

مطالعه



مشاوران آموزش

ناشر تخصصی علوم انسانی
ناشر تخصصی دروس عمومی

مقدمه

اگرچه دنیای شگفت‌انگیز ریاضیات، در هر یک از ابعاد آن دارای زیبایی‌ها و پیچیدگی‌های خاصی است؛ ولی ما در این کتاب سعی کرده‌ایم تا مطالب را با بیانی ساده و روان، مختص دانش‌آموزان علوم انسانی به رشته تحریر درآوریم. تلاش ما بر این بوده است، نوشته پیش رو، جامع و کامل باشد؛ به این معنا که همه مطالب مورد نیاز پایه دهم، روان و به اندازه کافی نگاشته شوند.

کتاب پیش رو، شامل چهار بخش کلی است که در ادامه هر بخش را به اختصار معرفی می‌کنیم:

۱. درسنامه: در این بخش، با بیانی ساده به توضیح مفاهیم می‌پردازیم و با ارائه مثال‌هایی، سعی در تفهیم، ساده‌سازی و ملموس‌تر کردن مطالب داریم.

لازم به ذکر است بخش درسنامه به اندازه‌ای پربار و کامل است که می‌تواند مستقل از بخش‌های دیگر مورد استفاده شما قرار بگیرد. این کتاب شامل ۱۲ درس است که در هر کدام، بخش‌های زیر را می‌بینید:

جدول ابتدای درس: در ابتدای هر درس یک جدول آورده شده که به‌طور خلاصه به شما می‌گوید در این درس چه مطالبی را خواهید خواند.

تمرین: در این کادر با حل تمرین، مطالبی که آموزش داده شده، تکرار و تثبیت می‌شوند.

برو مدرسه: این بخش شامل پرتکرارترین سؤالاتی است که در امتحانات مدرسه مطرح می‌شود.

برو آزمون: سطح سؤالات این بخش، کمی دشوارتر است که معمولاً این تیب سؤالات در آزمون‌های آزمایشی مطرح می‌شوند. اگر سؤالی را درست پاسخ ندادید، ناامید نشوید؛ زیرا در بخش درسنامه شما هنوز در حال تعلیم هستید، پس با خواندن دقیق پاسخ سعی کنید مطالبی که آموخته‌اید را تثبیت کنید.

برو کنکور: در این بخش سؤالات کنکور یا مشابه آن‌ها که مربوط به آن درس است را آورده‌ایم.

• در این بخش، روش‌ها و ساختارهای حل مسائل را گام‌به‌گام به دانش‌آموز آموزش می‌دهیم.

بی‌دقت نباشیم: گاهی دانش‌آموز به مطالب کتاب درسی کاملاً مسلط است، ولی بی‌دقتی باعث می‌شود نتواند به سؤالات پاسخ صحیح بدهد. این بی‌دقتی‌ها عمدتاً از کامل نخواندن صورت سؤال ناشی می‌شود که ما سر بزنگاه به شما تذکر می‌دهیم.

اشتباه محاسباتی نکنیم: بیشترین نمره‌ای که در درس ریاضی از دانش‌آموزان کم می‌شود به خاطر اشتباهات محاسباتی است. در این بخش با توجه به تجربه تدریس و تصحیح برگه‌های دانش‌آموزان، این اشتباهات را با شما در میان می‌گذاریم تا در این دام نیفتید.

چرا؟ چون: این بخش کلاس درس را برای شما تداعی می‌کند و شامل سؤالاتی است که در حین تدریس از معلم خود می‌پرسید.

نکته: ابزارهایی را در اختیار شما قرار می‌دهد که به کمک آن‌ها و مطالب درسنامه می‌توانید به راحتی از پس حل سؤالات بریابید.

پیوست: یادآوری مطالب سال گذشته یا درس‌های گذشته همین کتاب است.

۲. پرسش‌های چهارگزینه‌ای: در این کتاب تلاش کرده‌ایم تا با طراحی و ارائه ۵۲۳ پرسش چهارگزینه‌ای و تشریحی متنوع، مطابق با تغییرات کتاب درسی، دایره گسترده‌ای از مسائل را پیش روی شما قرار دهیم.

۳. آزمون‌های تشریحی: این کتاب با ۷ آزمون تشریحی، امتحان مدرسه را برای شما شبیه‌سازی کرده تا میزان یادگیری شما سنجیده شود.

۴. پاسخنامه: در پاسخنامه علاوه بر حل تشریحی سؤال، روش حل سؤال را نیز آورده‌ایم تا شما را از رجوع مجدد به درسنامه بی‌نیاز کنیم.

در نهایت سپاسگزار جناب آقای دکتر خداداد هستم که قدم‌به‌قدم در تمامی مراحل تألیف مرا همراهی کردند و تجربیات ارزشمندشان را بی‌منت در اختیارم قرار دادند. این کتاب به همت و تلاش بی‌وقفه دوست و همکار عزیزم سها سلیمان‌زاده گردآوری شده است و حاصل کار تیمی همکاران واحد تولید مشاوران آموزش؛ پرن موسوی، یاسمین بگلری، شراره فلاحتی، طرلان محمدی، زهرا اسکندری و الهام رضایی بوده است که قدردان زحمات آن‌ها در به ثمر رسیدن این کتاب هستم و همچنین تشکر می‌کنم از خانم هاله ایمانی که با دقت و ریزبینی، اشکالات کتاب را به حداقل رساندند.

امید ما بر این است که در ارتقای کیفی آموزش ریاضی به زبان انسانی‌ها گامی هرچند کوچک برداشته باشیم. طبعاً نظرات و پیشنهادات شما دبیران گرامی، دانش‌آموزان و صاحب‌نظران در نقد کتاب حاضر، به‌منظور ارائه‌ای مطلوب‌تر، راهگشا خواهد بود.

برای این منظور با ما در ارتباط باشید:

@mahnaz_hamedii

حل معادله درجه ۲ و کاربردها



توانایی‌های آخر بخش



می‌توانید هر معادله درجه دوم که به شما دادند را با روش‌های تجزیه، مربع کامل و روش کلی (یا دلتا) حل کنید.

می‌توانید تشخیص دهید یک معادله، جواب دارد یا خیر و اگر جواب دارد تعداد جواب‌های آن چندتاست. رابطه بین ضرایب و جمع ریشه‌ها و رابطه بین ضرایب و ضرب ریشه‌ها را می‌دانید به کمک آن‌ها می‌توانید سؤالات زیادی را حل کنید. می‌توانید مسائل توصیفی و شکل‌ها را به معادله درجه دوم تبدیل کنید و جواب آن‌ها را به دست آورید.

می‌توانید مسائل کاربردی و اقتصادی را به کمک معادله درجه دوم حل کنید.

با داشتن ریشه‌ها می‌توانید معادله آن را بنویسید.

موضوع



حل معادله درجه دوم

بخش



اول

دوم ریشه‌ها یا جواب‌های معادله درجه دوم

سوم تشکیل معادله درجه دوم

چهارم حل مسائل کاربردی و اقتصادی

پنجم نوشتن معادله درجه دوم

حل معادله درجه دوم



در درس پیش گفتیم شکل استاندارد یک معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است. اولین قدم برای حل معادله درجه دوم تبدیل آن به شکل استاندارد است. سه روش برای حل معادله درجه دوم داریم.

تجزیه عبارت‌های جبری

مربع کامل

روش کلی یا روش دلتا

روش‌های حل معادله درجه دوم

روش اول: تجزیه عبارت‌های جبری

برای شروع این روش ابتدا باید یک یادآوری از اتحادها و تجزیه عبارت‌های جبری داشته باشیم.

پیوست

اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

اتحاد مزدوج:

اتحاد جمله مشترک:

تجزیه: تجزیه عکس اتحاد است؛ یعنی سمت راست را می‌دهند و سمت چپ را می‌خواهند.

برای یادآوری چند عبارت جبری را تجزیه می‌کنیم:

$$1) x^2 + 4x + 4 \rightarrow (x + 2)^2 \quad \text{چون دو جمله مربع کامل } x^2 \text{ و } 4 \text{ را می‌بینیم} \\ \text{یاد اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌افتیم.}$$

$$2) 9x^2 - 12x + 4 \rightarrow (3x - 2)^2 \quad \text{چون دو جمله مربع کامل } 9x^2 \text{ و } 4 \text{ را می‌بینیم} \\ \text{یاد اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌افتیم.}$$

$$3) x^2 + 5x + 6 \rightarrow (x + 2)(x + 3) \quad \text{فقط یک جمله مربع کامل داریم پس می‌رویم سراغ} \\ \text{اتحاد جمله مشترک، به دنبال دو عدد هستیم که جمعشان} \\ \text{۵ و ضربشان ۶ باشد. (اعداد ۲ و ۳)}$$

$$4) 4x^2 + 4x - 3 \rightarrow (2x - 1)(2x + 3) \quad \text{حالا به دنبال دو عدد هستیم} \\ \text{که جمعشان ۲ و ضربشان} \\ \text{-۳ باشد. (اعداد ۳ و -۱)}$$

فقط یک جمله مربع کامل داریم پس می‌رویم سراغ اتحاد جمله مشترک، که جمله مشترک آن $2x$ است. باید این جمله مشترک را در جمله وسط ظاهر کنیم.

توجه: جمله مشترک باید در جمله وسط ظاهر شود. اگر این کار را نکنید ممکن است به اشتباه بگویید دنبال دو عدد هستیم که جمعشان ۴ و ضربشان -۳ باشد.



فقط یک جمله مربع کامل داریم پس می‌رویم سراغ اتحاد
جمله مشترک، درسته ۴ مربع کامل است ولی علامت
آن منفی است پس برای اتحاد مربع دوجمله‌ای قابل قبول نیست.

$$5) 9x^2 - 9x - 4 \rightarrow (3x)^2 - 3(3x) - 4$$

جمله مشترک را در جمله وسط ظاهر کردیم
حال به دنبال دو عدد هستیم که جمعشان ۳-
و ضربشان ۴- باشد. (اعداد ۴- و ۱)

$$\rightarrow (3x - 4)(3x + 1)$$

شبه اتحاد جمله مشترک است ولی ضرب
 x^2 یعنی ۵، مربع کامل نیست در اینجا
مواقع عبارت را در ۵ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$6) 5x^2 + 7x + 2 \rightarrow \frac{5 \times (\Delta x^2 + 7x + 2)}{5}$$

یادتان باشد که حتماً همین‌طوری
۵ را ضرب کنید که خیلی راحت جمله مشترک را ببینید
حال به دنبال دو عدد هستیم که جمعشان
۷ و ضربشان ۱۰ باشد. (اعداد ۲ و ۵)

$$= \frac{(\Delta x)^2 + 7(\Delta x) + 10}{5} \rightarrow \frac{(\Delta x + 2)(\Delta x + 5)}{5}$$

حال در این مرحله می‌شود از یکی از
پرانتزها عددی که در مخرج هست
یعنی ۵ را فاکتور گرفت.

$$\rightarrow \frac{(\Delta x + 2) \cancel{5} (x + 1)}{\cancel{5}} = (\Delta x + 2)(x + 1)$$

شبه اتحاد جمله مشترک است ولی ضرب
 x^2 یعنی ۳، مربع کامل نیست. در اینجا
مواقع عبارت را در ۳ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$7) 3x^2 - 5x - 2 \rightarrow \frac{3 \times (3x^2 - 5x - 2)}{3} = \frac{(3x)^2 - 5(3x) - 6}{3}$$

در این مرحله می‌توان از یکی از پرانتزها عددی که
در مخرج است یعنی ۳ را فاکتور گرفت.

حتماً همین‌طوری ضرب کنید.
حال به دنبال دو عدد هستیم که جمعشان
۵- و ضربشان ۶- باشد.
(اعداد ۶- و ۱+)

$$\rightarrow \frac{(3x - 6)(3x + 1)}{3}$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{3} (x - 2)(3x + 1)}{\cancel{3}} = (x - 2)(3x + 1)$$

دو جمله مربع کامل داریم که علامت
بین آن‌ها منفی است پس اتحاد مزدوج برایشان
تداعی می‌شود.

$$8) 9x^2 - 4 \rightarrow (3x - 2)(3x + 2)$$

دو جمله مربع کامل داریم که علامت
بین آن‌ها منفی است پس اتحاد مزدوج داریم.

$$9) 16x^2 - 64 \rightarrow (4x - 8)(4x + 8)$$

خُب چندتا مثال فاکتورگیری هم بزینم بعد بریم سر اصل مطلب.

از x فاکتور می‌گیریم.

$$10) x^2 + x \rightarrow x(x + 1)$$

از $5x$ فاکتور می‌گیریم.

$$11) 5x^2 + 25x \rightarrow 5x(x + 5)$$

حال اتحاد مزدوج داریم.

از ۲ فاکتور می‌گیریم.

$$12) 2x^2 - 32 \rightarrow 2(x^2 - 16) \rightarrow 2(x - 4)(x + 4)$$

روش

$$2x^2 - 16x + 14 = 0$$

حل معادله با تجزیه
گام ۱: در صورت امکان فاکتورگیری انجام می‌دهیم.

$$2x^2 - 16x + 14 = 0 \rightarrow 2(x^2 - 8x + 7) = 0$$

از ۲ فاکتور
می‌گیریم

گام ۲: با استفاده از اتحادها سعی می‌کنیم عبارت را تجزیه کنیم.

ما را یاد اتحاد جمله مشترک می‌اندازد.
به دنبال دو عدد هستیم که جمعشان
۸- و ضربشان ۷ باشد (۱- و ۷-)

$$2(x^2 - 8x + 7) \rightarrow 2(x - 1)(x - 7) = 0$$

اشتباه محاسباتی نکنیم عددی که فاکتور گرفتیم را فراموش نکنید قبل از پرانتزها بگذارید.

گام ۳: حال تک تک پرانتزها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$2(x - 1)(x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = b \text{ یا } b = 0$$

مثال: جواب معادله $64x^2 + 16x + 1 = 0$ را به دست آورید.
پاسخ:

$$64x^2 + 16x + 1 = 0 \rightarrow (8x + 1)^2 = 0$$

دو جمله مربع کامل $64x^2$ و 1 داریم پس یاد اتحاد مربع دو جمله ای می افزیم

$$\xrightarrow{\text{حال پرانتز را برابر صفر قرار می دهیم.}} 8x + 1 = 0 \Rightarrow 8x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{8}$$

به این جواب می گوئیم ریشه مضاعف

چرا؟ چون در واقع دو تا از این ریشه داریم پس مضاعف است.

$$(8x + 1)^2 = 0 \Rightarrow (8x + 1)(8x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{8} \\ 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{8} \end{cases}$$

یادتان باشد وقتی موقع تجزیه کردن به اتحاد مربع دو جمله ای برسیم، ریشه مضاعف داریم. البته جلوتر هم مفصل راجع به آن توضیح می دهیم.

نکته: در معادله استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$

۱ اگر $c = 0$ باشد از فاکتورگیری استفاده می کنیم.

$$x^2 + 3x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

۲ اگر $b = 0$ باشد از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم:

$$1) x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$2) -x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{\text{از منفی فاکتور می گیریم}} -(x^2 - 9) = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} -(x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

چون a و c هم علامت هستند نمی توانیم از اتحاد مزدوج استفاده کنیم.

در این حالت معادله جواب یا ریشه ندارد؛ چون هیچ عددی به توان ۲ منفی نمی شود.

پس اگر به ما گفتند معادله ای بنویسید که ریشه نداشته باشد می توانیم معادله هایی به شکل $x^2 + 1 = 0$ یا $x^2 + 8 = 5$ یا ... بنویسیم.

تمرین

۱- معادله $25x^2 - 36 = 0$ را حل کنید.

پاسخ:
روش اول:

$$25x^2 - 36 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (5x - 6)(5x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \\ 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{5} \end{cases}$$

روش دوم:

$$25x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 25x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{25} \xrightarrow{\text{ریشه دوم می گیریم}} x = \pm \sqrt{\frac{36}{25}} \Rightarrow x = \pm \frac{6}{5}$$

پس یا با اتحاد مزدوج حل می کنیم یا با ریشه دوم گرفتن.

$$\text{ریشه دوم گرفتن: } x^2 = k \Rightarrow x = \pm \sqrt{k}$$

۲- جواب معادله $5x^2 - 39x - 8 = 0$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$5x^2 - 39x - 8 = 0 \xrightarrow{\text{شبهه اتحاد جمله مشترک است. در ضرب x^2 ضرب و تقسیم می کنیم.}} \frac{5 \times (5x^2 - 39x - 8)}{5} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{وقتی یک کسر برابر صفر است یعنی صورت آن برابر صفر است.}} 5 \times (5x^2 - 39x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow (5x)^2 - 39(5x) - 40 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک با جمله مشترک $5x$ دنبال دو عدد می گردیم که جمعشان -40 و ضربشان 40 باشد}} (5x - 40)(5x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x - 40 = 0 \Rightarrow x = 8 \\ 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{5} \end{cases}$$

ریشه کوچک‌تر معادله $9(x-3)^2 = 4$ کدام است؟

$$-2 \quad (4) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{7}{3} \quad (2) \quad \frac{11}{3} \quad (1)$$

پاسخ: روش اول:

$$9(x-3)^2 = 4 \Rightarrow 9(x-3)^2 - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (3(x-3)-2)(3(x-3)+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-9-2=0 \Rightarrow 3x=11 \Rightarrow x=\frac{11}{3} \\ 3x-9+2=0 \Rightarrow 3x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$9(x-3)^2 = 4 \Rightarrow (x-3)^2 = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{ریشه دوم می‌گیریم}} (x-3) = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow (x-3) = \pm\frac{2}{3}$$

روش دوم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} + 3 = \frac{2+9}{3} = \frac{11}{3} \\ x-3 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{-2}{3} + 3 = \frac{-2+9}{3} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

گزینه ۲، صحیح است.



معادله‌های داده شده را حل کنید.

$$1) (x+2)(x-3) = x-3$$

پاسخ:

$$(x+2)(x-3) - (x-3) = 0 \xrightarrow{\text{از } (x-3) \text{ فاکتور می‌گیریم}} (x-3)((x+2)-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+2-1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$2) x^2 = x - \frac{1}{4}$$

پاسخ:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (x - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

روش دوم: مربع کامل

روش

حل معادله با مربع کامل $2x^2 - 13x + 15 = 0$ گام ۱: جملات شامل متغیر x را یک طرف و عدد ثابت را در طرف دیگر تساوی قرار می‌دهیم.

$$2x^2 - 13x = -15$$

گام ۲: اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک بود، دو طرف تساوی را بر این ضریب تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{2x^2 - 13x}{2} = \frac{-15}{2} \Rightarrow x^2 - \frac{13}{2}x = \frac{-15}{2}$$

گام ۳: مربع نصف ضریب x را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم.

$$x^2 - \frac{13}{2}x + (\frac{-13}{4})^2 = \frac{-15}{2} + (\frac{-13}{4})^2$$

$$\frac{-13}{2} \text{ نصف} = \frac{-13}{2} = \frac{-13}{2} = \frac{-13}{4}$$

$$(x - \frac{13}{4})^2 = \frac{-15}{2} + \frac{169}{16} = \frac{-120 + 169}{16} = \frac{49}{16}$$

گام ۴: با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، یک طرف، تبدیل به مربع کامل می‌شود.

گام ۵: ریشه دوم می‌گیریم.

$$(x - \frac{13}{4})^2 = \frac{49}{16} \xrightarrow{\text{ریشه دوم می‌گیریم}} (x - \frac{13}{4}) = \pm\sqrt{\frac{49}{16}} \Rightarrow x - \frac{13}{4} = \pm\frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{13}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{7}{4} + \frac{13}{4} = \frac{20}{4} = 5 \\ x - \frac{13}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{-7}{4} + \frac{13}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

مثال: جواب معادله $x^2 - 8x + 15 = 0$ را به روش مربع کامل به دست آورید.

پاسخ:

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \xrightarrow{\text{گام ۱}} x^2 - 8x = -15 \xrightarrow{\text{گام ۲}} x^2 - 8x + 4 = -15 + 4 \xrightarrow{\text{گام ۳}} (x-4)^2 = -15 + 16 = 1$$

گام ۱: x ها یک طرف اعداد یک طرف
گام ۲: ضریب x^2 یک باشد
گام ۳: مربع نصف ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

$$x^2 - 8x + \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = -15 + \left(\frac{-8}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 4^2 = -15 + 4^2 \xrightarrow{\text{گام ۴}} (x-4)^2 = -15 + 16 = 1$$

گام ۴: استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\xrightarrow{\text{گام ۵}} (x-4) = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x-4=1 \Rightarrow x=5 \\ x-4=-1 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

گام ۵: ریشه دوم می‌گیریم.



جواب معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ را به روش مربع کامل به دست آورید.

پاسخ:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{گام ۱}} 2x^2 + 3x = 5 \xrightarrow{\text{گام ۲}} \frac{2x^2 + 3x}{2} = \frac{5}{2}$$

گام ۱: x ها یک طرف اعداد یک طرف
گام ۲: ضریب x^2 را یک می‌کنیم.

$$\Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{گام ۳}} x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \xrightarrow{\text{گام ۴}} (x + \frac{3}{4})^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} = \frac{40}{16} + \frac{9}{16} = \frac{49}{16}$$

گام ۳: مربع نصف ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم.
گام ۴: از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} = \frac{40}{16} + \frac{9}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow (x + \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16} \xrightarrow{\text{گام ۵}} x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = \pm \frac{7}{4}$$

گام ۵: ریشه دوم می‌گیریم

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x + \frac{3}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow x = -\frac{7}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

برو آزمون

در حل معادله درجه دوم $x^2 - 3x = 1$ به روش مربع کامل، کدام عدد را باید به طرفین معادله اضافه کنیم؟

گزینه‌ها: $\frac{9}{4}$ (۴) ۹ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ:

$$x^2 - 3x = 1 \xrightarrow{\text{گام ۱}} x^2 - 3x + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$$

گام ۱: مربع نصف ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

گزینه ۴، صحیح است.

روش سوم: روش کلی یا روش دلتا

روش

حل معادله با دلتا $x^2 - 10x = 11$

گام ۱: معادله را استاندارد می‌کنیم و مقدار a ، b ، و c را طبق $ax^2 + bx + c = 0$ مشخص می‌کنیم.

$$x^2 - 10x = 11 \xrightarrow{\text{استاندارد}} x^2 - 10x - 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = -11 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

گام ۲: مقدار دلتا را به دست می‌آوریم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(-11) = 100 + 44 = 144$$

گام ۳: مقدار x_1 و x_2 از رابطه مقابل به دست می‌آید.

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-10) \pm \sqrt{144}}{2(1)} = \frac{10 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10 + 12}{2} = \frac{22}{2} = 11 \\ x_2 = \frac{10 - 12}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$



مثال: جواب‌های معادله $x^2 + 4x - 5 = 0$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{گام ۱}} \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{گام ۲}} \Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}} x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

پس وقتی $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه یا دو جواب دارد.

مثال: جواب‌های معادله $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$9x^2 - 12x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{گام ۱}} \begin{cases} a = 9 \\ b = -12 \\ c = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{گام ۲}} \Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}} x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2(9)} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

x_1 و x_2 هر دو برابر $\frac{2}{3}$ هستند، پس $\frac{2}{3}$ ریشه مضاعف است، پس وقتی $\Delta = 0$ باشد، ریشه مضاعف داریم.

مثال: جواب‌های معادله $x^2 + x - 12 = 0$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow[\text{استاندارد}]{\text{گام ۱}} x^2 + x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{گام ۲}} \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(12) = 1 - 48 = -47$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}} x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-47}}{2(1)} \Rightarrow \text{عدد منفی نمی‌تواند زیر رادیکال باشد پس معادله جواب ندارد.}$$

پس وقتی $\Delta < 0$ باشد، معادله جواب ندارد.

توجه: در روش کلی حتماً حتماً باید معادله را اول استاندارد کنیم.



معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $3x^2 + x = 2$

پاسخ:

$$\xrightarrow[\text{استاندارد}]{\text{گام ۱}} 3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{گام ۲}} \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}} x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2(3)} = \frac{-1 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-1-5}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

۲) $9x^2 - 1 = 8x$

پاسخ:

$$\xrightarrow[\text{استاندارد}]{\text{گام ۱}} 9x^2 - 8x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -8 \\ c = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{گام ۲}} \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(9)(-1) = 64 + 36 = 100$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}} x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2(9)} = \frac{8 \pm 10}{18} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8+10}{18} = \frac{18}{18} = 1 \\ x_2 = \frac{8-10}{18} = \frac{-2}{18} = \frac{-1}{9} \end{cases}$$



نکته ۱ اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم: $a + c = b$ در این صورت یکی از ریشه‌ها برابر $x = -1$ و دیگری برابر $x = \frac{-c}{a}$ است؛ مثل برو مدرسه شماره ۱، چون $a + c = b$ ، همان‌طور که دیدیم یکی از جواب‌ها $x = -1$ و دیگری $x = \frac{-c}{a} = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3}$ شد.

نکته ۲ اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم: $a + b + c = 0$ آن‌گاه جواب‌های معادله $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ است؛ مثل برو مدرسه شماره ۲، چون

$$a + b + c = 9 - 8 - 1 = 0, \text{ دیدیم یکی از جواب‌ها } x = 1 \text{ و دیگری } x = \frac{c}{a} = \frac{-1}{9} \text{ شد.}$$

برو آزمون



۱- اختلاف جواب‌های معادله $x^2 - 4x - 21 = 0$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۴ (۴)

پاسخ:

$$\xrightarrow{\text{گام ۱}} \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -21 \end{cases} \xrightarrow{\text{گام ۲}} \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(-21) = 16 + 84 = 100$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}} x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2(1)} = \frac{4 \pm 10}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\text{اختلاف جواب‌ها} = 7 - (-3) = 7 + 3 = 10$$

گزینه ۳، صحیح است.

۲- اگر $x = -1$ جواب معادله $x^3 + a^2x^2 + 2ax = 2x$ باشد، a کدام است؟

- ۱ (۴) -۱۰ (۳) ۲ (۲) -۳ (۱)

پاسخ: از ظاهر درجه ۳ معادله تترسید، دست به کار شوید، $x = -1$ جواب معادله است؛ یعنی در آن صدق می‌کند پس آن را در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$x^3 + a^2x^2 + 2ax = 2x \xrightarrow{x=-1} (-1)^3 + a^2(-1)^2 + 2a(-1) = 2(-1)$$

اشتباه محاسباتی نکنیم عدد (-1) را باید به جای x قرار دهید، اشتباهی جای a قرار ندهید.

$$\Rightarrow -1 + a^2 - 2a = -2 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$$

سؤال مقدار a را می‌خواهد، a جواب معادله درجه دوم $a^2 - 2a + 1 = 0$ است. (همیشه که نباید مجهول معادله مان x باشد، این دفعه مجهول معادله a است پس معادله را حل می‌کنیم و a را به دست می‌آوریم.)

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{\text{گام ۱}} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{گام ۲}} \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}} a_1, a_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1 \text{ ریشه مضاعف } 1$$

اشتباه محاسباتی نکنیم a ها را با هم قاطی نکنید. $a \leftarrow$ مجهول معادله
 $a \leftarrow$ ضریب جمله توان ۲
 با روش تجزیه نیز می‌توانستیم معادله را حل کنیم.

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای}} (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ ریشه مضاعف } 1$$

در روش تجزیه گفتیم هرگاه به اتحاد مربع دو جمله‌ای رسیدیم، ریشه مضاعف داریم.

گزینه ۴، صحیح است.

۳- اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله $x^2 + (m-9)x + 12m = 0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

- ۴ (۴) ۱ (۳) -۶ (۲) ۶ (۱)

پاسخ: چون $x = 2$ جواب معادله است پس در معادله صدق می‌کند.

$$x^2 + (m-9)x + 12m = 0 \xrightarrow{x=2} (2)^2 + (m-9)(2) + 12m = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 2m - 18 + 12m = 0 \Rightarrow 14m - 14 = 0 \Rightarrow m = 1 \xrightarrow{\text{در معادله جایگذاری می‌کنیم}} x^2 + (1-9)x + 12(1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \xrightarrow{\text{حل با اتحاد جمله مشترک}} (x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases}$$

گزینه ۱، صحیح است.

۴- اگر $x=1$ جواب معادله‌های $2x^2 - bx - 3a = 0$ و $ax^2 + 3x + 4b = 0$ باشد، جواب‌های دیگر معادله‌ها به ترتیب از راست به چپ

کدام است؟

(۱) 2 و $\frac{-1}{2}$ (۲) 1 و $\frac{-3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ و $\frac{-3}{2}$ (۴) $\frac{-3}{2}$ و -4

پاسخ: جواب معادله، در معادله صدق می‌کند، پس $x=1$ را در هر دو معادله قرار می‌دهیم.

$$2x^2 - bx - 3a = 0 \xrightarrow{x=1} 2(1)^2 - b(1) - 3a = 0 \Rightarrow 2 - b - 3a = 0 \Rightarrow b + 3a = 2 \quad (1)$$

$$ax^2 + 3x + 4b = 0 \xrightarrow{x=1} a(1)^2 + 3(1) + 4b = 0 \Rightarrow a + 3 + 4b = 0 \Rightarrow 4b + a = -3 \quad (2)$$

با استفاده از (۱) و (۲) مقدار a و b را باید به دست آوریم.

$$\xrightarrow{(2)} 4b + a = -3 \Rightarrow a = -3 - 4b \xrightarrow{\text{a را در (1) قرار می‌دهیم}} b + 3(-3 - 4b) = 2$$

$$\Rightarrow b - 9 - 12b = 2 \Rightarrow -11b = 11 \Rightarrow b = -1$$

مقدار b را در $a = -3 - 4b$ قرار می‌دهیم تا a به دست آید:

$$a = -3 - 4b \xrightarrow{b=-1} a = -3 - 4(-1) = -3 + 4 = 1$$

حال مقادیر a و b را در معادله‌ها قرار می‌دهیم و جواب‌های آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 - bx - 3a = 0 \xrightarrow{\substack{a=1 \\ b=-1}} 2x^2 - (-1)x - 3(1) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{گام ۱}} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۲}} \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25 \xrightarrow{\text{گام ۳}} x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2(2)}$$

$$= \frac{-1 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$ax^2 + 3x + 4b = 0 \xrightarrow{\substack{a=1 \\ b=-1}} (1)x^2 + 3x + 4(-1) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+4)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

گزینه ۴، صحیح است.

ریشه‌ها یا جواب‌های معادله درجه دوم

تا الان یاد گرفتید که چطور ریشه‌ها یا جواب‌های یک معادله درجه دوم را به دست آورید. در این بخش تمرکز بیشتری روی ریشه‌ها داریم. البته مطالب و معادلاتی که مثال می‌زنیم را در بخش‌های قبلی دیده‌اید؛ ولی بهتر است جداگانه نیز روی این موضوع بحث کنیم.

وجود ریشه

می‌خواهیم ببینیم معادله درجه دوم چه موقع جواب دارد و چه موقع جواب ندارد. سه شکل از معادلات را در نظر می‌گیریم.

$\Delta > 0$: معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد؛ مثل $x^2 - 12x + 4 = 0$

$\Delta = 0$: معادله ریشه مضاعف دارد؛ مثل $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$\Delta < 0$: معادله ریشه ندارد؛ مثل $x^2 + x + 12 = 0$

$k > 0$: معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد؛ مثل $(x-3)^2 = \frac{4}{9}$

$k = 0$: معادله ریشه مضاعف دارد؛ مثل $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$

$k < 0$: معادله ریشه ندارد؛ مثل $x^2 = -16$

a و c هم‌علامت: معادله ریشه ندارد.

a و c مختلف‌العلامت: معادله دو ریشه قرینه دارد.

$$\Delta = b^2 - 4ac : ax^2 + bx + c = 0$$

$$(x \pm a)^2 = k \quad \text{معادله درجه دوم}$$

$$ax^2 + c = 0 \quad (b = 0 \text{ وقتی})$$

توجه: حالت‌های دوم و سوم از معادلات در واقع زیرمجموعه حالت اول هستند و می‌شود با همان دلتا، تعداد جواب‌هایشان را به دست آورد؛ فقط برای توجه بیشتر آن‌ها را جداگانه بیان کردیم.



در معادله $(a+1)x^2 + 2x - 1 = 0$ به ازای چه مقداری از a ،

الف) معادله ریشه مضاعف دارد.

ب) معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

پ) معادله ریشه ندارد.

پاسخ: الف) معادله وقتی ریشه مضاعف دارد که $\Delta = 0$ باشد.

$$(a+1)x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(a+1)(-1) = 4 + 4(a+1) = 4 + 4a + 4 = 4a + 8 \Rightarrow$$

$$\Delta = 4a + 8 \xrightarrow{\Delta=0} 4a + 8 = 0 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

اشتباه محاسباتی نکنیم مجهولات مسئله را از قصد a می‌گذارند که شما با a ، b و c موجود در شکل استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ قاطی کنید، پس حواستان را جمع کنید که قاطی نکنید.

ب) معادله وقتی دو ریشه حقیقی متمایز دارد که $\Delta > 0$ باشد.

$$\Delta = 4a + 8 \xrightarrow{\Delta > 0} 4a + 8 > 0 \Rightarrow 4a > -8 \Rightarrow a > -2$$

پ) معادله وقتی ریشه ندارد که $\Delta < 0$ باشد.

$$\Delta = 4a + 8 \xrightarrow{\Delta < 0} 4a + 8 < 0 \Rightarrow 4a < -8 \Rightarrow a < -2$$



۱- کدامیک از معادله‌های زیر به‌ازای هر مقدار m ، همواره جواب دارد.

الف) $(1-m)x^2 + mx - m = 0$

ب) $x^2 + mx - 2 = 0$

پاسخ: الف) برای اینکه بفهمیم معادله‌ای جواب دارد یا نه، باید Δ را تشکیل دهیم.

$$(1-m)x^2 + mx - m = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(1-m)(-m) = m^2 + 4m - 4m^2 = -3m^2 + 4m$$

اگر $m = 2$ باشد، $\Delta = -4$ می‌شود که معادله جواب ندارد.

ب) $x^2 + mx - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(1)(-2) = m^2 + 8 > 0$

چون به ازای هر m ، $\Delta > 0$ است پس این معادله به ازای هر مقدار m همواره جواب دارد.

۲- مقدار m را چنان بیابید که معادله درجه دوم $2x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد.

پاسخ: معادله وقتی ریشه مضاعف دارد که $\Delta = 0$ باشد.

$$2x^2 - 3x + 2m - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(2m - 1) = 9 - 8(2m - 1)$$

$$= 9 - 16m + 8 = 17 - 16m \xrightarrow{\Delta=0} 17 - 16m = 0 \Rightarrow 16m = 17 \Rightarrow m = \frac{17}{16}$$

روابط بین ریشه‌ها

جمع و ضرب دو ریشه



جمع دو ریشه: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند.

ضرب دو ریشه: $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$





علامت ریشه‌ها



روش

تعیین علامت ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$

گام ۱: محاسبه Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 0$$

$$\Delta > 0$$

$$\frac{c}{a} > 0$$

ریشه‌ها هم‌علامت

$$\frac{c}{a} < 0$$

ریشه‌ها مختلف‌العلامت

$$\frac{c}{a} > 0$$

ریشه‌ها هم‌علامت

گام ۲: محاسبه $\frac{c}{a}$

$$\frac{-b}{a} < 0$$

ریشه مضاعف منفی

$$\frac{-b}{a} > 0$$

ریشه مضاعف مثبت

$$\frac{-b}{a} < 0$$

ریشه بزرگ منفی

$$\frac{-b}{a} > 0$$

ریشه بزرگ مثبت

$$\frac{-b}{a} < 0$$

دو ریشه منفی

$$\frac{-b}{a} > 0$$

دو ریشه مثبت

گام ۳: محاسبه $\frac{-b}{a}$

دو ریشه معکوس



در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ وقتی دو ریشه معکوس هم هستند که $\frac{c}{a} = 1$ یا $c = a$ یا حاصل ضرب ریشه‌ها برابر یک باشد. هر سه، یک معنی را می‌دهند. در سؤال هر کدام از این سه مورد را دیدید؛ یعنی دو ریشه معکوس یکدیگرند.

دو ریشه قرینه



در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هنگامی دو ریشه قرینه داریم که اولاً ضریب x یعنی $b = 0$ باشد، ثانیاً $\frac{c}{a}$ مقداری منفی باشد ($\frac{c}{a}$ منفی باشد یعنی c و a مختلف‌العلامت باشند).

توجه: هر دو شرط $b = 0$ و a و c مختلف‌العلامت باید برقرار باشند.

برو مدرسه

در معادله $mx^2 - 4x + 12 = 0$ مجموع ریشه‌ها، چند برابر حاصل ضرب آن‌ها است؟

پاسخ:

$$mx^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{m} = \frac{4}{m} \\ \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{12}{m} \end{cases}$$

برای اینکه ببینیم مجموع ریشه‌ها چند برابر حاصل ضرب آن‌ها است باید مجموع ریشه‌ها را بر حاصل ضرب آن‌ها تقسیم کنیم.

$$\frac{\text{مجموع ریشه‌ها}}{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}} = \frac{\frac{4}{m}}{\frac{12}{m}} \xrightarrow{\text{دور در دور}} \frac{4 \times m}{12 \times m} = \frac{1}{3}$$

برو کنکور



در معادله درجه دوم $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ اگر حاصل ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشه بزرگ‌تر کدام است؟

(فارج از کشور ۹۴)

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2/5 \quad (1)$$

پاسخ:

$$2x^2 + kx + 1 - k = 0 \xrightarrow{\text{حاصل ضرب دو ریشه برابر ۵ است}} \frac{c}{a} = 5 \xrightarrow{c=1-k} \frac{1-k}{2} = 5$$

$$\Rightarrow 1 - k = 10 \Rightarrow k = -9 \xrightarrow{\text{در معادله جایگذاری می‌کنیم}} 2x^2 + (-9)x + 1 - (-9) = 0$$





$$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \xrightarrow{\text{گام ۱}} \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{گام ۲}} \Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(2)(10) = 81 - 80 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}} x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{9 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2/5 \rightarrow \text{ریشه بزرگ تر} \\ x_2 = \frac{9-1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

گزینه د، صحیح است.

برو آزمون



در معادله $mx^2 + (-2m+1)x + (m+3) = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها با هم برابر است، m کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

$$\frac{m}{a}x^2 + \frac{-2m+1}{b}x + \frac{m+3}{c} = 0$$

پاسخ:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow -b = c$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{b(-2m+1)}{c(m+3)} \rightarrow -(-2m+1) = m+3 \Rightarrow 2m-1 = m+3 \Rightarrow 2m-m = 3+1 \Rightarrow m = 4$$

گزینه د، صحیح است.

برو آزمون



در مورد ریشه‌های معادله $a^2x^2 + 3ax - 4 = 0$ چه می‌توان گفت؟

(۲) دو ریشه منفی دارد.

(۱) دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.

(۴) دو ریشه مثبت دارد.

(۳) ریشه ندارد.

پاسخ: مراحل تعیین علامت ریشه‌های معادله را طی می‌کنیم:

گام ۱: محاسبه Δ :

$$a^2x^2 + 3ax - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3a)^2 - 4(a^2)(-4) = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2 \geq 0 \rightarrow \text{پس معادله ریشه دارد. (رد گزینه ۳)}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-4}{a^2} < 0 \rightarrow \text{معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.}$$

گام ۲: محاسبه $\frac{c}{a}$:

گزینه د، صحیح است.

برو کنکور



به‌ازای یک مقدار m ، ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

-۱/۵ (۱)

پاسخ:

$$2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها معکوس یکدیگرند.}} \xrightarrow{\text{یعنی } a=c} 2 = 2m + 6 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = -2$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} 2x^2 + 3(-2)x + 2(-2) + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم.}} \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع دو ریشه برابر}} \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

گزینه ۴، صحیح است.





به‌ازای کدام مقدار m ، معادله $mx^2 + (m+1)^2x - 1 = 0$ دو ریشهٔ حقیقی قرینه دارد؟

(۱) هر مقدار m (۲) هیچ مقدار m (۳) ۱ (۴) -۱

پاسخ: معادله وقتی دو ریشهٔ قرینه دارد که اولاً $b = 0$ ثانیاً a و c مختلف‌العلامت باشند.

$$\frac{m}{a}x^2 + \frac{(m+1)^2}{b}x - \frac{1}{c} = 0 \xrightarrow{\text{اولاً}} (m+1)^2 = 0 \Rightarrow m+1=0 \Rightarrow m=-1$$

بی دقت نباشیم هنوز جواب تمام نشده، باید ثانیاً را هم چک کنیم. (بعضی اوقات ۵ تا گام داریم که ممکنه در گام ۲ به جواب برسیم در این صورت دیگر لازم نیست گام‌های بعدی را طی کنیم؛ ولی بعضی اوقات ۵ تا شرط داریم، در این صورت باید همهٔ شرط‌ها را بررسی کنیم. وقتی می‌گوییم شرط باید همهٔ آن‌ها برقرار باشند.)

$$\frac{m}{a}x^2 + \frac{(m+1)^2}{b}x - \frac{1}{c} = 0 \xrightarrow{m=-1} (-1)x^2 + (-1+1)^2x - 1 = 0 \Rightarrow -x^2 - 1 = 0$$

شرط دوم این است که a و c مختلف‌العلامت باشند؛ ولی اینجا هر دو منفی هستند، پس این شرط برقرار نیست. یعنی دو ریشهٔ معادله هیچ‌وقت قرینه نمی‌شوند.

گزینهٔ ۲، صحیح است.

تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم

در این بخش با دو مدل سؤال روبه‌رو هستیم، یا باید یک مسئلهٔ توصیفی را به معادله تبدیل کنیم یا یک شکل را.

تبدیل مسئلهٔ توصیفی به معادله

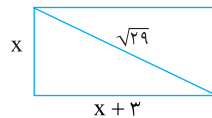
برخی از مسائلی که در درس پیش بررسی کردیم به معادلهٔ درجهٔ دوم رسیدند، می‌توانیم آن مسائل را در این بخش نیز در نظر بگیریم با این تفاوت که حالا بلد هستیم جواب آن‌ها را نیز به‌دست آوریم.

مثال: مساحت مستطیلی را به‌دست آورید که طول آن ۳ واحد از عرض آن بزرگ‌تر است و قطر آن $\sqrt{29}$ است.

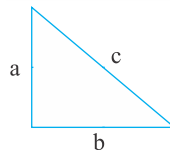
پاسخ: در اینجا، هم طول مستطیل و هم عرض آن مجهول است؛ ولی در درس پیش قرار گذاشتیم که سعی کنیم معادله را فقط با یک مجهول بنویسیم، عدد کوچک‌تر را x می‌نامیم و دیگری را برحسب x می‌نویسیم.

$x =$ عرض مستطیل

$x + 3 =$ عرض + ۳ = طول مستطیل



همیشه سعی کنید شکل بکشید تا راحت‌تر ببینید مسئله را. با دیدن شکل یاد قضیهٔ فیثاغورث می‌افتیم.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(\sqrt{29})^2 = x^2 + (x+3)^2 \Rightarrow 29 = x^2 + x^2 + 9 + 6x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 20 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 3x - 10 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}} (x-2)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

حال جواب $x=2$ را قبول کنیم یا $x=-5$ را؟ یادتان می‌آید در درس پیش گفتیم وقتی یک مسئلهٔ توصیفی را به معادله تبدیل می‌کنیم، در آخر باید درستی جواب را بررسی کنیم. x چون نشان‌دهندهٔ عرض مستطیل است پس نمی‌تواند منفی باشد. $x=2$ قابل قبول است.



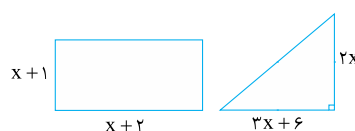
بی دقت نباشیم با به‌دست آوردن x ، جواب تمام نمی‌شود، سؤال مساحت مستطیل را خواسته است.

مساحت مستطیل = عرض \times طول = $5 \times 2 = 10$

تبدیل شکل به معادله

مثال: مساحت مثلث و مستطیل در شکل مقابل مساوی‌اند، طول و عرض مستطیل چقدر است؟

پاسخ: مساحت هر کدام از شکل‌ها را به‌دست می‌آوریم و برابر هم قرار می‌دهیم.



$$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1) \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} \text{مساحت مستطیل} = \text{عرض} \times \text{طول}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} (\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) = \frac{1}{2} ((3x+6) \times (2x)) = (3x+6)(x) = 3x^2 + 6x$$

اشتباه محاسباتی نکنیم وقتی داخل پرانتز علامت ضرب هست، عدد پشت پرانتز فقط در یکی از آن‌ها ضرب می‌شود ولی اگر داخل پرانتز علامت جمع یا تفریق باشد، عدد پشت پرانتز در هر دو آن‌ها ضرب می‌شود.
 حال مساحت‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$x^2 + 3x + 2 = 3x^2 + 6x \xrightarrow{\text{استاندارد}} x^2 + 3x + 2 - 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow -2x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\times(-1)}$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{شبه اتحاد جمله مشترک است، در ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم.}} \frac{2 \times (2x^2 + 3x - 2)}{2} = 0 \Rightarrow 2 \times (2x^2 + 3x - 2) = (2x)^2 + 3(2x) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+4)(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \\ 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

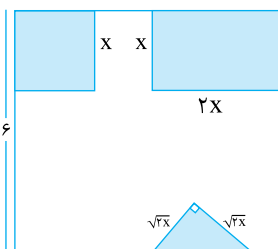
جواب $x = -2$ قابل قبول نیست؛ زیرا باعث می‌شود عرض مستطیل منفی شود و طول آن صفر شود. $x = \frac{1}{2}$ قابل قبول است.

$$\text{عرض مستطیل} = x + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad \text{طول مستطیل} = x + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

پرو آزمون



از مربعی به ضلع ۶cm سه شکل زیر بریده شده است. مساحت باقیمانده ۲۴cm^۲ است. x کدام است؟



۱ (۲)

 ۱) $\sqrt{2}$

 ۴) $\sqrt{5}$

 ۳) $\sqrt{3}$

پاسخ: مساحت تک‌تک شکل‌ها را محاسبه می‌کنیم و از مساحت کل کم می‌کنیم.

$$x^2 = (\text{طول ضلع})^2 = \text{مساحت مربع}$$

$$2x^2 = \text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت مستطیل}$$

$$x^2 = \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} (\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}) = \frac{1}{2} (\sqrt{2}x \times \sqrt{2}x) = \frac{1}{2} (2x^2) = x^2$$

$$4x^2 = \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مستطیل} + \text{مساحت مربع} = x^2 + 2x^2 + x^2$$

حال این مقدار را از مساحت مربع بزرگ کم می‌کنیم.

$$36 = \text{مساحت مربع بزرگ} = (\text{طول ضلع})^2 = 6^2$$

$$36 - 4x^2 = \text{مساحت باقیمانده} \Rightarrow \text{مساحت مربع بزرگ} - \text{مجموع مساحت شکل‌های بریده‌شده} = 36 - 4x^2$$

$$\frac{\text{طبق فرض مساحت باقیمانده برابر ۲۴ است}}{24 = 36 - 4x^2} \Rightarrow 4x^2 = 36 - 24 \Rightarrow 4x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

چون x طول ضلع است پس نمی‌تواند منفی باشد، $x = \sqrt{3}$ قابل قبول است.

گزینه ۳، صحیح است.

حل مسائل کاربردی و اقتصادی

مسئله اول: فرض کنید در یک مسئله اقتصادی x مقدار یا تعداد کالا باشد، در این صورت رابطه‌های زیر را داریم:

- رابطه هزینه $C(x)$: هزینه تولید x واحد کالا
- رابطه درآمد $R(x)$: درآمد حاصل از فروش x واحد کالا
- رابطه سود $P(x)$: سود حاصل از فروش x واحد کالا



ارتباط این سه رابطه به شکل مقابل است:
نکته: اگر $P(x)$ عدد مثبتی به دست آید؛ یعنی واحد اقتصادی سود کرده است و اگر عددی منفی شود؛ یعنی ضرر کرده است.
مسئله دوم: نقطه سربه سر در مسائل اقتصادی؛ یعنی میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی که در آن میزان هزینه‌ها با میزان درآمد برابر است؛ یعنی $P(x) = 0$ که در این صورت بنگاه اقتصادی نه سود کرده است و نه ضرر.

روش

به دست آوردن نقطه سربه سر

اگر در سؤالات از شما نقطه سربه سر را خواستند، $P(x)$ را برابر صفر قرار دهید و ریشه‌های معادله $P(x) = 0$ را به دست آورید. جواب‌های این معادله همان نقاط سربه سر هستند که باعث می‌شوند سود برابر صفر باشد؛ یعنی درآمد و هزینه برابر شود.

$$P(x) = R(x) - C(x) = 0 \Rightarrow R(x) = C(x)$$

مثال: اگر در یک واحد اقتصادی، x نشان‌دهنده تعداد کالا باشد و رابطه $R(x) = 3x^2 - \frac{9}{2}x - 1$ نشان‌دهنده درآمد و $C(x) = 2x^2 + \frac{13}{4}x - 19$ رابطه هزینه باشد، به ازای تولید چه تعداد کالا این واحد اقتصادی نه سود می‌کند و نه ضرر؟

پاسخ: ابتدا باید رابطه سود را به دست آوریم:

$$\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x) = (3x^2 - \frac{9}{2}x - 1) - (2x^2 + \frac{13}{4}x - 19) = 3x^2 - \frac{9}{2}x - 1 - 2x^2 - \frac{13}{4}x + 19 = x^2 - 11x + 18$$

سؤال گفته است واحد اقتصادی نه سود کند و نه ضرر؛ یعنی در واقع همان نقطه سربه سر را می‌خواهد که از حل معادله $P(x) = 0$ به دست می‌آید.

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \xrightarrow{\text{حل با استفاده از اتحاد جمله مشترک}} (x-9)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-9=0 \Rightarrow x=9 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

پس این واحد اقتصادی به ازای تولید ۲ واحد کالا و ۹ واحد کالا نه سود می‌کند و نه زیان.



اگر یک شرکت x واحد کالا تولید کند و هر کدام را ۳ تومان بفروشد و معادله هزینه آن شرکت به صورت $C(x) = \frac{1}{4}x^2 - 7x - 100$ باشد. معادله سود را بنویسید. اگر این شرکت ۵ واحد کالا تولید کند سود شرکت چقدر خواهد بود؟

پاسخ: درآمد هر شرکت میزان فروش آن است. این شرکت x کالا تولید کرده و هر کدام را ۳ تومان فروخته است، پس معادله درآمد آن به صورت $R(x) = 3x$ است. حال معادله سود را می‌نویسیم.

$$P(x) = R(x) - C(x) = (3x) - (\frac{1}{4}x^2 - 7x - 100) = -\frac{1}{4}x^2 + 10x + 100$$

حال می‌گویید اگر ۵ کالا تولید کند، چقدر سود خواهد کرد. در معادله سود باید به جای x ، عدد ۵ را قرار دهیم.

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 10x + 100 \xrightarrow{x=5} -\frac{1}{4}(5)^2 + 10(5) + 100 = -\frac{25}{4} + 50 + 100 = -\frac{25}{4} + 150 = \frac{-25 + 600}{4} = \frac{575}{4} = 143\frac{3}{4}$$

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن ریشه‌ها

اگر x_1 و x_2 دو ریشه معادله باشند، معادله را به شکل $(x-x_1)(x-x_2) = 0$ تشکیل می‌دهیم.

یا اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را داشته باشیم معادله را به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ تشکیل می‌دهیم که $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ و $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ است.

اگر گفتند معادله‌ای بنویسید که x_1 ریشه مضاعف آن باشد، معادله را به شکل $(x-x_1)^2 = 0$ تشکیل می‌دهیم.

مثال: معادله‌ای بنویسید که مجموع ریشه‌های آن ۸ و ضرب ریشه‌هایش ۴ باشد.

پاسخ: $x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{\substack{S=8 \\ P=4}} x^2 - 8x + 4 = 0$

مثال: معادله‌ای بنویسید که $x = -3$ ریشه مضاعف آن باشد.

پاسخ: $(x - (-3))^2 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 0$ یا $x^2 + 6x + 9 = 0$



برو مدرسه

معادله درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۴ و -۳ باشد.

پاسخ: روش اول: معادله به شکل روبه‌رو خواهد بود:

می‌توانیم آن را به شکل استاندارد هم تبدیل کنیم.

روش دوم:

$$(x-4)(x-(-3))=0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+3)=0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} x^2 - x - 12 = 0$$

$$S = x_1 + x_2 = 4 + (-3) = 1, P = x_1 x_2 = 4 \times (-3) = -12$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{P=-12, S=1} x^2 - x - 12 = 0$$

برو آزمون

کدام معادله دارای جواب‌های $x = -10$ و $x = -3$ است؟

$$x^2 + 13x + 30 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0 \quad (۱)$$

پاسخ: معادله را به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ تشکیل می‌دهیم.

$$S = x_1 + x_2 = (-10) + (-3) = -13$$

$$\Rightarrow x^2 - (-13)x + 30 = 0 \Rightarrow x^2 + 13x + 30 = 0$$

$$P = x_1 \times x_2 = (-10) \times (-3) = 30$$

گزینهٔ ۴، صحیح است.



فصل اول - درس ۲

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۳. ریشه‌های معادله $x^2 - 2 = (x+1)(x-2)$ کدام‌اند؟

۴ و ۲

۲ و ۱

۱ و ۰

۱ و ۲

۲۴. ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ متعلق به کدام مجموعه است؟

N

Q'

Q

Z

۲۵. ریشهٔ بزرگ‌تر معادله $3x^2 - 7x - 6 = 0$ کدام است؟

۲/۳

-۲/۳

-۳

۳

۲۶. ریشهٔ کوچک‌تر معادله $9(x-2)^2 - 16 = 0$ کدام است؟

۶

۱/۳

۲

۲/۳

۲۷. ریشه‌های معادله $7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5$ کدام‌اند؟

۱/۲ و -۱/۲

۱ و ۱/۲

۱ و -۱/۲

-۱ و ۱/۲

۲۸. ریشهٔ بزرگ‌تر معادله $6x^2 - 29x + 35 = 0$ کدام است؟

۳/۵

۷/۳

۲/۵

۲

۲۹. به‌ازای کدام مقدار a عبارت $(a-1)(a+2)$ برابر ۱۸ است؟

۲ و -۱

-۲ و ۱

۴ و -۵

-۴ و ۵

۳۲

مجموعه
کتاب‌های
تستیک



(سراسری ۸۳)

۳۰. به‌ازای کدام مقدار m معادله $4x^2 + 2mx - m^2x^2 + 1 = 0$ یک معادله درجه دوم نیست؟

- ۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۲ و -۲ ۴) هیچ مقدار m

۳۱. اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $5x^2 - 3x + k = 0$ باشد ریشه دیگر کدام است؟

- ۱) $-0/4$ ۲) $-0/3$ ۳) $0/3$ ۴) $0/4$

۳۲. یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 + (m-2)x + m = 0$ برابر یک است. ریشه دیگر کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{-1}{6}$ ۴) $\frac{-1}{3}$

۳۳. اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 3\sqrt{2}x + k = 0$ برابر $-\sqrt{2}$ باشد، مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- ۱) $-3\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $-2\sqrt{2}$

۳۴. یکی از جواب‌های معادله $(m-1)x^2 - 7x + 2m = 0$ برابر $x = 2$ است. حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

۳۵. مجموع ضرایب معادله درجه دوم استاندارد صفر است، ریشه‌های آن کدام است؟

- ۱) $\frac{-c}{a}$ و ۱ ۲) -۱ و $\frac{c}{a}$ ۳) ۱ و $\frac{c}{a}$ ۴) -۱ و $\frac{-c}{a}$

۳۶. در معادله درجه دوم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد، ریشه‌ها به چه صورتی هستند؟

- ۱) $\frac{-c}{a}$ و ۱ ۲) -۱ و $\frac{c}{a}$ ۳) ۱ و $\frac{c}{a}$ ۴) -۱ و $\frac{-c}{a}$

۳۷. در معادله درجه دوم $x^2 + bx + c = 0$ با شرط $b = c + 1$ یکی از ریشه‌های آن کدام است؟

- ۱) $-c$ ۲) $2b - 1$ ۳) $\frac{b}{2}$ ۴) c

۳۸. در کدام گزینه ریشه مضاعف وجود دارد؟

- ۱) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ۲) $5x^2 - 8x + 3 = 0$ ۳) $2x^2 + x - 2 = 0$ ۴) $-5x^2 + 10x - 5 = 0$

۳۹. به‌ازای کدام مقدار a معادله $x^2 + ax + 1 = 0$ ریشه مضاعف دارد؟

- ۱) $a = -2$ و $a = 2$ ۲) $a > 2$ یا $a < -2$ ۳) $a \geq 2$ و $a \leq -2$ ۴) $-2 < a < 2$

۴۰. اگر ریشه‌های معادله $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0$ با هم برابر باشند، مقدار a کدام است؟

- ۱) -۷ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) $\frac{-1}{2}$

۴۱. اگر جواب‌های معادله $mx^2 - mx + 1 = 0$ با هم برابر باشند آن‌گاه ریشه بزرگ‌تر معادله $(m-2)x^2 - (m+1)x + 3 = 0$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) -۱

(سراسری ۹۱)

۴۲. معادله درجه دوم $x(2x-5) = a$ به‌ازای یک مقدار a ریشه مضاعف دارد. مقدار ریشه مضاعف کدام است؟

- ۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

(فارج از کشور، ۸۶)

۴۳. اگر در معادله درجه دوم $ax^2 - 12x + 9 = 0$ تفاضل دو جواب برابر صفر باشد، یک ریشه معادله کدام است؟

- ۱) $\frac{-3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۴۴. اگر معادله $2x(4x-3) = 13$ را به روش مربع کامل به شکل $(x-a)^2 = b$ بازنویسی کنیم، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱) ۱۲ ۲) $\frac{113}{9}$ ۳) ۱۴ ۴) $\frac{130}{9}$

۴۵. در حل معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ به روش مربع کامل از کدام عدد جذر گرفته می‌شود؟

- ۱) $\frac{9}{4}$ ۲) ۹ ۳) $\frac{17}{4}$ ۴) ۱۱

۴۶. در حل معادله $2x^2 - 12x + 7 = 0$ به روش مربع کامل، معادله را به فرم $2(x+b)^2 + c = 0$ می‌نویسیم، حاصل $b+c$ کدام است؟

- ۱) ۱۴ ۲) -۱۴ ۳) ۷ ۴) -۷

۴۷. در معادله $(3x+2)^2 = (2x-1)^2$ مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- ۱) $-\frac{16}{5}$ ۲) $-\frac{14}{5}$ ۳) $-\frac{12}{5}$ ۴) $-\frac{8}{5}$



۴۸. در معادله $x(6x+5)=4$ مجموع و ضرب ریشه‌ها به ترتیب کدام است؟

- ۱ $\frac{5}{6}$ و $-\frac{4}{6}$ ۲ $\frac{5}{6}$ و $\frac{4}{6}$ ۳ $-\frac{5}{6}$ و $\frac{4}{6}$ ۴ $-\frac{5}{6}$ و $-\frac{4}{6}$

۴۹. در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بزرگ‌تر باشد، m کدام است؟

- ۱ $\frac{59}{5}$ ۲ $\frac{63}{5}$ ۳ $\frac{59}{4}$ ۴ $\frac{63}{4}$

۵۰. به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ معکوس هم هستند؟

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ ۲ ۴ -۲

۵۱. اگر جواب‌های معادله $(m-1)x^2 + \sqrt{mx} + 2m - 3 = 0$ معکوس یکدیگر باشند، مقدار m کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۱ ۳ ۴ ۴ ۳

۵۲. اگر جواب‌های معادله $2x^2 - 3x + (b+2) = 0$ معکوس و قرینه هم باشند حاصل b کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ ۳ ۴ -۴

۵۳. اگر معادله درجه دوم $x^2 + 5x + 2m = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد، مقادیر m کدام است؟

- ۱ $m > -\frac{25}{8}$ ۲ $m < \frac{25}{8}$ ۳ $m \geq \frac{25}{8}$ ۴ $m > \frac{25}{8}$

۵۴. اگر معادله درجه دوم $2x^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه مضاعف $x=4$ باشد، مقدار $b+c$ کدام است؟

- ۱ ۱۶ ۲ ۴ ۳ ۸ ۴ ۳۲

۵۵. مجموع مربعات ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 1 = 0$ کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{4}$ ۲ $-\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{5}{4}$ ۴ $-\frac{5}{4}$

۵۶. مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است مجموع این دو عدد کدام است؟

- ۱ ۴۱ ۲ ۴۳ ۳ ۴۵ ۴ ۴۷

۵۷. دو برابر مقدار مثبتی از ثلث مربع آن، ۹ واحد کمتر است، این مقدار کدام است؟

- ۱ ۹ ۲ ۱۲ ۳ ۱۵ ۴ ۱۸

۵۸. طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۵۸۸ باشد، محیط آن کدام است؟

- ۱ ۱۲۰ ۲ ۱۱۶ ۳ ۱۱۲ ۴ ۱۰۸

۵۹. در شکل مقابل، محیط مثلث کدام است؟

- ۱ ۲۹ ۲ ۳۰ ۳ ۲۷ ۴ ۳۰

- ۱ ۲۸ ۲ ۲۷ ۳ ۲۷ ۴ ۲۷

۶۰. اگر مساحت قسمت رنگی برابر ۱۵۰ سانتی‌متر مربع باشد، x کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ ۸ ۳ ۱۲ ۴ ۱۲

- ۱ ۱۰ ۲ ۱۰ ۳ ۱۲ ۴ ۱۲

۶۱. محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۵۴ متر و ۱۸۰ متر مربع است طول آن چقدر از عرض آن بیشتر است؟

- ۱ ۵ ۲ ۱۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۶۲. ۴ برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن عدد، ۹ واحد کمتر است، معکوس آن عدد کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{4}{3}$ ۴ $\frac{5}{6}$

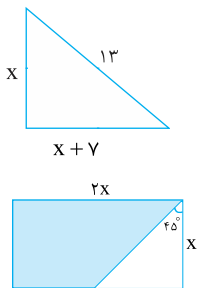
۶۳. به ازای کدام مقدار m ، معادله $x^2 - (m-1)x - m = 0$ دو ریشه حقیقی قرینه دارد؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ -۱ ۴ ۲

۶۴. اگر معادله $(m+1)x^2 + mx^2 - 3x + m - 1 = 0$ یک معادله درجه دوم باشد، مجموع جواب‌های معادله کدام است؟

- ۱ -۳ ۲ -۲ ۳ -۱ ۴ ۱

(شارح از کشور ۹۰)



(سراسری ۷۵)





۶۵. معادله درجه دومی که $x = -3$ و $x = 2$ جواب‌های آن باشند، کدام است؟

$x^2 + 5x + 6 = 0$ (۴) $x^2 + x - 6 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (۲) $x^2 - x - 6 = 0$ (۱)

۶۶. معادله درجه دومی که جواب‌های آن قرینه جواب‌های معادله $x^2 - 3x - 4 = 0$ باشد، کدام است؟

$x^2 + 3x - 4 = 0$ (۴) $x^2 - 3x + 4 = 0$ (۳) $x^2 + 3x + 4 = 0$ (۲) $-x^2 - 3x - 4 = 0$ (۱)

۶۷. به‌ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $3x^2 + ax - 3 = 0$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

فقط $a > 6$ (۴) فقط $a = \pm 6$ (۳) هیچ مقدار a (۲) هر مقدار a (۱)

۶۸. در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 4 = 0$ به‌ازای یک مقدار a مجموع دو ریشه حقیقی معادله $\frac{-9}{2}$ است. ریشه بزرگ‌تر کدام است؟ (فارج از کشور ۹۰)

$\frac{2}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{-1}{2}$ (۲) $\frac{-3}{2}$ (۱)

۶۹. تعداد جواب‌های حقیقی معادله $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ کدام است؟ (فارج از کشور ۹۲)

۴ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) صفر (۱)

۷۰. در معادله درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ اگر مجموع دو ریشه حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه مثبت آن کدام است؟ (سراسری ۹۴)

$\frac{4}{3}$ (۴) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۷۱. جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ است؟ (سراسری ۹۱)

$4x^2 - 2x + 1 = 0$ (۴) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ (۲) $x^2 + 2x - 1 = 0$ (۱)

۷۲. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + x + 42 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

$\frac{1}{42}$ (۴) $\frac{-1}{42}$ (۳) $\frac{1}{32}$ (۲) $\frac{-1}{32}$ (۱)



تاسخنامہ



$$(n-2) = 0 \Rightarrow n = 2 \rightarrow (n-2)x^2 + mx - n + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{n=2} 0 + mx - 2 + 1 = 0 \Rightarrow mx - 1 = 0$$

وقتی می‌گویید $x = 2$ جواب معادله است؛ یعنی اگر به جای x بگذاریم معادله برقرار است.

$$mx - 1 = 0 \xrightarrow{x=2} m(2) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2m - 1 = 0 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۲۳. گزینه ۴

$$(x+1)(x-2) = x-2 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} x^2 - x - 2 = x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

۲۴. گزینه ۳

$$x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{a=1, b=-1, c=-1}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$$

۲۵. گزینه ۱

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \xrightarrow{a=3, b=-7, c=-6}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(-6) = 49 + 72 = 121$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 11}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7+11}{6} = \frac{18}{6} = 3 \\ x = \frac{7-11}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

۲۶. گزینه ۱

$$9(x-2)^2 - 16 = 0 \Rightarrow 9(x-2)^2 = 16$$

$$(x-2)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow x-2 = \pm \frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} x-2 = +\frac{4}{3} \\ x-2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \\ x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

۲۷. گزینه ۴

$$7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 3x^2 + 6x - 6x + 4 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(2x+1) = 0$$

$$\begin{cases} 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

۲۸. گزینه ۲

$$6x^2 - 29x + 35 = 0 \xrightarrow{a=6, b=-29, c=35}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-29)^2 - 4(6)(35) = 841 - 840 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-29) \pm \sqrt{1}}{2(6)} = \frac{29 \pm 1}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{29+1}{12} = \frac{30}{12} = 2/5 \\ x = \frac{29-1}{12} = \frac{28}{12} = 2/3 \end{cases}$$

۱۶. گزینه ۴ دو طرف تساوی را در عدد ۱۵ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$15 \times \left(\frac{3-5x}{5} - \frac{2x-1}{3} \right) = 15 \times \left(\frac{x+1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow 15 \times \frac{3-5x}{5} - 15 \times \frac{2x-1}{3} = 15 \times \frac{x+1}{3}$$

$$\Rightarrow 3(3-5x) - 5(2x-1) = 5(x+1)$$

$$\Rightarrow 9 - 15x - 10x + 5 = 5x + 5$$

$$\Rightarrow -25x + 14 = 5x + 5$$

$$\Rightarrow -25x - 5x = 5 - 14 \Rightarrow -30x = -9 \Rightarrow x = \frac{-9}{-30} = \frac{3}{10} = 0/3$$

یا بدون حل کردن می‌توانیم تک‌تک گزینه‌ها را در معادله قرار دهیم و ببینیم کدام جواب است.

۱۷. گزینه ۱ درسته ظاهر معادله، درجه اول نیست؛ ولی با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای تبدیل به معادله درجه اول می‌شود.

یادآوری: اتحاد مربع دوجمله‌ای:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

طرفین تساوی را با اتحاد مربع دوجمله‌ای باز می‌کنیم:

$$(x+3)^2 = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + 3^2 + 2(x)(3) = x^2 + 2^2 - 2(x)(2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 9 + 6x = x^2 + 4 - 4x \Rightarrow 6x + 4x = 4 - 9$$

$$\Rightarrow 10x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{10} = -0/5$$

۱۸. گزینه ۳ تمام عبارتهای موجود در کفه‌ها را با هم جمع می‌کنیم و دو کفه را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$1 + 3 + x + x = 4 + x + x + x \Rightarrow 4 + 2x = 4 + 3x$$

کفه چپ کفه راست

$$\Rightarrow 2x - 3x = 4 - 4 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

۱۹. گزینه ۲ در معادله درجه اول توان تمام x ها باید یک باشد. بررسی گزینه‌ها:

- ۱) $\frac{x}{x} - 2 = 0 \Rightarrow 3x^{-1} - 2 = 0$ ✗
- ۲) $\frac{x}{4} + \frac{5x}{3} = 12 \Rightarrow \frac{1}{4}x + \frac{5}{3}x = 12$ ✓
- ۳) $x + \frac{2}{x} = 1 \Rightarrow x + 2x^{-1} = 1$ ✗
- ۴) $3x^2 - 1 = 0$ ✗

۲۰. گزینه ۱ اگر تعداد خودکارها، x باشد، آنگاه داریم:

$$\underbrace{x \times 1000}_{\text{نصف پول کیان}} + \underbrace{2 \times 2250}_{\text{دوتا مداد ۲۲۵۰ تومانی}} = \underbrace{15000}_{\text{چندتا خودکار ۱۰۰۰ تومانی}}$$

$$\Rightarrow 1000x + 4500 = 7500 \Rightarrow 1000x = 7500 - 4500$$

$$\Rightarrow 1000x = 3000 \Rightarrow x = \frac{3000}{1000} = 3$$

تعداد خودکارها ۳

۲۱. گزینه ۴ برای محاسبه محیط باید دور تا دور شکل را با هم جمع بزنیم:

محیط = $x + x + 2x + x + 2x + x + 2x + x + 2x + x$

$$\xrightarrow{\text{محیط}=28} 28 = 14x \Rightarrow x = \frac{28}{14} = 2$$

۲۲. گزینه ۳ چون گفته است معادله درجه اول است پس نباید توان دوم داشته باشد، پس ضریب x^2 برابر صفر است.

۳۲. گزینه ۳ $(m-1)x^2 - 7x + 2m = 0$

$\xrightarrow{x=2} (m-1)(2)^2 - 7(2) + 2m = 0$

$\Rightarrow 4(m-1) - 14 + 2m = 0 \Rightarrow 4m - 4 - 14 + 2m = 0$

$\Rightarrow 6m - 18 = 0 \Rightarrow 6m = 18 \Rightarrow m = 3$

در معادله جایگذاری می‌کنیم $\xrightarrow{a=2, b=-7, c=6} 2x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(6) = 49 - 48 = 1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{7 \pm 1}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7+1}{4} = 2 \\ x = \frac{7-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{حاصلضرب ریشه‌ها}} 2 \times \frac{3}{2} = 3$

۳۳. گزینه ۳

۳۴. گزینه ۴

۳۷. گزینه ۱ در معادله $x^2 + bx + c = 0$ چون $a = 1$ است پس $a + c = b$ یعنی $1 + c = b$ پس جواب‌های معادله -1 و $-\frac{c}{a}$ است و چون $a = 1$ پس ریشه‌ها -1 و $-c$ است.

۳۸. گزینه ۴ کافی است Δ ها را محاسبه کنیم.

۱) $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8 \times$

۲) $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(5)(3) = 64 - 60 = 4 \times$

۳) $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-2) = 1 + 16 = 17 \times$

۴) $\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4(-5)(-5) = 100 - 100 = 0 \checkmark$

۳۹. گزینه ۱ $\frac{1}{a}x^2 + \frac{a}{b}x + \frac{1}{c} = 0$ باید $\Delta = 0$ باشد.

$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$

۴۰. گزینه ۱ ریشه‌ها برابر باشند: یعنی ریشه مضاعف، پس $\Delta = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{a=1, b=-(3a+1)}{c=2a^2+2} \rightarrow$

$\Delta = [-(3a+1)]^2 - 4(1)(2a^2+2) = 0$

$\Rightarrow 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + 6a - 7 = 0$

جمع ضرایب صفر $\xrightarrow{a=1} a = \frac{c}{a} = \frac{-7}{1} = -7$

۴۱. گزینه ۱ ریشه‌ها برابر؛ یعنی ریشه مضاعف: یعنی $\Delta = 0$

$\frac{m}{a}x^2 - \frac{m}{b}x + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow (-m)^2 - 4m = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0$

از فاکتور می‌گیریم $\rightarrow m(m-4) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \times \text{چون ضریب } x^2 \text{ صفر می‌شود.} \\ m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \checkmark \end{cases}$

سؤال ریشه بزرگ‌تر معادله $(m-2)x^2 - (m+1)x + 3 = 0$ را می‌خواهد، به‌جای

۲۹. گزینه ۲ $(a-1)(a+2) = 18 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 18$

$\Rightarrow a^2 + a - 2 - 18 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 20 = 0$

اتحاد جمله مشترک $\rightarrow (a-4)(a+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-4=0 \Rightarrow a=4 \\ a+5=0 \Rightarrow a=-5 \end{cases}$

۳۰. گزینه ۳ برای اینکه معادله درجه دوم نباشد باید ضریب x^2 برابر صفر شود.

معادله را مرتب می‌کنیم: $4x^2 - m^2x^2 + 2mx + 1 = 0$

$\Rightarrow (4-m^2)x^2 + 2mx + 1 = 0$

ضریب x^2 برابر صفر است. $\rightarrow 4 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$

۳۱. گزینه ۱ چون $x = 1$ پاسخ معادله است پس در آن صدق می‌کند: یعنی می‌توانیم در معادله به جای x عدد ۱ را قرار دهیم تا k به‌دست آید.

$5x^2 - 3x + k = 0 \xrightarrow{x=1} 5(1)^2 - 3(1) + k = 0$

$\Rightarrow 5 - 3 + k = 0 \Rightarrow 2 + k = 0 \Rightarrow k = -2$

حال با به‌دست آمدن k می‌توان معادله را حل کرد.

$5x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow a+b+c = 5 - 3 - 2 = 0$

چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است پس یکی از جواب‌ها $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$ است.

۳۲. گزینه ۳ مانند سؤال قبل، چون می‌دانیم $x = 1$ جواب معادله است پس در معادله جایگذاری می‌کنیم تا m را بیابیم و به کمک آن ریشه دیگر را پیدا کنیم.

$3x^2 + (m-2)x + m = 0$

$\xrightarrow{x=1} 3(1)^2 + (m-2)(1) + m = 0$

$\Rightarrow 3 + m - 2 + m = 0 \Rightarrow 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

m را در معادله جایگذاری می‌کنیم: $3x^2 + (-\frac{1}{2}-2)x - \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + (-\frac{5}{2})x - \frac{1}{2} = 0 \xrightarrow{\times 2} 6x^2 - 5x - 1 = 0$

$\Rightarrow a+b+c = 6 - 5 - 1 = 0$

چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است پس یکی از جواب‌ها $x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a} = \frac{-1}{6}$ است.

۳۳. گزینه ۱ مانند سؤال قبل ابتدا به‌جای x قرار می‌دهیم تا k به‌دست آید سپس معادله را حل می‌کنیم.

$(-\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2}(-\sqrt{2}) + k = 0$

$\Rightarrow 2 - 6 + k = 0 \Rightarrow -4 + k = 0 \Rightarrow k = 4$

در معادله جایگذاری می‌کنیم $\rightarrow x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

$\xrightarrow{a=1, b=3\sqrt{2}, c=4} \Delta = b^2 - 4ac$

$= (3\sqrt{2})^2 - 4(1)(4) = 18 - 16 = 2$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \\ x = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} -\sqrt{2} + (-2\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$

m. ۴ قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم.

$$-m=4 \rightarrow (4-2)x^2 - (4+1)x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \text{جمع ضرایب صفر}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \checkmark \end{cases}$$

۴۲. گزینه ۳ ابتدا باید a را بیابیم ولی دقت کنید که سؤال ریشه مضاعف را می‌خواهد.

$$x(2x-5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(-a) = 0 \Rightarrow 25 + 8a = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-25}{8}$$

معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$x(2x-5) = \frac{-25}{8}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + \frac{25}{8} = 0 \quad \times 8 \rightarrow 16x^2 - 40x + 25 = 0$$

$$\Rightarrow (4x-5)^2 = 0 \Rightarrow 4x-5 = 0 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

۴۳. گزینه ۳ تفاضل دو ریشه برابر صفر؛ یعنی ریشه‌ها برابرند؛ یعنی ریشه مضاعف؛ یعنی $\Delta = 0$

$$ax^2 - 12x + 9 = 0 \quad \begin{matrix} a=a, b=-12 \\ c=9 \end{matrix} \rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(a)(9) = 0$$

$$\Rightarrow 144 - 36a = 0 \Rightarrow -36a = -144 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-3)^2 = 0 \Rightarrow 2x-3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

۴۴. گزینه ۲ معادله را مربع کامل می‌کنیم.

$$2x(4x-3) = 13 \Rightarrow 8x^2 - 6x = 13$$

$$\div 8 \rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{13}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۱}} \checkmark$$

رها یک طرف اعداد یک طرف

$$\xrightarrow{\text{گام ۲}} \checkmark$$

ضرب x^2 یک باشد

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}}$$

مربع ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم

$$x^2 - \frac{3}{4}x + \left(\frac{-3}{8}\right)^2 = \frac{13}{8} + \left(\frac{-3}{8}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = \frac{104+9}{64} = \frac{113}{64}$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۴}}$$

استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$(x - \frac{3}{8})^2 = \frac{113}{64} \quad (x-a)^2 = b$$

$$a = \frac{3}{8}, b = \frac{113}{64} \Rightarrow \frac{b}{a^2} = \frac{\frac{113}{64}}{\frac{9}{64}} = \frac{113}{9}$$

۴۵. گزینه ۳

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \xrightarrow{\text{گام ۱}}$$

رها یک طرف اعداد یک طرف

$$x^2 + 3x = 2 \quad \xrightarrow{\text{گام ۲}} \checkmark$$

ضرب x^2 یک باشد

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}}$$

مربع نصف ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 2 + \frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۴}}$$

استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$\xrightarrow{\text{گام ۵}}$$

ریشه دوم می‌گیریم

 پس از $\frac{17}{4}$ جذر گرفته می‌شود.

۴۶. گزینه ۲

$$2x^2 - 12x + 7 = 0 \quad \xrightarrow{\text{گام ۱}}$$

رها یک طرف اعداد یک طرف

$$2x^2 - 12x = -7 \quad \xrightarrow{\text{گام ۲}}$$

ضرب x^2 یک باشد

$$\xrightarrow{\text{گام ۳}}$$

مربع نصف ضریب x را به دو طرف اضافه می‌کنیم

$$x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = \frac{-7}{2} + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = \frac{-7}{2} + 9$$

$$\xrightarrow{\text{گام ۴}}$$

استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$(x-3)^2 = \frac{11}{2} \Rightarrow 2(x-3)^2 = 11 \Rightarrow 2(x-3)^2 - 11 = 0$$

$$\xrightarrow{2(x+b)^2 + c = 0} b = -3, c = -11$$

$$\xrightarrow{b+c} b+c = -3-11 = -14$$

۴۷. گزینه ۱ ابتدا پراترها را ساده می‌کنیم.

$$(3x+2)^2 = (2x-1)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 12x + 4 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 12x + 4 - 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 16x + 3 = 0$$

$$\text{جمع ریشه‌ها} = s = \frac{-b}{a} = \frac{-16}{5}$$

۴۸. گزینه ۴

$$x(6x+5) = 4 \Rightarrow 6x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$\text{جمع ریشه‌ها} = S = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{6}$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = P = \frac{c}{a} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

۴۹. گزینه ۴ با توجه به اطلاعات سؤال، فقط از مجموع ریشه‌ها؛ یعنی $\frac{-b}{a}$ می‌توانیم استفاده کنیم چون فقط مقدار b و a مشخص است.

 اگر یک ریشه a باشد، ریشه دیگر $a+2$ است؛ چون یک ریشه از دیگری ۲ واحد بزرگ‌تر است.

$$\text{جمع ریشه‌ها} = S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-15)}{3} = 5$$

$$(a) + (a+2) = 5 \Rightarrow 2a+2 = 5 \Rightarrow 2a = 3$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}, \text{ ریشه دیگر, } \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{m}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{21}{4} \Rightarrow m = \frac{3 \times 21}{4} = \frac{63}{4}$$

۵۰. گزینه ۲ ریشه‌ها معکوس هستند؛ یعنی ضرب ریشه‌ها برابر ۱ است؛

$$\frac{c}{a} = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{4} = 1 \\ x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها $\rightarrow (1)^2 + (-\frac{1}{2})^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

روش دوم: می‌دانیم $P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2}$ و $S = \frac{-b}{a} = \frac{1}{2}$ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها باشند.

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \\ \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= s^2 - 2p = (\frac{1}{2})^2 - 2(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

۵۶. گزینه ۲ دو عدد صحیح متوالی: $x, x+1$

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 &= 925 \\ \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 &= 925 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 924 = 0 \\ \xrightarrow{\div 2} x^2 + x - 462 &= 0 \xrightarrow{\substack{a=1, b=1 \\ c=-462}} \Delta = (1)^2 - 4(1)(-462) \\ &= 1849 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1849} = 43 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 43}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{42}{2} = 21 \\ x = \frac{-44}{2} = -22 \end{cases}$$

$x = 21 \rightarrow \frac{x+1}{\text{عدد بعدی}} = 22 \rightarrow$ مجموع اعداد = $21 + 22 = 43$

$x = -22 \rightarrow \frac{\text{عدد بعدی}}{x+1} = -21 \rightarrow$ مجموع اعداد = $-22 + (-21) = -43$

۵۷. گزینه ۱ دو برابر مقدار مثبتی از ثلث مربع آن، ۹ واحد کمتر است.

$$\frac{x^2}{3} = 2x - 9 \Rightarrow x^2 = 6x - 27 \Rightarrow x^2 - 6x + 27 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-9) = 0$$

$$2x = \frac{x^2}{3} - 9 \xrightarrow{\times 3} 6x = x^2 - 27$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 - 6x - 27 \Rightarrow (x+3)(x-9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{cases}$$

چون x مثبت است پس -3 قابل قبول نیست.

۵۸. گزینه ۳ طول سه برابر عرض است $x = 3y$ طول مستطیل x عرض مستطیل y

چون باید یک مجهول داشته باشیم به جای x, y قرار می‌دهیم $\rightarrow 588 = 3y \times y$

$$\Rightarrow 588 = 3y^2 \xrightarrow{\div 3} 196 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{196} = \pm 14$$

اندازه ضلع نمی‌تواند منفی باشد، پس $y = 14$ قابل قبول است.

$$x = 3y = 3(14) = 42$$

$$\text{محیط} = 2(x+y) = 2(42+14) = 2(56) = 112$$

۵۹. گزینه ۲ برای یافتن محیط باید مقدار تمام ضلع‌ها را داشته باشیم. با استفاده از رابطه فیثاغورث داریم:

$$(13)^2 = x^2 + (x+7)^2 \Rightarrow 169 = x^2 + x^2 + 14x + 49$$

$$\frac{m}{a}x^2 + \frac{3}{b}x + \frac{m-2}{c} = 0$$

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m-2}{m} = 1 \Rightarrow m-2 = m$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \xrightarrow{\substack{a=1, b=-1 \\ c=-2}}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{2} = 2 \\ m = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

کافی است m را جایگذاری کنیم تا m درست به دست آید.

$$\xrightarrow{m=2} 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \quad \times$$

$$\xrightarrow{m=-1} -x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 \quad \checkmark$$

۵۱. گزینه ۱ ریشه‌ها معکوس هم هستند؛ یعنی ضرب ریشه‌ها برابر ۱ است.

$$\frac{c}{a} = 1$$

$$a = m-1, b = \sqrt{m}, c = 2m-3$$

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2m-3}{m-1} = 1 \Rightarrow 2m-3 = m-1$$

$$\Rightarrow 2m - m = -1 + 3 \Rightarrow m = 2$$

۵۲. گزینه ۴ ریشه‌ها معکوس و قرینه؛ یعنی $\frac{c}{a} = -1$

$$\frac{c}{a} = -1 \xrightarrow{\frac{c=b+2}{a=2}} \frac{b+2}{2} = -1 \Rightarrow b+2 = -2 \Rightarrow \boxed{b = -4}$$

۵۳. گزینه ۴ ریشه حقیقی ندارد؛ یعنی $\Delta < 0$

$$x^2 + 5x + 2m = 0 \xrightarrow{\substack{a=1, b=5 \\ c=2m}} \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (5)^2 - 4(1)(2m) < 0 \Rightarrow 25 - 8m < 0$$

$$\Rightarrow -8m < -25 \Rightarrow m > \frac{25}{8}$$

۵۴. گزینه ۱ ۴ ریشه مضاعف است، پس جمع ریشه‌ها $4+4=8$ و ضرب ریشه‌ها $4 \times 4 = 16$ است.

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} \Rightarrow 8 = -\frac{b}{a} = -\frac{b}{2} \Rightarrow -b = 8 \times 2 \Rightarrow b = -16 \\ \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} \Rightarrow 16 = \frac{c}{a} = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 16 \times 2 = 32 \end{cases}$$

$$b+c \xrightarrow{\substack{b=-16 \\ c=32}} -16 + 32 = 16$$

۵۵. گزینه ۳ روش اول: ریشه‌ها را می‌یابیم و جمع مربعات آن‌ها را حساب می‌کنیم.

$$2x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{\substack{a=2, b=-1 \\ c=-1}}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

۶۴. گزینه ۱) برای اینکه معادله درجه دوم باشد باید ضریب x^3 ، صفر باشد.

$$m+1=0 \Rightarrow m=-1 \Rightarrow (m+1)x^3 + mx^2 - 3x + m - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{m=-1} 0 - x^2 - 3x - 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2, x = -1 \xrightarrow[\text{جوابها}]{\text{مجموع}} (-2) + (-1) = -3$$

یا $\frac{-b}{a} = \frac{-3}{1} = -3$ مجموع ریشه‌ها

۶۵. گزینه ۳) اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، معادله را به شکل $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ تشکیل می‌دهیم.

$$(x - (-3))(x - 2) = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{اتحاد}} x^2 + x - 6 = 0$$

۶۶. گزینه ۴) ابتدا جواب‌های معادله داده شده را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{اتحاد}}$$

$$(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -1$$

حال معادله‌ای را می‌خواهیم بنویسیم که ریشه‌هایش قرینه این ریشه‌ها باشد؛ یعنی $x = 1$ و $x = -4$ جواب‌های آن باشند.

$$(x - (-4))(x - 1) = 0 \Rightarrow (x+4)(x-1) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{اتحاد}} x^2 + 3x - 4 = 0$$

۶۷. گزینه ۱) معادله وقتی دو جواب حقیقی و متمایز دارد که $\Delta > 0$ باشد.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a)^2 - 4(3)(-3) = a^2 + 36$$

a هر چه که باشد این عبارت همواره بزرگ‌تر از صفر است.

۶۸. گزینه ۲) از فرمول مجموع ریشه‌ها کمک می‌گیریم:

$$\text{مجموع دو ریشه} = \frac{-b}{a} = \frac{-a}{2} \xrightarrow[\text{برابر}]{\frac{-9}{2} \text{ است}} \frac{-a}{2} = \frac{-9}{2} \Rightarrow a = 9$$

این مقدار را در معادله جایگذاری می‌کنیم و جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 + 9x + 4 = 0: \Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4(2)(4) = 81 - 32 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-9 + 7}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow -4 < \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-9 - 7}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

۶۹. گزینه ۱) برای اینکه معادله را تبدیل به معادله درجه دوم کنیم از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $x^2 = t$.

$$x^4 + 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 + 10t + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (t+9)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t+9=0 \Rightarrow t=-9 \\ t+1=0 \Rightarrow t=-1 \end{cases}$$

حال آهای به دست آمده را در $x^2 = t$ قرار می‌دهیم تا مقدار x به دست آید.

$$x^2 = t \xrightarrow{t=-9} x^2 = -9 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$x^2 = t \xrightarrow{t=-1} x^2 = -1 \text{ غیر قابل قبول}$$

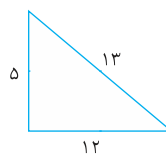
$$\Rightarrow 0 = 2x^2 + 14x - 12 \Rightarrow 2(x^2 + 7x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x+12)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+12=0 \Rightarrow x=-12 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

چون اندازه ضلع نمی‌تواند منفی باشد پس فقط $x = 5$ قابل قبول است.

$$\text{محیط} = 5 + 12 + 13 = 30$$



۶۰. گزینه ۳) مثلث ساخته شده، متساوی الساقین است؛ زیرا دو زاویه برابر دارد.

$$90 + 45 = 135 \Rightarrow 180 - 135 = 45$$

مساحت مثلث - مساحت مستطیل = مساحت قسمت رنگی

$$\Rightarrow 150 = 2x \times x - \frac{x \times x}{2}$$

$$\Rightarrow 150 = 2x^2 - \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\times 2} 300 = 4x^2 - x^2$$

$$\Rightarrow 300 = 3x^2 \xrightarrow{\div 3} 100 = x^2 \Rightarrow x = \pm 10$$

چون طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد پس فقط $x = 10$ قابل قبول است.

۶۱. گزینه ۳) $\begin{cases} \text{طول مستطیل} = x & \text{محیط} = 2(x+y) \\ \text{مساحت} = xy & \text{عرض مستطیل} = y \end{cases}$

$$\begin{cases} 54 = 2(x+y) \xrightarrow{\div 2} 27 = x+y \Rightarrow 27-y = x \\ 180 = xy \Rightarrow 180 = (27-y)y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 180 = 27y - y^2 \Rightarrow y^2 - 27y + 180 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-27)^2 - 4(1)(180) = 729 - 720 = 9$$

$$y = \frac{-(-27) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{27 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{27+3}{2} = 15 \xrightarrow{x=27-y} x = 27-15 = 12 \\ \frac{27-3}{2} = 12 \xrightarrow{x=27-y} x = 27-12 = 15 \end{cases}$$

x طول است و طول باید از عرض بیشتر باشد پس $x = 15$ و $y = 12$ قابل قبول است. طول از عرض ۳ واحد بیشتر است.

۶۲. گزینه ۱) چهار برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن، ۹ واحد کمتر است.

$$\underbrace{4x^2}_{4x^2} = \underbrace{12x}_{12x} - \underbrace{9}_{-9}$$

$$4x^2 = 12x - 9 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{دوجمله‌ای}]{\text{اتحاد مربع}} (2x-3)^2 = 0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{3}$$

۶۳. گزینه ۲) دو ریشه قرینه؛ یعنی مجموع ریشه‌ها صفر است؛ یعنی $\frac{-b}{a} = 0$ پس $-b = 0$

$$b = 0 \Rightarrow -(m-1) = 0 \Rightarrow m-1 = 0 \Rightarrow m = 1$$



معادله درجه ۲ رو با روش Δ حل می‌کنیم.

$$\frac{a=-3, b=22}{c=-7} \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac =$$

$$(22)^2 - 4(-3)(-7) = 484 - 84 = 400$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-22 \pm 20}{-6} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \text{ قابل قبول} \\ x = \frac{1}{3} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

مخرج ما $(x-1)(x-5)$ بود و اعداد به دست آمده: یعنی ۷ و $\frac{1}{3}$ ریشه مخرج نیستن (یعنی مخرج رو صفر نمی‌کنن) پس قابل قبول هستند.

۷۴. گزینه ۴: باز هم کافیه عدد ۲ رو به سمت چپ ببریم و مخرج مشترک بگیریم.

$$\frac{2x-4}{x-2} - 2 = 0$$

مخرج مشترک $(x-2)$ است، پس:

$$\frac{2x-4-2(x-2)}{x-2} = 0 \Rightarrow \frac{2x-4-2x+4}{x-2} = 0$$

پس کافیه صورت رو مساوی صفر قرار بدیم.

$$2x-4-2x+4=0 \Rightarrow 0=0$$

پس این معادله همواره برقرار است چون $0=0$ همیشه درست است؛ یعنی می‌توان گفت x هر عددی باشد، معادله برقرار است ولی دقت کنید که اگر $x=2$ باشد مخرج صفر می‌شود پس $x=2$ قابل قبول نیست؛ یعنی جواب همه اعداد به جز ۲ است $\mathbb{R} - \{2\}$.

۷۵. گزینه ۲: همه عبارتها را به یک طرف می‌بریم.

$$2x + \frac{3}{x} = -1 \Rightarrow 2x + \frac{3}{x} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 3 + x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x + 3 = 0 \quad \begin{matrix} a=2, b=1 \\ c=3 \end{matrix}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23$$

چون Δ منفی است، پس معادله جواب ندارد.

۷۶. گزینه ۲: همه عبارتها را به یک طرف می‌بریم و مخرجها رو تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} - \frac{8}{(x-2)(x+2)} = 0$$

خب حالا باید مخرج مشترک بگیریم؛ یعنی بین عبارت های مخرج ک.م.م می‌گیریم: (عبارت های مشترک با بیشترین توان \times عبارت های غیرمشترک) پس ک.م.م $(x-2)(x+2)$ است یعنی مخرج مشترک $(x-2)(x+2)$ است. دقت کنید که مخرج کسر اول عامل $(x+2)$ رو داره و فقط $(x-2)$ رو کم داره پس باید صورت و مخرج کسر تو $(x-2)$ ضرب بشه و صورت و مخرج کسر دوم هم تو $(x+2)$.

$$\frac{(x-2)(x-2) + x(x+2) - 8}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$(x-2)(x-2) + x(x+2) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \begin{matrix} \text{چون } a+c=b \\ \text{پس جوابها } -1 \text{ و } \frac{-c}{a} \text{ اند.} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = -1 \text{ قابل قبول} \\ x = \frac{2}{2} = 1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$x = -1$ هیچ مخرجی رو صفر نمی‌کنه؛ ولی $x = 1$ دو تا از مخرجها رو صفر می‌کنه پس قابل قبول نیست و معادله یک جواب داره.

$$\frac{2x}{x+1} - \frac{3}{x-2} - 4 = 0$$

۷۷. گزینه ۳

ک.م.م مخرجها: $(x+1)(x-2)$ ← مخرج مشترک

۷۰. گزینه ۲: از فرمول مجموع ریشهها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{6} = \frac{-b}{a} = \frac{-(k+1)}{6} \Rightarrow \text{مجموع ریشهها}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{-(k+1)}{6} \Rightarrow -k-1=1 \Rightarrow k=-2$$

این مقدار را در معادله قرار می‌دهیم و ریشهها را محاسبه می‌کنیم:

$$6x^2 + (k+1)x + k = 0 \quad k=-2 \rightarrow$$

$$6x^2 + (-2+1)x - 2 = 0 \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 + \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

۷۱. گزینه ۲: اگر α و β دو ریشه معادله باشند. معادله را به شکل

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

تشکیل می‌دهیم.

$$(x - \frac{2+\sqrt{3}}{2})(x - \frac{2-\sqrt{3}}{2}) = 0 \quad \begin{matrix} \text{اتحاد جمله} \\ \text{مشترک} \end{matrix}$$

$$x^2 + (-\frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2})x + (\frac{2+\sqrt{3}}{2})(\frac{2-\sqrt{3}}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2}x + \frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{4}{2}x + \frac{4-3}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$$

۷۲. گزینه ۳: با مخرج مشترک گیری داریم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$$

از فرمول مجموع و حاصلضرب ریشهها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{42}{1} = 42 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-1}{42}$$

۷۳. گزینه ۲: وقتی قراره به معادله گویا حل کنیم، اول همه عبارتها رو به

یک طرف می‌بریم و بعد باید مخرج مشترک بگیریم؛ پس:

$$\frac{2x-3}{x-5} - \frac{x+2}{x-1} - 4 = 0$$

برای مخرج مشترک گیری باید اول مخرجها رو تجزیه کنیم که اینجا مخرجها تجزیه پذیر نیستن و چون عبارت مشترک هم تو مخرجها نداریم مخرج مشترک، حاصلضرب مخرجها همیشه پس مخرج مشترک $(x-5)(x-1)$ است مخرج کسر اول عامل $(x-1)$ رو نداره پس باید هم صورت و هم مخرج رو تو $(x-1)$ ضرب کنیم؛ کسر دوم هم $(x-5)$ و عبارت آخر هم چون مخرجش ۱ است پس کل عبارت $(x-1)(x-5)$ رو نداره و صورت و مخرج رو باید در اون ضرب کنیم؛ پس:

$$\frac{(2x-3)(x-1) - (x+2)(x-5) - 4(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x + 10 - 4x^2 + 24x - 20}{(x-5)(x-1)} = 0$$

می‌دونیم کسری صفره که صورتش صفر باشه پس کافیه صورت رو مساوی صفر قرار بدیم.

$$2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x + 10 - 4x^2 + 24x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 22x - 7 = 0$$