)(m+3) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -3 \leq m \leq 5 \quad (1)$$

$$|x| - m = 0 \Rightarrow |x| = m \xrightarrow{\text{جواب ندارد}} m < 0 \quad (2)$$

از اشتراک دو مجموعه جواب به دست آمده $-3 \leq m < 0$ است که شامل ۳ عدد صحیح $\{-3, -2, -1\}$ می‌باشد.

۳۴ ۴

روش اول: ابتدا دامنه هر یک از ضابطه‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم و با محدوده قابل قبول برای x در هر ضابطه اشتراک می‌گیریم. پس داریم:

$$D: x^2 + 2x + 4 > 0; \Delta = 4 - 4(1)(4) = -12 < 0$$

همواره برقرار است. $\xrightarrow{> \text{ضرب } x^2}$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \Rightarrow D_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0) \quad (1)$$

همچنین برای ضابطه پایین می‌توان نوشت:

$$D = (\mathbb{R} - \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}) \cap (x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2)$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{b=a+c} x = -2, x = -1$$

$$\Rightarrow D = (\mathbb{R} - \{-1, -2\}) \cap [-2, +\infty) \Rightarrow D = (-2, +\infty) - \{-1\}$$

$$\Rightarrow D_2 = ((-2, +\infty) - \{-1\}) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty) \quad (2)$$

در نتیجه دامنه تابع $f(x)$ برابر با اجتماع دو مجموعه جواب (۱) و (۲) است:

$$(-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$$

روش دوم: به کمک عددگذاری با جای‌گذاری $x = -2$ در ضابطه تابع داریم:

$$f(-2) = \frac{|-2|}{\sqrt{(-2)^2 + 2(-2) + 4}} = \frac{2}{2} = 1$$

پس $x = -2$ درون دامنه تابع است و در نتیجه پاسخ تست فقط گزینه «۴» می‌تواند باشد.

۳۵ ۲

دامنه توابع کسری به صورت {ریشه‌های مخرج} - \mathbb{R} است، پس داریم:

$$|x+1| - 3 = 0 \Rightarrow |x+1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

یعنی دامنه تابع به صورت $\mathbb{R} - \{2, -4\}$ است، پس $a + b = -4 + 2 = -2$ می‌شود.

۴۱ ۴

دامنهٔ توابع کسری به صورت {ریشه‌های مخرج} - \mathbb{R} است، پس ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \xrightarrow{-\frac{1}{3}} 1 \leq 3x < 2 \xrightarrow{+1} 1 < 3x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < 3x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < 3x < 2 \Rightarrow 0 < x < \frac{2}{3}$$

از طرفی باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:
 $x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow$ همواره برقرار است.
 در نتیجه دامنهٔ تابع $\mathbb{R} - [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ است.

۴۲ ۲

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد. پس داریم:

$$\frac{[x] - 3}{1 - [x]} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < [x] \leq 3$$

حالا با توجه به اینکه $1 < [x] \leq 3$ است حتماً یکی از حالت‌های $[x] = 2$ یا $[x] = 3$ اتفاق می‌افتد، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \\ [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

در نهایت با اجتماع گرفتن از جواب‌های به‌دست آمده، مجموعه جواب به‌صورت بازهٔ $[2, 4)$ می‌باشد.

۴۳ ۳

نکته!

برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $y = \log_{g(x)} f(x)$ باید بین جواب‌های سه نامعادلهٔ $f(x) > 0$ ، $g(x) > 0$ و $g(x) \neq 1$ اشتراک بگیریم.

شرایط دامنه را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} 9 - x^2 > 0 &\Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \quad (1) \\ x^2 - 1 > 0 &\Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \quad (2) \\ x^2 - 1 \neq 1 &\Rightarrow x^2 \neq 2 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{2} \quad (3) \end{aligned}$$

در نهایت اشتراک این سه محدوده به‌صورت $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$ است که عددهای صحیح این محدوده تنها -2 و 2 هستند.

۴۴ ۱

روش اول: باید نامعادله‌های $x^2 - 3x > 0$ و $1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0$ را حل کنیم و بین جواب‌ها اشتراک بگیریم:

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} (x < 0) \cup (x > 3) \quad (1)$$

$$1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \Rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1$$

$$\xrightarrow{\text{خواص لگاریتم}} x^2 - 3x \leq 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x - 5)(x + 2) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 \leq x \leq 5 \quad (2)$$

در نهایت با اشتراک‌گیری از محدوده‌های (۱) و (۲)، جواب قابل قبول به صورت $[-2, 5) \cup (3, 5]$ است.

روش دوم: به کمک عددگذاری می‌توان نوشت:

* تعریف نشده: $x = 0: f(0) = \sqrt{1 - \log(0)}$

پس $x = 0$ در دامنه نیست و گزینه‌های «۲» و «۳» حذف می‌شوند.

* تعریف نشده: $x = 3: f(3) = \sqrt{1 - \log(9 - 9)} = \sqrt{1 - \log 0}$

پس $x = 3$ هم در دامنه نیست و گزینهٔ «۴» نیز حذف و پاسخ تست گزینهٔ «۱» می‌شود.

حالت سوم: $x > 3: x + 1 + x - 3 \geq 6$

$$\Rightarrow x \geq 4 \xrightarrow{(x > 3)} x \geq 4 \quad (2)$$

در نتیجه دامنهٔ تابع برابر با اجتماع دو مجموعه جواب (۱) و (۲) یعنی $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$ یا $\mathbb{R} - (-2, 4)$ است.

روش دوم: به کمک عددگذاری می‌توان نوشت:

$$x = 4: y = \sqrt{|4+1| + |4-3| - 6} = \sqrt{5+1-6} = \sqrt{0} = 0 \quad \checkmark$$

در نتیجه $x = 4$ عضوی از دامنه است. (رد گزینه‌های «۲» و «۴»)

$$x = 0: y = \sqrt{|0+1| + |0-3| - 6} = \sqrt{1+3-6} = \sqrt{-2} \quad \times$$

در نتیجه $x = 0$ عضوی از دامنه نیست (رد گزینهٔ «۳») و فقط گزینهٔ «۱» می‌تواند پاسخ تست باشد.

۳۹ ۲

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم عبارت زیر یک رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد، پس داریم:

$$x^2 - 2|x + 3| + 6 \geq 0$$

برای حل نامعادلهٔ قدرمطلق فوق، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $x \geq -3$ باشد:

$$x^2 - 2(x + 3) + 6 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 6 + 6 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x \geq 0$$

$$\Rightarrow x(x - 2) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

که اشتراک این مجموعه جواب با $x \in [-3, +\infty)$ با توجه به محور زیر برابر با $[-3, 0] \cup [2, +\infty)$ است.



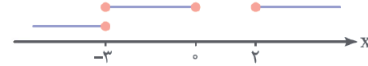
حالت دوم: اگر $x \leq -3$ باشد:

$$x^2 + 2(x + 3) + 6 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 6 + 6 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 12 \geq 0; \Delta = 4 - 4(1)(12) < 0 \xrightarrow{a > 0}$$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

که اشتراک این مجموعه جواب با $x \in (-\infty, -3]$ برابر با $(-\infty, -3]$ است. در نتیجه دامنهٔ تعریف تابع، اجتماع دو مجموعه جواب $[-3, 0] \cup [2, +\infty)$ و $(-\infty, -3]$ است:



که جواب برابر با $(-\infty, 2) \cup [2, +\infty)$ است، یعنی تابع در بازهٔ $(0, 2)$ تعریف نشده، در نتیجه $a + b = 0 + 2 = 2$ است.

۴۵ ۱

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد. برای تعیین دامنهٔ f داریم:

$$D_f: 4x - x^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \leq x \leq 3$$

همچنین برای تعیین دامنهٔ تابع g داریم:

$$D_g: b - |x + a| \geq 0 \Rightarrow |x + a| \leq b$$

$$\Rightarrow -b \leq x + a \leq b \xrightarrow{-a} -b - a \leq x \leq b - a$$

طبق فرض مسئله دامنهٔ دو تابع f و g با هم برابر است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -b - a = 1 \Rightarrow b + a = -1 \quad (1) \\ b - a = 3 \quad (2) \end{cases}$$

از حل دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} b + a = -1 \\ b - a = 3 \end{cases} \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1, a = -2 \Rightarrow ab = -2$$

توجه داشته باشید، طول نقاط تقاطع دو منحنی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$x > \sqrt{2}: x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{b=a+c} x=2 \checkmark, x=-1 \times$$

$$0 < x < \sqrt{2}: 2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} x=1 \checkmark, x=-2 \times$$

روش دوم: به کمک گزینه بازی، با توجه به این که $x=2$ جلوی لگاریتم را صفر می‌کند، گزینه‌های «۲» و «۳» نادرست هستند از طرفی با توجه به این که $x=0$ جلوی لگاریتم را منفی یا صفر نمی‌کند باید حتماً در دامنه تابع باشد یعنی گزینه «۱» هم نادرست است و پاسخ تست گزینه «۴» می‌باشد.

۳ ۴۸

نکته

دامنه تابع $y = \cot x$ از حل نامساوی $\sin x \neq 0$ به دست می‌آید.

طبق نکته بالا داریم:

$$\frac{2}{3}x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{3k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

در نتیجه عددهایی مانند $0, \frac{3\pi}{2}, 3\pi, \frac{9\pi}{2}$ و ... درون دامنه تابع مثلثاتی داده شده قرار ندارند، پس پاسخ تست گزینه «۳» است.

۴ ۴۹

نکته

دامنه تابع $y = \tan x$ از حل نامساوی $\cos x \neq 0$ به دست می‌آید.

طبق نکته بالا داریم:

$$\frac{\pi + \pi k}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{+\pi} \frac{1+x}{2} \neq k + \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 1+x \neq 2k+1 \Rightarrow x \neq 2k$$

در واقع عددهای زوج در دامنه تابع $f(x)$ قرار ندارند، پس در بازه $(-\Delta, \Delta)$ عددهای صحیحی که در دامنه تابع $f(x)$ هستند، $-3, -1, 1, 3$ می‌باشند که تعدادشان ۴ تا است.

۴ ۵۰

عبارت زیر رادیکال‌های با فرجه زوج باید نامنفی باشد. از طرفی $|\sin x| \leq 1$ است، پس می‌توان نوشت:

$$1 - \sqrt{|\sin x|} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{|\sin x|} \leq 1 \xrightarrow{\text{توان دو}} |\sin x| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

در نتیجه دامنه تابع برابر \mathbb{R} است.

۳ ۵۱

سینوس و کسینوس در تعیین دامنه تابع نقش ندارند، پس می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت یعنی به جای محاسبه دامنه تابع $y = \cos(\sqrt{1-x})$ ، دامنه تابع $y = \sqrt{1-x}$ را محاسبه می‌کنیم که از حل نامعادله $1-x \geq 0$ به دست می‌آید. پس داریم:

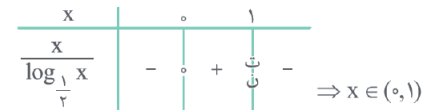
$$1-x \geq 0 \Rightarrow [x] \leq 1 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \text{دامنه} = (-\infty, 2)$$

در نتیجه بیشترین مقدار a برابر با ۲ است.

۱ ۴۵

برای پیدا کردن دامنه تابع داده شده، باید نامعادله $\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x} \geq 0$ را حل کنیم. برای این کار به کمک تعیین علامت داریم:

$$\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$



همانطور که مشاهده می‌کنید بازه $(0, 1)$ شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

حواستان باشد که نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ به صورت مقابل است:



یعنی این تابع به ازای $x > 1$ ، مقدارش منفی است.

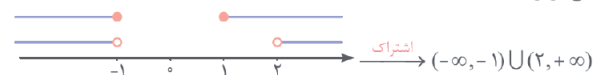
۱ ۴۶

روش اول: با توجه به حضور لگاریتم، و رادیکال در ضابطه تابع برای محاسبه دامنه تابع می‌توان نوشت:

$$x^2 - x - 2 > 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -1 \text{ یا } x > 2 \quad (1)$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \quad (2)$$

همچنین مخرج کسر یعنی $\sqrt{x^2-1} + 1$ همواره مخالف صفر است، پس دامنه تابع برابر است با:



روش دوم: به کمک گزینه بازی با توجه به این که $x=0$ هم جلوی لگاریتم و هم عبارت زیر رادیکال را منفی می‌کند، گزینه‌های «۲» و «۴» نادرست هستند. از طرفی به ازای $x=2$ جلوی لگاریتم صفر می‌شود پس گزینه «۳» هم نادرست است و پاسخ تست گزینه «۱» می‌باشد.

۴ ۴۷

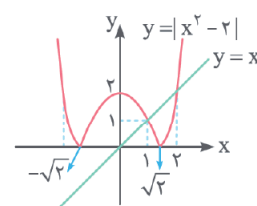
نکته

برای رسم تابع $y = |f(x)|$ از روی $y = f(x)$ ، کافایت بخشی از $f(x)$ که زیر محور x ها است را به بالای محور منتقل کنیم.

روش اول: برای تعیین دامنه تابع باید عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار داده و نامعادله به وجود آمده را حل کنیم.

$$|x^2 - 2| - x > 0 \Rightarrow |x^2 - 2| > x$$

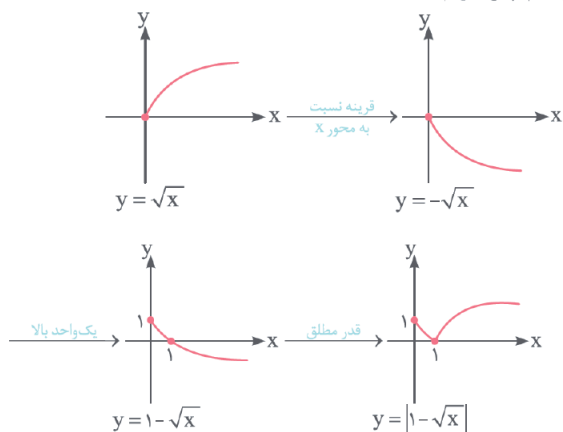
برای حل این نامعادله از روش هندسی کمک می‌گیریم، ببینید:



$$\Rightarrow \text{دامنه} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

۵۶ ۳

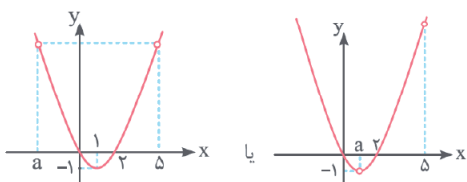
برای رسم نمودار تابع، $y = \sqrt{x}$ را رسم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. در نهایت بخشی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و قرینه آن نسبت به محور x ها را در بالای محور رسم می‌کنیم. پس داریم:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید برد این تابع $[0, +\infty)$ است.

۵۷ ۳

نمودار سهمی $y = x^2 - 2x$ با شرایط گفته‌شده به یکی از دو صورت زیر است:



با توجه به این‌که با حذف $x = a$ و $x = 5$ از دامنه تابع، از برد تابع که $(-1, +\infty)$ است، عدد b کم شده است، دو حالت داریم:

حالت اول: باید $x = a$ و $x = 5$ دو نقطه هم‌عرض از سهمی باشند که برای این موضوع، باید این دو نقطه نسبت به رأس سهمی یعنی $x = 1$ متقارن باشند. پس داریم:

$$\frac{a+5}{2} = 1 \Rightarrow a+5 = 2 \Rightarrow a = -3$$

از طرفی b همان مقدار تابع به‌ازای $x = 5$ ($x = -3$) است. پس می‌توان نوشت: $b = f(5) = 25 - 10 = 15$ یا $b = f(-3) = 9 + 6 = 15$ در نتیجه $a + b = -3 + 15 = 12$ می‌باشد.

حالت دوم: طول رأس سهمی باشد که برابر ۱ می‌شود. در نتیجه نقطه حذف شده از برد همان نقطه عرض رأس سهمی یعنی $b = -1$ است: $[-1, +\infty) - \{-1\} = (-1, +\infty)$ * به وضوح این حالت امکان‌پذیر نیست.

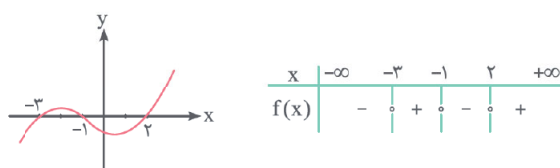
۵۸ ۲

نمودار تابع $y = |x| + |x-1|$ به صورت مقابل است (گلدون همیشه!): همان‌طور که می‌بینید برد این تابع در بازه $[-1, 2]$ برابر $[1, 3]$ است، پس می‌توان نوشت:

$$1 \leq |x| + |x-1| \leq 3 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{3} \leq \frac{1}{|x| + |x-1|} \leq 1$$

۵۲ ۴

نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر است، جدول تعیین علامتش را ببینید:



حالا برای محاسبه دامنه تابع $y = \sqrt{(x+1)f(x)}$ باید رابطه $(x+1)f(x) \geq 0$ برقرار باشد، بنابراین باید عبارت $(x+1)f(x)$ را تعیین علامت کنیم، پس داریم:

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
$x+1$		-	-	+	+
$f(x)$		-	+	-	+
$(x+1)f(x)$		+	-	-	+

بنابراین دامنه تابع، بازه $\{-\infty, -3\} \cup \{-1\} \cup [2, +\infty)$ است. اما از آن‌جایی‌که تابع غیرنقطه‌ای است، $x = -1$ را حذف می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$D_f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - (-3, 2)$$

۵۳ ۲

برای به‌دست آوردن دامنه تابع $y = \frac{\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}$ باید دو نامعادله $f(x) \geq 0$ و $1-f(x) \neq 0$ را حل کنیم. پس داریم:

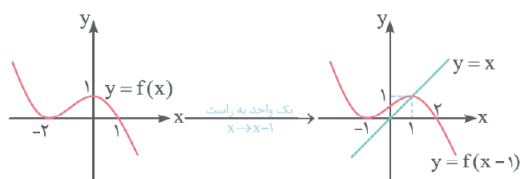
$$f(x) \geq 0 \rightarrow x \in [-4, -1] \cup [1, 3] \quad (1) \quad \text{با توجه به نمودار}$$

$$1-f(x) \neq 0 \rightarrow f(x) \neq 1 \rightarrow x \neq -4, 2 \quad (2) \quad \text{با توجه به نمودار}$$

در نتیجه دامنه تابع، برابر با اشتراک دو مجموعه جواب (۱) و (۲) یعنی $[-4, -1] \cup [1, 2) \cup (2, 3]$ است که شامل ۵ عدد صحیح می‌باشد.

۵۴ ۳

ابتدا از روی نمودار $y = f(x)$ نمودار $y = f(x-1)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار کافی است نمودار $y = f(x)$ را ۱ واحد به سمت راست منتقل کنیم، پس داریم:



از طرفی می‌دانیم دامنه تابع $y = \sqrt{x-f(x-1)}$ از حل نامعادله $x - f(x-1) \geq 0$ یا $x \geq f(x-1)$ به‌دست می‌آید و برابر با طول نقاطی است که خط $y = x$ بالاتر از نمودار $y = f(x-1)$ است که با توجه به نمودار، برابر با $[1, +\infty)$ می‌باشد.

۵۵ ۱

با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، دامنه و برد آن به ترتیب $D_f = [-2, 3]$ و $R_f = [0, 5]$ است. در نتیجه برای محاسبه اشتراک این دو محدوده داریم:



پس اشتراک دامنه و برد، بازه $(0, 3)$ است که شامل دو عدد صحیح نامنفی ۱ و ۲ می‌باشد.

۶۲ ۲

برد تابع خطی $y = \frac{-x}{4} + 3$ بازه $(0, 3)$ است، پس می‌توان نوشت:

$$0 < y \leq 3 \Rightarrow 0 < -\frac{x}{4} + 3 \leq 3 \xrightarrow{-3} -3 < \frac{-x}{4} \leq 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} -6 < -x \leq 0 \xrightarrow{\times (-1)} 0 \leq x < 6$$

پس دامنهٔ تابع شامل ۶ عدد صحیح $0, 1, 2, 3, 4, 5$ می‌باشد.

۶۳ ۴

نکته

نوع به شکل $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc \neq 0, c \neq 0$ هموگرافیک هستند و بردشان از رابطه $R = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ به دست می‌آید.

ابتنا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + 2 = \frac{1+2x-2}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

پس برد تابع $y = \frac{2x-1}{x-1}$ برابر $R = \mathbb{R} - \{2\}$ است، پس $a = 2$ و در نتیجه $a^2 = 4$ می‌باشد.

۶۴ ۲

ابتنا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = \frac{-2}{-1-x^2} = \frac{-2}{-(1+x^2)} = \frac{2}{1+x^2}$$

حالا با توجه به اینکه x^2 همواره نامنفی است، می‌توان نوشت:

$$x^2 \geq 0 \xrightarrow{+1} 1+x^2 \geq 1 \xrightarrow{\text{معکوس}} 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

$$\xrightarrow{\times 2} 0 < \frac{2}{1+x^2} \leq 2 \Rightarrow R_y = (0, 2]$$

۶۵ ۱

نکته

در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ برای تعیین برد دو حالت داریم:

$$1 \quad a > 0; R = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right) \quad 2 \quad a < 0; R = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$$

روش اول: طبق حرفهایی که زدیم می‌توان نوشت:

$$y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{(4)^2 - 4(-1)(1)}{4(-1)} = -\frac{20}{-4} = 5 \Rightarrow R_y = (-\infty, 5]$$

حواستان باشد که با توجه به حضور رادیکال در تابع $f(x)$ ، برد این تابع به صورت $R_f = [0, \sqrt{5}]$ است (حاله) که شامل ۲ عدد طبیعی ۱ و ۲ می‌باشد.

روش دوم: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای یک حل خیلی با کلاس برایتان ارائه می‌دهیم:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 1} = \sqrt{-(x^2 - 4x) + 1} = \sqrt{-((x-2)^2 - 4) + 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{-(x-2)^2 + 5}$$

از طرفی می‌دانیم $(x-2)^2 \geq 0$ و در نتیجه $-(x-2)^2 \leq 0$ است، پس داریم:

$$-(x-2)^2 \leq 0 \xrightarrow{+5} -(x-2)^2 + 5 \leq 5$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} 0 \leq \underbrace{\sqrt{-(x-2)^2 + 5}}_{f(x)} \leq \sqrt{5}$$

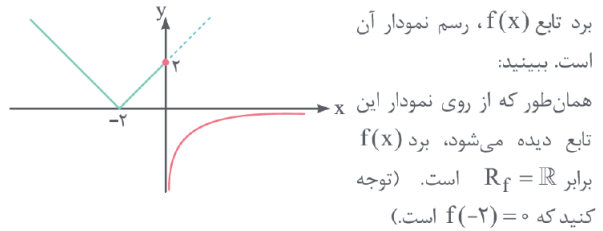
خلاصه این‌که برد تابع $f(x)$ بازه $R_f = [0, \sqrt{5}]$ است که شامل دو عدد طبیعی ۱ و ۲ می‌باشد.

در نتیجه برد تابع f برابر با $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ است. اگر روش رسم تابع $y = |x| + |x-1|$ را به خاطر ندارید، از نقطه‌گذاری کمک بگیرید:



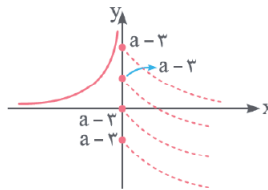
۵۹ ۴

به‌ترین روش برای پیدا کردن برد تابع $f(x)$ ، رسم نمودار آن است. ببینید:

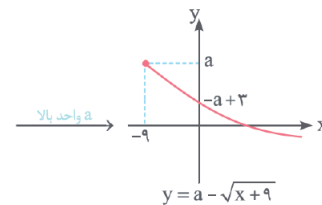
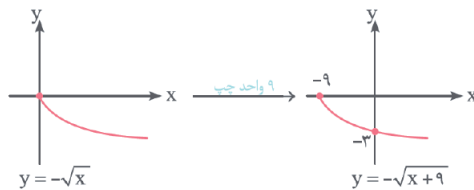


۶۰ ۲

نمودار تابع داده‌شده به صورت زیر است. ببینید:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای این که برد تابع \mathbb{R} باشد باید $a - 3 \geq 0$ و در نتیجه $a \geq 3$ باشد در نتیجه کمترین مقدار صحیح a برابر با ۳ است. توجه داشته باشید نمودار $y = a - \sqrt{x+9}$ به صورت زیر رسم شده است:



۶۱ ۳

با توجه به اینکه برد تابع ۳ عضوی است، در نتیجه می‌توان به راحتی بررسی کرد که هر کدام از آن‌ها به ازای چه مقداری از x به دست آمده است. پس داریم:

$$\frac{x+1}{x-2} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\frac{x+1}{x-2} = 2 \Rightarrow x+1 = 2x-4 \Rightarrow x = 5$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x-1 = 5x+2 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

در نتیجه فقط $x = -2$ در دامنهٔ f قرار ندارد.