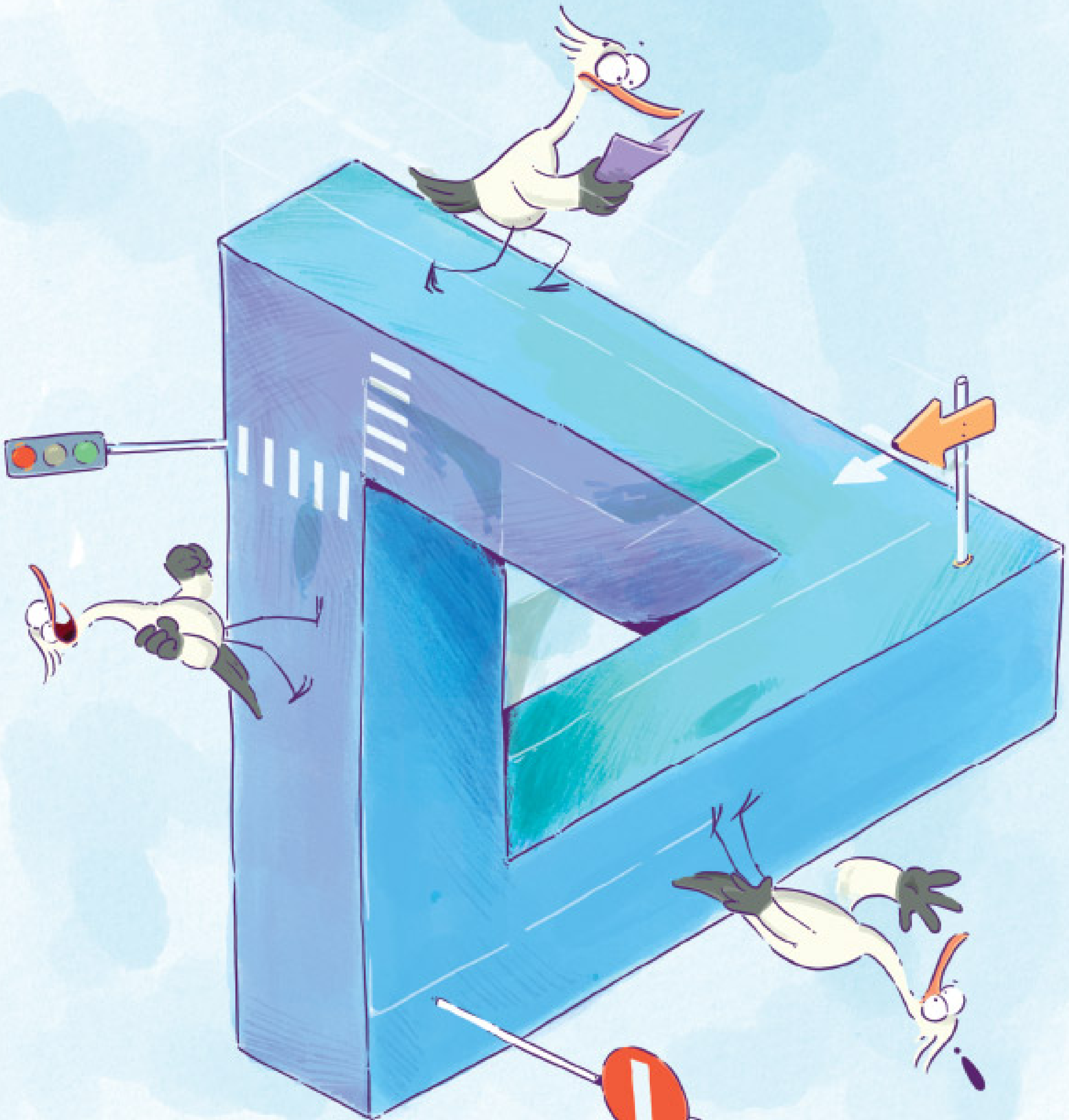
فصل ۱

هندسهٔ تحلیلی و جبر

فصلی که می‌بینید جعبه ابزاریه برای استفاده در بقیهٔ مباحث ریاضی.
این فصل با هندسـهٔ تحلیلی شروع می‌شـه. کلی مطالب جدید راجع‌به خط، نقطه، فاصله‌هاشون از هم و از خودشون رو تو این بخش یاد می‌گیری. بعد وارد نمودار تابع و معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شـه؛ همون سهمی پارسال! ولی این‌دفعه هم سؤال‌های نمودارش و هم معادله‌اش پیچیده‌تره!
آخـرش هم به معادلات گویا و گنگ می‌رسـه. این بحث تـا آخرین دقایقی که ریاضی می‌خونید، دست از سرتون برنمی‌داره! پس خوب یادش بگیر.

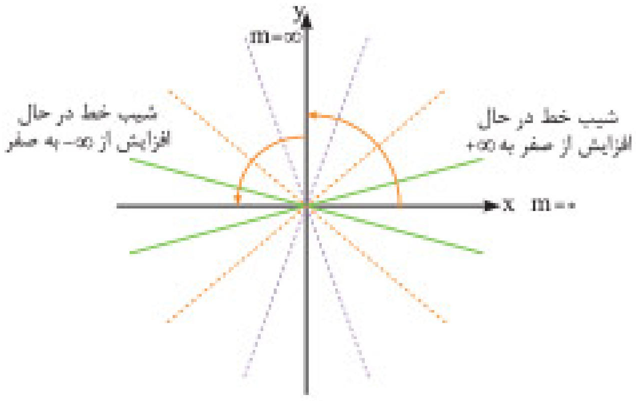


درس ۱ هندسهٔ تحلیلی

یادآوری: در سال‌های گذشته با مفاهیم معادلهٔ خط، شیب، عرض از مبدأ، تابع خطی و... آشنا شدید. در این بخش به‌طور خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

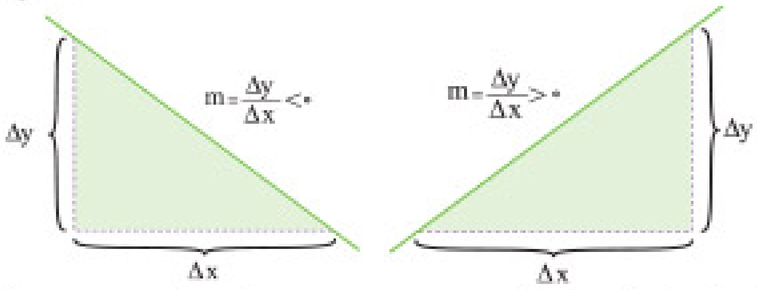
شیب: تعریف‌ها و تعبیرهایی از شیب که تاکنون آموخته‌اید عبارت‌اند از:

الف میزان تغییرات y به تغییرات x را شیب خط می‌نامیم. در واقع اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ دو نقطهٔ متمایز باشند $(x_1 \neq x_2)$، به $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ شیب خط گذرا از دو نقطهٔ A و B می‌گوییم.

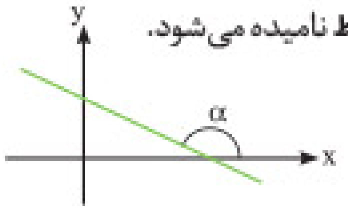


ب اگر معادلهٔ خط به‌صورت $y = ax + b$ باشد، **شیب خط** برابر a است.

پ اگر معادلهٔ خط به‌صورت $ax + by + c = 0$ باشد، **شیب خط** برابر $-\frac{a}{b}$ است.



ت تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، **شیب خط** نامیده می‌شود.



$$\tan\alpha = m$$

ث شیب خط $x = a$ تعریف‌نشده و شیب خط $y = b$ صفر است.

معادلهٔ خط

برای به‌دست آوردن معادلهٔ خط، دو روش داریم:

۱) **با داشتن شیب و یک نقطه:** معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ می‌گذرد، عبارت است از: $y - y_0 = m(x - x_0)$

۲) **با داشتن دو نقطه:** هرگاه دو نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ و $B(x_1,y_1)$ را داشته باشیم $(x_0 \neq x_1)$، می‌توانیم به کمک رابطهٔ $m_{AB} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$، **شیب خط** گذرا از نقاط A و B را بیابیم و به کمک معادلهٔ $y - y_0 = m(x - x_0)$ ضابطهٔ خط را بیابیم.

نکته: ۱) می‌توان معادلهٔ خط را به‌صورت $y = ax + b$ فرض نمود و با جای‌گذاری دو نقطهٔ (x_0,y_0) و (x_1,y_1) و تشکیل دستگاه، مقادیر a و b را به‌دست آورد. به این ترتیب ضابطهٔ $y = ax + b$ به‌دست می‌آید.

۲) معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ (a,y_2) و (a,y_1) می‌گذرد، برابر است با $x = a$ $(y_1 \neq y_2)$.

۳) معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ (x_1,b) و (x_2,b) می‌گذرد، برابر است با $y = b$ $(x_1 \neq x_2)$.

مثال: خط گذرنده از دو نقطهٔ $(1,3)$ و $(2,7)$ محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

فرض می‌کنیم معادلهٔ خط $y = ax + b$ است. نقاط داده‌شده را در معادلهٔ خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{matrix}(1,3) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 3 = a(1) + b \\ (2,7) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 7 = a(2) + b\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

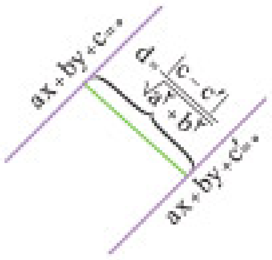
یعنی معادلهٔ خط $y = 4x - 1$ است.

این خط در نقطه‌ای، محور طول‌ها را قطع می‌کند که $y = 0$ شود؛ بنابراین: $0 = 4x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

فاصلهٔ دو خط موازی

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با:

مهم: $d=\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$



حواست باشه: قبل از استفاده از این فرمول، اولاً باید همهٔ بخش‌های معادله به‌سمت چپ منتقل شوند و ثانیاً ضرایب x و y باید در دو معادله برابر باشند و در صورت لزوم باید با ضرب و تقسیم یک یا چند عدد در معادلات، ضرایب را یکسان نمود.

مثال: فاصلهٔ دو خط موازی $۳x+۴y-۱=۰$ و $۳x+۴y+۲=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ گزینهٔ «۳» با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی به حل مثال می‌پردازیم:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲-(-۱)|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۳}{۵}$$

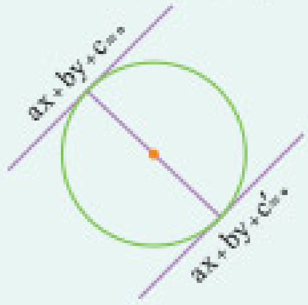
دایره‌ای بر دو خط $y-۲x+۱=۰$ و $۲y-۴x=-۷$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۸}$

پاسخ گزینهٔ «۳» ابتدا در ضابطهٔ $۲y-۴x=-۷$ عدد -۷ را به‌سمت چپ منتقل می‌کنیم، سپس طرفین را بر ۲ تقسیم کرده تا ضرایب x و y در دو معادله یکسان شوند.

$$\begin{cases} y-۲x+۱=۰ \\ y-۲x+\frac{۷}{۲}=۰ \end{cases} \Rightarrow ۲R=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|\frac{۷}{۲}-۱|}{\sqrt{(-۲)^۲+۱^۲}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲R=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{۵}}{۴}$$



یک گام فراتر: **معادلهٔ خط وسط دو خط موازی**

مجموعه نقاطی از صفحه که از دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ فاصله‌ای برابر دارند، بر روی خطی موازی به معادلهٔ $ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$ قرار دارند.

مثال: اگر معادلهٔ جدول‌های کنار خیابانی مستقیم $۲x+۳y-۱=۰$ و $۴x+۶y+۵=۰$ باشند، معادلهٔ خط‌چین وسط خیابان کدام است؟

۱) $۲x-۳y-\frac{۱}{۴}=۰$ ۲) $۲x+۳y-\frac{۳}{۴}=۰$

۳) $۲x+۳y+\frac{۳}{۴}=۰$ ۴) $۲x-۳y+\frac{۱}{۴}=۰$

پاسخ گزینهٔ «۳»

خط‌چین وسط خیابان دقیقاً خطی موازی و وسط امتداد دو جدول طرفین خیابان است، پس می‌توان پس از یکسان‌کردن ضرایب x و y معادلات جدول‌ها، معادلهٔ خط‌چین را پیدا کرد:

$$\begin{cases} ۲x+۳y-۱=۰ \\ ۴x+۶y+۵=۰ \end{cases} \xrightarrow{\div ۲} \begin{cases} ۲x+۳y-۱=۰ \\ ۲x+۳y+\frac{۵}{۲}=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ خط‌چین}} ۲x+۳y+\frac{-۱+\frac{۵}{۲}}{۲}=۰ \Rightarrow ۲x+۳y+\frac{۳}{۴}=۰$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۵. فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,۲)$ از خط $۳x+۴y-۱=۰$ برابر ۳ است. مجموع مقادیر ممکن برای x کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۱۴}{۳}$

۲۶. اگر فاصلهٔ نقطهٔ $M(۱,۲)$ از خط $۳x+my-۱=۰$ برابر ۲ باشد، مقدار m کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) -۱

مثال: مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) -4　　۲) -2　　۳) 2　　۴) 4

پاسخ گزینهٔ «۲» می‌بینید که این معادله، درجهٔ چهار است، ولی اگر x^2+x را برابر u در نظر بگیریم تبدیل به $u^2-18u+72=0$ می‌شود. با یک تغییر متغیر مناسب توانستیم معادله را به معادلهٔ درجهٔ دو تبدیل کنیم:

$$u^2-18u+72=0 \Rightarrow (u-6)(u-12)=0 \Rightarrow \begin{cases} u=6 \\ u=12 \end{cases}$$

حال به‌جای u مقدار x^2+x را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases} \\ x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \Rightarrow (x+4)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-4 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

مجموع ریشه‌ها برابر -2 است.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$ باشند، آن‌گاه:

$$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}\ ,\ \alpha\cdot\beta=P=\frac{c}{a}$$

مثال: در معادلهٔ $2x^2-5x-1=0$ مجموع ریشه‌ها چه‌قدر از حاصل‌ضرب آن‌ها بیشتر است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۳» مجموع ریشه‌های معادله $S=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{2}$ است. مجموع ریشه‌ها ۳ واحد از حاصل‌ضرب آن‌ها بیشتر است.

بحث راجع به ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0\ (a,b,c \neq 0)$

برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن را به‌صورت نمودار درختی برایتان بیان می‌کنیم:

- $ax^2+bx+c=0$
  - $\Delta<0$ ⟵ معادله ریشه ندارد.
  - $\Delta=0$
    - $-\frac{b}{2a}>0$ ⟵ معادله ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.
    - $-\frac{b}{2a}<0$ ⟵ معادله ریشهٔ مضاعف منفی دارد.
  - $\Delta>0$
    - $P>0$
      - $S>0$ ⟵ معادله دارای دو ریشهٔ مثبت است.
      - $S<0$ ⟵ معادله دارای دو ریشهٔ منفی است.
    - $P<0$
      - $S>0$ ⟵ معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است و ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر از قدرمطلق ریشهٔ منفی است.
      - $S<0$ ⟵ معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است و قدرمطلق ریشهٔ منفی بزرگ‌تر از ریشهٔ مثبت است.

نکته: در حالت $P<0$ نیازی به بررسی Δ وجود ندارد، چرا که هر وقت a و c مختلف‌العلامت باشند، Δ لزوماً مثبت می‌شود.

مثال: کدام گزینه دربارهٔ $x^2-(\sqrt{3}-1)x-2\sqrt{3}-2=0$ صحیح است؟

۱) دو ریشهٔ مثبت دارد.

۲) دو ریشهٔ منفی دارد.

۳) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد و ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر از قدرمطلق ریشهٔ منفی است.

۴) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد و قدرمطلق ریشهٔ منفی بزرگ‌تر از ریشهٔ مثبت است.

پاسخ گزینهٔ «۳» دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد و قدرمطلق ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر از قدرمطلق ریشهٔ منفی است.

$$P=\frac{c}{a}=\frac{-2\sqrt{3}-2}{1}<0\ ,\ S>0$$

توجه: چون $P<0$ است؛ پس نیازی به بررسی‌کردن علامت دلتا نیست.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۹. در معادلهٔ $2x^2+ax+9=0$ یک ریشه، دو برابر ریشهٔ دیگر است. مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۷۰. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+mx-3=0$ باشند، به ازای کدام مقدار m، رابطهٔ $2\alpha+\beta=4$ بین ریشه‌ها برقرار است؟

۱) $\frac{6\pm\sqrt{10}}{2}$ ۲) $3\pm\sqrt{5}$ ۳) $-3\pm\sqrt{5}$ ۴) $\frac{-6\pm\sqrt{10}}{2}$

۷۱. به ازای کدام مقدار k در معادلهٔ $2x^2+kx+9=0$، بین ریشه‌ها رابطهٔ $x_1\sqrt{x_2}=3\sqrt{\frac{3}{2}}$ برقرار است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۱− ۴) ۹−

۷۲. اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ دو عدد صحیح متوالی باشند، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

۱) $a^2+4b=0$ ۲) $a^2+4b=1$ ۳) $a^2-4b=1$ ۴) $a^2-b=1$

۷۳. به ازای کدام مقدار a، رابطهٔ $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{5}{6}$ میان ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a+2)x+a+1=0$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۲ ۴) ۲−

۷۴. یکی از ریشه‌های معادلهٔ $a(x-2)^2=x$ از ۱۰ برابر ریشهٔ دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۷۵. به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$، برابر ۲ است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۶. به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $8x^2-mx-8=0$، توان سوم ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-x-2=0$ است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵ (ریاضی خارج ۹۶)

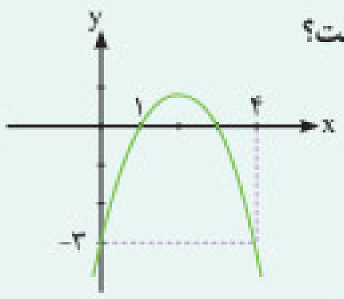
نمودار تابع درجهٔ دوم

یادآوری: نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به‌صورت یک **سهمی** است که اگر $a>0$، دهانهٔ سهمی **رو به بالا** و اگر $a<0$، دهانهٔ سهمی **رو به پایین** است.

سؤالاتی که نمودار به همراه چند نقطه از آن داده شده و ضابطهٔ تابع آن خواسته می‌شود را می‌توان به سه دستهٔ کلی تقسیم‌بندی کرد:

الف) سه نقطهٔ عادی: سه نقطهٔ داده‌شده را در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به یک دستگاه سه معادله سه‌مجهولی برسیم. با حل دستگاه، مجهول‌های a، b و c به‌دست می‌آیند و ضابطهٔ تابع مشخص می‌شود.

مثال: نمودار زیر، نمودار تابع درجهٔ دوم به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ را نشان می‌دهد. مقدار b کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۴» این نمودار از نقاط $(0,-3)$، $(1,0)$ و $(4,-3)$ می‌گذرد، نقاط را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

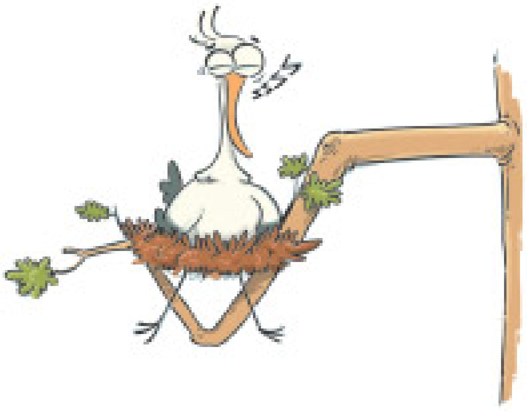
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$(0,-3)\Rightarrow -3=0+0+c\Rightarrow c=-3$$

$$\left.\begin{array}{l}(1,0)\Rightarrow 0=a+b-3\\ (4,-3)\Rightarrow -3=16a+4b-3\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a+b=3\\ 16a+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=4\\ a=-1\end{cases}$$

ب) رأس و یک نقطهٔ عادی: دو نقطهٔ داده‌شده را در تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ جای‌گذاری می‌کنیم. همین‌طور طول رأس را در معادلهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ قرار می‌دهیم. به این ترتیب به یک دستگاه سه معادله سه‌مجهولی می‌رسیم و با حل آن، ضرایب a، b و c به‌دست می‌آیند.

بخش دوم معادلات رادیکالی



معادلاتی را که در آن‌ها متغیر زیر رادیکال باشد، **معادلات گنگ** می‌نامند، مانند:

$$1+\sqrt{x}=\sqrt{2-x}+3x$$

برای حل معادلات گنگ باید آن‌ها را به توان ۲ برسانیم و این کار را تا جایی ادامه دهیم که رادیکال(ها) از بین بروند.

در صورت امکان قبل از به توان ۲ رساندن، بهتر است عبارت رادیکالی را در یک طرف مساوی تنها کنیم. بعد از حل معادله و پیدا شدن x ها، باید آن‌ها را در اصل معادله جای‌گذاری کنیم.

در صورتی‌که زیر رادیکال منفی شود یا معادله برقرار نباشد آن ریشه اضافه است و غیرقابل قبول می‌باشد و اگر امکان امتحان جواب به‌دست‌آمده نباشد از دامنه استفاده می‌کنیم.

مثال: جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{2x+5}-2x=5$ چگونه است؟

۱) یک ریشهٔ منفی ۲) دو ریشهٔ منفی ۳) دو ریشهٔ مثبت ۴) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی

پاسخ گزینهٔ «۲» ابتدا رادیکال را تنها می‌کنیم:

$$\sqrt{2x+5}=2x+5 \Rightarrow 2x+5=(2x+5)^2 \Rightarrow 2x+5=4x^2+20x+25 \Rightarrow 4x^2+18x+20=0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2+9x+10=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2x+4)(2x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

هر دو ریشه در معادلهٔ $\sqrt{2x+5}-2x=5$ صادق‌اند؛ بنابراین معادله دارای دو ریشهٔ منفی است.

معادلات گنگ خاص

الف) حل معادله به کمک دامنه و برد

گاهی دامنهٔ توابع موجود در معادله هیچ اشتراکی با هم ندارند و معادله جواب ندارد.

گاهی هم اشتراک دامنه‌ها، یک یا چند تک نقطه است. آن‌ها را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم اگر طرفین معادله با هم مساوی شدند، آن نقطه جواب معادله است.

مثال: معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-2}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۲» دامنهٔ رادیکال‌ها را می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 1 \\ 2-x\ge 0 \Rightarrow x\le 2 \\ x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} D=\{2\}$$

همان‌طورکه می‌بینید اشتراک این سه رادیکال فقط $x=2$ است.

عدد ۲ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{2+0}=0+\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt{2} \quad \checkmark$$

بنابراین تنها ریشهٔ معادله $x=2$ است.

ب) مجموع چند عبارت نامنفی برابر صفر شود

هرگاه مجموع چند عبارت نامنفی برابر صفر شود، اشتراک ریشه‌های عبارت‌های نامنفی، جواب معادله است. برای درک بهتر به مثال بعد توجه کنید.

مثال: معادلهٔ $(x^2-4x+3)^6+\sqrt[4]{4x^3-x^2-x-2}=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۲» هر دو عبارت همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند یا به عبارت بهتر، نامنفی‌اند پس باید هر دو با هم صفر شوند.

حل معادلهٔ $x^2-4x+3=0$ به مراتب ساده‌تر از حل معادلهٔ $4x^3-x^2-x-2=0$ است. پس ابتدا سراغ معادلهٔ ضعیف‌تر می‌رویم.

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

حال هر دو ریشه را در عبارت $4x^3-x^2-x-2$ جای‌گذاری می‌کنیم اگر حاصل صفر شود، ریشه مشترک است و جواب کلی معادله می‌باشد.

$$x=3 \Rightarrow 4(3)^3-3^2-3-2\ne 0 \Rightarrow 94\ne 0 \quad \times \qquad x=1 \Rightarrow 4(1)^3-(1)^2-1-2=0 \Rightarrow 0=0 \quad \checkmark$$

تنها ریشهٔ معادله $x=1$ است.

فصل ۲

هندسه

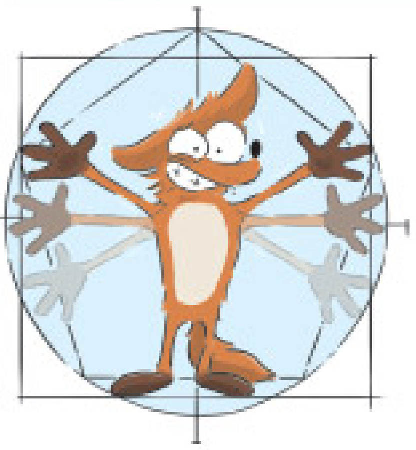
ایـن درس خیلی مهمـه! اینقدر که سـر درِ آکادمی افلاطون نوشـته بودن: «هرکس هندســه نمی‌داند وارد نشــود» یعنی کنکور اون موقــع یونان فقط از هندسه بوده!

توی این فصل با هندســه مســطحهٔ اقلیدس آشــنا می‌شــی و یاد می‌گیری چطوری خط عمود، موازی، عمودمنصف و ... رو رســم کنــی. همین‌طور برخی ویژگی‌های اون‌ها رو یــاد می‌گیری. توی درس دوم با زبون تخصصی هندســه و روش فکر کردن به ریاضی آشــنا می‌شــی و در انتهاش هم، قضیــهٔ مهم تالس، عکس قضیهٔ تالس و تعمیم اون رو یاد می‌گیری.

آخر فصل هم به تعریف تشابه دو مثلث ختم می‌شه! به کمک تشابه یه سری فرمول‌های مهم توی مثلث قائم‌الزاویه براتون آوردیم. با خوندن تســت‌های این بخش می‌تونید هر تستی رو از پا دربیارید!

درس ۱ ترسیم‌های هندسی

دایره



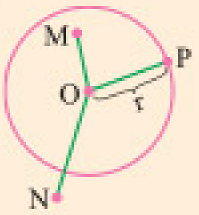
تمام نقاطی که به فاصلهٔ ثابت r از نقطهٔ ثابت O قرار دارند، شکلی را در صفحه پدید می‌آورند که آن را دایره‌ای به مرکز O و شعاع r می‌نامند و با نماد $C(O, r)$ نمایش می‌دهند؛ بنابراین هر نقطه‌ای که از O به فاصلهٔ r باشد، روی دایره قرار دارد و هر نقطه‌ای که روی دایره باشد، از نقطهٔ O فاصله‌ای برابر r خواهد داشت.

نکته: ① منظور از درون دایرهٔ $C(O, r)$، مجموعهٔ همهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از O کمتر از r باشد و برعکس، هر نقطه‌ای که فاصله‌اش تا O کمتر از r باشد، درون دایره است. به‌طور مشابه می‌توان بیرون دایره را تعریف کرد. در شکل، مجموعه نقطه‌های درون، بیرون و روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r نشان داده شده است.

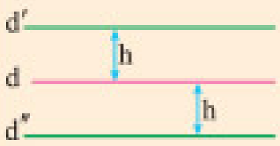
M درون دایره $\Leftrightarrow OM < r$

P روی دایره $\Leftrightarrow OP = r$

N بیرون دایره $\Leftrightarrow ON > r$



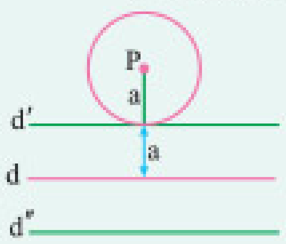
② خطی مانند d را در نظر بگیرید؛ مجموعهٔ همهٔ نقاطی در صفحه، که از خط d به فاصلهٔ h باشند، دو خط موازی d، در دو سوی آن و با فاصلهٔ h از آن هستند.



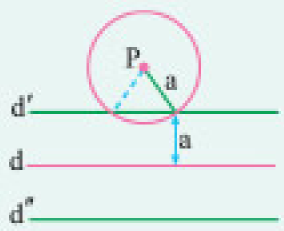
مثال: خط d و نقطهٔ P به فاصلهٔ h از آن را در نظر بگیرید. تعداد نقاطی در صفحه، که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ P و خط d برابر a باشد، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟ $(h \neq 0)$

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

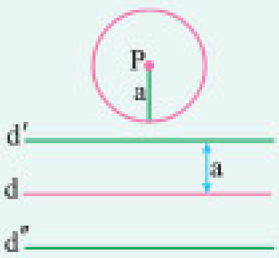
پاسخ گزینهٔ «۴» نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت P برابر a باشد، روی دایره‌ای به مرکز P و شعاع a هستند. از سوی دیگر، نقاطی که در صفحه از خط d فاصله‌ای برابر a دارند، دو خط موازی d، در دو سوی آن و به فاصلهٔ a از آن هستند. اشتراک این دو مجموعه، یکی از حالت‌های زیر را دارد:



اشتراک، یک نقطه است.
$(h = 2a)$



اشتراک، دو نقطه است.
$(h < 2a)$

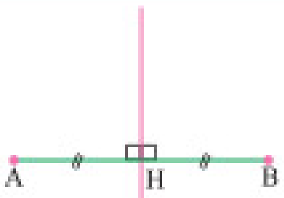


اشتراک ندارند، پس تعداد نقطه‌ها صفر است.
$(h > 2a)$

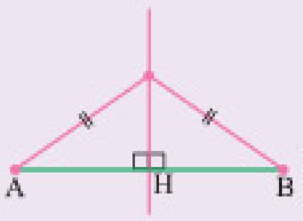
هیچ‌گاه خط d' از بالا بر دایره مماس نمی‌شود، زیرا در این‌صورت فاصلهٔ خط d و d' برابر $h + a$ می‌شود که خلاف فرض است، همچنین هیچ‌گاه خط d'' نیز با دایره برخورد نمی‌کند، زیرا در این‌صورت نقطهٔ P روی خط d قرار می‌گیرد که خلاف فرض است.

عمودمنصف

عمودمنصف پاره‌خط AB، خطی است که بر AB عمود است و از نقطهٔ وسط آن می‌گذرد.



قضیه: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.



مثال: اگر $\frac{4}{3}=\frac{m}{n}$ و $\frac{9}{14}=\frac{r}{t}$، آن‌گاه مقدار $\frac{3mr-nt}{4nt-7mr}$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{2}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{11}{14}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ گزینهٔ «۳» • **روش اول:** از ضرب دو طرف تناسب‌های داده‌شده در هم داریم:

$$\frac{m}{n}\times\frac{r}{t}=\frac{4}{3}\times\frac{9}{14}\Rightarrow\frac{mr}{nt}=\frac{6}{7}$$

حال عدد حقیقی $x\neq 0$ به‌گونه‌ای یافت می‌شود که $mr=6x$ و $nt=7x$، بنابراین:

$$\frac{3mr-nt}{4nt-7mr}=\frac{18x-7x}{28x-42x}=\frac{11x}{-14x}=\frac{-11}{14}$$

• **روش دوم:** کافی است $m=4$، $n=3$، $r=9$ و $t=14$ فرض کنیم:

$$\frac{3mr-nt}{4nt-7mr}=\frac{3(4)(9)-3(14)}{4(3)(14)-7(4)(9)}=\frac{\cancel{3}(36-14)}{4\times\cancel{3}(14-21)}=\frac{22}{4\times(-7)}=-\frac{11}{14}$$

اگر $\frac{2c+1}{4}=\frac{b-3}{3}=\frac{3a}{2}$ و $3a+b+2c=11$، آن‌گاه مقدار abc کدام است؟

۱) -6 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 6

پاسخ گزینهٔ «۴» بنا به ویژگی ۷ می‌توان نوشت:

$$\frac{3a}{2}=\frac{b-3}{3}=\frac{2c+1}{4}=\frac{3a+b-3+2c+1}{2+3+4}=\frac{(3a+b+2c)-2}{9}=\frac{11-2}{9}=1$$

بنابراین: $\frac{3a}{2}=1\Rightarrow a=\frac{2}{3}$، $\frac{b-3}{3}=1\Rightarrow b=6$ و $\frac{2c+1}{4}=1\Rightarrow c=\frac{3}{2}$، در نتیجه $abc=\frac{2}{3}\times 6\times\frac{3}{2}=6$.

روی پاره‌خط $AB=a$، دو نقطهٔ M و N به‌گونه‌ای هستند که $\frac{BN}{AN}=\frac{AM}{MB}=2$ است، در این‌صورت طول پاره‌خط MN چقدر است؟

۱) $\frac{a}{6}$ ۲) $\frac{a}{3}$ ۳) $\frac{a}{2}$ ۴) $\frac{2a}{3}$

پاسخ گزینهٔ «۲» با توجه به شکل زیر، کافی است AN و MB را به‌دست آوریم، بنابراین:

$$\frac{BN}{AN}=\frac{2}{1}\Rightarrow\frac{BN+AN}{AN}=\frac{2+1}{1}\Rightarrow\frac{AB}{AN}=3\Rightarrow AN=\frac{a}{3}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{2}{1}\Rightarrow\frac{AM+MB}{MB}=\frac{2+1}{1}\Rightarrow\frac{AB}{MB}=3\Rightarrow MB=\frac{a}{3}$$

به این ترتیب:

$$MN=AB-(AN+MB)=a-(\frac{a}{3}+\frac{a}{3})=\frac{a}{3}$$

بخش اول استدلال

این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

قضیه: برخی **نتیجه‌های مهم و پرکاربرد** که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند، قضیه نامیده می‌شود.

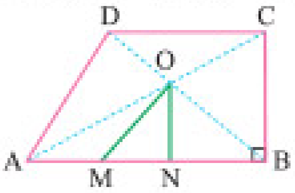
اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

نمونه: به قضیهٔ زیر که عکس آن نیز درست است، توجه کنید:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یک‌دیگر را نصف کنند، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲۸۰. مطابق شکل زیر، از محل تلاقی قطرهای ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD ($\widehat{B}=90^\circ$)، پاره‌خط‌های OM و ON به‌ترتیب موازی با AD و BC رسم شده‌اند. نسبت $\frac{AM}{BN}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

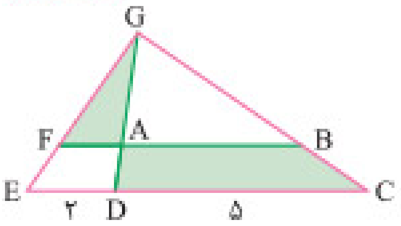


۱) ۱
۲) ۲
۳) کوچک‌تر از ۱
۴) بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر از ۲

۲۸۱. اندازهٔ قاعده‌های ذوزنقه‌ای ۵ و ۹ واحد است. پاره‌خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه چنان رسم می‌کنیم که ذوزنقه را به دو قسمت با مساحت‌های مساوی، تقسیم کند. اندازهٔ پاره‌خط کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

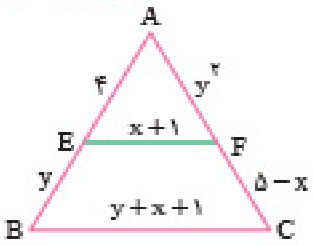
۱) ۷
۲) $\sqrt{53}$
۳) $4\sqrt{3}$
۴) $\sqrt{57}$

۲۸۲. در شکل زیر، DG = ۳DA و اندازهٔ پاره‌خط‌های DE و DC، به‌ترتیب ۲ و ۵ واحد هستند. مساحت مثلث AFG، چند درصد مساحت ذوزنقهٔ ABCD است؟ (ریاضی ۹۹)



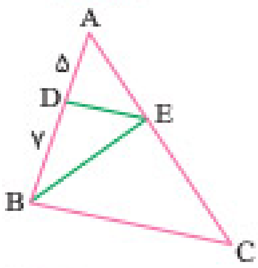
۱) ۴۰
۲) ۳۶
۳) ۳۲
۴) ۲۴

۲۸۳. در شکل زیر، EF موازی BC است. مقدار $2x-y$، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)



۱) -4
۲) -2
۳) ۲
۴) ۴

۲۸۴. در مثلث ABC، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۱)



۱) ۱/۵
۲) ۱/۷
۳) ۲/۱
۴) ۲/۴

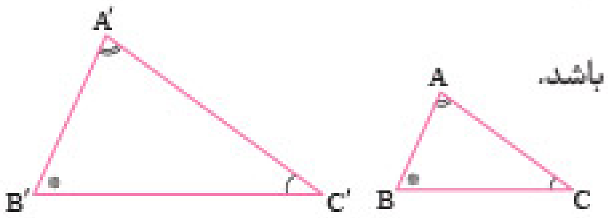
درس ۳ تشابه مثلث‌ها

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را متشابه گوییم، هرگاه:

۱ زاویه‌های متناظر آن‌ها با هم برابر باشند.

۲ نسبت ضلع‌های متناظر در دو مثلث یکسان باشد.

به زبان نمادین در شکل‌های مقابل داریم:



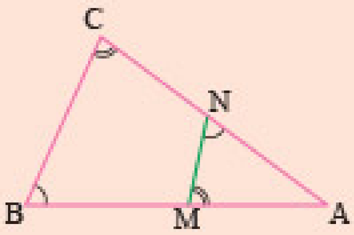
مهم:

۱ $\widehat{A}=\widehat{A'},\widehat{B}=\widehat{B'},\widehat{C}=\widehat{C'}$

۲ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$ $\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$

حواست باشه: برای جلوگیری از اشتباه، در نوشتن نسبت ضلع‌ها سفارش می‌کنیم به روش زیر عمل کنید:

نام رئوس یکی از مثلث‌ها را به دلخواه بنویسید، سپس برای نوشتن نام رئوس مثلث دوم، رأس‌ها را با همان ترتیبی که رأس‌های مثلث نخست را نوشته‌اید، بنویسید (به‌جای هر رأس، رأس نظیر را در مثلث دوم بگذارید.) در پایان سه خط کسری بکشید و در صورت، ضلع‌های یک مثلث و در مخرج، ضلع‌های مثلث دیگر را با همان ترتیبی که رأس‌ها را نوشته‌اید، پُر کنید. برای نمونه در شکل مقابل، فرض کنید دو مثلث متشابه‌اند و $\widehat{N}=\widehat{B}$ و $\widehat{M}=\widehat{C}$ باشد.



با توجه به آن‌چه گفته شد نسبت اضلاع را می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ANM} \Rightarrow \frac{AB}{AN}=\frac{AC}{AM}=\frac{BC}{NM}$$

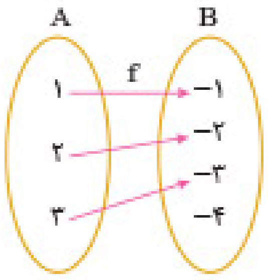
فصل ۳

تابع

در ادامهٔ درس تابع پارسال، توی سال یازدهم توابع خاص رو می‌شناسی. درس دوم این فصل، در مورد تابع یک‌به‌یک و تابع وارون هست که تا حالا پای ثابت کنکور بوده و معمولاً هرسال یه تست ازش می‌اومده. آخرین درس هم، اعمال جبری بر روی توابع هست. توی این درس یاد می‌گیری چطور دو تابع رو با هم جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کنی و نمودار اون‌ها رو رسم کنی. تابع از مبحث‌های بسیار مهم ریاضیه. به یادش باش!

درس ۱ آشنایی با برخی از انواع توابع

یادآوری تابع دهم

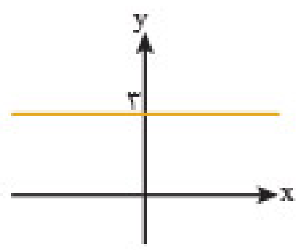


مفهوم تابع: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو مجموعهٔ A ، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود، A را دامنهٔ تابع و B را هم‌دامنهٔ تابع می‌نامند. برای نمونه، نمودار پیکانی مقابل را در نظر بگیرید.
این نمودار تابع f را با دامنهٔ $\{۱,۲,۳\}$ ، هم‌دامنهٔ $\{-۴,-۳,-۲,-۱\}$ و برد $\{-۳,-۲,-۱\}$ نمایش می‌دهد.

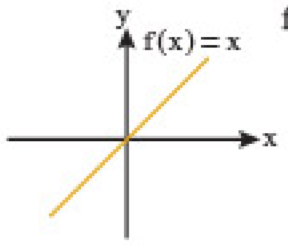
تابع‌هایی که سال دهم خواندید

در سال دهم با تابع‌های زیر آشنا شدید:

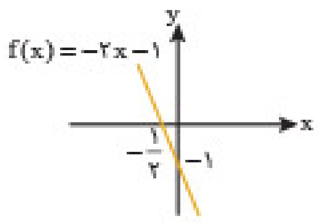
الف تابع ثابت: $f(x)=c \ \ (c\in\mathbb{R})$ ؛
مانند: $f(x)=۳$



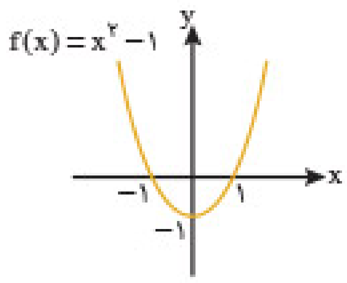
ب تابع همانی: $f(x)=x \ \ (x\in D_f)$



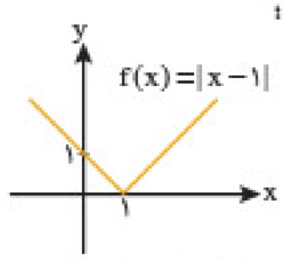
پ تابع خطی: $f(x)=ax+b \ \ (a\,,b\in\mathbb{R})$ ؛
مانند: $f(x)=-۲x-۱$



ت تابع درجهٔ دوم: $f(x)=ax^۲+bx+c \ \ (a\neq ۰\,، b\,,c\in\mathbb{R})$ ؛
مانند: $f(x)=x^۲-۱$



ث تابع قدرمطلق: $f(x)=|x-a|$ ؛
مانند: $f(x)=|x-۱|$



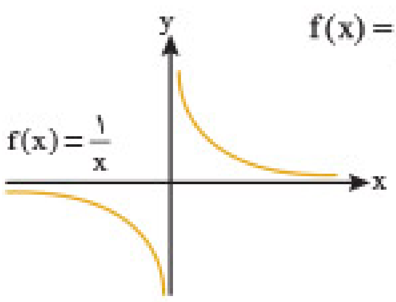
اکنون به بررسی تابع‌های جدیدی می‌پردازیم که در کتاب ریاضی ۲ آمده است.

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

تابع‌های مقابل، نمونه‌هایی از توابع گویا هستند: $f(x)=\dfrac{\sqrt{۵}x}{۳x^۲-۱}\,,f(x)=۲x\,,f(x)=\dfrac{x^۲-x+۱}{x^۳+۲}\,,f(x)=\dfrac{۲}{۳x+۱}$

مشهورترین تابع گویا، تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ است که نمودار آن به شکل مقابل می‌باشد:



بزرگ‌ترین دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}-\{۰\}$ و روی این دامنه، برد تابع $\mathbb{R}-\{۰\}$ است.

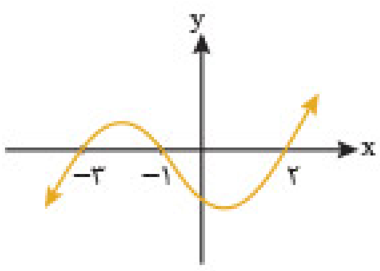
دامنهٔ توابع گویا

بزرگ‌ترین دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ، برابر همهٔ اعداد حقیقی به‌جز صفرهای $Q(x)$ است.

$D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌ها یا صفرهای }Q(x)\}$

برای نمونه، بزرگ‌ترین دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۳x}{x-۲}$ ، برابر $\mathbb{R}-\{۲\}$ است.

۳۹۹. **شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{(x+۱)f(x)}$ کدام است؟**



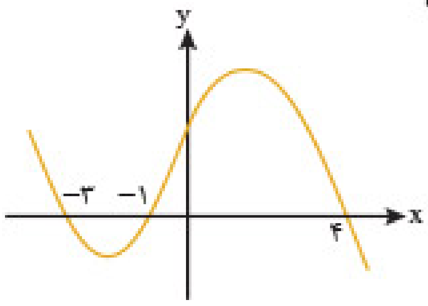
۱) $[-۳,۲]$

۲) $[-۱,+\infty)$

۳) $(-\infty,-۱]$

۴) $\{-۱\}\cup\mathbb{R}-(-۳,۲)$

۴۰۰. **شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x\cdot f(x)}$ کدام است؟**



۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۲]$

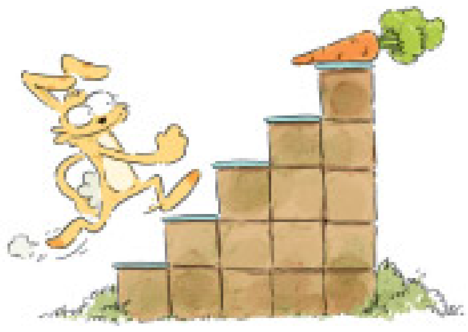
۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$

۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$

۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

تابع پله‌ای و تابع جزءصحیح

تابع پله‌ای

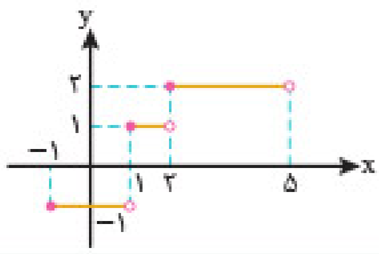


هر تابعی که بتوان همهٔ دامنهٔ آن را به تعدادی زیرمجموعه تقسیم کرد، به‌گونه‌ای که تابع روی **هرکدام از این مجموعه‌ها ثابت** باشد، **تابع پله‌ای** نامیده می‌شود.

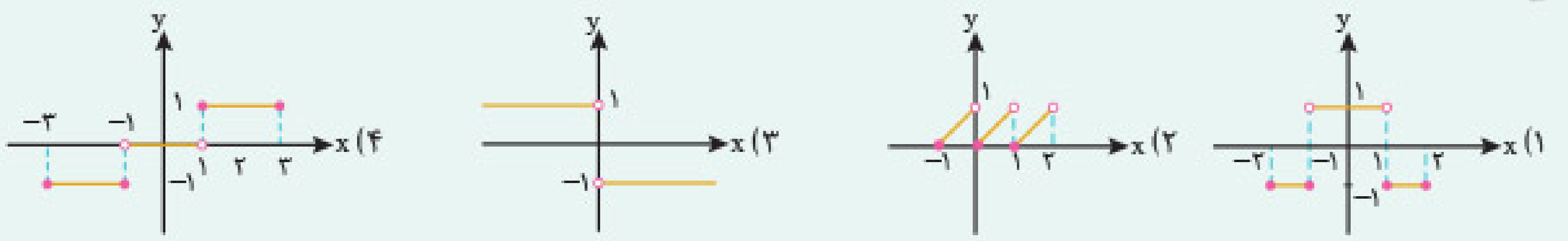
برای نمونه، تابع با ضابطهٔ مقابل تابع پله‌ای است.

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & ; & -۱\le x<۱\\ ۱ & ; & ۱\le x<۲\\ ۲ & ; & ۲\le x<۵\end{cases}$$

نمودار تابع f به شکل مقابل است.



مثال: **نمودار کدام‌یک از تابع‌های زیر، مربوط به یک تابع پله‌ای نیست؟**



پاسخ گزینهٔ «۲» نمودار گزینهٔ «۲» مربوط به تابع پله‌ای نیست.

تابع جزءصحیح (براکت)

تابع جزءصحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد.
ضابطهٔ این تابع به‌صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود.

برای نمونه: $[۴]=۴\ ,\ [۶/۳]=۶\ ,\ [-۴]=-۴\ ,\ [-۴/۲]=-۵$

در واقع اگر اعداد غیرصحیح را روی محور طول‌ها نمایش دهیم برای یافتن حاصل جزءصحیح آن‌ها، اولین عدد صحیح قبل از آن نقطه را انتخاب می‌کنیم. به عنوان نمونه برای یافتن $[۳/۴]$ و $[-۳/۴]$ اعداد ۳/۴ و ۳/۴− را روی محور طول‌ها می‌یابیم. در هر نقطه، اولین عدد صحیح سمت چپ جواب براکت است.

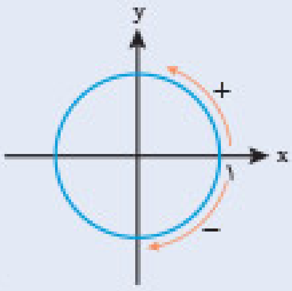
برای درک بیشتر به حاصل جزءصحیح‌های مقابل توجه کنید: $[\frac{۱۳}{۵}]=۲$ ، $[-\frac{۱۰}{۷}]=-۲$ ، $[-\sqrt{۲}]=-۲$ ، $[-۰/۴۵]=-۱$

$[-\tan ۶۰^\circ]=-۲$ ، $[\tan ۶۰^\circ]=۱$ ، $[-\sin ۴۵^\circ]=-۱$ ، $[\sin ۴۵^\circ]=۰$

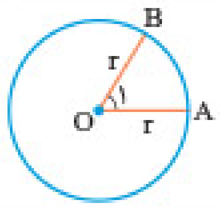
درس ۱ واحدهای اندازه‌گیری زاویه

یادآوری: ◀ **زاویه:** اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها ۱ درجه است.

◀ **دایرهٔ مثلثاتی:** دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، جهت مثلثاتی می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.

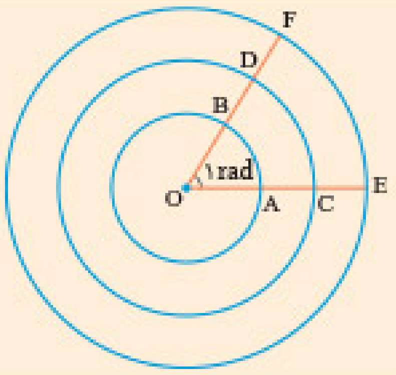


۱ رادیان برابر است با اندازهٔ زاویهٔ مرکزیِ روبه‌رو به کمانی از دایره به طول شعاع دایره.



$$OA = OB = \overset{\frown}{AB} = r$$

نکته: اگر زاویهٔ مرکزی شکل مقابل، ۱ رادیان باشد، طول هر کمان با شعاع دایرهٔ نظیر آن برابر است.



$$OA = \overset{\frown}{AB}$$

$$OC = \overset{\frown}{CD}$$

$$OE = \overset{\frown}{EF}$$

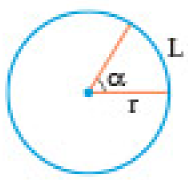
رادیان: نسبت طول کمان روبه‌روی زاویهٔ مرکزی به شعاع دایره را اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان در نظر می‌گیریم:

مهم:

$$\text{اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{اندازهٔ شعاع دایره}}$$

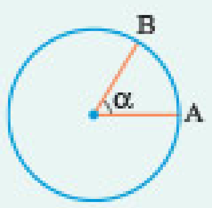
اگر طول کمان را با L و شعاع دایره را با r و اندازهٔ زاویه برحسب رادیان را α بنامیم، داریم:

$$\alpha = \frac{L}{r} \quad \text{یا} \quad L = r\alpha$$



نکته: در این رابطه L و r هم‌واحد هستند.

مثال: ◀ فرض کنید در دایرهٔ مقابل، طول کمان AB برابر ۲۵ cm و شعاع دایره ۲۰ cm باشد. اندازهٔ زاویهٔ α برحسب رادیان کدام است؟



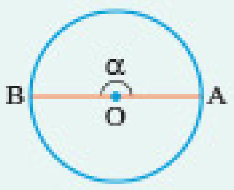
۱) ۱/۵ ۲) ۰/۸

۳) ۱/۲۵ ۴) ۰/۶

پاسخ گزینهٔ «۳» برای یافتن اندازهٔ زاویهٔ α برحسب رادیان کافی است نسبت طول کمان AB را بر اندازهٔ شعاع دایره بیابیم.

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{۲۵}{۲۰} = ۱/۲۵ \text{ rad}$$

◀ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی کمانی به طول نصف اندازهٔ محیط دایره برحسب رادیان کدام است؟



۱) ۱ ۲) π

۳) ۲π ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۲» طول کمان موردنظر نصف اندازهٔ محیط دایره است.

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{۲\pi r}{۲} = \pi r$$

اندازهٔ زاویه برحسب رادیان برابر است با:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

فصل ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی و نمودارش یکی از انواع توابع خاصه که تو این فصل باهاش آشنا می‌شی.
تابع نمایی کاربرد زیادی توی علوم مختلف داره که خوشبختانه کتاب جدید چندتاش رو ذکر کرده.
لگاریتم هم که یکی از اختراعات عجیب بشر بوده و هست. اولش چینی‌ها برای نگه‌داشتن حساب مالیات‌هاشون لگاریتم رو ساختن، ولی بعدها اروپایی‌ها به شکل امروزی درش‌آوردن و توی محاسبات پیچیدهٔ ریاضی ازش استفاده کردن.
کلا اینو بدون که لگاریتم یکی از مبحث‌های آسون ریاضیه!

۹۵۷. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2+(m-1)x-m-1}}{|x^3-a^3|} & ; \ x\neq a\\ b & ; \ x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. مقدار b کدام است؟

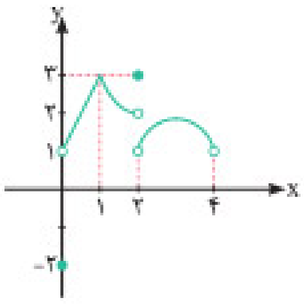
۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

آزمون پایانی فصل ششم

۱. برای تابع $f(x)=[x]-x$ در نقطهٔ $a\in\mathbb{Z}$، حد چپ، حد راست و حد به‌ترتیب دارای چه مقادیری هستند؟

۱) صفر، صفر، صفر ۲) -1، -1، -1 ۳) صفر، -1، وجود ندارد ۴) -1، صفر، وجود ندارد

۲. نمودار تابع f مطابق شکل روبه‌رو می‌باشد، مقدار $f(0)+\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1} f(x)-\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳. اگر $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=k_1$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=k_2$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x^2-x)+\lim\limits_{x\to 1^-} f(1-x^2)$ کدام است؟

۱) k_1+k_2 ۲) $2k_1$ ۳) $2k_2$ ۴) صفر

۴. حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{3n}-1}{x^n-1}$ کدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) صفر ۴) ۹

۵. حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3-1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) صفر

۶. حاصل $\lim\limits_{a\to 1}\dfrac{1-a^6}{1-a}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۷. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+17}-5}$ کدام گزینه است؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) $\frac{15}{2}$

۸. حاصل $\lim\limits_{x\to (-3)^-}\dfrac{|3-x^2-2x|}{2x+\sqrt{x^2+27}}$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۹. به ازای کدام مقدار a تابع f در $x=2$ دارای حد است؟

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4[x]}{|x-2|} & ; \ x<2\\ ax+1 & ; \ x>2\end{cases}$

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$
۳) $\frac{3}{2}$ ۴) -5

۱۰. اگر $f(x)=\begin{cases}ax-1 & ; \ x<1\\ x^2+2a & ; \ x\geq 1\end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

۱۱. اگر $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{2[1-\dfrac{1}{\cos^2 x}]+\dfrac{2x}{\pi}}{ax+b}=\dfrac{1}{2}$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{4+4\pi}{\pi}$ ۲) $\frac{4-4\pi}{\pi}$ ۳) $\frac{1+\pi}{\pi}$ ۴) $\frac{1-\pi}{\pi}$

۹۲۴. بزرگ‌ترین بازهٔ پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

۱) $(-2,2)$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $(0,2)$ ۴) $[0,2]$

۹۲۵. تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & ; x\neq a\\ \tan^2 b & ; x=a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{5\pi}{3}$ ۳) $\frac{7\pi}{6}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

۹۲۶. تابع $f(x)=[x]+[2x]+[3x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(0,1)$ ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) همواره پیوسته

۹۲۷. طول بزرگ‌ترین بازهٔ بازی که تابع $f(x)=(x^2-1)[x^2]$ روی آن پیوسته است، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴

۹۲۸. تابع $f(x)=\dfrac{x-2}{[\frac{x}{2}]+1}$ روی بازهٔ $(0,m)$ پیوسته است. حداکثر مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۲۹. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-[x]}{x^2-x-6} & ; x\neq 2\\ a & ; x=2\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، روی بازهٔ $[2,3)$ پیوسته است؟ (ریاضی ۹۷)

۱) $\frac{1}{11}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۹۳۰. تعداد نقاط ناپیوستهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x-\frac{1}{3}]+[x+\frac{2}{3}]$، روی بازهٔ $[-\frac{5}{3},\frac{5}{3}]$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۳۱. به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ; x>2\\ ax-1 & ; x\leq 2\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۹۳۲. به‌ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x[x] & ; |x|<1\\ ax+b & ; |x|\geq 1\end{cases}$، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

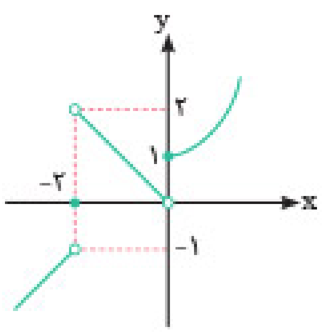
۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹۳۳. تابع $f(x)=\begin{cases}\tan\dfrac{(2x+1)\pi}{4} & ; x\leq 1\\ \dfrac{|x^2+x-2|}{a(1-x)} & ; 1<x<5\\ b(x-[-x]) & ; x\geq 5\end{cases}$ روی بازهٔ $[1,5]$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟ (تجربی دی ۱۴۰۱)

۱) $-0/7$ ۲) $-0/5$ ۳) $0/7$ ۴) $0/5$

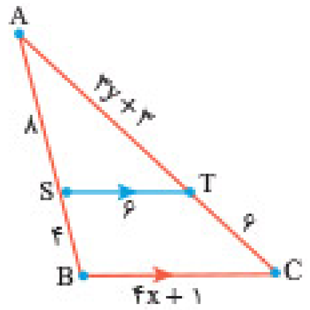
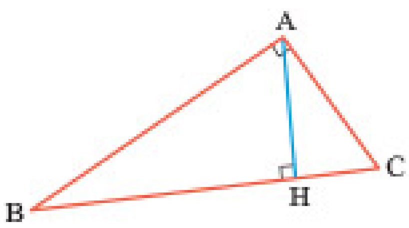
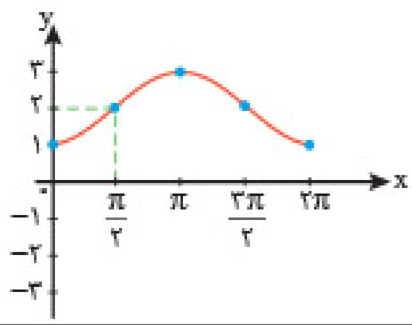
برای ۱۰۰ درصد

۹۳۴. باتوجه به شکل مقابل، حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(1-x^2) - \lim\limits_{x\to 0^+} f(-2-x^2)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) -1
۳) ۲
۴) -2

۱	سؤالات امتحان نهایی ـ نوبت دوم		خرداد ۱۴۰۲
درس: ریاضی ۲ (یازدهم)	رشته: علوم تجربی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ: ۱۴۰۲/۰۳/۰۸

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) برای هر عدد حقیقی k، داریم $[x+k]=[x]+k$. ($[x]$ نشان‌دهندهٔ جزءصحیح x است.) ب) اگر تمام داده‌های آماری را ۲ برابر کنیم، انحراف‌معیار نیز ۲ برابر می‌شود. پ) دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=x$، با هم برابرند.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید. الف) مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطهٔ برخورد .... است. ب) حد تابع $f(x)=\dfrac{x+4}{[x]+3}$ وقتی $x \to -1^-$، برابر .... است. پ) مقدار مینیمم تابع $f(x)=3x^2+6x+5$ برابر با .... است. ت) حداکثر مقدار تابع $f(x)=\cos x$ برابر با .... است که در نقاط به طول .... حاصل می‌شود.	۱/۲۵
۳	گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. الف)ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=3x-2$ کدام است؟ ۱) $f^{-1}(x)=-3x+2$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ ب) کدام‌یک از توابع زیر در کل دامنهٔ خود یک‌به‌یک است؟ ۱) $f(x)=x^2$ ۲) $f(x)=[x]$ ۳) $f(x)=\|x\|$ ۴) $f(x)=2^x$	۰/۵
۴	نقطهٔ $A(3,0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y-x=5$ است. مساحت این مربع را به دست آورید.	۰/۷۵
۵	معادلهٔ $2x=1-\sqrt{2-x}$ را حل کنید.	۱
۶	در شکل مقابل، $ST \parallel BC$ است. مقدار x و y را به دست آورید. 	۱/۲۵
۷	در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، اندازهٔ پاره‌خط‌های خواسته‌شده را به دست آورید. $BH=9\ ,\ AH=6\ ,\ BC=?\ ,\ AC=?$ 	۱
۸	نمودار تابع $f(x)=1-\sqrt{x-3}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.	۱/۵
۹	حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید.) $\sin(\frac{25\pi}{3})-\cos(\frac{-5\pi}{6})-\tan(\frac{4\pi}{3})$	۱/۵
۱۰	نمودار رسم‌شده، مربوط به کدام ضابطه است؟ نمودار ضابطهٔ دیگر را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید. الف) $y=2\cos x+1$ ب) $y=2-\cos x$ 	۱

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه
۱	۱	۴۰	۲	۷۹	۴	۱۱۸	۴	۱۵۷	۴	۱۹۶	۴
۲	۴	۴۱	۴	۸۰	۱	۱۱۹	۲	۱۵۸	۲	۱۹۷	۲
۳	۱	۴۲	۳	۸۱	۱	۱۲۰	۱	۱۵۹	۳	۱۹۸	۱
۴	۲	۴۳	۱	۸۲	۱	۱۲۱	۴	۱۶۰	۴	۱۹۹	۴
۵	۱	۴۴	۲	۸۳	۳	۱۲۲	۱	۱۶۱	۱	۲۰۰	۳
۶	۳	۴۵	۲	۸۴	۱	۱۲۳	۲	۱۶۲	۲	۲۰۱	۱
۷	۳	۴۶	۳	۸۵	۱	۱۲۴	۱	۱۶۳	۴	۲۰۲	۳
۸	۲	۴۷	۱	۸۶	۳	۱۲۵	۲	۱۶۴	۱	۲۰۳	۴
۹	۳	۴۸	۱	۸۷	۱	۱۲۶	۴	۱۶۵	۱	۲۰۴	۴
۱۰	۱	۴۹	۲	۸۸	۳	۱۲۷	۲	۱۶۶	۲	۲۰۵	۳
۱۱	۱	۵۰	۳	۸۹	۴	۱۲۸	۱	۱۶۷	۳	۲۰۶	۳
۱۲	۴	۵۱	۳	۹۰	۱	۱۲۹	۳	۱۶۸	۲	۲۰۷	۴
۱۳	۲	۵۲	۲	۹۱	۳	۱۳۰	۲	۱۶۹	۱	۲۰۸	۳
۱۴	۳	۵۳	۳	۹۲	۱	۱۳۱	۱	۱۷۰	۱	۲۰۹	۱
۱۵	۴	۵۴	۳	۹۳	۲	۱۳۲	۱	۱۷۱	۳	۲۱۰	۴
۱۶	۲	۵۵	۲	۹۴	۲	۱۳۳	۲	۱۷۲	۴	۲۱۱	۴
۱۷	۳	۵۶	۱	۹۵	۳	۱۳۴	۲	۱۷۳	۳	۲۱۲	۱
۱۸	۳	۵۷	۴	۹۶	۲	۱۳۵	۱	۱۷۴	۲	۲۱۳	۲
۱۹	۳	۵۸	۱	۹۷	۱	۱۳۶	۳	۱۷۵	۳	۲۱۴	۲
۲۰	۳	۵۹	۲	۹۸	۲	۱۳۷	۴	۱۷۶	۲	۲۱۵	۴
۲۱	۲	۶۰	۴	۹۹	۳	۱۳۸	۴	۱۷۷	۲	۲۱۶	۳
۲۲	۲	۶۱	۲	۱۰۰	۲	۱۳۹	۴	۱۷۸	۱	۲۱۷	۲
۲۳	۱	۶۲	۴	۱۰۱	۱	۱۴۰	۳	۱۷۹	۳	۲۱۸	۴
۲۴	۳	۶۳	۲	۱۰۲	۱	۱۴۱	۲	۱۸۰	۱	۲۱۹	۱
۲۵	۴	۶۴	۱	۱۰۳	۴	۱۴۲	۳	۱۸۱	۳	۲۲۰	۴
۲۶	۲	۶۵	۱	۱۰۴	۳	۱۴۳	۳	۱۸۲	۳	۲۲۱	۴
۲۷	۴	۶۶	۱	۱۰۵	۴	۱۴۴	۴	۱۸۳	۳	۲۲۲	۲
۲۸	۴	۶۷	۲	۱۰۶	۲	۱۴۵	۴	۱۸۴	۳	۲۲۳	۳
۲۹	۳	۶۸	۳	۱۰۷	۲	۱۴۶	۴	۱۸۵	۴	۲۲۴	۳
۳۰	۳	۶۹	۳	۱۰۸	۲	۱۴۷	۳	۱۸۶	۴	۲۲۵	۳
۳۱	۳	۷۰	۴	۱۰۹	۲	۱۴۸	۴	۱۸۷	۳	۲۲۶	۱
۳۲	۲	۷۱	۴	۱۱۰	۲	۱۴۹	۲	۱۸۸	۲	۲۲۷	۳
۳۳	۲	۷۲	۳	۱۱۱	۴	۱۵۰	۲	۱۸۹	۲	۲۲۸	۴
۳۴	۳	۷۳	۱	۱۱۲	۴	۱۵۱	۱	۱۹۰	۲	۲۲۹	۴
۳۵	۲	۷۴	۳	۱۱۳	۳	۱۵۲	۲	۱۹۱	۱	۲۳۰	۴
۳۶	۴	۷۵	۴	۱۱۴	۱	۱۵۳	۴	۱۹۲	۳	۲۳۱	۴
۳۷	۴	۷۶	۳	۱۱۵	۲	۱۵۴	۲	۱۹۳	۲	۲۳۲	۴
۳۸	۳	۷۷	۲	۱۱۶	۴	۱۵۵	۲	۱۹۴	۱	۲۳۳	۳
۳۹	۳	۷۸	۲	۱۱۷	۲	۱۵۶	۱	۱۹۵	۲	۲۳۴	۲

دقت کنید در عبارت m^2+2m+3 مقدار دلتا منفی و ضریب m^2 مثبت است پس m^2+2m+3 همواره مثبت است.

در معادلهٔ $(m^2+2m+3)t^2+4t-9=0$ مقدار $\frac{c}{a}=\frac{-9}{m^2+2m+3}$ منفی است پس دلتای این معادله مثبت است. اگر جواب‌ها را $t_1>0$ و $t_2<0$ فرض کنیم، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} x^{\frac{4}{5}}=t_1 \quad \Rightarrow \sqrt[5]{x^4}=t_1 \Rightarrow x^4=t_1^5 \xrightarrow{x>0} x=\sqrt[4]{t^5} \\ x^{\frac{4}{5}}=t_2 \quad (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

بنابراین معادله ۱ جواب متمایز دارد.

۵۳. **گزینه ۳** ابتدا دلتای معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-2m)^2-4(1)(-1)=4m^2+4$$

این عبارت همواره مثبت است، بنابراین معادله دارای دو ریشه است.
با بررسی P (یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌ها) متوجه می‌شویم که P همواره منفی است؛ بنابراین دو ریشه، مختلف‌العلامت هستند.

$$P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{1}=-1<0$$

۵۴. **گزینه ۳**

راهبرد: معادلهٔ درجهٔ دوم با مجموع ریشه‌های S و حاصل‌ضرب ریشه‌های P به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله را می‌یابیم:

$$S=(2+\sqrt{a+4})+(2-\sqrt{a+4})=4$$
$$P=(2+\sqrt{a+4})\times(2-\sqrt{a+4})=4-(a+4)=-a$$

معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ را می‌سازیم: $x^2-4x-a=0$

۵۵. **گزینه ۲** این رابطه، یک رابطهٔ متقارن است و باید آن را بر حسب S و P بنویسیم، با فرض این‌که $S=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{1}=2$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{1}=-1$، داریم:

$$\alpha^2+\alpha^3+\beta^2+\beta^3=(\alpha^3+\beta^3)+(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]+[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]$$
$$=(S^3-3PS)+(S^2-2P)=[2^3-3(-1)(2)]+[2^2-2(-1)]$$
$$=14+6=20$$

۵۶. **گزینه ۱**

• **روش اول:** مخرج مشترک می‌گیریم:

$$A=\frac{\alpha^2}{5-\beta}+\frac{\beta^2}{5-\alpha}=\frac{5\alpha^2-\alpha^3+5\beta^2-\beta^3}{(5-\beta)(5-\alpha)}$$
$$=\frac{5(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha^3+\beta^3)}{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{5(S^2-2P)-(S^3-3PS)}{25-5S+P}$$

با توجه به این‌که در این سؤال $S=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{1}=5$ و $P=\frac{c}{a}=\frac{3}{1}=3$ هستند، داریم:

$$A=\frac{5(5^2-2(3))-(5^3-3(3)(5))}{25-5(5)+3}=\frac{95-80}{3}=5$$

• **روش دوم:** با توجه به این‌که α و β ریشه‌های معادله‌اند، پس می‌توان گفت:

$$\alpha^2-5\alpha+3=0 \Rightarrow \alpha(\alpha-5)=-3 \Rightarrow \alpha-5=\frac{-3}{\alpha}$$
$$\Rightarrow 5-\alpha=\frac{3}{\alpha}$$
$$\xrightarrow{\text{به همین طریق}} 5-\beta=\frac{3}{\beta}$$

این مقادیر را در A جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A=\frac{\alpha^2}{5-\beta}+\frac{\beta^2}{5-\alpha}=\frac{\alpha^2}{\frac{3}{\beta}}+\frac{\beta^2}{\frac{3}{\alpha}}=\frac{\alpha^2\beta+\beta^2\alpha}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}(3)(5)=5$$

۵۷. **گزینه ۴** از آن‌جایی که $\frac{1}{8}$ واسطهٔ عددی دو ریشهٔ α و β است، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{8}=\frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{1}{4} \Rightarrow S=\frac{1}{4}$$

می‌دانیم $S=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{m^2-4}=\frac{3}{m^2-4}$ است.

$$\frac{1}{4}=\frac{3}{m^2-4} \Rightarrow m^2-4=12 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$$

حواست باشه: در سؤالاتی که مقدار m به‌کمک S و P به دست می‌آید، باید دقت کرد که مقادیر m دلتای معادله را منفی نکنند!

دلتای معادله را تشکیل می‌دهیم: $\Delta=(-3)^2-4(m^2-4)(m)$

این عبارت به ازای $m=4$ منفی و به ازای $m=-4$ مثبت است، بنابراین جواب سؤال فقط $m=-4$ است.

۵۸. **گزینه ۱** رابطهٔ $(\alpha^2-4)^2+4\beta^2$ یک رابطهٔ نامتقارن است. سعی می‌کنیم برای متقارن کردن این رابطه از معادله کمک بگیریم:

$$\alpha^2-2\alpha-4=0 \Rightarrow \alpha^2-4=2\alpha$$
$$\Rightarrow (\alpha^2-4)^2+4\beta^2=4\alpha^2+4\beta^2=4(\alpha^2+\beta^2)=4(S^2-2P)$$

حالا S و P را از معادله می‌یابیم و حاصل را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2-2x-4=0 \quad , \quad S=-(-\frac{2}{1})=2 \quad , \quad P=-\frac{4}{1}=-4$$
$$\Rightarrow 4(S^2-2P)=4(4-(2\times(-4)))=48$$

۵۹. **گزینه ۲** $\alpha\beta^2-\sqrt{3}\alpha=\alpha(\beta^2-\sqrt{3})$ (*)

β ریشهٔ معادلهٔ $x^2+\sqrt{27}x-\sqrt{3}=0$ است؛ پس:

$$\beta^2+\sqrt{27}\beta-\sqrt{3}=0 \Rightarrow \beta^2-\sqrt{3}=-\sqrt{27}\beta$$
$$\xrightarrow{(*)} \alpha(\beta^2-\sqrt{3})=\alpha(-\sqrt{27}\beta)=-\sqrt{27}P$$
$$=-\sqrt{27}\times(-\sqrt{3})=\sqrt{81}=9$$

۶۰. **گزینه ۴** طبق فرض α ریشهٔ معادلهٔ $x^2-x-3=0$ است؛ پس داریم:

$$\alpha^2-\alpha-3=0 \Rightarrow \alpha^2=\alpha+3$$
$$\Rightarrow \alpha^3=\alpha(\alpha^2)=\alpha(\alpha+3)=\alpha^2+3\alpha=(\alpha+3)+3\alpha=4\alpha+3$$

به همین ترتیب برای β خواهیم داشت:

$$4\beta^2-9=4(\beta+3)-9=4\beta+3$$

درنتیجه: $\alpha^3(4\beta^2-9)=(4\alpha+3)(4\beta+3)=16\alpha\beta+12(\alpha+\beta)+9$

$$=16(-3)+12(1)+9=-27$$

۶۱. **گزینه ۲** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2+x-1=0 \Rightarrow x^2=1-x \Rightarrow a^2=1-a$$
$$\Rightarrow 2b\sqrt{1-a}=2b\sqrt{a^2}=2b|a|$$

معادلهٔ درجه دو، دارای دو جواب مختلف‌العلامت است:

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow 2ba=2P=2(-1)=-2 \\ a<0 \Rightarrow -2ba=-2P=-2(-1)=2 \end{cases}$$

۶۲. **گزینه ۴** طرفین معادلهٔ $\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}=k$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}=k \Rightarrow \alpha+\beta+3\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta}(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})=k^3$$

از طرفی بـه ازای $x=۰$ مقدار y از معادلهٔ خط $۳x-۲y=۶$، عدد -۳ است؛ پس تابع f نیز از نقطهٔ $(۰,-۳)$ عبور می‌کند.

$$f(۰)=-۳\Rightarrow -۳=۳-\sqrt{۰+a}\Rightarrow a=۳۶\Rightarrow b=۳۶$$

ضابطهٔ نهایی تابع $f(x)=۳-\sqrt{-۳۶x+۳۶}$ اســت. بـرای یافتن محل تلاقی و برخورد نمـودار این تابع با محور طول‌ها، مقدار تابع را صفر می‌گذاریم:

$$۰=۳-\sqrt{-۳۶x+۳۶}\Rightarrow\sqrt{-۳۶x+۳۶}=۳$$

$$\xrightarrow[\text{دو}]{\text{توان}}-۳۶x+۳۶=۹$$

$$\Rightarrow -۳۶x=-۲۷\Rightarrow x=\frac{۲۷}{۳۶}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

نکته: اگر دامنهٔ تابع $y=\sqrt{ax+b}$ بازهٔ $[k,+\infty)$ یا $(-\infty,k]$ باشد، آن‌گاه $x=k$ ریشهٔ عبارت درون رادیکال است؛ یعنی: $ak+b=۰$.

۳۹۳. **گزینه ۴** ابتدا دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم:

$$x-|x|\ge ۰\Rightarrow x\ge |x|$$

اما x هیچ‌گاه از $|x|$ بزرگ‌تر نیسـت، در صورتی مساوی هستند که $x\ge۰$ باشد؛ بنابراین در این حالت $y=۰$ می‌شود؛ یعنی:

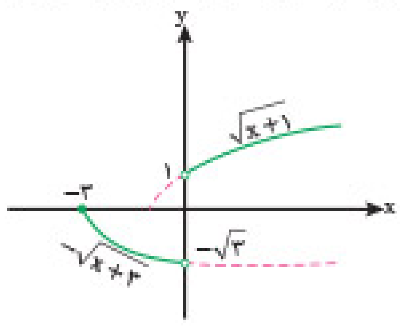
$$y=\sqrt{x-|x|}\xrightarrow[x\ge۰]{|x|=x}\sqrt{x-x}=\sqrt{۰}=۰$$

۳۹۴. **گزینه ۴** ضابطهٔ تابع را به‌صورت قطعه‌ای (چندضابطه‌ای) می‌نویسیم.

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt{x-\frac{|x|}{x}+۲}$$

$$=\begin{cases}\frac{x}{x}\sqrt{x-\frac{x}{x}+۲}=\sqrt{x+۱} & ;\ x>۰\\ \frac{x}{-x}\sqrt{x-\frac{-x}{x}+۲}=-\sqrt{x+۳} & ;\ x<۰\end{cases}$$

نمودار تابع را با توجه به شرط‌های موجود رسم می‌کنیم:



برد تابع مجموعهٔ $(-\sqrt{۳},۰]\cup(۱,+\infty)$ است.

نکته: تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ (تابع علامت) برابر است با:

$$f(x)=\begin{cases}۱ & ;\ x>۰\\ -۱ & ;\ x<۰\end{cases}$$

۳۹۵. **گزینه ۳** ضابطهٔ $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}\Rightarrow f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد؛ بنابراین:

$$-x+|-x+۲|\ge۰\Rightarrow|۲-x|\ge x$$

نامعادله را در دو حالت $x>۲$ و $x\le۲$ بررسی می‌کنیم:

$x>۲\Rightarrow -(۲-x)\ge x\Rightarrow -۲\ge ۰$ ×

$x\le۲\Rightarrow ۲-x\ge x\Rightarrow ۲\ge ۲x\Rightarrow ۱\ge x$ ✓

۳۹۶. **گزینه ۲** عبارت زیر رادیکال را نامنفی در نظر می‌گیریم:

$$۱+f(x)\ge۰\Rightarrow f(x)\ge -۱$$

با توجه به نمودار تابع متوجه می‌شـویم، عـرض همهٔ نقطه‌ها از -۱ بیشتر یا با آن مساوی‌اند.

برای یافتن برد g از محدودهٔ عرض‌های f شروع می‌کنیم.

$$-۱\le f(x)\le ۶\xrightarrow{+۱}۰\le ۱+f(x)\le ۷$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }}۰\le\sqrt{۱+f(x)}\le\sqrt{۷}$$

برد تابع g بازهٔ $[۰,\sqrt{۷}]$ است.

۳۹۷. **گزینه ۴** برای تعیین دامنهٔ تابع باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد؛ پس:

$$y=\sqrt{-f(x)+۵}\Rightarrow -f(x)+۵\ge۰\Rightarrow f(x)\le۵$$

تابع f یک تابع خطی است، پس ابتدا باید ضابطهٔ آن را مشخص نماییم:

$$f(x)=ax+b\Rightarrow\begin{cases}\text{شیب خط}:(۰,۱),(۲,-۳)\Rightarrow a=\frac{-۳-۱}{۲-۰}=-۲\\ \text{عرض از مبدأ}:b=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-۲x+۱$$

حال نامعادلهٔ مربوط را حل می‌کنیم:

$$f(x)\le۵\Rightarrow -۲x+۱\le۵\Rightarrow x\ge-۲$$

بنابراین دامنه دارای بی‌شمار عدد صحیح است.

۳۹۸. **گزینه ۴**

• **روش اول:** عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد؛ بنابراین:

$$x\cdot f(x)\ge۰$$

جـدول تعیین علامت عبارت $x\cdot f(x)$ را رسـم می‌کنیم. با توجه به شکل، علامت $f(x)$ در مجموعهٔ $[-۴,-۳)\cup(۱,۲)$ مثبت، در بازهٔ $(-۳,۱)$ منفی و در نقاط -۳ و ۱ و ۲ برابر صفر است؛ بنابراین:

x	−۴		−۳		۰		۱		۲
x		−		−	۰	+		+	
f(x)		+	۰	−		−	۰	+	۰
x.f(x)		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰

جواب برابر مجموعهٔ $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$ است.

• **روش دوم:** فرمول ممنوع:

مقدار $x\cdot f(x)$ در $x=۰$ برابر صفر است.

این نقطه در دامنهٔ تابع $\sqrt{x\cdot f(x)}$ قـرار دارد، در نتیجه گزینه‌های «۲» و «۳» حـذف می‌شـوند. تابع f در نقطهٔ -۳ برابر صفر اسـت؛ بنابراین حاصـل $x\cdot f(x)$ در نقطهٔ -۳ برابر صفر و این نقطه نیز در دامنهٔ تابع قرار دارد و گزینهٔ «۱» نیز حذف می‌شود.

۳۹۹. **گزینه ۴** برای محاسبـهٔ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x+۱)f(x)}$ باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد که در دو حالت باید بررسی شود:

الف) $x+۱\ge۰,\ f(x)\ge۰\Rightarrow x\ge-۱,\ x\in[-۳,-۱]\cup[۲,+\infty)$

$$\Rightarrow x\in[۲,+\infty)\cup\{-۱\}$$

ب) $x+۱\le۰,\ f(x)\le۰\Rightarrow x\le-۱,\ x\in(-\infty,-۳]\cup[-۱,۲]$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,-۳]\cup\{-۱\}$$

بنابرایـن دامنهٔ تابـع به‌صورت $(-\infty,-۳]\cup[۲,+\infty)\cup\{-۱\}$ یا $\{-۱\}\cup\mathbb{R}-(-۳,۲)$ است.

۴۴۵. **گزینه ۳** x را برحسب y محاسبه می‌کنیم:

$$y=-\frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}x \Rightarrow -۲y+۶=x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=-۲x+۶$$

که در آن $a=-۲$ و $b=۶$، در نتیجه $a-۲b=-۲-۱۲=-۱۴$ است.

نکته: تابع وارون $f(x)=ax+b$، تابعی خطی است که ضریب x (شیب خط) برابر $\frac{۱}{a}$ است.

۴۴۶. **گزینه ۲** با انتقال ۲ واحد به راست، شیب f تغییر نمی‌کند، پس شیب f^{-1} با f برابر است و داریم:

$$m_{f^{-1}}=m_f \Rightarrow \frac{۱}{a}=a \Rightarrow a=\pm ۱$$

پس $f(x)=x+b$ یا $f(x)=-x+b$

اما وارون تابع خطی با شیب ۱-، خودش می‌شود که با صورت سؤال تناقض دارد، بنابراین فقط $f(x)=x+b$ قابل قبول است و داریم:

$$f^{-1}(x)=x-b$$

$$y=x+b \xrightarrow{\text{دو واحد به راست}} y=x+b-۲$$

$$\xrightarrow{\text{بر وارون منطبق است}} x+b-۲=x-b \Rightarrow b=۱$$

پس داریم: $f(x)=x+۱$ و بنابراین: $f^{-1}(۴)=۳$

۴۴۷. **گزینه ۲** دو خط نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن هستند، یعنی دو تابع وارون یکدیگرند.

$$۲x-۳y=b \Rightarrow ۲x=۳y+b \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}y+\frac{b}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۳}{۲}x+\frac{b}{۲}$$

$$ax+by=۸ \Rightarrow by=-ax+۸ \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{۸}{b}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{a}{b}x+\frac{۸}{b}$$

$f(x)=f^{-1}(x)$: در نتیجه $\frac{b}{۲}=\frac{۸}{b}$ و $\frac{۳}{۲}=-\frac{a}{b}$، داریم:

$$\frac{b}{۲}=\frac{۸}{b} \Rightarrow b^{۲}=۱۶ \Rightarrow b=\pm ۴$$

$$\frac{-a}{b}=\frac{۳}{۲}\begin{cases} \xrightarrow{b=-۴} \frac{-a}{-۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=۶ \\ \xrightarrow{b=+۴} \frac{-a}{۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=-۶ \end{cases}$$

بنابراین $a+b=۶+(-۴)=۲$ و $a+b=-۶+۴=-۲$ است.

۴۴۸. **گزینه ۴**

راهبرد: وارون تابع هموگرافیک $(ad-bc\neq ۰; x\neq -\frac{d}{c}; c\neq ۰)$ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، به‌صورت $f(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

x را برحسب y می‌یابیم:

$$y=\frac{x+۲}{x-۲} \Rightarrow yx-۲y=x+۲ \Rightarrow yx-x=۲+۲y$$

$$\Rightarrow x(y-۱)=۲+۲y \Rightarrow x=\frac{۲y+۲}{y-۱} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۲x+۲}{x-۱}$$

البته با توجه به این‌که $a=۱$ و $d=-۲$ است، به‌راحتی می‌توان وارون را مشخص کرد:

$$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}=\frac{۲x+۲}{x-۱}$$

۴۴۹. **گزینه ۳**

• **روش اول:** برای یافتن $g(۱۲)$ و $g(۶)$ به‌ترتیب $f^{-1}(۱۲)$ و $f^{-1}(۶)$ را پیدا می‌کنیم؛ پس ۱۲ و ۶ عرض‌های $f(x)$ هستند؛ پس معادله‌های $f(x)=۱۲$ و $f(x)=۶$ را حل می‌کنیم.

$$۱۲=x+\sqrt{x} \xrightarrow{\text{x باید مربع کامل باشد.}} x=۹$$

$$۶=x+\sqrt{x} \xrightarrow{\text{x باید مربع کامل باشد.}} x=۴$$

مجموع دو عدد ۹ و ۴ برابر ۱۳ است.

• **روش دوم:** ضابطهٔ تابع f را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x)=x+\sqrt{x} \Rightarrow f(x)=(\sqrt{x})^{۲}+\sqrt{x} \Rightarrow f(x)+\frac{۱}{۴}$$

$$=(\sqrt{x})^{۲}+\sqrt{x}+\frac{۱}{۴} \Rightarrow f(x)+\frac{۱}{۴}=(\sqrt{x}+\frac{۱}{۲})^{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{x}+\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{f(x)+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=(\sqrt{f(x)+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲})^{۲}$$

$$f^{-1}(x)=g(x)=(\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲})^{۲}$$

حال مقادیر $g(۶)$ و $g(۱۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} g(۶)=(\sqrt{۶+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲})^{۲}=۴ \\ g(۱۲)=(\sqrt{۱۲+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲})^{۲}=۹ \end{array}\right\} \Rightarrow g(۶)+g(۱۲)=۱۳$$

۴۵۰. **گزینه ۱** مقدار تابع را برابر $\frac{۵}{۹}$ و $-\frac{۳}{۷}$ می‌گذاریم و xها را می‌یابیم:

$$\frac{۵}{۹}=\frac{x}{۱+|x|} \xrightarrow{x>۰} \frac{۵}{۹}=\frac{x}{۱+x} \Rightarrow ۵+۵x=۹x$$

$$۵=۴x \Rightarrow x=\frac{۵}{۴}$$

$$-\frac{۳}{۷}=\frac{x}{۱+|x|} \xrightarrow{x<۰} -\frac{۳}{۷}=\frac{x}{۱-x} \Rightarrow -۳+۳x=۷x$$

$$\Rightarrow -۳=۴x \Rightarrow x=-\frac{۳}{۴}$$

مجموع $\frac{۵}{۴}$ و $-\frac{۳}{۴}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۴۵۱. **گزینه ۴** ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=\frac{x-۳}{۲}$ را می‌یابیم.

$$y=\frac{x-۳}{۲} \Rightarrow ۲y=x-۳ \Rightarrow x=۲y+۳ \Rightarrow f^{-1}(x)=۲x+۳$$

نمودار تابع اخیر را در راستای عمودی ۶ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم:

$$y=(۲x+۳)-۶ \Rightarrow y=۲x-۳$$

نقطهٔ تلاقی نمودار منحنی بالا را با نمودار تابع f می‌یابیم:

$$۲x-۳=\frac{x-۳}{۲} \Rightarrow ۴x-۶=x-۳ \Rightarrow ۳x=۳ \Rightarrow x=۱$$

با جای‌گذاری $x=۱$ در ضابطهٔ f یا در $y=۲x-۳$ مقدار y را می‌یابیم:

$$x=۱ \Rightarrow y=۲(۱)-۳=-۱$$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,-۱)$ را از مبدأ مختصات می‌یابیم:

$$d=\sqrt{x_A^{۲}+y_A^{۲}}=\sqrt{۱^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۲}$$

۵۱۹. گزینه ۱ مقدار زاویهٔ سوم مثلث را α رادیان در نظر می‌گیریم، مجموع مقدار زاویه‌های ۳ رأس برابر π رادیان است.

$$\alpha+\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{5}=\pi\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{8}=\frac{40\pi-16\pi-5\pi}{40}=\frac{19\pi}{40}$$

برای تبدیل مقدار زاویه به درجه، به‌جای π رادیان مقدار ۱۸۰ درجه جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{19\pi}{40}=\frac{19(180^\circ)}{40}=85/5^\circ$$

۵۲۰. گزینه ۱ زاویهٔ 45° معادل $\frac{\pi}{4}$ رادیان است.

$$\alpha+\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{4}=\pi\Rightarrow\alpha+\frac{9\pi}{20}=\pi\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{9\pi}{20}\Rightarrow\alpha=\frac{11\pi}{20}$$

طول کمان روبه‌رو به زاویه‌ای به اندازهٔ α رادیان و با شعاع r برابر $L=r\alpha$ است.

$$L=r\alpha=100\times\frac{11\pi}{20}=55\pi=55(3)=155$$

۵۲۱. گزینه ۴ شعاع دایره‌ای که ماهواره نسبت به مرکز کرهٔ زمین روی محیط آن در حال حرکت است، $6400+300$ کیلومتر است.

$$R=6700\ \text{km}$$

مقدار زاویهٔ 30° هم $\frac{\pi}{6}$ رادیان است.

طول مسیری که ماهواره طی کرده است را L فرض می‌کنیم:

$$L=R\cdot\alpha=6700\ \text{km}\times\frac{\pi}{6}=6700\times\frac{3}{6}=3350\ \text{km}$$

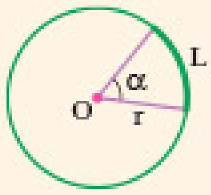
۵۲۲. گزینه ۲ با ضرب $\frac{\pi}{180^\circ}$ در 120° واحد آن را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\alpha=120^\circ\times\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow L=r\alpha=24\times\frac{2\pi}{3}=\frac{48\pi}{3}$$

$$=\frac{48\times3/14}{3}\simeq50\ \text{cm}$$

۵۲۳. گزینه ۱

نکته: در هر دایره به شعاع (r)، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی (α) از رابطهٔ $L=r\alpha$ به‌دست می‌آید.



با توجه به شکل و زاویهٔ چرخش (α) می‌توان گفت:

$$\begin{cases}\frac{20\pi}{3}=r\alpha & (1)\\ \frac{80\pi}{3}=(30+r)\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{80\pi}{3}\times\frac{1}{30+r} & (2)\end{cases}$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۱) در (۲)، داریم:

$$\cancel{\frac{20\pi}{3}}=r(\cancel{\frac{80\pi}{3}}^{4}\times\frac{1}{30+r})\Rightarrow1=\frac{4r}{r+30}$$

$$\Rightarrow r+30=4r\Rightarrow3r=30\Rightarrow r=10\ \text{cm}$$

تذکر: می‌توان بدون به‌دست آوردن اندازهٔ زاویهٔ چرخش، خواستهٔ سؤال را به‌دست آورد؛ پس از نکات مربوط به کمان استفاده کنید.

۵۲۴. گزینه ۳

راهبرد: در قرقره‌ها نسبت زاویه‌های چرخش چرخ‌ها، عکس نسبت شعاع دایره‌هاست.

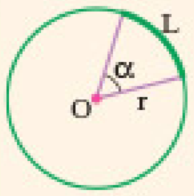
$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{R_1}{R_2}$$

طبق رابطهٔ گفته‌شده در راهبرد به حل مسئله می‌پردازیم:

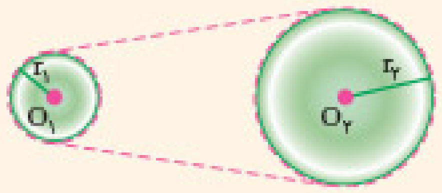
$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{R_1}{R_2}\Rightarrow\frac{\alpha_2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{10}{2/5}\Rightarrow\alpha_2=\frac{10}{2/5}\times\frac{\pi}{2}=4\times\frac{\pi}{2}=2\pi$$

۵۲۵. گزینه ۲

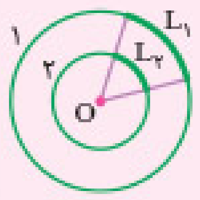
نکته: (۱) در هر دایره به شعاع (r)، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی (α) از رابطهٔ $L=r\alpha$ به‌دست می‌آید.



(۲) در مسائل مربوط به قرقره‌ها، وقتی دو قرقره با یک تسمه به هم وصل شده‌اند، جابه‌جایی تمام نقاط روی تسمه‌ها باهم برابر است. $L_1=L_2$



تذکر: زمانی‌که مرکز دو قرقره به یکدیگر متصل باشد، زاویهٔ چرخش دو دایره یکسان است. $L_1\neq L_2\ ,\ \alpha_1=\alpha_2$



قرقره‌ها به شماره‌های ۱ و ۲ توسط یک تسمه به هم وصل شده‌اند؛ بنابراین:

$$L_1=L_2\Rightarrow r_1\alpha_1=r_2\alpha_2$$

$$\Rightarrow5\times\frac{2\pi}{3}=10\times\alpha_2\Rightarrow\alpha_2=\frac{\pi}{3}\text{rad}$$

با توجه به این‌که مرکز قرقره‌ها به شماره‌های ۲ و ۳ به یکدیگر متصل است:

پس زاویهٔ چرخش دو قرقره برابر است، یعنی $\alpha_2=\alpha_3=\frac{\pi}{3}$.

و در آخر با توجه به این‌که قرقره‌ها به شماره‌های ۳ و ۴ با یک تسمه به یکدیگر متصل هستند؛ پس: $L_3=L_4\Rightarrow r_3\alpha_3=r_4\alpha_4$

$$\Rightarrow7\times\frac{\pi}{3}=14\times\alpha_4\Rightarrow\alpha_4=\frac{\pi}{6}\text{rad}$$

پس قرقرهٔ شمارهٔ ۴ به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ رادیان می‌چرخد.

۵۲۶. گزینه ۳ از ساعت یک و چهل‌وهفت دقیقه تا ساعت ۲ و چهار دقیقه جمعاً ۱۷ دقیقه زمان گذشته است. عقربهٔ دقیقه‌شمار هر ۶۰ دقیقه 2π رادیان را طی می‌کند؛ بنابراین برای محاسبهٔ زاویه‌ای که این عقربه در ۱۷ دقیقه طی می‌کند؛ داریم:

$$\frac{60}{17}=\frac{2\pi}{x}\Rightarrow x=\frac{(2\pi)(17)}{60}=\frac{17\pi}{30}=\pi-\frac{13\pi}{30}\ \text{rad}$$

۵۲۷. گزینه ۳ A زاویهٔ محاطی است؛ پس اندازهٔ کمان BC دو برابر زاویهٔ A است.

$$\hat{B}=81^\circ\Rightarrow\frac{81^\circ}{180^\circ}=\frac{\hat{B}}{\pi}\Rightarrow\hat{B}=\frac{9}{20}\pi\,\text{rad}$$

$$\hat{A}=\pi-\hat{B}-\hat{C}=\pi-\frac{9}{20}\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{7}{20}\pi\,\text{rad}$$

$$\Rightarrow\widehat{BC}=2\times\frac{7}{20}\pi=\frac{7}{10}\pi$$

$$\alpha=\frac{L}{r}\Rightarrow\widehat{BC}=\frac{\text{طول }BC}{10}\Rightarrow\text{طول }BC=\frac{7\pi}{10}\times10=7\pi$$

فرمول‌نامه

فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر

هندسهٔ تحلیلی

▪ به دست آوردن شیب خط

① اگر دو نقطهٔ متمایز $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از خط را داشته باشیم:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$

② اگر زاویهٔ خط با جهت مثبت محور x ها (θ) را داشته باشیم:

$$m = \tan\theta \;;\; \theta \in (0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$$

③ اگر معادلهٔ خط را داشته باشیم:

الف) در فرم $y = ax + b \; (a, b \in \mathbb{R})$: $\quad m = a$

ب) در فرم $ax + by + c = 0$: $\quad m = \frac{-a}{b} \; (b \neq 0)$

▪ دو خط با شیب‌های m و m'

• موازی‌اند، هرگاه: $m = m'$

• بر هم عمودند، هرگاه: $m = \frac{-1}{m'}$ (یا $mm' = -1$)

▪ نوشتن معادلهٔ خط

با داشتن شیب و یک نقطه مانند $A(x_0, y_0)$ روی خط:

• با استفاده از فرمول مقابل: $y - y_0 = m(x - x_0)$

• جای‌گذاری مختصات نقطه و شیب در معادلهٔ $y = ax + b$: سپس یافتن b و نوشتن معادله

▪ معادلهٔ خطوط موازی محور x ها و y ها

• موازی محور x ها: $y = a \; (a \in \mathbb{R})$

• موازی محور y ها: $x = b \; (b \in \mathbb{R})$

▪ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

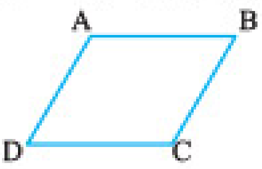
• فاصلهٔ هر نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ از مبدأ: $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$

▪ مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB

$$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$$

• قرینهٔ نقطهٔ $A(x, y)$ نسبت به مبدأ: $(-x, -y)$

• در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، اگر A و C رئوس مقابل به هم و B و D مقابل به هم باشند:



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

▪ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

▪ فاصلهٔ دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• معادلهٔ خط موازی با دو خط $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ که دقیقاً در وسط دو خط قرار دارد:

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجه ۲

▪ روش تغییر متغیر: برخی از معادلات، با یک تغییر متغیر (مجهول معاون) تبدیل به معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شوند و با حل معادلهٔ درجهٔ دوم، جواب‌های معادلهٔ اولیه به دست می‌آید.

▪ در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0 \; (a \neq 0)$

$S = \frac{-b}{a}$: مجموع جواب‌ها ، $P = \frac{c}{a}$: حاصل‌ضرب جواب‌ها

• تعیین تعداد و علامت جواب‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$، با استفاده از علامت Δ، S و P:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد.} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} > 0 \text{ معادله یک جواب مثبت دارد.} \\ \frac{-b}{2a} < 0 \text{ معادله یک جواب منفی دارد.} \end{cases} \\ \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} P > 0 \begin{cases} S > 0 \text{ معادله دو جواب مثبت دارد.} \\ S < 0 \text{ معادله دو جواب منفی دارد.} \end{cases} \\ P < 0 \begin{cases} S > 0 \text{ معادله دو جواب مختلف‌العلامت دارد که قدرمطلق جواب مثبت بزرگ‌تر است.} \\ S < 0 \text{ معادله دو جواب مختلف‌العلامت دارد که قدرمطلق جواب منفی بزرگ‌تر است.} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

▪ مهم‌ترین روابط بین جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

① $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

② $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$

③ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P}$

④ $|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

⑤ $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad (\alpha, \beta \geq 0)$

▪ سهمی (نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$)

• صفرهای تابع f: محل برخورد نمودار تابع f با محور x ها است و از حل معادلهٔ $f(x) = 0$ به دست می‌آید.

• نوشتن ضابطهٔ سهمی:

① با داشتن مختصات رأس (m, h) و یک نقطه: $y = a(x - m)^2 + h$

② با داشتن صفرهای سهمی $(\{x_1, x_2\})$ و یک نقطهٔ دیگر:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

③ با داشتن سه نقطه: جای‌گذاری نقاط در ضابطهٔ سهمی، حل دستگاه سه معادله سه مجهول، یافتن ضرایب و نوشتن معادله

▪ ماکزیمم و مینیمم سهمی

• اگر $a > 0$، تابع در نقطهٔ رأس $(x_S = \frac{-b}{2a})$ مینیمم دارد و کمترین مقدار آن برابر $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

• اگر $a < 0$، تابع در نقطهٔ رأس $(x_S = \frac{-b}{2a})$ ماکزیمم دارد و بیشترین مقدار آن برابر $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

▪ تعیین علامت ضرایب a، b و c به کمک نمودار

علامت a: اگر دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین باشد، $a < 0$ است.