

چاپ سی و یکم

تست‌ادیوم یازدهم



ریاضی ۲

عباس اشرفی • نصیر کریمی • بهنام سرهنگی

بازنویسی شد

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$C(O, r)$$

$$y = x^r$$

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

درسنامه کامل با جداول و نمودارهای کاربردی

بیش از ۱۰۰۰ تست با تمرکز بر گنگورهای اخیر

چیدمان تست‌ها از ساده تا دشوار، مطابق تمرین‌های کتاب

آزمون‌های فصلی آینده‌دار برای سنجش آموخته‌ها

با سخ‌نامه کاملاً تشریحی با نکات و تکنیک‌های حل تست



به نام پروردگار مهربان

ریاضی ۲

تستادپوم یازدهم

• عباس اشرفی • نصیر کریمی • بهنام سرهنگی

بازروپسی شدن

برای مشاهده کنکورهای اخیر و
سایر محتواهای تکمیلی، این QR-code
را اسکن کنید.



مهروماه

فهرست



۷

فصل اول هندسه تحلیلی و جبر

۴۳

فصل دوم هندسه

۷۵

فصل سوم تابع

۱۱۳

فصل چهارم مثلثات

۱۴۱

فصل پنجم توابع نمایی و لگاریتمی

۱۶۷

فصل ششم حد و پیوستگی

۱۹۷

فصل هفتم آمار و احتمال

۲۱۹

آزمون

۲۲۷

پاسخنامه

۲۲۸

پاسخنامه کلیدی

۲۳۳

پاسخنامه تشریحی

۳۶۳

پاسخنامه تشریحی آزمون

۳۶۷

فرمولنامه

فصل ۱

هندسه تحلیلی و جبر

فصلی که می‌بینید جعبه‌ابزاریه برای استفاده در بقیه مباحث ریاضی. این فصل با هندسه تحلیلی شروع میشه. کلی مطالب جدید راجع به خط، نقطه، فاصله‌هاشون از هم و از خودشون رو توی این بخش یاد می‌گیری. بعد وارد نمودار تابع و معادله درجه دوم میشه؛ همون سهمی پارسال! ولی این دفعه هم سؤال‌های نمودارش و هم معادله‌اش پیچیده‌تره! آخرش هم به معادلات گویا و گنگ می‌رسه. این بحث تا آخرین دقایقی که ریاضی می‌خونی، دست از سرت برنمی‌داره! پس خوب یادش بگیر.



یادآوری: در سال‌های گذشته با مفاهیم معادله خط، شیب، عرض از مبدأ، تابع خطی و... آشنا شدید. در این درس به طور خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

شیب: تعریف‌ها و تعبیرهایی از شیب که تاکنون آموخته‌اید عبارت‌اند از:

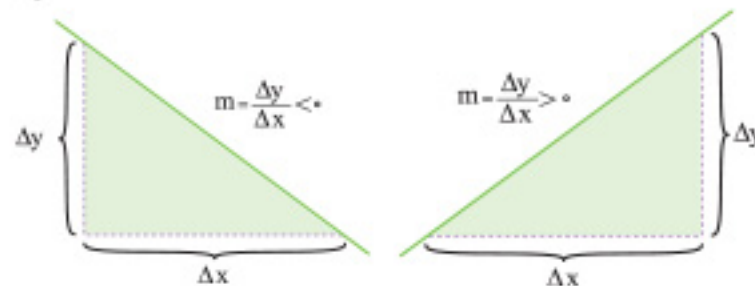
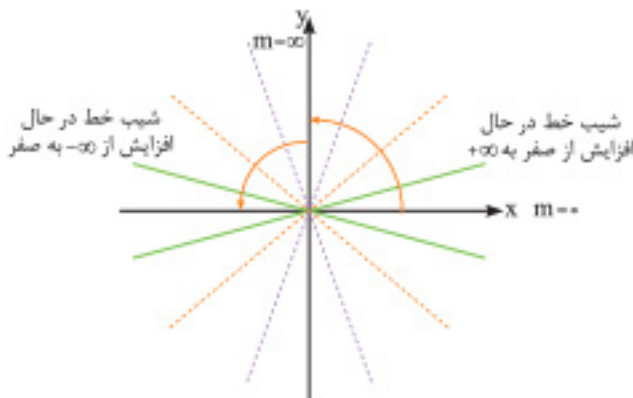
الف) میزان تغییرات y به تغییرات x را شیب خط می‌نامیم. در واقع اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه متمایز باشند ($x_1 \neq x_2$)، به

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

شیب خط گذرا از دو نقطه A و B می‌گوییم.

ب) اگر معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، شیب خط برابر a است.

پ) اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ باشد، شیب خط برابر $-\frac{a}{b}$ است.



ت) تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، شیب خط نامیده می‌شود.



ث) شیب خط $x = a$ تعریف نشده و شیب خط $y = b$ صفر است.

معادله خط

برای به دست آوردن معادله خط، دو روش داریم:

۱) با داشتن شیب و یک نقطه: معادله خطی با شیب m که از نقطه $A(x_0, y_0)$ می‌گذرد، عبارت است از:

۲) با داشتن دو نقطه: هرگاه دو نقطه $A(x_0, y_0)$ و $B(x_1, y_1)$ را داشته باشیم ($x_0 \neq x_1$)، می‌توانیم به کمک رابطه $m_{AB} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ شیب خط گذرا از نقاط A و B را بیابیم و به کمک معادله $y - y_0 = m(x - x_0)$ ضابطه خط را بیابیم.

نکته: ۱) می‌توان معادله خط را به صورت $y = ax + b$ فرض نمود و با جای‌گذاری مختصات دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) و تشکیل دستگاه، مقادیر a و b را به دست آورد. به این ترتیب ضابطه $y = ax + b$ به دست می‌آید. در این رابطه a شیب خط و b نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها (یعنی عرض از مبدأ) است.

۲) معادله خطی که از دو نقطه (a, y_0) و (a, y_1) می‌گذرد، برابر است با $x = a$ ($y_0 \neq y_1$).

۳) معادله خطی که از دو نقطه (x_0, b) و (x_1, b) می‌گذرد، برابر است با $y = b$ ($x_0 \neq x_1$).

مثال: خط گذرنده از دو نقطه $(1, 3)$ و $(2, 7)$ محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

$$-\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{5} \quad (2) \quad -\frac{1}{5} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۳»

فرض می‌کنیم معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، نقاط داده شده را در معادله خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (1, 3) &\Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 3 = a(1) + b \\ (2, 7) &\Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 7 = a(2) + b \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

یعنی معادله خط $y = 4x - 1$ است.

این خط در نقطه‌ای، محور طول‌ها را قطع می‌کند که $y = 0$ شود؛ بنابراین:

$$0 = 4x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

شیب‌های دو خط موازی و دو خط عمود بر هم

مهم: دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط موازی m و m' باشند، باید $m = m'$ باشد و برعکس.

دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-1) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط، m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آن‌ها آن است که $mm' = -1$. به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

نکته: رابطه $mm' = -1$ برای دو خط غیر موازی با محورهای مختصات برقرار است.

مثال: خط $3x + 5y = 1$ بر خط $y = ax - 2$ عمود است. مقدار a کدام است؟

پاسخ گزینه ۱: معادله خط $3x + 5y = 1$ را استاندارد می‌کنیم:

$$5y = -3x + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$$

شیب خط بالا برابر $-\frac{3}{5}$ و شیب خط $y = ax - 2$ نیز برابر a است. از آن جایی که دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌ها برابر -1 است.

$$a \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -1 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$$

معادله خطی که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -2 قطع کرده و بر خط $2x + 3y = -1$ عمود باشد، کدام است؟

پاسخ گزینه ۳: شیب خط $2x + 3y = -1$ را پس از استاندارد کردن آن می‌یابیم:

$$2x + 3y = -1 \Rightarrow 3y = -2x - 1 \xrightarrow{+2} y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

شیب خط برابر $-\frac{2}{3}$ است. شیب خط عمود بر این خط، عکس و قرینه شیب آن یعنی $\frac{3}{2}$ است.

معادله خطی با شیب $\frac{3}{2}$ که از نقطه $(-2, 0)$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$y = \frac{3}{2}x + b \xrightarrow{(-2, 0)} 0 = \frac{3}{2}(-2) + b \Rightarrow 0 = -3 + b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$$

$$2y = 3x + 6$$

طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

اگر معادله ضلع AB در مستطیل شکل روبه‌رو به صورت $3x - 4y = -6$ باشد، عرض از مبدأ خط BC کدام است؟

پاسخ گزینه ۴: ضلع BC بر ضلع AB عمود است، پس شیب BC عکس و قرینه شیب AB است.

$$AB: 3x - 4y = -6 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \Rightarrow m_{AB} = \frac{3}{4}$$

$$m_{BC} \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{BC} \times \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{4}{3}$$

حال شیب BC را می‌یابیم:

به کمک مختصات نقطه $B(2, 2)$ و شیب $m = -\frac{4}{3}$ ، معادله خط BC را می‌نویسیم:

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$$

عرض از مبدأ این خط $\frac{14}{3}$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. معادله خط گذرا از دو نقطه $A(3, 0)$ و $B(0, -2)$ کدام است؟

پاسخ گزینه ۳: $2x + 3y - 6 = 0$

گزینه ۴: $2x - 3y + 6 = 0$

گزینه ۲: $2x + 3y + 6 = 0$

گزینه ۱: $2x - 3y - 6 = 0$

۲. به ازای کدام مقادیر m نقاط $(m, 3)$ و $(6, 4m+1)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

$$(1) -2, \frac{9}{4} \quad (2) -2, \frac{3}{4} \quad (3) -2, -\frac{3}{4} \quad (4) -2, -\frac{9}{4}$$

۳. معادله خطی که از نقطه محل برخورد دو خط $y = 2x$ و $y = \frac{x}{2}$ می‌گذرد و بر خط $y = -x + 4$ عمود است، کدام است؟

$$(1) y = x \quad (2) y = -x \quad (3) y = x + 1 \quad (4) y = -x + 1$$

۴. یکی از خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(8, 3)$ عمود است. معادله این خط کدام است؟

$$(1) 2y + 3x = 4 \quad (2) 2y + 3x = 1 \quad (3) 2y - 3x = -5 \quad (4) 3y - 2x = -5$$

۵. در مثلثی با رئوس $A(-1, -4)$ ، $B(-5, 6)$ و $C(3, 2)$ معادله ارتفاع AH کدام است؟

$$(1) y = 2x - 2 \quad (2) 2y + x + 9 = 0 \quad (3) y = 4x \quad (4) y = -2x - 6$$

۶. نقاط $A(2, 5)$ ، $B(3, -1)$ و $C(0, 2)$ سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

$$(1) (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \quad (2) (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \quad (3) (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \quad (4) (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$$

فاصله دو نقطه

فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

فاصله هر نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ از مبدأ برابر است با: $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ **مهم** ★

۱- اگر A و B دو نقطه هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |x_A - x_B|$.

۲- اگر C و D دو نقطه هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $CD = |y_C - y_D|$.

مثال: فاصله دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(-4, 6)$ کدام است؟

$$(1) 10 \quad (2) 2\sqrt{5} \quad (3) \sqrt{5} \quad (4) 5$$

پاسخ گزینه «۴» طبق فرمول، فاصله دو نقطه را می‌یابیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

◀ محیط مثلث ABC با فرض $A(2, 4)$ ، $B(2, 1)$ و $C(-2, 4)$ کدام است؟

$$(1) 10 \quad (2) 7 + 2\sqrt{3} \quad (3) 12 \quad (4) 9 + 2\sqrt{3}$$

پاسخ گزینه «۳» طول سه پاره‌خط AB ، AC و BC را می‌یابیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

مجموع طول پاره‌خط‌ها (محیط مثلث) برابر ۱۲ است.

◀ در یک کلاس، پنج ردیف ۸ نفره نیمکت مطابق شکل چیده شده است. اگر ابعاد طول و عرض هر

نیمکت را ۵۰ سانتی‌متر در نظر بگیریم، فاصله مرکز نیمکت ردیف ۲، شماره ۳ با مرکز نیمکت ردیف ۵،

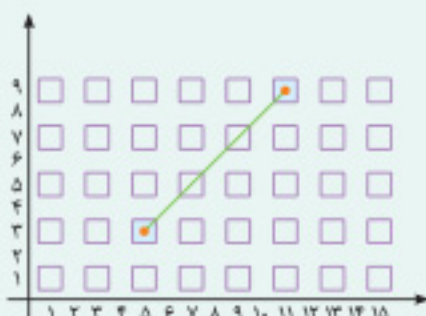
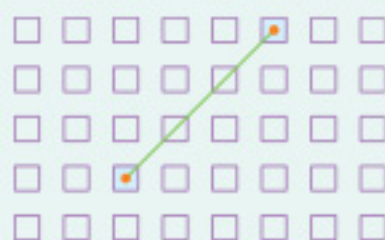
شماره ۶ کدام است؟ (فضای خالی بین دو نیمکت نیز به اندازه یک نیمکت است.)

$$(1) 50\sqrt{18} \quad (2) 25\sqrt{18} \quad (3) 25\sqrt{85} \quad (4) 50\sqrt{72}$$

پاسخ گزینه «۴» می‌خواهیم فاصله نقطه $(5, 3)$ را از نقطه $(11, 9)$ بیابیم:

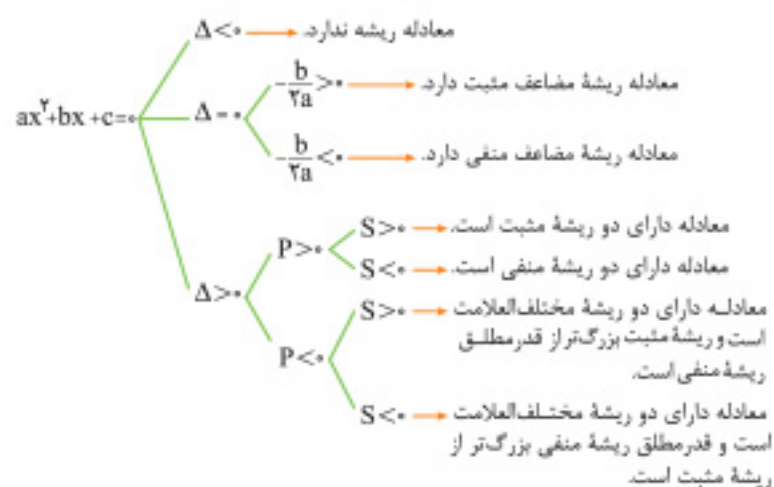
$$d = \sqrt{(11 - 5)^2 + (9 - 3)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

چون ابعاد هر نیمکت ۵۰ cm است، فاصله واقعی $50 \times \sqrt{72}$ است.



بحث راجع به ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ ($a,b,c \neq 0$)

برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن را به صورت نمودار درختی برایتان بیان می‌کنیم:



نکته: در حالت $P < 0$ نیازی به بررسی Δ وجود ندارد، چرا که هر وقت a و c مختلف‌العلامت باشند، Δ لزوماً مثبت می‌شود.

مثال: کدام گزینه درباره $x^2 - (\sqrt{3}-1)x - 2\sqrt{3} - 2 = 0$ درست است؟

- دو ریشه مثبت دارد.
- دو ریشه منفی دارد.
- دو ریشه مختلف‌العلامت دارد و ریشه مثبت بزرگ‌تر از قدرمطلق ریشه منفی است.
- دو ریشه مختلف‌العلامت دارد و قدرمطلق ریشه منفی بزرگ‌تر از ریشه مثبت است.

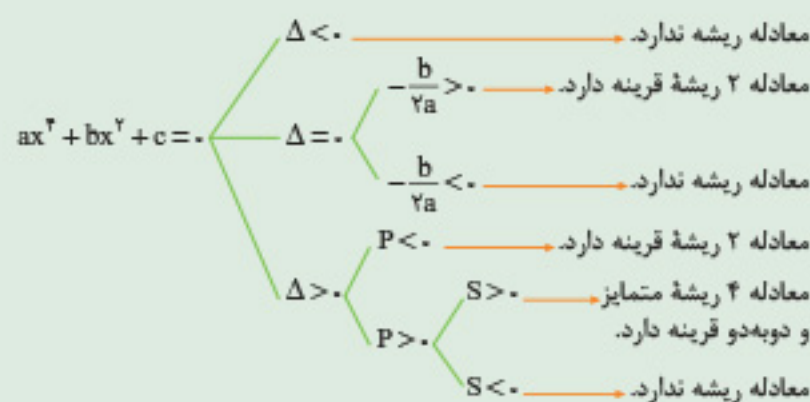
پاسخ: گزینه «۳» دو ریشه مختلف‌العلامت دارد و ریشه مثبت، بزرگ‌تر از قدرمطلق ریشه منفی است.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-2\sqrt{3}-2}{1} < 0, S > 0.$$

چون $P < 0$ است؛ پس نیازی به بررسی کردن علامت دلتا نیست.

یک گام فراتر: بحث راجع به ریشه‌های معادله $ax^2+bx^2+c=0$ ($a,b,c \neq 0$)

برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن را به صورت نمودار درختی برایتان بیان می‌کنیم:



مثال: معادله $x^4 - 4x^2 + 2 - a = 0$ چهار ریشه متمایز دارد. حدود a کدام است؟

- $a > -2$
- $-8 < a < -2$
- $a < 2$
- $-2 < a < 2$

پاسخ: گزینه «۴» مطابق آنچه که در بالا بحث شد، زمانی معادله چهار ریشه دارد که:

$$\textcircled{1} \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(2-a) > 0 \Rightarrow 16 - 8 + 4a > 0 \Rightarrow 8 + 4a > 0 \Rightarrow a > -2$$

$$\textcircled{2} P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2-a}{1} = 2-a > 0 \Rightarrow a < 2$$

$$\textcircled{3} S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 > 0 \text{ بدیهی}$$

اشتراک مجموعه جواب‌های بالا به صورت $-2 < a < 2$ است.

۶۹. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + x - 1 - m^2 = 0$ باشد، کمترین مقدار ممکن برای $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟
 ۱ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) (تجربین اردیبهشت ۱۴۰۴)
۷۰. مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادله $36x^2 - (m+14)x + 1 = 0$ برابر ۵ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $mx^2 + 3x + 2 = 0$ کدام است؟
 ۱ (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) (تجربین تیر ۱۴۰۴)

حل مسائل پارامتری ارتباط بین ریشه‌ها

اگر در یک معادله پارامتری، مقدار یک ریشه را برحسب دیگری داشته باشیم مثلاً بدانیم یک ریشه دو برابر یا معکوس یا... دیگری است، می‌توانیم با تشکیل دستگاهی مرکب از S و P ریشه‌ها را بیابیم و مقدار پارامتر را پیدا کنیم.

مثال: در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد، مقدار m کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{59}{5}$ ۲ (۲) $\frac{63}{5}$ ۳ (۳) $\frac{59}{4}$ ۴ (۴) $\frac{63}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» • **روش اول:** اگر یکی از ریشه‌های معادله را α فرض کنیم، ریشه دوم برابر $\alpha + 2$ می‌شود.

در این معادله مجموع ریشه‌ها $S = -\frac{b}{a} = -\frac{-15}{3} = 5$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $P = \frac{c}{a} = \frac{m}{3}$ است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} \alpha + (\alpha + 2) = S = 5 \Rightarrow 2\alpha + 2 = 5 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \\ \alpha \cdot (\alpha + 2) = P = \frac{m}{3} \end{cases}$$

به کمک مقدار $\alpha = \frac{3}{2}$ می‌توان مقدار m را از رابطه دوم یافت:

$$m = 3\alpha(\alpha + 2) \Rightarrow m = 3\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + 2\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{63}{4}$$

• **روش دوم:** تفاضل دو ریشه برابر ۲ است. فرمول تفاضل دو ریشه هم $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است؛ بنابراین:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(-15)^2 - 4(3)m}}{3} = 2 \Rightarrow \sqrt{225 - 12m} = 6 \Rightarrow 225 - 12m = 36 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

در این سؤال روش دوم ساده‌تر است ولی دقت کنید روش اول قاعده کلی است و روش دوم خاص این سؤال است.

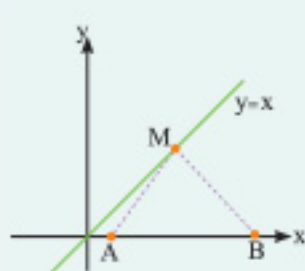
پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۷۱. در معادله $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه، دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟
 ۳/۵ (۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۵ (۴)
۷۲. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + mx - 3 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار m ، رابطه $2\alpha + \beta = 4$ بین ریشه‌ها برقرار است؟
 ۱ (۱) $\frac{6 \pm \sqrt{10}}{2}$ ۲ (۲) $3 \pm \sqrt{5}$ ۳ (۳) $-3 \pm \sqrt{5}$ ۴ (۴) $\frac{-6 \pm \sqrt{10}}{2}$
۷۳. به ازای کدام مقدار k در معادله $2x^2 + kx + 9 = 0$ ، بین ریشه‌ها رابطه $x_1 \sqrt{x_2} = 3\sqrt{\frac{2}{3}}$ برقرار است؟
 ۹ (۱) ۱۱ (۲) -۱۱ (۳) -۹ (۴)
۷۴. ★ اگر ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b = 0$ دو عدد صحیح متوالی باشند، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟
 ۱ (۱) $a^2 + 4b = 0$ ۲ (۲) $a^2 + 4b = 1$ ۳ (۳) $a^2 - 4b = 1$ ۴ (۴) $a^2 - b = 1$
۷۵. ★ به ازای کدام مقدار a ، رابطه $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{5}{6}$ میان ریشه‌های معادله $x^2 - (a+2)x + a+1 = 0$ برقرار است؟
 ۱ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)
۷۶. ★ یکی از ریشه‌های معادله $a(x-2)^2 = x$ از ۱۰ برابر ریشه دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت a کدام است؟
 ۱ (۱) $\frac{9}{5}$ ۲ (۲) $\frac{4}{5}$ ۳ (۳) $\frac{5}{9}$ ۴ (۴) $\frac{5}{4}$
۷۷. به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ است؟
 ۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (۴)
۷۸. به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ است؟
 ۱ (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵ (۴) (ریاضی خارج ۹۶)

کاربرد تابع درجه ۲ در حل مسائل کاربردی

در برخی پدیده‌های طبیعی یا مسائل کاربردی، با پاسخ‌های فراوانی برای یک مسئله روبه‌رو هستیم. به کمک خواص تابع درجه دوم می‌توانیم بهترین پاسخ را برای مسئله بیابیم. برای درک بهتر موضوع، به حل چند مسئله می‌پردازیم.



مثال: مطابق شکل، دو نقطه A و B به طول‌های ۱ و ۷ روی محور طول‌ها و نقطه M روی نیمساز ربع اول و سوم واقع هستند. مینیمم مجموع مربعات فواصل نقطه M از دو نقطه A و B کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» مختصات نقطه M را (x, x) فرض می‌کنیم.

فاصله نقطه $A(1, 0)$ از نقطه M را می‌یابیم:

$$AM = \sqrt{(x-1)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$$

همین‌طور فاصله نقطه $B(7, 0)$ از نقطه M را می‌یابیم:

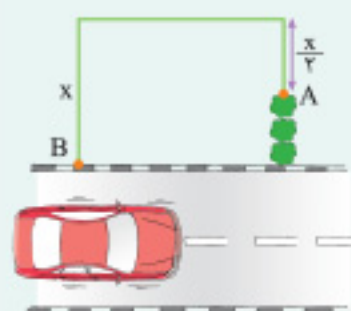
$$BM = \sqrt{(x-7)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$$

حال مجموع مربعات فواصل AM و BM را می‌یابیم:

$$AM^2 + BM^2 = (2x^2 - 2x + 1) + (2x^2 - 14x + 49) = 4x^2 - 16x + 50$$

این عبارت، تابعی درجه دوم است که کمترین مقدار آن برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ می‌باشد.

$$\min(y) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-16)^2 - 4(4)(50)}{4(4)} = 34$$



مطابق شکل می‌خواهیم از نقطه A تا نقطه B را در کنار خیابان، با طنابی به طول ۲۰ متر محصور کنیم. حداکثر مساحت مستطیل حاصل کدام است؟

- ۲۰۰ (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۱۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه «۴» • روش اول: اگر اضلاع مستطیل را x و y فرض کنیم؛ با توجه به شکل، طول طناب $x + y + \frac{x}{2}$ خواهد بود.

$$\frac{3x}{2} + y = 20 \Rightarrow y = 20 - \frac{3x}{2}$$

$$S = xy = x(20 - \frac{3x}{2}) = 20x - \frac{3x^2}{2} = -\frac{3x^2}{2} + 20x$$

تابع مساحت را می‌یابیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-\frac{3}{2})} = \frac{20}{3} \Rightarrow y = 20 - \frac{3(\frac{20}{3})}{2} = 10$$

این تابع زمانی ماکزیمم می‌شود که $x = -\frac{b}{2a}$ شود:

بنابراین حداکثر مساحت مستطیل برابر $10 \times \frac{20}{3}$ یعنی $\frac{200}{3}$ است.

نکته: هرگاه مجموع دو عبارت، مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آن‌ها زمانی ماکزیمم می‌شود که دو عبارت با هم برابر باشند.

• روش دوم: با توجه به نکته بالا و ثابت بودن مجموع $\frac{3x}{2}$ و y می‌توان از این روش هم برای حل سؤال استفاده کرد.

چون $\frac{3x}{2} + y = 20$ است و می‌خواهیم xy ماکزیمم شود، باید $\frac{3x}{2} = y$ شود.

$$\frac{3x}{2} + y = 20 \xrightarrow{\frac{3x}{2} = y} y + y = 20 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 10 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

حاصل ضرب این دو مقدار $10 \times \frac{20}{3} = \frac{200}{3}$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱۰۷. حداکثر مساحت مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۲۰ واحد کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴)

۱۰۸. مطابق شکل، با طنابی به طول ۲۰ متر، قطعه زمینی مستطیل‌شکل را کنار رودخانه جدا می‌کنیم. حداکثر

(مشابه تمرین کتاب درسی)

مساحت قطعه زمین کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۵۰ (۴)



فصل ۲

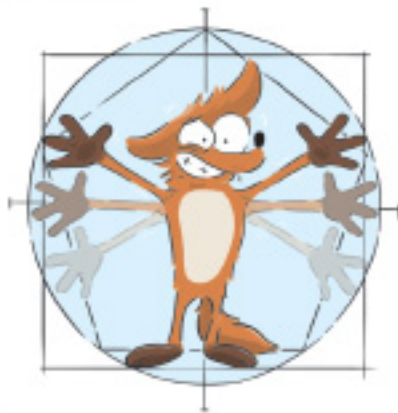
هندسه

این درس خیلی مهمه! این قدر که سر در آکادمی افلاطون نوشته بودن: «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود» یعنی کنکور اون موقع یونان فقط از هندسه بوده!

توی این فصل با هندسه مسطحه اقلیدس آشنا میشی و یاد می‌گیری چه‌طوری خط عمود، موازی، عمودمنصف و... رو رسم کنی. همین‌طور برخی ویژگی‌های اون‌ها رو یاد می‌گیری. توی درس دوم با زبون تخصصی هندسه و روش فکرکردن به ریاضی آشنا میشی و در انتهاش هم، قضیه مهم تالس، عکس قضیه تالس و تعمیم اون رو یاد می‌گیری. آخر فصل هم به تعریف تشابه دو مثلث ختم میشه! به کمک تشابه یه سری فرمول‌های مهم توی مثلث قائم‌الزاویه رو آوردیم. با خوندن تست‌های این بخش می‌تونی هر تستی رو از پا دریاری!

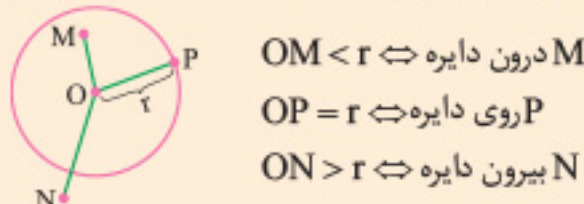


دایره



تمام نقاطی که به فاصله ثابت r از نقطه ثابت O قرار دارند، شکلی را در صفحه پدید می‌آورند که آن را دایره‌ای به مرکز O و شعاع r می‌نامند و با نماد $C(O, r)$ نمایش می‌دهند؛ بنابراین هر نقطه‌ای که از O به فاصله r باشد، روی دایره قرار دارد و هر نقطه‌ای که روی دایره باشد، از نقطه O فاصله‌ای برابر r خواهد داشت.

نکته: منظور از درون دایره $C(O, r)$ ، مجموعه همه نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از O کمتر از r باشد و برعکس، هر نقطه‌ای که فاصله‌اش تا O کمتر از r باشد، درون دایره است. به‌طور مشابه می‌توان بیرون دایره را تعریف کرد. در شکل، مجموعه نقطه‌های درون، بیرون و روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r نشان داده شده است.



خطی مانند d را در نظر بگیرید؛ مجموعه همه نقاطی در صفحه، که از خط d به فاصله h باشند، دو خط موازی d ، در دو سوی آن و با فاصله h از آن هستند.

مثال: خط d و نقطه P به فاصله h از آن را در نظر بگیرید. تعداد نقاطی در صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه P و خط d برابر a باشد، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟ ($h \neq 0$)

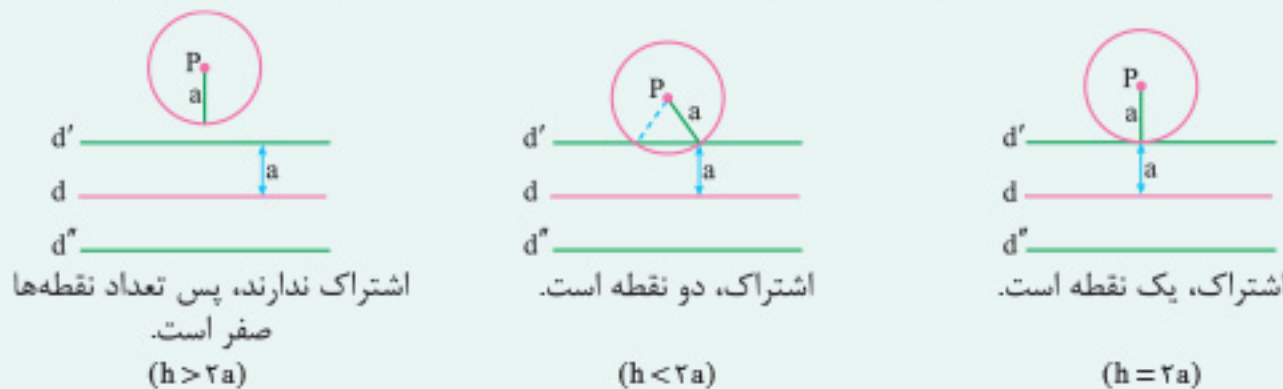
۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

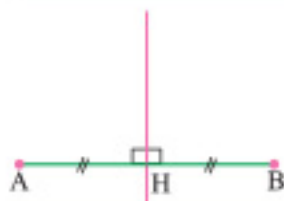
پاسخ: گزینه «۴» نقاطی که فاصله آن‌ها از نقطه ثابت P برابر a باشد، روی دایره‌ای به مرکز P و شعاع a هستند. از سوی دیگر، نقاطی که در صفحه از خط d فاصله‌ای برابر a دارند، دو خط موازی d ، در دو سوی آن و به فاصله a از آن هستند. اشتراک این دو مجموعه، یکی از حالت‌های زیر را دارد:



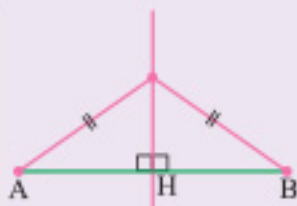
هیچ‌گاه خط d' از بالا بر دایره مماس نمی‌شود، زیرا در این صورت فاصله خط d و d' برابر $a + h$ می‌شود که خلاف فرض است. همچنین هیچ‌گاه خط d'' نیز با دایره برخورد نمی‌کند، زیرا در این صورت نقطه P روی خط d قرار می‌گیرد که خلاف فرض است.

عمودمنصف

عمودمنصف پاره خط AB ، خطی است که بر AB عمود است و از نقطه وسط آن می‌گذرد.



قضیه: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط، از دو سر آن به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.



مثال: دو نقطه ثابت A و B در یک صفحه مفروض اند. مجموعه همه نقاطی مانند M در این صفحه که در رابطه $\frac{MA - 4MB}{2MA + 3MB} = -\frac{3}{5}$ صدق می کنند، کدام است؟

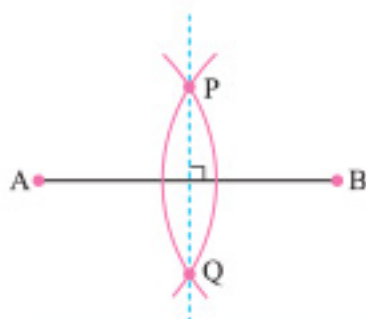
- (۱) دو نقطه (۲) یک پاره خط (۳) یک دایره (۴) یک خط

پاسخ گزینه ۴: رابطه داده شده را ساده می کنیم؛ در این صورت داریم:

$$\frac{MA - 4MB}{2MA + 3MB} = -\frac{3}{5} \Rightarrow 5MA - 20MB = -6MA - 9MB \Rightarrow 11MA = 11MB \Rightarrow MA = MB$$

چون نقطه M از نقاط ثابت A و B به یک فاصله است؛ یعنی نقطه M، روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد، بنابراین مجموعه نقطه های مورد نظر، عمودمنصف پاره خط AB را می سازند که یک خط است.

روش رسم عمودمنصف پاره خط AB



دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده، یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B، کمان می زنیم. دو کمان یکدیگر را در نقاط P و Q قطع می کنند. خط گذرا از نقاط P و Q عمودمنصف پاره خط AB است.

مثال: مطابق شکل، نقطه ای که از A به فاصله ۲ و از B و D فاصله برابر دارد، M می نامیم. اندازه MD کدام است؟

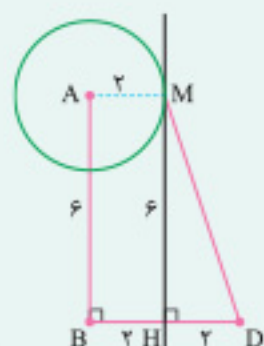


(۱) $2\sqrt{10}$ (۲) $3\sqrt{6}$

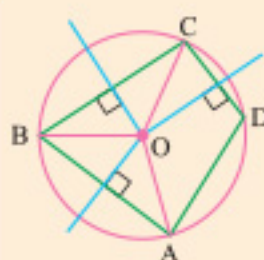
(۳) $4\sqrt{6}$ (۴) $4\sqrt{10}$

پاسخ گزینه ۱: مجموعه نقطه هایی که از A به فاصله ۲ هستند، دایره ای به مرکز A و شعاع ۲ می سازند و مجموعه نقطه هایی که از B و D فاصله برابر دارند، عمودمنصف پاره خط BD را می سازند. نقطه برخورد عمودمنصف BD با دایره $C(A, 2)$ همان M است. حال با توجه به اندازه های داده شده، عمودمنصف بر دایره مماس است و داریم:

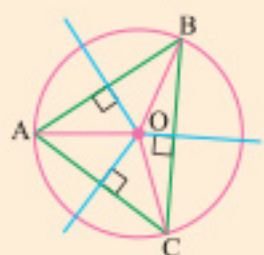
$$MD^2 = MH^2 + HD^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \Rightarrow MD = 2\sqrt{10}$$



نکته: فرض کنید چهارضلعی ABCD داده شده است، به گونه ای که عمودمنصف ضلع های AB، BC و CD همگی از نقطه ای مانند O بگذرند. در این صورت دایره ای به مرکز O و شعاع $OA = OB = OC = OD$ نیز می گذرد و $OA = OB = OC$.

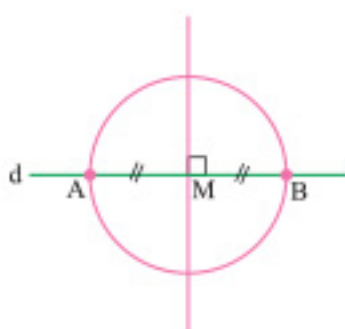


عمودمنصف های سه ضلع یک مثلث هم رس اند و در نتیجه نقطه هم رسی آنها از سه رأس مثلث به یک فاصله است؛ بنابراین دایره ای که به مرکز نقطه هم رسی عمودمنصف ها و شعاع $R = OA = OB = OC$ رسم می شود، از سه رأس مثلث می گذرد و آن را دایره محیطی مثلث می نامند.



روش رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه

نقطه روی خط باشد

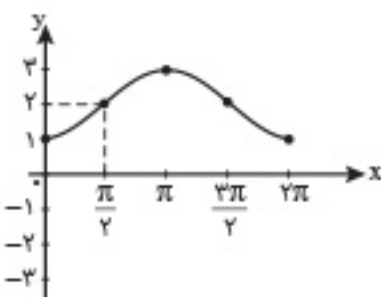
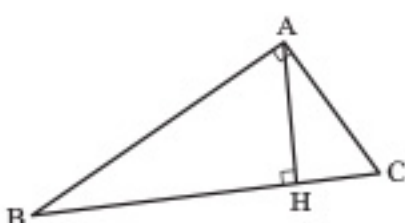
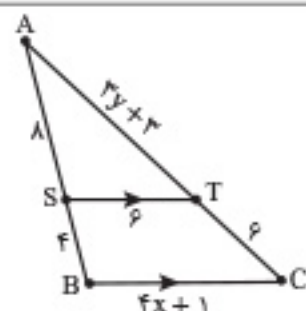


فرض کنید خط d و نقطه M روی آن داده شده است. نخست به مرکز M و شعاع دلخواه دایره ای رسم می کنیم تا d را در نقاطی مانند A و B قطع کند. سپس به روش گفته شده عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم؛ چون $MA = MB$ شعاع دایره است، پس نقطه M روی عمودمنصف AB قرار دارد، یعنی عمودمنصف همان خط عمود مورد نظر است.



سؤالات امتحان نهایی - نوبت دوم		خرداد ۱۴۰۲
درس: ریاضی ۲ (یازدهم)	رشته: علوم تجربی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
		تاریخ: ۱۴۰۲/۰۳/۰۸

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) برای هر عدد حقیقی k ، داریم $[x+k]=[x]+k$ ، $[x]$ نشان دهنده جزء صحیح x است. ب) اگر تمام داده‌های آماری را ۲ برابر کنیم، انحراف معیار نیز ۲ برابر می‌شود. پ) دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید. الف) مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطه برخورد است. ب) حد تابع $f(x)=\frac{x+4}{[x]+3}$ وقتی $x \rightarrow -1^-$ برابر است. پ) مقدار مینیمم تابع $f(x)=3x^2+6x+5$ برابر با است. ت) حداکثر مقدار تابع $f(x)=\cos x$ برابر با است که در نقاط به طول حاصل می‌شود.	۱/۲۵
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) ضابطه وارون تابع $f(x)=3x-2$ کدام است؟ ۱) $f^{-1}(x)=-3x+2$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ ب) کدام یک از توابع زیر در کل دامنه خود یک‌به‌یک است؟ ۱) $f(x)=x^2$ ۲) $f(x)=[x]$ ۳) $f(x)= x $ ۴) $f(x)=2^x$	۰/۵
۴	نقطه $A(3,0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y-x=5$ است. مساحت این مربع را به دست آورید.	۰/۷۵
۵	معادله $2x=1-\sqrt{2-x}$ را حل کنید.	۱
۶	در شکل مقابل، $ST \parallel BC$ است. مقدار x و y را به دست آورید.	۱/۲۵
۷	در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، اندازه پاره‌های خواسته شده را به دست آورید. $BH=9$ ، $AH=6$ ، $BC=?$ ، $AC=?$	۱
۸	نمودار تابع $f(x)=1-\sqrt{x-3}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.	۱/۵
۹	حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید). $\sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{-5\pi}{6}) - \tan(\frac{4\pi}{3})$	۱/۵
۱۰	نمودار رسم شده، مربوط به کدام ضابطه دیگر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید. الف) $y=2\cos x+1$ ب) $y=2-\cos x$	۱





مهرماه

۱

خرداد ۱۴۰۲

سؤالات امتحان نهایی - نوبت دوم

تاریخ: ۱۴۰۲/۰۳/۰۸

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

رشته: علوم تجربی

درس: ریاضی ۲ (پازدهم)

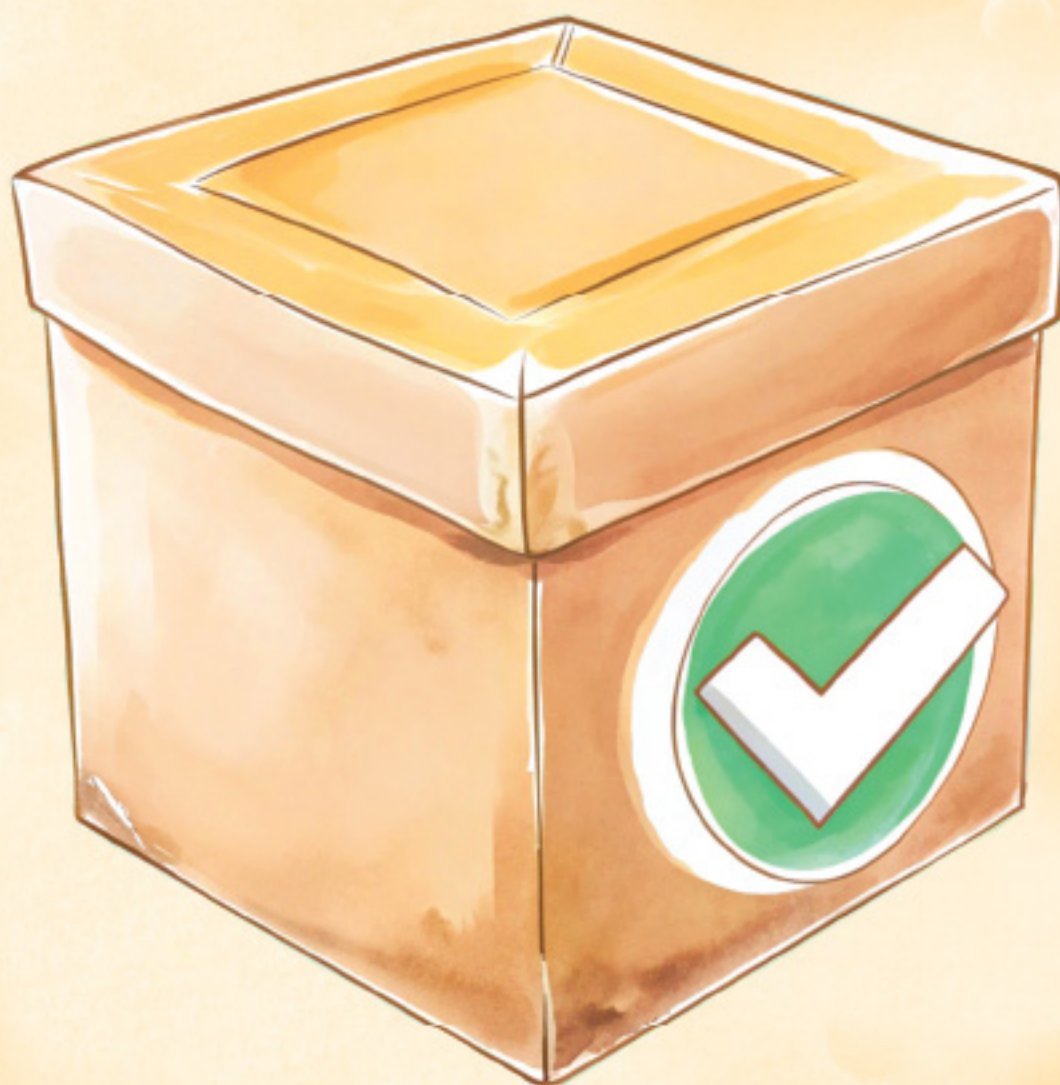
ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	نمودار تابع $f(x) = 2^x - 1$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را به صورت بازه بنویسید.	۱/۵
۱۲	معادله «الف» را حل کنید و حاصل عبارت «ب» را به دست آورید. الف) $\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$ ب) $\log_{12} 4 + 2 \log_{12} 6$	۲
۱۳	حاصل حد مقابل را به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$	۱
۱۴	با استفاده از نمودار مقابل، مقادیر خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 	۰/۷۵
۱۵	پیوستگی تابع مقابل را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} 2x - 9 & ; x > 2 \\ -5 & ; x = 2 \\ -2x^2 + 3 & ; x < 2 \end{cases}$	۱/۵
۱۶	احتمال این که یک تیم فوتبال اصلی ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورت بردن رقیب اصلی اش، این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش می یابد. با چه احتمالی حداقل یکی از این دو پیشامد (قهرمانی یا بردن رقیب اصلی) برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟	۱/۲۵
۱۷	نمرات ریاضی یک کلاس به قرار مقابل است: ۱۹, ۱۱, ۱۷, ۱۴, ۱۵, ۱۷, ۲۰, ۱۳, ۱۸, ۱۶ میانه و انحراف معیار را برای این جامعه آماری به دست آورید.	۱/۵
	جمع نمره	۲۰

آزمون

۲۲۱

خرداد ۱۴۰۲

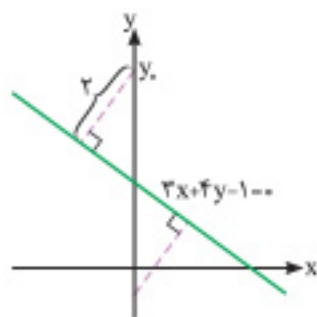
پاسخ نامه



پاسخ نامه کليدي



سؤال	گزينه	سؤال	گزينه	سؤال	گزينه	سؤال	گزينه	سؤال	گزينه	سؤال	گزينه
۱	۱	۴۰	۳	۷۹	۲	۱۱۸	۲	۱۵۷	۲	۱۹۶	۲
۲	۴	۴۱	۳	۸۰	۲	۱۱۹	۴	۱۵۸	۲	۱۹۷	۱
۳	۱	۴۲	۲	۸۱	۴	۱۲۰	۲	۱۵۹	۱	۱۹۸	۲
۴	۲	۴۳	۴	۸۲	۱	۱۲۱	۴	۱۶۰	۴	۱۹۹	۴
۵	۱	۴۴	۳	۸۳	۱	۱۲۲	۲	۱۶۱	۲	۲۰۰	۲
۶	۳	۴۵	۱	۸۴	۱	۱۲۳	۱	۱۶۲	۳	۲۰۱	۱
۷	۳	۴۶	۲	۸۵	۳	۱۲۴	۴	۱۶۳	۴	۲۰۲	۴
۸	۲	۴۷	۲	۸۶	۱	۱۲۵	۱	۱۶۴	۱	۲۰۳	۴
۹	۳	۴۸	۴	۸۷	۱	۱۲۶	۲	۱۶۵	۲	۲۰۴	۱
۱۰	۱	۴۹	۱	۸۸	۳	۱۲۷	۱	۱۶۶	۴	۲۰۵	۴
۱۱	۱	۵۰	۱	۸۹	۱	۱۲۸	۲	۱۶۷	۱	۲۰۶	۴
۱۲	۴	۵۱	۲	۹۰	۴	۱۲۹	۴	۱۶۸	۱	۲۰۷	۴
۱۳	۲	۵۲	۴	۹۱	۴	۱۳۰	۲	۱۶۹	۲	۲۰۸	۴
۱۴	۳	۵۳	۴	۹۲	۱	۱۳۱	۱	۱۷۰	۳	۲۰۹	۴
۱۵	۴	۵۴	۱	۹۳	۴	۱۳۲	۳	۱۷۱	۲	۲۱۰	۴
۱۶	۲	۵۵	۴	۹۴	۱	۱۳۳	۲	۱۷۲	۱	۲۱۱	۴
۱۷	۳	۵۶	۴	۹۵	۲	۱۳۴	۱	۱۷۳	۱	۲۱۲	۱
۱۸	۱	۵۷	۲	۹۶	۲	۱۳۵	۱	۱۷۴	۳	۲۱۳	۴
۱۹	۳	۵۸	۱	۹۷	۳	۱۳۶	۲	۱۷۵	۴	۲۱۴	۴
۲۰	۳	۵۹	۴	۹۸	۲	۱۳۷	۲	۱۷۶	۳	۲۱۵	۱
۲۱	۲	۶۰	۱	۹۹	۱	۱۳۸	۱	۱۷۷	۲	۲۱۶	۲
۲۲	۲	۶۱	۲	۱۰۰	۳	۱۳۹	۳	۱۷۸	۳	۲۱۷	۲
۲۳	۱	۶۲	۴	۱۰۱	۲	۱۴۰	۴	۱۷۹	۲	۲۱۸	۴
۲۴	۳	۶۳	۲	۱۰۲	۱	۱۴۱	۴	۱۸۰	۲	۲۱۹	۴
۲۵	۱	۶۴	۴	۱۰۳	۱	۱۴۲	۴	۱۸۱	۲	۲۲۰	۲
۲۶	۴	۶۵	۱	۱۰۴	۴	۱۴۳	۳	۱۸۲	۳	۲۲۱	۴
۲۷	۲	۶۶	۱	۱۰۵	۱	۱۴۴	۲	۱۸۳	۱	۲۲۲	۱
۲۸	۴	۶۷	۲	۱۰۶	۲	۱۴۵	۳	۱۸۴	۳	۲۲۳	۴
۲۹	۴	۶۸	۴	۱۰۷	۳	۱۴۶	۳	۱۸۵	۳	۲۲۴	۴
۳۰	۳	۶۹	۲	۱۰۸	۴	۱۴۷	۴	۱۸۶	۳	۲۲۵	۲
۳۱	۳	۷۰	۱	۱۰۹	۲	۱۴۸	۴	۱۸۷	۳	۲۲۶	۴
۳۲	۳	۷۱	۴	۱۱۰	۲	۱۴۹	۴	۱۸۸	۴	۲۲۷	۴
۳۳	۳	۷۲	۴	۱۱۱	۲	۱۵۰	۳	۱۸۹	۴	۲۲۸	۴
۳۴	۲	۷۳	۴	۱۱۲	۲	۱۵۱	۴	۱۹۰	۳	۲۲۹	۱
۳۵	۲	۷۴	۴	۱۱۳	۲	۱۵۲	۲	۱۹۱	۲	۲۳۰	۴
۳۶	۳	۷۵	۱	۱۱۴	۴	۱۵۳	۲	۱۹۲	۲	۲۳۱	۴
۳۷	۲	۷۶	۴	۱۱۵	۴	۱۵۴	۱	۱۹۳	۲	۲۳۲	۴
۳۸	۴	۷۷	۴	۱۱۶	۳	۱۵۵	۲	۱۹۴	۱	۲۳۳	۴
۳۹	۴	۷۸	۴	۱۱۷	۱	۱۵۶	۴	۱۹۵	۳	۲۳۴	۴



گزینه ۲

روش اول: فرض می‌کنیم عرض از مبدأ خط مورد نظر سؤال برابر y_0 است. پس مطابق شکل، فاصله نقطه $(0, y_0)$ تا خط $3x + 4y - 1 = 0$ را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$\frac{|3x_0 + 4y_0 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|3(0) + 4y_0 - 1|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow |4y_0 - 1| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 4y_0 - 1 = 10 \Rightarrow y_0 = \frac{11}{4} = 2.75 \\ 4y_0 - 1 = -10 \Rightarrow y_0 = \frac{-9}{4} = -2.25 \end{cases}$$

روش دوم: معادله خط مورد نظر را که موازی با خط $3x + 4y - 1 = 0$ است، به صورت $3x + 4y + c = 0$ در نظر می‌گیریم. فاصله این دو خط از یکدیگر برابر ۲ است:

$$\frac{|c - (-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow |c + 1| = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 9 \Rightarrow 3x + 4y + 9 = 0 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{9}{4} \\ c = -11 \Rightarrow 3x + 4y - 11 = 0 \xrightarrow{x=0} y = \frac{11}{4} = 2.75 \end{cases}$$

گزینه ۳: دو خط موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها با هم برابرند.

$$\frac{1}{3} = \frac{m}{m+2} \Rightarrow m+2 = 3m \Rightarrow m = 1$$

اگر مساحت مربع ۱۰ است، پس طول ضلع آن یا فاصله دو خط موازی برابر $\sqrt{10}$ است.

$$\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 2x - 6y - k = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ x - 3y - \frac{k}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-\frac{k}{2} + 4|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \frac{|-\frac{k}{2} + 4|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Rightarrow |-\frac{k}{2} + 4| = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{k}{2} + 4 = 10 \Rightarrow k = -12 \\ -\frac{k}{2} + 4 = -10 \Rightarrow k = 28 \end{cases}$$

گزینه ۲

راهبرد: برای یافتن مساحت مثلثی با رئوس $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ می‌توان از روش زیر استفاده نمود:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C)]$$

تذکره: ۱) ترتیب چیدن نقاط در فرمول بالا اهمیتی ندارد (برای شکل‌های دارای ۳ رأس)، فقط اولین نقطه در مرتبه آخر باید تکرار شود. ۲) در صورت منفی شدن جواب S ، مساحت برابر قدر مطلق آن است.

اکنون معادله AC را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m_{AC}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -2(x + 1) \\ \Rightarrow y = -2x \Rightarrow y + 2x = 0$$

فاصله نقطه B از خط $y + 2x = 0$ همان ارتفاع BH است.

$$BH = \frac{|y_0 + 2x_0|}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{|0 + 2(3)|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

گزینه ۳: معادله هر دو خط را به سمت چپ مساوی انتقال می‌دهیم:

$$\begin{cases} \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 & 1 \\ y - \sqrt{3}x - 2 = 0 & 2 \end{cases}$$

با تقسیم ضابطه شماره ۱ بر $\sqrt{3}$ ضرایب x و y خطوط ۱ و ۲ را یکسان می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{3}y - 3x + 6}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow y - \frac{3}{\sqrt{3}}x + \frac{6}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\Rightarrow y - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$$

فاصله دو خط را از یکدیگر می‌یابیم:

$$d = \frac{|2\sqrt{3} - (-2)|}{\sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{2} = \sqrt{3} + 1$$

گزینه ۳: فاصله دو ضلع موازی مربع، برابر طول ضلع مربع است.

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0 \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

با ضرب ۲- در معادله دوم، ضرایب x و y را در دو ضابطه یکسان می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0 \\ 2x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

حال طول ضلع مربع را به کمک فاصله دو خط می‌یابیم:

$$\text{طول ضلع} = \frac{|-3 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

برای یافتن مساحت مربع کافی است اندازه ضلع را به توان ۲ برسانیم:

$$S = \left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

گزینه ۲

روش اول: نقطه $M(x, x-1)$ را روی خط $y = x - 1$ در نظر می‌گیریم و فاصله آن را از خط $2x - 3y - 5 = 0$ می‌یابیم که برابر $\sqrt{13}$ است، یعنی:

$$MH = \frac{|2x - 3(x-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-x - 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |x + 2| = 13 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 13 \Rightarrow x = 11 \\ x + 2 = -13 \Rightarrow x = -15 \end{cases}$$

روش دوم: معادله خطی موازی خط $2x - 3y - 5 = 0$ را مانند $2x - 3y + c = 0$ فرض می‌کنیم که فاصله این دو خط برابر $\sqrt{13}$ باشد.

$$\frac{|c - (-5)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow |c + 5| = 13 \Rightarrow \begin{cases} c = 8 \\ c = -18 \end{cases}$$

معادلات خط را بر اساس c ‌های پیدا شده می‌نویسیم:

$$2x - 3y + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 8 = 0 \\ 2x - 3y - 18 = 0 \end{cases}$$

حال این خطوط را با $y = x - 1$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 10 \end{cases}, \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x - 3y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = -16 \end{cases}$$



۵۱. گزینه ۲

• روش اول: معادله $ax^2 + b|x| + c = 0$ زمانی چهار ریشه دارد که $\Delta > 0$.

$P > 0$ و $S > 0$ باشند: پس در معادله $x^2 - 4|x| - a = 0$ داریم:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(1)(-a) > 0 \Rightarrow 16 + 4a > 0 \Rightarrow a > -4$$

$$2) P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0$$

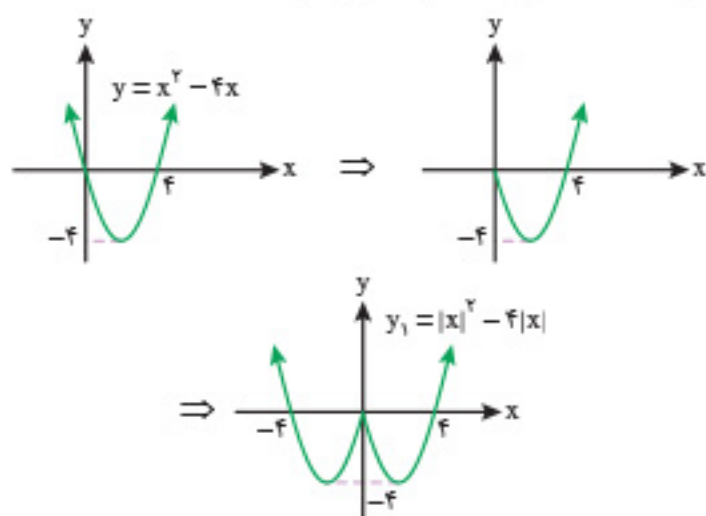
$$3) S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{-4}{1} > 0 \Rightarrow 4 > 0$$

بدیهی $4 > 0$ اشتراک مجموعه جواب‌های بالا $-4 < a < 0$ است.

• روش دوم: با استفاده از رسم: $y_1 = x^2 - 4|x| = |x|^2 - 4|x|$

$$y_2 = a$$

برای رسم y_1 ابتدا تابع $y = x^2 - 4x$ را رسم می‌کنیم. سپس آن قسمت از نمودار را که در سمت چپ محور y ها قرار دارد، حذف و سپس باقی‌مانده نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.



برای این که خط افقی $y_2 = a$ با y_1 در چهار نقطه برخورد داشته باشد، باید $-4 < a < 0$ باشد.

۵۲. گزینه ۳ اگر در این معادله $x^2 + 4x + 3 = A$ فرض کنیم، داریم:

$$(x^2 + 4x + 3)^2 = (x^2 + 4x + 3) + 2 \Rightarrow A^2 = A + 2$$

$$\Rightarrow A^2 - A - 2 = 0 \Rightarrow (A - 2)(A + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \\ \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه دارد} \\ x^2 + 4x + 3 = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \\ \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

۵۳. گزینه ۳ $x^2 - 2x$ را A فرض می‌کنیم:

$$(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2 \Rightarrow A^2 - A = 2$$

$$\Rightarrow A^2 - A - 2 = 0 \Rightarrow (A - 2)(A + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

حال به جای A مقدار $x^2 - 2x$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

بنابراین این معادله دو ریشه دارد.

$$x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین این معادله یک ریشه حقیقی مضاعف دارد.

در مجموع، معادله دارای سه ریشه حقیقی متمایز است.

۵۴. گزینه ۱ x^5 را t فرض می‌کنیم.

$$(m^2 + 2m + 3)t^2 + 4t - 9 = 0$$

۴۶. گزینه ۲ در این معادله، $x^{\frac{1}{2}} = A$ فرض می‌کنیم: بنابراین:

$$2\sqrt{x^2} + 7\sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow 2(\sqrt{x})^2 + 7(\sqrt{x}) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2A^2 + 7A - 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(2A + 8)(2A - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ A = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -4 \Rightarrow x = (-4)^2 = 16 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

معادله دو ریشه دارد.

۴۷. گزینه ۲ ابتدا به کمک اتحاد فرعی $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

رابطه $(x + \frac{1}{x})^2 - (x - \frac{1}{x})^2 = 4$ را به دست می‌آوریم و به جای

$(x - \frac{1}{x})^2$ حاصل $(x + \frac{1}{x})^2 - 4$ را قرار می‌دهیم:

$$(x - \frac{1}{x})^2 + 3(x + \frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 - 4 + 3(x + \frac{1}{x}) = 0$$

حال به جای $(x + \frac{1}{x})$ مقدار A را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A^2 + 3A - 4 = 0 \Rightarrow (A - 1)(A + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \\ A = -4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -4 \end{cases}$$

در هر دو معادله طرفین را در x ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3 \\ x + \frac{1}{x} = -4 \Rightarrow x^2 + 1 = -4x \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 12 \end{cases}$$

در مجموع معادله دارای دو ریشه است.

۴۸. گزینه ۳ اگر معادله دارای دو ریشه مختلف‌العلامت باشد، باید

$P < 0$ باشد.

m	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$m - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$m - 2$	$-$	0	$+$	$+$
P	$+$	$+$	$-$	$+$

هرگاه $P < 0$ باشد، Δ خودبه‌خود مثبت می‌شود و نیازی به بررسی آن نیست.

مجموعه جواب قابل قبول $2 < m < 3$ است.

۴۹. گزینه ۱ اگر معادله درجه دومی فاقد ریشه حقیقی باشد، باید دلتای

آن منفی باشد.

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (m + 1)^2 - 4(2)(\frac{1}{4}m + 2) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 < 0$$

$$\Rightarrow (m - 5)(m + 3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$

۵۰. گزینه ۱ مطابق آنچه در درسنامه گفته شد برای این که معادله

دوم‌جذوری گفته‌شده، چهار ریشه داشته باشد، باید:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(m)(m - 3) > 0$$

$$\Rightarrow -4m^2 + 12m + 16 > 0 \xrightarrow{+(-4)} m^2 - 3m - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -1 < m < 4$$

$$2) P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m - 3}{m} > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 3$$

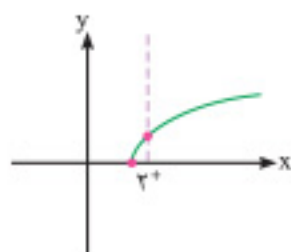
$$3) S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{-4}{m} > 0 \Rightarrow \frac{4}{m} > 0 \Rightarrow m > 0$$

با اشتراک جواب‌های بالا به $3 < m < 4$ می‌رسیم، در نتیجه $a = 3$ ، $b = 4$

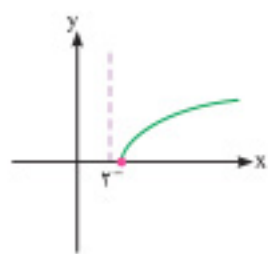
و $b - a = 1$ می‌شود.

تذکره: وجود حد تابع در یک نقطه، هیچ ارتباطی به وجود مقدار خود تابع در آن نقطه ندارد.

مقدار $f(1)$ می‌تواند در هر عرضی قرار بگیرد و حد تابع در $x=1$ (مستقل از مقدار تابع در یک) برابر یک است.



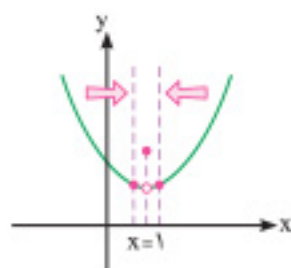
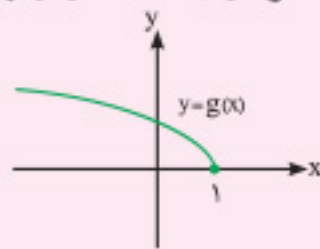
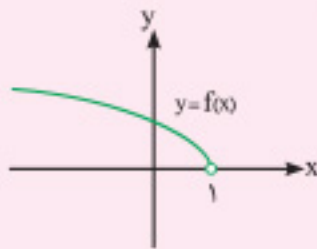
۷۹۴. گزینه ۲ با توجه به این که دامنه تابع $x \geq 2$ می‌باشد، مقدار حد چپ تابع در $x=2$ وجود ندارد و حد راست تابع در $x=2$ برابر صفر است. (مطابق شکل)



بنابراین می‌توان گفت حد راست تابع در $x=2$ برابر صفر است ولی تابع در $x=2$ حد ندارد.

۷۹۵. گزینه ۴ هر دو تابع، در $x=1$ حد چپ دارند ولی حد راست ندارند، بنابراین هیچ کدام در $x=1$ حد ندارند.

تذکره: وجود مقدار تابع در یک نقطه، هیچ ربطی به وجود حد تابع در آن نقطه ندارد و برعکس.



۷۹۶. گزینه ۳ نمودارهای سه گزینه اول، نشان از حددار بودن توابع آن‌ها در $x=1$ دارد. در گزینه ۱ مقدار تابع با حد تابع در $x=1$ برابر است.

در گزینه ۲ تابع در $x=1$ حد دارد ولی مقدار تابع در $x=1$ موجود نیست. در گزینه ۳ حد تابع و مقدار تابع در $x=1$ موجود هستند ولی این دو با هم برابر نیستند.

۷۹۷. گزینه ۱ اول حد عبارت $-x$ را در 1^- می‌یابیم:

روش اول:

$$x < 1 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$$

روش دوم:

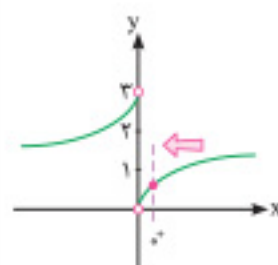
فرمول ممنوع: برای x ، زمانی که از سمت چپ به یک میل می‌کند مقداری را به عنوان نماینده، در نظر می‌گیریم. مثلاً $x = 0.99$ است. حال مقدار $-x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$-x = -0.99$$

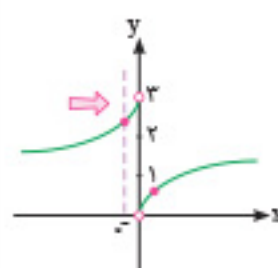
می‌بینیم که -0.99 عددی است که از -1 کمی بیشتر است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$$

۷۸۹. گزینه ۳ در گزینه‌های ۱ و ۳ تابع در همسایگی عدد ۲ تعریف نشده است و حد ندارد ولی در گزینه ۴ وقتی $x \rightarrow 3$ حد تابع برابر ۲ است ولی در گزینه ۳ وقتی $x \rightarrow 2$ حد برابر ۳ است.

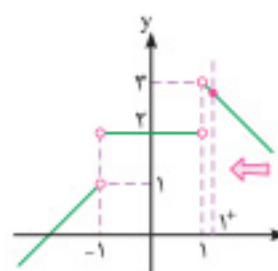


۷۹۰. گزینه ۳ اگر از سمت راست خیلی به $x=0$ نزدیک شویم، مقدار تابع خیلی به صفر نزدیک می‌شود. ($\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$)



اگر از سمت چپ، خیلی به $x=0$ نزدیک شویم، مقدار تابع خیلی به ۳ نزدیک می‌شود. ($\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$) در نتیجه مجموع این دو حد برابر می‌شود با:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 3 = 3$$



۷۹۱. گزینه ۳ اگر از سمت راست، خیلی به $x=1$ نزدیک شویم، تابع خیلی به $y=3$ نزدیک می‌شود و داریم:

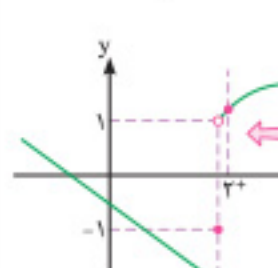
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

اگر از سمت چپ، خیلی به $x=-1$ نزدیک شویم، تابع خیلی به $y=1$ نزدیک می‌شود و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1$$

در نتیجه تفاضل این دو حد برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$



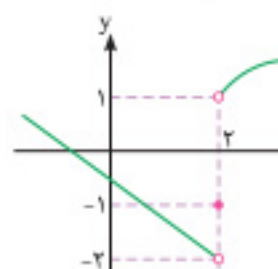
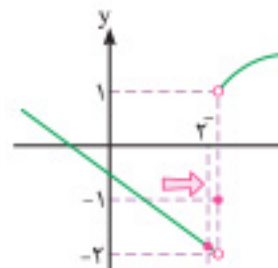
۷۹۲. گزینه ۴ به ترتیب از راست و چپ به $x=2$ نزدیک می‌شویم تا حد راست و چپ تابع در $x=2$ مشخص شود.

اگر از سمت راست بسیار به $x=2$ نزدیک شویم، مقدار تابع خیلی به $y=1$ نزدیک می‌شود، پس می‌توان گفت:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

اگر از سمت چپ بسیار به $x=2$ نزدیک شویم، مقدار تابع خیلی به $y=-2$ نزدیک می‌شود، پس می‌توان گفت:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2$$



دقیقاً در خود $x=2$ (اصطلاحاً به آن ۲ مطلق می‌گویند) مقدار تابع دقیقاً $y=-1$ است، پس $f(2) = -1$ است.

این موضوع ربطی به حد ندارد و قبلاً توی فصل تابع خونديش: بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2) = 1 + (-2) + (-1) = -2$$

فرمول نامه



فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

هندسه تحلیلی

به دست آوردن شیب خط

۱ اگر دو نقطه متمایز $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از خط را داشته باشیم:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$

۲ اگر زاویه خط با جهت مثبت محور x ها (θ) را داشته باشیم:

$$m = \tan \theta ; \theta \in (0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$$

۳ اگر معادله خط را داشته باشیم:

الف) در فرم $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$): $m = a$

$$m = \frac{-a}{b} \quad (b \neq 0)$$

ب) در فرم $ax + by + c = 0$:

• دو خط با شیب های m و m'

• موازی اند، هرگاه:

• بر هم عمودند، هرگاه:

• نوشتن معادله خط

با داشتن شیب و یک نقطه مانند $A(x_0, y_0)$ روی خط:

• با استفاده از فرمول مقابل: $y - y_0 = m(x - x_0)$

• جای گذاری مختصات نقطه و شیب در معادله $y = ax + b$: سپس

یافتن b و نوشتن معادله

• معادله خطوط موازی محور x ها و y ها

• موازی محور x ها: $y = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

• موازی محور y ها: $x = b$ ($b \in \mathbb{R}$)

• فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

• فاصله هر نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ از مبدأ: $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$

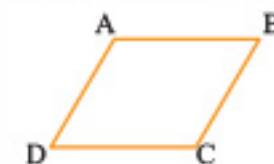
• مختصات نقطه وسط پاره خط AB

$$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$$

• قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به مبدأ: $(-x, -y)$

• در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، اگر A و C رئوس مقابل به هم و B و D مقابل

به هم باشند:



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

• فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• معادله خط موازی با دو خط $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ که دقیقاً

در وسط دو خط قرار دارد:

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

• روش تغییر متغیر: برخی از معادلات، با یک تغییر متغیر (مجهول معاون) تبدیل به معادله درجه دوم می شوند و با حل معادله درجه دوم، جواب های معادله اولیه به دست می آید.

• در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$):

$$S = \frac{-b}{a} : \text{مجموع جواب ها}, P = \frac{c}{a} : \text{حاصل ضرب جواب ها}$$

• تعیین تعداد و علامت جواب های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، با استفاده از

علامت Δ ، S و P : $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد.} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \text{معادله یک جواب مثبت دارد.} \\ \frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow \text{معادله یک جواب منفی دارد.} \end{cases} \\ \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} P > 0 \Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب مثبت دارد.} \\ S < 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب منفی دارد.} \end{cases} \\ P < 0 \Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب مختلف علامت دارد.} \\ S < 0 \Rightarrow \text{معادله دو جواب مختلف علامت دارد.} \end{cases} \end{cases}$$

• مهم ترین روابط بین جواب های معادله درجه دوم

$$\textcircled{1} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \quad \textcircled{2} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P} \quad \textcircled{4} |\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\textcircled{5} \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad (\alpha, \beta \geq 0)$$

• سهمی (نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$)

• صفرهای تابع f : محل برخورد نمودار تابع f با محور x هاست و از حل معادله $f(x) = 0$ به دست می آید.

• نوشتن ضابطه سهمی:

۱ با داشتن مختصات رأس (m, h) و یک نقطه: $y = a(x - m)^2 + h$

۲ با داشتن صفرهای سهمی $(\{x_1, x_2\})$ و یک نقطه دیگر:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

۳ با داشتن سه نقطه: جای گذاری نقاط در ضابطه سهمی، حل دستگاه

سه معادله سه مجهول، یافتن ضرایب و نوشتن معادله

• ماکزیمم و مینیمم سهمی

• اگر $a > 0$ ، تابع در نقطه رأس $(x_S = \frac{-b}{2a})$ مینیمم دارد و کمترین

مقدار آن برابر $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

• اگر $a < 0$ ، تابع در نقطه رأس $(x_S = \frac{-b}{2a})$ ماکزیمم دارد و بیشترین

مقدار آن برابر $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

• تعیین علامت ضرایب a ، b و c به کمک نمودار

علامت a : اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین

باشد، $a < 0$ است.