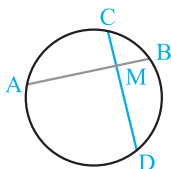


قسمت دوم

فصل

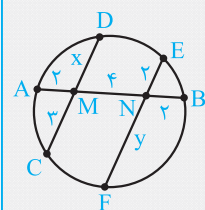
۱

رابطه‌های طولی در دایره



آ وترهای متقاطع: اگر دو وتر در یک دایره متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل ضرب پاره‌خط‌های روی یکی با حاصل ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابر است.

حکم : $MA \times MB = MC \times MD$

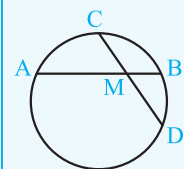


در شکل مقابل مقادیر x و y را محاسبه کنید.

پاسخ: بنا به رابطه طولی وترهای متقاطع داریم:

$$MA \times MB = MD \times MC \Rightarrow 2 \times (4 + 2) = x \times 3 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

$$NA \times NB = NF \times NE \Rightarrow (2 + 4) \times 2 = y \times 2 \Rightarrow y = \frac{12}{2} = 6$$



مطابق شکل طول وتر AB در دایره $C(O, R)$ ، 14 سانتی متر می‌باشد. این وتر، وتر CD را به نسبت 2 به 3 تقسیم کرده است. اگر $CD = 10$ سانتی متر باشد، آن‌گاه تفاضل طول پاره‌خط‌های MA و MB کدام است؟
(مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

- ۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۹

پاسخ: بنا به فرض، وتر CD به نسبت 2 به 3 تقسیم شده است. پس می‌توانیم فرض کنیم $MC = 2k$ و $MD = 3k$ و داریم:

$$CD = 10 \Rightarrow 2k + 3k = 10 \Rightarrow 5k = 10 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \begin{cases} MC = 4 \\ MD = 6 \end{cases}$$

$$MA \times MB = MC \times MD \xrightarrow[\substack{MA=14-x \\ MB=x}]{\substack{MA \times MB = MC \times MD}} (14-x) \times x = 4 \times 6 \Rightarrow x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-12) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 12$$

بنابراین با فرض $MA > MB$ نتیجه می‌شود $MA = 12$ و $MB = 2$ و تفاضل این دو مقدار برابر 10 است. پس گزینه (۱) درست است.

وتری به طول 18 در یک دایره به شعاع 11 مفروض است. نقطه‌ای روی این وتر، از مرکز دایره به فاصله 7 می‌باشد. این نقطه، وتر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

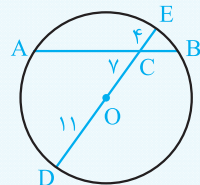
پاسخ: بنا به فرض $AB = 18$ ، $OC = 7$ و $OE = OD = 11$ ، پس $CE = 4$. فرض کنیم $BC = x$ بنابراین داریم:

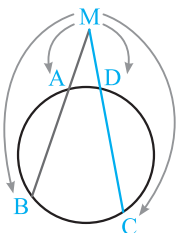
$$AC \cdot BC = CD \cdot CE \Rightarrow (18 - x)x = (11 + 7) \times 4 \Rightarrow x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x-12) = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ یا } x = 12$$

و با فرض $AC > BC$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{18-x}{x} = \frac{18-6}{6} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

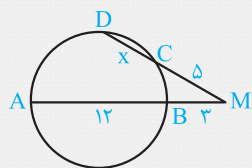




ب) رابطه طولی وترهایی با امتداد متقاطع: اگر امتداد دو وتر AB و CD در نقطه M متقاطع باشند، آنگاه:

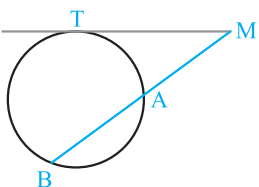
$$MA \times MB = MD \times MC$$

مثال با توجه به شکل مقابل مقدار x را بیابید.



$$\begin{aligned} MB \times MA &= MC \times MD \Rightarrow 3 \times (3 + 12) = 5 \times (5 + x) \Rightarrow 3 \times 15 = 5 \times (5 + x) \\ \Rightarrow 3 \times 3 &= 5 + x \Rightarrow x + 5 = 9 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

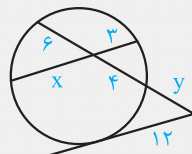
پاسخ: \Rightarrow



پ) رابطه طولی مماس و قطعات قاطع: اگر از نقطه M یک خط مماس و یک خط قاطع بر دایره مفروض رسم کنیم، آنگاه طول پاره خط مماس (MT) واسطه هندسی قطعات قاطع (MA و MB) می باشد.

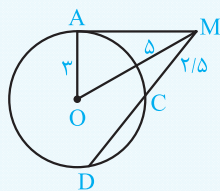
$$MT^2 = MA \times MB$$

مثال در شکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.



$$\begin{aligned} 3 \times x &= 6 \times 4 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8 \\ 12^2 &= y \times (y + 6 + 4) \Rightarrow y(y + 10) = 144 \Rightarrow y^2 + 10y = 144 \Rightarrow y^2 + 10y - 144 = 0 \\ \Rightarrow (y + 18)(y - 8) &= 0 \Rightarrow y = -18 \text{ یا } y = 8 \xrightarrow{y > 0} y = 8 \end{aligned}$$

پاسخ: \Rightarrow



تست در شکل مقابل MA در نقطه A بر دایره مماس و شعاع دایره برابر 3 است. اگر فاصله M تا مرکز دایره برابر 5 باشد و $MC = 2/5$ ، آنگاه طول وتر CD کدام است؟

$$4/5 \quad (4)$$

$$3/6 \quad (3)$$

$$3/9 \quad (2)$$

$$4/2 \quad (1)$$

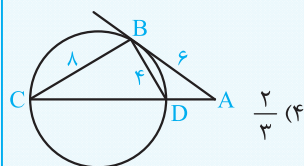
پاسخ: خط مماس، بر شعاع نقطه تماس عمود است. پس مثلث MAO قائمه است و داریم:

$$MA^2 = OM^2 - OA^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow MA = 4$$

$$MA^2 = MC \times MD \Rightarrow 4^2 = 2/5 \times (2/5 + CD) \Rightarrow 16 = 2/5 \times (2/5 + CD)$$

حال بنابه رابطه طولی مماس و قطعات قاطع داریم:

$$\Rightarrow CD + 2/5 = \frac{16}{2/5} = \frac{64}{10} = 6.4 \Rightarrow CD = 6.4 - 2/5 = 3/9 \Rightarrow \text{گزینه (2) صحیح است.}$$



تست در شکل مقابل AB در نقطه B بر دایره مماس است. حاصل $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}$ کدام است؟

$$2/3 \quad (4)$$

$$1/4 \quad (3)$$

$$1/2 \quad (2)$$

$$1/3 \quad (1)$$

پاسخ: دو زاویه ظلی \widehat{ABD} و محاطی \widehat{ACB} برابرند، زیرا کمان روبه روی آنها \widehat{BD} است. پس دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ متشابه اند.

$$(\widehat{BAD} = \widehat{BAC}, \widehat{ABD} = \widehat{ACB}) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow$$

با فرض $AD = x$ و $CD = y$ داریم:

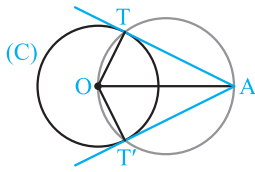
$$\frac{6}{x} = \frac{x+y}{6} = \frac{8}{4} \Rightarrow x = \frac{24}{8} = 3, x+y = \frac{6 \times 8}{4} = 12 \Rightarrow y = 12 - 3 = 9$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{CD} = \frac{x}{y} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$ در رأس B هم ارتفاع هستند، در نتیجه:

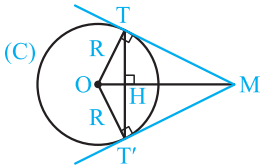
پس گزینه (1) درست است.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره



نقطه A را خارج دایره $C(O, R)$ در نظر می‌گیریم. O را به A وصل می‌کنیم، دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایره C را T و T' می‌نامیم. زوایای OTA و $OT'A$ روبه‌رو به قطرنند، پس قائمه‌اند. در نتیجه AT و AT' بر دایره C مماس‌اند.

خواص دو مماس رسم شده بر یک دایره معلوم از یک نقطه خارج آن



فرض کنید مطابق شکل از نقطه M دو مماس MT و MT' بر دایره $C(O, R)$ رسم شود و H نقطه برخورد وتر TT' با پاره‌خط OM باشد. بنابراین داریم:

(۱) طول مماس‌های MT و MT' برابر است ($MT = MT'$).

(۲) OM نیمساز زوایای TMT' و TOT' است.

(۳) OM عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه‌های تماس می‌باشد، یعنی OM عمودمنصف TT' است.

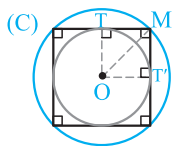
(۴) اگر $\widehat{M} \neq 90^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی $MTOT'$ کایت (شبه‌لوزی) است.

(۵) اگر $\widehat{M} = 90^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی $MTOT'$ مربع است. در این حالت از هر نقطه روی دایره به مرکز O و شعاع $OM = R\sqrt{2}$ می‌توان ۲ مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد و بر عکس اگر از نقطه‌ای دو مماس عمود بر هم، بر دایره C رسم شود، آن‌گاه آن نقطه روی دایره به مرکز O و شعاع $R\sqrt{2}$ قرار دارد.

(۶) طول پاره‌خط واصل نقاط تماس برابر است با:

راهنمایی: مساحت چهارضلعی $MTOT'$ را به دو روش بنویسید.

(۷) مثلث‌های MTO ، MHT و THO متشابه هستند.



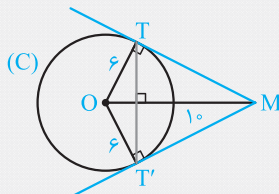
$$TT' = \frac{2R \cdot MT}{OM}$$

مثال از نقطه M دو مماس MT و MT' را بر دایره $C(O, 6)$ رسم می‌کنیم. اگر $OM = 10$ باشد، آن‌گاه:

(آ) طول مماس‌های MT و MT' را به دست آورید.

(ب) طول پاره‌خط TT' را بیابید.

پاسخ: (آ) در مثلث قائم‌الزاویه OMT داریم:



$$OM^2 = OT^2 + MT^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + MT^2 \Rightarrow MT^2 = 64 \Rightarrow MT = MT' = 8$$

(ب) برای محاسبه TT' می‌گوییم، مساحت چهارضلعی $MTOT'$ برابر $\frac{1}{2} OM \times TT'$ است، زیرا قطرهای آن بر هم عمودند. از طرفی مساحت همین

چهارضلعی دو برابر مساحت مثلث OMT است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2} TT' \times OM = 2 \times \frac{1}{2} MT \times OT \Rightarrow TT' \times 10 = 2 \times 8 \times 6 \Rightarrow TT' = \frac{96}{10} = 9.6$$

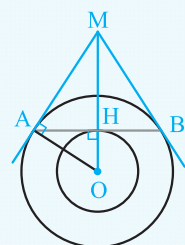
تست دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. وتی از دایره بزرگ‌تر مماس بر دایره کوچک‌تر است. اگر دو مماس مرسوم از دو سر این وتر بر دایره بزرگ‌تر در نقطه M متقاطع باشند، آن‌گاه فاصله M تا مرکز دایره‌ها کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۸ (۱)



پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویه OAM بنا به رابطه طولی داریم:

$$OA^2 = OH \times OM \Rightarrow 12^2 = 8 \times OM \Rightarrow OM = \frac{144}{8} = 18 \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به صورت زیر است:

	$d > R + R'$	دو دایره برون هم (متخارج)
--	--------------	---------------------------

نکته ۱ کوتاه‌ترین فاصله نقاط دو دایره متخارج مطابق شکل فوق $AB = OO' - (R + R')$ و بیش‌ترین فاصله نقاط آن‌ها برابر $CD = OO' + R + R'$ است.

	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون
--	--------------	--------------------

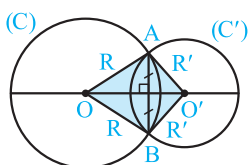
نکته ۱ در نقطه تماس دو دایره یعنی نقطه A فقط یک خط بر هر دو دایره مماس است.

نکته ۲ مراکز و نقطه تماس دو دایره مماس خارج روی یک خط قرار دارند.

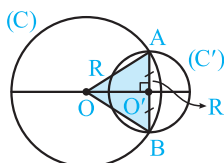
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
--	-----------------------	-----------------

نکته ۱ خط‌المركزین دو دایره متقاطع همواره عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست. (در شکل‌های زیر خط OO' عمودمنصف پاره‌خط AB است.)

نکته ۲ اگر شعاع دو دایره متقاطع نابرابر باشد، شکل‌های زیر را داریم:

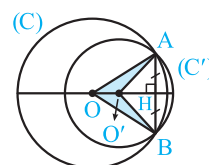


چهارضلعی $OAO'B$ کایت است.



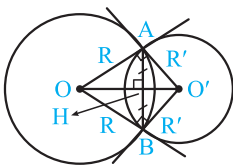
دایره (C) محیط دایره (C') را نصف می‌کند،

$$R^2 = OO'^2 + R'^2 \text{ و داریم}$$

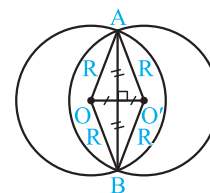
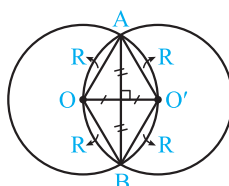
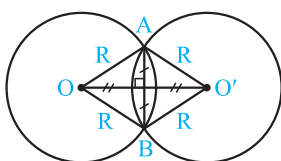


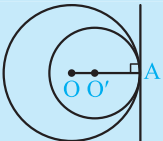
چهارضلعی $AOBO'$ دارت می‌باشد.

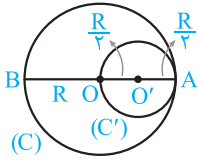
نکته ۳ شعاع‌های نقطه تقاطع بر دایره‌ها مماس هستند، اگر و تنها اگر $OO'^2 = R^2 + R'^2$ باشد.



نکته ۴ اگر شعاع دو دایره متقاطع برابر باشند، چهارضلعی $AOBO'$ لوزی است.



	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
---	--------------	--------------------

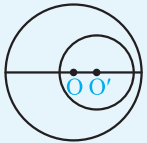



نکته ۱ در نقطه تماس دو دایره مماس داخل فقط یک خط بر هر دو دایره مماس است.

نکته ۲ مراکز و نقطه تماس دو دایره مماس داخل روی یک خط قرار دارند.

نکته ۳ اگر شعاع دایره بزرگتر دو برابر شعاع دایره کوچکتر باشد، آن گاه دایره کوچک از مرکز دایره بزرگ می‌گذرد.

$R = 2R' \Leftrightarrow$ دایره (C') از مرکز دایره (C) می‌گذرد.

	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم‌مرکز

مشال طول خط‌المركزين دو دایره مماس داخل ۵ و مساحت ناحیه بین دو دایره ۸۵π است. محیط هر یک از دایره‌ها را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۳۳ کتاب درسی)

پاسخ: طول خط‌المركزين دو دایره مماس داخل برابر $R - R'$ ، $(R > R')$ است. داریم:

$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 85\pi \Rightarrow \pi R^2 - \pi R'^2 = 85\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 85$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = 85 \xrightarrow{\text{بنابنه فرض } R - R' = 5} R + R' = \frac{85}{5} = 17$$

$$\begin{cases} R + R' = 17 \\ R - R' = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2R = 22 \Rightarrow R = 11, R' = 6$$

پس محیط دایره‌ها برابر 22π و 12π است.

تست در شکل مقابل، دایره کوچک بر قطر AB و دایره بزرگ مماس است. اگر $BC = 12$ و $AC = 6$ ، آن‌گاه شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: در دو دایره مماس داخل، مراکز دو دایره و نقطه تماس آن‌ها روی یک خط قرار دارند. داریم:

$$AB = 2R \Rightarrow AC + BC = 2R \Rightarrow 6 + 12 = 2R \Rightarrow R = 9$$

$$OD = OO' + O'D \Rightarrow 9 = OO' + r \Rightarrow OO' = 9 - r$$

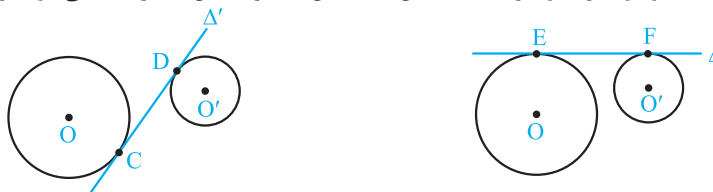
$$OA = OC + AC \Rightarrow 9 = OC + 6 \Rightarrow OC = 3$$

$$OO'^2 = O'C^2 + OC^2 \Rightarrow (9 - r)^2 = r^2 + 3^2 \Rightarrow 81 + r^2 - 18r = r^2 + 9 \Rightarrow 18r = 72 \Rightarrow r = \frac{72}{18} = 4$$

گزینه (۲) درست است.

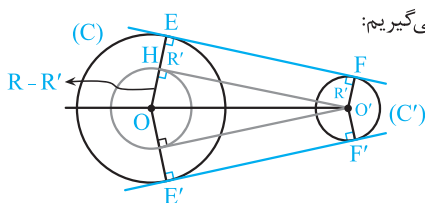
مماس مشترک‌های دو دایره

(آ) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره یک طرف خط مماس باشند، آن‌گاه آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره گویند. (خط Δ)
 (ب) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره، دو طرف خط مماس باشند، آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره گویند. (خط Δ')



بنابنه قرارداد اندازه EF را طول مماس مشترک خارجی و اندازه CD را طول مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامند.

رسم مماس مشترک‌های دو دایره



آ) رسم مماس مشترک خارجی دو دایره: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در نظر می‌گیریم:

(۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R - R'$ رسم می‌کنیم.

(۲) از نقطه O' مماس $O'H$ را بر دایره روبه‌رو رسم می‌کنیم.

(۳) O را به H وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره (C) را در نقطه E قطع کند.

(۴) مطابق شکل از نقطه O' خطی موازی OE رسم می‌کنیم تا دایره C' را در نقطه F قطع کند. مماس مشترک خارجی دو دایره است. زیرا چهارضلعی $EFO'H$ مستطیل است ($\widehat{H} = 90^\circ$ و $EH \parallel O'F = R'$). اگر O' خارج دایره به مرکز O و شعاع $R - R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.

محاسبه طول مماس مشترک خارجی دو دایره: در شکل فوق در مثلث قائم‌الزاویه OHO' داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow OO'^2 = (R - R')^2 + EF^2 \Rightarrow EF = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$EF = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

با فرض این‌که طول خط‌المركزین دو دایره $OO' = d$ باشد، داریم:

مثال دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۹ و طول خط‌المركزین ۲۱ مفروض‌اند. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

پاسخ: بنابه فرض $R = 9$ ، $R' = 6$ و $d = 21$ است، در نتیجه داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{21^2 - (9 - 6)^2} = \sqrt{21^2 - 3^2} = \sqrt{18 \times 24} = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}$$

مثال شعاع‌های دو دایره ۲ و ۱۰ و طول خط‌المركزین و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها به ترتیب $4x + 1$ و $3x + 3$ است. مقدار x و طول خط‌المركزین و مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$(3x + 3)^2 = (4x + 1)^2 - (10 - 2)^2 \Rightarrow 9x^2 + 18x + 9 = 16x^2 + 8x + 1 - 64$$

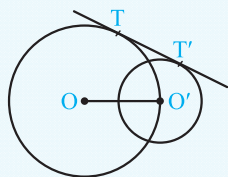
$$\Rightarrow 7x^2 - 10x - 72 = 0 \Rightarrow (x - 4)(7x + 18) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = -\frac{18}{7}$$

جواب منفی قابل قبول نیست، پس $x = 4$ و در نتیجه طول خط‌المركزین دو دایره $4x + 1 = 17$ و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها $3x + 3 = 15$ است.

تست دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۵ مفروض‌ند. اگر دایره بزرگ‌تر از مرکز دایره کوچک‌تر بگذرد، آن‌گاه طول مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

پاسخ: چون دایره بزرگ از مرکز دایره کوچک می‌گذرد، پس طول خط‌المركزین دو دایره برابر شعاع دایره بزرگ است $OO' = R = 5$ و در نتیجه داریم:



$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{5^2 - (5 - 1)^2}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

پس گزینه (۴) درست است.

ب) رسم مماس مشترک داخلی دو دایره: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در نظر می‌گیریم:

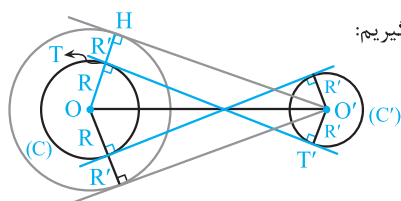
(۱) به مرکز O و شعاع $R + R'$ یک دایره رسم می‌کنیم.

(۲) از نقطه O' مماس $O'H$ را بر دایره روبه‌رو رسم می‌کنیم.

(۳) OH را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با دایره (C) نقطه T می‌نامیم.

(۴) از نقطه O' خطی موازی OH رسم می‌کنیم تا دایره (C') را در نقطه T' قطع کند، خط TT' مماس مشترک داخلی دو دایره است،

زیرا $\widehat{T} = \widehat{T}' = 90^\circ$ (چهارضلعی $O'T'TH$ مستطیل است، چون $\widehat{H} = 90^\circ$ و $TH \parallel O'T' = R'$). اگر O' خارج دایره به مرکز O و شعاع $R + R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.



محاسبه طول مماس مشترک داخلی دو دایره: با توجه به شکل قبل و با فرض $OO' = d$ در مثل قائم‌الزاویه $OO'H$ داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow d^2 = (R + R')^2 + TT'^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

نتیجه طول مماس مشترک داخلی دو دایره همواره از طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کوچک‌تر است.

دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ و طول خط‌المركزین ۹ مفروض است. اندازه مماس مشترک‌های داخلی آن را به دست آورید.

پاسخ: بنابه فرض $R = 3$, $R' = 4$ و $d = 9$ است. بنابراین داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$$

اندازه‌های مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره به ترتیب $\sqrt{24}$ و $\sqrt{48}$ است. حاصل ضرب شعاع‌های این دو دایره کدام است؟

- ۴ (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: فرض کنیم $EF = \sqrt{24}$ و $CD = \sqrt{48}$ ، بنابراین داریم:

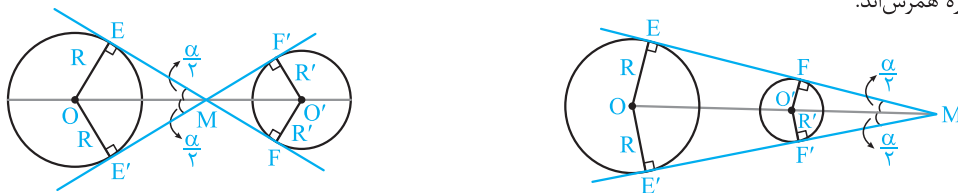
$$\begin{cases} EF^2 = d^2 - (R + R')^2 \\ CD^2 = d^2 - (R - R')^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} CD^2 - EF^2 = (R + R')^2 - (R - R')^2$$

$$\Rightarrow CD^2 - EF^2 = R^2 + 2RR' + R'^2 - R^2 + R'^2 - 2RR' = 4RR' \Rightarrow RR' = \frac{CD^2 - EF^2}{4} \Rightarrow RR' = \frac{48 - 24}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.

همرسی مماس مشترک‌های دو دایره و خط‌المركزین

اگر شعاع‌های دو دایره نابرابر باشند، آن‌گاه مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المركزین دو دایره هم‌سرا هستند. هم‌چنین مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المركزین دو دایره هم‌سرا هستند.

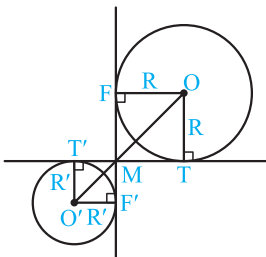


نکته ۱ نقطه همرسی مماس مشترک‌ها و خط‌المركزین، خط‌المركزین دو دایره را به نسبت شعاع‌ها تقسیم می‌کند $\frac{OM}{O'M} = \frac{R}{R'}$

نکته ۲ اگر زاویه بین مماس مشترک‌ها باشد، با فرض $(R > R')$ داریم:

$$\text{اگر زاویه بین دو مماس مشترک خارجی} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R - R'}{OO'}$$

$$\text{اگر زاویه بین دو مماس مشترک داخلی} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R + R'}{OO'}$$



نکته ۳ اگر مماس مشترک‌های داخلی دو دایره بر هم عمود باشند، آن‌گاه طول مماس مشترک داخلی

آن‌ها برابر $R + R'$ و طول خط‌المركزین دو دایره $\sqrt{2}(R + R')$ است. زیرا چهارضلعی‌های $MT'OF'$ ، $MTOF$ مربع هستند.

$$FF' = TT' = MT + MT' = R + R'$$

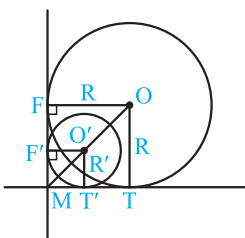
$$OO' = OM + O'M = R\sqrt{2} + R'\sqrt{2} = \sqrt{2}(R + R')$$

نکته ۴ اگر مماس مشترک‌های خارجی دو دایره بر هم عمود باشند، آن‌گاه طول مماس مشترک خارجی

آن‌ها برابر $R - R'$ و طول خط‌المركزین دو دایره $\sqrt{2}(R - R')$ است.

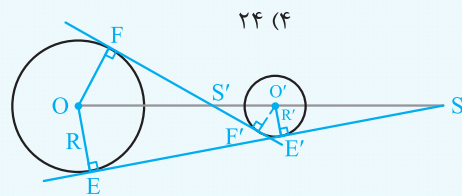
$$TT' = FF' = R - R'$$

$$OO' = OM - O'M = R\sqrt{2} - R'\sqrt{2} = \sqrt{2}(R - R')$$



تست

دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ و خط‌المركزین ۱۵ مفروض‌اند. فاصله نقطه تلاقی مماس مشترک‌های داخلی از نقطه تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره کدام است؟



پاسخ: بنابه فرض $R = 8$ ، $R' = 4$ و $OO' = 15$. بنابراین داریم:

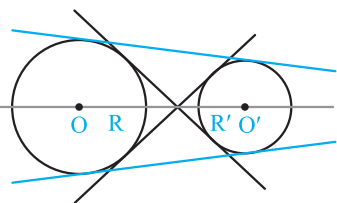
$$\Delta OFS' \sim \Delta O'F'S' \Rightarrow \frac{O'S'}{OS'} = \frac{O'F'}{OF'} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{O'S'}{OO'} = \frac{R'}{R + R'}$$

$$\Rightarrow O'S' = 15 \times \frac{4}{8 + 4} = 5$$

تفضیل در مخرج $\Delta O'S'E' \sim \Delta O'SE \Rightarrow \frac{O'S}{OS} = \frac{O'E'}{OE} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{O'S}{OO'} = \frac{R'}{R - R'} \Rightarrow O'S = 15 \times \frac{4}{8 - 4} = 15$

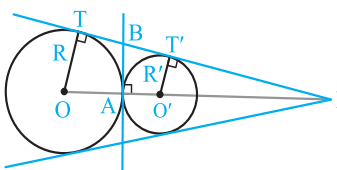
گزینه (۱) صحیح است. $SS' = O'S' + O'S = 5 + 15 = 20$

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌های دو دایره



(۱) دو دایره را متخارج گویند، هرگاه همه نقاط دو دایره بیرون یکدیگر باشند و در این حالت همواره داریم $OO' > R + R'$. دو دایره متخارج دارای ۴ مماس مشترک می‌باشند.

$OO' > R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره متخارج‌اند.



(۲) دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط آن‌ها بیرون یکدیگر باشند، مماس خارج نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO' = R + R'$. دو دایره مماس خارج دارای ۳ مماس مشترک هستند که دو تای آن‌ها خارجی و سومی داخلی است.

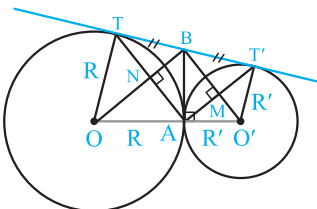
$OO' = R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره مماس خارج‌اند.

نکات: (آ) مماس مشترک داخلی دو دایره مماس خارج، همواره بر خط‌المركزین دو دایره در نقطه تماس عمود است.

(ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، برابر $TT' = 2\sqrt{RR'}$ است.

(پ) مماس مشترک داخلی دو دایره مماس خارج، پاره‌خط مماس مشترک خارجی را نصف می‌کند. ($BT = BT'$)

(ت) در دو دایره مماس خارج نقطه تماس دو دایره و نقاط تماس مماس مشترک خارجی با دایره‌ها تشکیل یک مثلث قائم الزاویه می‌دهند. ($\widehat{TAT'} = 90^\circ$)



زیرا در مثلث ATT' میانه AB نصف ضلع TT' است.

چهارضلعی‌های $ABTO$ و $ABT'O'$ کایت هستند. پس $O'B$ عمودمنصف AT' و OB عمودمنصف AT است. بنابراین چهارضلعی $AMBN$ مستطیل است و نتیجه می‌شود:

مثلثی که رأس‌های آن مراکز دو دایره و وسط مماس مشترک خارجی است، قائم‌الزاویه است. ($\widehat{OBO'} = 90^\circ$)

(ث) اگر زاویه بین دو مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج باشد، آن‌گاه

داریم $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R - R'}{R + R'}$

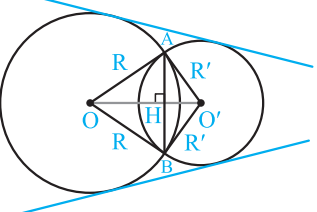
(ج) در دو دایره مماس خارج، دایره به قطر OO' در نقاط وسط مماس مشترک‌های خارجی بر آن‌ها مماس است.

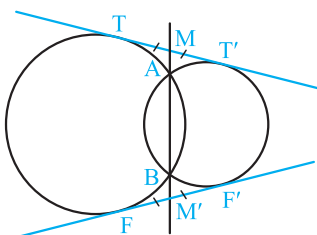
مطابق شکل مقابل، دایره به قطر OO' در نقاط B و B' وسط TT' و FF' بر خط‌های شامل TT' و

FF' مماس است. ($OO'' = O'O'' = O''B = O''B' = \frac{R + R'}{2}$)

(۳) دو دایره که فقط در دو نقطه مشترک باشند، متقاطع نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $|R - R'| < OO' < R + R'$. دو دایره متقاطع همواره دارای دو مماس مشترک خارجی هستند و مماس مشترک داخلی ندارند.

$|R - R'| < OO' < R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند.

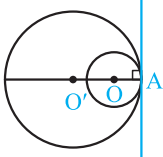




نکته در دو دایره متقاطع خط وتر مشترک دو دایره طول مماس مشترک‌های خارجی آن‌ها را نصف می‌کند. زیرا:

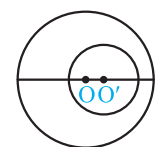
$$\left. \begin{aligned} MT^2 &= MA \times MB \\ MT'^2 &= MA \times MB \end{aligned} \right\} \Rightarrow MT^2 = MT'^2 \Rightarrow MT = MT'$$

و به طریق مشابه داریم $M'F = M'F'$ و چون $TT' = FF'$ نتیجه می‌شود $MT = MT' = M'F = M'F'$.



۴ دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط یکی از آن‌ها درون دایره دیگر باشد، مماس درون نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO' = |R - R'|$

$$OO' = |R - R'| \Leftrightarrow \text{دو دایره مماس داخل هستند.}$$



دو دایره متداخل

نکته دو دایره مماس درون فقط یک مماس مشترک خارجی دارند که بر خط‌المركزین دو دایره در نقطه تماس عمود است.

۵ دو دایره را متداخل گویند، هرگاه همه نقاط یکی از آن‌ها درون دایره دیگر باشد. در این حالت داریم $OO' < |R - R'|$. دو دایره متداخل مماس مشترک ندارند.

دو دایره هم‌مركز با شعاع‌های متفاوت یکی از حالات دو دایره متداخل است.

مشق

اندازه شعاع‌های دو دایره ۴ و ۱۱ و طول مماس مشترک خارجی دو دایره $7\sqrt{3}$ است.

(آ) طول خط‌المركزین دو دایره را به دست آورید.

(ب) وضعیت دو دایره را نسبت به هم تعیین کنید.

پاسخ: بنابه فرض $R = 11$, $R' = 4$ و $TT' = 7\sqrt{3}$. داریم:

$$(آ) \quad TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 7\sqrt{3} = \sqrt{d^2 - (11 - 4)^2} \Rightarrow 49 \times 3 = d^2 - 7^2$$

$$\Rightarrow d^2 - 49 = 3 \times 49 \Rightarrow d^2 = 4 \times 49 \Rightarrow d = 2 \times 7 = 14$$

(ب) از $R = 11$, $R' = 4$ و $d = 14$ نتیجه می‌شود $R - R' < d < R + R'$. پس دو دایره متقاطع هستند.

تست

دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ و طول خط‌المركزین ۶ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اگر امتداد AB مماس مشترک دو دایره را در

نقطه M قطع کند، حاصل $MA \times MB$ کدام است؟

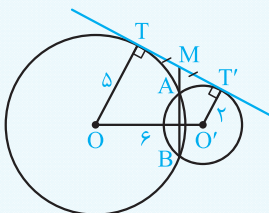
۶/۷۵ (۴)

۶/۲۵ (۳)

۶/۵ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: امتداد AB طول پاره خط TT' را نصف می‌کند، یعنی M وسط TT' می‌باشد. بنابه رابطه طولی مماس و قطعات قاطع داریم:



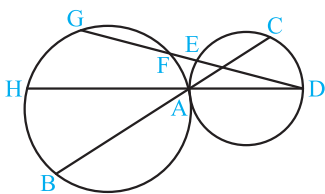
$$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow MA \times MB = \left(\frac{TT'}{2}\right)^2 \quad (1)$$

طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{6^2 - (5 - 2)^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \quad (2)$$

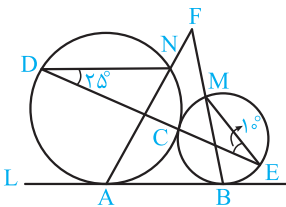
$$(1) \cdot (2) \Rightarrow MA \times MB = \left(\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} = 6/75$$

پس گزینه (۴) درست است.



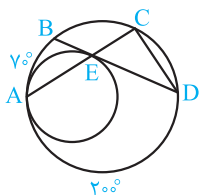
۱.۳★ در شکل مقابل دو دایره در نقطه A مماس خارج هستند، اگر اندازه کمان FAB برابر 12° و $\widehat{CE} = 2\widehat{GH}$ ، آن گاه اندازه کمان GH چند درجه است؟

- (۱) ۴۰
(۲) ۳۶
(۳) ۳۰
(۴) ۴۴



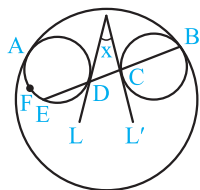
۱.۴★ در شکل مقابل دو دایره در نقطه C مماس خارج هستند و خط L در نقاط A و B بر دو دایره مماس است. خطی از نقطه C می‌گذرد و دو دایره را در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر نقاط M و N چنان باشند که $\widehat{MEC} = 10^\circ$ و $\widehat{CDN} = 25^\circ$ ، آن گاه زاویه برخورد AN و BM چند درجه است؟

- (۱) ۶۵
(۲) ۵۵
(۳) ۴۵
(۴) ۵۰



۱.۵★ در شکل مقابل دو دایره در نقطه A مماس داخل هستند، وتر BD از دایره بزرگ بر دایره کوچک در نقطه E مماس است و امتداد AE دایره بزرگ را در نقطه C قطع می‌کند. اگر $\widehat{AB} = 70^\circ$ ، $\widehat{AD} = 200^\circ$ ، آن گاه اندازه زاویه D چند درجه است؟

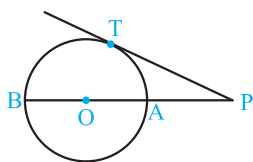
- (۱) ۳۰
(۲) ۱۸
(۳) ۲۲/۵
(۴) ۱۵



۱.۶★ در شکل مقابل دو دایره کوچک تر بر دایره بزرگ مماس داخل هستند و خط‌های متقاطع L و L' بر این دو دایره مماس‌اند. اگر $\widehat{AB} = \widehat{AFE} = 100^\circ$ باشد، آن گاه مقدار x کدام است؟

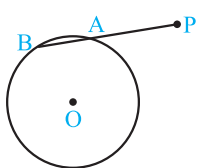
- (۱) 10°
(۲) 20°
(۳) 30°
(۴) 40°

قسمت دوم: رابط‌های طولی در دایره



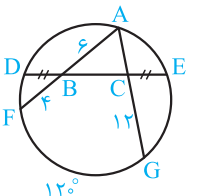
۱.۷★ در شکل مقابل، شعاع دایره ۶، AB قطر و $PA = 4$ می‌باشد. طول مماس PT کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$
(۲) $5\sqrt{2}$
(۳) ۱۴
(۴) ۸



۱.۸★ در شکل مقابل، $PA = 5$ ، $AB = 3$ و شعاع دایره برابر ۴ واحد است. فاصله نقطه P تا مرکز دایره کدام است؟

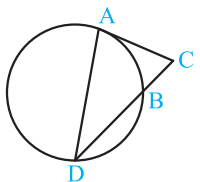
- (۱) $2\sqrt{21}$
(۲) $2\sqrt{14}$
(۳) $4\sqrt{7}$
(۴) $3\sqrt{7}$



۱.۹★ در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است؟ ($BD = CE$)

- (۱) $2\sqrt{3}$
(۲) $3\sqrt{3}$
(۳) $6\sqrt{3}$
(۴) $4\sqrt{3}$

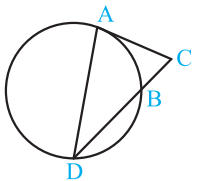
(سراسری ریاضی-۱۴۰۰)



۱.۱۰★ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آن گاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ کدام است؟

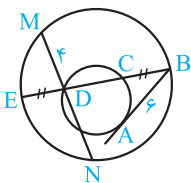
- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) ۲
(۴) ۳

(سراسری ریاضی فارغ از کشور-۱۴۰۰)



۱.۱۱★ در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $DB = BC$ آن گاه نسبت $\frac{AC}{BC}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(۳) ۱
(۴) $\sqrt{2}$



۱۱۲. در شکل مقابل AB بر دایره کوچک مماس است و طول آن ۶ می‌باشد. اگر $BC = DE$ و $MD = 4$ باشد آن‌گاه طول وتر MN کدام است؟

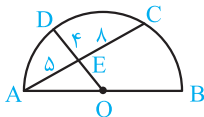
- ۱۳ (۴) ۱۴ (۳) ۱۵ (۲) ۱۲ (۱)

۱۱۳. دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۱۲ واحد مماس درونی‌اند. اندازه بزرگ‌ترین قطعه مماس که یک سر آن بر روی دایره بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطه تماس) بر روی دایره کوچک‌تر باشد، برابر کدام است؟

- ۹ (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) ۱۲ (۳) $8\sqrt{3}$ (۴)

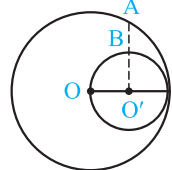
۱۱۴. نقطه C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره، که از نقطه C می‌گذرد، کدام است؟

- ۸ (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) $6\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{5}$ (۴)



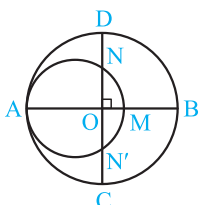
۱۱۵. در شکل روبه‌رو، O مرکز نیم‌دایره، AE = 5، CE = 8 و DE = 4 است. اندازه OE کدام است؟

- ۳ (۱) ۷ (۲) ۶ (۴) ۵ (۳)



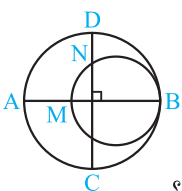
۱۱۶. در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره بزرگ، O' مرکز دایره کوچک، امتداد AB عمود بر OO' و طول AB برابر $3(3 - \sqrt{3})$ سانتی‌متر است. شعاع دایره بزرگ چند سانتی‌متر است؟

- $3\sqrt{5}$ (۱) $3\sqrt{6}$ (۲) $6\sqrt{3}$ (۴) $5\sqrt{3}$ (۳)



۱۱۷. در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $MB = 16$ و $ND = 10$ باشد، مساحت بین دو دایره کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۳۳ کتاب درسی)

- 324π (۱) 625π (۲) 336π (۴) 576π (۳)



۱۱۸. در شکل روبه‌رو، دو دایره بر هم مماس و قطرهای AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر $AM = 16$ و $DN = 10$ باشد، شعاع دایره کوچک‌تر، کدام است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۱۴۰۰)

- ۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۲۵ (۴) ۱۷ (۳)

۱۱۹. در مثلث به اضلاع ۶، ۵ و ۵، دایره محیطی آن را رسم می‌کنیم. فاصله بزرگ‌ترین ضلع از وسط کمان نظیر آن کدام است؟

- $2/25$ (۱) $2/5$ (۲) $2/75$ (۳) ۲ (۴)

۱۲۰. از یک نقطه خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم. طول مماس ۱۶ و طول بزرگ‌ترین قطعه قاطع ۳۲ است. اگر فاصله مرکز دایره تا خط قاطع ۵ باشد، شعاع دایره کدام است؟

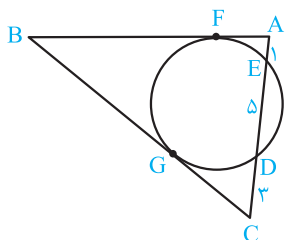
- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

۱۲۱. از نقطه M خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر آن رسم شده است. اگر طول مماس ۸ و فاصله نقاط تقاطع قاطع با دایره تا نقطه تماس به ترتیب ۴ و ۶ باشد، آن‌گاه فاصله M تا نزدیک‌ترین نقطه تقاطع کدام است؟

- $22/3$ (۱) $20/3$ (۲) $16/3$ (۳) $14/3$ (۴)

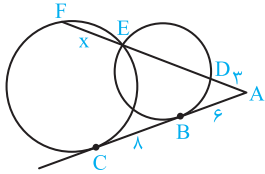
۱۲۲. اندازه اضلاع مثلث ABC برابر $AB = 8$ و $AC = 6$ و $BC = 7$ است. مماس بر دایره محیطی مثلث در نقطه A امتداد ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند. اندازه AD کدام است؟

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)



۱۲۳. مطابق شکل یک دایره بر اضلاع AB و BC در نقاط F و G مماس است. اگر دایره ضلع AC را قطع کند و سه پاره‌خط به طول‌های ۱، ۵ و ۳ روی آن ایجاد کند، آن‌گاه $|BC - AB|$ کدام است؟

- $3 - \sqrt{6}$ (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $3 - \sqrt{3}$ (۴) $6 - \sqrt{6}$ (۳)



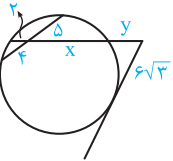
۱۲۴★ در شکل مقابل، خط شامل BC بر دو دایره مماس است و قاطع گذرنده از نقطه E آن را در نقطه A قطع کرده است. اگر $AB = 6$ ، $BC = 8$ و $AD = 3$ ، آنگاه اندازه وتر EF کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{3}$
 (۲) ۴
 (۳) $\frac{13}{3}$
 (۴) ۵

۱۲۵★ در شکل مقابل y کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) $\frac{7}{5}$
 (۳) ۸
 (۴) ۹

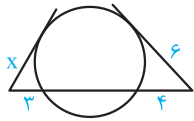
(سراسری ریاضی-۸۵)



۱۲۶★ در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد، فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است. نقطه C در امتداد AB به فاصله $CB = 2\sqrt{2}$ انتخاب شده است، طول قطعه مماسی که از C بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{10}$
 (۲) $3\sqrt{5}$
 (۳) ۷
 (۴) $5\sqrt{2}$

(سراسری ریاضی-۹۲)



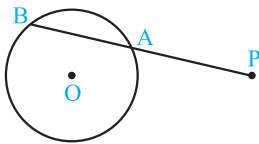
(سراسری ریاضی-۹۱)

- (۱) $3\sqrt{2}$
 (۲) $2\sqrt{5}$
 (۳) $2\sqrt{6}$
 (۴) ۵

۱۲۸★ نزدیک‌ترین نقطه از دایره به شعاع ۵ واحد تا نقطه مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = 2$ ، اندازه AB چقدر است؟

(سراسری ریاضی-۹۰)

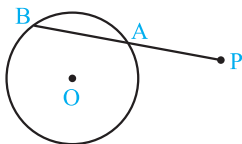
- (۱) ۹
 (۲) ۶
 (۳) ۷
 (۴) ۵



۱۲۹★ فاصله نقطه P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه، قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه PA چند برابر شعاع است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۰)

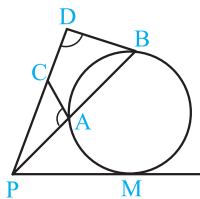
- (۱) $\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1)$
 (۲) $\frac{1}{3}(\sqrt{13} - 1)$
 (۳) $\sqrt{11} - 2$
 (۴) $\sqrt{13} - 2$



۱۳۰★ دو دایره به شعاع‌های ۴ و $\frac{10}{5}$ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

- (۱) ۸
 (۲) $4\sqrt{5}$
 (۳) $4\sqrt{6}$
 (۴) ۱۰

(سراسری ریاضی-۹۲)



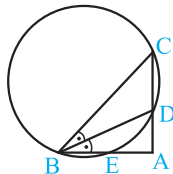
۱۳۱★ در شکل مقابل، $\widehat{PAC} = \widehat{PDB}$ ، $PC = 9$ و $CD = 7$ ، اندازه مماس PM چقدر است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور-۸۵)

- (۱) ۸
 (۲) $6\sqrt{2}$
 (۳) ۱۰
 (۴) ۱۲

۱۳۲★ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) مطابق شکل BD نیمساز زاویه B است. دایره محیطی مثلث BCD ضلع AB را در E قطع می‌کند. اگر $AC = 6$ و $AE = 1$ باشد، آنگاه طول ضلع AB کدام است؟

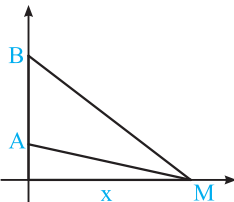
- (۱) $17/5$
 (۲) ۱۷
 (۳) $16/5$
 (۴) ۱۶



۱۳۳★ دو نقطه A و B به بلندی‌های ۵ و ۸ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطه M بر روی محور افقی، با کدام فاصله از پای قائم اختیار شود، تا زاویه AMB بیش‌ترین مقدار ممکن باشد؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۶)

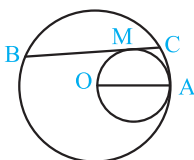
- (۱) $3\sqrt{2}$
 (۲) ۶
 (۳) $2\sqrt{10}$
 (۴) ۷



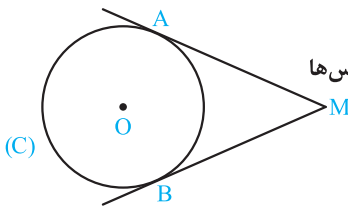
۱۳۴★ در دایره‌ای به شعاع OA، وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ برابر کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۴)

- (۱) MO^2
 (۲) MA^2
 (۳) OA^2
 (۴) $MA \cdot MO$



مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه خارج دایره بر آن



۱۳۵☆ در شکل مقابل از نقطه M دو مماس MA و MB بر دایره (O, 6) رسم شده است. اگر طول مماس‌ها برابر ۸ باشد، دورترین فاصله نقطه M تا نقاط دایره کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۴
(۳) ۱۶
(۴) ۱۸

۱۳۶☆ از نقطه A دو مماس به طول ۱ بر دایره‌ای به مرکز O رسم می‌شود که زاویه بین آن‌ها 120° است. کوتاه‌ترین فاصله نقطه A تا نقاط دایره کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\sqrt{3} - 1$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۳۷☆ از نقطه M خارج دایره به شعاع $2\sqrt{3}$ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر فاصله این نقطه تا مرکز دایره ۶ باشد، آن‌گاه فاصله نقاط تماس کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
(۲) $3\sqrt{3}$
(۳) $4\sqrt{2}$
(۴) $2\sqrt{6}$

۱۳۸☆ از نقطه M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $4(\sqrt{2} - 1)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

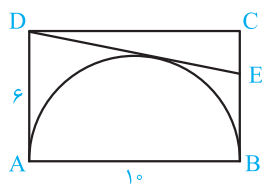
- (۱) $2\sqrt{2}$
(۲) ۳
(۳) $\sqrt{10}$
(۴) $3\sqrt{2}$

۱۳۹☆ در مثلث ABC ($AB = AC$)، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC = 6$ و ارتفاع $AH = 4$ باشد، شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $3/25$
(۲) $3/5$
(۳) $3/75$
(۴) $4/5$

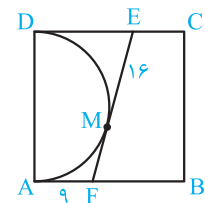
۱۴۰☆ از نقطه A خارج دایره به شعاع ۱ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر زاویه بین دو مماس 60° باشد، آن‌گاه مساحت ناحیه بین دایره و مماس‌ها کدام است؟

- (۱) $2 - \frac{\pi}{6}$
(۲) $2 - \frac{\pi}{3}$
(۳) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$
(۴) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$



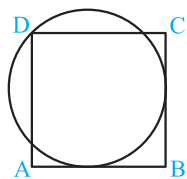
۱۴۱☆ در مستطیل ABCD مطابق شکل، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. نقطه E روی ضلع BC چنان است که DE بر نیم‌دایره مماس است. طول پاره خط CE کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{5}$
(۲) $\frac{8}{3}$
(۳) $\frac{13}{5}$
(۴) $\frac{11}{6}$



۱۴۲☆ مطابق شکل، چهارضلعی ABCD مربع و EF در نقطه M بر نیم‌دایره به قطر AD مماس است. اگر $ME = 16$ و $AF = 9$ ، آن‌گاه مساحت مربع کدام است؟

- (۱) ۴۸۴
(۲) ۶۲۵
(۳) ۵۲۹
(۴) ۵۷۶



۱۴۳☆ در شکل مقابل، مستطیل ABCD مستطیل است و دایره‌ای از رأس D می‌گذرد و بر دو ضلع AB و BC مماس است. اگر $AB = 16$ و $BC = 18$ باشد، آن‌گاه شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۱

وضعیت دو دایره نسبت به هم

۱۴۴☆ دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ متقاطع‌اند و مراکز آن‌ها بیرون یکدیگر قرار دارد. طول خط‌المركزین دو دایره کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۱۴۵☆ دو دایره به شعاع‌های $a + 1$ و $2a + 4$ و طول خط‌المركزین $15 - 7a$ متخارج هستند؛ به‌ازای کم‌ترین مقدار صحیح a، بیش‌ترین فاصله نقاط دو دایره کدام است؟

- (۱) ۵۰
(۲) ۴۰
(۳) ۶۰
(۴) ۷۰

۱۴۶☆ فرض کنید طول خط‌المركزین دو دایره با شعاع‌های $a - 1$ و $6a - 2$ ، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

(سراسری ریاضی-۱۴۰۰)

- (۱) ۳
(۲) $\frac{13}{3}$
(۳) ۶
(۴) ۷

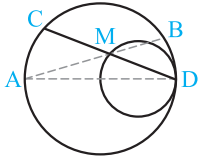
۱۴۷★ دو دایره مماس داخل هستند. اگر مساحت ناحیه بین دو دایره 144π و طول خط‌المركزین دو دایره برابر ۸ باشد، آن‌گاه نسبت طول شعاع دایره بزرگ به شعاع دایره کوچک کدام است؟

- (۱) ۱/۸ (۲) ۲/۶ (۳) ۲/۴ (۴) ۳

۱۴۸★ دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ واحد، در نقطه A مماس درونی هستند. وتر BC از دایره بزرگ موازی خط‌المركزین و بر دایره کوچک در نقطه P مماس است. حاصل $PB \times PC$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

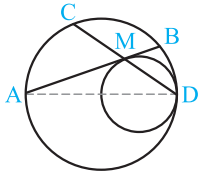
۱۴۹★ در شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد مماس داخل و اندازه کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حاصل $MA \times MB$ کدام است؟ (سراسری ریاضی-۹۹)



- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۶
(۴) ۱۲

تذکر: دو اشکال بر این تست وارد است. اول این‌که اندازه کمان، معمولاً برای اندازه‌اش بر حسب درجه به کار می‌رود، پس بهتر بود ذکر می‌شد طول کمان. دوم این‌که AD باید ذکر شود که قطر دایره بزرگ است.

۱۵۰★ در شکل روبه‌رو، دو دایره در نقطه D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری برابر است. وتر AB از دایره

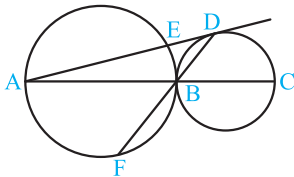


بزرگ‌تر بر دایره داخل در نقطه M مماس است. نسبت $\frac{MC}{MB}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور-۹۹)

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

تذکر: در صورت تست باید ذکر میشد که AD قطر دایره بزرگ است.

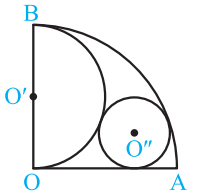
۱۵۱★ در شکل روبه‌رو دو دایره در نقطه B مماس خارج هستند و قطر دایره‌ها $AB = 6$ و $BC = 4$ می‌باشد.



اگر AD مماس بر دایره کوچک و امتداد BD دایره بزرگ را در F قطع کند، آن‌گاه حاصل $BD \times DF$ کدام است؟

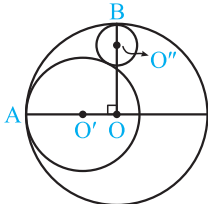
- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵
(۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۱۵۲★ در شکل مقابل دایره بر نیم‌دایره، ربع دایره و شعاع OA مماس است. شعاع دایره کوچک چه کسری از شعاع ربع دایره است؟



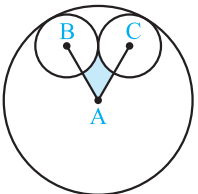
- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) $\frac{2}{3}$

۱۵۳★ در شکل مقابل دایره‌ها دو به دو مماس هستند. اگر شعاع دو دایره بزرگ‌تر ۵ و ۳ باشد. شعاع کوچک‌ترین دایره کدام است؟



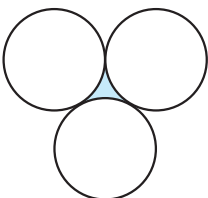
- (۱) $1/25$ (۲) $1/75$
(۳) $1/5$ (۴) ۱

۱۵۴ سه دایره مطابق شکل دایره دو به دو بر هم مماس هستند و A، B، C مرکز دایره‌ها می‌باشند. اگر شعاع دایره بزرگ ۳ و شعاع‌های دایره‌های کوچک برابر ۱ باشند، آن‌گاه مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



- (۱) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (۲) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$
(۳) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (۴) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

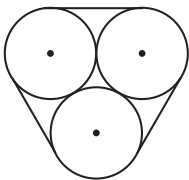
۱۵۵★ در شکل مقابل سه دایره به شعاع‌های مساوی، دایره دو به دو بر هم مماس‌اند. اگر محیط هر دایره ۳۶ باشد، محیط ناحیه رنگی کدام است؟



- (۱) ۱۸ (۲) ۶
(۳) ۳۶ (۴) ۱۲

۱۵۶☆ در پرسش قبل، اگر شعاع دایره‌ها برابر یک باشد، مساحت ناحیه بین آن‌ها کدام است؟

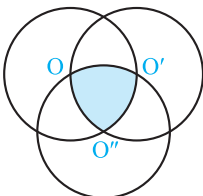
- (۱) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۳) $\pi - \sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3} - \pi$



۱۵۷☆ سه دایره مطابق شکل با یک طناب بسته شده‌اند. اگر شعاع دایره‌ها یک باشد، طول طناب کدام است؟

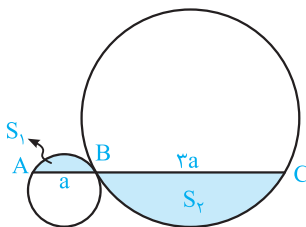
- (۱) $2\pi + 2$ (۲) $3\pi + 4$ (۳) $6 + 2\pi$ (۴) $6\pi + 2$

۱۵۸☆ در شکل مقابل سه دایره مساوی به شعاع واحد از مرکز یکدیگر می‌گذرند، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



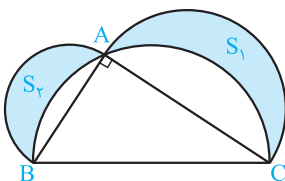
- (۱) $\pi - \sqrt{3}$ (۲) $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۵۹☆ در شکل مقابل دو دایره مماس خارج هستند. اگر $S_1 + S_2 = 40\pi$ آن‌گاه S_1 کدام است؟



- (۱) 5π (۲) 4π (۳) 6π (۴) 8π

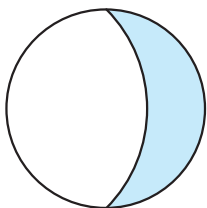
۱۶۰☆ در شکل روبه‌رو، مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع $AB = 5$ و $AC = 12$ است. سه نیم‌دایره به



قطرهای AB و AC رسم شده‌اند. حاصل $S_1 + S_2$ کدام است؟ (منشأه سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۳)

- (۱) 60 (۲) 30 (۳) 20π (۴) 10π

۱۶۱☆ در شکل مقابل کمانی از یک دایره دیگر رسم شده است که مرکز آن روی دایره مفروض است و از دو سر



قطری از آن می‌گذرد. نسبت مساحت غیررنگی به مساحت رنگی کدام است؟

- (۱) $\pi - 1$ (۲) π (۳) $\sqrt{2}\pi - 1$ (۴) $\pi - \sqrt{2}$

مماس مشترک‌های داخلی و خارجی

۱۶۲☆ طول خط‌المركزین دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳، برابر $\sqrt{5}$ است. چند خط می‌توان رسم کرد که بر هر دو دایره مماس باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۶۳☆ دو دایره مماس خارج به شعاع‌های $R_1 = 8$ و $R_2 = 2$ مفروض‌اند. اگر TT' مماس مشترک خارجی و O و O' مراکز دو دایره باشند،

مساحت چهارضلعی $OO'T'T$ چقدر است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۴۰ (۳) ۳۰ (۴) ۲۰

۱۶۴☆ دو دایره مماس خارج‌اند. اگر یک زاویه چهارضلعی حاصل از وصل مراکز دو دایره و نقاط تماس مماس مشترک خارجی دو دایره برابر 60° باشد، آن‌گاه نسبت شعاع‌های دو دایره کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۱۶۵☆ اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است، خط‌المركزین این دو دایره چند واحد است؟

- (۱) $12\sqrt{2}$ (۲) $7\sqrt{6}$ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸ (سراسری ریاضی- ۹۱)

۱۶۶☆ زاویه بین خط‌المركزین و مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های $7/5$ و 30 سانتی‌متر، 30° درجه است. طول خط‌المركزین دو دایره

چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۸۴)

- (۱) $42/5$ (۲) ۴۵ (۳) $47/5$ (۴) ۵۰

۱۶۷★ شعاع دو دایره خارج هم به ترتیب $22/5$ و $7/5$ سانتی متر است. اگر زاویه بین مماس مشترک داخلی و خط‌المركزین دو دایره 30° درجه باشد، طول خط‌المركزین دو دایره چند سانتی متر است؟

(سراسری ریاضی-۸۴)

- (۱) ۵۵ (۲) $57/5$ (۳) ۶۰ (۴) $62/5$

۱۶۸★ طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی متر برابر $3\sqrt{33}$ سانتی متر است. کم‌ترین فاصله نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی متر است؟

(سراسری ریاضی-۸۲)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۶۹★ دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $4\sqrt{6}$ در دایره بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایره کوچک‌تر مماس باشند؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۰)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷۰★ در دو دایره متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصله نقطه تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{OO'}{2}$ می‌باشد. اندازه مماس مشترک محدود به دو نقطه تماس این دو دایره چند واحد است؟

(سراسری ریاضی-۹۰)

- (۱) ۵ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) ۴

۱۷۱★ دو دایره $C(O, 9)$ و $C'(O', 3)$ متقاطع‌اند. اگر مساحت چهارضلعی حاصل از وصل نقاط تماس مماس مشترک خارجی و مراکز دایره‌ها برابر ۴۸ باشد، طول قسمتی از خط‌المركزین که بین دو دایره قرار می‌گیرد، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۷۲★ دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۷ مماس داخل‌اند. چند وتر به طول $4\sqrt{10}$ در دایره بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایره کوچک‌تر مماس باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷۳★ دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۱۳ مماس خارج‌اند. فاصله نقطه تماس دو دایره از مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

- (۱) $8/9$ (۲) $9/11$ (۳) $9/6$ (۴) $10/8$

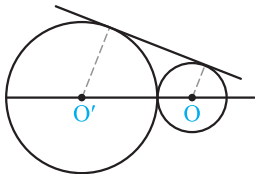
۱۷۴★ دو دایره نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO' ، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

(سراسری ریاضی-۹۴) (۱) نامشخص (۲) مماس (۳) متقاطع (۴) نامشخص

۱۷۵★ دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ واحد بر هم مماس‌اند. دایره به قطر OO' با مماس خارجی در نقطه M مشترک‌اند. فاصله نقطه M از نقطه تماس دو دایره، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۸)

- (۱) ۶ (۲) $6/5$ (۳) ۷ (۴) $7/5$

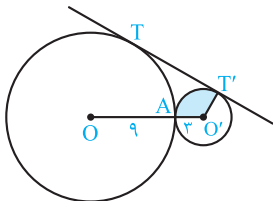


۱۷۶★ دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۶ و طول خط‌المركزین ۷ در نقاط A و B متقاطع هستند. امتداد AB مماس مشترک دو دایره را در نقطه M قطع می‌کند. حاصل $MA \times MB$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۱۷۷★ در شکل مقابل مساحت ناحیه رنگی چند برابر π است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶



۱۷۸★ دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۸ و طول خط‌المركزین ۱۹ مفروض‌اند. فرض کنیم M نقطه تماس مماس مشترک داخلی دو دایره با دایره کوچک باشد. دورترین فاصله نقاط دایره بزرگ‌تر، از M کدام است؟

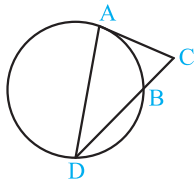
- (۱) ۲۷ (۲) ۳۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۰

۱۷۹★ طول مماس مشترک دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۹ و ۱۲ برابر $6\sqrt{6}$ است. طول وتر مشترک دو دایره کدام است؟

- (۱) $14/4$ (۲) $19/6$ (۳) $16/8$ (۴) $12/8$

۱۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

بنا به رابطه طولی مماس و قطعات قاطع داریم:



$$AC^2 = BC \times CD$$

$$\frac{AC = \sqrt{3}BC \text{ (فرض)}}{(\sqrt{3}BC)^2 = BC \times CD}$$

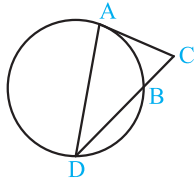
$$\Rightarrow 3BC^2 = BC \times CD$$

$$\Rightarrow 3BC = CD \Rightarrow 2BC = DB + BC$$

$$\Rightarrow 2BC = DB \Rightarrow \frac{DB}{BC} = 2$$

۱۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴

بنا به رابطه طولی مماس و قطعات قاطع داریم:



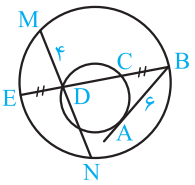
$$AC^2 = BC \times CD$$

$$\frac{DB=BC}{\text{(فرض)}} \rightarrow AC^2 = BC \times (BC + DB) = BC \times (BC + BC)$$

$$\Rightarrow AC^2 = 2BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}BC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}$$

۱۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم $BC = DE = x$ و $CD = y$ ، بنا به رابطه طولی مماس و قطعات قاطع در دایره کوچک داریم:



$$AB^2 = BC \times BD \Rightarrow 6^2 = x(x + y)$$

$$\Rightarrow x(x + y) = 36 \quad (1)$$

بنا به رابطه طولی وترهای متقاطع در دایره بزرگ می توان نوشت:

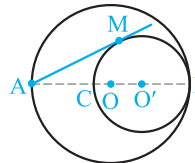
$$MD \times ND = DE \times BD \Rightarrow 4 \times ND = x \times (x + y) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 4 \times ND = 36 \Rightarrow ND = 9$$

$$MN = MD + ND = 4 + 9 = 13$$

۱۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابه فرض دو دایره مماس داخل اند و $O'B = O'C = 9$ و دورترین نقطه دایره بزرگ از نقاط دایره کوچک نقطه A است. بزرگترین مماس از این نقطه بر دایره کوچک رسم می شود و داریم:



$$AM^2 = AC \cdot AB = (AB - BC) \cdot AB$$

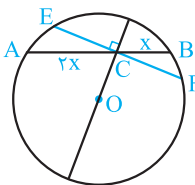
$$\Rightarrow AM^2 = (24 - 18) \times 24 = 144$$

$$\Rightarrow AM = 12$$

۱۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابه فرض نقطه C وتر $AB = 9$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است، پس $BC = x$ و $AC = 2x$ و در نتیجه:

$$AB = 9 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow BC = 3, AC = 6$$



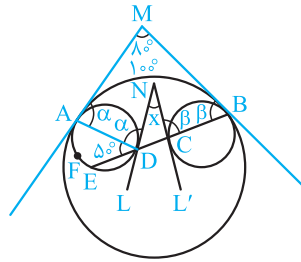
کوتاهترین وترى که از نقطه C رسم می شود، وترى است که بر قطر گذرنده از نقطه C عمود است، یعنی وتر EF. داریم:

$$CE \cdot CF = AC \cdot BC \Rightarrow CE^2 = CF^2 = 6 \times 3 = 18$$

$$\Rightarrow CE = CF = 3\sqrt{2}, EF = 2CE = 2CF = 6\sqrt{2}$$

۱۰۶ ۱ ۲ ۳ ۴

خطهای مماس بر دایرهها در نقاط A و B را رسم می کنیم و نقطه تلاقی آنها را M می نامیم. زاویه \widehat{M} و کمان \widehat{AB} مکمل یکدیگرند، پس $\widehat{M} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. هم چنین وتر AD را رسم می کنیم؛ اندازه زاویه محاطی \widehat{ADE} برابر 50° است. با فرض $\widehat{MAD} = \alpha$ به کمک زاویه ظلی نتیجه می شود $\widehat{ADN} = \alpha$ ، هم چنین با استدلال مشابه با فرض $\widehat{MBC} = \beta$ نتیجه می شود $\widehat{BCN} = \beta$ و در چهارضلعی AMBD داریم:



$$\alpha + 80^\circ + \beta + \widehat{ADB} = 360^\circ$$

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + 80^\circ + 130^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$$

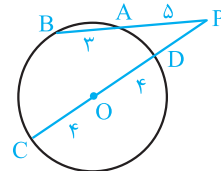
$$\Delta NCD: x + 180^\circ - (\alpha + 50^\circ) + (180^\circ - \beta) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = \alpha + \beta - 130^\circ = 150^\circ - 130^\circ = 20^\circ$$

۱۰۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$PT^2 = PA \cdot PB = 4 \times (4 + 6 + 6) = 4 \times 16 \Rightarrow PT = 2 \times 4 = 8$$

۱۰۸ ۱ ۲ ۳ ۴



$$PA \cdot PB = PD \cdot PC \Rightarrow 5 \times (5 + 3) = PD \cdot (PD + 8)$$

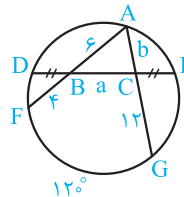
$$\Rightarrow PD^2 + 8PD - 40 = 0 \Rightarrow PD = -4 \pm \sqrt{16 + 40}$$

$$\xrightarrow{PD > 0} PD = -4 + \sqrt{56} = -4 + 2\sqrt{14}$$

$$PO = PD + OD = -4 + 2\sqrt{14} + 4 = 2\sqrt{14}$$

۱۰۹ ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم $DB = CE = x$ ، در این صورت به کمک رابطه طولی وترهای متقاطع داریم:



$$AB \times BF = DB \times BE$$

$$\Rightarrow 6 \times 4 = x \times (a + x) \quad (1)$$

$$AC \times CG = DC \times CE$$

$$\Rightarrow b \times 12 = (a + x) \times x \quad (2)$$

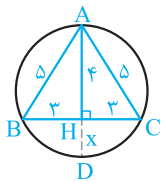
$$(1) \cdot (2) \Rightarrow 12b = 24 \Rightarrow b = 2$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{GF}}{r} = \frac{12^\circ}{2} = 6^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \sin 6^\circ$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

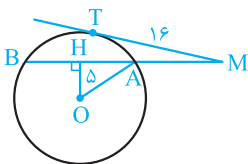
۱۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴



مثلث ABC متساوی الساقین است. ارتفاع AH میانه، نیمساز و عمود منصف است؛ امتداد آن از وسط کمان نظیر BC می‌گذرد و داریم:

$$AH \times DH = BH \times CH \Rightarrow x = \frac{3 \times 3}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

۱۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴



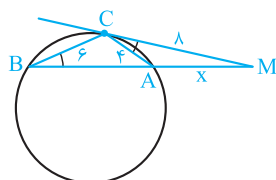
بنابه فرض $MB = 22$ ، $MT = 16$ و $OH = 5$ داریم:

$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow 16^2 = MA \times 22 \Rightarrow MA = 8$$

$$AB = MB - MA = 22 - 8 = 14 \Rightarrow AH = BH = 11$$

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 = 5^2 + 11^2 = 13^2 \Rightarrow OA = 13$$

۱۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

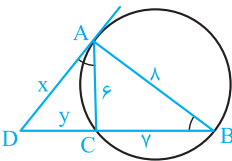


دو مثلث MAC و MCB به حالت (زز) متشابه‌اند، در نتیجه:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{MB} = \frac{4}{6} \Rightarrow MB = \frac{4 \times 6}{4} = 12 \\ MC^2 = MA \cdot MB \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12 \times x = 8^2 \Rightarrow x = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

۱۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴



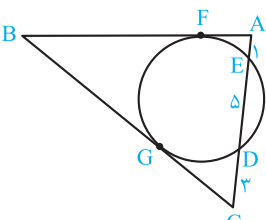
$$\triangle ADC \sim \triangle BDA \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+y} = \frac{6}{8} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 4y \\ 4x = 3y + 21 \end{cases} \Rightarrow 16x = 9x + 84 \Rightarrow x = \frac{84}{7} = 12$$

۱۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴

طول دو مماس BF و BG برابرند ($BF = BG$) و داریم:



$$AF^2 = AE \cdot AD$$

$$\Rightarrow AF^2 = 1 \times 6 \Rightarrow AF = \sqrt{6}$$

$$CG^2 = CD \cdot CE = 3 \times 4$$

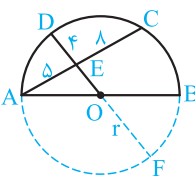
$$\Rightarrow CG = 2\sqrt{6}$$

$$|BC - AB| = |BG + CG - BF - AF| = |CG - AF|$$

$$= |2\sqrt{6} - \sqrt{6}| = \sqrt{6}$$

۱۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل اگر شعاع دایره را r فرض کنیم، $OE = r - 4$ می‌شود و داریم:



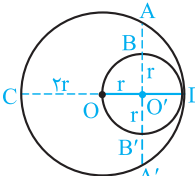
$$EF \cdot DE = AE \cdot CE$$

$$\Rightarrow 4(r - 4 + r) = 5 \times 8$$

$$\Rightarrow 2r - 4 = 10 \Rightarrow r = 7$$

$$OE = r - 4 = 7 - 4 = 3$$

۱۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴



بنابه فرض $AB = 3(3 - \sqrt{3})$ داریم:

$$O'A \times O'A' = O'C \times O'D$$

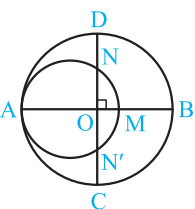
$$\Rightarrow O'A^2 = 3r \times r$$

$$\Rightarrow (O'B + AB)^2 = 3r^2 \Rightarrow r + 3(3 - \sqrt{3}) = \sqrt{3}r$$

$$\Rightarrow r(\sqrt{3} - 1) = 3(3 - \sqrt{3}) \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{شعاع دایره بزرگ} = 2r = 6\sqrt{3}$$

۱۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴



شعاع دایره بزرگ را R فرض می‌کنیم. داریم:

$$ON = ON' = R - 10$$

$$OM = R - 16$$

$$OA = R$$

بنابه رابطه طولی وترهای متقاطع در دایره کوچک داریم:

$$OA \times OM = ON \times ON' \Rightarrow R(R - 16) = (R - 10)(R - 10)$$

$$\Rightarrow R^2 - 16R = R^2 - 20R + 100 \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

قطر دایره کوچک $AM = 2r$ است. پس می‌توان نوشت:

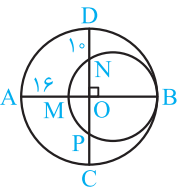
$$AM = AB - BM \Rightarrow 2r = 2R - 16 = 50 - 16 = 34$$

$$\Rightarrow r = 17$$

$$\text{مساحت ناحیه بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(25^2 - 17^2)$$

$$= \pi(625 - 289) = 336\pi$$

۱۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴



شعاع دایره بزرگ را R و شعاع دایره کوچک

را r فرض می‌کنیم. قطر MB در دایره کوچک

بر وتر PN عمود است، پس آن را نصف

می‌کند. بنابراین:

$$OP = ON = OD - DN = R - 10$$

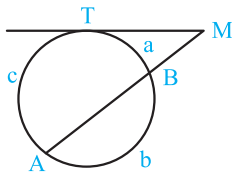
$$OM = OA - AM = R - 16, OB = R$$

بنابه رابطه طولی وترهای متقاطع در دایره کوچک داریم:

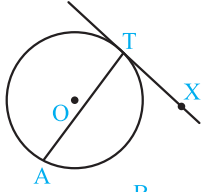
$$OM \times OB = ON \times OP \Rightarrow (R - 16) \times R = (R - 10) \times (R - 10)$$

$$\Rightarrow R^2 - 16R = R^2 - 20R + 100 \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

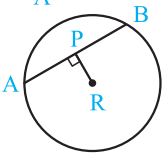
$$MB = AB - AM \Rightarrow 2r = 2 \times 25 - 16 \Rightarrow r = \frac{50 - 16}{2} = \frac{34}{2} = 17$$



۲۸. خط مماس بر دایره در نقطه T و امتداد وتر AB، در نقطه M متقاطع‌اند. با فرض $\widehat{TB} = a$ ، $\widehat{AT} = c$ ، $\widehat{BA} = b$ و $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ اندازه زاویه M را تعیین کنید. (نهایی- فرورد ۹۴)



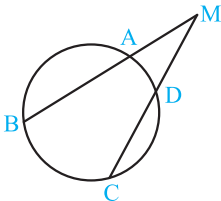
۲۹. اگر اندازه زاویه ظلی ATX مساوی $(6-2\alpha)^\circ$ و اندازه کمان \widehat{AT} برابر $(33+3\alpha)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه ATX را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۴)



۳۰. با توجه به شکل روبه‌رو، اگر طول شعاع 10 و $PR = 6$ ، آن‌گاه طول AP و AB را به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۳)

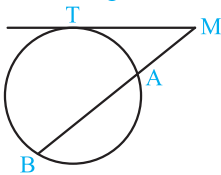
قسمت دوم: رابطه‌های طولی در دایره

(نهایی- دی ۹۵، فرورد ۹۵ و فرورد ۹۳)



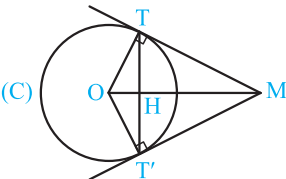
۳۱. ثابت کنید هرگاه وترهای AB و CD در نقطه M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA \cdot MB = MD \cdot MC$

۳۲. ثابت کنید اگر امتداد دو وتر AB و CD مطابق شکل در نقطه M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA \cdot MB = MD \cdot MC$ (نهایی- فرورد ۹۴)



۳۳. ثابت کنید اگر مطابق شکل از نقطه M یک خط مماس و یک قاطع بر دایره مفروض رسم کنیم، آن‌گاه $MT^2 = MA \cdot MB$ (نهایی- دی ۹۱ و فرورد ۹۳)

(نهایی- شهریور ۹۵ و شهریور ۹۳)



۳۴. ثابت کنید اندازه دو مماسی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود، با هم برابر است.

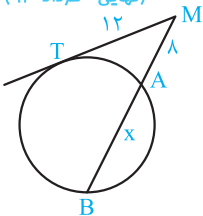
۳۵. در شکل مقابل از نقطه M دو مماس MT و MT' بر دایره $C(O, R)$ رسم شده است. (آ) ثابت کنید OM نیمساز زوایای TMT' و TOT' است. (ب) ثابت کنید OM عمودمنصف TT' است.

۳۶. ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، دو برابر واسطه هندسی شعاع‌های دو دایره است.

۳۷. ثابت کنید خط‌المركزین دو دایره متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست.

۳۸. دایره $C(O, R)$ و نقطه M در خارج این دایره داده شده‌اند. از نقطه M بر این دایره دو مماس رسم کنید (مراحل رسم را توضیح دهید).

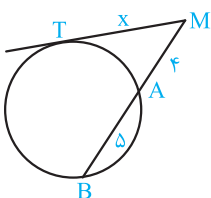
(نهایی- فرورد ۹۴)



۳۹. با توجه به شکل مقابل، مقدار x را تعیین کنید. (نهایی- دی ۹۵)

(نهایی- دی ۹۵)

۴۰. دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها را به‌دست آورید.

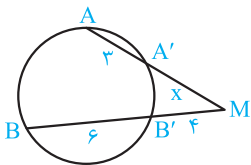


۴۱. در شکل مقابل مقدار x را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۹۵)

(نهایی- فرورد ۹۵)

۴۲. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المركزین $d = 13$ برابر $8 - 5x$ باشد. (نهایی- فرورد ۹۵)

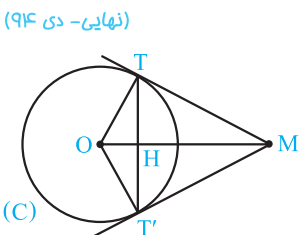
۴۳. مقدار a را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۳ و خط‌المركزین $d = 13$ برابر $3 - 5a$ باشد. (نهایی - شهریور ۹۴)



(نهایی - دی ۹۴)

۴۴. در شکل مقابل مقدار x را محاسبه کنید.

۴۵. دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۴ سانتی‌متر مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $3x + 1$ باشد. (نهایی - دی ۹۴)



۴۶. دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره $C(O, R)$ مماس‌اند. H نقطه برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید:

(نهایی - شهریور ۸۶)

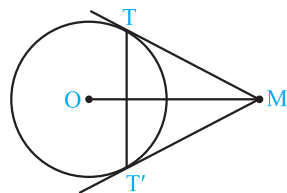
(آ) خط OM نیمساز زاویه‌های $\widehat{TMT'}$ و $\widehat{TOT'}$ است.

(ب) $TT'.OM = 2R.MT$

۴۷. دایره $C(O, 5)$ و نقطه M به فاصله $5\sqrt{2}$ از مرکز دایره C داده شده‌اند. MT و MT' در نقاط T و T' بر این دایره مماس‌اند. (نهایی - فرورداد ۹۳)

(آ) طول مماس‌های MT و MT' را به دست آورید.

(ب) نوع چهارضلعی $OTMT'$ را با ذکر دلیل مشخص کنید.



۴۸. دایره $C(O, 4)$ و نقطه M به فاصله ۸ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید، خط‌های MT و MT' بر این دایره مماس‌اند (T و T' نقطه‌های تماس‌اند).

(نهایی - شهریور ۸۸)

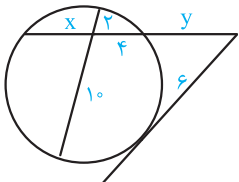
(آ) طول مماس‌های MT و MT' را به دست آورید.

(ب) طول وتر TT' را به دست آورید.

(پ) اندازه زاویه $\widehat{TMT'}$ و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.

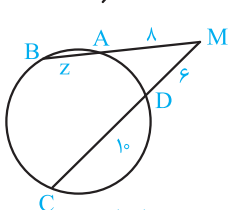
۴۹. دو دایره به شعاع ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $5x + 2$ باشد. (نهایی - فرورداد ۹۳)

(نهایی - فرورداد ۹۳)



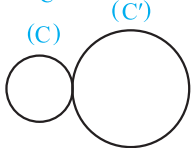
(نهایی - شهریور ۹۳)

۵۰. در شکل مقابل مقادیر x و y را به دست آورید.



(نهایی - شهریور ۹۲)

۵۱. با توجه به شکل، مقدار z را بیابید.

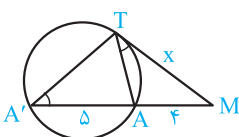


(نهایی - فرورداد ۹۱)

۵۲. شکل مقابل نشان‌دهنده دو دایره مماس برون است.

(آ) این شکل دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی است؟

(ب) اگر $R = 4$ و $R' = 9$ ، آنگاه اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها را به دست آورید.



(نهایی - دی ۹۰)

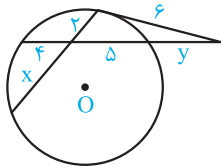
۵۳. مقدار x را در شکل روبه‌رو به دست آورید.

۵۴. مقدار a را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۲ و خط‌المركزین $d = 10$ ، برابر $3a - 1$ باشد. سپس تعیین کنید، این دو دایره چند مماس مشترک داخلی دارند. (نهایی - شهریور ۹۰)

(نهایی - شهریور ۹۰)

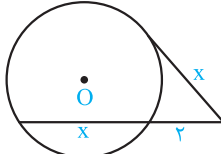
۵۵. طول خط‌المركزین در دو دایره متقاطع به شعاع ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آورید. (نهایی - فرورداد ۹۰)

(نهایی - فرورداد ۹۰)



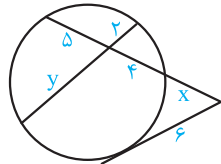
(نهایی- دی ۸۹)

۵۶. با توجه به شکل، مقدار x و y را به دست آورید.



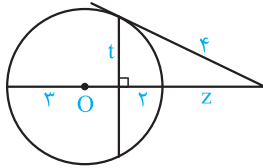
(نهایی- شهریور ۸۸)

۵۷. در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.



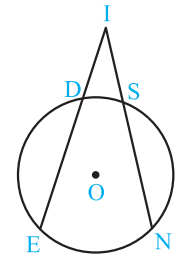
(نهایی- دی ۸۶)

۵۸. در شکل مقابل x و y را به دست آورید.



(نهایی- شهریور ۸۵)

۵۹. در شکل مقابل مقدار z و t را به دست آورید (O مرکز دایره است).



(نهایی- دی ۸۴)

۶۰. در شکل روبه‌رو دو قاطع IE و IN با هم برابرند. ثابت کنید $IS = ID$

۶۱. دو دایره به شعاع‌های ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها ۱۲ سانتی‌متر باشد، طول خط‌المركزین دو دایره را به دست آورید. این دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (نهایی- شهریور ۸۶)

۶۲. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر، مماس برون هستند، مقدار x را چنان تعیین کنید که اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $(2x - 2)$ باشد. (نهایی- فرورداد ۸۷)

۶۳. دو دایره به شعاع‌های ۲ سانتی‌متر و ۷ سانتی‌متر و خط‌المركزین برابر $2x + 1$ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $2x$ سانتی‌متر باشد، مقدار x را محاسبه کنید. (نهایی- فرورداد ۸۸)

۶۴. اگر شعاع‌های دو دایره نامساوی باشند، ثابت کنید مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المركزین آن‌ها هم‌مرس‌اند.

۶۵. ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المركزین دو دایره هم‌مرس‌اند.

قسمت سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

۶۶. در سؤالات زیر گزینه درست را انتخاب کنید. (نهایی- فرورداد ۹۵)

(أ) مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، محل برخورد آن مثلث است.

(۱) ارتفاع‌های اضلاع (۲) عمودمنصف‌های اضلاع (۳) نیمسازهای زاویه‌های درونی (۴) میان‌های اضلاع

(ب) مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل برخورد آن مثلث است.

(۱) ارتفاع‌های اضلاع (۲) عمودمنصف‌های اضلاع (۳) نیمسازهای زاویه‌های درونی (۴) میان‌های اضلاع

۶۷. ثابت کنید یک چندضلعی محاطی، است اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های اضلاع آن هم‌مرس باشند.

۶۸. ثابت کنید یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند. (نهایی- شهریور ۹۱)

۶۹. ثابت کنید در هر شش‌ضلعی محاطی مجموع زوایا به طور یک‌درمیان برابر 360° است.

۷۰. ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، اندازه هر زاویه داخلی برابر اندازه زاویه خارجی مقابل به آن است.

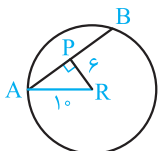
۲۹

$$\widehat{ATX} = \frac{\widehat{AT}}{2} \Rightarrow 2\alpha - 6 = \frac{3\alpha + 33}{2} \Rightarrow 4\alpha - 12 = 3\alpha + 33$$

$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\widehat{ATX} = (2\alpha - 6)^\circ = (2 \times 45 - 6)^\circ = 90^\circ - 6^\circ = 84^\circ$$

۳۰

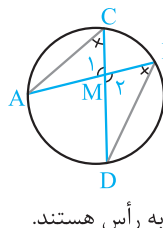


$$AR^2 = AP^2 + PR^2 \Rightarrow 10^2 = AP^2 + 6^2$$

$$\Rightarrow AP^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AP = 8$$

$$AB = 2AP = 2 \times 8 = 16$$

۳۱



وترهای AC و BD را رسم می‌کنیم، داریم:

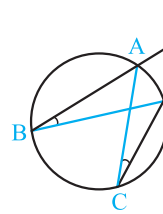
$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2}, \widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} \quad (\text{محاطی})$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle DMB$$

متقابل به رأس هستند. $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MD \times MC$$

۳۲



وترهای AC و BD را رسم می‌کنیم، داریم:

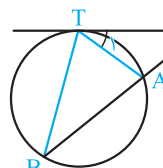
$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2}, \widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} \quad (\text{محاطی})$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle BMD \sim \triangle CMA$$

$\widehat{M} = \widehat{M}$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MA} \Rightarrow MA \times MB = MD \times MC$$

۳۳



وترهای TA و TB را رسم می‌کنیم، داریم:

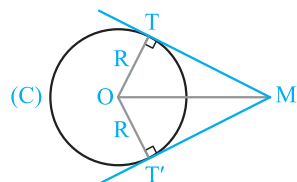
$$\widehat{T}_1 = \frac{\widehat{AT}}{2}, \widehat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} \Rightarrow \widehat{T}_1 = \widehat{B}$$

$$(\widehat{T}_1 = \widehat{B}, \widehat{M} = \widehat{M}) \Rightarrow \triangle MAT \sim \triangle MTB \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

$$\Rightarrow MT^2 = MA \times MB$$

۳۴

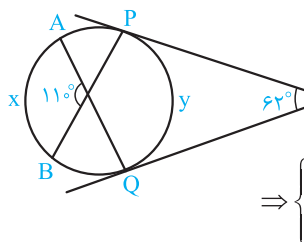
مرکز دایره را به نقطه M و نقاط تماس وصل می‌کنیم. شعاع گذشته از نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلثهای MOT' و MOT قائم‌الزاویه‌اند و داریم:



$$(OT = OT' = R, OM = OM, \widehat{T} = \widehat{T}' = 90^\circ)$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle MOT \cong \triangle MOT' \Rightarrow MT = MT'$$

۲۳



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{PAQ} - \widehat{PQ}}{2}$$

$$\widehat{PAQ} + \widehat{PQ} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{PAQ} - \widehat{PQ} = 2 \times 63^\circ = 126^\circ \\ \widehat{PAQ} + \widehat{PQ} = 36^\circ \end{cases}$$

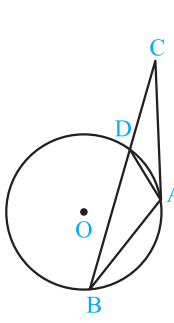
$$\xrightarrow{+} 2\widehat{PAQ} = 484^\circ \Rightarrow \widehat{PAQ} = 242^\circ$$

$$\widehat{PQ} = y = 36^\circ - 242^\circ = 118^\circ$$

$$\widehat{ANB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 110^\circ = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x + 118^\circ = 220^\circ$$

$$\Rightarrow x = 220^\circ - 118^\circ = 102^\circ$$

۲۴



(فرض) $AC = AB \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$ (۱)

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \quad (\text{محاطی})$$

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{AD}}{2} \quad (\text{ظلی}) \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{DAC}$$
 (۲)

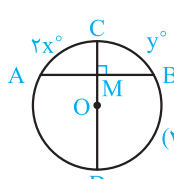
(۱) \cdot (۲) $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{C} \Rightarrow AD = CD$

$\triangle ACD$ متساوی‌الساقین است. \Rightarrow

۲۵

در متوازی‌الاضلاع DIAN زوایای روبه‌رو برابرند پس $\widehat{N} = \widehat{I}$ ، از طرفی دو زاویه M و N محاطی و کمان روبه‌رو به آن‌ها \widehat{AD} است، پس $\widehat{M} = \widehat{N} = \frac{\widehat{AD}}{2}$ ، در نتیجه $\widehat{M} = \widehat{I}$ پس مثلث MDI متساوی‌الساقین است، لذا $DM = DI$

۲۶



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \Rightarrow 90^\circ = \frac{2x + 3x + 15^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow 5x + 15 = 180 \Rightarrow 5x = 165 \Rightarrow x = 33^\circ$$

CD قطر دایره است پس می‌توان نوشت:

$$y + 3x + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow y + 99^\circ + 15^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - 15^\circ - 99^\circ = 66^\circ$$

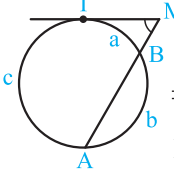
۲۷

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} \Rightarrow 2(\alpha + 16) = 3\alpha + 12$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 32 = 3\alpha + 12 \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\widehat{AOC} = 3 \times 20^\circ + 12 = 72^\circ, \widehat{ABC} = 20^\circ + 16^\circ = 36^\circ$$

۲۸



$$\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{1+4+5} = \frac{36^\circ}{10} = 3.6^\circ$$

$$\Rightarrow a = 3.6^\circ, b = 4 \times 3.6^\circ = 14.4^\circ, c = 5 \times 3.6^\circ = 18^\circ$$

$$\widehat{M} = \frac{c - a}{2} = \frac{18^\circ - 3.6^\circ}{2} = \frac{14.4^\circ}{2} = 7.2^\circ$$